الوحدة 3 الدوال المثلثية

السابق

لقد درست الدوال الأسية واللوغاريتمية، وهما نوعان من الدوال المتسامية.

الحالي

ستتعلم ما يلي:

- استخدام الدوال المثلثية لحل المثلثات قائمة الزاوية.
- إيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية.
- تمثيل الدوال المثلثية والدوال المثلثيةالعكسيةبيانيًا

لماذا؟ ▲

تحديد المواقع عبر الأقمار الصناعية يعمل نظام الملاحة عبر الأقمار الصناعية من خلال استقبال إشارات من الأقمار الصناعية الموجودة في المدار، وتحديد المسافة لكل من الأقمار الصناعية. ومن ثمَّ استخدام حساب المثلثات لتحديد الموقع على سطح الأرض. تُستخدَم هذه التقنيات أيضًا في أثناء تحديد مواقع السيارات والطائرات، والسفن والمركبات الفضائية.

القراءة المسبقة استخدم إستراتيجية القراءة المسبقة للمراجعة لتوقع هدفين أو ثلاثة من أهداف الوحدة 3.

راجع عمل الطلاب.

شجّع الطلاب على بدء دراستهم للوحدة بقراءة كل درس مسبقًا. وينبغي أن يفكروا في معلوماتهم الأساسية ويقدّموا توقعاتهم بشأن المحتوى. امنح المجموعات وقتًا لمناقشة ما قرؤوه وطرح الأسئلة. وركز على عناصر النص، مثل عناوين الأقسام ومربعات المفهوم الأساسي وملخص المفهوم.

مشروع الوحدة

الملاحة عبر الأقمار الصناعية

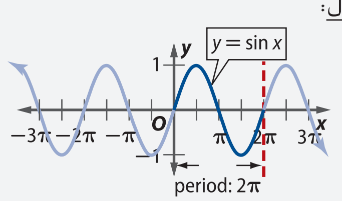
استخدم الدوال المثلثية في استكشاف أنظمة تحديد المواقع العالمية.

- ضع نقطة على خريطة لتمثيل موقع جهاز استقبال نظام تحديد المواقع العالمي. اطلب من المجموعات تحديد ثلاثة مواقع مختلفة لتمثيل نقاط توجد أسفل مواقع أقمار الاتصالات الصناعية في المدار مباشرةً. يمكن أن يستخدم الطلاب بوصلة لرسم الأقواس عبر مواقع جهاز استقبال نظام تحديد المواقع العالمي، مستخدمين مواقع الأقمار الصناعية على أنها نقاط المركز. اشرح لهم أن موضع تقاطع الأقواس يحدد بدقة موقع جهاز استقبال نظام تحديد المواقع العالمي. ودعهم يحددون بعدئذٍ المسافة الأفقية (بالأميال) بين أجهزة الاستقبال وكل قمر صناعي.
- تدور الأقمار الصناعية حول الأرض على ارتفاع 12,000 ميل. اطلب من الطلاب رسم مثلث قائم يمثل المسافة، والاتجاه والزاوية بين كل قمر صناعي وجهاز استقبال نظام تحديد المواقع العالمي. وسيكون وتر الزاوية القائمة في كل مثلث هو المسار الذي تسلكه إشارة اللاسلكي من القمر الصناعي إلى جهاز استقبال نظام تحديد المواقع العالمي. اطلب من المجموعات إيجاد أطوال الأوتار وزوايا الارتفاع من جهاز استقبال نظام تحديد المواقع العالمي إلى الأقمار الصناعية.

المفردات الأساسية قدم المفردات الأساسية في الوحدة متبعًا النظام التالي.

عرّف: فترة دالة منحنى الجيب هي المسافة بين أي مجموعتين من نقاط التكرار في الدالة.

مثال:



اسأل: كيف تختلف فترة $y = \sin 3x$ عن فترة $y = \sin x$؟

التمثيل البياني مضغوط حسب العامل 3.

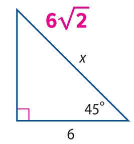
الاستعداد للوحدة

أجب عن أسئلة التدريب السريع أدناه

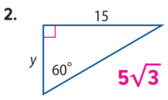
تحقق سريع

أوجد القيمة المجهولة في كل شكل مما يلي. (المهارات المطلوبة)

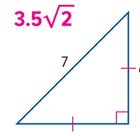
1. $6\sqrt{2}$



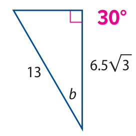
2. $5\sqrt{3}$



3. $3.5\sqrt{2}$



4. 30°



حدد ما إذا كان كل مما يلي يمكن أن يمثل قياس زوايا المثلث الثلاث. اكتب نعم أو لا. (المهارات المطلوبة)

5. 4, 8, 12 **لا**

6. 12, 15, 18 **نعم**

7. **الجبر** طول ضلع زاوية المثلث x, x + 17, 25. إذا كان طول الضلع الأطول 25، فما قيمة x التي تجعل المثلث قائم الزاوية؟ (المهارات المطلوبة) **7**

10. $x = -4, x = 2$ **11.** $x = 3, x = 5, y = 0$

أوجد المعادلة لأي خط مقارب رأسي أو أفقي. (الدرس 2-5)

8. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 8}$ $y = 1$

9. $h(x) = \frac{x^3 - 27}{x + 5}$ $x = -5$

10. $f(x) = \frac{x(x-1)^2}{(x-2)(x+4)}$

11. $g(x) = \frac{x + 5}{(x-3)(x-5)}$

12. $h(x) = \frac{x^2 + x - 20}{x + 5}$ **لا يوجد خط مقارب**

13. $f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 12}{2x - 3}$ **لا يوجد خط مقارب**

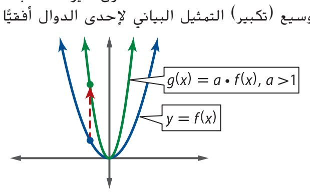
المفردات الجديدة

الدوال المثلثية	(trignometric functions)
جيب الزاوية	(sine)
جيب التمام	(cosine)
ظل الزاوية	(tangent)
قاطع التمام	(cosecant)
القاطع	(secant)
ظل التمام	(cotangent)
دالة المقلوب	(reciprocal function)
معكوس الجيب	(inverse sine)
معكوس جيب التمام	(inverse cosine)
معكوس ظل الزاوية	(inverse tangent)
راديان	(radian)
زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء	(coterminal angles)
زاوية إسناد	(reference angle)
دائرة الوحدة	(unit circle)
دالة دائرية	(circular function)
دورة	(period)
منحنى الجيب	(sinusoid)
السعة	(amplitude)
التكرار	(frequency)
إزاحة الطور	(phase shift)
قانون الجيب	(Law of Sines)
قانون جيب التمام	(Law of Cosines)

مراجعة المفردات

الانعكاس (reflection) الصفحة 48 صورة طبق الأصل من التمثيل البياني لدالة بالنسبة لأحد الخطوط المحددة

تغيير الأبعاد (dilation) الصفحة 49 تحوُّل غير مُتصلِّب له تأثير ضغط (تقلص) أو توسيع (تكبير) التمثيل البياني لإحدى الدوال أفقيًا أو رأسيًا



Vertical dilation

137

الأسئلة الأساسية

- لماذا يكون التمثيل البياني مفيدًا؟ الإجابة النموذجية: التمثيلات البيانية مفيدة لأنها قد تساعدك في تمثيل العلاقات بين الكميات في الحياة اليومية. ويمكن استخدامها أيضًا في تقدير قيم الدالة.
- فيمَ تفيد التمثيلات البيانية للدوال المثلثية؟ الإجابة النموذجية: يمكن استخدامها في تمثيل مواقف من الحياة اليومية تنطوي على سلوك مرحلي، مثل المد والجزر والحركة التوافقية. ويمكن استخدامها في وضع التوقعات.

الوحدة 3

الدوال المثلثية

مخطط الوحدة

	الدرس 1-3 وتيرة التقدم: يومان	الدرس 2-3 وتيرة التقدم: 1.5 يوم	الدرس 3-3 وتيرة التقدم: 1.5 يوم	الاستكشاف 4-3 وتيرة التقدم: نصف يوم	
	التقويم التشخيصي تدريب سريع				
العنوان	**حساب المثلث قائم الزاوية**	**الدرجات والراديان**	**الدوال المثلثية على دائرة الوحدة**	**مختبر تقنية الرسم البياني: تمثيل دالة جيب الزاوية بيانيًا باستخدام المعادلات الوسيطية**	
الأهداف	▪ إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا الحادة في المثلثات قائمة الزاوية. ▪ حل المثلثات القائمة الزاوية.	▪ تحويل مقاييس الزوايا بالدرجات إلى مقاييس راديان، والعكس بالعكس. ▪ استخدام قياس الزاوية لحل مسائل من الحياة اليومية.	▪ إيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية. ▪ إيجاد قيم الدوال المثلثية باستخدام دائرة الوحدة.	▪ استخدام حاسبة التمثيل البياني والمعادلات الوسيطية لتمثيل دالة جيب الزاوية ومعكوسها بيانيًا.	
المفردات الأساسية	الدوال المثلثية، دالة المعكوس الضربي، دالة مثلثية عكسية، زوايا الارتفاع والانخفاض	الرأس، ضلع الابتداء، ضلع الانتهاء، وضع قياسي، راديان، زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء، سرعة خطية، سرعة زاوية، قطاع	زاوية ربعية، زاوية إسناد، دائرة وحدة، دالة دائرية، دالة دورية، فترة		
				التقويم التكويني اختبار نصف الوحدة	

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indb 1 12/15/2016 11:39:21 PM

الفترات الزمنية	تقديم الدروس	المراجعة والتقويم	الإجمالي
الجدول الزمني المُقترح			
45 دقيقة	14 يومًا	يومان	16 يومًا
90 دقيقة	7 أيام	يوم	8 أيام

الدرس 4-3 وتيرة التقدم: يومان	التوسع 4-3 وتيرة التقدم: نصف يوم	الدرس 5-3 وتيرة التقدم: يومان	الدرس 6-3 وتيرة التقدم: يومان	الدرس 7-3 وتيرة التقدم: يومان
التمثيل البياني لدوال الـ Sine و الـ Cosine	مختبر تقنية التمثيل البياني: مجموع منحنيات الـ Sine وفروقها	التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى	الدوال المثلثية العكسية	قانون الـ Sine وقانون الـ Cosine
■ تمثيل تحويلات دوال الـ Sine و الـ Cosine. ■ استخدام دوال منحنى الـ Sine في حل المسائل.	■ تمثيل فترات المجموع وفروق منحنيات الـ Sine بيانيًّا واختبارها.	■ تمثيل دوال الـ tan ودوال المعكوس الضربي المثلثية بيانيًّا. ■ تمثيل الدوال المثلثية المتضائلة بيانيًّا.	■ إيجاد قيمة الدوال المثلثية العكسية وتمثيلها بيانيًّا. ■ إيجاد تركيبات الدوال للدوال المثلثية.	■ حل المثلثات المائلة باستخدام قانون الـ Sine وقانون الـ Cosine. ■ إيجاد مساحة المثلثات المائلة.
منحنى الـ Sine، سعة، تكرار، إزاحة الطور، إزاحة رأسية، خط متوسط		دالة مثلثية متضائلة، عامل التضاؤل، تذبذب متضائل، موجه متضائلة، حركة توافقية متضائلة	دالة قوس الـ Sine، دالة قوس الـ Cosine، دالة قوس الـ tan	مثلث مائل، قانون الـ Sine، حالة مبهمة، قانون الـ Cosine، صيغة هيرون

التقويم الختامي
دليل الدراسة والمراجعة
تمرين على الاختبار

التقويم

التشخيص	سبل الحل
بداية الوحدة 3	
الاستعداد للوحدة 3	الاستجابة للتدخل التقويمي **كتاب المعلم**
بداية كل درس	
السابق. الحالي. لماذا؟ **كتاب الطالب** شرائح الاختبار السريع – 5 دقائق	

التقويم التشخيصي

أثناء/بعد كل درس	
تمرين موجه **كتاب الطالب**، كل مثال مسائل مهارات التفكير العليا **كتاب الطالب** مراجعة شاملة **كتاب الطالب** أمثلة إضافية **كتاب المعلم** انتبه! **كتاب المعلّم** الخطوة 4. التقويم **كتاب المعلم**	التدريس المتمايز **كتاب المعلم**
نصف الوحدة	
اختبار نصف الوحدة **كتاب الطالب**	التدريس المتمايز **كتاب المعلم**
اختبار ما قبل الوحدة	
دليل الدراسة والمراجعة للوحدة **كتاب الطالب** تمرين على الاختبار **كتاب الطالب** تمرين على الاختبار المعياري **كتاب الطالب**	

التقويم التكويني

التقويم الختامي

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 3 12/15/2016 11:39:23 PM

التدريس المتمايز

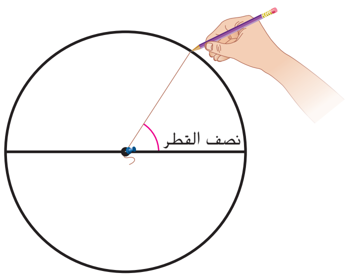
الخيار 1 الوصول إلى مستوى المتعلمين كافة OL AL BL

المتعلمون أصحاب النمط اللفظي/اللغوي اطلب من الطلاب أن يكتبوا فقرة قصيرة عن الدوال المثلثية الست، وتقسيمها إلى قسمين: دوال متصلة ودوال غير متصلة. واطلب من الطلاب أن يصفوا السمات المميزة لكل نوع من هذه الدوال.

المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية اطلب من الطلاب أن يستخدموا شبكة الإنترنت أو المواد المكتبية في التعرف على أساليب الملاحة والبحث. قسّم الصف الدراسي إلى مجموعات واطلب منهم أن يلعبوا لعبة البحث عن الكنز في الحديقة باستخدام اتجاهات البوصلة. قد يكون بعض الطلاب على علم بنشاط مشابه يُسمى رياضة الاسترشاد بالخرائط والبوصلة. على سبيل المثال، "ابدأ عند زاوية المبنى. سر 15 قدمًا باتجاه الجنوب بزاوية 30° شرق. ثم، سر 20 خطوة عندما تصبح الزاوية 40° ..." ويجب أن تجد كل مجموعة مفاجأة في النهاية.

الخيار 2 قريب من المستوى AL

اطلب من الطلاب رسم دائرة وقطر دائرة. باستخدام خيط مُقطع حسب طول نصف قطر الدائرة، اجعل الطلاب يقيسوا قوسًا عند بداية أحد طرفي قطر الدائرة. عند توصيل أطراف القوس بمركز الدائرة باستخدام نصفي القطر، سيكُون هذا القطاع راديان. وليستمر الطلاب في عمل الراديان عبر شبه الدائرة. سيجد الطلاب أن هناك 3 راديانات في شبه الدائرة وأن قياس الراديان يبلغ 57°.



الخيار 3 أعلى من المستوى BL

اطلب من الطلاب استخدام جهاز رصد الحركة للتمثيل البياني لحركة البندول. ينبغي أن يضع الطلاب بعدئذٍ معادلة الحركة من خلال تقدير السعة والدورة، والعوامل الأخرى. وينبغي أن يستخدم الطلاب بعدئذٍ الانحدار المثلثي على حاسبة التمثيل البياني لتحديد المعادلة الفعلية.

الوحدة 3 الدوال المثلثية
التركيز على محتوى الرياضيات

التخطيط الرأسي

قبل الوحدة 3

موضوعات ذات صلة من الهندسة

- التعبير عن قياسات الزوايا بالدرجات.
- إيجاد مساحة المثلثات باستخدام الصيغ.
- استخدام الزوايا لحل مسائل من الحياة اليومية.
- كتابة النسبة المثلثية للزاوية θ في مثلث قائم معين.

الوحدة 3

- إيجاد حل المثلثات القائمة باستخدام الدوال المثلثية والدوال المثلثية العكسية.
- التحويل بين الدرجات والراديان.
- حل مسائل من الحياة اليومية باستخدام الدوال المثلثية.
- التمثيل البياني للدوال المثلثية ومعكوساتها.
- إيجاد حل المثلثات المائلة وإيجاد مساحتها باستخدام قوانين وصيغ متنوعة.

بعد الوحدة 3

التهيئة لحساب التفاضل والتكامل

- تحليل المعدلات المرتبطة.
- دمج الدوال المثلثية في مجموعة من القيم.

معاينة درس تلو الآخر

3-1 حساب المثلثات للمثلثات قائمة الزاوية

يربط حساب المثلثات بين الزوايا ونسب أطوال أضلاع المثلثات القائمة. فبالنسبة للزاوية θ في المثلث القائم، يتم تعريف ست دوال مثلثية.

من المفيد حفظ القيم المثلثية للزوايا 30° و45° و60°.

θ	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\csc\theta$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\sec\theta$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
$\cot\theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

3-2 الدرجات والراديان

يمكن قياس الزاوية بالدرجات أو الراديان. فيوجد 2π راديان في الزاوية 360°. من ثمَّ فإن $1° = \frac{\pi}{180}$ راديان.

للزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء نفس ضلع الابتداء والضلع الطرفي، ولكن قياس الزاويتين مختلف. ويمكن إيجادها بإضافة أو طرح مضاعف عدد صحيح من 360° أو 2π راديان من الزاوية المطلوبة.

في دائرة نصف قطرها r، تتقاطع الزاوية المركزية θ مع قوس طوله s يتم الحصول عليه من الصيغة $s = r\theta$.

السرعة الخطية v لنقطة تتحرك في مسار دائري لنصف القطر r تساوي $v = \frac{s}{t}$، حيث s هو طول القوس.

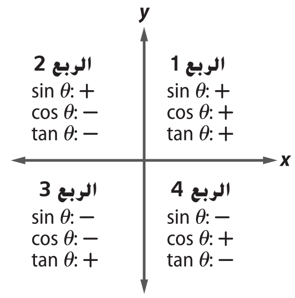
تتحدد السرعة الزاوية لنقطة تتحرك في مسار دائري بقسمة زاوية الدوران (بالراديان) التي يتحرك خلالها الجسم على الزمن المستغرق، ويتم إيجادها من المعادلة $w = \frac{\theta}{t}$.

مساحة قطاع الدائرة تساوي $A = \frac{1}{2}r^2\theta$.

3-3 الدوال المثلثية على دائرة الوحدة

يمكن اتباع الخطوات التالية لإيجاد قيمة الدالة المثلثية لأي زاوية.

1. إيجاد قياس زاوية الإسناد θ'.
2. إيجاد القيمة المثلثية لــ θ'.
3. إيجاد رمز القيمة باستخدام الجدول أدناه.



يمكن كتابة إحداثيات نقطة P على دائرة الوحدة على شكل $P(\cos t, \sin t)$. حيث t هي الزاوية من المحور الموجب x. الدوال المثلثية لــ t هي

$$\sin t = y \qquad \cos t = x \qquad \tan t = \frac{y}{x}, x \neq 0$$
$$\csc t = \frac{1}{y}, y \neq 0 \qquad \sec t = \frac{1}{x}, x \neq 0 \qquad \cot t = \frac{x}{y}, y \neq 0$$

3-4 التمثيل البياني لدوال الــ Sine و الــ Cosine

يمكن تمثيل دوال الزاوية sin والــ Cosine بيانيًا على المستوى الإحداثي. تدور التمثيلات البيانية للدوال بين -1 و 1 عبر فترة مدتها 2π. ويتم تعريف كل تمثيل بياني بمدته وتكراره وسعته.

ويكون الشكل العام لكل دالة هو $y = a\cos(bx + c) + d$ و $y = a\sin(bx + c) + d$. حيث $|a|$ هي السعة، و $\frac{2\pi}{b}$ هي الدورة، و $\frac{b}{2\pi}$ هي التكرار، و $-\frac{c}{|b|}$ هي إزاحة الطور.

للتمثيل البياني لدالة بالشكل $y = a\cos(bx + c) + d$ أو $y = a\sin(bx + c) + d$. يتم التمثيل البياني للكسر الجزئي $y = \sin x$ أو $y = \cos x$. ثم يتم تحديد كيفية تحول المنحنى بفعل الثوابت a، وb، و c، وd.

3-5 التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى

الشكل العام لدالة ظل الزاوية هو $y = a\tan(bx + c) + d$. حيث يؤثر a على الانضغاط أو التمدد الرأسي، وتؤثر b على الدورة، وتنتج c إزاحة الطور. وتنتج d إزاحة رأسية.

دوال الــ Sec و الــ cot و الــ csc هي المعكوس الضربي لدوال الــــ Sine و الــــ Cosine و الــــ Tan.

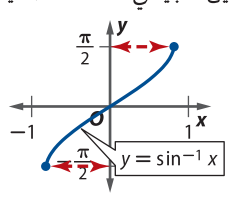
تنتج الدالة المثلثية المتضائلة عند ضرب دالة منحنى الــ Sine للشكل $y = \sin bx$ أو $y = \cos bx$ في دالة أخرى. معروفة باسم عامل التضاؤل.

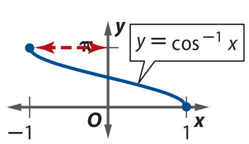
المعادلة العامة المستخدمة للحركة التوافقية المتضائلة هي $y = ke^{-ct}\sin \omega t$ أو $y = ke^{-ct}\cos \omega t$. حيث c هو الثابت المتضائل $c > 0$ و k هو الإزاحة. و t هو الوقت. و ω هي الدورة.

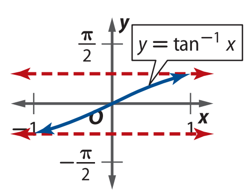
3-6 الدوال المثلثية العكسية

يمكن عمل الدوال المثلثية بحيث تكون واحد لواحد من خلال تقييد نطاق الدالة. مما يسمح بكتابة الدالة العكسية للدالة فوق هذا النطاق المقيد. وبهذا، فالخصائص العكسية للدوال المثلثية تكون مقيدة بقيم معينة لــx.

يمكن إيجاد التمثيل البياني لدالة عكسية من خلال عكس التمثيل البياني للدالة المقيدة في الخط $y = x$.







3-7 قانون الــ Sine وقانون الــ Cosine

يمكن استخدام قانون الــ Sine وقانون الــ Cosine في حل المثلثات المائلة. وتحدد الأضلاع المعلومة (S) والزوايا (A) القانون الذي سيُستخدم. فيمكن استخدام قانون الــ Sine عندما تكون القياسات المعلومة هي AAS أو ASA أو SSA. ويمكن استخدام قانون الــ Cosine عندما تكون القياسات المعلومة هي SSS أو SAS.

عند استخدام قانون الــ Sine في المسألة SSA. فمن المهم التأكد مما إذا لم يكن هناك حل، أو هناك حل واحد أو اثنان.

وإذا كانت أضلاع المثلث المائل الثلاثة معلومة. يمكن استخدام صيغة هيرون في إيجاد مساحة المثلث. وبالنسبة للمثلث المائل المعلوم ضلعاه وإحدى زواياه (SAS)، تكون المساحة هي نصف ناتج ضرب طولي الضلعين Sine الزاوية للزاوية بينهما.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-1 إيجاد قيم الدوال.

الدرس 3-1 إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا الحادة للمثلثات القائمة الزاوية. حل المثلثات القائمة الزاوية.

بعد الدرس 3-1 إيجاد قيمة الدوال المثلثية لأي زاوية. إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- في مثال البالون، ما القيم المعلومة؟ وما القيم المجهولة؟ القيم المعلومة هي: زاوية الخيط مع الأرض، والمسافة بين المتطوعين؛ بينما القيمة المجهولة هي: ارتفاع البالون

1-3 حساب المثلّثات قائمة الزوايا

..السابق

- تمّ إيجاد قيمة الدوال.

..الحالي

1. إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا الحادة للمثلثات القائمة الزاوية.
2. حل المثلثات القائمة الزاوية.

..لماذا؟

- تعد البالونات الكبيرة المملوءة بغاز الهليوم إحدى تقاليد العديد من العروض التي تجري في الأعياد. حيث يستخدم المتطوعون خيوطاً طويلة متصلة بالبالون لتوجيه البالون على طول مسار العرض.

لنفترض أن اثنين من هذه الخيوط متصلان بأحد البالونات من عقدة واحدة، وأن المتطوعين اللذين يمسكان هذه الوصلات يقفان بحيث تكون نهايات الخيوط واقعة على المستوى الرأسي نفسه. إذا كنت تعرف قياس الزاوية التي يصنعها كل خيط مع الأرض والمسافة بين المتطوعين، يمكنك استخدام حساب المثلث القائم الزاوية لإيجاد ارتفاع البالون عن الأرض.

المفردات الجديدة

الدوال المثلثية (trigonometric ratios)
دوال حساب المثلثات (trigonometric functions)
جيب الزاوية (sine)
جيب التمام (cosine)
ظل الزاوية (tangent)
قاطع التمام (cosecant)
القاطع (secant)
ظل التمام (cotangent)
نسبة المقلوب (reciprocal function)
نسبة مثلثية عكسية (inverse trigonometric function)
معكوس الجيب (inverse sine)
معكوس جيب التمام (inverse cosine)
معكوس ظل الزاوية (inverse tangent)
زاوية الارتفاع (angle of elevation)
زاوية الانخفاض (angle of depression)
حل مثلث قائم الزاوية (solve a right triangle)

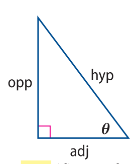
1 قيم الدوال المثلثية

تشير كلمة حساب المثلثات *إلى قياس المثلث*. وسوف تدرس في هذه الوحدة حساب المثلثات من حيث أنها علاقات بين أضلاع وزوايا المثلثات ومن حيث أنها مجموعة من الدوال المحددة في نظام الأعداد الحقيقي. وسوف تدرس في هذا الدرس *حساب المثلثات قائمة الزاوية*

باستخدام قياسي الضلعين الجانبين لمثلث قائم الزاوية وزاوية المرجع θ، يمكننا تشكيل **الدوال المثلثية** التي تحدد ستّ **دوال مثلثية**.

المفهوم الأساسي الدوال المثلثية

افترض أن θ زاوية حادة في مثلث قائم والاختصارات opp, adj, hyp تشير إلى طول الضلع المقابل لـ θ، وطول الضلع المجاور لـ θ، وطول الوتر، على التوالي.



وبالتالي تكون الدوال المثلثية الست لـ θ محددة على النحو الآتي:

sine $(\theta) = \sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$ | **cosecant** $(\theta) = \csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$

cosine $(\theta) = \cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$ | **secant** $(\theta) = \sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$

tangent $(\theta) = \tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$ | **cotangent** $(\theta) = \cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}}$

يطلق على دوال **cosecant**، ودوال **secant**، ودوال **cotangent** **دوال المقلوب** وذلك لأن الدوال الخاصة بها تكون مقلوبًا لنسب **sine** و **cosine** و **tangent** على الترتيب. ولذلك، تعد العبارات التالية صحيحة.

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

من تعاريف نسبة **sine** ودوال **cosine** ونسبة **tangent** ونسبة **cotangent**. يمكنك أيضًا اشتقاق العلاقات الآتية:

ستثبت هذه العلاقات في التمرين 83

$$\tan\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad \text{و} \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

■ اطلب من الطلاب إلقاء نظرة على الرسم التخطيطي للمثلث الأيمن في مربع المفهوم الأساسي. ما الضلع الذي يتطابق مع ارتفاع البالون؟ الضلع المقابل ما الضلع الذي يتطابق مع طول الخيط؟ وتر المثلث

1 قيم النسب المثلثية

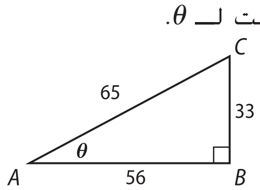
المثال 1 يوضِّح كيفية إيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية الحادة θ في المثلث قائم الزاوية بمعرفة طول أحد أضلاعه.
المثال 2 يوضِّح كيفية إيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الخمس الأخرى بمعرفة قيمة دالة واحدة فقط.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست لـ θ.



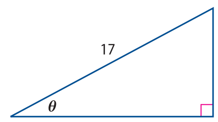
$\sin\theta = \frac{33}{65}$, $\cos\theta = \frac{56}{65}$,
$\tan\theta = \frac{33}{56}$, $\csc\theta = \frac{65}{33}$,
$\sec\theta = \frac{65}{56}$, $\cot\theta = \frac{56}{33}$

2 إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{3}$. فأوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الخمس المتبقية للزاوية الحادة A.

$\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$، $\tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ أو $\frac{\sqrt{2}}{4}$، $\csc\theta = 3$, $\sec\theta = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ أو $\frac{3\sqrt{2}}{4}$، $\cot\theta = 2\sqrt{2}$

المثال 1 إيجاد قيم الدوال المثلثية

أوجد القيم الدقيقة للنسب الست المثلثية لـ θ.



طول الضلع المقابل لـ θ هو 8. وطول الضلع المجاور لـ θ هو 15. وطول الوتر 17.

$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{8}{17}$ opp = 8 و hyp = 17 $\csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{17}{8}$

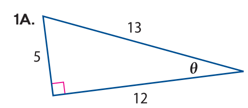
$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{15}{17}$ adj = 15 و hyp = 17 $\sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{17}{15}$

$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{8}{15}$ ppo = 8 و jda = 5 $\cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{15}{8}$

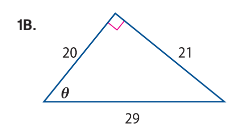
15

تمرين موجه

1A.

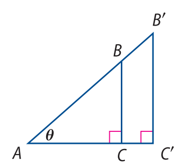


1B.



ضع في الحسبان أن قيمة $\sin\theta$ تساوي:

باستخدام $\triangle ABC$: $\sin\theta = \frac{BC}{AB}$ باستخدام $\triangle AB'C'$: $\sin\theta = \frac{B'C'}{AB'}$

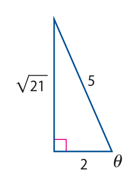


لاحظ أن المثلثين متشابهان لأنهما مثلثان قائما الزاوية ويشتركان في زاوية واحدة، θ. ولأن المثلثين متشابهان، فإن نسب الأضلاع المتناظرة متساوية، لذا فإنّ $\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}$.

ومن ثم تكون $\sin\theta$ لها القيمة نفسها بغض النظر عن المثلث المستخدم. تعد قيم الدوال ثابتة لقياس زاوية معينة. إذ إنها لا تعتمد على حجم المثلث قائم الزاوية.

المثال 2 استخدام قيمة نسبة مثلثية ما لإيجاد قيم الدوال الأخرى

إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{5}$، أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية للزاوية الحادة θ.



ابدأ برسم المثلث القائم الزاوية وتسمية الزاوية الحادة θ.

لأن $\frac{2}{5} = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \cos\theta$، سمّ الضلع المجاور 2 والوتر 5.

من خلال نظرية فيثاغورس، يكون طول الضلع المقابل لـ θ هو $\sqrt{21} = \sqrt{5^2 - 2^2}$.

$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$ $\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$ $\sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{5}{2}$

$\csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{5}{\sqrt{21}} = \frac{5\sqrt{21}}{21}$ $\cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$

تمرين موجه

2. إذا كان $\theta = \frac{1}{2}$. فأوجد القيم الصحيحة للنسب المثلثية للزاوية الحادة θ.

$\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\csc\theta = \sqrt{5}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\cot\theta = 2$

نصيحة دراسية
تذكّر الدوال المثلثية
طريقة التذكّر
SOH-CAH-TOA هي الأكثر استخدامًا لتذكّر نسب **sine**, **cosine** و **tangent**.

$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$
$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$
$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$

1A. $\sin\theta = \frac{5}{13}$, $\cos\theta = \frac{12}{13}$, $\tan\theta = \frac{5}{12}$, $\csc\theta = \frac{13}{5}$, $\sec\theta = \frac{13}{12}$, $\cot\theta = \frac{12}{5}$

1B. $\sin\theta = \frac{21}{29}$, $\cos\theta = \frac{20}{29}$, $\tan\theta = \frac{21}{20}$, $\csc\theta = \frac{29}{21}$, $\sec\theta = \frac{29}{20}$, $\cot\theta = \frac{20}{21}$

انتبه!
مفهوم خاطئ شائع
في المثال 2، قد تكون تسمية الضلع المجاور للمثلث 4 والوتر 10، وذلك لأن $\cos\theta = \frac{2}{5}$ تعطي نسبة الضلع المجاور والوتر، ولا تعطي قياسات محددة.

التدريس المتمايز BL OL AL

المتعلمون بطريقة التواصل اطلب من الطلاب العمل في مجموعات من أربعة طلاب مع دمج قدراتهم. أعطِ كل مجموعة أربعة مثلثات مختلفة قائمة الزاوية، واطلب منهم إيجاد النسب المثلثية الست لكل زاوية حادة. اطلب من المجموعات مراجعة نتائجهم وكتابة توصيف لأي علاقات يكتشفونها.

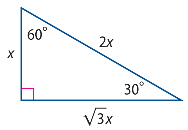
UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 139 12/15/2016 11:39:29 PM

سيطلب منك على نحو متكرر إيجاد الدوال المثلثية لقياسات زاوية حادة محددة. ويبيّن لك الجدول التالي قيم الدوال المثلثية الست لمقاييس ثلاث زوايا شائعة: 30°، 45°، 60°. ولتتذكّر هذه القيم، يمكنك استخدام خواصّ المثلثات 30°–60°–90° و45°–45°–90°.

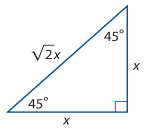
المفهوم الأساسي القيم المثلثية للزوايا الخاصة

θ	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\csc\theta$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\sec\theta$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
$\cot\theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

مثلّث 30°-60°-90°



مثلّث 45°-45°-90°



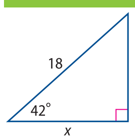
سوف تثبت بعض هذه القيم في التمرينات 57-62.

2 حل المثلثات قائمة الزاوية

حل المثلثات قائمة الزاوية يمكن استخدام الدوال المثلثية لإيجاد أطوال الأضلاع وقياسات زوايا المثلثات القائمة المجهولة.

المثال 3 إيجاد طول الضلع المجهول

أوجد قيمة x. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



ما دمت قد حصلت على قياس زاوية حادة وطول وتر المثلث، استخدم نسبة **cosine** لإيجاد طول الضلع المجاور للزاوية المعطاة.

$\cos\theta = \frac{adj}{hyp}$ — نسبة cosine

$\cos 42° = \frac{x}{18}$ — $\theta = 42°, adj = x, hyp = 18$

$18\cos 42° = x$ — بضرب كل طرف في 18.

$13.4 \approx x$ — استخدم حاسبة.

لذا فإن قيمة، x تبلغ نحو 13.4

التحقق يمكنك التحقق من إجابتك عن طريق تعويض $x = 13.4$ في $\cos 42° = \frac{x}{18}$.

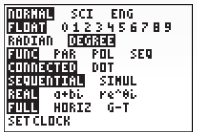
$\cos 42° = \frac{x}{18}$

$\cos 42° = \frac{13.4}{18}$ — $x = 13.4$

$0.74 = 0.74$ ✓ — حوّل لأبسط صورة.

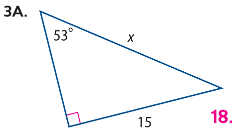
نصيحة تقنية

منوال الدرجة لتتمكن من إيجاد قيمة النسبة المثلثية لزاوية مقاسة بالدرجات، عليك أولاً إعداد الحاسبة على *منوال الدرجة* باختيار DEGREE في خاصية MODE من الحاسبة البيانية.



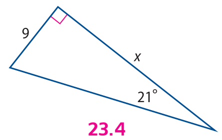
تمرين موجه

3A.



18.8

3B.



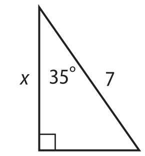
23.4

2 حل المثلثات القائمة الزاوية

الأمثلة 3–5 استخدم الدوال المثلثية لتحديد أطوال الأضلاع المجهولة وقياسات الزوايا في المثلثات القائمة الزاوية. **المثالان 6 و7** يوضحان كيفية استخدام زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض. **المثال 8** يوضِّح كيفية استخدام الدوال المثلثية والعلاقات العكسية لحل مثلث قائم الزاوية.

مثال إضافي

3 أوجد قيمة x. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. حوالي 5.7



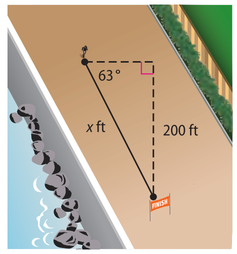
إرشاد للمعلمين الجدد

حاسبة التمثيل البياني إذا لم يحصل الطلاب على القيمة الصحيحة عند إيجاد قيمة دالة مثلثية باستخدام حاسبة التمثيل البياني، فاطلب منهم التحقق من قائمة MODE (الوضع) للتأكد أن الحاسبة تعمل على وضع الدرجات وليس وضع مقياس الراديان.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

المدونة اطلب من الطلاب كتابة مداخلة في مدونة الصف يوضحون فيها كيفية تحديد طول ضلع مجهول بمثلث قائم الزاوية بمعرفة زاوية حادة واحدة وطول ضلع واحد. واطلب منهم كتابة جملة عامة يوضحون فيها كيفية اختيار الدالة المثلثية التي سيستخدمونها في حل المسألة.

مثال 4 من الحياة اليومية إيجاد طول الضلع المجهول



الألعاب الرياضية الثلاثية يعدو متسابق في الألعاب الثلاثية ضمن المسار المبين. حدد المسافة التي يجب أن يقطعها العدّاء ليصل إلى خط النهاية بالأقدام.

لديك قياس زاوية حادة وطول الضلع المقابل. يمكنك إذًا استخدام نسبة **sine** لإيجاد الوتر.

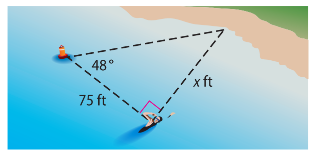
$\sin \theta = \frac{opp}{hyp}$ نسبة sine

$\sin 63° = \frac{200}{x}$ $\theta = 63°, opp = 200, hyp = x$

$x \sin 63° = 200$ بضرب كل طرف في x.

$x = \frac{200}{\sin 63°}$ أو حوالي 224.47 بقسمة كل طرف على $\sin 63°$.

إذًا، يجب أن يعدو المتسابق حوالي 224.5 قدم لينهي الثلاثي.



تمرين موجه

4. الألعاب الرياضية الثلاثية افترض أن متسابقًا في الجزء الخاص بالسباحة من السباق عليه أن يسبح خلال المسار المُبيّن. أوجد المسافة التي يجب أن يسبحها المتسابق ليصل إلى الشاطئ.

83.3 قدم

الربط بالحياة اليومية

يقام سباق الرجل الحديدي الرياضي الثلاثي في هاواي، ويتكون من ثلاثة أحداث ثابتة. تتضمن سباحة 2.4 ميل، وركوب دراجات 112 ميلاً، وسباق عدو 26.2 ميل.

المصدر: مؤسسة الألعاب الرياضية الثلاثية العالمية

عندما تكون القيمة المثلثية لزاوية حادة معروفة، فإن **الدوال المثلثية العكسية** المماثلة يمكن أن تستخدم لإيجاد قياس الزاوية.

المفهوم الأساسي الدوال المثلثية العكسية

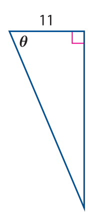
معكوس sine	إذا كانت θ زاوية حادة و $\sin \theta$ هو x. فإن **معكوس sine** لـ x هو مقياس الزاوية θ. هذا يعني، إذا كانت $\sin \theta = x$، فإن $\sin^{-1} x = \theta$.
معكوس cosine	إذا كانت θ زاوية حادة و $\cos \theta$ هو x. فإن **معكوس cosine** لـ x هو مقياس الزاوية θ. هذا يعني، إذا كانت $\cos \theta = x$، فإن $\cos^{-1} x = \theta$.
معكوس tangent	إذا كانت θ زاوية حادة وظل $\tan \theta$ هو x. فإن **معكوس tangent** لـ x هو مقياس الزاوية θ. هذا يعني، إذا كانت $\tan \theta = x$، فإن $\tan^{-1} x = \theta$.

قراءة في الرياضيات

الدوال المثلثية العكسية

التعبير $\sin^{-1} x$ تتم قراءته كمعكوس $\sin x$. احرص ألا تخلط هذا الترميز بالترميز الخاص بالأسس السالبة: $\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$. بدلاً من ذلك، هذا الترميز يشبه الترميز الخاص بمعكوس نسبة $f^{-1}(x)$.

المثال 5 إيجاد قياس الزاوية المجهولة



استخدم نسبة مثلثية لإيجاد قياس θ. قرّب إلى أقرب درجة إن تطلب الأمر.

بما أن قياسات الأضلاع المقابلة والمجاورة لـ θ معطاة، استخدم نسبة tan.

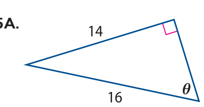
$\tan \theta = \frac{opp}{adj}$ نسبة tan

$\tan \theta = \frac{26}{11}$ $opp = 26, adj = 11$

$\theta = \tan^{-1} \frac{26}{11}$ أو حوالي 67° تعريف معكوس tan

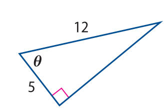
تمرين موجه

5A.



61°

5B.

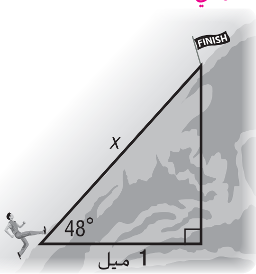


65°

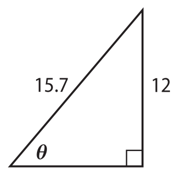
أمثلة إضافية

4 الرياضة يجب على المنافس في سباق المشي لمسافات طويلة أن يسير مسارًا مائلاً كما هو موضح للوصول إلى خط النهاية. حدد المسافة التي يجب أن يقطعها المنافس ليصل إلى خط النهاية بالأقدام. (**تلميح:** 1 ميل = 5280 قدمًا.)

حوالي 7,891 ft



5 استخدم دالة مثلثية لإيجاد مقياس θ. قرّب إلى أقرب درجة إذا تطلب الأمر. **50°**



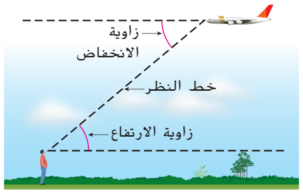
التركيز على محتوى الرياضيات

الدوال المثلثية في هذا الدرس، تم تعريف الدوال المثلثية وفق نسب أضلاع المثلث قائم الزاوية. وهذا يعني أن هذه التعريفات لا تصلح سوى لقياس الزاوية الحادة. سيتناول الدرس 3-3 حالة أعم من الدوال المثلثية لأي زاوية حيث سيتم التعرف على زوايا الإسناد.

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني اطلب من الطلاب القيام برسم رسم تخطيطي لكل مسألة من الحياة اليومية. وينبغي لهم استخدام أقلام رصاص ملونة لتتبع المثلثات والمعلومات الأخرى اللازمة في حل كل مسألة.

تستخدم بعض تطبيقات حساب المثلثات زاوية ارتفاع أو انخفاض. إن **زاوية الارتفاع** زاوية يكوّنها خط أفقي وخط نظر المراقب تجاه هدف أعلى منه. إن **زاوية الانخفاض** زاوية يكوّنها خط أفقي وخط نظر المراقب تجاه هدف أدنى منه.

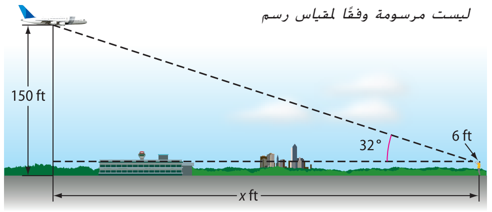


في الشكل، تتطابق زاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض لأنهما زاويتان داخليتان متبادلتان بين خطين متوازيين.

مثال 6 من الحياة اليومية — استخدام زاوية الارتفاع

طائرات عامل من الطاقم الأرضي يبلغ طوله 6 أقدام يوجّه طائرة على مدرج المطار. إذا نظر العامل إلى الطائرة بزاوية ارتفاع قدرها °32، فما المسافة الأفقية بين العامل والطائرة؟

ليست مرسومة وفقًا لمقياس رسم



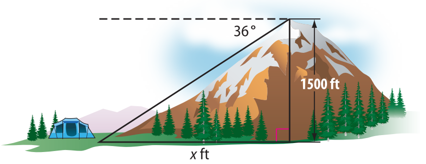
لأن العامل يبلغ من الطول 6 أقدام، فالمسافة الرأسية بين العامل والطائرة 6 − 150، أو 144 قدمًا. نظرًا لأن قياس الزاوية والضلع المقابل لها معلومان في المسألة، فيمكنك استخدام نسبة الظل لإيجاد x.

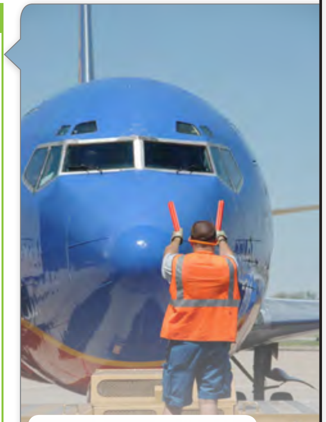
$\tan\theta = \dfrac{opp}{adj}$	نسبة tan
$\tan 32° = \dfrac{144}{x}$	$\theta = 32°,\ opp = 144,\ adj = x$
$x \tan 32° = 144$	بضرب كل طرف في x.
$x = \dfrac{144}{\tan 32°}$	بقسمة كل من الطرفين على tan 32°.
$x \approx 230.4$	باستخدام حاسبة.

إذًا، فالمسافة الأفقية بين العامل والطائرة تبلغ تقريبًا 230.4 قدم.

تمرين موجه

6. التخييم تسلقت مجموعة من المتسلقين قمة جبل تبلغ **1500** قدم خلال رحلتهم. عندما ينظر المتسلقون للأسفل بزاوية انخفاض قدرها **°36**، يمكنهم رؤية مخيمهم عن بعد. ما المسافة بين المخيم والمجموعة مُقرّبًا الناتج لأقرب قدم؟ **2065 ft**



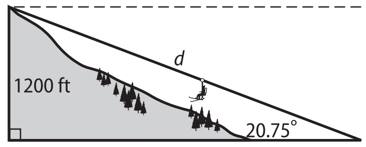


مهن من الحياة اليومية

طاقم المطار الأرضي يشغل أفراد طاقم المطار الأرضي مركبات خدمة التعلية، ويتولون أمر الحمولات/الأمتعة وإرشاد أو سحب الطائرة. يجب أن يكون أفراد الطاقم حاصلين على شهادة الثانوية ورخصة قيادة سارية وسجل قيادة جيد.

مثال إضافي

6 **التزلج** يرتفع مصعد الكراسي في منتجع للتزلج بزاوية °20.75 أثناء صعود جانب جبل ويصل إلى ارتفاع 1200 قدم عندما يصل إلى القمة. ما المسافة التي يقطعها مصعد الكراسي على سفح الجبل؟ حوالي 3387 ft

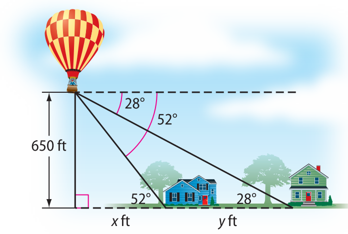


142 | الدرس 3-1 | حساب المثلثات قائمة الزاوية

يمكن استخدام زوايا الارتفاع والانخفاض لمعرفة المسافات بين موضعين. كما يمكن تعيين ارتفاع موضع ما إذا توفرت زاويتان معطاتان من موضعي مراقبة مختلفين.

مثال 7 من الحياة اليومية استخدام زاويتي الارتفاع أو الانخفاض

ركوب المنطاد منطاد هواء ساخن يتحرك فوق حي بزاوية انخفاض قدرها °28 بالنسبة لمنزل و°52 بالنسبة لمنزل آخر في آخر الشارع. إذا كان ارتفاع المنطاد هو 650 قدمًا، فاستنتج المسافة بين المنزلين.



ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة. لأن زاوية الارتفاع من المنزل للمنطاد تتطابق مع زاوية الانخفاض من المنطاد للمنزل، يمكنك تسمية زوايا الارتفاع كما هو مبين. سَمِّ المسافة الأفقية من المنطاد للمنزل الأول x والمسافة بين المنزلين y.

من المثلث الأصغر القائم الزاوية، يمكنك استخدام نسبة tan لإيجاد x.

$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$ نسبة tan

$\tan 52° = \frac{650}{x}$ $\theta = 52°, \text{opp} = 650, \text{adj} = x$

$x \tan 52° = 650$ مع ضرب كل طرف في x.

$x = \frac{650}{\tan 52°}$ بقسمة كل من الطرفين على $\tan 52°$.

من المثلث الأكبر يمكنك استخدام نسبة الظل لإيجاد y.

$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$ نسبة tan

$\tan 28° = \frac{650}{x+y}$ $\theta = 28° x + y, \text{opp} = 650, \text{adj} = x + y$

$(x + y) \tan 28° = 650$ مع ضرب كل طرف في $x + y$.

$x + y = \frac{650}{\tan 28°}$ بقسمة كل من الطرفين على $\tan 28°$.

$\frac{650}{\tan °52} + y = \frac{650}{\tan °28}$ استبدل $x = \frac{650}{\tan 52°}$.

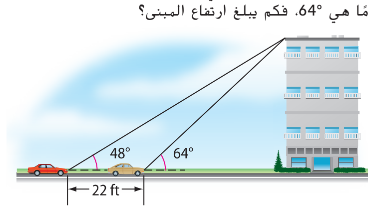
$y = \frac{650}{\tan °28} - \frac{650}{\tan °52}$ اطرح $\frac{650}{\tan 52°}$ من كل طرف.

$y \approx 714.6$ استخدم الحاسبة.

ومن ثم، فالمنزلان بينهما مسافة قدرها تقريبًا 714.6 قدم.

تمرين موجه نحو 53 قدمًا

7. مبانٍ زاوية الارتفاع من السيارة لأعلى شقة بالمبنى هي °48. إذا كانت زاوية الارتفاع من سيارة أخرى أمام السيارة الأولى مباشرة بمسافة 22 قدمًا هي °64، فكم يبلغ ارتفاع المبنى؟



نصيحة دراسية

قياس غير مباشر عندما نحسب المسافة بين موضعين مستخدمين زوايا الانخفاض، من المهم أن تتذكر أن الموضع يجب أن يقع على المستوى الأفقي نفسه.

نصيحة تقنية

استخدام الأقواس في أثناء إيجاد قيمة تعبير مثلثي باستخدام الحاسبة البيانية، انتبه إلى غلق الأقواس. بينما تقوم الحاسبة بإعادة القيمة نفسها للتعبيرين tan(26 وtan(26)، فإنها لا تفعل الشيء نفسه مع التعبيرين tan(26 + 50 وtan(26) + 50.

مثال إضافي

7 المناظر الطبيعية ينظر شخص محب للمناظر الطبيعية إلى أسفل واد ضيق عميق باستخدام نظارة معظمة. وتبلغ زاويتا الانخفاض للضفة البعيدة وللضفة القريبة أسفل النهر °61 و°63، على التوالي. فإذا كان عمق الوادي 1250 قدمًا، فما عرض النهر؟ حوالي 56 ft

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 143 12/15/2016 11:39:35 PM

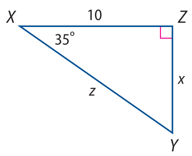
يمكن استخدام الدوال المثلثية ومعكوس العلاقات من أجل **حل مثلث قائم الزاوية**. ما يعني إيجاد قياسات جميع أضلاع وزوايا المثلث.

> **قراءة في الرياضيات**
> **تسمية المثلثات**
> خلال هذه الوحدة، ستستخدم الحروف الكبيرة للتعبير عن كل من رأس مثلث أو قياس الزاوية عند هذا الرأس. ستستخدم الحروف نفسها في الحالة الصغيرة للتعبير عن كل من الضلع المقابل للزاوية ولطول هذا الضلع.

المثال 8 حل مثلث قائم الزاوية

أوجد حل كل مثلث. حوّل طول الضلع لأقرب جزء من العشرة، وحوّل قياس الزاوية إلى أقرب درجة.

a.



أوجد x و z باستخدام الدوال مثلثية.

$\cos 35° = \frac{10}{z}$ بالتعويض.

$z \cos 35° = 10$ بالضرب.

$z = \frac{10}{\cos 35°}$ بالقسمة.

$z \approx 12.2$ باستخدام الحاسبة.

$\tan 35° = \frac{x}{10}$ بالتعويض.

$10 \tan 35° = x$ باستخدام الحاسبة.

$7.0 \approx x$ بالضرب.

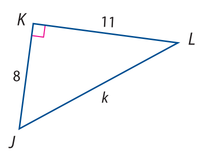
بما أن مقياس الزاويتين معطى. فإن Y يمكن إيجادها بطرح X من 90°.

$Y = 90° + 35°$ زاويتا X و Y متتامتان.

$Y = 55°$ بالطرح.

لذا فإن $x \approx 7.0$ ،$Y = 55°$ و $z \approx 12.2$.

b.



لأن طول الضلعين معطى. يمكنك استخدام نظرية فيثاغورس لتجد أنّ $k = \sqrt{185}$ أو حوالي 13.6. ويمكنك إيجاد J باستخدام أي من الدوال المثلثية.

$\tan J = \frac{11}{8}$ بالتعويض.

$J = \tan^{-1} \frac{11}{8}$ تعريف معكوس tan

$J \approx 53.97°$ استخدم الحاسبة.

بما أن J معروفة الآن. يمكنك إيجاد L بطرح J من 90°.

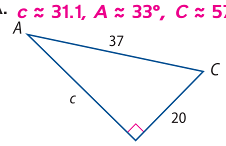
$53.97° + L \approx 90°$ زاويتا J و L متتامتان.

$L \approx 36.03°$ بالطرح.

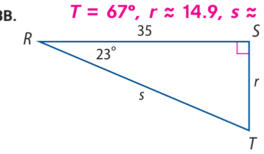
لذا فإن $L \approx 36°$ ،$J \approx 54°$ و$k \approx 13.6$.

تمرين موجه

8A. $c \approx 31.1,\ A \approx 33°,\ C \approx 57°$



8B. $T = 67°,\ r \approx 14.9,\ s \approx 38.0$



9. $\cos \theta = \frac{3}{5}$, $\tan \theta = \frac{4}{3}$, $\csc \theta = \frac{5}{4}$, $\sec \theta = \frac{5}{3}$, $\cot \theta = \frac{3}{4}$

10. $\sin \theta = \frac{\sqrt{13}}{7}$, $\tan \theta = \frac{\sqrt{13}}{6}$, $\csc \theta = \frac{7\sqrt{13}}{13}$, $\sec \theta = \frac{7}{6}$, $\cot \theta = \frac{6\sqrt{13}}{13}$

11. $\sin \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\csc \theta = \frac{\sqrt{10}}{3}$, $\sec \theta = \sqrt{10}$, $\cot \theta = \frac{1}{3}$

6. $\sin \theta = \frac{6}{7}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{13}}{7}$, $\tan \theta = \frac{6\sqrt{13}}{13}$, $\csc \theta = \frac{7}{6}$, $\sec \theta = \frac{7\sqrt{13}}{13}$, $\cot \theta = \frac{\sqrt{13}}{6}$

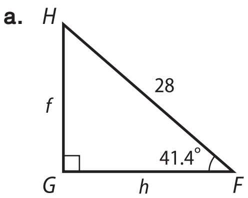
7. $\sin \theta = \frac{3}{5}$, $\cos \theta = \frac{4}{5}$, $\tan \theta = \frac{3}{4}$, $\csc \theta = \frac{5}{3}$, $\sec \theta = \frac{5}{4}$, $\cot \theta = \frac{4}{3}$

8. $\sin \theta = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\cos \theta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\tan \theta = \frac{1}{4}$, $\csc \theta = \sqrt{17}$, $\sec \theta = \frac{\sqrt{17}}{4}$, $\cot \theta = 4$

مثال إضافي

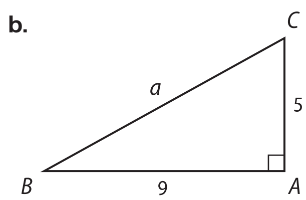
8 حل كل مثلث. حوّل طول الجانب لأقرب عدد عشري، وحوّل قياس الزاوية إلى أقرب درجة.

a.



$H \approx 49°,\ f \approx 18.5,\ h \approx 21.0$

b.



$a \approx 10.3,\ B \approx 29°,\ C \approx 61°$

إجابات إضافية

1. $\sin \theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$, $\cos \theta = \frac{7}{9}$, $\tan \theta = \frac{4\sqrt{2}}{7}$, $\csc \theta = \frac{9\sqrt{2}}{8}$, $\sec \theta = \frac{9}{7}$, $\cot \theta = \frac{7\sqrt{2}}{8}$

2. $\sin \theta = \frac{2\sqrt{14}}{15}$, $\cos \theta = \frac{13}{15}$, $\tan \theta = \frac{2\sqrt{14}}{13}$, $\csc \theta = \frac{15\sqrt{14}}{28}$, $\sec \theta = \frac{15}{13}$, $\cot \theta = \frac{13\sqrt{14}}{28}$

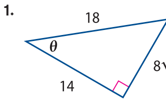
3. $\sin \theta = \frac{9\sqrt{97}}{97}$, $\cos \theta = \frac{4\sqrt{97}}{97}$, $\tan \theta = \frac{9}{4}$, $\csc \theta = \frac{\sqrt{97}}{9}$, $\sec \theta = \frac{\sqrt{97}}{4}$, $\cot \theta = \frac{4}{9}$

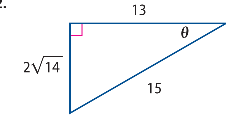
4. $\sin \theta = \frac{12}{37}$, $\cos \theta = \frac{35}{37}$, $\tan \theta = \frac{12}{35}$, $\csc \theta = \frac{37}{12}$, $\sec \theta = \frac{37}{35}$, $\cot \theta = \frac{35}{12}$

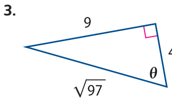
5. $\sin \theta = \frac{\sqrt{165}}{29}$, $\cos \theta = \frac{26}{29}$, $\tan \theta = \frac{\sqrt{165}}{26}$, $\csc \theta = \frac{29\sqrt{165}}{165}$, $\sec \theta = \frac{29}{26}$, $\cot \theta = \frac{26\sqrt{165}}{165}$

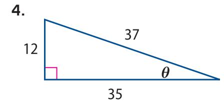
تمارين

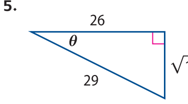
أوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست لـ θ. (المثال 1) **1–8. انظر الهامش.**

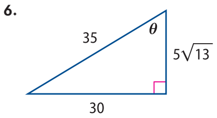
1. 

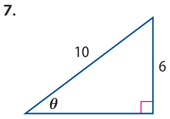
2. 

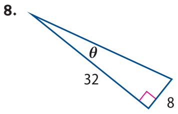
3. 

4. 

5. 

6. 

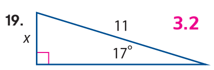
7. 

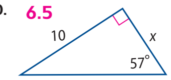
8. 

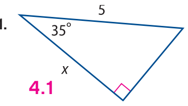
استخدم قيمة النسبة المثلثية المعطاة للزاوية الحادة θ لإيجاد القيم الدقيقة لقيم الدوال المثلثية الخمس المتبقية لـ θ. (المثال 2) **9–18. انظر الهامش.**

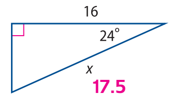
9. $\sin\theta = \frac{4}{5}$
10. $\cos\theta = \frac{6}{7}$
11. $\tan\theta = 3$
12. $\sec\theta = 8$
13. $\cos\theta = \frac{5}{9}$
14. $\tan\theta = \frac{1}{4}$
15. $\cot\theta = 5$
16. $\csc\theta = 6$
17. $\sec\theta = \frac{9}{2}$
18. $\sin\theta = \frac{8}{13}$

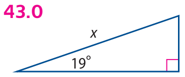
أوجد قيمة x. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. (المثال 3)

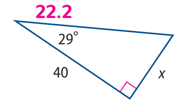
19. **3.2** 

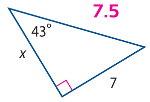
20. **6.5** 

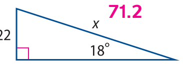
21. **4.1** 

22. **17.5** 

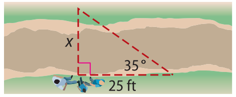
23. **43.0** 

24. **22.2** 

25. **7.5** 

26. **71.2** 

27. **تسلق الجبال** يجب أن يحدد فريق من المتسلقين عرض الوادي لتجهيز الأدوات اللازمة لعبوره. إذا سار المتسلقون 25 قدمًا خلال الوادي من نقطة عبورهم. ونظروا إلى نقطة العبور من الجهة البعيدة للوادي بزاوية قدرها 35°، فكم يكون عرض الوادي؟ (المثال 4) **17.5 ft**

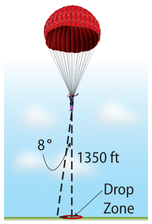


28. **التزلج** بنى أحمد منحدرًا للتزلج بارتفاع 3.5 قدم. ومنحدرًا بزاوية 18°. (المثال 4) **انظر الهامش.**
a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.
b. حدد طول المنحدر. **11.3 ft**

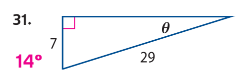
29a. انظر ملحق إجابات إضافية 3.

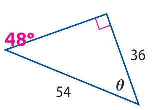
29. **المنعطف** يتجول المرور من نقطة A على شارع النصر يسارًا 0.8 ميل على شارع الاتحاد، ثم يمينًا على شارع حصة، الذي يتقاطع مع شارع النصر بزاوية 32°. (المثال 4)
a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.
b. حدد المسافة التقريبية من النقطة A إلى نقطة الإلتقاء. **1.3 mi**

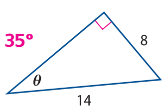
30. **الإسقاط** يواجه مظلي ريحًا أقوى من المتوقع في أثناء سقوطه من ارتفاع 1350 قدمًا، مما يتسبب في انحرافه بزاوية قدرها 8°. كم يبعد المظلي عن منطقة الإنزال عند هبوطه؟ (المثال 4) **190 ft**

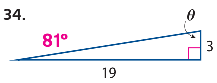


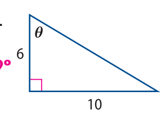
أوجد قياس زاوية θ. قرِّب إلى أقرب درجة إذا تتطلب الأمر. (المثال 5)

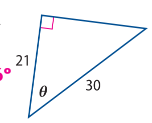
31. **14°** 

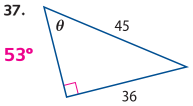
32. **48°** 

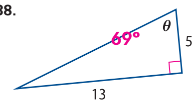
33. **35°** 

34. **81°** 

35. **59°** 

36. **46°** 

37. **53°** 

38. **69°** 

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1–54, 83–85, 87–105	1–53 فردي، 102–105	2–54 زوجي، 83–85, 87–101
OL ضمن المستوى	1–53 فردي، 55، 56، 57–73 فردي، 74، 75–79 فردي، 81–85، 87–105	1–54, 102–105	55–85, 87–101
BL أعلى من المستوى	55–105		

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم تمارين 1-54 للتحقق من عملية الفهم.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص واجبات للطلاب.

إجابات إضافية

12. $\sin\theta = \frac{3\sqrt{7}}{8}$, $\cos\theta = \frac{1}{8}$, $\tan\theta = 3\sqrt{7}$, $\csc\theta = \frac{8\sqrt{7}}{21}$, $\cot\theta = \frac{\sqrt{7}}{21}$

13. $\sin\theta = \frac{2\sqrt{14}}{9}$, $\tan\theta = \frac{2\sqrt{14}}{5}$, $\csc\theta = \frac{9\sqrt{14}}{28}$, $\sec\theta = \frac{9}{5}$, $\cot\theta = \frac{5\sqrt{14}}{28}$

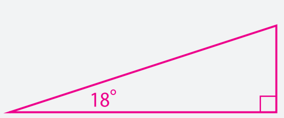
14. $\sin\theta = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $\cos\theta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\csc\theta = \sqrt{17}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{17}}{4}$, $\cot\theta = 4$

15. $\sin\theta = \frac{\sqrt{26}}{26}$, $\cos\theta = \frac{5\sqrt{26}}{26}$, $\tan\theta = \frac{1}{5}$, $\csc\theta = \sqrt{26}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{26}}{5}$

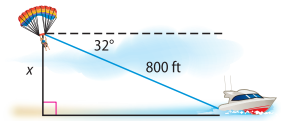
16. $\sin\theta = \frac{1}{6}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{35}}{6}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{35}}{35}$, $\sec\theta = \frac{6\sqrt{35}}{35}$, $\cot\theta = \sqrt{35}$

17. $\sin\theta = \frac{\sqrt{77}}{9}$, $\cos\theta = \frac{2}{9}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{77}}{2}$, $\csc\theta = \frac{9\sqrt{77}}{77}$, $\cot\theta = \frac{2\sqrt{77}}{77}$

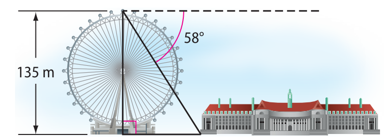
18. $\cos\theta = \frac{\sqrt{105}}{13}$, $\tan\theta = \frac{8\sqrt{105}}{105}$, $\csc\theta = \frac{13}{8}$, $\sec\theta = \frac{13\sqrt{105}}{105}$, $\cot\theta = \frac{\sqrt{105}}{8}$

28a. 

39. **التزلّج الهوائي** قررت إيمان أن تجرب التزلج الهوائي. فتم ربطها بمظلة يجرها يخت. يربط مظلتها بالقارب حبل طوله 800 قدم. يتخذ أسفلها زاوية انخفاض قدرها 32°. فكم كان ارتفاع إيمان فوق المياه؟ (مثال 6) **424 ft**



40. **عجلة المشاهدة** عين لندن عبارة عن عجلة مشاهدة طولها 135 مترًا. إذا نظر أحد المسافرين من أعلى العجلة إلى حوض أسماك لندن بزاوية انخفاض قدرها 58°. فما المسافة بين حوض أسماك لندن وعين لندن؟ (المثال 6) **84 m**



41. **قطار الملاهي** على قطار ملاهي، يصعد المسار الذي يبلغ 375 قدمًا بزاوية ارتفاع قدرها 55° للقمة قبل أول وأعلى هبوط. (مثال 6) **انظر الهامش.**

a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.

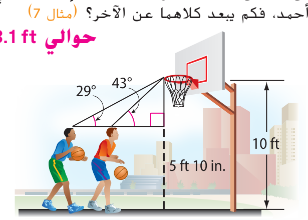
b. حدد طول قطار الملاهي. **307 ft**

42. **مصعد التزلج** تقوم إحدى الشركات بتركيب مصعد جديد للتزلج على ارتفاع 225 مترًا أعلى جبل. ليصعد إليه بزاوية ارتفاع قدرها 48°. (المثال 6) **انظر الهامش.**

a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.

b. حدد طول الجبل الذي يتطلبه المصعد ليمتد من القاعدة لقمة الجبل. **303 m**

43. **كرة السلة** يبلغ طول كل من أحمد وعلي 5 أقدام و10 بوصات. ينظر أحمد إلى مرمى كرة سلة ترتفع 10 أقدام بزاوية ارتفاع قدرها 29°. وينظر علي إلى المرمى بزاوية ارتفاع قدرها 43°. إذا كان علي يقف مباشرة أمام أحمد. فكم يبعد كلاهما عن الآخر؟ (مثال 7) **حوالي 3.1 ft**



44. **باريس** ينظر سائح في درجة المشاهدة الأولى من برج إيفل إلى متحف أورسيه بزاوية انخفاض قدرها 1.4°. ينظر سائح في درجة المشاهدة الثالثة، فوق الأول مباشرة بمقدار 219 مترًا، إلى متحف دورساي بزاوية انخفاض قدرها 6.8°. (المثال 7)

a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة. **انظر الهامش.**

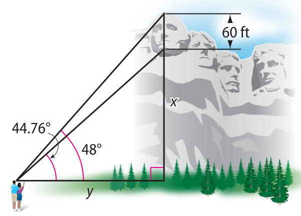
1b. حدد المسافة بين برج إيفل ومتحف أورسيه. **2310 m**

45. **المنارة** تم رصد سفينتين من أعلى منارة طولها 156 قدمًا. تقع السفينة الأولى في زاوية انخفاض قدرها 27°. والسفينة الثانية خلفها مباشرة في زاوية انخفاض قدرها 7°. (المثال 7) **انظر الهامش.**

a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.

b. حدد المسافة بين السفينتين. **964 ft**

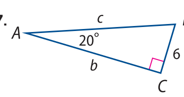
46. **جبل راشمور** طول وجوه الرؤساء على جبل راشمور يبلغ 60 قدمًا. يرى الزائر قمة رأس جورج واشنطن بزاوية ارتفاع قدرها 48° ويرى ذقنه بزاوية ارتفاع قدرها 44.76°. أوجد ارتفاع جبل راشمور. (المثال 7) **نحو 500 ft**



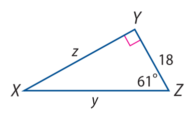
47–54. انظر الهامش.

أوجد حل كل مثلث. حوّل أطوال الأضلاع لأقرب عدد عشري، وحوّل قياس الزاوية إلى أقرب درجة. (المثال 8)

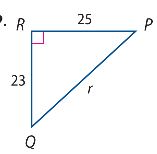
47.



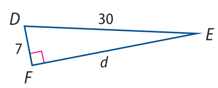
48.



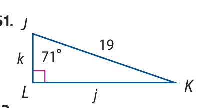
49.



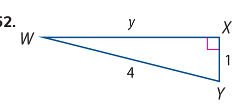
50.



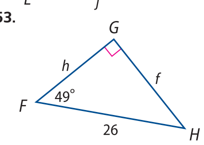
51.



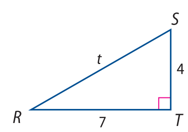
52.



53.



54.



55. **بيسبول** يقع ارتكاز أحمد في اللعبة 65 قدمًا خلف أرضية الملعب. خط رؤيته 10 أقدام فوق الملعب. **B** **انظر الهامش.**

a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.

b. ما زاوية الانخفاض بالنسبة لأرضية الملعب؟ **9°**

56. **التنزه** تقف رنا على بعد ميلين من مركز قاعدة بايكس بيك وتنظر إلى قمة الجبل، الذي يبلغ ارتفاعه 1.4 ميل. **انظر الهامش.**

a. ارسم مخططًا يمثل هذه الحالة.

b. بأي زاوية ارتفاع تنظر رنا إلى قمة الجبل؟ **35°**

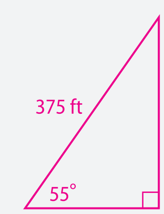
انتبه!

خطأ شائع في التمارين 54-47. قد يخلط الطلاب بين أدوار الدوال المثلثية والدوال المثلثية العكسية. أكد على الطلاب أن الدوال العكسية تُستخدم لإيجاد الزوايا. بينما تُستخدم الدوال المثلثية لإيجاد نسب الأضلاع.

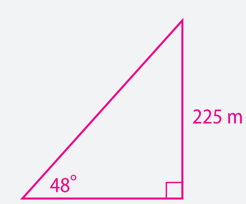
تحليل الخطأ التمرين 84. خلط خالد بين دالة القاطع ودالة قاطع التمام؛ إلا أن دالة القاطع تُعد مقلوب $\sin\theta$. محمد على صواب في قول إن الإجابة يُمكن تحديدها.

إجابات إضافية

41a.

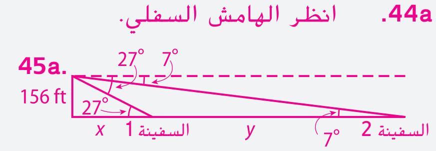


42a.



44a. انظر الهامش السفلي.

45a.



47. $B = 70°$, $b \approx 16.5$, $c \approx 17.5$

48. $X = 29°$, $y \approx 37.1$, $z \approx 32.5$

49. $P \approx 43°$, $Q \approx 47°$, $r \approx 34.0$

50. $D \approx 77°$, $E \approx 13°$, $d \approx 29.2$

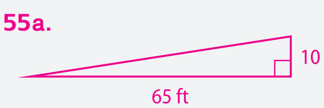
51. $K \approx 19°$, $j \approx 18.0$, $k \approx 6.2$

52. $W \approx 14°$, $Y \approx 76°$, $y \approx 3.9$

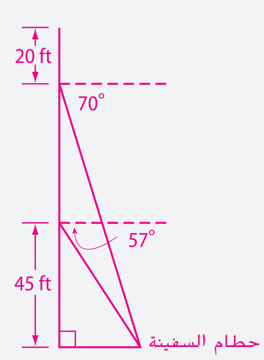
53. $H = 41°$, $f \approx 19.6$, $h \approx 17.1$

54. $R \approx 30°$, $S \approx 60°$, $t \approx 8.1$

55a.

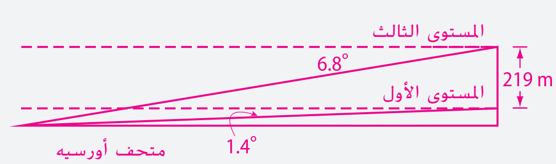


71.

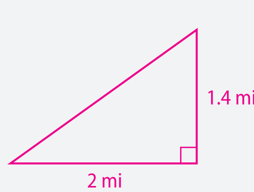


حوالي 100 ft

44a.



56a.



أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير، بدون استخدام الحاسبة.

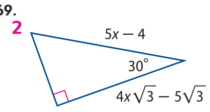
57. $\sin 60°$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
58. $\cot 30°$ $\sqrt{3}$
59. $\sec 30°$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
60. $\cos 45°$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
61. $\tan 60°$ $\sqrt{3}$
62. $\csc 45°$ $\sqrt{2}$

بدون استخدام الحاسبة أوجد مقياس الزاوية الحادة θ في مثلث قائم الزاوية بحيث يناسب كل معادلة.

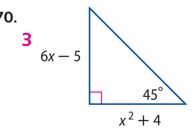
63. $\tan \theta = 1$ $45°$
64. $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $30°$
65. $\cot \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $60°$
66. $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $45°$
67. $\csc \theta = 2$ $30°$
68. $\sec \theta = 2$ $60°$

بدون استخدام الحاسبة، حدد قيمة x.

69. 2



70. 3

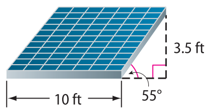


71. **الغوص** رأى أحد الغواصين في عمق 20 قدمًا تحت سطح الماء حطام سفينة بزاوية انخفاض قدرها 70°. بعد الانخفاض إلى نقطة 45 قدمًا فوق قاع المحيط، يرى الغواص حطام السفينة بزاوية انخفاض قدرها 57°. ارسم مخططًا يبين الوضع. وحدد عمق حطام السفينة. **انظر الهامش.**

أوجد قيمة $\cos \theta$ إذا كانت θ هي قياس أصغر زاوية في كل نوع من أنواع المثلث قائم الزاوية.

72. 3-4-5 0.8
73. 5-12-13 حوالي 0.92

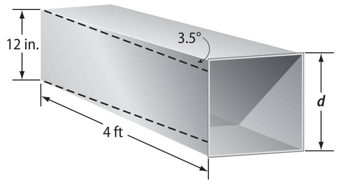
74. **الطاقة الشمسية** أوجد مساحة سطح اللوحة الشمسية المبينة أمامك كاملًا. 42.7 ft^2



بدون استخدام الحاسبة، أدخل الرمز المناسب $<$، $>$، $=$ لإكمال كل معادلة.

75. $\sin 45°$ ◯ $\cot 60°$ $>$
76. $\tan 60°$ ◯ $\cot 30°$ $=$
77. $\cos 30°$ ◯ $\csc 45°$ $<$
78. $\cos 30°$ ◯ $\sin 60°$ $=$
79. $\sec 45°$ ◯ $\csc 60°$ $>$
80. $\tan 45°$ ◯ $\sec 30°$ $<$

81. **الهندسة** حدد عمق الأسطوانة في النهاية العريضة d لأنبوب الهواء المبين أمامك إذا كان يضيق تدريجيًا بزاوية 3.5°. حوالي 17.9 in.



82. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة ستستكشف الدوال المثلثية للزوايا الحادة وعلاقتها بالنقاط على المستوى الإحداثي. **a–b. انظر الهامش.**

a. **بيانيًا** افترض أن $P(x, y)$ هي نقطة في الربع الأول. ارسم خطًا بيانيًا من خلال النقطة P ونقطة الأصل. كوّن مثلثًا قائم الزاوية من خلال توصيل النقاط P، $(x, 0)$، ونقطة الأصل. ضع اسمًا لأطوال أضلاع المثلث القائمة بالرموز x أو y. ضع اسمًا لطول الوتر مثل r والزاوية التي يكوّنها الخط مع المحور x θ.

b. **بالتحليل** عبّر عن قيمة r بالرموز x و y.

c. **بالتحليل** عبّر عن $\sin \theta$، $\cos \theta$ و $\tan \theta$ بلغة x, y، و/أو r. $\sin \theta = \frac{y}{r}, \cos \theta = \frac{x}{r}, \tan \theta = \frac{y}{x}$

d. **لفظيًا** تحت أي شرط يمكن التعبير عن إحداثيات النقطة P بالدوال المثلثية $(\cos \theta, \sin \theta)$؟ **الإجابة النموذجية: عندما تكون $r = 1$.**

e. **بالتحليل** أي نسبة مثلثية تتضمن θ تناظر ميل الخط؟ $\tan \theta$

f. **بالتحليل** أوجد تعبيرًا لميل الخط العمودي على الخط الواقع في الجزء a بدلالة θ. $-\cot \theta$

مهارات التفكير العليا

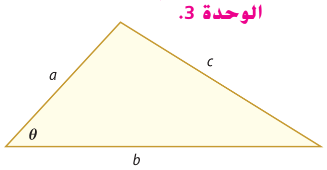
استخدام مهارات التفكير العليا

83. **الإثبات** أثبت أنه إذا كانت θ زاوية حادة بمثلث قائم فإن $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ و $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

84. **تحليل الخطأ** يعرف خالد ومحمد قيمة $\sin \theta = a$ وقد طلب منهما إيجاد قيمة $\csc \theta$. يقول خالد إن هذا غير ممكن. لكن محمد يخالفه الرأي. فهل أحدهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

85. **الكتابة في الرياضيات** اشرح سبب كون الدوال المثلثية الست دوالّ متسامية. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

86. **التحدي** اكتب تعبيرًا بالرموز θ عن محيط المثلث مختلف الأضلاع المبين. اشرح. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**



88. **الإثبات** أثبت أنه إذا كانت θ زاوية حادة في مثلث قائم، فإن $(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$.

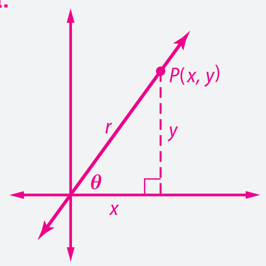
الاستنتاج إذا كانت A و B زاويتان حادتان لمثلث قائم $m\angle A < m\angle B$ معلومتان، حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة، فاضرب مثالًا مضادًا.

88. $\sin A < \sin B$ **صواب**
89. $\cos A < \cos B$ **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**
90. $\tan A < \tan B$ **صواب**

91. **الكتابة في الرياضيات** لاحظ على الحاسبة البيانية أنه لا يوجد مفتاح لإيجاد التآطل Sec, Csc, Cot لقياس زاوية ما. وضّح لماذا تعتقد أن الأمر كذلك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

إجابات إضافية

82a.



82b. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

مراجعة شاملة

العام	CPI
1955	26.8
1965	31.5
1975	53.8
1985	107.6
1995	152.4
2005	195.3

المصدر: مكتب إحصاءات العمل

92. **الاقتصاد** مؤشر أسعار المستهلك (CPI) يقيس التضخم. وهو مبني على متوسط أسعار السلع والخدمات في الولايات المتحدة، بالمتوسط السنوي للأعوام 1982-1984 المنظمة في مؤشّر من 100. يبين الجدول بعض قيم (CPI) السنوية المتوسطة من 1955 إلى 2005. أوجد النموذج الأسي المتعلق بهذه البيانات (السنة، CPI) عن طريق تحويل البيانات لصورة خطية. افرض أن $x = 0$ تمثل 1955. ثم استخدم النموذج لتتنبأ بقيمة CPI في 2025.
الإجابة النموذجية: $y = 24.2157e^{0.0439x}$; حوالي 523.2

أوجد حل كل من المعادلات الآتية: قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

93. $e^{5x} = 24$ **0.64**

94. $2e^{x-7} - 6 = 0$ **8.10**

ارسم تمثيلاً بيانيًا لكل نسبة وحللها. ووضح المجال والمدى ونقاط التقاطع وخطوط التقارب وسلوك النهاية، وفترات تزايد أو تناقص النسبة. 95–97. انظر الهامش.

95. $f(x) = -3^{x-2}$

96. $f(x) = 2^{3x-4} + 1$

97. $f(x) = -4^{-x+6}$

أوجد حل كل من المعادلات الآتية:

98. $\frac{x^2-16}{(x+4)(2x-1)} = \frac{4}{x+4} - \frac{1}{2x-1}$ **−1, 8**

99. $\frac{x^2-7}{(x+1)(x-5)} = \frac{6}{x+1} + \frac{3}{x-5}$ **4**

100. $\frac{2x^2+3}{3x^2+5x+2} = \frac{5}{3x+2} - \frac{1}{x+1}$ **0, 1**

101. **الصحف** موضح أدناه تداول آلاف صفحات الجرائد الوطنية تداول.

العام	2008	2007	2006	2005	2004	2003	2002
التداول (بالآلاف)	673.0	699.1	716.2	725.5	773.9	814.7	904.3

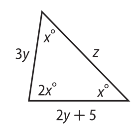
a. افترض أن x تساوي عدد السنوات بعد 2001. ارسم مخطط انتشار للبيانات. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

b. حدد نسبة قوة لتمثيل للبيانات. $y = 904.254x^{-0.149}$

c. استخدم النسبة لتتنبأ بتداول الصحف في 2015. 611,068

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

102. **SAT/ACT** في الشكل، ما قيمة z؟ **B**

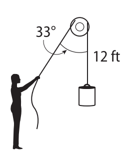


A 15
B $15\sqrt{2}$
C $15\sqrt{3}$
D $30\sqrt{2}$
E $30\sqrt{3}$

103. **مراجعة** يستخدم محمد سلمًا للوصول إلى نافذة أعلى من الأرض بمقدار 10 أقدام. إذا كان السلم يبعد 3 أقدام عن الجدار، فكم ينبغي أن يكون طول السلم؟ **G**

F 9.39 ft
G 10.44 ft
H 11.23 ft
J 12.05 ft

104. يمسك شخص بطرف حبل يمر حول بكرة وبالطرف الآخر يتعلق ثقل. افترض أن الثقل على ارتفاع يد الشخص. ما المسافة بين يد الشخص والثقل؟ **A**



A 7.8 ft
B 10.5 ft
C 12.9 ft
D 14.3 ft

105. **مراجعة** طائرة ورقية تحلق بزاوية 45°. طول خيط الطائرة الورقية يبلغ 120 قدمًا. ما ارتفاع الطائرة الورقية من النقطة التي يُمسك الحبل عندها؟ **G**

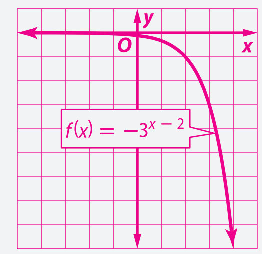
F 60 ft
G $60\sqrt{2}$ ft
H $60\sqrt{3}$ ft
J 120 ft

3 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب اطلب من كل طالب رسم مثلث قائم الزاوية، وقم بتسمية أضلاعه، وحدد إحدى الزوايا الحادة باسم θ. ثم حدد إحدى الدوال المثلثية الست.

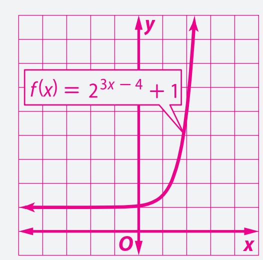
إجابات إضافية

95.



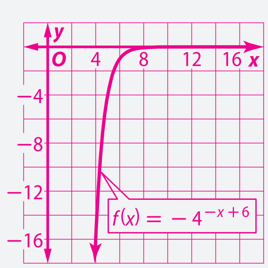
$D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, 0)$؛ لا يوجد تقاطع مع المحور x، يوجد تقاطع مع المحور y: $-\frac{1}{9}$؛ خط مقارب أفقي عند $y = 0$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$; تتناقص عند $(-\infty, \infty)$

96.



$D = (-\infty, \infty)$, $R = (1, \infty)$؛ لا يوجد تقاطع مع المحور x، يوجد تقاطع مع المحور y: $\frac{17}{16}$؛ خط مقارب أفقي عند $y = 1$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$; تتزايد عند $(-\infty, \infty)$

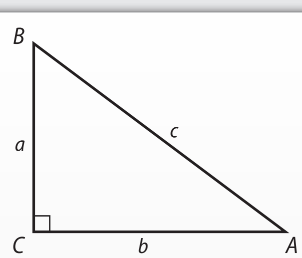
97.



$D = (-\infty, \infty)$, $R = (-\infty, 0)$؛ لا يوجد تقاطع مع المحور x، يوجد تقاطع مع المحور y: -4096؛ خط مقارب أفقي عند $y = 0$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$; تتزايد عند $(-\infty, \infty)$

التدريس المتمايز BL

التوسع استخدم المعلومات التالية لحل المثلث قائم الزاوية. يبلغ محيط المثلث 36 وحدة، وأطوال ساقي المثلث هي 6 وحدات و3 وحدات أقل من وتر المثلث، على التوالي.
$a = 9$ وحدات؛ $b = 21$ وحدة؛ $c = 51$ وحدة؛ $A \approx 36.9°$, $B \approx 53.1°$



UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 148 12/15/2016 11:39:42 PM

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-2 استخدم مقاييس الزوايا الحادة بالدرجات في المثلثات المعطاة.

الدرس 3-2 حوّل مقاييس الزوايا بالدرجات إلى قياسات بالراديان، والعكس بالعكس.
استخدم مقاييس الزاوية لحل مسائل من الحياة اليومية.

بعد الدرس 3-2 أوجد قيمة الدوال المثلثية لأي زاوية باستخدام دائرة الوحدة.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

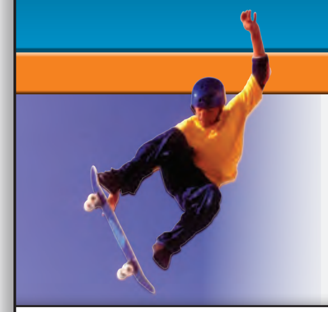
اطرح السؤال التالي:

- إذا وقف طالب ووجهه ناحية الغرب، فكم درجة دوران ينبغي أن يدور الطالب ليتوجه بوجهه ناحية الشمال؟ الإجابة النموذجية: الدوران إلى اليمين بزاوية 90°.

(يُتبع في الصفحة التالية)

الدرس 3-2 الدرجات والراديان

::السابق	::الحالي	::لماذا؟
لقد استخدمت قياسات الزوايا الحادة في المثلثات المعطاة درجاتها.	1 حوّل قياسات الزوايا بالدرجات إلى قياسات راديان، والعكس بالعكس. 2 استخدم قياسات الزاوية لحل مسائل من الحياة اليومية.	في الدرس 3-1، قمت بالعمل فقط على الزوايا الحادة، لكن يمكن أن تكون للزوايا أي قياس من عدد حقيقي. على سبيل المثال، في التزلج، 540 هي حيلة جوية يقوم المتزلج فيها بالدوران مع لوح التزلج بزاوية 540°، أو دورة كاملة ونصف، في الهواء.



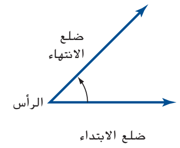
المفردات الجديدة

رأس (vertex)
ضلع الابتداء (initial side)
ضلع الانتهاء (terminal side)
الوضع القياسي (standard position)
راديان (radian)
زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء (coterminal angles)
سرعة خطية (linear speed)
سرعة الزاوية (angular speed)
القطاع (sector)

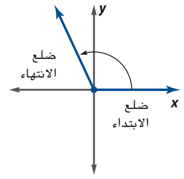
1 الزوايا وقياساتها

من الهندسة، ربما تتذكر أن الزاوية كانت تُعرّف بشعاعين غير متداخلين يشتركان في نقطة تعرف بـــ **الرأس**. يمكن أن نفكر في الزاوية أيضًا باعتبارها تكونت من حركة دوران الشعاع حول نقطة الرأس. من وجهة النظر الديناميكية هذه، يكوّن موقع بداية الشعاع **ضلع الابتداء** للزاوية، بينما يكوّن موقع الشعاع بعد الدوران **ضلع الانتهاء** للزاوية. في المستوى الإحداثي، الزاوية التي يقع رأسها عند نقطة الأصل وضلع الابتداء على المحور الأفقي x يقال إنها في **وضع قياسي**.

زاوية

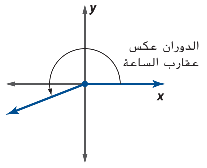


زاوية في الوضع القياسي

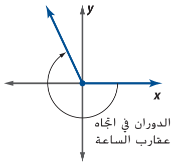


يبين قياس الزاوية كمية واتجاه الدوران الضروري للتحرك من ضلع الابتداء إلى ضلع الانتهاء للزاوية. تنشأ *الزاوية الموجبة* عن الدوران عكس عقارب الساعة وتنشأ الزاوية السالبة عن الدوران في اتجاه عقارب الساعة.

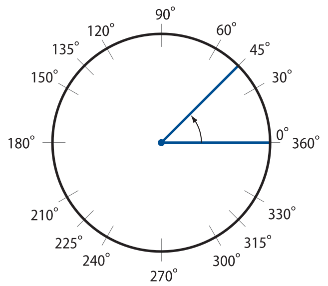
زاوية موجبة



زاوية سلبية



أكثر وحدات قياس الزاوية شيوعًا هي *الدرجة* (°)، التي تساوي $\frac{1}{360}$ دورة كاملة (عكس عقارب الساعة) حول الرأس. من الرسم التخطيطي الموضَّح، يمكنك أن ترى أن 360° تمثل 1 دورة كاملة، 180° تمثل $\frac{1}{2}$ دورة، 90° تمثل $\frac{1}{4}$ دورة، وهكذا، كما هو موضّح على محيط الدائرة.



149

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indb 149 12/15/2016 11:39:45 PM

يمكن أيضًا التعبير عن قياس الدرجة باستخدام صيغة الدرجة العشرية أو الدرجة والدقيقة والثانية (DMS) حيث تنقسم فيها كل درجة إلى 60 دقيقة (′) وكل دقيقة تقسم إلى 60 ثانية (″).

نصيحة دراسية

القاعدة 60 يرجع مفهوم قياس الدرجة إلى البابليين القدماء، الذين قاموا بحسابات فلكية مبكرة باستخدام نظامهم الرقمي، والذي بُني على نظام ستيني (60) بدلاً من النظام العشري (10) الذي نستخدمه اليوم.

مثال 1 التحويل بين صيغة DMS والدرجة العشرية

اكتب كل قياس درجة عشرية في صيغة DMS (درجة، دقيقة وثانية) وكل قياس DMS في صيغة درجة عشرية لأقرب جزء من المئة.

a. 56.735°

أولًا، حوّل 0.735° إلى دقائق وثوان.

$$56.735^\circ = 56^\circ + 0.735^\circ\left(\frac{60'}{1^\circ}\right) \qquad 1^\circ = 60'$$

$$= 56^\circ + 44.1' \qquad \text{بسّط}$$

ثم، حوّل 0.1′ إلى ثوانٍ

$$56.735^\circ = 56^\circ + 44' + 0.1'\left(\frac{60''}{1'}\right) \qquad 1' = 60''$$

$$= 56^\circ + 44' + 6'' \qquad \text{بسّط}$$

إذًا، 56.735° يمكن كتابتها في صورة 56° 44′ 6″.

b. 32° 5′ 28″

كل دقيقة عبارة عن $\frac{1}{60}$ من الدرجة وكل ثانية عبارة عن $\frac{1}{60}$ من الدقيقة. إذًا كل ثانية تمثل $\frac{1}{3600}$ من الدرجة.

$$32^\circ\, 5'\, 28'' = 32^\circ + 5'\left(\frac{1^\circ}{60'}\right) + 28''\left(\frac{1^\circ}{3600''}\right) \qquad 1' = \frac{1}{60}(1^\circ) \text{ و } 1'' = \frac{1}{3600}(1^\circ)$$

$$\approx 32^\circ + 0.083 + 0.008 \qquad \text{بسّط}$$

$$\approx 32.091^\circ \qquad \text{اجمع}$$

إذًا، 32° 5′ 28″ يمكن أن تكتب 32.091° تقريبًا.

تلميح تقني

صيغة DMS يمكنك استخدام بعض الحاسبات لتحويل قيم الدرجة العشرية إلى درجات ودقائق وثوانٍ باستخدام دالة DMS أسفل قائمة Angle.

تمرين موجه

1A. 213.875° **213° 52′ 30″**

1B. 89° 56′ 7″ **89.935°**

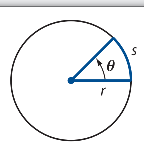
قياس الزوايا بالدرجات يكون ملائمًا عندما تطبق حساب المثلثات لتحل العديد من المسائل من الحياة اليومية، مثل تلك الخاصة بالمسح والملاحة. ولغيرها من التطبيقات على الدوال المثلثية، يتسبب استخدام زاوية مقاسة بالدرجات في مشكلة كبيرة. لا توجد للدرجة علاقة بأي قياس خطي؛ أي أن درجات بوصية أو $\frac{\text{بوصة}}{\text{درجة}}$ ليس لها معنى. قياس الزوايا بواسطة **الراديان** يوفر حلاً لهذه المشكلة.

المفهوم الأساسي قياس الراديان

الشرح القياس θ بقياس الراديان للزاوية المركزية للدائرة يساوي نسبة طول القوس المحصور s لنصف القطر r للدائرة.

الرموز $\theta = \frac{s}{r}$، حيث إن θ قيست بالراديان

مثال يساوي قياس الزاوية المركزية 1 راديان إذا تقاطعت مع قوس بطول نصف قطر الدائرة.



$\theta = 1$ راديان عندما تكون $s = r$.

لاحظ أنه طالما كان طول القوس s ونصف القطر r معروف قياسهما باستخدام الوحدات الخطية نفسها، فالنسبة $\frac{s}{r}$ كمية لابعدية. لهذا السبب فإن كلمة *راديان* أو اختصارها *rad* تحذف غالبًا عند كتابة قياس الراديان لزاوية.

- هل هناك أكثر من طريقة يمكن أن يستخدمها الطالب للاستدارة بحيث يستقر في النهاية في الموضع نفسه ووجهه للشمال؟ الإجابة النموذجية: نعم، الاستدارة لليسار بزاوية 270°.
- لو استمر الطالب في الاستدارة في الاتجاه نفسه، فهل سيعود إلى موضعه ووجهه للشمال؟ نعم
- كم عدد مرات تكرار موضع الشمال من حيث درجات الاستدارة؟ كل 360°

1 الزوايا والقياسات

مثال 1 يبين كيفية تحويل قياسات الزوايا بين صيغة درجة ودقيقة وثانية (DMS) وصيغة الدرجة العشرية. **مثال 2** يبين كيفية التحويل بين الدرجات والراديان. **مثال 3** يبين كيفية تعريف الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء ورسمها.

التقويم التكويني

استخدم تمرينات التطور الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 اكتب كل مقياس درجة كسر عشري في صيغة DMS (درجة، دقيقة وثانية) وكل مقياس DMS في صيغة كسر عشري لأقرب جزء من الألف.

a. 329.125° **329° 7′ 30″**

b. 35° 12′ 7″ **35.202°**

التدريس المتمايز AL

المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية اطلب من الطلاب مد أذرعهم اليمنى لتمثيل الشعاع الأولي في الزاوية. أعطهم زاوية الاستدارة واطلب منهم تحريك أذرعهم اليسرى إلى الموضع التقريبي لشعاع الانتهاء.

مثال إضافي

2 اكتب قياس كل درجة بالراديان كمضاعف لـــ π وكل قياس راديان بالدرجات.

a. $135°$ $\frac{3\pi}{4}$

b. $-30°$ $-\frac{\pi}{6}$

c. $\frac{2\pi}{3}$ $120°$

d. $-\frac{3\pi}{4}$ $-135°$

نصيحة دراسية

العلاقة بين الدرجة و الراديان من المسألة الكلامية المعروضة، يمكنك أن تتبين أن $1° \approx 0.017$ rad و 1 rad $\approx 57.296°$.

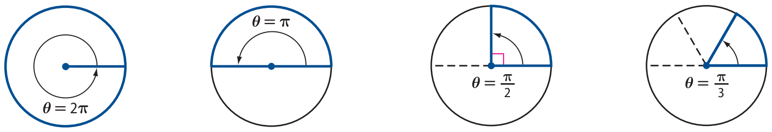
تمثل الزاوية المركزية دورة كاملة واحدة عكس عقارب الساعة حول الرأس بما يتماثل مع طول القوس المساوي لمحيط الدائرة، $2\pi r$. لهذا، يمكنك الحصول على قياسات راديان الآتية:

1 دوران $= \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ rad

$\frac{1}{2}$ دوران $= \frac{1}{2} \times 2\pi = \pi$ rad

$\frac{1}{4}$ دوران $= \frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2}$ rad

$\frac{1}{6}$ دوران $= \frac{1}{6} \times 2\pi = \frac{\pi}{3}$ rad



قراءة في الرياضيات

قياس الزاوية إذا لم يتم تحديد وحدة قياس الزاوية، يتم استخدام قياس الراديان. إذا استُخدِم قياس الدرجة، فلا بد من استخدام رمز الدرجة (°).

بما أن 2π راديان و$360°$ كلاهما يماثل دورة واحدة كاملة، يمكنك كتابة $360° = 2\pi$ راديان أو $180° = \pi$ راديان. تقود المعادلة الأخيرة إلى التعابير المكافئة الآتية:

$1° = \frac{\pi}{180}$ راديان و 1 راديان $= \left(\frac{180}{\pi}\right)°$

باستخدام هذه العبارات، يمكننا الحصول على قواعد التحويل التالية:

المفهوم الأساسي قواعد التحويل بين قياس الدرجة والراديان

1. للتحويل من الدرجات إلى الراديان، اضرب في $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$.

2. للتحويل من راديان إلى درجة، اضرب في $\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$.

مثال 2 التحويل بين قياسي الدرجة والراديان

حول كل قياس من الدرجات إلى الراديان كمضاعف لـــ π وبالعكس.

a. $120°$

$120° = 120°\left(\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}\right)$ اضرب في $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$

$= \frac{2\pi}{3}$ راديان $= \frac{2\pi}{3}$ بسّط

b. $-45°$

$-45° = -45°\left(\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}\right)$ اضرب في $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$

$= -\frac{\pi}{4}$ راديان $= -\frac{\pi}{4}$ بسّط

c. $\frac{5\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ راديان اضرب في $\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$

$= \frac{5\pi}{6}$ راديان $\left(\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}\right) = 150°$ بسّط

d. $-\frac{3\pi}{2}$

$-\frac{3\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$ راديان اضرب في $\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}$

$= -\frac{3\pi}{2}$ راديان $\left(\frac{180°}{\pi \text{ راديان}}\right) = -270°$ بسّط

تمرين موجه

2A. $210°$ $\frac{7\pi}{6}$ **2B.** $-60°$ $-\frac{\pi}{3}$ **2C.** $\frac{4\pi}{3}$ $240°$ **2D.** $-\frac{\pi}{6}$ $-30°$

التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي اطلب من الطلاب استخدام طريقة بديلة للتحويل بين الراديان والدرجات باستخدام النسبة $\frac{\pi \text{ راديان}}{180 \text{ درجة}} = \frac{x \text{ راديان}}{y \text{ درجة}}$.

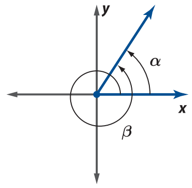
UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 151 12/15/2016 11:39:47 PM

قراءة في الرياضيات

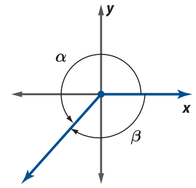
تسمية الزوايا في علم حساب المثلثات، عادة ما تسمى الزوايا بحروف يونانية، مثل α (ألفا)، β (بيتا)، وθ (ثيتا).

بتعريف الزوايا من حيث الدوران حول الرأس، يصبح بإمكان زاويتين أن يكون لهما نفس ضلعي الابتداء والانتهاء ولكن تختلف قياساتهم. تلك الزويا تدعى **الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء**. في الأشكال بالأسفل، الزاويتان α وβ مشتركتان في ضلع الانتهاء

زوايا موجبة مشتركة في ضلع الانتهاء



زوايا موجبة وسلبية مشتركة في ضلع الانتهاء



الزاويتان الموجبتان المشتركتان في ضلع الانتهاء الموضحتان تختلفان في استدارة كاملة واحدة. أي زاوية تحتوي على عدد لا نهائي من الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء التي يمكن إيجادها بجمع أو طرح المضاعفات الصحيحة العدد لـــ$360°$ أو 2π راديان.

المفهوم الأساسي الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء

الدرجات	الراديان
إذا كان α هو قياس الزاوية بالدرجات، إذًا فكل الزوايا التي قياسها $\alpha + 360n°$، حيث n هو عدد صحيح، تشترك في ضلع الانتهاء مع α.	إذا كانت α هي قياس الزاوية بالراديان، إذًا فكل الزوايا التي قياسها $\alpha + 2n\pi$، حيث n هو عدد صحيح، تشترك في ضلع الانتهاء مع α.

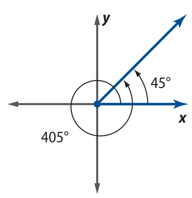
مثال 3 إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء ورسمها

حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة. ثم أوجد مع الرسم زاوية موجبة وزاوية سلبية مشتركة مع ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة.

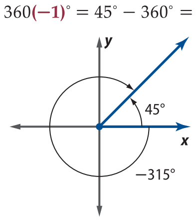
a. $45°$

كل الزوايا ذات القياس $45° + 360n°$ مشتركتان في ضلع الانتهاء مع زاوية ذات قياس $45°$. افترض أن -1، $n = 1$.

$$45° + 360(1)° = 45° + 360° = 405°$$



$$45° + 360(-1)° = 45° - 360° = -315°$$

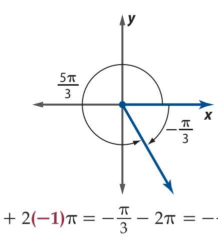


b. $-\frac{\pi}{3}$

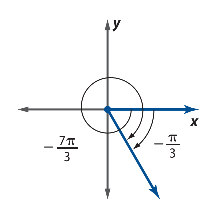
كل الزوايا ذات القياس $-\frac{\pi}{3} + 2n\pi$ مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية $-\frac{\pi}{3}$.

افترض أن -1، $n = 1$.

$$-\frac{\pi}{3} + 2(1)\pi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$$



$$-\frac{\pi}{3} + 2(-1)\pi = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3}$$



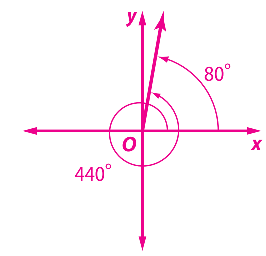
تمرين موجه **3A–B. انظر الهامش.**

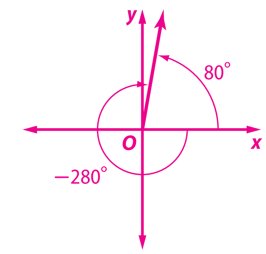
3A. $-30°$ **3B.** $\frac{3\pi}{4}$

مثال إضافي

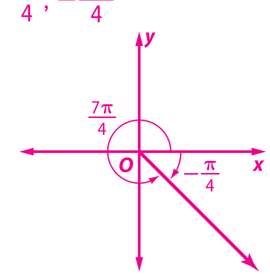
3 حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة. ثم أوجد مع الرسم زاوية موجبة وزاوية سالبة مشتركة مع ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة. **3a–b.** n عدد صحيح.

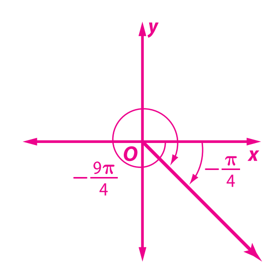
a. $80°$ $80° + 360n°$؛ الإجابة النموذجية: $440°, -280°$





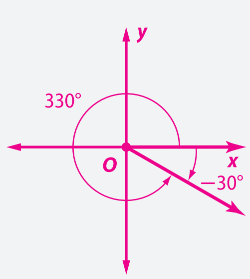
b. $-\frac{\pi}{4}$ $-\frac{\pi}{4} + 2n\pi$؛ الإجابة النموذجية: $\frac{7\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}$

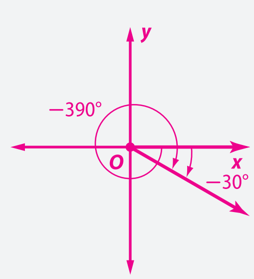


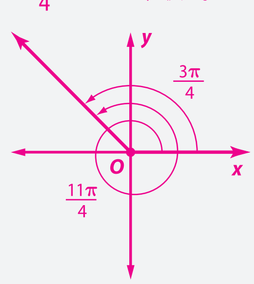


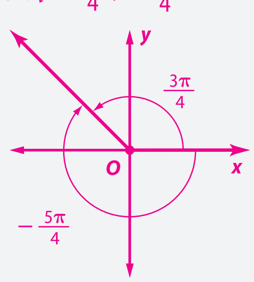
إجابات إضافية (تمرين موجه) 3A–B. n عدد صحيح.

3A. $-30° + 360n°$; الإجابة النموذجية: $330°; -390°$ **3B.** $\frac{3\pi}{4} + 2n\pi$; الإجابة النموذجية: $\frac{11\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}$









إرشاد للمعلمين الجدد

التحقق من الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء. الطريقة السريعة للتحقق من أن الزوايا مشتركة في ضلع الانتهاء هي التحقق من أن الفارق بينها رقم صحيح من مضاعفات الدرجة $360°$. على سبيل المثال، $180° - (-540°) = 720° = 2 \times 360°$.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 152 12/15/2016 11:39:48 PM

2 تطبيقات قياس الزاوية

مثال 4 يبين كيفية إيجاد طول القوس لقياس زاوية مركزية مُعينة. **مثال 5** يبين كيفية تحديد السرعة الزاوية والسرعة الخطية لجسم يدور. **مثال 6** يبين كيفية إيجاد مساحة قطاع من دائرة.

مثال إضافي

4 أوجد طول القوس المحصور في كل دائرة باستخدام القياسات المعطاة لكل من الزاوية المركزية ونصف القطر. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

a. $\frac{\pi}{3}, r = 4$ in. 4.2 in.

b. $125°, r = 7$ cm 15.3 cm

التركيز على محتوى الرياضيات

السرعة الزاوية تُعرف السرعة الخطية بالصيغة $v = \frac{s}{t}$، حيث s هي طول القوس و t هو الزمن. ويمكن أيضًا كتابة السرعة الخطية باستخدام السرعة الزاوية ω. ويبدأ الانحراف بإيجاد قيمة $\theta = \frac{s}{r}$ بالنسبة لـ s: $s = r\theta$. وعند قسمة كل طرف على t ينتج $\frac{s}{t} = \frac{r\theta}{t}$. عند إحلال السرعة الخطية v محل $\frac{s}{t}$ و ω محل $\frac{\theta}{t}$ تنتج معادلة للسرعة الخطية باستخدام السرعة الزاوية: $v = r\omega$.

2 تطبيقات باستخدام قياس الزاوية

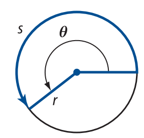
حل $\theta = \frac{s}{r}$ لطول القوس s يعطينا صيغة معادلة لإيجاد طول قوس في دائرة.

المفهوم الأساسي طول القوس

إذا كانت θ هي الزاوية المركزية في دائرة نصف قطرها r إذًا فطول القوس المحصور s يمكن الحصول عليه كالآتي:

$$s = r\theta$$

حيث إن θ قياسها بالراديان.

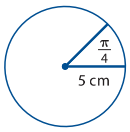


عند قياس θ بالدرجات، يمكنك أيضًا استخدام المعادلة $s = \frac{\pi r\theta}{180}$ والتي تحتوي بالفعل على تحويل الدرجة–الراديان.

مثال 4 إيجاد طول القوس

أوجد طول القوس المحصور في كل دائرة باستخدام القياسات المعطاة لكل من الزاوية المركزية ونصف القطر. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

a. $\frac{\pi}{4}, r = 5$ cm



$s = r\theta$ طول القوس

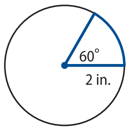
$= 5\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $\theta = \frac{\pi}{4}$ و $r = 5$

$= \frac{5\pi}{4}$ بسّط

طول القوس المحصور يساوي $\frac{5\pi}{4}$ أو حوالي 3.9 سنتيمتر.

b. $60°, r = 2$ in

الطريقة 1 حوّل $60°$ إلى قياس الراديان، ثم استخدم $s = r\theta$ لإيجاد طول القوس.



$60° = 60°\left(\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}\right)$ اضرب $\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}$.

$= \frac{\pi}{3}$ بسّط

باستخدام التعويض $r = 2$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$.

$s = r\theta$ طول القوس

$= 2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ $\theta = \frac{\pi}{3}$ و $r = 2$

$= \frac{2\pi}{3}$ بسّط

الطريقة 2 استخدم $s = \frac{\pi r\theta}{180°}$ لإيجاد طول القوس.

$s = \frac{\pi r\theta}{180°}$ طول القوس

$= \frac{\pi(2)(60°)}{180°}$ $\theta = 60°$ و $r = 2$

$= \frac{2\pi}{3}$ بسّط

طول القوس المحصور يساوي $\frac{2\pi}{3}$ أو حوالي 2.1 بوصة.

تمرين موجه

4A. $\frac{2\pi}{3}, r = 2$ m $\frac{4\pi}{3}$ أو حوالي 4.2 m

4B. $135°, r = 0.5$ ft $\frac{3\pi}{8}$ أو حوالي 1.2 ft

نصيحة دراسية

استخدام الراديان

لاحظ في المثال 4a أنه عندما تكون $r = 5$ سنتميترات وراديان $\theta = \frac{\pi}{4}$، $s = \frac{5\pi}{4}$ سنتيمتر، وليس سنتيمتر–راديان $\frac{5\pi}{4}$. هذا لأن الراديان نسبة لابُعْدِيَّة.

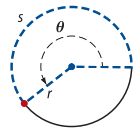
يمكن استخدام قاعدة طول القوس لتحليل حركة دائرية. معدل تحرك الجسم على طول مسار دائري يسمى **السرعة الخطية**. معدل دوران الجسم حول نقطة ثابتة يسمى **سرعة الزاوية**. السرعة الخطية تقاس بوحدات كالأميال لكل ساعة، بينما تقاس السرعة الزاوية بوحدات كالدورات لكل دقيقة.

المفهوم الأساسي السرعة الخطية والزاوية

لنفترض أن جسمًا تحرك بسرعة ثابتة على ممر دائري نصف قطره r.

إذا كانت s هي طول القوس الذي يقطعه الجسم في حركته خلال الزمن t.
إذًا فسرعة الجسم *الخطية* v يتم إيجادها بالمعادلة $v = \frac{s}{t}$.

إذا كانت θ هي سرعة الدوران (بالراديان) التي يتحرك الجسم فيها خلال الزمن t.
فإن *السرعة الزاوية* ω للجسم يتم إيجادها بالمعادلة $\omega = \frac{\theta}{t}$.

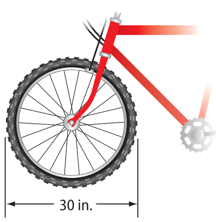


قراءة في الرياضيات

أوميجا الحرف اليوناني الصغير أوميجا ω يستخدم عادة للدلالة على السرعة الزاوية.

مثال 5 من الحياة اليومية إيجاد السرعات الزاوية والخطية

ركوب الدراجة يقود الساعي دراجة كما هو مبين.



a. خلال عملية توصيل واحدة، تدور الإطارات بمعدل 140 دورة في الدقيقة. أوجد السرعة الزاوية للإطارات في الدقيقة بقياس راديان.

بما أن قياس كل دورة 2π راديان، فإن 140 دورة تماثل زاوية الدوران θ هي $2\pi \times 140$ أو 280π راديان.

$$\omega = \frac{\theta}{t} \quad \text{سرعة زاوية}$$

$$= \frac{280\pi \text{ راديان}}{1 \text{دقيقة}} \quad \theta = 280\pi \text{ راديان و } t = 1 \text{ دقيقة}$$

ومن ثم، تكون السرعة الزاوية للإطار 280π أو حوالي 879.6 راديان لكل دقيقة.

b. في جزء من الطريق خلال مهمة التوصيل التالية، يدور الإطار بمعدل ثابت بمقدار 2.5 دورة لكل ثانية. أوجد السرعة الخطية للإطار بمعدل ميل لكل ساعة.

يماثل الدوران 2.5 دورة زاوية دوران θ لـــ $2\pi \times 2.5$ أو 5π.

$$v = \frac{s}{t} \quad \text{سرعة خطية}$$

$$= \frac{r\theta}{t} \quad s = r\theta$$

$$= \frac{15(5\pi) \text{ بوصة}}{1 \text{ ثانية}} = \frac{75\pi \text{ بوصة}}{1 \text{ ثانية}} \quad r = 15 \text{ بوصة، } \theta = 5\pi \text{ راديان، و } t = 1 \text{ ثانية}$$

استخدم التحليل البعُدي لتحويل هذه السرعة من بوصة لكل ثانية إلى ميل لكل ساعة.

$$\frac{75\pi \cancel{\text{ بوصة}}}{1 \cancel{\text{ ثانية}}} \times \frac{60 \cancel{\text{ ثانية}}}{1 \cancel{\text{ دقيقة}}} \times \frac{60 \cancel{\text{ دقيقة}}}{1 \text{ ساعة}} \times \frac{1 \cancel{\text{ قدم}}}{12 \cancel{\text{ بوصة}}} \times \frac{1 \text{ ميل}}{5280 \cancel{\text{ قدمًا}}} \approx \frac{13.4 \text{ ميل}}{\text{ساعة}}$$

ومن ثم، فالسرعة الخطية للإطار حوالي 13.4 ميل لكل ساعة.

تمرين موجه

الوسائط لاحظ جهاز DVD المبين.

5A. أوجد السرعة الزاوية لجهاز DVD بالراديان لكل ثانية إذا كان القرص يدور بمعدل 3.5 دورة في الثانية.
7π أو حوالي 22.0 rad/s

5B. إذا كان مشغل DVD قد سخن بشدة وبدأ دوران القرص يبطئ بمعدل 3 دورة في الثانية، فأوجد السرعة الخطية للقرص بالمتر لكل دقيقة.
حوالي 67.9 m/min

الربط بالحياة اليومية

في بعض مدن الولايات المتحدة، يمكن للساعي أن يقود بمعدل 30 إلى 35 ميلاً في اليوم، بينما يقوم بتوصيل 30 إلى 45 طردًا.

المصدر: جمعية سعاة الدراجات بنيويورك

مثال إضافي

5 **أسطوانات الموسيقى** يصل قطر دائرة أسطوانة الفينيل الكلاسيكية إلى 30 cm. عند تشغيلها على جهاز الأسطوانات، تدور الأسطوانة بسرعة $33\frac{1}{3}$ لفة في الدقيقة.

a. أوجد السرعة الزاوية للأسطوانة عند تشغيلها بوحدة الراديان في الدقيقة. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. 209.4 راديان في الدقيقة

b. أوجد السرعة الخطية عند الحافة الخارجية للأسطوانة عند دورانها، بوحدة السنتيمتر في الثانية. 52.35 cm/s تقريبًا

التدريس باستخدام التكنولوجيا

مُشغل الموسيقى المحمول تستخدم العديد من أجهزة مُشغل الموسيقى المحمول محركات أقراص ثابتة صغيرة جدًا تدور بسرعات عالية. اطلب من الطلاب استخدام الإنترنت للبحث عن مواصفات مُشغل موسيقى معين. واطلب منهم استخدام السرعة الزاوية وحجم القرص المغناطيسي في إيجاد قيمة السرعة الخطية للقرص عند الحافة الخارجية. إذا تعذر العثور على مواصفات القرص الثابت، يمكن للطلاب قياس مُشغل الموسيقى وإيجاد قيمة قطر الدائرة، ثم يقومون بالحسابات.

التدريس المتمايز BL

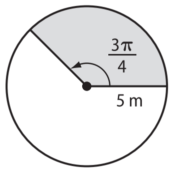
المتعلمون أصحاب النمط المنطقي تتدرب ليلى ومها للمشاركة في مسابقة الجري الدولية. تجري ليلى دورة واحدة على المضمار الخارجي لمضمار دائري قطره 1000 قدم. معدل سرعتها الثابت هو 12 mi/h. وتجري مها دورة واحدة على المضمار الخارجي لمضمار شبه دائري قطره 1125 قدمًا. وتجري أيضًا بسرعة 12 mi/h. أوجد بالدقائق الزمن الذي تحتاجه كل منهما لإنهاء دورة واحدة. وقارن كل زمن بنصف قطر المضمار. يبلغ الزمن الذي تستغرقه ليلى 2.97 دقيقة تقريبًا. ويبلغ الزمن الذي تستغرقه ليلى 3.35 دقيقة تقريبًا. النسبة بين الزمنين تساوي النسبة بين نصف قطر المضمارين.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indb 154 12/15/2016 11:39:51 PM

مثال إضافي

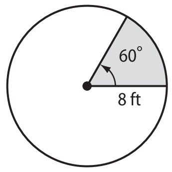
6 أوجِد مساحة قطاع الدائرة.

a.



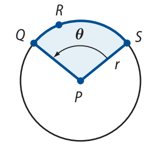
$\frac{75\pi}{8}$ أو تقريبًا $29.5\ m^2$

b.



$\frac{32\pi}{3}$ أو تقريبًا $33.5\ ft^2$

تذكر من مادة الهندسة أن **قطاع** الدائرة هو منطقة محاطة بالزاوية المركزية وقوسها المحصور. على سبيل المثال، المنطقة المظللة في الشكل هي قطاع الدائرة P. ونسبة مساحة القطاع إلى مساحة الدائرة بالكامل يساوي نسبة طول القوس المقابل إلى محيط الدائرة. افترض أن A تمثل مساحة القطاع.



$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}}$ $\quad \frac{A}{\pi r^2} = \frac{\text{طول } \widehat{QRS}}{2\pi r}$

طول $\widehat{QRS}$ هو $r\theta$. $\quad \frac{A}{\pi r^2} = \frac{r\theta}{2\pi r}$

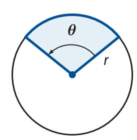
حل A. $\quad A = \frac{1}{2}r^2\theta$

المفهوم الأساسي مساحة القطاع

المساحة A من قطاع دائرة لها نصف قطر r وزاوية مركزية θ

$A = \frac{1}{2}r^2\theta$.

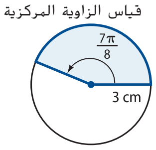
حيث إن θ قياسها بالراديان.



المثال 6 إيجاد مساحات القطاعات

a. أوجد مساحة قطاع الدائرة.

قياس الزاوية المركزية للقطاع θ هو $\frac{7\pi}{8}$. ونصف قطره 3 سم.

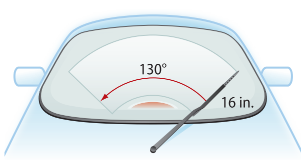


$A = \frac{1}{2}r^2\theta$ مساحة القطاع

$= \frac{1}{2}(3)^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{63\pi}{16}$ $\quad \theta = \frac{7\pi}{8}$ و $r = 3$

ومن ثم، مساحة القطاع $\frac{63\pi}{16}$ أو حوالي 12.4 سنتيمتر مربع.

b. الماسحات أوجد المساحة التقريبية التي مسحتها شفرة المسّاحة المبينة، إذا كان طول مسّاحة الزجاج الأمامي كله 26 بوصة.



المساحة الممسوحة بشفرة المسّاحة هي الفرق بين مساحات القطاعات ونصف قطر 26 بوصة و 16 − 26 أو 10 بوصة.

حوّل قياس الزاوية المركزية إلى الراديان.

$130° = 130°\left(\frac{\pi \text{ راديان}}{180°}\right) = \frac{13\pi}{18}$

ثم استخدم نصف قطر كل قطاع لإيجاد المساحة الممسوحة. افترض أن A_1 = مساحة القطاع بنصف قطر 26 بوصة. وافترض أن A_2 = مساحة القطاع بنصف قطر 10 بوصات.

$A = A_1 - A_2$ المساحة الممسوحة

$= \frac{1}{2}(26)^2\left(\frac{13\pi}{18}\right) - \frac{1}{2}(10)^2\left(\frac{13\pi}{18}\right)$ مساحة القطاع

$= \frac{2197\pi}{9} - \frac{325\pi}{9}$ بسّط.

$= 208\pi = 653.5$ تقريبًا بسّط.

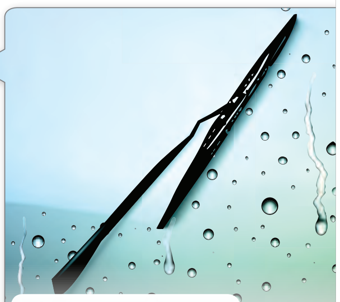
ومن ثم، فالمنطقة الممسوحة حوالي 653.5 بوصة مربعة.

تمرين موجه

أوجد مساحة قطاع الدائرة بواسطة الزاوية المركزية المعطاة θ ونصف القطر r.

6A. $\theta = \frac{3\pi}{4}, r = 1.5$ ft حوالي $2.65\ ft^2$

6B. $\theta = 50°, r = 6$ m حوالي $15.7\ m^2$



الربط بالحياة اليومية

تبلغ زاوية المسح القياسية لمسّاحة الزجاج الأمامي في السيارة حوالي 67°. وبشكل عام، فإن طول شفرات مسّاحات الزجاج الأمامي يتراوح بين 12 إلى 30 بوصة.

المصدر: مجلة Car and Driver

التدريس المتمايز AL OL

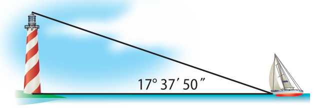
المتعلمون أصحاب النمط اللفظي/اللغوي قسِّم الطلاب إلى مجموعات ثنائية. واطلب من كل طالب أن يكتب مسألة تُعطي زاوية مركزية بالدرجات وطول نصف القطر، وتطلب مساحة القطاع وطول القوس. ثم اطلب من الطلاب تبادل المسائل وحلها، مع ذكر تفسير كل خطوة.

تمارين

اكتب كل قياس درجة عشرية في صيغة DMS (درجة، دقيقة وثانية) وكل قياس DMS في صيغة درجة عشرية لأقرب جزء من المئة. (المثال 1)

1. 11.773° **$11^\circ 46' 23''$**
2. 58.244° **$58^\circ 14' 38''$**
3. 141.549° **$141^\circ 32' 56''$**
4. 273.396° **$273^\circ 23' 46''$**
5. $87^\circ 53' 10''$ **87.886°**
6. $126^\circ 6' 34''$ **126.109°**
7. $45^\circ 21' 25''$ **45.357°**
8. $301^\circ 42' 8''$ **301.702°**

9. **الملاحة** يستخدم عاشق للإبحار آلة السدس، وهي آلة يمكنها قياس الزاوية بين جسمين بدقة تصل إلى أقرب 10 ثوان، لقياس الزاوية بين مركب الصيد خاصته والفنار. فإذا كانت قراءته $17^\circ 37' 50''$، فما القياس بصيغة الدرجة العشرية مقرّبة إلى أقرب جزء من مئة. (المثال 1)
17.63°



اكتب كل قياس درجة بالراديان كمضاعف لـ π وكل قياس راديان بالدرجات. (المثال 2)

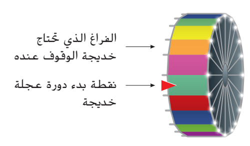
10. 30° **$\frac{\pi}{6}$**
11. 225° **$\frac{5\pi}{4}$**
12. -165° **$-\frac{11\pi}{12}$**
13. -45° **$-\frac{\pi}{4}$**
14. $\frac{2\pi}{3}$ **120°**
15. $\frac{5\pi}{2}$ **450°**
16. $-\frac{\pi}{4}$ **-45°**
17. $-\frac{7\pi}{6}$ **-210°**

حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة. ثم أوجد مع الرسم زاوية موجبة وزاوية سالبة مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة. (المثال 3)

18–25. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

18. 120°
19. -75°
20. 225°
21. -150°
22. $\frac{\pi}{3}$
23. $-\frac{3\pi}{4}$
24. $-\frac{\pi}{12}$
25. $\frac{3\pi}{2}$

26. **برنامج اللعب** تدير خديجة عجلة في برنامج اللعب. توجد 20 قيمة في فراغات متساوية الحجم على محيط العجلة. القيمة التي تحتاج إليها خديجة لتفوز تقع على بعد فراغين أعلى الفراغ الذي تبدأ عنده دورتها، ويجب أن تقوم العجلة بدورة كاملة واحدة على الأقل ليتم احتسابها. صِف الدورة التي ستكفل لخديجة نتيجة الفوز بالدرجات. (المثال 3) **الإجابة النموذجية: 396°**



أوجد طول القوس المحصور بقياس الزاوية المركزية المعطاة في دائرة وبنصف القطر المعطى. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. (المثال 4) **27–32. انظر الهامش.**

27. $\frac{\pi}{6}, r = 2.5$ m
28. $\frac{2\pi}{3}, r = 3$ in.
29. $\frac{5\pi}{12}, r = 4$ yd
30. $105^\circ, r = 18.2$ cm
31. $45^\circ, r = 5$ mi
32. $150^\circ, r = 79$ mm

33. **حديقة الملاهي** تدور لعبة دوامة الخيل في حديقة ملاهي 3024° في الجولة. (المثال 4)
  a. كم سيدور راكب يجلس على بعد 13 قدمًا من مركز اللعبة في خلال الجولة؟ **نحو 686 ft**
  b. كم سيدور راكب آخر جالس على بعد 18 قدمًا من مركز العجلة أكثر من الراكب الأول في الجزء a خلال الجولة؟ **نحو 264 ft**

أوجد عدد اللفات في كل دورة لكل دقيقة بمعلومية سرعة الزاوية وأوجد نصف القطر بمعلومية السرعة الخطية ومعدل الدوران. (المثال 5)

34. $\omega = \frac{2}{3}\pi$ rad/s **20 rev/min**
35. $\omega = 135\pi$ rad/h **1.125 rev/min**
36. $\omega = 104\pi$ rad/min **52 rev/min**
37. $v = 82.3$ m/s, 131 rev/min **6 m**
38. $v = 144.2$ ft/min, 10.9 rev/min **2.1 ft**
39. $v = 553$ in./h, 0.09 rev/min **16.3 in.**

40. **التصنيع** تصنع شركة العديد من المناشير الدائرية، حيث أقطار النصول وسرعات المحرك موضحة بالأسفل. (المثال 5)

قطر النصل (in.)	سرعة الموتور (rps)
3	2800
5	5500
$5\frac{1}{2}$	4500
$6\frac{1}{8}$	5500
$7\frac{1}{4}$	5000

انظر الهامش.
  a. أوجد سرعة الزاوية والسرعة الخطية للنصول في كل منشار. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.
  b. ما معدل السرعة الخطية للمنشار ذي النصل البالغ $6\frac{1}{8}$ بوصات عن المنشار ذي النصل البالغ 3 بوصات؟ **79,443 in. s**

41. **سيارات** على امتداد الطريق السريع، تدور إطارات إحدى المركبات بمدى 646 و840 دورة في الدقيقة. قطر كل إطار 26 بوصة. (المثال 5) **1680π rad/min إلى 1292π rad/min**
  a. أوجد مدى قيم السرعات الزاوية للإطارات بالراديان لكل دقيقة.
  b. أوجد مدى قيم السرعات الخطية للإطارات بالميل لكل ساعة. **65 mi/h إلى 50 mi/h**

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 50 للتحقق من فهم الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص واجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع قد ينسى الطلاب في التمارين من 27 إلى 32 تضمين الوحدات الخطية لطول القوس. ذكّر الطلاب بأنّ الطول يحتاج إلى وحدة لتعريف قيمته. وبالمثل، ينبغي للطلاب في التمارين من 43 إلى 48 تضمين وحدات مربعة، لأنهم يقيسون المساحة.

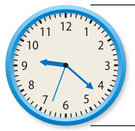
إجابات إضافية

27. 1.3 m
28. 6.3 in.
29. 5.2 yd
30. 33.4 cm
31. 3.9 mi
32. 206.8 mm
40a. 3-in. saw: 17,592.9 rad/s; 26,389.4 in./s
5-in. saw: 34,557.5 rad/s; 86,393.8 in./s
$5\frac{1}{2}$-in. saw: 28,274.3 rad/s; 77,754.4 in./s
$6\frac{1}{8}$-in. saw: 34,557.5 rad/s; 105,832.4 in./s
$7\frac{1}{4}$-in. saw: 31,415.9 rad/s; 113,882.7 in./s

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1–50, 73, 75–100	1–49 فردي، 97–100	2–50 زوجي، 73, 75–96
OL ضمن المستوى	1–61 فردي، 62–65، 67–71 فردي، 72, 73, 75–100	1–50, 97–100	51–73, 75–96
BL أعلى من المستوى	51–100		

42. الوقت محيط قطر ساعة حائط قياس يساوي $8\frac{1}{2}$ بوصة. طول عقرب الساعات يساوي 2.4 بوصة، بينما طول عقرب الدقائق يساوي 3.2 بوصة، وطول عقرب الثواني يساوي 3.4 بوصة. (المثال 5)

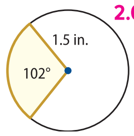


a. أوجد سرعة الزاوية بالراديان في الساعة والسرعة الخطية بالبوصة في الساعة لكل عقرب. **انظر الهامش.**

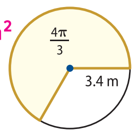
b. إذا كانت السرعة الخطية لعقرب الثواني تساوي 20 بوصة في الدقيقة، فهل تعمل الساعة بسرعة أم ببطء؟ كم من الوقت سيزيد أو ينقص في اليوم؟ **حوالي 1.53 hr**

هندسة أوجد مساحة كل قطاع. (مثال 6)

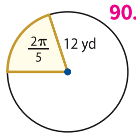
43. **$2.0\ in^2$**



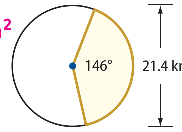
44. **$24.2\ m^2$**



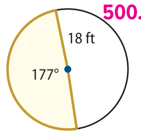
45. **$90.5\ yd^2$**



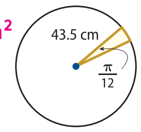
46. **$145.9\ km^2$**



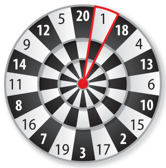
47. **$500.5\ ft^2$**



48. **$247.7\ cm^2$**



49. ألعاب لوحة الأسهم المبينة مقسمة إلى عشرين قطاعًا متساويًا. إذا كان قطر اللوحة 18 بوصة، فما المساحة التي يغطيها كل قطاع على اللوحة؟ (المثال 6) **$12.7\ in^2$**



50. رعاية الحديقة تروي مرشة مساحة تشكّل ثلث دائرة. إذا كان التيار المتدفق من المرش يصل إلى 6 أقدام، فما مساحة العشب التي يرويها المرش؟ (المثال 6) **$37.7\ ft^2$**

B **مساحة قطاع الدائرة وقياس زاوية مركزها معطيان. أوجد نصف قطر الدائرة.**

51. $A = 29\ ft^2,\ \theta = 68°$ **7 ft** **52.** $A = 808\ cm^2,\ \theta = 210°$ **21 cm**

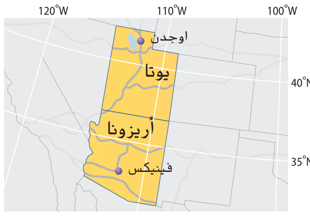
53. $A = 377\ in^2,\ \theta = \frac{5\pi}{3}$ **12 in.** **54.** $A = 75\ m^2,\ \theta = \frac{3\pi}{4}$ **8 m**

55. صِف قياس الراديان بين 0 و 2π لزاوية θ تقع في وضع قياسي ويقع ضلعها الطرفي في:

a. الربع I **c.** الربع III
b. الربع II **d.** الربع IV

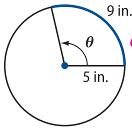
56. عندما يكون الضلع الطرفي لزاوية تتخذ الوضع القياسي واقعًا على أحد المحاور الإحداثية، فإن الزاوية تسمى *زاوية ربعية*. قدّم قياسات الراديان لأربع زوايا ربعية. **الإجابة النموذجية: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$**

57. الجغرافيا تقع فينيكس وأريزونا واوجدن ويوتا جغرافيًا على خط الطول نفسه، وهو ما يعني أن اوجدن تقع مباشرة شمال فينيكس. خط طول فينيكس هو $33°\ 26'\ N$، وخط طول اوجدن هو $41°\ 12'\ N$. إذا كان نصف قطر الأرض تقريبًا 3963 ميلاً، فكم تبعد المدينتين عن بعضهما؟ **حوالي 537 ميلاً**

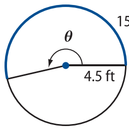


أوجد قياس زاوية θ بالراديان والدرجات.

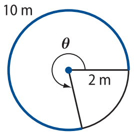
58. **1.8 راديان أو حوالي 103.1°**



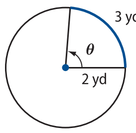
59. **3.3 راديان أو حوالي 191°**



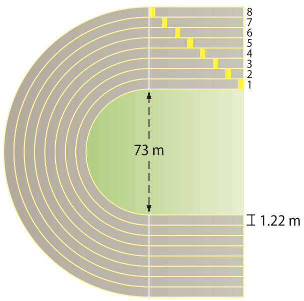
60. **5 راديان أو حوالي 286.5°**



61. **1.5 راديان أو حوالي 85.9.5°**



62. طريق منحنى طريق قياسي له 8 حارات هو طريق دائري كما هو موضح.



a. ما طول الحافة الخارجية للحارة 4 في المنحنى؟ **حوالي 130 m**

b. كم يكون فرق الطول بين الحافة الداخلية للحارة 7 والحافة الداخلية للحارة 3 في المنحنى؟ **حوالي 15.3 m**

157

انتبه!

خطأ شائع قد يجد الطلاب صعوبة في التمرين 42 عند تطبيق التحليل البُعدي. ذكّرهم أنه يمكن كتابة أي علاقة تساوي، مثل 1 ساعة = 60 دقيقة، كمعاملي تحويل محتملين، $\frac{\text{1 ساعة}}{\text{60 دقيقة}}$ و $\frac{\text{60 دقيقة}}{\text{1 ساعة}}$. وينبغي هنا أن يضربوا في معامل التحويل الذي يلغي الوحدة المعلومة وينتج الوحدة المطلوبة (غير المعلومة).

إجابات إضافية

42a. ساعة: $\frac{\pi}{6}$ rad/h; 1.26 in./h

دقيقة: 2π rad/h; 20.1 in./h

ثانية: 120π rad/h; 1281.8 in./h

55a. الربع I: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

55b. الربع II: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

55c. الربع III: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

55d. الربع IV: $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

المتابعة

لقد استكشف الطلاب كيفية كتابة قياسات الزاوية بالدرجات والراديان.

أسأل:

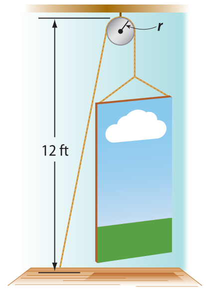
- فيمَ تفيد كتابة قياسات الزاوية بطرق مختلفة؟ الإجابة النموذجية: تفيد كتابة قياسات الزاوية بالدرجات عند حل المسائل بدون القياسات الخطية، بينما تفيد كتابة قياسات الزاوية بالراديان عند حل المسائل ذات القياسات الخطية.

.63 **دراما** بكرة قطرها r تستخدم في رفع جزء من ديكور المسرح في أثناء الاستراحة. ارتفاع البكرة 12 قدمًا. **18.8 in. حوالي**

a. إذا كان نصف قطر البكرة 6 بوصات وتدور °180، فكم سيكون ارتفاع الجسم؟

b. إذا كان نصف قطر البكرة 4 بوصات وتدور °900، فكم سيكون ارتفاع الجسم؟

حوالي 5.2 ft



.64 **الهندسة** تُستخدم بكرة كالتي في التمرين 63 في رفع صندوق في مستودع. حدد أي السيناريوهات التالية يمكن أن يستخدم في رفع الصندوق لمسافة 19 قدمًا أسرع. اشرح كيف توصلت لاستنتاجك. **انظر الهامش.**

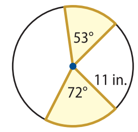
I. نصف قطر البكرة 5 بوصات يدور 65 دورة في الدقيقة.

II. نصف قطر البكرة 4.5 بوصات يدور 70 دورة في الدقيقة.

III. نصف قطر البكرة 6 بوصات يدور 60 دورة في الدقيقة.

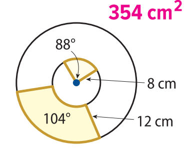
الهندسة الرياضية **أوجد مساحة كل منطقة مظللة.**

65.



$132\ in^2$

66.



$354\ cm^2$

.67 **سيارات** عداد السرعة المبين يقيس سرعة سيارة بالميل في الساعة.

a. إذا كانت الزاوية بين 25 mi/h و 60 mi/h هي °81.1، فنحو كم ميلًا في الساعة تمثله كل درجة؟ **حوالي 0.43 mi/h**

b. إذا كانت زاوية عداد السرعة تتغير بمقدار °95، فكم زادت سرعة السيارة؟ **حوالي 41 mi/h**

أوجد المتممة والمكملة لكل زاوية إذا أمكن. إذا لم يمكن، فاشرح استنتاجك. **68–71. انظر الهامش.**

68. $\frac{2\pi}{5}$ 69. $\frac{5\pi}{6}$ 70. $\frac{3\pi}{8}$ 71. $-\frac{\pi}{3}$

.72 **التزلج** يقوم فصل بدرس الفيزياء بتجربة لاختبار ثلاثة أحجام مختلفة من العجلات على لوحة تزلج بسرعة زاوية ثابتة. **a–c. انظر الهامش.**

a. اكتب معادلة السرعة الخطية للوح التزلج بما يتضمن نصف القطر والسرعة الزاوية. اشرح استنتاجك.

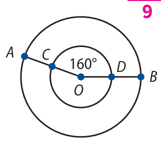
b. باستخدام المعادلة التي كتبتها في الجزء a، توقع السرعة الخطية بالمتر في الثانية للوح التزلج بسرعة زاوية قدرها 3 دورات في الثانية لكل قطر من أقطار العجلات 52, 56, 60 mm.

c. بناء على نتائجك في الجزء b، كيف تظن أن حجم العجلة يؤثر على السرعة الخطية؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

.73 **تحليل الأخطاء** قيل لرنا وخديجة أن محيط القطاع في دائرة يساوي 10 أضعاف طول نصف قطرها. تظن رنا أن قياس قطاع الزاوية المركزية بالراديان هو 8 راديان. تظن خديجة أنه لا توجد معلومات كافية لحل المسألة. فهل إجابة أي منهما صواب؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

.74 **تحدٍ** الدائرتان المبينتان متحدتي المركز. إذا كان طول القوس من A إلى B قياسه 8π بوصة و $DB = 2$ بوصة. فأوجد طول القوس من C إلى D بدلالة π. **$\frac{56\pi}{9}$ in.**



الاستنتاج **صف كيف يمكن للسرعة الخطية أن تتغير بالنسبة لكل معامل مما يلي. اشرح.** **75–77. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

.75 نقص نصف القطر

.76 نقص وحدة الزمن

.77 زيادة السرعة الزاوية

.78 **البرهان** إذا كانت $\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2}$، فأثبت أن $\theta_1 = \theta_2$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

.79 **التبرير** أي أثر تسببه مضاعفة نصف قطر الدائرة على القياسات الآتية؟ اشرح استنتاجك.

a. محيط قطاع الدائرة وزاوية مركزية قدرها θ راديان.

b. مساحة قطاع الدائرة وزاوية مركزية قدرها θ راديان.

a–b. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

.80 **الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين قياس الدرجة والراديان. ثم ابتكر رسمًا تخطيطيًا يشبه الموجود في الصفحة 231. وضّح الرسم التخطيطي باستخدام قياس الدرجات داخل الدائرة وقياس الراديان خارجها. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

إجابات إضافية

.64 سيناريو III: الإجابة النموذجية: تبلغ السرعة الخطية 2042 in./min تقريبًا في السيناريو I. و 1979 in./min تقريبًا في السيناريو II. و 2262 in./min تقريبًا في السيناريو III. تحدث أقصى سرعة خطية للبكرة في السيناريو III. وبهذا، يكون سيناريو III هو أفضل طريقة تُتبع لرفع الصندوق مسافة 15 قدمًا بأقصى سرعة.

.68 متمم: $\frac{\pi}{10}$؛ مكمل: $\frac{3\pi}{5}$

مراجعة شاملة

استخدم قيمة الدالة المثلثية المعطاة للزاوية الحادة θ لإيجاد القيم الدقيقة لقيم النسب الخمس المثلثية المتبقية لـ θ. 81–83. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

81. $\sin \theta = \frac{8}{15}$ **82.** $\sec \theta = \frac{4\sqrt{7}}{10}$ **83.** $\cot \theta = \frac{17}{19}$

84. المعاملات البنكية ربح الحساب الذي فتحته جدة وفاء في 1955 الفائدة المركبة بشكل مستمر. يوضح الجدول أرصدة الحساب من 1955 إلى 1959.

$y = 2137.5192(1.0534)^x$

a. استخدم خط الانحدار لإيجاد الدالة التي تمثل المبلغ الموجود في الحساب. استخدم عدد الأعوام بعد 1 يناير 1955 كمتغير مستقل.

b. اكتب المعادلة من الجزء a بدلالة قاعدة e. $y = 2137.5192e^{0.052x}$

c. ما معدل الفائدة المتوقع في الحساب لو لم توجد أي ودائع أو سحوبات خلال الفترة المذكورة في السؤال؟ 5.2%

	التاريخ	الرصيد
1	1 يناير 1955	AED 2137.52
2	1 يناير 1956	AED 2251.61
3	1 يناير 1957	AED 2371.79
4	1 يناير 1985	AED 2498.39
5	1 يناير 1959	AED 2631.74

عبّر عن كل لوغاريتم بدلالة ln 2 و ln 5.

85. $\ln \frac{25}{16}$ $2 \ln 5 - 4 \ln 2$ **86.** $\ln 250$ $\ln 2 + 3 \ln 5$ **87.** $\ln \frac{10}{25}$ $\ln 2 - \ln 5$

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيها أصفار، إن وجدت.

88. $f(x) = x^4 - x^3 - 12x - 144$
$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm9, \pm12, \pm16, \pm18, \pm24, \pm36, \pm48, \pm72, \pm144; -3, 4$

89. $g(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$
$\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20; -2, 2, 5$

90. $g(x) = 6x^4 + 35x^3 - x^2 - 7x - 1$
$\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}; -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

صِف السلوك الطرفي لكل دالة.

91. $f(x) = 4x^5 + 2x^4 - 3x - 1$
$f(x) \to -\infty$ as $x \to -\infty$,
$f(x) \to \infty$ as $x \to \infty$

92. $g(x) = -x^6 + x^4 - 5x^2 + 4$
$g(x) \to -\infty$ as $x \to -\infty$,
$g(x) \to -\infty$ as $x \to \infty$

93. $h(x) = -\frac{1}{x^3} + 2$ $h(x) \to 2$ as $x \to -\infty$,
$h(x) \to 2$ as $x \to \infty$

اكتب كل مجموعة باستخدام ترميز بناء المجموعة وترميز الفترات، إن أمكن.

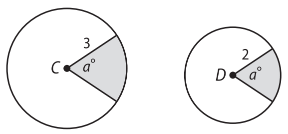
94. $n > -7$
$\{n \mid n > -7, n \in \mathbb{R}\}; (-7, \infty)$

95. $-4 \leq x < 10$
$\{x \mid -4 \leq x < 10, x \in \mathbb{R}\}; [-4, 10)$

96. $y < 1$ or $y \geq 11$
$\{y \mid y < 1 \text{ or } y \geq 11, y \in \mathbb{R}\};$
$(-\infty, 1) \cup [11, \infty)$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

97. SAT/ACT في الشكل، C و D مركزي الدائرتين لهما نصف القطر 3 و 2 على التوالي. إذا كانت للمنطقة المظللة الأكبر مساحة 9، فما مساحة المنطقة المظللة الأصغر؟ B



ملاحظة: الشكل ليس مرسومًا لأخذ قياساته.

A 3 C 5 E 8
B 4 D 7

98. مراجعة إذا كانت $\cot \theta = 1$، فأوجد $\tan \theta =$ H

F -1 H 1
G 0 J 3

99. مراجعة إذا كانت $\sec \theta = \frac{25}{7}$ و θ حادة، فإن $\sin \theta =$ B

A $\frac{7}{25}$
B $\frac{24}{25}$
C $-\frac{24}{25}$
D $\frac{25}{7}$

100. أي من قياسات الراديان التالية يساوي °56؟ H

F $\frac{\pi}{15}$ H $\frac{14\pi}{45}$
G $\frac{7\pi}{45}$ J $\frac{\pi}{3}$

159

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 73. ينبغي أن يرى الطلاب أنه يمكن تمثيل قيمتين في علاقة طول القوس المتقاطع باستخدام x. ويسمح هذا بالوصول إلى الحل: نصف القطر $= x$ و $s = 10x$. بإحلال هذه القيم في $s = r\theta$ تنتج إجابة رنا.

4 التقويم

تعيين مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب ذكر كيفية تحويل قياس الزاوية من الدرجات إلى الراديان.
الإجابة النموذجية: اضرب قياس الدرجة في معامل التحويل $\frac{\pi}{180}$.

إجابات إضافية

69. ليس للزاوية متمم لأنها أكبر من 90° أو $\frac{\pi}{2}$؛ مكمل: $\frac{\pi}{6}$

70. متمم: $\frac{\pi}{8}$؛ مكمل: $\frac{5\pi}{8}$

71. المتممات والمكملات ليست معرفة للزوايا السالبة.

72a. $v = r\omega$؛ الإجابة النموذجية: يتم الحصول على السرعة الخطية باستخدام $v = \frac{s}{t}$. لأن $s = r\theta$ و $\omega = \frac{\theta}{t}$، يمكن أيضًا كتابة معادلة السرعة الخطية باستخدام نصف القطر والسرعة الزاوية بالشكل $v = r\omega$.

72b. 52 mm: 0.49 $\frac{m}{s}$; 56 mm: 0.53 $\frac{m}{s}$; 60 mm: 0.57 $\frac{m}{s}$

72c. الإجابة النموذجية: نظرًا لأن قطر العجلة يزيد، فستزيد السرعة الخطية أيضًا.

73. رنا؛ الإجابة النموذجية: صيغة طول القوس المتقاطع هي $s = r\theta$. ومن ثم، فإن محيط القطاع يساوي مجموع طول القوس المتقاطع وضعفي نصف القطر، أو $P = r\theta + 2r$. نظرًا لأن $P = 10r$. وباستخدام الإحلال، $10r = r\theta + 2r$. وعند التحويل لأبسط صورة، تصبح $\theta = 8$ راديان.

التدريس المتمايز BL

التوسّع إذا كانت الأرض تدور حول محورها مرة كل 24 ساعة، فما المدة التي تستغرقها الأرض للدوران بزاوية °300؟ وبزاوية $\frac{2\pi}{3}$ راديان؟
20 ساعة، 8 ساعات

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 159 12/15/2016 11:39:59 PM

3-3 الدوال المثلثية على دائرة الوحدة

:: السابق

- تجد قيم الدوال المثلثية للزوايا الحادة باستخدام الدوال في المثلثات القائمة الزاوية.

:: الحالي

- 1 إيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية.
- 2 إيجاد قيم الدوال المثلثية باستخدام دائرة الوحدة.

:: لماذا؟

- ضغط الدم 120 على 80. يتم قياسه بملّيمترات من الزئبق. يعني أن ضغط دم الشخص يتذبذب أو يدور بين 20 ملّيمتر فوق وتحت ضغط 100 ملّيمتر من الزئبق؛ لوقت محدد t بالثواني. تستغرق الدائرة الكاملة لهذا التذبذب حوالي ثانية واحدة.

إذا كان ضغط الدم عندما كان الزمن $t = 0.25$ ثانية هو 120 ملّيمترًا من الزئبق. ثم عندما كان الزمن $t = 1.25$ ثانية كان الضغط أيضا 120 ملّيمترًا من الزئبق.

المفردات الجديدة

- زاوية ربعية quadrantal angle
- زاوية إسناد reference angle
- دائرة الوحدة unit circle
- دالة دائرية circular function
- دالة دورية periodic function
- فترة period

1 الدوال المثلثية لأي زاوية

في الدرس 3-1، كانت تعريفات الدوال المثلثية الست مقيدة بالزوايا الحادة الموجبة. في هذا الدرس، تتسع هذه التعريفات لتشمل أي زاوية.

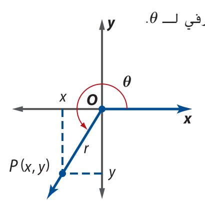
المفهوم الأساسي الدوال المثلثية لأي زاوية

افترض أن θ هي أي زاوية في وضع قياسي وأن النقطة $P(x, y)$ هي نقطة على الضلع الطرفي لـ θ.
افترض أن r يمثل البعد غير الصفري عن P بالدالة لنقطة الأصل.
هذا معناه، افترض أن $r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$. من ثم تكون الدوال المثلثية لـ θ كالتالي:

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ $\csc \theta = \frac{r}{y},\ y \neq 0$

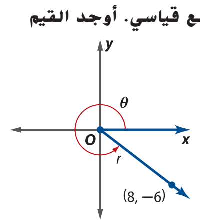
$\cos \theta = \frac{x}{r}$ $\sec \theta = \frac{r}{x},\ x \neq 0$

$\tan \theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0$ $\cot \theta = \frac{x}{y},\ y \neq 0$



مثال 1 إيجاد قيمة المعادلات المثلثية بنقطة معطاة

افترض أن $(8, -6)$ هي نقطة على ضلع الإنتهاء للزاوية لزاوية θ في وضع قياسي. أوجد القيم الدقيقة للنسب المثلثية الست لـ θ.



استخدم قيم x وy لإيجاد r.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ نظرية فيثاغورس

$= \sqrt{8^2 + (-6)^2}$ $x = 8$ و$y = -6$

$= \sqrt{100} = 10$ بأخذ الجذر التربيعي الموجب.

استخدم $x = 8$، $y = -6$ و$r = 10$ لكتابة الدوال المثلثية الست.

$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5}$ $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ $\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$

$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{10}{-6} = -\frac{5}{3}$ $\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ $\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}$

تمرين موجه

النقطة المعطاة تقع على ضلع الإنتهاء للزاوية θ في وضع قياسي. أوجد قيم الدوال المثلثية الست لـ θ.

1A. $(4, 3)$ **1B.** $(-2, -1)$

1A. $\sin \theta = \frac{3}{5}$, $\cos \theta = \frac{4}{5}$, $\tan \theta = \frac{3}{4}$, $\csc \theta = \frac{5}{3}$, $\sec \theta = \frac{5}{4}$, $\cot \theta = \frac{4}{3}$

1B. $\sin \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\tan \theta = \frac{1}{2}$, $\csc \theta = -\sqrt{5}$, $\sec \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\cot \theta = 2$

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-3 أوجد قيم الدوال المثلثية للزوايا الحادة باستخدام النسب في المثلثات القائمة الزاوية.

الدرس 3-3 أوجد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية. أوجد قيم الدوال المثلثية باستخدام دائرة الوحدة.

بعد الدرس 3-3 مثّل بيانيًا تحويلات دالة جيب الزاوية ودالة جيب التمام. مثّل بيانيًا دالة الظل ودالة المقلوب المثلثية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

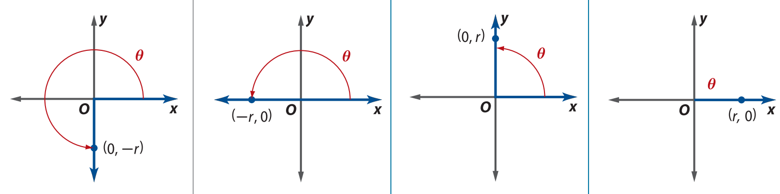
اطرح السؤالين التاليين:

- تكون الدالة دورية إذا كانت تظهر لفترة من الزمن. هل يُعد ضغط الدم دوريًا؟ نعم
- ما مدى قيم ضغط الدم المعطاة؟ 40 mm

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indb 160 12/15/2016 11:40:01 PM

في المثال 1، وجدت قيم الدوال المثلثية للدالة θ دون معرفة قياس θ. سنناقش حاليًا طرق إيجاد قيم هذه الدالة عندما تكون θ وحدها معروفة. لاحظ الدوال المثلثية للزوايا الربعية. عندما يكون ضلع الإنتهاء لزاوية θ تتَّخِذ الوضع القياسي واقعًا على أحد محاور الإحداثي، فإن الزاوية تسمى **زاوية ربعية**.

المفهوم الأساسي الزوايا الربعية المشتركة



$\theta = 0° = 0$ راديان

$\theta = 90° = \frac{\pi}{2}$ راديان

$\theta = 180° = \pi$ راديان

$\theta = 270°$ أو $\frac{3\pi}{2}$ راديان

نصيحة دراسية

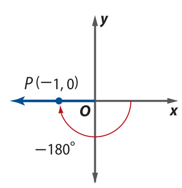
الزوايا الربعية يوجد عدد لا نهائي من الزوايا الربعية التي تشترك في ضلع الانتهاء مع الزوايا الربعية المبينة على اليسار. قياس زاوية ربعية هو ضعف $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$.

يمكنك الوصول لقيم الدوال المثلثية للزوايا الربعية عن طريق اختيار نقطة على الضلع الجانبي للزاوية، وإيجاد قيمة الدالة عند هذه النقطة. يمكنك اختيار أي نقطة. رغم ذلك، من أجل التحويل لأبسط صورة، اختر النقطة التي يكون r فيها يساوي 1.

مثال 2 إيجاد قيمة الدوال المثلثية للزوايا الربعية

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية، إذا كانت معرفة.إذا لم تكن معرفة فاكتب غير معرفة.

a. $\sin(-180°)$

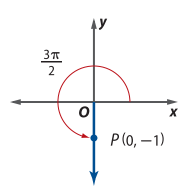


ضلع الإنتهاء للزاوية **$-180°$** في الوضع القياسي يقع على المحور الأفقي السالب x. اختر نقطة P على ضلع الإنتهاء للزاوية. النقطة المناسبة هي $(-1, 0)$ لأن $r = 1$.

$\sin(-180°) = \frac{y}{r}$ دالة الـ Sine

$= \frac{0}{1} = 0$ $y = 0$ و $r = 1$

b. $\tan \frac{3\pi}{2}$

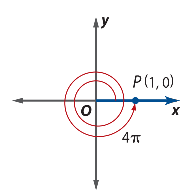


ضلع الإنتهاء للزاوية $\frac{3\pi}{2}$ في وضع قياسي يقع على المحور الرأسي السالب y. اختر نقطة $P(0, -1)$ على ضلع الإنتهاء للزاوية لأن $r = 1$.

$\tan \frac{3\pi}{2} = \frac{y}{x}$ دالة الـ tan

$= \frac{-1}{0} =$ غير معرفة $y = -1$ و $x = 0$

c. $\sec 4\pi$



ضلع الإنتهاء للزاوية 4π في وضع قياسي يقع على المحور الأفقي الموجب x. النقطة $(1, 0)$ مناسبة لأن $r = 1$.

$\sec 4\pi = \frac{r}{x}$ دالة الـ Sec

$= \frac{1}{1} = 1$ $r = 1$ و $x = 1$

تمرين موجه

2A. $\cos 270°$ **0** **2B.** $\csc \frac{\pi}{2}$ **1** **2C.** $\cot(-90°)$ **0**

- إذا كان ضغط الدم $t = 0.5$ ثوان يساوي 110 ملليمترات من الزئبق، (فما التعبير العام الذي يُمكن) استخدامه لوصف جميع الأوقات التي يصل فيها ضغط الدم إلى 110 مليمترات من الزئبق؟ $0.5 + n$ حيث $n = \mathbb{Z}$
- ما الظواهر الأخرى التي يُمكننا تمثيلها باستخدام الدوال الدورية؟ الإجابة النموذجية: مدارات الكواكب، وحركة المد والجزر في المحيطات، وفصول السنة

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 بفرض أن $(-4, 3)$ هي نقطة على الضلع الطرفي لزاوية θ في وضع قياسي. أوجد القيم الدقيقة للدوال الست المثلثية لـ θ. $\sin \theta = \frac{3}{5}$, $\cos \theta = -\frac{4}{5}$, $\tan \theta = -\frac{3}{4}$, $\csc \theta = \frac{5}{3}$, $\sec \theta = -\frac{5}{4}$, $\cot \theta = -\frac{4}{3}$

2 أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية. إذا كانت محدّدة. وإذا لم تكن مُعرَّفة، فاكتب غير محدّدة.

a. $\cos \pi$ -1

b. $\tan 450°$ غير محددة

c. $\cot \frac{7\pi}{2}$ 0

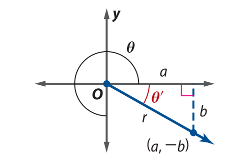
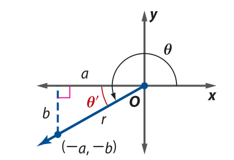
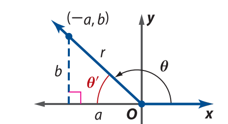
1 الدوال المثلثية لأي زاوية

المثالان 1 و 2 يوضحان كيفية إيجاد قيمة الدوال المثلثية عند معرفة نقطة على الضلع الطرفي لزاوية ما في وضع قياسي وعند معرفة زاوية واقعة على محور تماثل في الوضع القياسي. **المثالان 3 و 4** يوضحان كيفية إيجاد زوايا الإسناد المستخدمة في إيجاد قيم مثلثية محددة. **المثال 5** يوضِّح كيفية استخدام قيمة دالة مثلثية معلومة في حل بقية الدوال المثلثية.

المثال 6 يوضِّح كيفية إيجاد إحداثيات نقطة بمعرفة نصف القطر والزاوية التي تأخذ الوضع القياسي.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 161 12/15/2016 11:40:03 PM

لإيجاد قيم الدوال المثلثية لزوايا غير حادة أو ربعية، لاحظ الحالات الثلاث التالية، التي بها a وb أعداد حقيقية موجبة.
قارن قيم: sin و Cosine و tan للزوايا θ وθ'.

الربع IV	الربع III	الربع II
		
$\sin\theta = -\frac{b}{r}$ $\quad\sin\theta' = \frac{b}{r}$	$\sin\theta = -\frac{b}{r}$ $\quad\sin\theta' = \frac{b}{r}$	$\sin\theta = \frac{b}{r}$ $\quad\sin\theta' = \frac{b}{r}$
$\cos\theta = \frac{a}{r}$ $\quad\cos\theta' = \frac{a}{r}$	$\cos\theta = -\frac{a}{r}$ $\quad\cos\theta' = \frac{a}{r}$	$\cos\theta = -\frac{a}{r}$ $\quad\cos\theta' = \frac{a}{r}$
$\tan\theta = -\frac{b}{a}$ $\quad\tan\theta' = \frac{b}{a}$	$\tan\theta = \frac{b}{a}$ $\quad\tan\theta' = \frac{b}{a}$	$\tan\theta = -\frac{b}{a}$ $\quad\tan\theta' = \frac{b}{a}$

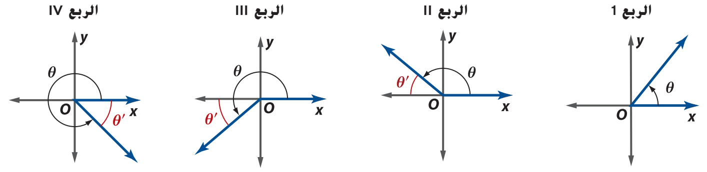
نصيحة دراسية

زوايا الإسناد لاحظ أنه في بعض الحالات، القيم الثلاث المثلثية للزوايا θ وθ' (اقرأ *عوامل ثيتا الأولية*) تكون متطابقة. في حالات أخرى، تختلف في الإشارة فقط.

هذه الزاوية θ'، تسمى **زاوية مرجع**، يمكن استخدامها لإيجاد القيم المثلثية لأي زاوية θ.

المفهوم الأساسي قواعد زاوية مرجع

إذا كانت θ هي زاوية في الوضع القياسي، وزاوية المرجع لها θ' هي زاوية حادة شكّلها ضلع الإنتهاء لــ θ والمحور الأفقي x.
زاوية المرجع θ' لأي زاوية θ, $0° < \theta < 360°$ أو $0 < \theta < 2\pi$. يتم تعريفها كما يلي.



الربع 1	الربع II	الربع III	الربع IV
$\theta' = \theta$	$\theta' = 180° - \theta$	$\theta' = \theta - 180°$	$\theta' = 360° - \theta$
	$\theta' = \pi - \theta$	$\theta' = \theta - \pi$	$\theta' = 2\pi - \theta$

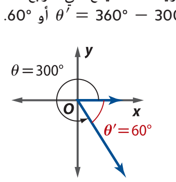
لإيجاد زاوية مرجع للزوايا خارج الفترة الفاصلة $0° < \theta < 360°$ أو $0 < \theta < 2\pi$. أوجد أولاً زاوية متناظرة مشتركة في ضلع الانتهاء داخل هذه الفترة الفاصلة.

مثال 3 إيجاد زوايا الإسناد

ارسم كل زاوية. ثم أوجد زاوية المرجع.

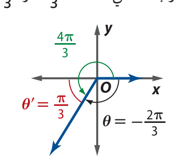
a. **300°**

ضلع الإنتهاء للزاوية 300° يقع في الربع IV. ومن ثم، فزاوية المرجع $\theta' = 360° - 300°$ أو 60°.



b. $-\frac{2\pi}{3}$

الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء هي $2\pi - \frac{2\pi}{3}$ أو $\frac{4\pi}{3}$. ضلع الإنتهاء للزاوية $\frac{4\pi}{3}$ يقع في الربع III، ومن ثم، فزاوية مرجعه هي $\frac{4\pi}{3} - \pi$ أو $\frac{\pi}{3}$.

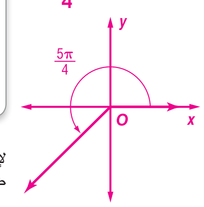


تمرين موجه

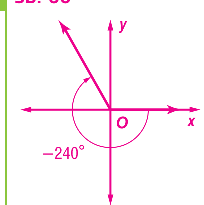
3A. $\frac{5\pi}{4}$ **3B.** $-240°$ **3C.** $390°$

بما أن القيم المثلثية لزاوية تتساوى مع زاوية إسنادها أو تختلف عنها فقط في الإشارة، يمكنك استخدام الخطوات التالية

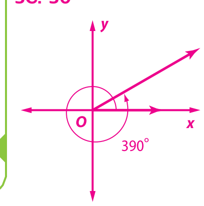
3A. $\frac{\pi}{4}$



3B. 60°



3C. 30°



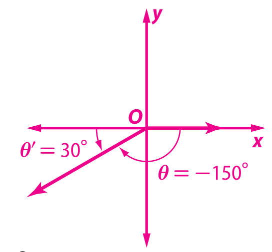
التركيز على محتوى الرياضيات

الدوال المثلثية لأي زاوية يُمكن تعريف الدوال المثلثية لأي زاوية بالنقطة (x, y). ويُمكن تحديد المسافة r من نقطة الأصل إلى الزوج المرتب (x, y) باستخدام نظرية فيثاغورس، حيث. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ لإيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا غير الحادة وغير الزوايا الربعية يجب إيجاد زوايا الإسناد. إذا كانت الزاوية في الوضع القياسي، فإن زاوية الإسناد ستكون هي الزاوية الحادة التي تكونت من الضلع الطرفي للزاوية والمحور الأفقي x.

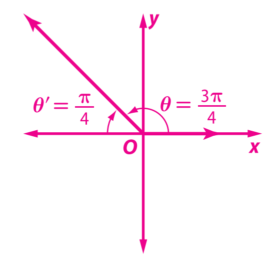
مثال إضافي

3 ارسم كل زاوية. ثم أوجد زاوية الإسناد الخاصة بها.

a. $-150°$ $30°$



b. $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{\pi}{4}$



التدريس باستخدام التكنولوجيا

نظام إجابة الطلاب اسأل الطلاب عن علامة إحدى الدوال المثلثية (الـ Sine و الـ Cosine و الـ Tan للزاوية) في ربع محدد. استخدم الرمز A *للموجب* واستخدم الرمز B *للسالب*.

التركيز على محتوى الرياضيات

الدوال المثلثية لأي زاوية في الدرس 1-3. تم تحديد النسب المثلثية في مثلث قائم الزاوية؛ وبذلك يكون قد تم تحديدها للزوايا الحادة فقط. يُمكن إيجاد قيمة الدوال المثلثية لأي زاوية باستخدام زوايا الإسناد. لاحظ أن جميع زوايا الإسناد هي زوايا حادة.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 162 12/15/2016 11:40:05 PM

مثال إضافي

4 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

a. $\sin \frac{4\pi}{3}$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\tan 150°$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

c. $\sec \frac{15\pi}{4}$ $\sqrt{2}$

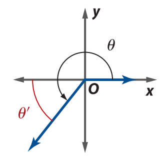
لإيجاد قيمة الدالة المثلثية لأي زاوية θ.

المفهوم الأساسي إيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية

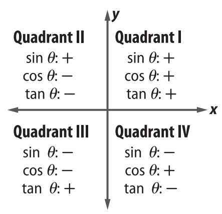
الخطوة 1 أوجد قياس زاوية الإسناد θ'.

الخطوة 2 أوجد قيمة الدالة المثلثية لـــ θ'.

الخطوة 3 استخدم الربع حيث يقع ضلع الإنتهاء لـــ θ في تحديد إشارة قيمة الدالة المثلثية θ.



يمكنك تحديد الإشارات الخاصة بالدوال المثلثية في كل ربع باستخدام تعريفات الدالة المقدَّمة في صفحة 242.
على سبيل المثال، بما أن $\sin \theta = \frac{y}{r}$ ، فمن ثم تكون $\sin \theta$ سالبة عندما تكون $y < 0$، والتي تقع في الربعين III وIV.
باستخدام هذا المنطق نفسه، يمكنك التأكد من كل إشارة من إشارات $\sin \theta$، و$\cos \theta$، و$\tan \theta$ المبينتين في الرسم التخطيطي.
لاحظ أن هذه القيم تعتمد فقط على x وy لأن r دائما سالب.



بما أنك تعرف القيم المثلثية الدقيقة للزوايا 30° و45° و60°، فبإمكانك إيجاد القيم المثلثية الدقيقة *لكل* الزوايا والتي تمثل لها هذه الزوايا زوايا إسناد. تتضمن هذه القائمة القيم الخاصة بـــ θ بكل من الدرجات الراديان.

θ	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

نصيحة دراسية

تذكر القيم المثلثية لتذكر القيم الدقيقة لـــ Sine الزاوية بالدالة للزوايا 0° و30° و45° و60° و90°، لاحظ النمط التالي.

$\sin 0° = \frac{\sqrt{0}}{2}, = 0$

$\sin 30° = \frac{\sqrt{1}}{2}, = \frac{1}{2}$

$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

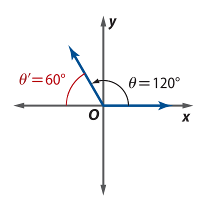
$\sin 90° = \frac{\sqrt{4}}{2}, = 1$

يوجد نمط مشابه لدالة لـــ Cosine، ما عدا القيم التي لها ترتيب عكسي.

مثال 4 استخدام زوايا الإسناد لإيجاد القيم المثلثية

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

a. cos 120°

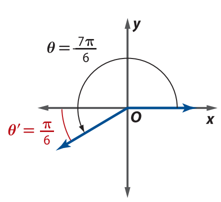


بما أن ضلع الإنتهاء للزاوية θ يقع في الربع II.
زاوية الإسناد θ' هي $180° - 120°$ أو $60°$.

$\cos 120° = -\cos 60°$ في الربع II، $\cos \theta$ سالبة

$= -\frac{1}{2}$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$

b. $\tan \frac{7\pi}{6}$



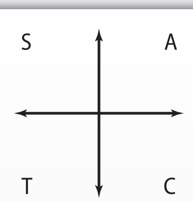
بما أن ضلع الإنتهاء للزاوية θ يقع في الربع III.
فزاوية الإسناد θ' هي $\frac{7\pi}{6} - \pi$ أو $\frac{\pi}{6}$.

$\tan \frac{7\pi}{6} = \tan \frac{\pi}{6}$ في الربع III، $\tan \theta$ موجبة

$= \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

التدريس المتمايز BL OL AL

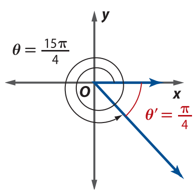
المتعلمون السمعيون/الموسيقيون ضع الطلاب في مجموعات من ستة طلاب. استخدم الرسم التخطيطي. اطلب من كل مجموعة كتابة نشيد للدالة المثلثية يصف علامة هذه الدالة في أرباع مختلفة. لاحظ أنه يُمكن للأناشيد أن تركز على القيم السالبة أو القيم الموجبة. اطلب من المجموعات قراءة الأناشيد أو إنشادها أمام الصف. نموذج للنشيد: علامات القواطع ليست رتيبة – فهي موجبة في الأرباع من الأول إلى الرابع.



S = sin (csc) الكل = A

T = tan (cot) C = cos (sec)

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 163 12/15/2016 11:40:06 PM



c. $\csc \frac{15\pi}{4}$

الزاوية المشتركة في ضلع الانتهاء لـــ θ هي $2\pi - \frac{15\pi}{4}$ أو $\frac{7\pi}{4}$، والتي تقع في الربع IV. إذًا، فزاوية إسناد θ' هي $\frac{7\pi}{4} - 2\pi$ أو $\frac{\pi}{4}$.
لأن sine الزاوية و Sec عبارة عن دوال مقلوبة و$\sin \theta$ سالبة تقع في الربع IV، فهذا يجعل $\csc \theta$ سالبة أيضًا في الربع IV.

$$\csc \frac{15\pi}{4} = -\csc \frac{\pi}{4}$$ في الربع IV، $\csc \theta$ سالبة.

$$= -\frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}}$$ $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$

$$= -\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad -\sqrt{2}$$ $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

التحقق يمكنك التحقق من إجابتك باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

$$\csc \frac{15\pi}{4} \approx -1.414 \checkmark$$

$$-\sqrt{2} \approx -1.414 \checkmark$$

تمرين موجه

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

4A. $\tan \frac{5\pi}{3}$ $-\sqrt{3}$ **4B.** $\sin \frac{5\pi}{6}$ $\frac{1}{2}$ **4C.** $\sec(-135^\circ)$ $-\sqrt{2}$

مثال إضافي

5 بفرض أن $\sec \theta = \frac{\sqrt{29}}{5}$ حيث $\sin \theta > 0$. أوجد القيم الدقيقة للدوال الخمس المثلثية المتبقية لــ θ.

$\sin \theta = \frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\cos \theta = \frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\tan \theta = \frac{2}{5}$, $\csc \theta = \frac{\sqrt{29}}{2}$, $\cot \theta = \frac{5}{2}$

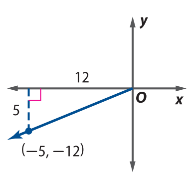
إذا كانت قيمة واحدة أو أكثر من الدوال المثلثية معروفة وكذلك الربع الذي يقع ضلع الإنتهاء لـــ θ فيه معروفًا، فقيم الدالة المتبقية يمكن اكتشافها.

مثال 5 استخدام قيمة مثلثية واحدة لإيجاد القيم الأخرى

افترض أن $\tan \theta = \frac{5}{12}$، حيث $\sin \theta < 0$. أوجد القيم الدقيقة للخمسة نسب المثلثية المتبقية للزاوية θ.

لإيجاد قيم الدالة الأخرى، يجب أن تجد الإحداثيات لنقطة على ضلع الإنتهاء للزاوية θ. أنت تعلم أن $\tan \theta$ موجبة، وأن $\sin \theta$ سالبة، إذًا θ يجب أن تقع في الربع III. هذا يعني أن كلاً من x و y سالبتان.

لأن $\tan \theta = \frac{y}{x}$ أو $\frac{5}{12}$، استخدم النقطة $(-12, -5)$ لإيجاد r.



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$ نظرية فيثاغورس

$$= \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2}$$ $x = -12$ و $y = -5$

$$= \sqrt{169} = 13$$ بأخذ الجذر التربيعي الموجب.

استخدم $x = -12$، $y = -5$، و$r = 13$ لكتابة الدوال المثلثية الخمس المتبقية.

$\sin \theta = \frac{y}{r} = -\frac{5}{13}$ $\cos \theta = \frac{x}{r} = -\frac{12}{13}$ $\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{12}{5}$

$\csc \theta = \frac{r}{y} = -\frac{13}{5}$ $\sec \theta = \frac{r}{x} = -\frac{13}{12}$

تمرين موجه

أوجد القيم الدقيقة للنسب الخمسة المثلثية المتبقية للزاوية θ.

5A. $\sec \theta = \sqrt{3}, \tan \theta < 0$ **5B.** $\sin \theta = \frac{5}{7}, \cot \theta > 0$

5A. $\sin \theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\csc \theta = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan \theta = -\sqrt{2}$, $\cot \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

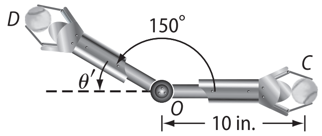
5B. $\csc \theta = \frac{7}{5}$, $\cos \theta = \frac{2\sqrt{6}}{7}$, $\sec \theta = \frac{7\sqrt{6}}{12}$, $\tan \theta = \frac{5\sqrt{6}}{12}$, $\cot \theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

انتبه!

إنطاق المقام تأكد من إنطاق المقام، في حالة الضرورة.

مثال إضافي

6 **تطبيقات الإنسان الآلي** قام طالب ببرمجة ذراع إنسان آلي يبلغ طولها 10 بوصات لالتقاط جسم عند النقطة C. ثم الدوران بزاوية $150°$ لتحرير الجسم داخل وعاء عند النقطة D. أوجد موقع الجسم عند النقطة D بالنسبة إلى النقطة المحورية O.



إحداثيات النقطة D بدقة هي $(-5\sqrt{3}, 5)$. يقع الجسم على بُعد 8.66 بوصات يسار النقطة المحورية، و5 بوصات أعلى النقطة المحورية.

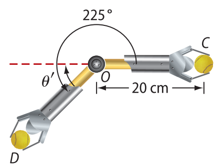
2 الدوال المثلثية على دائرة الوحدة

المثالان 7 و 8 يوضحان كيفية إيجاد القيم المثلثية باستخدام دائرة الوحدة.

إرشاد للمعلمين الجدد

مدى الدوال المثلثية عند العمل على دائرة الوحدة، ذكِّر الطلاب بأن دوال الزوايا Sine , Cosine دائمًا ما يتراوح مداها بين -1 و 1 بشكل شامل، بينما لا تكون الدوال المثلثية الأربع الأخرى كذلك.

مثال 6 من الحياة اليومية إيجاد الإحداثيات بمعرفة نصف القطر وزاوية



تطبيقات الإنسان الآلي كجزء من فئة مدى الحركة في مسابقة المدرسة الثانوية حول تطبيقات الإنسان الآلي، برمج أحد الطلاب ذراعًا آليًّا بطول 20 سنتيمترًا ليلتقط شيئًا عند نقطة C ويدور بزاوية $225°$ بالضبط ليضع الشيء في حاوية عند النقطة D. أوجد وضع الشيء عند النقطة D، بالدالة للنقطة المحورية O.

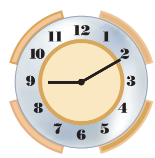
مع وجود النقطة المحورية في نقطة الأصل والزاوية التي يدور بها الذراع في وضع قياسي، تتخذ النقطة C الإحداثيات $(20, 0)$. زاوية الإسناد لـ θ' لـ $225°$ هي $180° - 225°$ أو $45°$.

لنفترض أن لوضع النقطة D الإحداثيات (x, y). تعريفات الدالة sine و cosine يمكن استخدامها لإيجاد قيم x وy. r هي 20 سنتيمترًا، هو طول الذراع الآلي. بما أن D تقع في الربع III، فإن الدالة sine و cosine للزاوية $225°$ سالبين.

$\cos \theta = \frac{x}{r}$	دالة الـ Cosine	$\sin \theta = \frac{y}{r}$	دالة الـ Sine
$\cos 225° = \frac{x}{20}$	$\theta = 225°$ و $r = 20$	$\sin 225° = \frac{y}{20}$	$\theta = 225°$ و $r = 20$
$-\cos 45° = \frac{x}{20}$	$\cos 225° = -\cos 45°$	$-\sin 45° = \frac{y}{20}$	$\sin 225° = -\sin 45°$
$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{20}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{y}{20}$	$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$-10\sqrt{2} = x$	حل x.	$-10\sqrt{2} = y$	حل y.

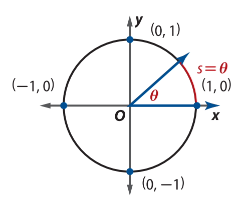
الإحداثيات الدقيقة لـ D هي $(-10\sqrt{2}, -10\sqrt{2})$. بما أن $10\sqrt{2}$ حوالي 14.14، فالشيء على بعد حوالي 14.14 سنتيمترًا على يسار النقطة المحورية وحوالي 14.14 سنتيمترًا أسفل النقطة المحورية.

تمرين موجه **عقرب الدقائق على بعد 2.6 بوصة على اليمين و1.5 بوصة أعلى نقطة المحور.**



6. **آلية الساعة** عقرب الدقائق بطول 3 بوصة يشير إلى الساعة إلا 45 دقيقة. ما الوضع الجديد لطرف عقرب الدقائق بالدالة للنقطة المحورية عندما تمر 10 دقائق على الساعة التالية؟

2 الدوال المثلثية على دائرة الوحدة



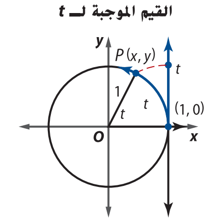
دائرة الوحدة هي دائرة نصف قطرها 1 متمركز على نقطة الأصل. لاحظ أنه على دائرة وحدة، مقياس راديان لزاوية مركزية $\theta = \frac{s}{1}$ أو s، إذًا فطول قوس تقطعه θ يتطابق تمامًا مع مقياس راديان للزاوية. هذا يتيح طريقة لتخطيط مدخل قيمته عدد حقيقي لدالة مثلثية إلى مخرج قيمته عدد حقيقي.

نصيحة دراسية

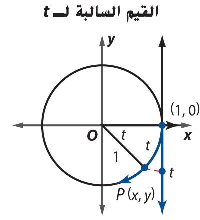
دالة الالتفاف ارتباط نقطة على خط الأعداد بنقطة على الدائرة يسمى *دالة الالتفاف*, $w(t)$. على سبيل المثال، إذا كانت $w(t)$ تربط نقطة t على خط الأعداد بنقطة $P(x, y)$ على دائرة الوحدة، فبالتالي $w(\pi) = (-1, 0)$ و $w(2\pi) = (1, 0)$.

فكّر في خط الأعداد الحقيقية الذي يمس أفقيًّا دائرة الوحدة عند $(1, 0)$ كما هو موضح بالأسفل. إذا كان هذا الخط ملتفًّا حول الدائرة في كلا الاتجاهين: الموجب (عكس عقارب الساعة) أو السالب (مع عقارب الساعة)، فإن كل نقطة t على الخط ستكون مرتبطة بنقطة فريدة $P(x, y)$ على الدائرة. لأن $r = 1$، يمكننا تعريف الدوال المثلثية للزاوية t بمجرد معرفة x وy.

القيم الموجبة لـ t

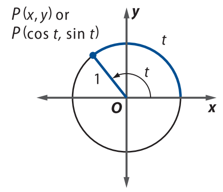


القيم السالبة لـ t



المفهوم الأساسي الدوال المثلثية على دائرة الوحدة

افترض أن t هي أي عدد حقيقي على خط الأعداد وافترض أن $P(x, y)$ هي النقطة على t عندما يلتف خط الأعداد على دائرة الوحدة. من ثم، تكون الدوال المثلثية لــ t كالتالي:



$\sin t = y$ $\quad\quad$ $\cos t = x$ $\quad\quad$ $\tan t = \frac{y}{x}, x \neq 0$

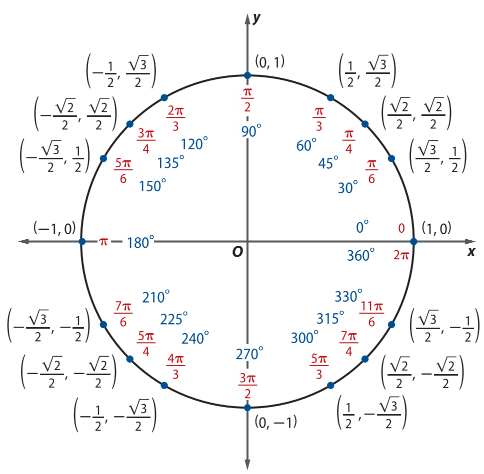
$\csc t = \frac{1}{y}, y \neq 0$ $\quad\quad$ $\sec t = \frac{1}{x}, x \neq 0$ $\quad\quad$ $\cot t = \frac{x}{y}, y \neq 0$

وهكذا، فإحداثيات P تطابق الزاوية t ويمكن كتابتها هكذا $P(\cos t, \sin t)$.

لاحظ أن قيمة المدخل في كل من التعريفات السابقة يمكن أن تعد مقياسًا للزاوية أو عددًا حقيقيًا t. عندما يتم تعريفها كدوال نظام الأعداد الحقيقية باستخدام دائرة الوحدة، تسمى الدوال المثلثية غالبًا **الدوال الدائرية**.

باستخدام زوايا المرجع أو الزوايا الربعية، ينبغي أن تكون الآن قادرًا على إيجاد قيم المعادلة المثلثية لكل مضاعفات الأعداد الصحيحة لــ $30°$، أو $\frac{\pi}{6}$ راديان، و $45°$، أو $\frac{\pi}{4}$ راديان. تلتف هذه القيم الخاصة على 16 نقطة خاصة على دائرة الوحدة، كما هو موضح فيما يلي:

دائرة وحدة عليها 16 نقطة



باستخدام الإحداثيات (x, y) مع دائرة الوحدة ذات 16 نقطة والتعريفات في مربع المفاهيم الأساسية أعلى الصفحة، يمكنك إيجاد القيم الخاصة بالدوال المثلثية لقياسات الزاوية المشتركة. من المفيد تذكر هذه القيم الدقيقة للدالة حتى تتمكن من أداء الحسابات التي تتضمنهم سريعًا.

نصيحة دراسية

دائرة الوحدة ذات 16 نقطة أنت بالفعل تتذكر هذه القيم في الربع الأول. القيم المتبقية يمكن تحديدها باستخدام المحورين الأفقي x والرأسي y، وتناظر نقطة الأصل لدائرة الوحدة مع إشارات x وy في كل ربع.

مثال 7 إيجاد القيم المثلثية باستخدام دائرة الوحدة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي. إذا لم تكن مُعرَّفة، فاكتب غير مُعرَّفة.

a. $\sin \frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3}$ تتطابق مع النقطة $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ على دائرة الوحدة.

$\sin t = y$ تعريف $\sin t$

$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ عندما $t = \frac{\pi}{3}$.

مثال إضافي

7 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير. إذا لم تكن مُحددة، فاكتب غير مُحددة.

a. $\sin \frac{7\pi}{6}$ $-\frac{1}{2}$

b. $\cos \frac{\pi}{3}$ $\frac{1}{2}$

c. $\tan \frac{4\pi}{3}$ $\sqrt{3}$

d. $\sec 270°$ غير مُحددة

b. **cos 135°**

135° تتطابق مع النقطة $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (x, y)$ على دائرة الوحدة.

$\cos t = x$ — تعريف cos t

$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ — $x = -$. عندما $t = 135°$

c. **tan 270°**

270° تتطابق مع النقطة $(0, -1) = (x, y)$ على دائرة الوحدة.

$\tan t = \frac{y}{x}$ — تعريف tan t

$\tan 270° = \frac{-1}{0}$ — $y = -1$ و $x = 0$ عندما $t = 270°$

وهكذا تكون tan 270° غير مُعرَّفة.

d. **csc $\frac{11\pi}{6}$**

$\frac{11\pi}{6}$ تتطابق مع النقطة $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = (x, y)$ على دائرة الوحدة.

$\csc t = \frac{1}{y}$ — تعريف csc t

$\csc \frac{11\pi}{6} = \frac{1}{-\frac{1}{2}}$ — $y = -\frac{1}{2}$ عندما $t = \frac{11\pi}{6}$

$= -2$ — بسّط

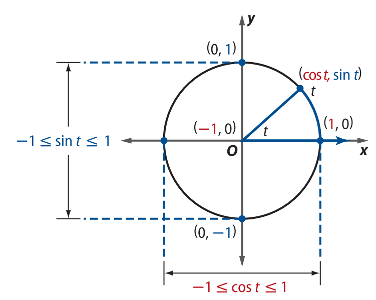
تمرين موجه

7A. $\cos \frac{\pi}{4}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **7B.** $\sin 120°$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **7C.** $\cot 210°$ $\sqrt{3}$ **7D.** $\sec \frac{7\pi}{4}$ $\sqrt{2}$

كما هو معرّف من خلال التفاف خط الأعداد حول دائرة الوحدة، فإن مجال دوال الـ Sine, Cosine هو مجموعة الأعداد الحقيقية كلها $(-\infty, \infty)$. مع أن خط الأعداد يمتد لا نهائيًا في كلا الاتجاهين، فيمكن أن يلتف عدة مرات حول دائرة الوحدة، مرتبطًا بأكثر من قيمة t للنقطة نفسها $P(x, y)$ مع كل التفاف، موجبًا كان أو سالبًا.

نصيحة دراسية

الراديان مقابل الدرجة بينما يمكننا أيضًا مناقشة إحدى الالتفافات وهي تتطابق مع زاوية قياسها 360°، فإن هذا القياس لا علاقة له بمسافة. على دائرة الوحدة، تتطابق إحدى الالتفافات مع قياس الزاوية 2π والمسافة 2π حول الدائرة.



لأن $\cos t = x, \sin t = y$. والتفافًا واحدًا يناظر مسافة 2π.

$\sin (t + 2n\pi) = \sin t$ و $\cos (t + 2n\pi) = \cos t$.

لأي عدد صحيح n وعدد حقيقي t.

167

نصيحة دراسية
الدوال الدورية الدوال الدائرية الثلاث الأخرى دورية أيضًا. ستتم مناقشة فترات هذه الدوال في الدرس 4-5.

ولذلك، تقع قيم دالة **sin** و **cos** ضمن الفترة $[-1, 1]$ وتتكرر لكل عدد صحيح من مضاعفات 2π على خط الأعداد. الدوال التي لها قيم تتكرر على فترات فاصلة منتظمة تسمى **دوال دورية**.

المفهوم الأساسي الدوال الدورية

تكون الدالة $y = f(t)$ دورية إذا وجد عدد حقيقي موجب c بحيث $f(t + c) = f(t)$ لكل قيم t في مجال f.

العدد الأصغر c الذي تكون f بالدالة له دورية يسمى **دورة الدالة f**.

دوال **sin** و **cos** دورية، حيث تكرر القيم بعد 2π، ومن ثم فترة هذه الدوال هي 2π. يمكن توضيح أن قيم دالة **tan** تتكرر بعد مسافة π على خط الأعداد، ومن ثم فدالة **tan** لها دورة طولها π و

$$\tan t = \tan (t + n\pi)$$

لأي عدد صحيح n وعدد حقيقي t، ما لم تكن كل من $\tan t$ و $\tan (t + n\pi)$ غير معرفتين. بإمكانك استخدام الطبيعة الدورية لدوال **sin** و **con** و **tan** لإيجاد قيمة تلك الدوال.

مثال 8 استخدام الطبيعة الدورية للدوال الدائرية

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

a. $\cos \frac{11\pi}{4}$

$$\cos \frac{11\pi}{4} = \cos \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi\right)$$ أعد كتابة $\frac{11\pi}{4}$ كمجموع لعدد و 2π.

$$= \cos \frac{3\pi}{4}$$ $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4} + 2\pi$ مرتبطة بالنقطة نفسها $(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ على دائرة الوحدة.

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$$ $t = \frac{3\pi}{4}$ عند $\cos t = x$ و $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(cos $\frac{11\pi}{4}$ = cos ($\frac{3\pi}{4}$ + 2π

cos $\frac{3\pi}{4}$ =

b. $\sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \sin \left(\frac{4\pi}{3} + 2(-1)\pi\right)$$ أعد كتابة $-\frac{2\pi}{3}$ كمجموع عدد ومضاعف العدد الصحيح 2π.

$$= \sin \frac{4\pi}{3}$$ $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{4\pi}{3} - 2(-1)\pi$ يرتبط بالنقطة نفسها $(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ على دائرة الوحدة

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$ $t = \frac{4\pi}{3}$ عند $\sin t = y$ و $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(sin (− $\frac{}{3}$ + $2(-1)\pi$

sin =

c. $\tan \frac{19\pi}{6}$

$$\tan \frac{19\pi}{6} = \tan \left(\frac{\pi}{6} + 3\pi\right)$$ أعد كتابة $\frac{19\pi}{6}$ كمجموع عدد ومضاعف عدد صحيح π.

$$= \tan \frac{\pi}{6}$$ $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{6} + 3\pi$ مرتبط بالنقطة نفسها على دائرة الوحدة بقيم ظل الزاوية نفسها.

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$ $t = \frac{\pi}{6}$ عند $\tan t = \frac{y}{x}$ و $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $y = \frac{1}{2}$

(tan $\frac{19\pi}{6}$ = tan ($\frac{\pi}{6}$ + 3π

tan $\frac{\pi}{6}$ =

تمرين موجه

8A. $\sin \frac{13\pi}{4}$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **8B.** $\cos \left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ $-\frac{1}{2}$ **8C.** $\tan \frac{15\pi}{6}$ **غير محدد**

تذكر من الدرس 2-1 أن دالة f تكون زوجية إذا كانت بالدالة لكل x في مجال f، $f(-x) = f(x)$ وفردية إذا كانت بالدالة لكل x في مجال f، $f(-x) = -f(x)$. بإمكانك استخدام دائرة الوحدة لتتحقق من كون دالة **cos** زوجية وأن دالة **sin** و **tan** فردية. بمعنى،

$$\cos (-t) = \cos t \qquad \sin (-t) = -\sin t \qquad \tan (-t) = -\tan t$$

مثال إضافي

8 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

a. $\cos \frac{9\pi}{4}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b. $\sin (-300°)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c. $\tan \frac{29\pi}{6}$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

إجابات إضافية

1. $\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{4}{3},$ $\csc \theta = \frac{5}{4}, \sec \theta = \frac{5}{3}, \cot \theta = \frac{3}{4}$

2. $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2},$ $\tan \theta = -1, \csc \theta = \sqrt{2},$ $\sec \theta = -\sqrt{2}, \cot \theta = -1$

3. $\sin \theta = -\frac{3}{5}, \cos \theta = -\frac{4}{5},$ $\tan \theta = \frac{3}{4}, \csc \theta = -\frac{5}{3},$ $\sec \theta = -\frac{5}{4}, \cot \theta = \frac{4}{3}$

4. $\sin \theta = 0, \cos \theta = 1, \tan \theta = 0,$ $\csc \theta$ غير مُحدد، $\sec \theta = 1, \cot \theta$ غير مُحدد.

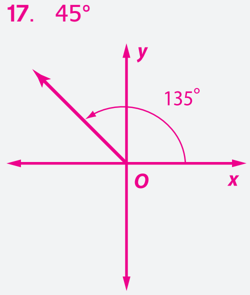
5. $\sin \theta = -\frac{8\sqrt{65}}{65}, \cos \theta = \frac{\sqrt{65}}{65},$ $\tan \theta = -8, \csc \theta = -\frac{\sqrt{65}}{8},$ $\sec \theta = \sqrt{65}, \cot \theta = -\frac{1}{8}$

6. $\sin \theta = -\frac{3\sqrt{34}}{34}, \cos \theta = \frac{5\sqrt{34}}{34},$ $\tan \theta = -\frac{3}{5}, \csc \theta = -\frac{\sqrt{34}}{3},$ $\sec \theta = \frac{\sqrt{34}}{5}, \cot \theta = -\frac{5}{3}$

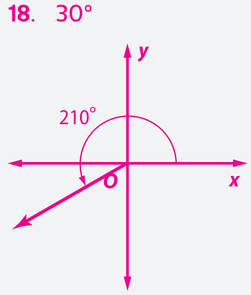
7. $\sin \theta = \frac{15}{17}, \cos \theta = -\frac{8}{17},$ $\tan \theta = -\frac{15}{8}, \csc \theta = \frac{17}{15},$ $\sec \theta = -\frac{17}{8}, \cot \theta = -\frac{8}{15}$

8. $\sin \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5},$ $\tan \theta = 2, \csc \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2},$ $\sec \theta = -\sqrt{5}, \cot \theta = \frac{1}{2}$

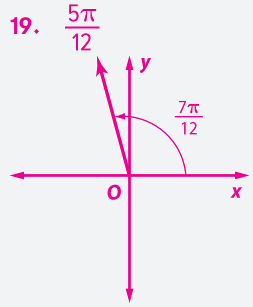
17. 45°



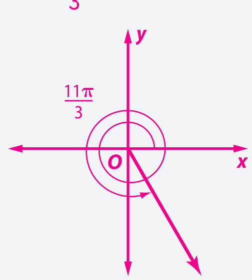
18. 30°



19. $\frac{5\pi}{12}$



20. $\frac{\pi}{3}$



UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 168 12/15/2016 11:40:16 PM

تمارين

النقطة المعطاة تقع على ضلع الإنتهاء للزاوية θ في وضع قياسي. أوجد قيم الدوال المثلثية الست لـ θ. (المثال 1)
8-1. انظر الحاشية.

1. $(3, 4)$	**2.** $(-6, 6)$
3. $(-4, -3)$	**4.** $(2, 0)$
5. $(1, -8)$	**6.** $(5, -3)$
7. $(-8, 15)$	**8.** $(-1, -2)$

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية. إذا كانت مُعرَّفة. إذا لم تكن مُعرَّفة، فاكتب غير مُعرَّفة. (المثال 2)

9. $\sin \frac{\pi}{2}$ **1**	**10.** $\tan 2\pi$ **0**
11. $\cot(-180^\circ)$ **غير مُعرَّفة**	**12.** $\csc 270^\circ$ **−1**
13. $\cos(-270^\circ)$ **0**	**14.** $\sec 180^\circ$ **−1**
15. $\tan \pi$ **0**	**16.** $\sec\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **غير مُعرَّفة**

ارسم كل زاوية. ثم أوجد زاوية الإسناد. (المثال 3)
24-17. انظر الحاشية.

17. 135°	**18.** 210°
19. $\frac{7\pi}{12}$	**20.** $\frac{11\pi}{3}$
21. -405°	**22.** -75°
23. $\frac{5\pi}{6}$	**24.** $\frac{13\pi}{6}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي. (المثال 4)

25. $\cos \frac{4\pi}{3}$ $-\frac{1}{2}$	**26.** $\tan \frac{7\pi}{6}$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
27. $\sin \frac{3\pi}{4}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$	**28.** $\cot(-45^\circ)$ **−1**
29. $\csc 390^\circ$ **2**	**30.** $\sec(-150^\circ)$ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
31. $\tan \frac{11\pi}{6}$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$	**32.** $\sin 300^\circ$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

40-33. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

أوجد القيم الدقيقة للدوال الخمسة المثلثية المتبقية لـ θ. (المثال 5)

33. $\tan \theta = 2$، حيث $\sin \theta > 0$ و $\cos \theta > 0$

34. $\csc \theta = 2$، حيث $\sin \theta > 0$ و $\cos \theta < 0$

35. $\sin \theta = -\frac{1}{5}$، حيث $\cos \theta > 0$

36. $\cos \theta = -\frac{12}{13}$، حيث $\sin \theta < 0$

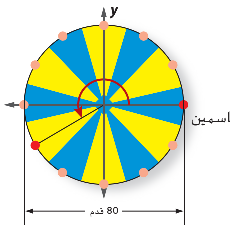
37. $\sec \theta = \sqrt{3}$، حيث $\sin \theta < 0$ و $\cos \theta > 0$

38. $\cot \theta = 1$، حيث $\sin \theta < 0$ و $\cos \theta < 0$

39. $\tan \theta = -1$، حيث $\sin \theta < 0$

40. $\cos \theta = -\frac{1}{2}$، حيث $\sin \theta > 0$

41. لعبة دوامة الخيل ركبت ياسمين لعبة دوامة الخيل في الكرنفال. قطر اللعبة 80 قدمًا. أوجد مكان مقعدها من مركز اللعبة بعدما دارت 210°. (المثال 6)
$(-20\sqrt{3}, -20)$ أو $(-34.6, -20)$



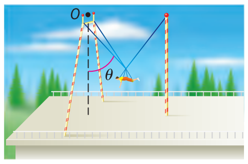
42. أنبوب القطعة المعدنية سقطت القطعة المعدنية في أنبوب؛ حيث أخذت تدور في دوائر أصغر حجمًا حتى سقطت في قاع الصندوق. قطر الدائرة الأولى التي صنعتها القطعة المعدنية 24 سنتيمترًا. قبل دورانها مسافة دائرة كاملة، تدور القطعة 150° وتسقط. ما هو المكان الجديد للقطعة المعدنية بالدالة لمركز الأنبوب؟ (المثال 6)
$(-6\sqrt{3}, 6)$ أو $(-10.4, 6)$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي. إن لم تكن معرّفة، اكتب غير معرّفة. (المثالان 7 و8)

43. $\sec 120^\circ$ **−2**	**44.** $\sin 315^\circ$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
45. $\cos \frac{11\pi}{3}$ $\frac{1}{2}$	**46.** $\tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$ **−1**
47. $\csc 390^\circ$ **2**	**48.** $\cot 510^\circ$ $-\sqrt{3}$
49. $\csc 5400^\circ$ **غير مُعرَّفة**	**50.** $\sec \frac{3\pi}{2}$ **غير مُعرَّفة**
51. $\cot\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ $\sqrt{3}$	**52.** $\csc \frac{17\pi}{6}$ **2**
53. $\tan \frac{5\pi}{3}$ $-\sqrt{3}$	**54.** $\sec \frac{7\pi}{6}$ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
55. $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$	**56.** $\cos \frac{7\pi}{4}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
57. $\tan \frac{14\pi}{3}$ $-\sqrt{3}$	**58.** $\cos\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

59. قطارات الملاهي يركب مازن وأيوب قطار حديقة الملاهي. بعد الأرجحات الأولى العديدة، كانت الزاوية التي صنعها القطار مع الزاوية الرأسية تمثلها $\theta = 22 \cos \pi t$، حيث θ مقدرة بالراديان وt مقدرة بالثواني. حدد مقياس الزاوية مُقدّرًا بالراديان بالدالة لـ $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$, 2.5. (المثال 8)

انظر ملحق إجابات الوحدة 3.



خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-59, 80-106	1- 59 فردي، 103- 106	2-58 زوجي، 80-102
OL ضمن المستوى	1-65 فردي، 66، 71-75، 76-78، 80-106 فردي	1-59, 103-106	60-78, 80-102
BL أعلى من المستوى	60-106		

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم تمارين 1-59 للتحقق من عملية الفهم.

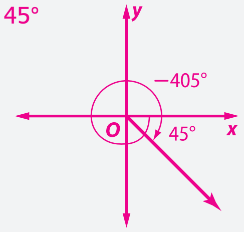
ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص واجبات للطلاب.

انتبه!

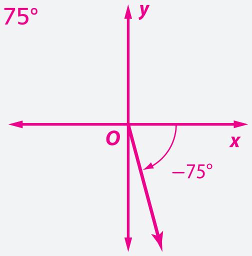
خطأ شائع قد يتجاهل الطلاب القيم السالبة للدوال المثلثية في الربع الثاني والربع الثالث والربع الرابع. ذكِّر الطلاب بأن الربع الأول هو الربع الوحيد الذي تكون فيه الدوال المثلثية موجبة.

إجابات إضافية

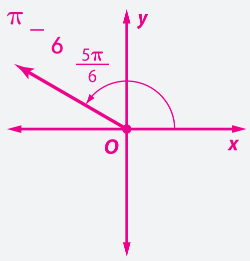
21. 45°



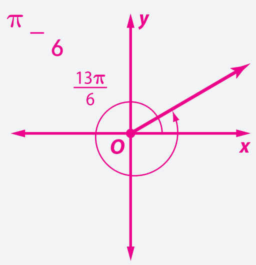
22. 75°



23. $\frac{\pi}{6}$



24. $\frac{\pi}{6}$



أكمل كل تعبير مثلثي مما يلي. B

60. $\cos 60° = \sin$ ___
61. $\tan \frac{\pi}{4} = \sin$ ___
62. $\sin \frac{2\pi}{3} = \cos$ ___
63. $\cos \frac{7\pi}{6} = \sin$ ___
64. $\sin(-45°) = \cos$ ___
65. $\cos \frac{5\pi}{3} = \sin$ ___

60–65. انظر الحاشية.

66. **المثلجات** تقدر المبيعات الشهرية لمحل أحمد للمثلجات بآلاف الدراهم. ويمكن تمثيلها بالآتي: $y = 71.3 + 59.6 \sin \frac{\pi(t-4)}{6}$ ؛ حيث $t = 1$ تمثل يناير، $t = 2$ تمثل فبراير، وهكذا.

a. قدّر مبيعات يناير ومارس ويوليو وأكتوبر.
يناير، 11.7؛ مارس، 41.5؛ يوليو، 130.9؛ أكتوبر، 71.3

b. اشرح لماذا يمكن تمثيل مبيعات محل المثلجات من خلال دالة مثلثية.
الإجابة النموذجية: يأكل الناس المثلجات في الصيف أكثر من الشتاء.

استخدم القيم المقدمة لإيجاد حل الدوال المثلثية.

67. $\cos(-\theta) = \frac{8}{11}$; $\cos\theta = ?$; $\sec\theta = ?$ **$\frac{8}{11}, \frac{11}{8}$**

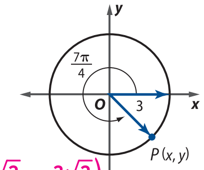
68. $\sin(-\theta) = \frac{5}{9}$; $\sin\theta = ?$; $\csc\theta = ?$ **$-\frac{5}{9}, -\frac{9}{5}$**

69. $\sec\theta = \frac{13}{12}$; $\cos\theta = ?$; $\cos(-\theta) = ?$ **$\frac{12}{13}, \frac{12}{13}$**

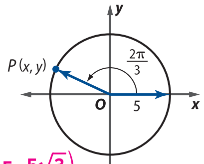
70. $\csc\theta = \frac{19}{17}$; $\sin\theta = ?$; $\sin(-\theta) = ?$ **$\frac{17}{19}, -\frac{17}{19}$**

71. **التمثيلات البيانية** بافتراض أن الضلع الجانبي لزاوية θ في وضع قياسي يقع في المكان نفسه للتمثيل البياني لـ $y = 2x$ في الربع III. أوجد قيم الدوال الست المثلثية لـ θ.
انظر الحاشية.

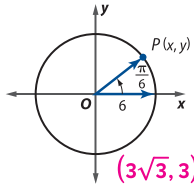
أوجد إحداثيات P لكل دائرة باستخدام نصف القطر المعطى وقياس الزاوية.

72.


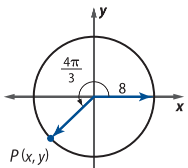
$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

73.


$\left(-\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

74.


$(3\sqrt{3}, 3)$

75.


$(-4, -4\sqrt{3})$

76. $\sin\theta_1 = -\sin\theta_2$

76. **مقارنة** بافتراض أن ضلع الإنتهاء للزاوية θ_1 في وضع قياسي يتضمن النقطة $(7, -8)$. وضلع الإنتهاء للزاوية الثانية θ_2 في وضع قياسي يتضمن النقطة $(-7, 8)$. قارن قيمة sin في كل من θ_1 وθ_2.

77. **المد والجزر** عمق المد والجزر y مقدرًا بالمتر على الشاطئ يختلف باختلاف دالة Sine x الساعة في اليوم. في يوم معين، كانت الدالة $y = 3 \sin\left[\frac{\pi}{6}(x-4)\right] + 8$؛ حيث $x = 0, 1, 2, ..., 24$ يتطابق مع 12:00 منتصف الليل، 1:00 A.M., 2:00 A.M., ..., 12:00 منتصف الليل في الليلة التالية. C

a. ما أقصى عمق، أو ارتفاع للمد والجزر، في ذلك اليوم؟ **11 m**

b. في أي وقت (أوقات) حدث ارتفاع المد والجزر؟
7:00 A.M. و7:00 P.M.

78. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف الفترة المتعلقة بدالة الـ sine.

a. **الجدولي** انسخ وأكمل جدولاً مشابهًا للموجود أمامك. واجعله يتضمن قياسات الزوايا 16 كلها في دائرة الوحدة.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	...	2π
$\sin\theta$						
$\sin 2\theta$						
$\sin 4\theta$						

b. **اللفظي** بعد أي قيم لـ θ تقوم $\sin\theta, \sin 2\theta, \sin 4\theta$ بتكرار قيم مداها؟ بكلمات أخرى، ما الفترات لهذه الدوال؟

c. **اللفظي** خمّن كيف تأثرت الفترة $y = \sin n\theta$ بقيم مختلفة لـ n.

78a–c. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

79. **تحدي** صف في كل عبارة مما يلي n.

a. $\cos\left(n \times \frac{\pi}{2}\right) = 0$ **n عدد فردي صحيح.**

b. $\csc\left(n \times \frac{\pi}{2}\right)$ غير معرّفة **n عدد زوجي صحيح.**

التبرير حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة*. اشرح استنتاجك. **80–81. انظر الحاشية.**

80. إذا كانت $\cos\theta = 0.8$ و $\cos(-\theta) = 0.4$ $\sec\theta -$

81. بما أن $\tan(-t) = -\tan t$، يكون tan الزاوية السالبة عدد سالب.

82. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا يمكن تمثيل عدد الحضور في متنزه على مدار العام بواسطة دالة دورية. أي المشكلات أو الأحداث يمكن أن تقع على مدار الزمن لتغير هذا التمثيل الزمني؟ **انظر الحاشية.**

التبرير استخدم دائرة الوحدة للتحقق من كل علاقة.

83. $\sin(-t) = -\sin t$
84. $\cos(-t) = \cos t$
85. $\tan(-t) = -\tan t$

83–85. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

86. **الكتابة في الرياضيات** خمّن دورة دوال secant و cosecant و cotangent. اشرح استنتاجك.
انظر الحاشية.

إجابات إضافية

60. 30° أو 150°
61. $\frac{\pi}{2}$
62. $\frac{\pi}{6}$ أو $\frac{11\pi}{6}$
63. $\frac{4\pi}{3}$ أو $\frac{5\pi}{3}$
64. 135° أو 225°
65. $\frac{\pi}{6}$ أو $\frac{5\pi}{6}$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 170 12/15/2016 11:40:20 PM

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب

الطلاب قسّم الصف إلى أربع مجموعات. خصص لكل مجموعة أحد الأرباع. اطلب من الطلاب رسم المحور x والمحور y وزاوية إسناد حادة للأرباع الخاصة بهم.

إجابات إضافية

71. $\sin\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\tan\theta = 2$, $\csc\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sec\theta = -\sqrt{5}$, $\cot\theta = \frac{1}{2}$

.80 صواب. الإجابة النموذجية: إذا كان $\cos\theta = 0.8$ فإن $\sec\theta - \cos(-\theta) = \frac{1}{0.8} - 0.8$ أو 0.45.

.81 خطأ. الإجابة النموذجية: التعبير $\tan(-t) = -\tan t$ يعني أن ظل الزاوية هو دالة فردية. ويعتمد ظل الزاوية على الربع الذي يقع فيه الضلع الطرفي.

.82 الإجابة النموذجية: يزيد عدد الأفراد الذين يرتادون مدينة الملاهي في فصل الربيع والصيف لأن الطلاب يكونون في إجازة ويقضي الأفراد مزيدًا من العطلات. وخلال فترة الشتاء، يكون عدد الأفراد الذين يرتادون المدينة أقل لأن عددًا أقل من الأفراد يقضون عطلات. يتغير عدد الأفراد كل عام، وغالبًا ما ستكون فترة الدالة هي عام. قد يتغير هذا التصور إذا استضافت مدينة الملاهي أحداثًا في فصل الشتاء تجذب الأفراد أو إذا قضى الأفراد فترات عطلات أطول في فصل الشتاء.

.86 الإجابة النموذجية: سوف تصبح فترة دالة الـ Sec 2π نظرًا لأنها مقلوب دالة جيب التمام. أما فترة دالة الـ Cosine فهي 2π. سوف تصبح فترة الدالة الـ Csc 2π نظرًا لأنها مقلوب دالة الـ Sine. أما فترة دالة Sine فهي 2π. سوف تصبح فترة دالة Cot π نظرًا لأنها مقلوب دالة tan للزاوية. أما فترة دالة tan الزاوية فهي π.

مراجعة شاملة

اكتب قياس كل درجة عشرية في صيغة وحدات الدرجات والدقائق والثواني (DMS) وكل قياس DMS في صيغة درجة عشرية لأقرب جزء من المئة.

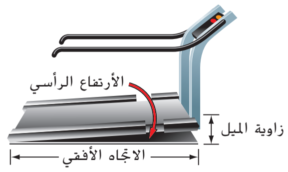
87. $168.35°$ $168°\,21'$

88. $27.465°$ $27°\,27'\,54''$

89. $14°\,5'\,20''$ $14.089°$

90. $173°\,24'\,35''$ $173.410°$

.91 **تمرين** تدريب مبرمج مسبقًا على جهاز الركض يتكون من فترات فاصلة للركض، بمختلف المعدلات وزوايا الميل. 1% من الميل يعني وحدة ارتفاع رأسي واحدة لكل 100 وحدة من الاتجاه الأفقي.



a. في أي زاوية، بالدالة للاتجاه الأفقي، يقع قاع جهاز الركض عندما يتم ضبطه بميل 10%؟ قرّب إلى أقرب درجة. $6°$

b. إذا كان طول قاع جهاز الركض 40 بوصة. فما الارتفاع الرأسي عندما يتم ضبطه بميل 8% بوصة؟ حوالي 3.2 in.

أوجد قيمة اللوغاريتم في كل مما يلي:

92. $\log_8 64$ 2

93. $\log_{125} 5$ $\frac{1}{3}$

94. $\log_2 32$ 5

95. $\log_4 128$ 3.5

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيها أصفار، إن وجدت.

96. $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2$ $\pm1, \pm2; 1$

97. $g(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 3$ $\pm1, \pm3; -3$

98. $h(x) = x^4 - x^2 + x - 1$ $\pm1; 1$

99. $h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ $\pm1, \pm3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}; -3, \frac{1}{2}, 1$

100. $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 11x - 3$ $\pm1, \pm3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}$

101. $g(x) = 4x^3 + x^2 + 8x + 2$ $\pm1, \pm2, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}$

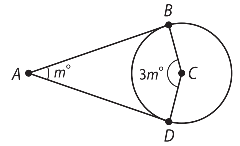
.102 **الملاحة** يستخدم نظام تحديد المواقع العالمي (GPS) الأقمار الصناعية ليتيح للمستخدم تحديد موقعه على الأرض. يعتمد النظام على إشارات الأقمار الصناعية التي تنعكس من وإلى جهاز الإرسال المحمول. الوقت الذي تستغرقه الإشارة في الانعكاس يُستخدم في تحديد مكان جهاز الإرسال. موجات الراديو تسافر خلال الهواء بسرعة 299,792,458 متر في الثانية. والدالة، $d(t) = 299{,}792{,}458t$ تربط الزمن t مقدرًا بالثواني بالمسافة المقطوعة $d(t)$ مقدرة بالمتر.

a. أوجد المسافة التي ستسافرها موجة الراديو في 0.05, 0.2, 1.4,5.9 ثانية. 14,989,622.9 m; 59,958,491.6 m; 419,709,441.2 m; 1,768,775,502 m

b. إذا تم استقبال إشارة من القمر الصناعي الخاص بنظام تحديد المواقع العالمي على جهاز إرسال في 0.08 ثانية، فكم يبعد هذا القمر الصناعي عن جهاز الإرسال؟ 23,983,396.64 m

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

.103 SAT/ACT في الشكل، $\overline{AB}$ و $\overline{AD}$ كل منهما مماس للدائرة C. ما قيمة m؟ $45°$



.104 لنفترض أن θ زاوية في وضع قياسي مع $\sin\theta > 0$. في أي ربع (أرباع) يمكن أن يقع ضلع الإنتهاء للزاوية θ؟ **B**

A I فقط

B I و II

C I و III

D I و IV

.105 **مراجعة** أوجد السرعة الزاوية مقدرة بالراديان لكل ثانية لنقطة على إطار دراجة إذا أتمت دورتين في 3 ثوانٍ. **J**

F $\frac{\pi}{3}$

G $\frac{\pi}{2}$

H $\frac{2\pi}{3}$

J $\frac{4\pi}{3}$

.106 **مراجعة** أي الزوايا لها tan و Cosine سالبين؟ **A**

A $110°$

B $180°$

C $210°$

D $340°$

التدريس المتمايز BL

التوسع ما النقاط التي يتقاطع عندها المستقيم $x = \frac{1}{2}$ مع دائرة الوحدة؟ وضّح كيف يُمكنك استخدام هذه النقاط في إيجاد $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{2}$. يتقاطع المستقيم $x = \frac{1}{2}$ مع دائرة الوحدة عند $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ وذلك نظرًا لأن النقاط على دائرة الوحدة لها الإحداثيات $(\cos\theta, \sin\theta)$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 171 12/15/2016 11:40:22 PM

1 التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني والمعادلات الوسيطية لتمثيل دالة جيب الزاوية ومعكوسها بيانيًّا.

نصيحة للتدريس

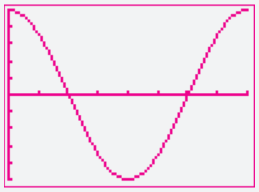
تعبر المعادلة الوسيطية عن قيمة المعادلة كدالة زمنية t. بالنسبة لمعادلة في صيغة $y = f(x)$، يتم تحويل المعادلة إلى معادلة وسيطة لتكون $y = f(t)$، حيث $t = x$.

2 التدريس

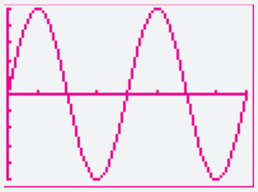
العمل في مجموعات متعاونة

قسّم الطلبة في الصف إلى مجموعات ثنائية. ينفذ الصف بأكمله النشاط 1. ثم اطلب من الطلاب التعاون مع زملائهم في إكمال التمرينات من 1 إلى 6.

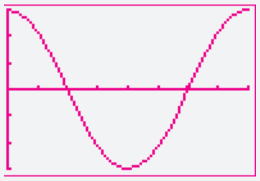
إجابات إضافية

1.


$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-1, 1]$ scl: 0.2
$t: [0, 2\pi]$; tstep: $\frac{\pi}{12}$

2.


$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-1, 1]$ scl: 0.2
$t: [0, 2\pi]$; tstep: $\frac{\pi}{24}$

3.


$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-3, 3]$ scl: 1
$t: [0, 2\pi]$; tstep: $\frac{\pi}{12}$

الاستكشاف 3-4
مختبر تقنية التمثيل البياني
تمثيل دالة الـ sine بيانيًّا باستخدام المعادلات الوسيطية

الهدف:

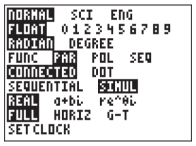
- استخدام الحاسبة البيانية والمعادلات الوسيطية لتمثيل دالة الـ sine ومعكوسها بيانيًّا.

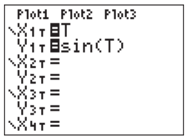
باستخدام نظام الأعداد الحقيقية، يمكنك تمثيل الدوال المثلثية على المستوى الإحداثي، وتطبيق التحليل البياني نفسه الذي قمت به للدوال في درس سابق. كما سبق في التوسع 7-1. سنستخدم المعادلات الوسيطية في تمثيل دالة الـ sine

النشاط 1 تمثيل المعادلة الوسيطية بيانيًّا $y = \sin x$

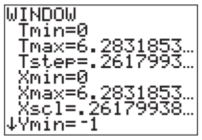
مثّل بيانيًّا $x = t$، $y = \sin t$.

الخطوة 1 تعيين المنوال. من القائمة MODE، اختر RADIAN، PAR، وSIMUL. يتيح هذا تمثيل المعادلات بيانيًّا على الفور. بعد ذلك، قم بإدخال المعادلات الوسيطية، في صيغة وسيطة. سيتم استخدام t بدلًا من x. X,T,θ,n



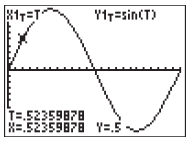


الخطوة 2 قم بإعداد قيم t و x للمدى من 0 إلى 2π. قم بإعداد مقياس Tstep و x على $\frac{\pi}{12}$. قم بإعداد y على $[-1, 1]$ scl: 0.1.
تقوم الحاسبة تلقائيًّا بالتحويل إلى صيغة عشرية.



الخطوة 3 تمثيل المعادلة بيانيًّا. تتبّع الدالة لتحديد النقاط على التمثيل البياني. اختر TRACE واستخدام السهم الأيمن للتحرك على المنحنى.

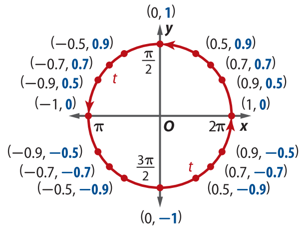
سجّل القيم المتناظرة لكل من x و y.

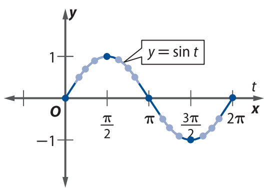


$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{12}$ by $[-1, 1]$ scl: 0.1
$t: [0, 2\pi]$; tstep $\frac{\pi}{12}$

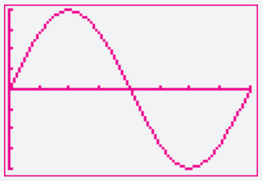
الخطوة 4 يوضح الجدول قياس الزوايا من 0° إلى 180°، أو من 0 إلى π. والقيم المتناظرة لـ $\sin t$ على دائرة الوحدة. الأشكال التالية تمثل العلاقة بين التمثيل البياني ودائرة الوحدة.

الدرجات	0	30	45	60	90	120	135	150	180
الراديانات	0	0.52	0.79	1.05	1.571	2.094	2.356	2.618	3.14
$y = \sin t$	0	0.5	0.707	0.866	1	0.866	0.707	0.5	0





نصيحة دراسية
المعادلات العشرية فيما يلي المعادلات العشرية لقيم مثلثية مشتركة.
$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$
$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$

4.


$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-4, 4]$ scl: 1
$t: [0, 2\pi]$; tstep: $\frac{\pi}{12}$

5.


$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-1, 1]$ scl: 0.2
$t: [0, 2\pi]$; tstep: $\frac{\pi}{12}$

6.


$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.5
$t: [0, 2\pi]$; tstep: $\frac{\pi}{12}$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 172 12/15/2016 11:40:24 PM

تدريب اطلب من الطلاب إكمال النشاط 2 والتمرينات من 7 إلى 15

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 8 لتقويم قدرة الطلاب على رسم معادلة وسيطية ومعكوسها على حاسبة التمثيل البياني.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب تلخيص ما تعلموه حول التمثيل البياني للدوال المثلثية ومعكوساتها. واطلب منهم تفسير كيفية تحديد ما إذا كانت الدالتان المرسومتان بيانيًّا معكوستين أم لا.

تمارين

مثِّل كل دالة على $[0, 2\pi]$. 1–6. انظر الحاشية.

1. $x = t, y = \cos t$
2. $x = t, y = \sin 2t$
3. $x = t, y = 3\cos t$
4. $x = t, y = 4\sin t$
5. $x = t, y = \cos(t + \pi)$
6. $x = t, y = 2\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

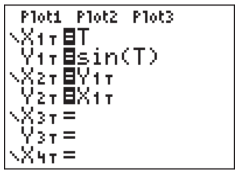
بالتعريف يكون $\sin t$ هو الإحداثي y للنقطة $P(x, y)$ على دائرة الوحدة؛ حيث يلتف العدد الحقيقي t حول خط الأعداد. كما هو مبين في الرسم التخطيطي بالصفحة السابقة، فإن التمثيل البياني لـــ $y = \sin t$ يتبع الإحداثي y في النقطة التي تحددها t وهي تتحرك عكس عقارب الساعة حول دائرة الوحدة.

التمثيل البياني لدالة الـــ sine يسمى منحنى الـــ *sine*. تعلمت من الدرس 3-4 أن دالة الـــ sine هي دالة زمنية لها دورة 2π. هذا معناه أن منحنى الـــ sine الممثل بيانيًّا من 0 إلى 2π سيُكرَّر كل مسافة قدرها 2π في أي من الاتجاهين، الموجب والسالب. يمكن استخدام المعادلات الوسيطية لتمثيل معكوس دالة الـــ sine بيانيًّا.

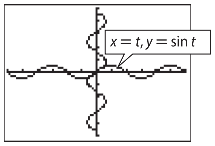
النشاط 2 تمثيل المعكوس بيانيًّا

مثِّل بيانيًّا $x = t$، $y = \sin t$ ومعكوسها. ثم حدِّد المجال الذي يجعل $y = \sin t$ بدالة واحد إلى واحد.

الخطوة 1 يتم إيجاد المعكوسات بتبديل x و y. قم بإدخال المعادلات المعطاة كالتالي: X_{1T} و Y_{1T}. لتمثيل المعكوس بيانيًّا، قم بإعداد $X_{2T} = Y_{1T}$ و $Y_{2T} = X_{1T}$. وهذه توجد في VARS القائمة. اختر Y-VARS، المعادلة الوسيطية، Y_{1T}. كرِّر بالدالة لـــ X_{1T}.



الخطوة 2 تمثيل المعادلة بيانيًّا. عدِّل النافذة حتى يتضح كل من الرسمين البيانيين، كما هو موضح. ربما تحتاج إلى تعيين Tstep بقيمة صغرى حتى تحصل على منحنى بياني متجانس.



$[-3\pi, 3\pi]$ scl: $\frac{\pi}{12}$ by $[-10, 10]$ scl: 2
t: $[-3\pi, 3\pi]$; $t$step $\frac{\pi}{12}$

الخطوة 3 بسبب أن منحنى الـــ sine دوري، هناك عدد لانهائي من المجالات سيجتاز بسببها المنحى اختبار الخط الأفقي، بدالة واحد إلى واحد. أحد هذه المجالات مثلاً $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

نصيحة دراسية
Tstep إذا اتضح أن التمثيل البياني منكسر، يمكنك تغيير قيمة Tstep إلى قيمة صغرى حتى تحصل على منحنى متجانس.

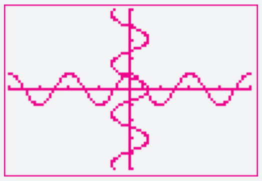
تمارين

مثِّل كل دالة ومعكوسها. ثم حدِّد مجالًا تكون نسبته إلى كل دالة واحدًا إلى واحد. 7–12. انظر الحاشية.

7. $x = t, y = \cos 2t$
8. $x = t, y = -\sin t$
9. $x = t, y = 2\cos t$
10. $x = t + \frac{\pi}{4}, y = \sin t$
11. $x = t, y = 2\cos(t - \pi)$
12. $x = t - \frac{\pi}{6}, y = \sin t$

إجابات إضافية

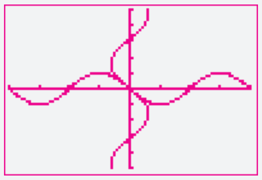
7.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-5, 5]$ scl: 1
t: $[-2\pi, 2\pi]$; $t$step: $\frac{\pi}{36}$

الإجابة النموذجية: $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

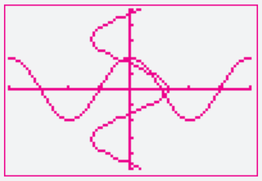
8.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-5, 5]$ scl: 1
t: $[-2\pi, 2\pi]$; $t$step: $\frac{\pi}{36}$

الإجابة النموذجية: $D = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

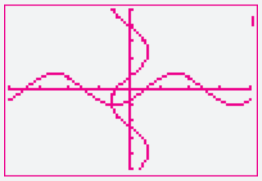
9.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-5, 5]$ scl: 1
t: $[-2\pi, 2\pi]$; $t$step: $\frac{\pi}{36}$

الإجابة النموذجية: $D = [0, \pi]$

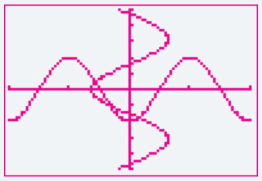
10.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-5, 5]$ scl: 1
t: $[-3\pi, 3\pi]$; $t$step: $\frac{\pi}{36}$

الإجابة النموذجية:
$D = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$

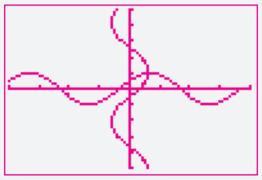
11.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-5, 5]$ scl: 1
t: $[-2\pi, 2\pi]$; $t$step: $\frac{\pi}{36}$

الإجابة النموذجية:
$D = [0, \pi]$

12.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-5, 5]$ scl: 1
t: $[-2\pi, 2\pi]$; $t$step: $\frac{\pi}{24}$

الإجابة النموذجية:
$D = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 173 12/15/2016 11:40:26 PM

الدرس 3-4 تمثيل دوال sine و cosine الزاوية بيانيًا

··السابق	··الحالي	··لماذا؟
● لقد قمت بتحليل التمثيلات البيانية للدوال.	1 تمثيل التحويلات لدوال الــ sine و cosine بيانيًا. 2 استخدام دوال الsine لحل المسائل.	● عندما تدور العجلة الدوارة، يختلف الارتفاع الذي كنت عليه فوق سطح الأرض بشكل دوري تمامًا مثل دالة دورية. يمكنك تمثيل هذا السلوك باستخدام *دالة* sine.

المفردات الجديدة
منحنى الجيب sinusoid
سعة amplitude
تكرار frequency
إزاحة الطور phase shift
إزاحة رأسية vertical shift
خط متوسط midline

1 تحويلات دوال sine , cosine

كما هو مبين في المثال 4-4. التمثيل البياني $y = \sin t$ يتبع الإحداثي y للنقطة المحددة بواسطة t وهي تتحرك حول دائرة الوحدة. وبالمثل. التمثيل البياني لــ $y = \cos t$ يتبع الإحداثي x لهذه النقطة. التمثيلات البيانية لهذه الوظائف دورية،وتتكرر بعد فترة من 2π. وفيما يلي تلخيص خصائص دوال الــ sine و cosine.

المفهوم الأساسي خواص دوال الــ sine, cosine

دالة الــ sine

المجال: $(-\infty, \infty)$ **المدى:** $[-1, 1]$

***التقاطع مع المحور الرأسي* y:** 0

التقاطع مع المحور الأفقي x: $n\pi, n \in \mathbb{Z}$

الاتصال متصلة على $(-\infty, \infty)$

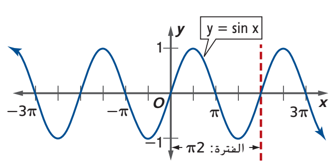
التناظر الأصل (دالة فردية)

القيم القصوى قيمة عظمى 1 عند $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

قيمة صغرى من -1 عند $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

السلوك الطرفي $\lim_{x \to -\infty} \sin x$ و $\lim_{x \to \infty} \sin x$ غير موجودة.

التذبذب: بين -1 و 1



دالة الــ cosine

المجال: $(-\infty, \infty)$ **المدى:** $[-1, 1]$

***التقاطع مع المحور الرأسي* y:** 1

التقاطع مع المحور الأفقي x: $\frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$

الاتصال متصلة على $(-\infty, \infty)$

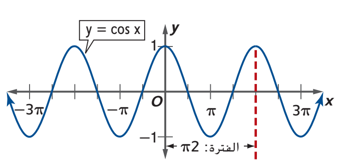
التناظر المحور y (دالة زوجية)

القيم القصوى قيمة عظمى عند $x = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

قيمة صغرى -1 عند $x = \pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

السلوك الطرفي $\lim_{x \to -\infty} \cos x$ و $\lim_{x \to \infty} \cos x$ غير موجودة.

التذبذب: بين -1 و 1



يمثل كل جزء من التمثيل البياني على $[0, 2\pi]$ فترة واحدة أو دائرة من الدالة. لاحظ أن التمثيل البياني لــ cosine هو ترجمة أفقية للتمثيل البياني للــ sine. أي تحويل في دالة sine اسمه **sinusoid**. الشكل العام لهذه الدوال هو:

$$y = a \sin (bx + c) + d \quad \text{و} \quad y = a \cos (bx + c) + d$$

حيث a, b, c, d هي ثوابت، ولا تساوي a و b القيمة 0.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-4 تحليل التمثيلات البيانية للدوال.

الدرس 3-4 التمثيل البياني لتحويلات دالة جيب الزاوية ودالة جيب التمام. استخدام الدوال الجيبية في حل المسائل.

بعد الدرس 3-4 التمثيل البياني للمماس والمعكوس الضربي والدوال المثلثية المتضائلة.

2 التركيز

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد بالدرس.

اطرح السؤالين التاليين:

- بفرض أنه في مركز الدوران $y = 0$. **كيف تتغير قيم y عند دوران العجلة الدوارة؟** الإجابة النموذجية: تتغير قيم y أعلى وأسفل المستقيم $y = 0$.
- ما الذي يحدد الدورة التي تتكرر عندها قيم ارتفاع العجلة الدوارة؟ معدل الدوران

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 174 12/15/2016 11:40:28 PM

- هل تغيير سرعة العجلة الدوارة يؤثر على مدى قيم y؟ لا هل الدورة اللازمة لقيم y تتكرر؟ نعم

1 تحويلات دوال الــ Sine و الــ Cosine

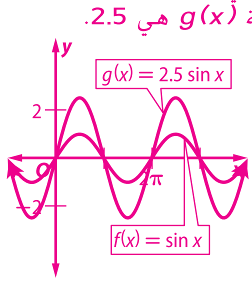
الأمثلة 1–3 توضِّح كيفية عمل تمثيل بياني لعمليات التمدد الرأسية والانعكاسات وعمليات التمدد الأفقية للدوال الجيبية.
المثال 4 يوضِّح كيفية استخدام التردد في كتابة دالة جيبية. **المثالان 5 و 6** يوضِّحان كيفية عمل تمثيل بياني للإزاحات الرأسية للدوال الجيبية.

التقويم التكويني

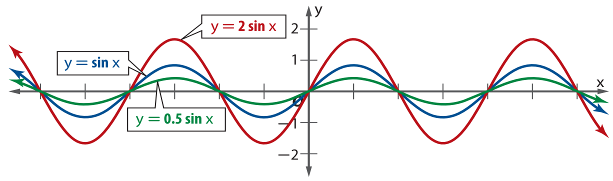
استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 وضِّح مدى ارتباط التمثيل البياني $f(x) = \sin x$ بالتمثيل البياني $g(x) = 2.5 \sin x$. ثم أوجد سعة $g(x)$، وارسم فترتين لكلتا الدالتين على نفس محاور التماثل. التمثيل البياني لــ $g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لــ $f(x)$ لكنه ممتد رأسيًا. سعة $g(x)$ هي 2.5.



لاحظ أن العامل الثابت a في: $y = a \cos x$ و $y = a \sin x$ يوسع التمثيلات البيانية لــ $y = \cos x$ و $y = \sin x$ رأسيًا إذا $|a| > 1$ ويضغطها رأسيًا إذا $|a| < 1$.



التوسعات الرأسية تؤثر في سعة الدوال الجيبية(sinusoid)

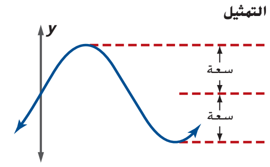
نصيحة دراسية
التوسعات والتقاطعات مع المحور الأفقي x لاحظ أن تغيير الأبعاد للدالة الجيبية لا يؤثر على مكان قطع المنحنى للمحور الأفقي x عند التقاطع مع المحور الأفقي x

المفهوم الأساسي تكرار دوال الــ sine , cosine

الشرح **سعة** الدالة الجيبية(sinusoid)هي نصف المسافة بين القيم القصوى والصغرى من الدالة، أو نصف ارتفاع التموج.

الرموز عندما يكون $y = a \sin (bx + c) + d$ و $y = a \cos (bx + c) + d$، تكون السعة $= |a|$.

التمثيل



لتمثيل دالة جيبية (sinusoid) بيانيًا صيغتها $y = a \cos x$ أو $y = a \sin x$، حدد موقع التقاطع مع المحور الأفقي x لــ sin الزاوية الرئيسية أو دالة الــ cos، ثم استخدم السعة $|a|$ لتحديد نقاط الحد الأقصى ونقاط الحد الأدنى الجديدة. ثم ارسم موجة الــsin من خلال هذه النقاط.

المثال 1 تغيير الأبعاد الرأسية بمقياس التمثيل البياني للدوال الجيبية(sinusoid)

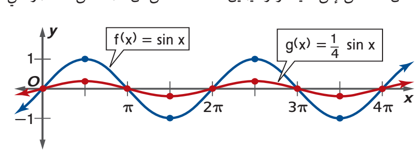
صف كيف أن التمثيلات البيانية لــ $g(x) = \frac{1}{4} \sin x$ و $f(x) = \sin x$ مترابطة. ثم أوجد سعة $g(x)$، وارسم فترتي كلتا الدالتين على المحاور الإحداثية نفسها.

التمثيل البياني لــ $g(x)$ i هو التمثيل البياني لــ $f(x)$ المضغوط رأسيًا. سعة $g(x)$ هي $\left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$.

ضع جدولاً لإدراج إحداثيات تقاطعات x والقيم القصوى لــ $f(x) = \sin x$ لفترة واحدة على $[0, 2\pi]$. ثم استخدم سعة $g(x)$ للعثور على نقاط مماثلة في تمثيلها البياني.

الدالة	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة العظمى	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة الصغرى	التقاطع مع المحور الأفقي x
$f(x) = \sin x$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$	$(\pi, 0)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$	$(2\pi, 0)$
$g(x) = \frac{1}{4} \sin x$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{4}\right)$	$(\pi, 0)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, -\frac{1}{4}\right)$	$(2\pi, 0)$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الموضحة لكل دالة. ثم كرر النموذج المقتَّرَح بواسطة فترة واحدة لكل تمثيل بياني وذلك لإكمال فترة ثانية على $[2\pi, 4\pi]$. ثم قم بتمديد كل منحنى إلى اليسار واليمين للدلالة على أن المنحنى مستمر في كلا الاتجاهين



تمرين موجه 1A–C انظر ملحق إجابات الفصل 3.

صف كيف أن التمثيلات البيانية الخاصة بــ $f(x)$ و $g(x)$ مترابطة. ثم أوجد سعة $g(x)$، وارسم فترتين لكلتا الدالتين على محاور الإحداثيات نفسها.

1A. $f(x) = \cos x$
$g(x) = \frac{1}{3} \cos x$

1B. $f(x) = \sin x$
$g(x) = 5 \sin x$

1C. $f(x) = \cos x$
$g(x) = 2 \cos x$

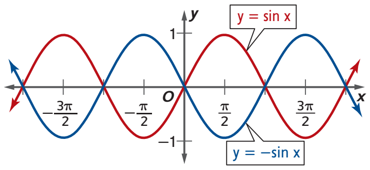
نصيحة دراسية
راديانات مقابل الدرجات
يمكن إعادة قياس المحور x من حيث الدرجات و إنتاج تمثيل بياني سيني يشبه تلك المنتجة باستخدام مقياس راديان و مع ذلك، في حساب التفاضل والتكامل، سوف تواجه قواعد تعتمد على قياس راديان. لذلك، في هذا الكتاب، فإننا سوف نوفر تمثيلاً بيانيًّا لجميع الدوال المثلثية بمقياس راديان .

التدريس المتمايز AL OL BL

المتعلمون أصحاب النمط الطبيعي اطلب من الطلاب البحث عن أنواع من البيانات التي تُعرض على راسمة الذبذبات أو جهاز رسم القلب (EKG) وتوضيح الشكل الذي تظهر عليه التمثيلات البيانية للبيانات. واطلب منهم وصف التمثيلات البيانية هل هي دوال دورية أم غير دورية. الإجابة النموذجية: موجات الصوت، والنشاط الكهربائي؛ الدوال دورية

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 175 12/15/2016 11:40:30 PM

إذا كانت $a < 0$، فإن التمثيل البياني الخاص بدالة الــsine منعكس بالنسبة للمحور x.



المثال 2 انعكاسات التمثيل البياني للدوال الجيبية (sinusoid)

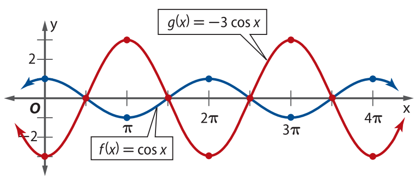
صف كيف أن التمثيلات البيانية لــ $g(x) = -3 \cos x$ و $f(x) = \cos x$ مترابطة. ثم أوجد سعة $g(x)$، و ارسم فترتي الدالتين على نفس محاور التناظر.

التمثيل البياني لــ $g(x)$ هو التمثيل البياني لــ $f(x)$ الممدّد رأسيًّا و من ثم منعكس بالنسبة للمحور x. تكون سعة $g(x)$ |-3| أو 3.

ضع جدولاً لإدراج إحداثيات أهم نقاط $f(x) = \sin x$ لفترة واحدة على $[0, 2\pi]$. استخدم سعة $g(x)$ لإيجاد نقاط متماثلة في التمثيل البياني لــ $y = 3 \cos x$. ثم اعكس هذه النقاط بالنسبة للمحور x لتجد النقاط المماثلة في التمثيل البياني لــ $g(x)$.

الدالة	القيمة العظمى	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة العظمى	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة العظمى
$f(x) = \cos x$	$(0, 1)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$(\pi, -1)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$(2\pi, 1)$
$y = 3 \cos x$	$(0, 3)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$(\pi, -3)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$(2\pi, 3)$
$g(x) = -3 \cos x$	$(0, -3)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$(\pi, 3)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$(2\pi, -3)$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الموضحة لكل دالة. ثم كرر النموذج المقترح بواسطة فترة واحدة لكل تمثيل بياني وذلك لإكمال فترة ثانية على $[2\pi, 4\pi]$. ثم قم بتمديد كل منحنى إلى اليسار واليمين للدلالة على أن المنحنى مستمر في كلا الاتجاهين



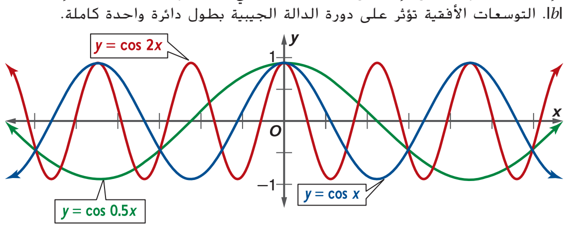
تمرين موجه

صف كيف أن التمثيلات البيانية الخاصة بــ $f(x)$ و $g(x)$ مترابطة. ثم أوجد سعة $g(x)$, وارسم فترتي الدالتين على محاور التناظر نفسها. 2A–B. انظر الهامش.

2A. $f(x) = \cos x$
$g(x) = -\frac{1}{5} \cos x$

2B. $f(x) = \sin x$
$g(x) = -4 \sin x$

في الدرس 1-5، أنه إذا كان $g(x) = f(bx)$، فإن $g(x)$ هو التمثيل البياني لــ $f(x)$ المضغوط أفقيًّا إذا كان $|b| > 1$ والمتسع أفقيًّا إذا كان $|b| < 1$. التوسعات الأفقية تؤثر على دورة الدالة الجيبية بطول دائرة واحدة كاملة.

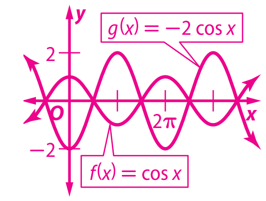


انتبه!

السعة لاحظ ان المثال 2 لا يذكر أن سعة $g(x) = -3 \cos x$ تكون -3. السعة هي ارتفاع وليست اتجاهية

مثال إضافي

2 وضِّح مدى ارتباط التمثيل البياني $f(x) = \cos x$ بالتمثيل البياني $g(x) = -2 \cos x$. ثم أوجد سعة $g(x)$، وارسم فترتين لكلتا الدالتين على محاور التماثل نفسها. التمثيل البياني لــ $g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لــ $f(x)$ لكنه ممتد رأسيًّا و من ثم منعكس في المحور x. سعة $g(x)$ هي 2.

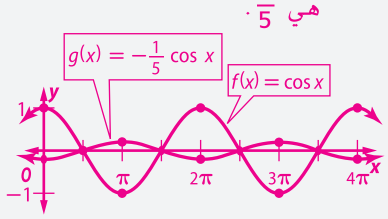


إرشاد للمعلمين الجدد

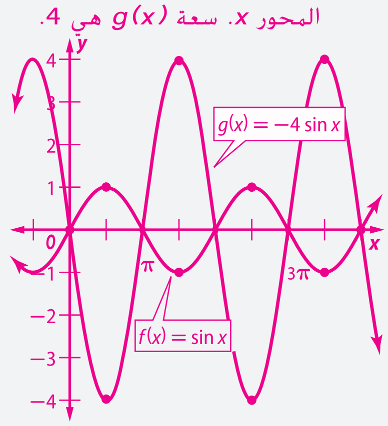
السعة أثناء مناقشة تعريف السعة مع الطلاب، يُمكنهم جعل التمثيل البياني يمثل موجة في المحيط والمحور x يمثل مستوى البحر. السعة هي ارتفاع الموجة فوق سطح البحر أو أسفله.

إجابات إضافية (تمرين موجه)

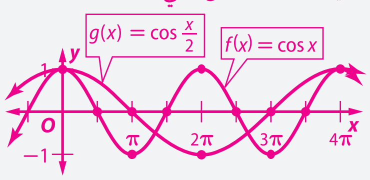
2A. التمثيل البياني لــ $g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لــ $f(x)$ لكنه مضغوط رأسيًا ومنعكس على المحور x. سعة $g(x)$ هي $\frac{1}{5}$.



2B. التمثيل البياني لــ $g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لــ $f(x)$ لكنه ممتد رأسيًا ومنعكس على المحور x. سعة $g(x)$ هي 4.



3A. التمثيل البياني لــ $g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لــ $f(x)$ لكنه ممتد أفقيًا. سعة $g(x)$ هي 4π.

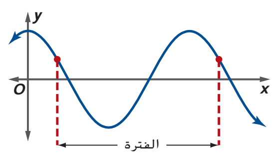


UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indb 176 12/15/2016 11:40:32 PM

المفهوم الأساسي دورات دوال الـــ sine, cosine

الشرح دورة الدالية الجيبية هي المسافة بين أي مجموعتين من نقاط التكرار على التمثيل البياني للدالة

التمثيل



الرموز إذا كان $y = a\sin(bx + c) + d$ و $y = a\cos(bx + c) + d$، حيث $b \neq 0$.
فإن الدورة $= \frac{2\pi}{|b|}$.

انتبه!
تحديد الدورة عند تحديد دورة الدالة الزمنية من تمثيلها البياني تذكر أن الدورة هي أصغر مسافة تحتوي على كافة قيم الدالة.

لعمل تمثيل بياني لدالة الـــsin للنموذج $y = \cos bx$ أو $y = \sin bx$، أوجد دورة الدالة ومن ثم أضف $\frac{\text{الدورة}}{4}$ من نقطة النهاية اليسرى للفترة مع هذا الطول. ثم استخدم هذه القيم كقيم للمحور x الخاصة بالنقاط الرئيسية على التمثيل البياني.

مثال 3: تمثيل التوسعات الأفقية للدوال الجيبية (sinusoid) بيانيًا

صف كيف أن التمثيلات البيانية لـــ $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \cos\frac{x}{3}$ مترابطة. ثم أوجد الفترة لـــ $g(x)$، وارسم فترتي الدالتين على نفس المحاور الإحداثية.

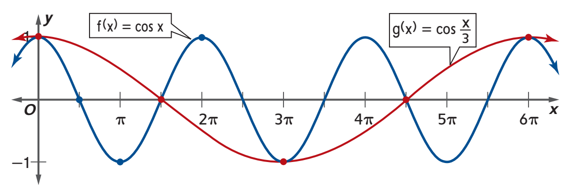
لأن $\cos\frac{1}{3}x = \cos\frac{x}{3}$، فإن التمثيل البياني لـــ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـــ $f(x)$ المتسع رأسيًّا. وتكون دورة $g(x)$

$$\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$$

لأن دورة $g(x)$ تكون 6π. لإيجاد النقاط المناظرة على التمثيل البياني لـــ $g(x)$، غيّر إحداثيات x لهذه النقاط على $f(x)$ كي تتراوح بين 0 و 6π لتزداد بزيادات من $\frac{6\pi}{4}$ أو $\frac{3\pi}{2}$.

الدالة	القيمة العظمى	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة الصغرى	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة العظمى
$f(x) = \cos x$	$(0, 1)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$(\pi, -1)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$(2\pi, 1)$
$g(x) = \cos\frac{x}{3}$	$(0, 1)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$(3\pi, -1)$	$\left(\frac{9\pi}{2}, 0\right)$	$(6\pi, 1)$

رسم منحنى من خلال النقاط المشار إليها لكل دالة. وتابع الأنماط لإتمام دورة كاملة واحدة لكل منها.



تمرين موجه

صف كيف أن التمثيلات البيانية الخاصة بـ $f(x)$ و $g(x)$ مترابطة. ثم أوجد دورة $g(x)$، وارسم على الأقل دورة واحدة لكل دالة على المحاور الإحداثية نفسها. انظر الهامش 3A–C

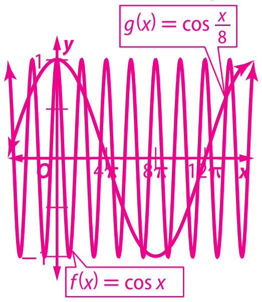
3A. $f(x) = \cos x$
$g(x) = \cos\frac{x}{2}$

3B. $f(x) = \sin x$
$g(x) = \sin 3x$

3C. $f(x) = \cos x$
$g(x) = \cos\frac{1}{4}x$

مثال إضافي

3 وضّح مدى ارتباط التمثيل البياني $f(x) = \cos x$ بالتمثيل البياني $g(x) = \cos\frac{x}{8}$. ثم أوجد فترة $g(x)$، وارسم فترتين لكلتا الدالتين على نفس محاور التماثل. التمثيل البياني لـــ $g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـــ $f(x)$ لكنه متمدد أفقيًا بعامل 8. فترة $g(x)$ هي 16π.



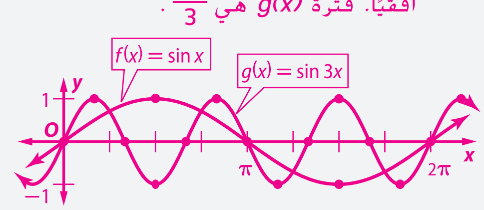
التركيز على محتوى الرياضيات

التحويلات يستكشف هذا الدرس مدى تأثر التمثيل البياني $y = a\sin(bx + c) + d$ والتمثيل البياني $y = a\cos(bx + c) + d$ بتغيير قيم الثوابت a، و b، و c، و d.

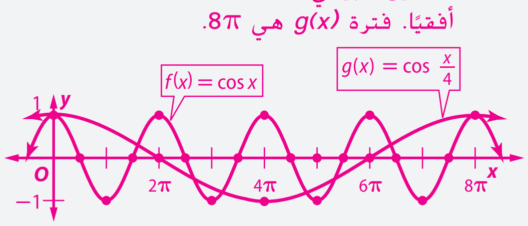
- تغيير الثابت a يؤثر على سعة التمثيل البياني. إذا كان $|a| > 1$، فإن التمثيل البياني يمتد رأسيًا، أما إذا كان $|a| < 1$، فإن التمثيل البياني ينضغط رأسيًا. إذا كان $a < 0$، فإن التمثيل البياني ينعكس في المحور x.
- تغيير الثابت b يؤثر على فترة الدالة وتكرارها. إذا كان $|b| > 1$، فإن التمثيل البياني ينضغط أفقيًا. أما إذا كان $|b| < 1$، فإن التمثيل البياني يمتد أفقيًا.
- تغيير الثابت c يُزيح الدالة أفقيًا $|c|$ وحدة إلى اليسار إذا كان $c > 0$ و $|c|$ وحدة إلى اليمين إذا كان $c < 0$. تُعرف الإزاحة الأفقية بإزاحة الطور.
- تغيير الثابت d يُزيح الدالة رأسيًا $|d|$ وحدة إلى الأعلى إذا كان $d > 0$ و $|d|$ وحدة لأسفل إذا كان $d < 0$.

إجابات إضافية (تمرين موجه)

3B. التمثيل البياني لـــ $g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـــ $f(x)$ لكنه مضغوط أفقيًا. فترة $g(x)$ هي $\frac{2\pi}{3}$.



3C. التمثيل البياني لـــ $g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـــ $f(x)$ لكنه ممتد أفقيًا. فترة $g(x)$ هي 8π.



التمدّدات الأفقية تؤثر أيضاً على تكرار الدوال الجيبية

المفهوم الأساسي تكرار دوال الـ cosine, sine

الشرح

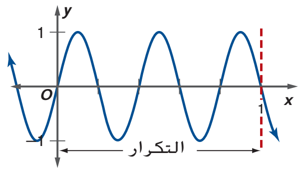
تكرار الدالة الجيبية هو عدد الدوائر التي تكملها الدالة في فترة طولها وحدة واحدة. التكرار هو مقلوب الدورة.

الرموز

عندما يكون $y = a \sin (bx + c) + d$ و $y = a \cos (bx + c) + d$،

$\text{التكرار} = \frac{|b|}{2\pi} = \frac{1}{\text{الدورة}}$ period

التمثيل



لأن تكرار الدالة الجيبية مقلوب تلك الدورة، ويترتب على ذلك أن دورة الدالة مقلوب تكرارها.

مثال 4 من الحياة اليومية استخدام التكرار لكتابة الدالة الجيبية.

الموسيقى الملاحظات الموسيقية مصنفة وفقًا للتكرار. وضمن المقياس المخفف ذاته، يمثل الوسط C التردّد التكراري 262 هيرتز. استخدم هذه المعلومات والمعلومات التي في اليمين لكتابة معادلة دالة الـ sine التي يمكن استخدامها لتمثيل السلوك الأولي من الموجة الصوتية المرتبطة بالوسط C وذات سعة 0.2.

الشكل العام للمعادلة سوف يكون $y = a \sin bt$، حيث t يكون الزمن بالثواني. لأن السعة تكون $|a| = 0.2$. هذا يعني أن $a = \pm 0.2$.

الدورة هي مقلوب التكرار أو $\frac{1}{262}$. استخدم هذه القيمة لتجد b.

صيغة الدورة	$\text{الدورة} = \frac{2\pi}{|b|}$
$\text{الدورة} = \frac{1}{262}$	$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{1}{262}$
حل لإيجاد $|b|$.	$|b| = 2\pi(262)$ أو 524π
تحل من أجل b.	$b = \pm 524\pi$

عن طريق الاختيار العشوائي للقيم الإيجابية من b و a، إحدى دوال الـsine التي تمثّل السلوك الأولي تكون $y = 0.2 \sin 524\pi t$.

تمرين موجه

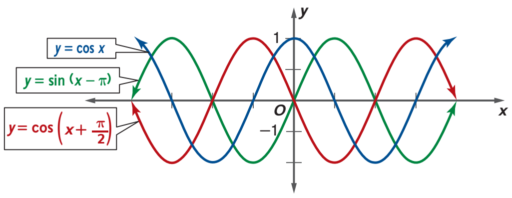
4. **الموسيقى** في نفس المقياس، مفتاح C الذي فوق مفتاح الوسط C له تردّد تكراري 524 هيرتز. اكتب معادلة لدالة الـsine التي يمكن استخدامها لتمثيل السلوك الأولي من الموجة الصوتية المرتبطة بمفتاح C هذا الذي له سعة 0.2. **الإجابة النموذجية: $y = 0.1 \sin 1048\pi t$**

الربط بالحياة اليومية

في الفيزياء، التكرار يتم قياسه بالهيرتز أو التذبذبات في الثانية الواحدة . على سبيل المثال، عدد موجات الصوت التي تتخطى النقطة A في الثانية الواحدة يمكن أن تكون تردد الموجة.

المصدر: *عالم العلوم*

أحد أطوار منحنى الـsine هو موقع الموجة ذات الصلة . وينتج عن الإزاحة الأفقية للدالة الجيبية *إزاحة الطور* تذكّر من الدرس 5-1 أن التمثيل البياني لـــ $y = f(x + c)$ هو التمثيل البياني لـــ $y = f(x)$ مُنزاحاً أو محوّلاً بمقدار $|c|$ من الوحدات يسارًا إذا كان $c > 0$ و بمقدار $|c|$ الوحدات يمينًا إذا كان $c < 0$.



مثال إضافي

4. **الموسيقى** يُمكن لبوق توبا أن يصدر نغمة بتردد 50 دورة في الثانية (50 هيرتز) بسعة مقدارها 0.75. اكتب معادلة دالة جيب التمام التي يمكن استخدامها لتمثيل السلوك الأولي للموجة الصوتية المرتبطة بهذه النغمة.

الإجابة النموذجية:

$y = 0.75 \cos 100\pi t$

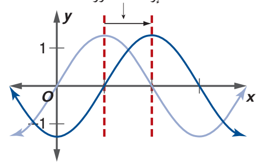
UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indb 178 12/15/2016 11:40:36 PM

المفهوم الأساسي إزاحة طور دوال الــ sine , cosine

الشرح **إزاحة الطور** دالة الــsin هو الاختلاف بين الوضع الأفقي للدالة وذاك الخاص بأي دالة sin مشابهة.

الرموز عندما يكون $y = a \sin (bx + c) + d$ و$y = a \cos (bx + c) + d$، حيث $b \neq 0$، فإن إزاحة الطور $= -\frac{c}{|b|}$.

النموذج



سوف تقوم بالتحقق من صيغة إزاحة الطور في التمرين 44.

لتمثيل إزاحة طور الدالة الجيبية (sinusoid) بيانيًا بالصيغة $y = a \cos (bx + c) + d$ أو $y = a \sin (bx + c) + d$ أولا قم بتحديد نقاط نهاية الفترة الزمنية الذي يتوافق مع دورة واحدة للتمثيل البياني من خلال إضافة $-\frac{c}{b}$ إلى كل نقطة النهاية على الفترة الزمنية $[0, 2\pi]$ من دالة أم.

نصيحة دراسية

صيغة بديلة الصيغ العامة لدوال sine يمكن التعبير عنها كالآتي $y = a \sin b(x - h) + k$ و $y = a \cos b(x - h) + k$. في هذه الصيغ، كل دالة sine لها إزاحة طور لــ h وزاحة رأسية لــ k بالمقارنة مع التمثيلات البيانية $y = a \sin bx$ و $y = a \cos bx$.

مثال 5 تمثيل الإزاحات الأفقية للدوال الجيبية (sinusoid) بيانيًا.

حدد السعة، والدورة والتكرار وإزاحة الطور لــ $y = \sin \left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$. ثم مثّل دورتين للدالة بيانيًا

في هذه الدالة، $c = -\frac{\pi}{2}$ و $b = 3$، و $a = 1$.

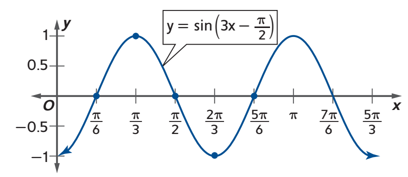
السعة: $|a| = |1| = 1$ الدورة $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|3|}$ أو $\frac{2\pi}{3}$

التكرار: $\frac{|b|}{2\pi} = \frac{|3|}{2\pi}$ أو $\frac{3}{2\pi}$ إزاحة الطور $-\frac{c}{|b|} = -\frac{-\frac{\pi}{2}}{|3|}$ أو $\frac{\pi}{6}$

لتمثيل $y = \sin \left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ بيانيًا. ضع في الاعتبار التمثيل البياني $y = \sin 3x$. فترة هذه الدالة هي $\frac{2\pi}{3}$. رتّب جدولاً للنقاط الرئيسية لــ $y = \sin 3x$ على الفترة $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$. لحساب إزاحة طور بقيمة $\frac{\pi}{6}$، أضف $\frac{\pi}{6}$ إلى قيم x لكل من النقاط الرئيسية للتمثيل البياني لــ $y = \sin 3x$.

الدالة	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة العظمى	التقاطع مع المحور الأفقي x	القيمة الصغرى	التقاطع مع المحور الأفقي x
$y = \sin 3x$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$
$y = \sin \left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3}, -1\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$

ارسم التمثيل البياني $y = \sin \left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ من خلال هذه النقاط لمتابعة النمط وإكمال الدورتين.



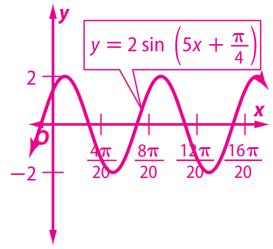
تمرين موجه

حدد السعة، والدورة والتكرار وإزاحة الطور لكل دالة. ثم مثّل بيانيًا دورتين للدالة. **6A–B. انظر الهامش.**

5A. $y = \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ **5B.** $y = 3 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

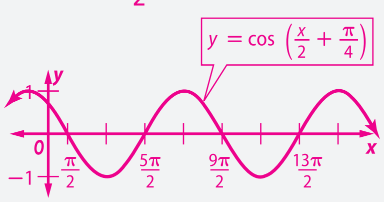
مثال إضافي

5 حدد السعة، والدورة والتكرار، وإزاحة الطور لــ $y = 2 \sin \left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$. ثم مثّل بيانيًا فترتين للدالة. السعة $= 2$؛ الدورة $= \frac{2\pi}{5}$؛ التكرار $= \frac{5}{2\pi}$؛ إزاحة الطور $= -\frac{\pi}{20}$

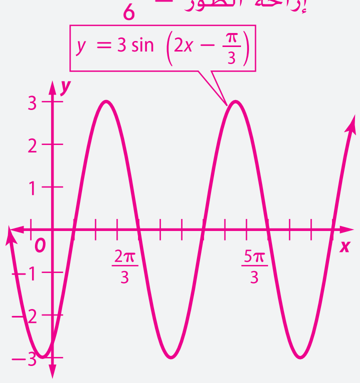


إجابات إضافية (تمرين موجه)

5A. السعة $= 1$؛ الدورة $= 4\pi$؛ التكرار $= \frac{1}{4\pi}$؛ إزاحة الطور $= -\frac{\pi}{2}$



5B. السعة $= 3$؛ الدورة $= \pi$؛ التكرار $= \frac{1}{\pi}$؛ إزاحة الطور $= \frac{\pi}{6}$



التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني أحضر نموذجًا لسلك لدورة واحدة من منحنى Sine الزاوية. ارسم على السبورة مستوى إحداثي يبدأ فيه المحور x من -2π إلى 2π. اطلب من الطلاب استخدام نموذج السلك في توضيح مدى تأثير الانعكاسات وإزاحات الطور على تغيير اتجاه منحنى Sine الزاوية.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 179 12/15/2016 11:40:37 PM

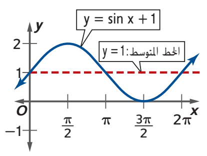
نصيحة دراسية

تدوين $\sin(x + d) \neq \sin x + d$

التعبير الأول يوضح إزاحة طور، و التعبير الثاني يعبر عن إزاحة رأسية .

الطريقة الأخيرة لتحويل التمثيل البياني للدالة الجيبية (sinusoid) من خلال الإزاحة الرأسية أو **التحول الرأسي**. نتعلم من الدرس 1-5 أن التمثيل البياني $y = f(x) + d$ هو التمثيل البياني لـــ $y = f(x)$ منزاحاً أو محولاً بمقدار $|d|$ وحدات أعلى إذا كان $d > 0$ و بمقدار $|d|$ وحدات أدنى إذا كان $d < 0$. التحول الرأسي هو متوسط الحد الأقصى والأدنى من الدالة .

الدالتان الرئيستان $y = \cos x$ و $y = \sin x$ تقعان حول المحور x. بعد الإزاحة الرأسية، يصبح محور أفقي جديد بـــ **خط الأوسط** الخط المرجعي أو نقطة التوازن التي يتمحور حولها التمثيل البياني. على سبيل المثال، الخط الأوسط لـــ $y = \sin x + 1$ هو $y = 1$، كما هو موضح.



بشكل عام، يكون الخط الأوسط للتمثيلات البيانية $y = a\cos(bx + c) + d$ and $y = a\sin(bx + c) + d$ هو $y = d$.

مثال 6 تمثيل الإزاحات الرأسية للدوال الجيبية (sinusoid) بيانيًا

حدد السعة، والدورة والتكرار وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية لـــ $y = \sin(x + 2\pi) - 1$. ثم مثِّل بيانيًا دورتين للدالة

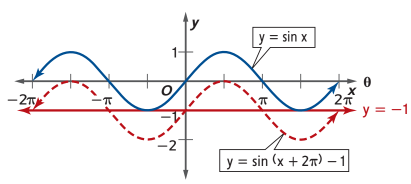
في هذه الدالة $a = 1, b = 1, c = 2\pi, d = -1$.

السعة: $|a| = |1| = 1$ الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$ التكرار: $\frac{|b|}{2\pi} = \frac{|1|}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$

إزاحة الطور: $-\frac{c}{|b|} = -\frac{2\pi}{|1|} = -2\pi$ الإزاحة الرأسية: -1 أو d الخط المتوسط: $y = -1$ أو $y = d$

أولاً،مثِّل بيانيًا الخط المتوسط $y = -1$. ثم مثِّل بيانيًا $y = \sin x$ المحولة 2π وحدات إلى اليسار ووحدة إلى الأسفل 1 .

لاحظ أن هذا التحول مساوٍ لترجمة وحدة 1 لأسفل لأن تحول المرحلة كان نقطة واحدة إلى اليسار.



تمرين موجه 6A–B. انظر الهامش.

حدد السعة، والدورة والتكرار وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثِّل بيانيًا دورتين للدالة.

6A. $y = 2\cos x + 1$ **6B.** $y = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{2}\right) - 3$

خصائص تحولات الدوال الأم $y = \cos x$ و $y = \sin x$ ملخصة أدناه.

نصيحة تقنية

خاصية Zoom Trig عند تمثيل الدالة المثلثية بيانيًا باستخدام التمثيلات البيانية الخاصة بك، كن متأكدًا من أنك في وضع الراديان واستخدم خيار ZTrig أسفل خاصية التكبير لتغيير نافذة العرض الخاصة بك من النافذة القياسية إلى واحدة أكثر تناسبًا : $[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\pi/2$ في $[-4, 4]$ scl: 1

ملخص المفهوم التمثيلات البيانية للدوال الجيبية

وللتمثيلات البيانية الخاصة بـــ: $y = a\cos(bx + c) + d$ و $y = a\sin(bx + c) + d$، حيث: $a \neq 0$ and $b \neq 0$. السمات الآتية:

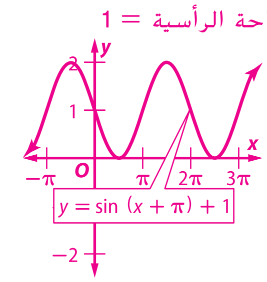
السعة: $|a|$ الدورة: $\frac{2\pi}{|b|}$ التكرار: $\frac{1}{\text{الفترة}}$ أو $\frac{|b|}{2\pi}$

إزاحة الطور: $-\frac{c}{|b|}$ الإزاحة الرأسية: d الخط المتوسط: $y = d$

مثال إضافي

6 أوجد السعة، والدورة، والتكرار، وإزاحة الطور، والإزاحة الرأسية لـــ $y = \sin(x + \pi) + 1$. ثم مثِّل بيانيًا فترتين للدالة.

السعة $= 1$؛ الدورة $= 2\pi$؛ التكرار$= \frac{1}{2\pi}$؛ إزاحة الطور $= -\pi$؛ الإزاحة الرأسية $= 1$



التدريس باستخدام التكنولوجيا

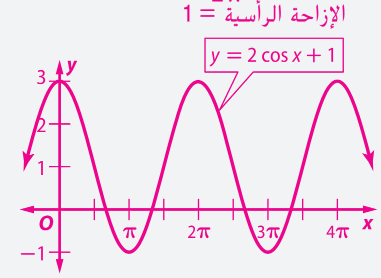
البحث على الإنترنت اطلب من الطلاب استخدام الإنترنت في البحث عن معدل درجات الحرارة الشهرية لمدينتهم. ثم أخبرهم بأن المعادلة $y = 43 + 31\sin\left[\frac{\pi}{6}(t - 4)\right]$ تمثل معدل درجة الحرارة الشهرية لمدينة واحدة. واطلب منهم استخدام النمط الوارد في المعادلة لكتابة معادلة تمثل معدل درجات الحرارة في مدينتهم.

إرشاد للمعلمين الجدد

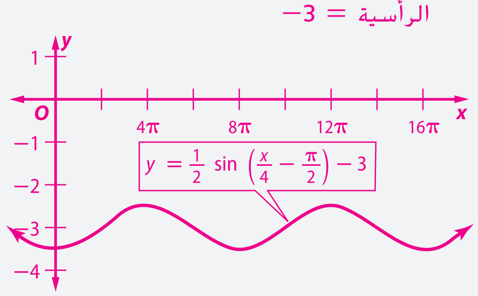
ترتيب التمثيل البياني يكون الترتيب التالي مفيدًا في حالة تمثيل دالة جيب الزاوية ودالة جيب التمام بيانيًا: فتتم الإزاحة الرأسية أولاً، ثم السعة، والدورة، وإزاحة الطور.

إجابات إضافية (تمرين موجه)

6A. السعة $= 2$؛ الدورة$= 2\pi$؛ التكرار $= \frac{1}{2\pi}$؛ إزاحة الطور$= 0$؛ الإزاحة الرأسية $= 1$



6B. السعة $= \frac{1}{2}$؛ الدورة$= 8\pi$؛ التكرار $= \frac{1}{8\pi}$؛ إزاحة الطور $= 2\pi$؛ الإزاحة الرأسية $= -3$



المتابعة

لقد استكشف الطلاب التمثيل البياني لدالة جيب الزاوية ودالة جيب التمام.

اطرح السؤال التالي:

- ما مدى التشابه بين التحويلات في دالة جيب الزاوية ودالة جيب التمام بالنسبة للتحويلات في الدوال الأخرى التي درستها؟ الإجابة النموذجية: إن عملية الإضافة أو الطرح لأي دالة تزيح التمثيل البياني؛ أما ضرب الدالة، فيمُدد التمثيل البياني؛ في حين أن ضرب الدالة في عدد سالب، يعكس التمثيل البياني.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 180 12/15/2016 11:40:40 PM

2 تطبيقات على الدوال الجيبية

المثال 7 يوضّح كيفية تمثيل بيانات باستخدام دالة جيبية.

مثال إضافي

7 الأرصاد الجوية تتسم ظاهرة المد والجزر بخليج فندي، في نيو برونزويك بكندا، بارتفاعات وانخفاضات هائلة يوميًا. يوضِّح الجدول ارتفاعات المد لمدة شهر قمري واحد. اكتب دالة تمثل ارتفاع المد والجزر في خليج فندي.

اليوم	ذروة المد (ft)
1	25.9
2	25.8
3	25.6
4	25.3
5	25.1
6	24.7
7	24.3
8	23.9
9	23.5
10	23.3
11	23.6
12	24.3
13	25.2
14	26.1
15	27.0
16	27.7
17	28.0
18	27.9
19	27.5
20	26.8
21	26.0
22	25.1
23	24.6
24	24.3
25	24.2
26	24.3
27	24.8
28	25.0
29	25.3
30	25.5

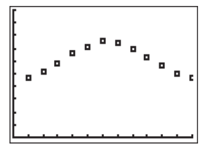
الإجابة النموذجية: $y = 2.35\cos\left(\frac{\pi}{7}x - \frac{17\pi}{7}\right) + 25.65$

2 تطبيقات الدوال الجيبية

تطبيقات الدوال الجيبية العديد من مواقف الحياة اليومية التي لها سلوك دوري بمرور الزمن يمكن تمثيلها من خلال التحولات $y = \cos x$ أو $y = \sin x$.

مثال 7 من الحياة اليومية تمثيل البيانات باستخدام الدوال الجيبية(sinusoid)

الأرصاد الجوية استخدم المعلومات الموجودة على اليمين لكتابة دالة جيبية تمثل عدد ساعات النهار في مدينة نيويورك كدالة زمن x بحيث $x = 1$ تمثل 15 يناير، و $x = 2$ تمثل 15 فبراير وهكذا. ثم استخدم تمثيلك لتقدير عدد ساعات النهار في 30 سبتمبر في نيويورك.



[0, 12] scl: 1 في [0, 20] scl: 2

الخطوة 1 ارسم مخطط انتشار من البيانات واختر نموذجًا.

التمثيل البياني يظهر على شكل موجي لذا يمكنك أن تستخدم دالة جيبية من الشكل $y = a\sin(bx + c) + d$ أو $y = a\cos(bx + c) + d$. وسوف نختار استخدام $y = a\cos(bx + c) + d$ لتمثيل البيانات.

الخطوة 2 أوجد القيمة العظمى M والقيم الصغرى لـ m للبيانات، واستخدم تلك القيم لإيجاد a, b, c, d

القيمتان العظمى والصغرى لساعات النهار هما 15.7 و 9.27 . والسعة a هي نصف المسافة بين القيم العظمى.

$$a = \frac{1}{2}(M - m) = \frac{1}{2}(15.07 - 9.27) = 2.9$$

الإزاحة الرأسية d هي متوسط القيم العظمى والصغرى من البيانات.

$$d = \frac{1}{2}(M + m) = \frac{1}{2}(15.07 + 9.27) = 12.17$$

يكمل منحنى الـsine نصف الدورة التي يستغرقها للانتقال من قيمته العظمى إلى الصغرى لقيمتها. ويتم تكرار الفترة الواحدة مرتين في هذه الحالة.

الفترة $= 2(x_{max} - x_{min}) = 2(12 - 6)$ أو 12   شهر 21 أو 51 ديسمبر $= x_{max}$، شهر 6 أو 15 يناير $= x_{min}$

لأن الفترة تساوي $\frac{2\pi}{|b|}$ ، يمكن أن تكتب $|b| = \frac{2\pi}{\text{الدورة}}$ لذلك فإن، $|b| = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

القيمة العظمى للبيانات تحدث عندما يكون $x = 6$. حيث إن $y = \cos x$ تبلغ القيمة العظمى لها أول مرة عندما يكون $x = 0$، يجب أن نطبق إزاحة طور بقيمة $6 - 0$ أو 6 وحدات. استخدم هذه القيمة لتجد c.

صيغة إزاحة الطور	إزاحة الطور $= -\frac{c}{\lvert b\rvert}$
إزاحة الطور = 6 و $\lvert b\rvert = \frac{\pi}{6}$	$6 = -\frac{c}{\frac{\pi}{6}}$
حل لـ c.	$c = -\pi$

الخطوة 3 اكتب الدالة باستخدام قيم a, b, c, d. استخدم $b = \frac{\pi}{6}$

$y = 2.9\cos\left(\frac{\pi}{6}x - \pi\right) + 12.17$ هو نموذج واحد لساعات النهار.

مثِّل بيانيًا الدالة ومخططًا مبعثرًا في نافذة المعاينة نفسها، كما هو الحال في الشكل 3.4.1. لإيجاد عدد ساعات النهار في 30 سبتمبر، قيّم النموذج إذا علمت أن $x = 9.5$.

$y = 2.9\cos\left(\frac{\pi}{6}(9.5) - \pi\right) + 12.17$ أو 11.42 ساعة نهار تقريبًا

تمرين موجه **7A. الإجابة النموذجية** $y = 12.5\cos\frac{\pi}{7}x - \frac{8\pi}{7} + 53.5$

الأرصاد الجوية متوسط درجات الحرارة الشهرية في سياتل، واشنطن، موضحة أدناه.

الشهر	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
درجة الحرارة (°)	41	44	47	50	56	61	65	66	61	54	46	42

7A. اكتب دالة تمثل درجات الحرارة الشهرية، باستخدام $x = 1$ لتمثل شهر يناير.

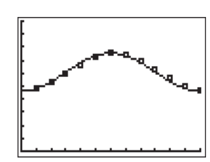
7B. وفقًا لنموذجك، ما متوسط درجة الحرارة الشهرية في سياتل في شهر فبراير؟ 42°

الربط بالحياةاليومية

الجدول يوضح عدد ساعات النهار في الخامس عشر من كل شهر في مدينة نيويورك .

الشهر	ساعات النهار
يناير	9.58
فبراير	10.67
مارس	11.9
أبريل	13.3
مايو	14.43
يونيو	15.07
يوليو	14.8
أغسطس	13.8
سبتمبر	12.48
أكتوبر	11.15
نوفمبر	9.9
ديسمبر	9.27

المصدر: *مرصد البحرية الأمريكية*



[0, 12] scl: 1 في [0, 20] scl: 2

الشكل 3.4.1

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية اطلب من الطلاب توضيح حركات تمارين رياضية متنوعة، ثم تحديد ما إذا كان هناك حركات دورية أم لا. ادرس المسافة التي تم قطعها من نقطة البداية في صورة دالة زمن. اطلب من الطلاب توضيح الحركات الرياضية التي يُمكن تمثيلها باستخدام الدوال الجيبية.

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-22 للتحقق من عملية الفهم.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص واجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع في التمرين 1-8، يواجه الطلاب صعوبة في رسم التمثيلات البيانية الأساسية لــ $y = \sin x$ و $y = \cos x$. فذكرهم بأن $y = \sin x$ تمر عبر نقطة الأصل و$y = \cos x$ تمر عبر نقطة الأصل (0, 1). في التمارين 14-19، ذكّر الأطفال بأن إزاحات الأطوار تؤثر فقط على الحركة الأفقية.

إرشاد للمعلمين الجدد

حاسبة التمثيل البياني في التمرين 23. لحل $-\sin x = \cos x$ في الفترة $-\pi < \theta < \pi$ على الحاسبة. اطلب من الطلاب تمثيل طرفي المعادلة بيانيًا وكأنهما دالة في قائمة =Y. حدد قيم WINDOW (النافذة) المناسبة، واضغط على GRAPH (مثِّل بيانيًا). استخدم وظيفة INTERSECT (تقاطع) في قائمة CALC (احسب) لإيجاد قيم x التي تجعل طرفي المعادلة صحيحين.

إجابات إضافية

21a. السعة $= 5.465$؛ الدورة $= 13$؛ إزاحة الطور $= 4.417$؛ الإزاحة الرأسية $= 7.485$

21b. الإجابة النموذجية: $y = 5.465 \cos\left(\frac{\pi}{6.5}x - \frac{\pi}{1.47}\right) + 7.485$

21c. حوالي 7.28 ft

22a. السعة $= 22.5$؛ الفترة $= 12$؛ إزاحة الطور $= 7$؛ الإزاحة الرأسية $= 51.5$

22b. الإجابة النموذجية:

$$y = 22.5 \cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{7\pi}{6}\right) + 51.5$$

23. $x = -\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$

24. $x = \frac{\pi}{2}$

25. $x = -\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$

26. $-\pi < x < -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} < x < \pi$

تمارين

صف كيف أن التمثيلات البيانية الخاصة بــ $f(x)$ و $g(x)$ مرتبطة. ثم أوجد سعة $g(x)$ و ارسم دورتين لكلتا الدالتين على نفس محاور الإحداثيات. (المثالان 1 و 2)

1. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{2} \sin x$
2. $f(x) = \cos x$, $g(x) = -\frac{1}{3} \cos x$
3. $f(x) = \cos x$, $g(x) = 6 \cos x$
4. $f(x) = \sin x$, $g(x) = -8 \sin x$

1-4. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

صف كيف أن التمثيلات البيانية لــ $f(x)$ و $g(x)$ مرتبطة. ثم أوجد دورة $g(x)$، و ارسم دورة واحدة على الأقل لكلا الدالتين في نفس محور الإحداثيات. (مثال 3) **5-8. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

5. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin 4x$
6. $f(x) = \cos x$, $g(x) = \cos 2x$
7. $f(x) = \cos x$, $g(x) = \cos \frac{1}{5} x$
8. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin \frac{1}{4} x$

9 **الأصوات** يشمل نوع الكونتر التو الرنان أعمق أصوات الغناء النسائية. حيث يمكن لبعض النساء من صاحبات الكونتر التو الغناء بطبقة متدنية مثل E وهي أقل من الطبقة C الوسطى(E3)، إذ يبلغ تردّده تردده 165 هرتز. اكتب معادلة لدالة الــsine التي يمكن استخدامها لتمثيل السلوك الأولي من الموجة الصوتية المرتبطة بالوسط C ولها سعة 0.2. (مثال 4) **الإجابة النموذجية $y = 0.15 \sin 330\pi t$**

اكتب معادلة لدالة الــ sin التي يمكن استخدامها لتمثيل السلوك الأولي من الموجة الصوتية المرتبطة بالوسط C ولها سعة 0.2 . (مثال 4)

10. $f = 440, a = 0.3$
11. $f = 932, a = 0.25$
12. $f = 1245, a = 0.12$
13. $f = 623, a = 0.2$

10-13. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

حدد السعة، الدورة، التكرار، إزاحة الطور، الإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثل بيانيًا دورتين للدالة (المثالان 5 و 6) **14-19. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

14. $y = 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
15. $y = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$
16. $y = 0.25 \cos x + 3$
17. $y = \sin 3x - 2$
18. $y = \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - 1$
19. $y = \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) + 4$

20. **الإنجازات** متوسط عدد الحجوزات R لدى منتجع في بداية كل شهر موضحة (المثال 7)

الشهر	R	الشهر	R
يناير	200	مايو	121
فبراير	173	يونيو	175
مارس	113	يوليو	198
أبريل	87	أغسطس	168

a. اكتب معادلة دالة جيبية توضح متوسط عدد الحجوزات باستخدام $x = 1$ لتمثيل شهر يناير. **20a. الإجابة النموذجية. $y = 56.5 \cos\left(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{3}\right) + 143.5$**

b. وفقًا لنموذجك، كم يبلغ تقريبًا عدد الحجوزات التي يمكن أن يحققها المنتجع في نوفمبر؟ **حوالي 115 حجزًا**

21. **المد والجزر** يوفّر الجدول المبين أدناه بيانات المد العالي والمنخفض في خليج معين خلال يوم واحد في شهر يونيو. (المثال 7) **انظر الحاشية.**

المد والجزر	الارتفاع (ft)	الزمن
ارتفاع المد والجزر الأول	12.95	4:25 صباحًا
انخفاض المد والجزر الأول	2.02	10:55 صباحًا

a. حدد السعة، الدورة، إزاحة الطور، الإزاحة الرأسية لدالة جيبية توضح ذروة المد والجزر. افرض أن x توضح عدد الساعات التي يحدث فيها المد العالي أو المنخفض بعد منتصف الليل.

b. اكتب دالة جيبية لتكون نموذجًا للبيانات.

c. وفقًا لنموذجك. ماذا كان أعلى معدل للمد في 8:45 مساء في تلك الليلة؟

22. **الأرصاد الجوية** متوسط درجات الحرارة الشهرية في سياتل. واشنطن. موضحة أدناه. (المثال 7)

الشهر	درجة الحرارة (°F)	الشهر	درجة الحرارة (°F)
يناير	29	يوليو	74
فبراير	30	أغسطس	72
مارس	39	سبتمبر	65
أبريل	48	أكتوبر	55
مايو	58	نوفمبر	45
يونيو	68	ديسمبر	34

a. حدد السعة والدورة وإزاحة الطور، والإزاحة الرأسية لدالة جيبية توضح درجات الحرارة الشهرية باستخدام $x = 1$ لتمثيل شهر يناير. **a-b. انظر الهامش.**

b. اكتب معادلة دالة جيبية تمثّل درجات الحرارة الشهرية.

c. وفقًا لنموذجك، ما متوسط درجة الحرارة الشهرية في سياتل في شهر فبراير؟ **حوالي 71°F**

B **حاسبة التمثيل البياني** أوجد قيم x في الفترة $-\pi < x < \pi$ التي تجعل كل معادلة أو تفاوت صحيحًا. (*تلميح:* استخدم دالة التقاطع.) **23-28. انظر الهامش.**

23. $-\sin x = \cos x$
24. $\sin x - \cos x = 1$
25. $\sin x + \cos x = 0$
26. $\cos x \leq \sin x$
27. $\sin x \cos x > 1$
28. $\sin x \cos x \leq 0$

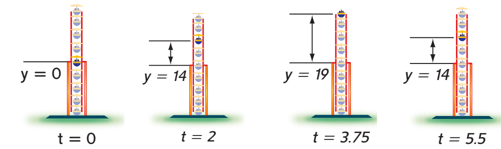
29. **الأحصنة الخشبية الدوارة** يتحرك حصان خشبي على دائرة صعودًا وهبوطًا كلما دارت. وعندما تنتهي فترة ركوب الدوارة، عادة ما يتوقف الحصان في وضع رأسي يختلف تمامًا على النقطة التي بدأ عندها الوضع y للحصان بعد t ثانية يمكن تمثيله بــ $y = 1.5 \sin(2t + c)$، حيث لا بد من تغيير إزاحة الطور c باستمرار للتعويض عن أوضاع بدء الحركة المختلفة. إذا بلغ الحصان في جولة واحدة أقصى ارتفاع بعد $\frac{7\pi}{12}$ ثانية، أوجد المعادلة التي تمثل مكان الحصان. **29. $y = 1.5 \sin\left(2t - \frac{2\pi}{3}\right)$**

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-22, 41, 42, 44-66	1-21 فردي، 63-66	2-22 زوجي، 41، 42، 44-62
OL ضمن المستوى	1-29 فردي، 30، 31-41 فردي، 42، 44-66	1-22, 63-66	23-39, 41, 42, 44-62
BL أعلى من المستوى	23-66		

30. **حدائق الملاهي** المكان y لعربة الركاب بالنسبة لمركز العجلة الدوارة مقدرًا بالقدم على مدار t ثانية موضح أمامك.

مشهد جانبي لعجلة دوارة عبر الفترة الزمنية [0, 5.5]



a. أوجد الزمن t الذي تستغرقه العربة للعودة إلى $y = 0$ خلال دورتها المبدئية. **7.5 ثوان**

b. أوجد الفترة للعجلة الدوارة. **15 ثانية**

انظر ملحق دورة الوحدة 3.

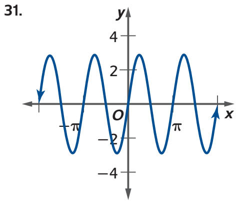
c. ارسم تمثيلًا بيانيًا يمثل مكان عربة الركاب خلال فترة واحدة.

d. اكتب دالة جيبية تمثل مكان عربة الركاب بحيث تكون دالة زمنية t.

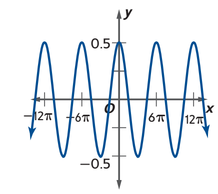
الإجابة النموذجية: $y = 19 \sin \frac{2\pi}{15}t$

اكتب معادلة تماثل كل تمثيل بياني. **31–34. انظر الهامش.**

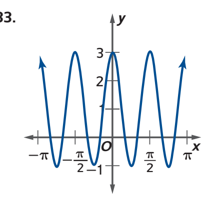
31.



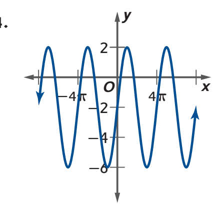
32.



33.



34.



38. الإجابة النموذجية $y = \frac{1}{2} \sin \frac{2}{3}x$

اكتب دالة جيبية باستخدام الفترة المعطاة والسعة التي تمر خلال النقطة المعطاة. **الإجابة النموذجية** $y = 5 \cos 2x$

35. الدورة: π؛ السعة: 5؛ النقطة: $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{2}\right)$

36. الدورة: 4π؛ السعة: 2؛ النقطة: $(\pi, 2)$ **الإجابة النموذجية** $y = 2 \sin \frac{x}{2}$

37. الدورة: $\left(\frac{\pi}{2}\right.$، السعة$\left.\right)$ 1.5؛ النقطة: $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\right)$

38. الدورة: 3π؛ السعة: 0.5؛ النقطة: $\left(\pi, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ **الإجابة النموذجية** $y = \frac{3}{2} \cos 4x$

39. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف التغير في تمثيل دالة جيبية بيانيًا للصيغة $y = \cos x$ أو $y = \sin x$ عندما تضاعفها دالة كثيرة الحدود.

a–e. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

a. **بيانيًا** استخدم الحاسبة البيانية لعمل مخطط للتمثيل البياني لـ $y = 2x \cos x$ و $y = 2x, y = -2x$، على المستوى الإحداثي نفسه، على الفترة $[-20, 20]$.

b. **كلاميًا** صف سلوك التمثيل البياني لـ $y = 2x \cos x$ للرسوم البيانية لـ $y = -2x$ و $y = 2x$.

c. **بيانيًا** استخدم الحاسبة البيانية لعمل مخطط للتمثيلات البيانية لـ $y = x^2 \sin x$ و $y = x^2, y = -x^2$، على المستوى الإحداثي نفسه، على الفترة $[-20, 20]$.

d. **كلاميًا** صِف سلوك التمثيل البياني لـ $y = x^2 \sin x$ للرسوم البيانية $y = -x^2$ و $y = x^2$.

e. **طريقة التحليل** خمّن سلوك التمثيل البياني للدوال الجيبية ذات الصيغة $y = \cos x$ أو $y = \sin x$ عندما تضاعفها دالة كثيرة الحدود لها الصيغة $y = f(x)$.

استخدام مهارات التفكير العليا

40. **التحدي** بدون التمثيل البياني، أوجد الإحداثيات الدقيقة للنقطة القصوى الأولى على يمين المحور الرأسي y لـ $y = 4 \sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{9}\right)$. $\left(\frac{11\pi}{12}, 4\right)$

التبرير **حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة*. اشرح استنتاجك.**

41. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

41. أي دالة جيبية من الصيغة $y = a \sin(bx + c) + d$ يمكن كتابتها أيضًا كدالة cos من الصيغة $y = a \cos(bx + c) + d$.

42. دورة $f(x) = \cos 8x$ تساوي أربع أضعاف دورة $g(x) = \cos 2x$.

خطأ؛ الإجابة النموذجية: فترة $f(x)$ هي $\frac{1}{4}$ فترة $g(x)$.

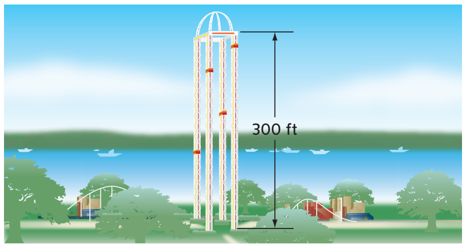
43. **التحدي** كم عدد أصفار $y = \cos 1500x$ على الفترة $0 \geq 2\pi \leq x$؟

3000

44. **الإثبات** أثبت قاعدة تحويل المرحلة.

انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

45. **الكتابة في الرياضيات** جولة برج الطاقة في ساندوسكي، أوهايو، مبينة أمامك. إلى جوار كل برج خيط من الأضواء يبعث نبضات ضوء متواصلة لأعلى ولأسفل كل برج بمعدل ثابت. اشرح لماذا لا يمكن لمسافة d التي تبعث الضوء بعيدًا عن الأرض على مدار زمن t أن تمثلها دالة جيبية. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**



إجابات إضافية

27. لا يوجد

28. $-\frac{\pi}{2} < x < 0, \frac{\pi}{2} < x < \pi$

31. الإجابة النموذجية: $y = 3 \sin 2x$

32. الإجابة النموذجية: $y = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{3}$

33. الإجابة النموذجية: $y = 2 \cos 4x + 1$

34. الإجابة النموذجية: $y = 4 \sin \frac{x}{2} - 2$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 183 12/15/2016 11:40:48 PM

4 التقويم

الكرة البلورية اطلب من الطلاب كتابة كيفية الربط بين درس اليوم والدرس السابق حول التمثيل البياني للدوال المثلثية غير دالة الـ Sine وداله الـ Cosine للزاوية.

إجابات إضافية

46. $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta = -1$, $\csc\theta = \sqrt{2}$, $\sec\theta = -\sqrt{2}$, $\cot\theta = -1$

47. $\sin\theta = -\frac{\sqrt{17}}{17}$, $\cos\theta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\tan\theta = -\frac{1}{4}$, $\csc\theta = -\sqrt{17}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{17}}{4}$, $\cot\theta = -4$

48. $\sin\theta = -\frac{9\sqrt{106}}{106}$, $\cos\theta = -\frac{5\sqrt{106}}{106}$, $\tan\theta = \frac{9}{5}$, $\csc\theta = -\frac{\sqrt{106}}{9}$, $\sec\theta = -\frac{\sqrt{106}}{5}$, $\cot\theta = \frac{5}{9}$

49. $\sin\theta = \frac{5\sqrt{41}}{41}$, $\cos\theta = \frac{4\sqrt{41}}{41}$, $\tan\theta = \frac{5}{4}$, $\csc\theta = \frac{\sqrt{41}}{5}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{41}}{4}$, $\cot\theta = \frac{4}{5}$

55. 3 أصفار حقيقية ونقطتا تحول؛ -4، 0، و 2

مراجعة شاملة

النقطة المعطاة تقع على ضلع الإنتهاء للزاوية θ في وضع قياسي. أوجد قيم الدوال المثلثية الست لـ θ. 46–49. انظر الهامش.

46. $(-4, 4)$ **47.** $(8, -2)$ **48.** $(-5, -9)$ **49.** $(4, 5)$

حول كل قياس بالدرجات الى الراديان كمضاعف لـ π وبالعكس.

50. $25°$ $\frac{5\pi}{36}$ **51.** $-420°$ $-\frac{7\pi}{3}$ **52.** $-\frac{\pi}{4}$ $-45°$ **53.** $\frac{8\pi}{3}$ $480°$

54. **العلوم** الكربون المشع عبارة عن طريقة لتقدير عمر المواد العضوية عن طريق حساب كمية الكربون 14 الموجود في المادة. عمر المادة يمكن حسابه باستخدام $A = t \cdot \frac{\ln R}{-0.693}$، حيث A هو عمر المادة بالأعوام، t هو العمر النصفي للكربون 14 أو 5700 عامًا، و R هو نسبة كمية الكربون 14 في العينة إلى كميتها الكربون 14 في الأنسجة الحية.

a. تحتوي عينة من المواد العضوية على 0.000076 جرام من الكربون 14. تحتوي عينة حية من المواد نفسها على 0.00038 جرام. كم عمر هذه العينة تقريبًا؟ حوالي 13,238 سنة

b. عينة بعينها عمرها 20,000 عامًا على الأقل. ما النسبة المئوية القصوى المتبقية من الكربون 14 في العينة؟ حوالي 8.8%

عيّن العدد الممكن للأصفار الحقيقية ونقاط التحول لكل دالة. ثم حدد جميع الأصفار الحقيقية عن طريق التحليل إلى العوامل.

55. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$ انظر الهامش.

56. $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ 4 أصفار حقيقية و3 نقاط دوران؛ -3 و-1 و1 و3

57. $f(x) = x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 8x^2$ 5 أصفار حقيقية و4 نقاط دوران؛ -2 و0 و2

58. $f(x) = x^4 - 1$ 4 أصفار حقيقية و3 نقاط دوران؛ -1 و1

حدد ما إذا كانت f لها دالة عكسية. إذا كانت كذلك، فأوجد الدالة العكسية وحدد أي قيود في مجالها.

59. $f(x) = -x - 2$ نعم؛ $f^{-1}(x) = -x - 2$

60. $f(x) = \frac{1}{x+4}$ نعم؛ $f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 4$.

61. $f(x) = (x - 3)^2 - 7$ لا

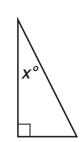
62. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ لا

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

63. **SAT/ACT** إذا كانت $x + y = 90°$ وx وy كلتاهما زاويتين غير سالبتين، وهو ما يساوي $\frac{\cos x}{\sin y}$؟ C

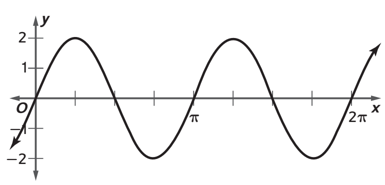
A 0
B $\frac{1}{2}$
C 1
D 1.5
E لا يمكن التحديد بالمعطيات المتوفرة.

64. **مراجعة** إذا كانت $\tan x = \frac{10}{24}$ في الشكل التالي ، فما $\sin x$ و$\cos x$؟ G



F $\sin x = \frac{26}{10}$ و $\cos x = \frac{24}{26}$
G $\sin x = \frac{10}{26}$ و $\cos x = \frac{24}{26}$
H $\sin x = \frac{26}{10}$ و $\cos x = \frac{26}{24}$
J $\sin x = \frac{26}{10}$ و $\cos x = \frac{26}{24}$

65. حدد المعادلة التي يمثلها التمثيل البياني. C



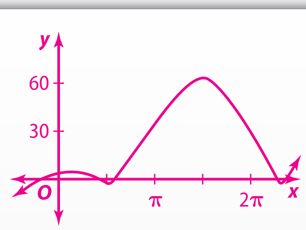
A $y = \frac{1}{2}\sin 4x$
B $y = \frac{1}{4}\sin 2x$
C $y = 2\sin 2x$
D $y = 4\sin\frac{1}{2}x$

66. **مراجعة** إذا كانت $\cos\theta = \frac{8}{17}$ وضلع الإنتهاء للزاوية يقع في الربع IV. ما القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$؟ H

F $-\frac{15}{8}$
G $-\frac{17}{15}$
H $-\frac{15}{17}$
J $-\frac{8}{15}$

التدريس المتمايز BL

التوسع ارسم بيانيًا. $y = 4\cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right) - (3\sin x - 3)2x$



التوسع 4-3 مختبر تقنية التمثيل البياني
مجموع منحنيات sine وفروقها

الهدف

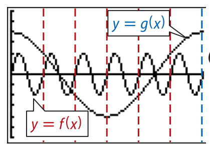
- تمثيل فترات مجموع وفروق منحنيات الـ **sin** بيانيًا، وفحصها.

كثيرًا ما يكون التمثيل البياني لمجموع وفروق اثنين من منحنيات الـ **sin** فترات مختلفة عن التمثيلات البيانية للدوال الأصلية.

النشاط 1 مجموع منحنيات لـ sine

حدد الفترة الفاصلة المشتركة التي يكمل فيها كل من $f(x) = 2 \sin 3x$ و $g(x) = 4 \cos \frac{x}{2}$ عددًا كليًا من الدورات. ومثّل بيانيًا $h(x) = f(x) + g(x)$، ثم حدد دورة الدالة.

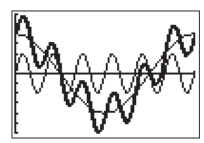
الخطوة 1 أدخل $f(x)$ لـ Y1 و$g(x)$ لـ Y2. ثم اضبط النافذة إلى أن يكمل كل تمثيل بياني دورة مكتملة أو أكثر في الفترة نفسها. وتكون $[0, 4\pi]$ إحدى الفترات الفاصلة التي يحدث فيها ذلك. في هذه الفترة، تُكمل $g(x)$ دورة كاملة، وتُكمل $f(x)$ ست دورات كاملة.



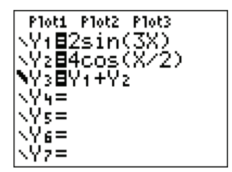
$[0, 4\pi]$ scl: π by $[-6, 6]$ scl: 1

الخطوة 2 لتمثيل $h(x)$ بيانيًا مثل Y3، أسفل القائمة VARS، اختر Y-VARS. الدالة، ثم Y1 لإدخال Y1. ثم اضغط + واختر Y-VARS، الدالة، وY2 لإدخال Y2.

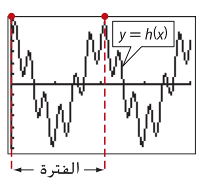
الخطوة 3 مثّل بيانيًا كلاً من $f(x)$ و$g(x)$ و $h(x)$ **على الشاشة** نفسها. ولتمييز التمثيل البياني لـ $h(x)$، مرِّر إلى يسار علامة يساوي بجانب Y، ثم اضغط على ENTER. ثم مثِّل الدوال بيانيًا باستخدام النافذة نفسها كما في الأعلى.



$[0, 4\pi]$ scl: π by $[-6, 6]$ scl: 1



الخطوة 4 عن طريق ضبط شكل المحور الأفقي x من $[0, 4\pi]$ إلى $[0, 8\pi]$ لمراقبة نمط، $h(x)$ الكامل؛ حيث يمكننا رؤية أن دورة مجموع المحورين الجيبين هي 4π.



$[0, 8\pi]$ scl: 2π by $[-6, 6]$ scl: 1

نصيحة تقنية

إخفاء التمثيلات البيانية مرر حتى علامة يساوي، ثم اضغط على enter لإخفاء التمثيل البياني.

تمارين

حدد فترة مشتركة يُكمل فيها كل من $f(x)$ و$g(x)$ عددًا مكتملاً من الدورات. ومثِّل بيانيًا $a(x) = f(x) + g(x)$ و $b(x) = f(x) - g(x)$، ثم حدد دورة الدالة. **6–1. انظر في ملحق إجابات الوحدة 3.**

1. $f(x) = 4 \sin 2x$
   $g(x) = -2 \cos 3x$
2. $f(x) = \sin 8x$
   $g(x) = \cos 6x$
3. $f(x) = 3 \sin (x - \pi)$
   $g(x) = -2 \cos 2x$
4. $f(x) = \frac{1}{2} \sin 4x$
   $g(x) = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
5. $f(x) = \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2}$
   $g(x) = -2 \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
6. $f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x$
   $g(x) = 3 \cos 2x$

7. **التخمين:** اشرح كيف يمكن استخدام دورات منحنيي الـ **sin , cos** لإيجاد دورة مجموع أو فرق هذه المنحنيات.

1 التركيز

الهدف التمثيل البياني لمجموع وفرق منحنيات الجيب.

نصيحة للتدريس

اشرح للطلاب أن إضافة وطرح الأشكال الموجية لها تطبيقات عديدة في الحياة اليومية. ففي الفيزياء، على سبيل المثال، تتداخل الموجات الميكانيكية، مثل موجات الصوت والموجات في الماء، عندما تحتل موجتان الحيز نفسه في وقت واحد. عند إضافة سعتين من الموجتين، يحدث تداخل بنَّاء. وعند طرح السعتين، يحدث تداخل هدَّام.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسّم الصف إلى مجموعات ثنائية مع الحرص على اختيار الطلاب أصحاب المهارات المختلفة. اطلب من المجموعات الثنائية التعاون في كل خطوة من خطوات النشاط.

تدريب اطلب من الطلبة إتمام التمرينات من 1 إلى 7.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 1 لتحديد ما إذا كان الطلاب يفهمون كيفية التمثيل البياني لمجموع وفرق اثنين من منحنيات الجيب.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب تلخيص ما تعلموه حول جمع وطرح اثنين من منحنيات الجيب. اطلب من الطلاب تقديم أمثلة تبين كيفية تأثر سعة منحنى الجيب الأصلي وفترته وتكراره.

توسيع المفهوم

اطلب من الطلاب تمثيل $y = \tan x$ و $y = \sin x$ بيانيًا على شبكة إحداثيات. واطلب منهم بعدئذٍ جمع وطرح الدالتين.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 185 12/15/2016 11:40:50 PM

الدروس من 3-1 إلى 3-4

التقويم التكويني

استخدام اختبار نصف الوحدة لتقويم تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

بالنسبة للمسائل المجاب عنها خطأً، اطلب من الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها في الأقواس.

إجابات إضافية

1. $\sin\theta = \frac{12}{13}$, $\cos\theta = \frac{5}{13}$, $\tan\theta = \frac{12}{5}$, $\csc\theta = \frac{13}{12}$, $\sec\theta = \frac{13}{5}$, $\cot\theta = \frac{5}{12}$

2. $\sin\theta = \frac{6\sqrt{85}}{85}$, $\cos\theta = \frac{7\sqrt{85}}{85}$, $\tan\theta = \frac{6}{7}$, $\csc\theta = \frac{\sqrt{85}}{6}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{85}}{7}$, $\cot\theta = \frac{7}{6}$

19. $\sin\theta = -\frac{\sqrt{21}}{5}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{21}}{2}$, $\csc\theta = -\frac{5\sqrt{21}}{21}$, $\sec\theta = -\frac{5}{2}$, $\cot\theta = \frac{2\sqrt{21}}{21}$

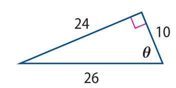
24c. الإجابة النموذجية: ستزيد فترة التذبذب لأن الكتلة m تزيد. والكسر $\frac{k}{m}$ ينخفض. فترة تذبذبات الكتلة تساوي $2\pi \div \sqrt{\frac{k}{m}}$ وهي تزيد بزيادة m.

3 اختبار نصف الوحدة

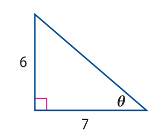
الدروس من 3-1 إلى 3-4

أوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست لـ θ. (الدرس 1-3) 1-2. انظر الهامش.

1.

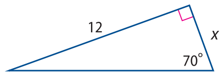


2.



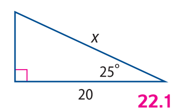
أوجد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر. (الدرس 1-3)

3.



4.4

4.



22.1

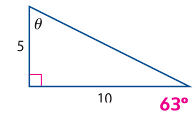
5. **الظلال** شجرة صنوبر تلقي بظلها على مسافة 7.9 قدم عند تعامد الشمس بزاوية 80° أعلى الأفق. (الدرس 1-3)

a. أوجد ارتفاع الشجرة. **نحو 45 ft.**

b. وبعدها في اليوم نفسه، شخص طوله 6 أقدام بلغ ظله 6.7 قدم. ففي أي زاوية تكون الشمس عمودية على الأفق؟ **نحو 42°**

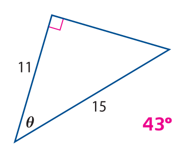
أوجد قياس زاوية θ. قرّب إلى أقرب درجة، إن تطلب الأمر. (الدرس 1-3)

6.



63°

7.



43°

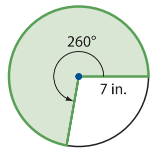
8. اكتب $\frac{2\pi}{9}$ بالدرجات. (الدرس 2-3) **40°**

حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة. ثم أوجد مع الرسم زاوية موجبة وزاوية سالبة مشتركة مع ضلع الانتهاء والزاوية المُعطاة. (الدرس 2-3) 9-10. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

9. $\frac{3\pi}{10}$

10. $-22°$

11. **الاختيار من متعدد:** أوجد المساحة بالتقريب للمنطقة المظللة. (الدرس 3-2) **D**



A 12.2 in^2

B 42.8 in^2

C 85.5 in^2

D 111.2 in^2

12. **السفر** تتحرك سيارة بسرعة 55 ميلاً في الساعة على إطارات تقاس بـ 2.6 قدم في القطر. أوجد سرعة زاوية الإطارات بالتقريب بمقياس راديان في الدقيقة. (الدرس 2-3) **3723 rad/min**

ارسم كل زاوية، ثم أوجد زاوية الإسناد الخاصة بها. (الدرس 3-3)

13. 175°

14. $\frac{21\pi}{13}$

13-14. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير. إن لم تكن محددة، فاكتب غير محددة. (الدرس 3-3)

15. $\cos 315°$ **$\frac{\sqrt{2}}{2}$**

16. $\sec\frac{3\pi}{2}$ **غير محددة**

17. $\sin\frac{5\pi}{3}$ **$-\frac{\sqrt{3}}{2}$**

18. $\tan\frac{5\pi}{6}$ **$-\frac{\sqrt{3}}{3}$**

أوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست لـ θ. (الدرس 3-3)

19. $\cos\theta = -\frac{2}{5}$، حيث $\sin\theta < 0$ و $\tan\theta > 0$ **انظر الهامش.**

20. $\cot\theta = \frac{4}{3}$، حيث $\cos\theta > 0$ و $\sin\theta > 0$

$\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\csc\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = \frac{5}{4}$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$

حدد السعة، والدورة، والتكرار وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم ارسم دورتين كاملتين للدالة. (الدرس 4-3)

21. $y = -3\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

22. $y = 5\cos 2x - 2$

21-22. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

23. **الاختيار من متعدد:** أي هذه الدوال لها التمثيل البياني نفسه مثل $y = 3\sin(x - \pi)$؟ (الدرس 4-3) **F**

F $y = 3\sin(x + \pi)$

G $y = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

H $y = -3\sin(x - \pi)$

J $y = -3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

24. **النابض:** يمكن تمثيل تحرك جسم متصل بنابض يتذبذب عبر موضعه الأصلي بـ $x(t) = A\cos\omega t$، حيث A هي الإزاحة الأولية من موضع السكون، وω ثابت يعتمد على النابض وكتلة الجسم المتصل بالنابض، و t هو الزمن بالثواني. (الدرس 4-3)

a. مثّل حركة الجسم المتصل بالنابض بيانيًا، مع إزاحة 4 سنتيمترات، حيث $\omega = 3$. انظر ملحق إجابات الوحدة 3

b. ما المدة التي يستغرقها الجسم للعودة إلى الموضع الأوّلي للمرة الأولى؟ **تقريبًا 2.1 s**

c. إذا كان الثابت ω يساوي $\sqrt{\frac{k}{m}}$، حيث k ثابت النابض، و m كتلة الجسم. كيف يمكن أن تؤثر زيادة كتلة الجسم في فترة ذبذبته؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

25. **العوامة:** إذا كان ارتفاع جهاز الإرسال الملحق بالعوامة على مستوى سطح البحر بالأقدام يُمثَّل بواسطة $h = a\sin bt + \frac{11}{2}$. وفي المياه الهائجة، يتراوح الارتفاع بين قدم واحدة و10 أقدام، مع 4 ثوانٍ بين كل دورة. أوجد قيم a و b. **$a = 4.5$, $b = \frac{\pi}{2}$**

الدرس 3-5 التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى

..السابق

- تم تحليل التمثيلات البيانية للدوال المثلثية.

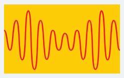
..الحالي

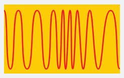
1 التمثيل البياني لدالة الـ tan ومقلوب الدوال المثلثية.

2 تمثيل الدوال المثلثة المتضائلة بيانيًا.

..لماذا؟

- هناك نوعان من موجات الراديو، الأولى تُعرَف بالموجه معدلة السعة (AM)، والثانية تُعرَف بالموجه معدلة التردد (FM). عندما يرسل الصوت باستخدام موجة راديو معدلة السعة (AM)، يطلق على سعة الموجة الجيبية موجة *حاملة*. وتتغير لإخراج الصوت. أما الموجه معدلة التردد (FM)، فينتج عنها تغير تردد الموجة الحاملة. ستعرف أكثر عن التمثيلات البيانية لتلك الموجات، التي تُعرَف باسم *موجات التضاؤل* في هذا الدرس.





المفردات الجديدة

دالة مثلثية متضائلة
damped trigonometric) (function

عامل التضاؤل
(damping factor)

تذبذب متضائل
(damped oscillation)

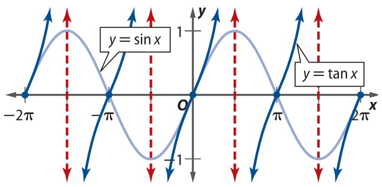
موجة متضائلة
(damped wave)

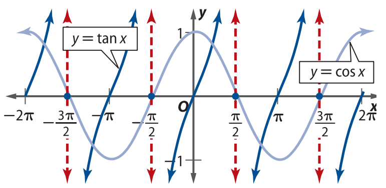
الحركة التوافقية المتضائلة
damped harmonic) (motion

1 دالة الـ tan ودوال المقلوب المثلثية

في الدرس 3-4، مثلث دوال الـ sine و cosine بيانيًا على المستوى الإحداثي. يمكنك استخدام الأساليب نفسها في التمثيل البياني لدالة الـ tangent ودوال المقلوب المثلثية، وهي دالة cotan و secant و cosecant.

بما أن $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$، فإن دالة الـ tan تكون غير معرفة عندما تكون $\cos x = 0$. لذلك، فإن دالة tan الزاوية لها خط مقارب عمودي كلما كانت $\cos x = 0$. وبالمثل، فإن دوال tan الزاوية و sin الزاوية لها نقاط صفر عند مضاعفات الأعداد الصحيحة لـ π لأن $\tan x = 0$ عندما تكون $\sin x = 0$.





وفيما يلي ملخص خصائص دوال الـ sine ودوال الـ cosine.

المفهوم الأساسي خصائص دالة tan

المجال: $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

المدى: $(-\infty, \infty)$

التقاطعات مع المحور الأفقي x: $n\pi, n \in \mathbb{Z}$

التقاطع مع المحور الرأسي y: 0

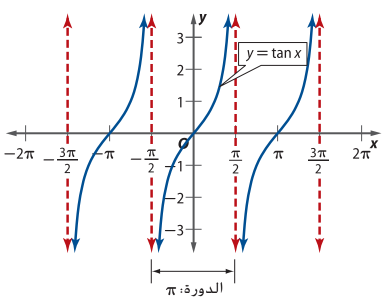
الاتصال: انفصال لانهائي عند $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

خطوط المقارب: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

التناظر: الأصل (دالة فردية)

قيم قصوى: لا يوجد

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to \infty} \tan x$ و $\lim_{x \to -\infty} \tan x$ غير موجود. تذبذب الدالة ما بين $-\infty$ و ∞.



1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-5 تحليل الرسوم البيانية للدوال المثلثية.

الدرس 3-5 التمثيل البياني لدوال الظل والمقلوب المثلثية.
تمثيل الدوال المثلثة المتضائلة بيانيًا.

بعد الدرس 3-5 إيجاد قيمة الدوال المثلثية العكسية وتمثيلها بيانيًا.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

أسأل:

- عند أي نوع من موجات الراديو تتغير سعة الموجة الحاملة؟ **AM**
- عند أي نوع من موجات الراديو يثبت تردد الموجة الحاملة؟ **AM**

(يُتبع في الصفحة التالية)

ويكون الشكل العام لدالة الـ tan، التي تشبه دوال الـ sin، هو $y = a \tan(bx + c) + d$، حيث a ينتج عنه امتداد أو ضغط رأسي b يؤثر في دورة الدالة، وc ينتج إزاحة طور، وd ينتج عنه إزاحة رأسية؛ ولا تكون قيمة a أو b تساوي 0.

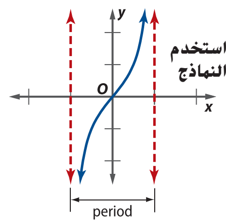
نصيحة دراسية
السعة لا تنطبق *سعة الحد* على دوال الـ tan ودوال cotan؛ لأن أقصى ارتفاعات لهذه الدوال ليست لها نهاية.

المفهوم الأساسي دورة دالة الـ tan

الكلمات دورة دالة tan الزاوية هي المسافة بين أي مقاربين عمودين متتاليين.

الرموز لإيجاد قيمة $y = a\tan(bx + c)$، حيث $b \neq 0$، الدورة $= \frac{\pi}{|b|}$.

استخدم النماذج



المقاربان الرأسيان المتتاليان لإيجاد قيمة $y = \tan x$ هما $x = -\frac{\pi}{2}$ و$x = \frac{\pi}{2}$. يمكنك إيجاد مقاربين عموديين متتاليين لدالة tan الزاوية للشكل $y = a\tan(bx + c) + d$ عن طريق حل المعادلات $bx + c = -\frac{\pi}{2}$ و$bx + c = \frac{\pi}{2}$.
يمكنك تمثيل دالة الـ tan بيانيًا عن طريق تخطيط خطوط مقارب رأسية، على التقاطع مع المحور الأفقي x ونقاط بين خطوط مقارب والتقاطع مع المحور الأفقي x.

المثال 1 تغيير الأبعاد الأفقية بمقياس التمثيل البياني لدالة الـ tan

حدد الخطوط المقاربة العموية، ثم مَثل بيانيًا $y = \tan 2x$.

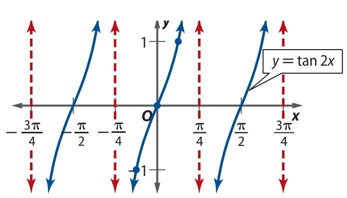
التمثيل البياني لـ $y = \tan 2x$ هو التمثيل البياني لـ $y = \tan x$ مضغوطًا أفقيًا. وتكون الدورة $\frac{\pi}{|2|}$ أو $\frac{\pi}{2}$.
أوجد مقاربين رأسيين متتاليين.

	معادلات مقارب tan	
$bx + c = \frac{\pi}{2}$		$bx + c = -\frac{\pi}{2}$
$2x + 0 = \frac{\pi}{2}$	$b = 2, c = 0$	$2x + 0 = -\frac{\pi}{2}$
$x = \frac{\pi}{4}$	بسّط	$x = -\frac{\pi}{4}$

أنشئ جدولاً للنقاط الأساسية. به التقاطع مع المحور الرأسي x الذي يقع بين الخطين المقاربين الرأسيين عند $x = -\frac{\pi}{4}$ و$x = \frac{\pi}{4}$.

الدالة	خط مقارب رأسي	النقطة المتوسطة	التقاطع مع المحور الأفقي x	النقطة المتوسطة	خط مقارب رأسي
$y = \tan x$	$x = -\frac{\pi}{2}$	$(-\frac{\pi}{4}, -1)$	$(0, 0)$	$(\frac{\pi}{4}, 1)$	$x = \frac{\pi}{2}$
$y = \tan 2x$	$x = -\frac{\pi}{4}$	$(-\frac{\pi}{8}, -1)$	$(0, 0)$	$(\frac{\pi}{8}, 1)$	$x = \frac{\pi}{4}$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الأساسية الموضحة للدالة.
ثم ارسم دائرة واحدة عن يسار الفترة $\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$
ودائرة عن يمين الفترة $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.



تمرين موجه

حَدد الخطوط المُقاربة الرأسية، ومَثل بيانيًّا كل دالة. **1A–B. انظر الهامش.**

1A. $y = \tan 4x$

1B. $y = \tan\frac{x}{2}$

- بالنظر إلى الرسم البياني لإشارة الراديو من النوع AM. كيف يمكنك تحديد الطول الموجي للموجة الحاملة؟ بقياس المسافة بين القمم المتعاقبة

1 دوال الـ Cosine للزاوية والمقلوب

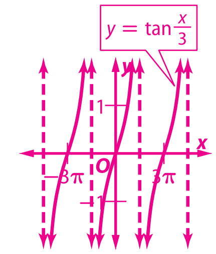
الأمثلة 4–1 توضح كيفية تمثيل دوال الـ Tan و الـ Cot و الـ Sec و الـ Csc.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 حدد الخطوط المقاربة الرأسية، ثم مثّل بيانيًّا الآتي $y = \tan\frac{x}{3}$.

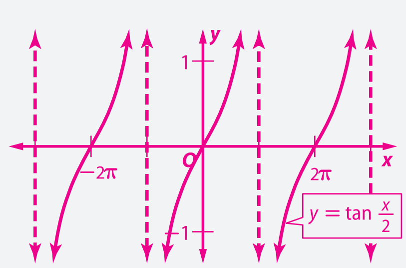


التركيز على محتوى الرياضيات

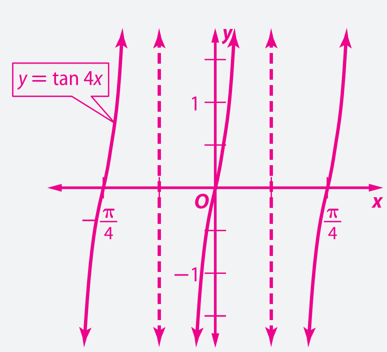
السعة مثل العديد من الدوال الدورية، تمتلك الرسوم البيانية لدوال جيب الزاوية وجيب التمام سعة. لا تمتلك الرسوم البيانية الخاصة بالدوال المثلثية الأخرى سعة لأن الحد الذي تقترب عنده من قيم x– معينة هو $\pm\infty$.

إجابات إضافية (تمرين موجه)

1B.



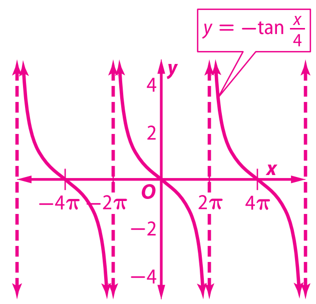
1A.



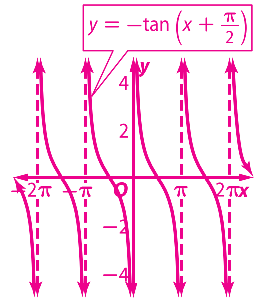
مثال إضافي

2 حدد الخطوط المقاربة الرأسية. ومثّل كل دالة بيانيًا.

a. $y = -\tan \frac{x}{4}$



b. $y = -\tan \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$



إرشاد للمعلمين الجدد

فترات الدوال قد يجد بعض الطلاب صعوبة في تذكر فترة كل دالة مثلثية. ذكّر الطلاب أن الدورة هي المسافة على طول المحور الأفقي للرسم البياني لإكمال دورة واحدة. يكون لدالتي الـ Tan و الـ Cot الزاوية الدورة π، بينما يكون للدوال المثلثية الأخرى دورات من 2π.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

كاميرا المستندات اختر طالبًا لإنشاء جدول من النقاط الرئيسة والخصائص من الرسم البياني، بما فيها الخطوط المقاربة الرأسية والتقاطعات مع المحور x والدورة والنقاط الوسيطة.

المثال 2 التمثيل البياني لانعكاسات دالة الـ tan وانسحاباتها

حدد الخطوط المقاربة الرأسية، ومثل بيانيًّا كل دالة.

a. $y = -\tan \frac{x}{2}$

التمثيل البياني لـ $y = -\tan \frac{x}{2}$ هو التمثيل البياني لـ $y = \tan x$ ممتدة أفقيًّا، ثم منعكسة على المحور الأفقي x. الدورة هي $\frac{\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}$ أو 2π. أوجد مقاربين رأسيين متتاليين.

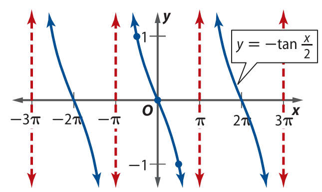
$\frac{x}{2} + 0 = -\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $b = \frac{1}{2}, c = 0$ $\qquad$ $\frac{x}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$

$x = 2\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ أو $-\pi$ $\qquad$ بسّط $\qquad$ $x = 2\left(\frac{\pi}{2}\right)$ أو π

أنشئ جدولاً للنقاط الأساسية، به التقاطع مع المحور الرأسي x الذي يقع بين الخطين المقاربين عند $x = -\pi$ و $x = \pi$.

الدالة	خط مقارب رأسي	النقطة المتوسطة	التقاطع مع المحور الأفقي x	النقطة المتوسطة	خط مقارب رأسي
$y = \tan x$	$x = -\frac{\pi}{2}$	$\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$	$x = \frac{\pi}{2}$
$y = -\tan \frac{x}{2}$	$x = -\pi$	$\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$	$x = \pi$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الموضحة لكل دالة. ثم كرّر هذا الأمر لرسم دائرة عن يسار ويمين المنحنى الأول.



b. $y = \tan \left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

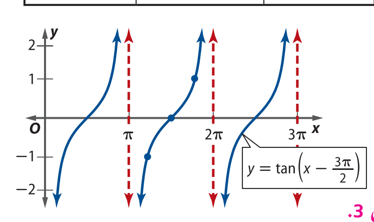
التمثيل البياني لـ $y = \tan \left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$ هو التمثيل البياني $y = \tan x$ بإزاحة مقدارها $\frac{3\pi}{2}$ وحدات إلى اليمين. الدورة هي $\frac{\pi}{|1|}$ أو π. أوجد مقاربين رأسيين متتاليين.

$x - \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $b = 1, c = -\frac{3\pi}{2}$ $\qquad$ $x - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}$ أو π $\qquad$ بسّط $\qquad$ $x = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}$ أو 2π

الدالة	خط مقارب رأسي	النقطة المتوسطة	التقاطع مع المحور الأفقي x	النقطة المتوسطة	خط مقارب رأسي
$y = \tan x$	$x = -\frac{\pi}{2}$	$\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$	$(0, 0)$	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$	$x = \frac{\pi}{2}$
$y = \tan \left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$	$x = \pi$	$\left(\frac{5\pi}{4}, -1\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4}, 1\right)$	$x = 2\pi$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الأساسية الموضحة للدالة ثم ارسم دائرة واحدة عن يسار ويمين المنحنى الأول.



تمرين موجه 2A-B. انظر ملحق إجابات الفصل 3.

2A. $y = \tan \left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad$ **2B.** $y = -\tan \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

نصيحة دراسية

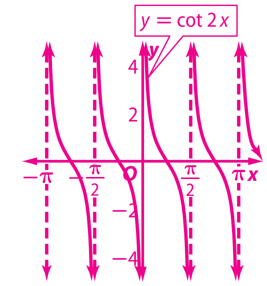
طريقة بديلة عند تمثيل الدالة فقط بيانيًا بالإزاحة الأفقية c، يمكنك إيجاد النقاط الرئيسية عن طريق إضافة c لكل من إحداثيات X للنقاط الرئيسية للدالة الأم.

التدريس المتمايز OL

المتعلمون أصحاب النمط اللفظي/اللغوي اطلب من الطلاب أن يوضحوا لزملائهم عملية الخطوة بخطوة المستخدمة لتمثيل دالة ظل الزاوية من اختيار أحد الزملاء بيانيًا.

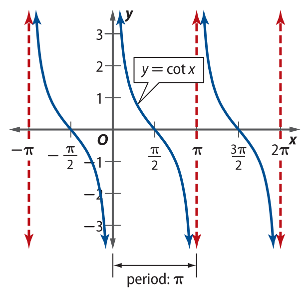
مثال إضافي

3 حدد الخطوط المقاربة الرأسية، ثم مثّل بيانيًّا $y = \cot 2x$.



تكون دالة cotan هي مقلوب دالة الـــ tan، ويطلق عليها $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$. وكما هو الحال في دالة الـــ tan، تكون أيضًا صيغة دورة دالة cotan $y = a \cot (bx + c) + d$ ويمكن إيجادها عن طريق حساب $\frac{\pi}{|b|}$. كما يمكن إيجاد خطين مقاربين عمودين متتاليين عن طريق حل المعادلات $bx + c = 0$ و $bx + c = \pi$. وفيما يلي ملخص خصائص دالة cotan.

المفهوم الأساسي خصائص دالة الـــ tan



المجال: $x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$

المدى: $(-\infty, \infty)$

التقاطعات مع المحور الأفقي x: $\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

التقاطع مع المحور الرأسي y: لا يوجد

الاتصال: انفصال لانهائي عند $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

خطوط المقارب: $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

التناظر: الأصل (دالة فردية)

القيم القصوى: لا يوجد

السلوك الطرفي: $\lim_{x\to-\infty} \cot x$ و $\lim_{x\to\infty} \cot x$ غير موجودة.
تتذبذب الدالة ما بين $-\infty$ و ∞.

يمكنك تمثيل دالة cotan بيانيًّا بالأساليب التي استخدمتها في تمثيل دالة الـــtan.

المثال 3 تمثيل دالة الـــcotan بيانيًّا

حدد المقارب العمودي، ثم مثل بيانيًّا الآتي $y = \cot \frac{x}{3}$.

التمثيل البياني لـــ $y = \cot \frac{x}{3}$ هو التمثيل البياني لـــ $y = \cot x$ متمددًا أفقيًّا. الدورة هي $\frac{\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|}$ أو 3π. أوجد مقاربين رأسيين متتاليين عن طريق حل $bx + c = 0$ و $bx + c = \pi$.

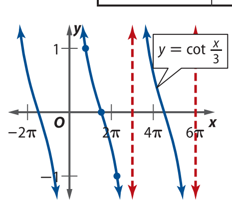
$\frac{x}{3} + 0 = 0$ $b = \frac{1}{3}, c = 0$ $\frac{x}{3} + 0 = \pi$

$x = 3(0)$ أو 0 بسّط $x = 3(\pi)$ أو 3π

أنشئ جدولاً للنقاط الأساسية به التقاطع مع المحور الأفقي x، الذي يقع بين الخطين المقاربين عند $x = 0$ و $x = 3\pi$.

الدالة	خط مقارب رأسي	النقطة المتوسطة	التقاطع مع المحور الأفقي x	النقطة المتوسطة	خط مقارب رأسي
$y = \cot x$	$x = 0$	$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$	$x = \pi$
$y = \cot \frac{x}{3}$	$x = 0$	$\left(\frac{3\pi}{4}, 1\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$\left(\frac{9\pi}{4}, -1\right)$	$x = 3\pi$

ثم اتبع الإرشادات التي استخدمتها في رسم دالة الـــ tan. مع رسم منحنى من خلال النقاط الرئيسية المحددة التي تجدها. ثم ارسم دائرة واحدة عن يسار ويمين المنحنى الأول.



تمرين موجه

حدد الخطوط المقاربة العمودية، ومثل بيانيًّا كل دالة. 3A–B. انظر الهامش.

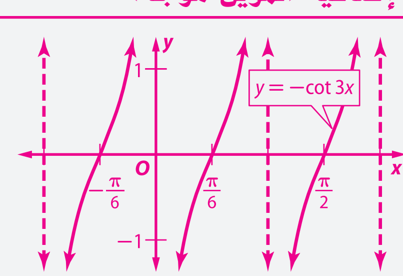
3A. $y = -\cot 3x$ 3B. $y = 3 \cot \frac{x}{2}$

نصيحة تقنية

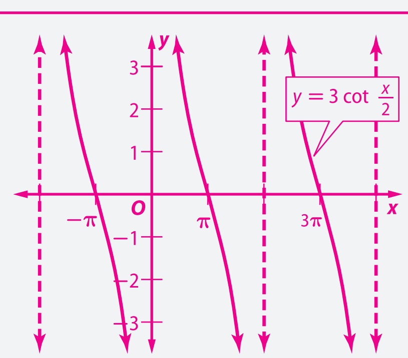
التمثيل البياني لدالة cotan عند استخدام الحاسبة البيانية لتمثيل دالة cotan بيانيًّا، أدخل مقلوب الـــtan. $y = \frac{1}{\tan x}$. الحاسبات البيانية قد تنتج خطوطًا متصلة عند حدوث الخطوط المقاربة. وسيؤدي تعيين النمط على DOT إلى إخفاء الخط.

إجابات إضافية (تمرين موجه)

3A.

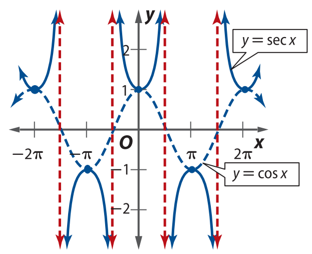


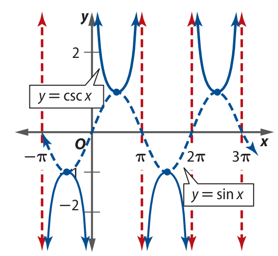
3B.



UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 190 12/15/2016 11:41:01 PM

يطلق على مقلوب $\sin x$ ويطلق على مقلوب $\cos x$ $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ ويطلق على مقلوب $\cos x$ $\sec x = \frac{1}{\cos x}$، كما هو موضح.





وتحتوي دالة csc على خطوط مقاربة عندما تكون $\sin x = 0$، عند مضاعفات الأعداد الصحيحة لـــ π. كذلك، تحتوي دالة sec على خطوط مقاربة عندما تقع $\cos x = 0$، عند مضاعفات الأعداد الفردية لـــ$\frac{\pi}{2}$. لاحظ أيضًا أن التمثيل البياني لـــ $y = \csc x$ له حد أدنى نسبي لكل نقطة قصوى في منحنى sin، وحد أقصى نسبي لكل نقطة دنيا على منحنى sin. وينطبق الشيء نفسه على التمثيلات البيانية لـــ $y = \sec x$ و $y = \cos x$.

وفيما يلي ملخص خصائص دوال sec ودوال csc.

المفهوم الأساسي خصائص دوال cosecant و دوال secant

دالة cosecant

المجال: $x \in \mathbb{R},\ x \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

المدى: $(-\infty, -1]$ و $[1, \infty)$

التقاطعات مع المحور الأفقي x: لا يوجد

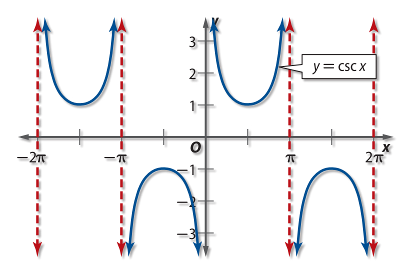
التقاطع مع المحور الرأسي y: لا يوجد

الاتصال: انفصال لانهائي عند $x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

خطوط المقارب: $x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

التناظر: الأصل (دالة فردية)

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to -\infty} \csc x$ و $\lim_{x \to \infty} \csc x$ غير موجودتين. تتذبذب الدالة ما بين $-\infty$ و ∞.



الدورة: 2π

دالة secant

المجال: $x \in \mathbb{R},\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

المدى: $(-\infty, -1]$ و $[1, \infty)$

التقاطعات مع المحور الأفقي x: لا يوجد

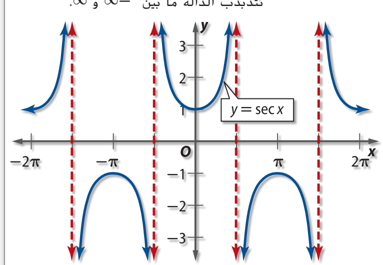
التقاطع مع المحور الرأسي y: 1

الاتصال: انقطاع الاتصال عند $x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

خطوط المقارب: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

التناظر: محور رأسيy (الدالة الزوجية)

السلوك: $\lim_{x \to -\infty} \sec x$ و $\lim_{x \to \infty} \sec x$ غير موجودتين. تتذبذب الدالة ما بين $-\infty$ و ∞.



الدورة: 2π

نصيحة تقنية

التمثيل البياني يشبه التمثيل البياني لدوال csc ودوال sec على الحاسبة البيانية التمثيل البياني لدالة tan التمام. أدخل مقلوب دوال الـ sin ودوال الـcosine.

ومثل دوال الـــ sin، يمكن إيجاد دورة دالة الـــ sec للشكل $y = a \sec(bx + c) + d$ أو دالة csc للشكل $y = a \csc(bx + c) + d$ عن طريق حساب $\frac{2\pi}{|b|}$. يمكن إيجاد المقاربين العموديين لدالة sec عن طريق حل المعادلات $bx + c = -\frac{\pi}{2}$و $bx + c = \frac{3\pi}{2}$ وإيجاد مقاربين رأسيين لدالة csc عن طريق حل المعادلات $bx + c = -\pi$ و $bx + c = \pi$.

191

لتمثيل دالة cosecant أو دالة secant بيانيًا، ضع خطوط المقاربة للدالة، ثم أوجد الحد الأدنى النسبي المطابق والنقاط الدنيا.

المثال 4 تمثيل دوال الـ cosecant و الـ secant بيانيًا

حدد الخطوط المقاربة العمودية، ومثل بيانيًّا كل دالة.

a. $y = \csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

التمثيل البياني لـ $y = \csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ هو التمثيل البياني لـ $y = \csc x$ بإزاحة الوحدات بمقدار $\frac{\pi}{2}$ إلى اليسار. وتكون الدورة هي $\frac{2\pi}{|1|}$ أو 2π. ويوجد المقاربان الرأسيان عندما يكون $bx + c = -\pi$ و$bx + c = \pi$. لذا، فإن المقاربين هما $x + \frac{\pi}{2} = -\pi$ أو $x = -\frac{3\pi}{2}$ و $x + \frac{\pi}{2} = \pi$ أو $x = \frac{\pi}{2}$.

أنشئ جدولاً للنقاط الأساسية به الحد الأدنى النسبي والحد الأقصى، اللذان يقعان بين الخطين المقاربين عند $x = -\frac{3\pi}{2}$ و $x = \frac{\pi}{2}$.

الدالة	خط مقارب رأسي	القيمة النسبية القصوى	خط مقارب رأسي	القيمة النسبية الدنيا	خط مقارب رأسي
$y = \csc x$	$x = -\pi$	$\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$	$x = 0$	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$	$x = \pi$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الأساسية الموضحة للدالة. ثم ارسم دائرة واحدة عن اليسار واليمين. يوضح التمثيل البياني فيما يلي في الشكل 4.5.1.

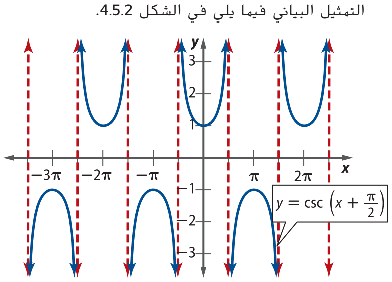
b. $y = \sec\frac{x}{4}$

التمثيل البياني لـ $y = \sec\frac{x}{4}$ هو التمثيل البياني لـ $y = \sec x$ ممتدًّا أفقيًّا. وتكون الدورة هي $\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|}$ أو 8π. ويوجد المتقاربان الرأسيان عندما $bx + c = -\frac{\pi}{2}$ و$bx + c = \frac{3\pi}{2}$. لذا، فإن المقاربين هما $\frac{x}{4} + 0 = -\frac{\pi}{2}$ أو $x = -2\pi$ و $\frac{x}{4} + 0 = \frac{3\pi}{2}$ أو $x = 6\pi$.

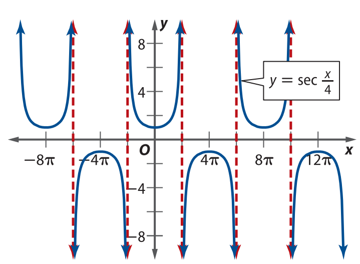
أنشئ جدولاً، وضع فيه النقاط الرئيسية الموجودة بين المقاربين عند $x = -2\pi$ و$x = 6\pi$.

الدالة	خط مقارب رأسي	القيمة النسبية الدنيا	خط مقارب رأسي	القيمة النسبية القصوى	خط مقارب رأسي
$y = \sec x$	$x = -\frac{\pi}{2}$	$(0, 1)$	$x = \frac{\pi}{2}$	$(\pi, -1)$	$x = \frac{3\pi}{2}$
$y = \sec\frac{x}{4}$	$x = -2\pi$	$(0, 1)$	$x = 2\pi$	$(4\pi, -1)$	$x = 6\pi$

ارسم المنحنى من خلال النقاط الأساسية الموضحة للدالة. ثم ارسم دائرة واحدة عن اليسار واليمين. يوضح التمثيل البياني فيما يلي في الشكل 4.5.2.



الشكل 3.5.1



الشكل 3.5.2

تمرين موجه 4A–B. انظر الهامش.

4A. $y = \csc 2x$

4B. y - sec $(x+\pi)$

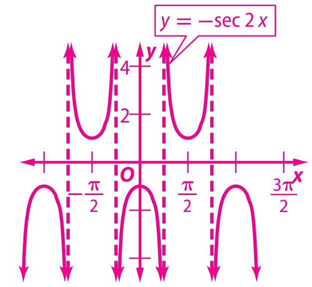
نصيحة دراسية

العثور علي خطوط المقاربة والنقاط الرئيسية يمكنك الاستعانة بالطبيعة الدورية للتمثيلات البيانية للدوال المثلثية في إيجاد خطوط المقاربة والنقاط الرئيسية. في المثال 4a، لاحظ أن المقارب العمودي $x = -\frac{\pi}{2}$ على مسافة واحدة من الخطوط المقاربة المحسوبة، $x = -\frac{3\pi}{2}$ و $x = \frac{\pi}{2}$.

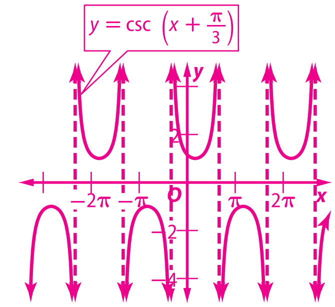
مثال إضافي

4 حدد الخطوط المقاربة الرأسية، ومثّل كل دالة بيانيًّا.

a. $y = -\sec 2x$

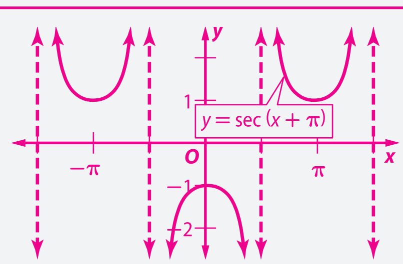


b. $y = \csc\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

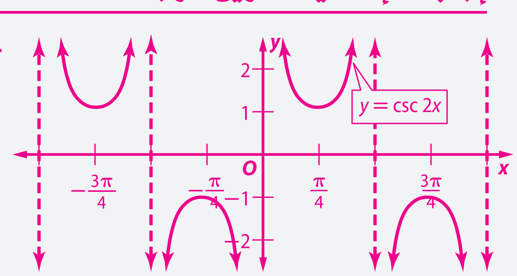


إجابات إضافية (تمرين موجه)

4B.

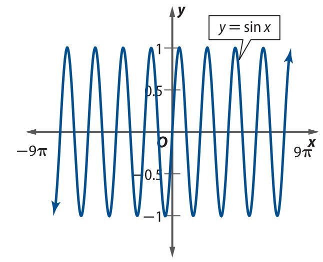


4A.

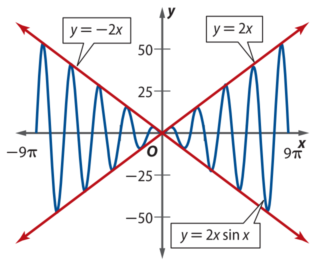


2 الدوال المثلثية المتضائلة

عندما تكون دالة الـ sin مضروبة بدالة أخرى $f(x)$، يكون التمثيل البياني للناتج مترددًا بين التمثيلات البيانية لـ $y = f(x)$ و$y = -f(x)$. عندما يقلل هذا الناتج سعة موجة دالة الـ sin الأصلية، يطلق عليه **تذبذب متضائل** ، وينتج عن الدالتين ما يُعرَف باسم **الدالة المثلثية المتضائلة**. يمكن رؤية هذا التغير في الذبذبات في الأشكال 3.5.3 و3.5.4 للتمثيلات البياني للدالة $y = \sin x$ و $y = 2x \sin x$.



الشكل 3.5.3



الشكل 3.5.4

نصيحة دراسية
دوال التضاؤل الدوال المثلثية التي تتضاعف بالثوابت لا تتعرض للتضاؤل. ويؤثر الثابت في سعة الدالة.

وتأخذ الدالة المثلثية المتضائلة الشكل $y = f(x) \sin bx$ أو $y = f(x) \cos bx$، حيث $f(x)$ هو **عامل التضاؤل**.

ويحدث التذبذب المتضائل عندما يقترب x من $\pm\infty$ أو عندما يقترب x من 0 من كلا الاتجاهين.

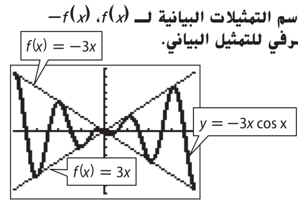
المثال 5 رسم الدوال المثلثية المتضائلة

حدد عامل التضاؤل $f(x)$ في كل دالة. استخدم الحاسبة البيانية في رسم التمثيلات البيانية لـ $f(x)$، $-f(x)$ وللدوال المعطاة باستخدام النافذة الظاهرة نفسها. صِف السلوك الطرفي للتمثيل البياني.

a. $y = -3x \cos x$

دالة $y = -3x \cos x$ هي ناتج الدوال $y = -3x$ و $y = \cos x$. إذًا $f(x) = -3x$.

وتتضاءل سعة الدالة كلما اقترب x من 0 من كلا الاتجاهين.

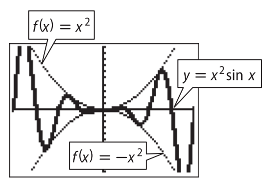


$[-4\pi, 4\pi]$ scl: π by $[-40, 40]$ scl: 5

b. $y = x^2 \sin x$

الدالة $y = x^2 \sin x$ هي ناتج ضرب الدوال $y = x^2$ و $y = \sin x$.
لذا، فإن عامل التضاؤل هو $f(x) = x^2$.

وتتضاءل سعة الدالة كلما اقترب x من 0 من كلا الاتجاهين.



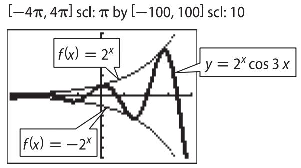
$[-4\pi, 4\pi]$ scl: π by $[-100, 100]$ scl: 10

c. $y = 2^x \cos 3x$

الدالة $y = 2^x \cos 3x$ هي ناتج ضرب

الدالتين $y = \cos 3x$ و $y = 2^x$ لذا فإن $f(x) = 2^x$.

وتتضاءل سعة الدالة كلما اقترب x من $-\infty$.



$[-\pi, \pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-6, 6]$ scl: 1

تمرين موجه 5A–C. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

5A. $y = 5x \sin x$ 5B. $y = \frac{1}{x} \cos x$ 5C. $y = 3^x \sin x$

الربط بتاريخ الرياضيات
كاثلين سينج مورافيتس
(1923–)
درست مورافيتس، كندية الأصل، تشتت الصوت والموجات المغناطيسية، ثم أثبت بعد ذلك النتائج المتعلقة بمعادلة الموجة غير الخطية.

2 الرسوم البيانية للدوال المثلثية المتضائلة

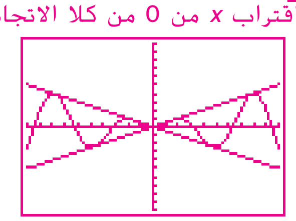
المثال 5 وضح كيفية التعرف على عامل التضاؤل بدالة مثلثية متضائلة وكيفية تحليل الرسم البياني لها. **المثال 6** يوضح كيفية تمثيل الحركة التوافقية المتضائلة لوتر "جيتار" مهتز.

مثال إضافي

5 حدد عامل التضاؤل $f(x)$ في كل دالة. استخدم حاسبة التمثيل البياني في رسم التمثيلات البيانية لـ $f(x)$، $-f(x)$ وللدوال المعطاة باستخدام النافذة الظاهرة نفسها. صِف سلوك التمثيل البياني.

a. $y = \frac{x}{2} \sin x$

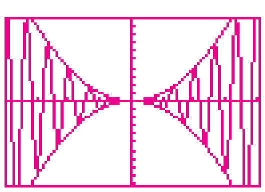
$f(x) = \frac{x}{2}$؛ تقل سعة الدالة عند اقتراب x من 0 من كلا الاتجاهين.



$[-10, 10]$ scl: 1 by $[-10, 10]$ scl: 1

b. $y = x^2 \cos 3x$

$f(x)=x^2$؛ تقل سعة الدالة عند اقتراب x من 0 من كلا الاتجاهين.



$[-4\pi, 4\pi]$ scl: π by $[-100, 100]$ scl: 10

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 193 12/15/2016 11:41:07 PM

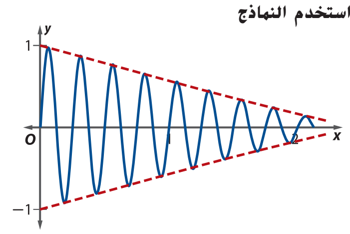
عندما تقل سعة حركة جسم مع الزمن نتيجة الاحتكاك، يطلق على تلك الحركة الحركة التوافقية التضاؤلية.

المفهوم الأساسي الحركة التوافقية التضاؤلية

الكلمات يكون الجسم في حالة **حركة توافقية تضاؤلية** عندما تحدد سعته بالدالة $a(t) = ke^{-ct}$.

الرموز بالنسبة لـ $y = ke^{-ct} \sin \omega t$ و$y = ke^{-ct} \cos \omega t$، حيث $c > 0$, k هو الإزاحة، c ثابت التضاؤل، t هو الزمن، وω هي الفترة.

استخدم النماذج



ويكون أكبر ثابت تضاؤل c أسرع كلما اقتربت السعة من الصفر. ويتوقف مقدار c على حجم الجسم والمواد التي يتألف منها.

مثال 6 من الحياة اليومية الحركة التوافقية المتضائلة

الموسيقى: أدى سحب وتر جيتار مسافة 0.8 سنتيمتر أعلى موضع سكونه، ثم إطلاقه إلى حدوث اهتزاز. وكان ثابت تضاؤل الوتر 2.1، وتردد الملاحظة الناتجة 175 دورة في الثانية

a. اكتب دالة مثلثية تمثل حركة الوتر.

ويحدث الحد الأقصى لإزاحة الوتر عندما يكون $t = 0$. لذا فإن الدالة $y = ke^{-ct} \cos \omega t$ يمكن أن تمثل حركة الوتر؛ لأن التمثيل البياني للدالة $y = \cos t$ يتقاطع مع المحور الرأسي y بدلاً من 0.

وتحدث الإزاحة القصوى عند سحب الوتر لمسافة 0.8 سنتيمتر. وتكون قيمة الإزاحة الكلية هي ناتج طرح الإزاحة القصوى من M الإزاحة الدنيا m. لذا فإن

$k = M - m = 0.8 - 0$ أو 0.8 cm.

ويمكنك استعمال قيمة التردد لإيجاد قيمة ω.

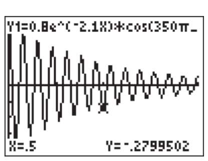
$\frac{|\omega|}{2\pi} = 175$ التردد $= \frac{|\omega|}{2\pi}$

$|\omega| = 350\pi$ وبضرب الطرفين في 2π.

اكتب دالة مستعينًا بقيم ω، k، وc.

وتكون $y = 0.8e^{-2.1t} \cos 350\pi t$ هي إحدى النماذج التي تمثل حركة الوتر.

b. حدد الزمن t الذي يستغرقه الوتر ليتضاءل إلى $-0.28 \le y \le 0.28$.



[0, 1] scl: 0.5 by [−0.75, 0.75] scl: 0.25

باستخدام الحاسبة البيانية، حدد قيمة t عندما يكون التمثيل البياني للدالة $y = 0.8e^{-2.1t} \cos 350\pi t$ is يتذبذب بين $y = -0.28$ و$y = 0.28$.

ومن التمثيل البياني، ترى أن التمثيل البياني للدالة $y = 0.8e^{-2.1t} \cos 350\pi t$ يستغرق تقريبًا 0.5 ثانية ليتذبذب خلال الفترة $-0.28 \le y \le 0.28$.

تمرين موجه

6. **الموسيقى** بفرض وجود وتر جيتار آخر، تم سحبه لمسافة 0.5 سنتيمتر أعلى موضع سكونه بتردد 98 دورة في الثانية، وثابت تضاؤل 1.7.

A. اكتب دالة مثلثية تمثل حركة الوتر y بما أن دالة الزمن t. **الإجابة النموذجية** $y = 0.5e^{-1.7t} \cos 196\pi t$

B. حدد الزمن t الذي يستغرقه الوتر ليتضاءل إلى $-0.15 \le y \le 0.15$.

قرابة 0.64 ثانية

الربط بالحياة اليومية

يمتد كل وتر في الجيتار إلى طول معين ونسبة شد معينة، وتلك العوامل، جنبًا إلى جنب مع وزن ونوع الخيط، تؤدي إلى حدوث اهتزاز مع تردد مميز أو نغمة تسمى بترددها الأساسي، وهي التي تنتج النوتة الموسيقية التي تسمعها.

المصدر: كيف تجري الأمور

مثال إضافي

6 الموسيقى أدى سحب وتر جيتار على مسافة 0.95 سنتيمتر أعلى موضع سكونه، ثم إطلاقه إلى حدوث اهتزاز. وكان ثابت تضاؤل الوتر 1.3، وتردد الملاحظة الناتجة 200 دورة في الثانية.

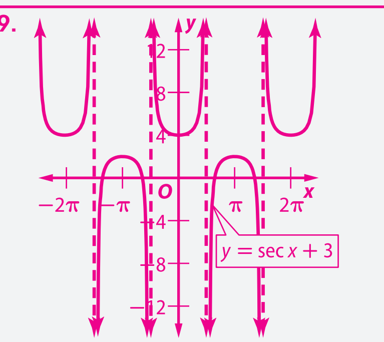
a. اكتب دالة مثلثية تمثل حركة الوتر.

الإجابة النموذجية: $y = 0.95e^{-1.3t} \cos 400\pi t$

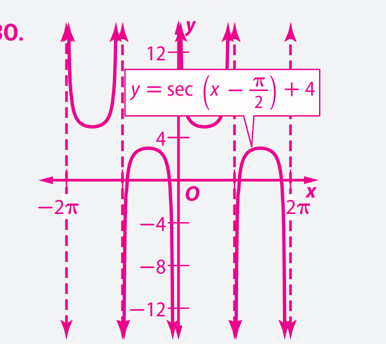
b. حدد الزمن t الذي يستغرقه الوتر ليتضاءل إلى $-0.38 \le y \le 0.38$. قرابة 0.7 ثانية

إجابات إضافية

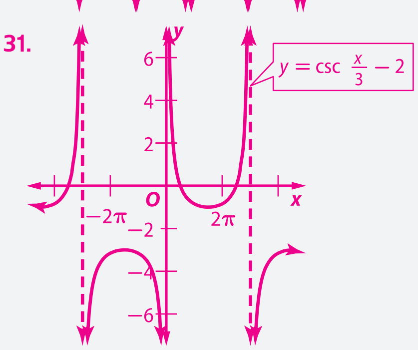
29.



30.



31.



التدريس المتمايز BL OL

المتعلمون السمعيون/الموسيقيون اطلب من الطلاب توضيح الاهتزازات التوافقية المتضائلة باستخدام أوتار مسحوبة على آلات مختلفة مثل باس أو تشيلو أو الجيتار أو البيانو أو صوت الرنين من الأجراس أو الصناج. باستخدام ساعة توقيت، قِس المدة الزمنية لكلّ صوت من شدته الأعلى الأولية حتى درجة ألا يعود بالإمكان سماعه. باستخدام معادلة الحركة التوافقية المتضائلة، يجب على الطلاب كتابة المعادلات التي تمثل الأصوات.

تمارين

16–1. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

حدد الخطوط المقاربة العمودية، ومثل بيانيًّا كل دالة. (الأمثلة 4-1)

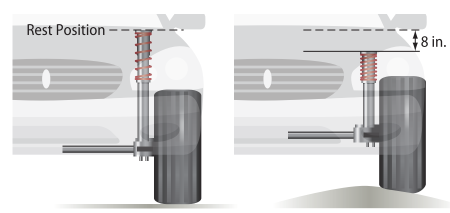
1. $y = 2\tan x$
2. $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
3. $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
4. $y = -3\tan\frac{x}{3}$
5. $y = -\frac{1}{4}\cot x$
6. $y = -\tan 3x$
7. $y = -2\tan(6x - \pi)$
8. $y = \cot\frac{x}{2}$
9. $y = \frac{1}{5}\csc 2x$
10. $y = \csc\left(4x + \frac{7\pi}{6}\right)$
11. $y = \sec(x + \pi)$
12. $y = -2\csc 3x$
13. $y = 4\sec\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$
14. $y = \sec\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{5}\right)$
15. $y = \frac{3}{2}\csc\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$
16. $y = -\sec\frac{x}{8}$

26–17. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

حدد عامل التضاؤل $f(x)$ في كل دالة. استخدم الحاسبة البيانية في رسم التمثيلات البيانية لــ $f(x)$، $-f(x)$ وللدوال المعطاة باستخدام النافذة الظاهرة نفسها. صِف سلوك التمثيل البياني. (المثال 5)

17. $y = \frac{3}{5}x\sin x$
18. $y = 4x\cos x$
19. $y = 2x^2\cos x$
20. $y = \frac{x^3}{2}\sin x$
21. $y = \frac{1}{3}x\sin 2x$
22. $y = (x - 2)^2\sin x$
23. $y = e^{0.5x}\cos x$
24. $y = 3^x\sin x$
25. $y = |x|\cos 3x$
26. $y = \ln x\cos x$

27. **الميكانيكا:** عند اصطدام السيارة المبينة أدناه بمضخة، يتم ضغط ممتص الصدمات حتى 8 بوصات، ثم تحريره ليبدأ في حركة توافقية تضاؤلية بتردد 2.5 دورة في الثانية. ويكون ثابت تضائل ممتص الصدمات هو 3. (المثال 6)



a. اكتب دالة مثلثية تمثل حركة الوتر y بما أن دالة الزمن t. افرض أن $t = 0$ لحظة تحرير ممتص الصدمات. **الإجابة النموذجية $y = 8e^{-3t}\cos 5\pi t$**

b. حدد الزمن t المستغرق في زيادة الاهتزاز ليصل إلى 4 بوصات. **قرابة 0.06 ثانية**

28. **الغوص:** ارتفعت حافة منصة الغطس 20.3 سنتيمتر أعلى موضع سكونها بعد أن ترك الغواص المنصة. وبعد مرور ثانيتين، تحركت المنصة إلى الأعلى والأسفل 12 مرة. ويكون ثابت تضائل المنصة هو 0.901 (المثال 6)

الإجابة النموذجية $y = 20.3e^{-0.901t}\cos 12\pi t$

a. اكتب دالة مثلثية تمثل حركة منصة الغطس y إذا كانت دالة الزمن t.

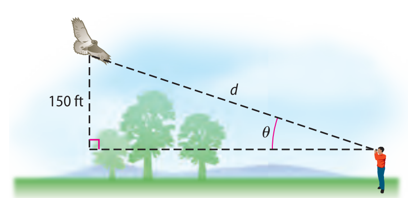
b. حدد الزمن t الذي تستغرقه المنصة لتتضاءل إلى $-0.5 \le y \le 0.5$. **قرابة 4.09 ثانية**

حَدد الخطوط المُقاربة العمودية، ومَثل بيانيًّا كل دالة. 34–29. انظر الهامش.

B

29. $y = \sec x + 3$
30. $y = \sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 4$
31. $y = \csc\frac{x}{3} - 2$
32. $y = \csc\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 3$
33. $y = \cot(2x + \pi) - 3$
34. $y = \cot\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - 1$

35. **التصوير:** التقط سعيد صورة لصقر كان يحلق على مسافة 150 قدمًا فوقه. وفي النهاية، سيحلق الصقر مباشرة فوق سعيد. افرض أن d المسافة بين سعيد والصقر و θ تكون زاوية ارتفاع الصقر عن الكاميرا الخاصة بسعيد.



a. اكتب d كدالة لــ θ. **$d = 150\csc\theta$ أو $d = \frac{150}{\sin\theta}$**

b. مثل الدالة بيانيًّا على الفترة $0 < \theta < \pi$. **انظر الهامش.**

c. بالتقريب، ما المسافة بين الصقر وسعيد عندما تكون زاوية الارتفاع 45°؟ **نحو 212.1 ft**

36b. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

36. **المسافة:** يتسلق عنكبوت ببطء الجدار. وتقف هيام على بعد 6 أقدام من الجدار تشاهد العنكبوت. افرض أن d المسافة بين هيام والعنكبوت وθ تكون زاوية ارتفاع العنكبوت عن هيام.

a. اكتب d كدالة لــ θ. **$d = 6\sec\theta$ او $d = \frac{6}{\cos\theta}$**

b. مثل بيانيًّا الدالة في الفترة $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

c. بالتقريب، ما المسافة بين العنكبوت وهيام عندما تكون زاوية الارتفاع 32°؟ **نحو 7.1 ft**

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم تمارين 28-1 للتحقق من عملية الفهم.

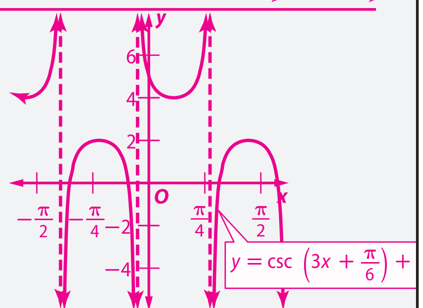
ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص واجبات للطلاب.

انتبه!

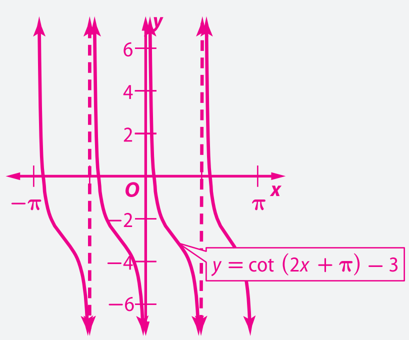
خطأ شائع في التمارين 8-1، ذكّر الطلاب بأن دورة دوال Tan ــــ الــ Cot ــــ الــ و الزاوية هي $\frac{\pi}{|b|}$.

إجابات إضافية

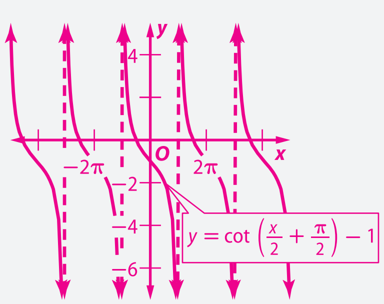
32.



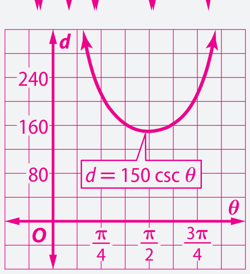
33.



34.



35b.



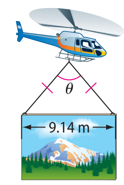
خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-28, 57-60, 62-78	1-27 فردي، 75-78	2-28 زوجي، 57-60, 62-74
OL ضمن المستوى	1-35 فردي، 36, 37-55 فردي، 57-60, 62-78	1-28, 75-78	29-60, 62-74
BL أعلى من المستوى	29-78		

باستخدام الحاسبة البيانية: أوجد قيمة θ على فترة $-\pi < \theta < \pi$ التي تجعل كل معادلة صحيحة. **37–42. انظر الهامش.**

37. $\cot\theta = 2\sec\theta$
38. $\sin\theta = \cot\theta$
39. $4\cos\theta = \csc\theta$
40. $\tan\frac{\theta}{2} = \sin\theta$
41. $\csc\theta = \sec\theta$
42. $\tan\theta = \sec\frac{\theta}{2}$

C **الشد:** قدمت طائرة هليكوبتر لوحة كبيرة للمدينة. سيتم عرضها في وسط المدينة. وكانت هذه اللوحة متصلة بالطائرة الهليكوبتر عن طريق حبلين كما هو موضح أدناه. وكان مقدار الشد T لكل حبل يساوي نصف قوة الهبوط $\sec\frac{\theta}{2}$.



a. قوة الهبوط بالنيوتن تساوي كتلة اللوحة بالجاذبية، وهي 9,8 نيوتن لكل كيلو جرام. إذا كانت كتلة اللوحة 544 كيلو جرام، فأوجد قيمة قوة الهبوط. **5331.2 N**

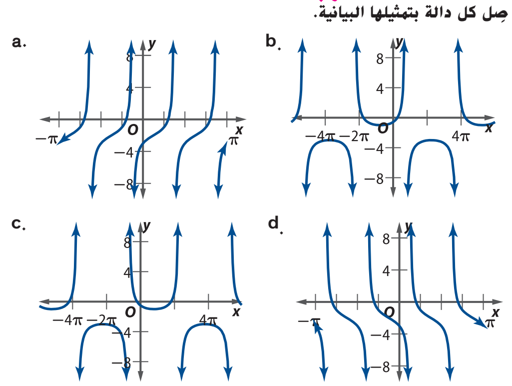
b. اكتب معادلة تمثل الشد T في كل حبل. $T = 2665.6 \sec\frac{\theta}{2}$

c. مثل بيانيًا هذه المعادلة التي توجد في b في الفترة $[0°, 180°]$. **c-d. انظر الحاشية.**

d. وبفرض أن طول هذه اللوحة يساوي 9.14 متر والزاوية المثالية للشد هي θ الزاوية اليمنى. حدد عدد الأحبال لنقل هذه اللوحة بالإضافة إلى الشد المناسب لكل حبل.

e. بفرض أن لديك 12.2 متر من الأحبال لاستخدامها في نقل هذه اللوحة. أوجد قيمة θ وقيمة الشد المناسب لكل حبل. **$\theta \approx 97.0°$؛ قراءة 4023 N**

صِل كل دالة بتمثيلها البياني.



44. $y = \csc\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - 2$ **c**
45. $y = \sec\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - 2$ **b**
46. $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$ **d**
47. $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 2$ **a**

باستخدام حاسبة التمثيل البياني مثل بيانيًا كل زوج من الدوال في الشاشة نفسها، وخمِّن هل هما مساويان لجميع الأعداد الحقيقية؟ ثم استخدم خصائص الدوال لإثبات كل تخمين.

48–51. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

48. $f(x) = \sec x \cos x;\ g(x) = 1$
49. $f(x) = \sec^2 x;\ g(x) = \tan^2 x + 1$
50. $f(x) = \cos x \csc x;\ g(x) = \cot x$
51. $f(x) = \frac{1}{\sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right)};\ g(x) = \sin x$

اكتب معادلة للدالة والفترة ومرحلة التحول (ps) والتحول العمودي (vs) المعطاة. **52–56. انظر الهامش.**

52. الدالة: sec، الفترة: 3π; ps: 0; vs: 2
53. الدالة: tan، الفترة: $\frac{\pi}{2}$; ps: $\frac{\pi}{4}$; vs: −1
54. الدالة: csc، الفترة: $\frac{\pi}{4}$; ps: −π; vs: 0
55. الدالة: cot، الفترة: 3π; ps: $\frac{\pi}{2}$; vs: 4
56. الدالة: csc، الفترة: $\frac{\pi}{3}$; ps: $-\frac{\pi}{2}$; vs: −3

مسائل معارات التفكير العليا

57. **الإثبات:** أثبت أن التقاطع مع المحور الراسي y في التمثيل البياني لدالة الشكل $y = ke^{-ct}\cos\omega t$ هو k. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

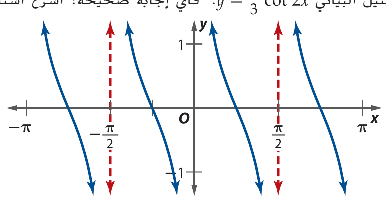
التبرير: حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة*. اشرح استنتاجك. **58–59. انظر الهامش.**

58. إذا كان $b \neq 0$، اذا $y = a + b\sec x$ لها قيمة قصوى $\pm(a + b)$.

59. إذا كان $x = \theta$ خطًا مقاربًا لــ $y = \csc x$، إذا $x = \theta$ أيضًا يعد خطًا مقاربًا لــ $y = \cot x$.

60. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

60. **تحليل الخطأ:** درست هناء وهدى التمثيل البياني المعروض. واعتقدت هناء أن التمثيل البياني لــ $y = -\frac{1}{3}\tan 2x$. واعتقدت هدى أن التمثيل البياني $y = \frac{1}{3}\cot 2x$. فأي إجابة صحيحة؟ اشرح استنتاجك.



61. الإجابة النموذجية $y = \csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right);\ y = -\cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

61. **التحدي** اكتب دالة cosecant ودالة cotan لهما التمثيل البياني نفسه $y = \sec x$ و $y = \tan x$ على التوالي. تحقق من صحة إجابتك بالتمثيل البياني.

62. **الكتابة في الرياضيات** دالة مثلثية متضائلة تتردد بين التمثيل البياني الموجب والسالب لعامل التضاؤل. اشرح سبب تذبذب الدالة المثلثية المتضائلة بين التمثيل البياني الموجب والسالب لعامل التضاؤل، ولماذا تتوقف سعة الدالة على عامل التضاؤل. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3**

إجابات إضافية

37. 0.427 و 2.715
38. −0.905 و 0.905
39. −2.880 و −1.833، 0.262، و1.309
40. −1.571 و 0، و1.571
41. −2.356 و 0.785
42. −2.050 و 0.830

196 | الدرس 3-5 | التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 196 12/15/2016 11:41:16 PM

مراجعة شاملة

حدد السعة والفترة والتكرار والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم ارسم فترتين للدالة. 63–65. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

63. $y = 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 10$

64. $y = 2\cos\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) - 6$

65. $y = \frac{1}{2}\cos(4x - \pi) + 1$

أوجد القيم الدقيقة للخمس دوال المثلثية المتبقية لـ θ.

66. $\sin\theta = \frac{4}{5}, \cos\theta > 0$

67. $\cos\theta = \frac{6\sqrt{37}}{37}, \sin\theta > 0$

68. $\tan\theta = \frac{24}{7}, \sin\theta > 0$

66. $\cos\theta = \frac{3}{5}, \tan\theta = \frac{4}{3}, \csc\theta = \frac{5}{4}, \sec\theta = \frac{5}{3}, \cot\theta = \frac{3}{4}$

67. $\sin\theta = \frac{\sqrt{37}}{37}, \tan\theta = \frac{1}{6}, \csc\theta = \sqrt{37}, \sec\theta = \frac{\sqrt{37}}{6}, \cot\theta = 6$

$\sin\theta = \frac{24}{25}, \cos\theta = \frac{7}{25}, \csc\theta = \frac{25}{24}, \sec\theta = \frac{25}{7}, \cot\theta = \frac{7}{24}$

69. **مجتمع إحصائي** بلغ عدد سكان المدينة منذ 10 سنين 45,600. ومنذ ذلك الوقت، ازدادت الإحصائيات بمعدل ثابت كل سنة. فإذا كانت الإحصائيات حاليًا 64,800، فأوجد معدل النمو السنوي لهذه المدينة. قرابة 3.6%

70. **الطب:** عمر النصف للمادة المشعة هو الزمن الذي تستغرقه نصف ذرات المادة لتتفكك. واستخدم علماء الطب النووي نظير اليود I-131 بفترة عمر نصف 8 أيام للتحقق من وظيفة الغدة الدرقية للمريض. وبعد تناول عقار يحتوي على اليود و النظائر المجمعة في الغدة الدرقية للمريض وتثبيت كاميرا خاصة لرؤية وظيفتها. بفرض أن المريض تناول العقار الذي يحتوي على 9 مِكْرُوكُورِي من I-131. قرّب لأقرب ساعة المدة التي يستغرقها المكروكوري حتى يصل بمقدار 2.8 فقط في الغدة الدرقية للمريض؟ 324 ساعة

حلل كل معادلة كثيرة الحدود بالكامل باستخدام العامل المُعطى والقسمة المطولة.

71. $x^3 + 2x^2 - x - 2;\ x - 1$ $\quad(x+1)(x+2)(x-1)$

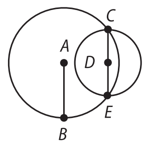
72. $x^3 + x^2 - 16x - 16;\ x + 4$ $\quad(x-4)(x+1)(x+4)$

73. $x^3 - x^2 - 10x - 8;\ x + 1$ $\quad(x-4)(x+2)(x+1)$

74. **التمرين:** تنصح الجامعة الأمريكية للطب الرياضي بممارسة البالغين الأصحاء التمرينات على مستوى الهدف من 60٪ إلى 90٪ من المعدلات القصوى لضربات قلوبهم. ويمكنك تقدير أقصى معدل لضربات قلبك عن طريق طرح عمرك من 220. اكتب عبارة بها أكثر من متباينة لتمثل عمر a ومعدل ضربات القلب المستهدفة r. $0.6(220 - a) \le r \le 0.9(220 - a)$

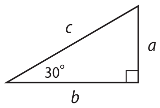
مراجعة مهارات للاختبارات المعيارية

75. **SAT/ACT** في الشكل، A وD مركزي الدائرتين، ويتقاطعان في النقاط C و CE هو قطر الدائرة D. إذا كان $AB = CE = 10$، فماذا تكون AD؟ C



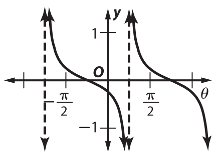
A 5 | B $5\sqrt{2}$ | C $5\sqrt{3}$ | D $10\sqrt{2}$ | E $10\sqrt{3}$

76. **مراجعة** بالنظر إلى الشكل التالي. إذا كان $c = 14$، فأوجد قيمة b. J



F $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | G $14\sqrt{3}$ | H 7 | J $7\sqrt{3}$

77. أي معادلة ممثلة بالتمثيل البياني؟ B



A $y = \cot\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

B $y = \cot\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

C $y = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

D $y = \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

78. **مراجعة** إذا كان $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ و $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$، ثم $\theta = ?$ G

F $\frac{13\pi}{12}$ | G $\frac{7\pi}{6}$ | H $\frac{5\pi}{4}$ | J $\frac{4\pi}{3}$

التدريس المتمايز BL

التوسّع يدرس علماء فيزياء الجسيمات خصائص الجسيمات دون الذرية من خلال تسريع الجزيئات في مسرِّع بسرعات عالية للغاية. لنفترض أن عالمة فيزياء ترغب في وصف السلوك غير المعتاد لجسيم وهو يتحرك. وفي الوقت الذي كانت تحدده بشكل اعتباطي على أنه 0، كان الجسيم على مسافة $y = 1$ ملليمتر، ثم يغطي مسافة كبيرة ويختفي بينما يتحرك من $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. هل هناك دالة مثلثية يمكنها تمثيل هذا السلوك؟ إن كان الأمر كذلك، فمثِّلها بيانيًا.

نعم؛ الإجابة النموذجية: $y = \sec t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$؛ راجع الرسومات البيانية للطلاب.

انتبه!

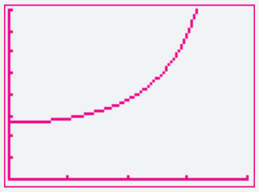
تحليل الخطأ في التمرين 60. ينبغي على الطلاب ملاحظة أنه ليس لأي دالة إزاحة أفقية. وبالتالي، فإن حقيقة أن التمثيل البياني لا يمر من خلال نقطة الأصل تعني أنه لا يمكن أن يكون دالة ظل الزاوية.

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب قبل أن يغادر الطلاب، اعرض بطاقة مكتوبًا عليها واحدة من دوال الدرس. واطلب من الطلاب تعريف الدالة.

إجابات إضافية

43c.



[0, 180°] scl: 45° by [0, 8000] scl: 1000

43d. الحبل: ≈12.9 m؛ الشد: ≈3769.7 N

52. $y = \sec\frac{2x}{3} + 2$، $y = \sec\left(-\frac{2x}{3}\right) + 2$

53. $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$، $y = \tan\left(-2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

54. $y = \csc(8x + 8\pi)$، $y = \csc(-8x + 8\pi)$

55. $y = \cot\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + 4$، $y = \cot\left(-\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + 4$

56. $y = \csc(6x + 3\pi) - 3$، $y = \csc(-6x + 3\pi) - 3$

58. خطأ؛ الإجابة النموذجية: نظرًا لأن $y = \sec x$ لها قيمة قصوى ±1، و $y = a + b\sec x$ لها قيمة قصوى $a + b(1)$ أو $a + b$ و $a + b(-1)$ أو $a - b$.

59. صواب، الإجابة النموذجية: نظرًا لأن $y = \csc x$ أو $\frac{1}{\sin x}$، فإن الخطوط المقاربة ستحدث للقيم x عندما يكون $\sin x = 0$. نظرًا لأن $y = \cot x$ أو $\frac{\cos x}{\sin x}$، فإن الخطوط المقاربة ستحدث للقيم x عندما يكون $\sin x = 0$. وبالتالي، فإن $x = \theta$ هي خط مقارب لكل من $y = \csc x$ و $y = \cot x$.

3-6 الدوال المثلثية العكسية

::السابق	::الحالي	::لماذا؟
• وجدت معكوسات العلاقات والدوال ومثّلتها بيانيًا.	1 إيجاد قيمة الدوال المثلثية العكسية وتمثّلها بيانيًا. 2 إيجاد تراكيب الدوال المثلثية.	• يمكن استخدام الدوال المثلثية العكسية في تمثيل زاوية الدوران المتغيرة الأفقية اللازمة لكاميرا تلفزيونية لمتابعة حركة سيارة سباق.

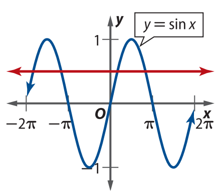
المفردات الجديدة

دالة قوس الجيب
arcsine function

دالة قوس جيب التمام
arccosine function

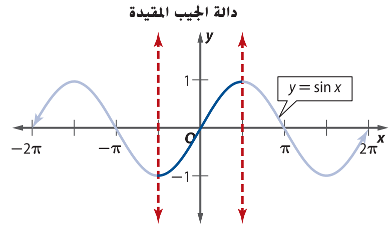
دالة قوس الظل
arctangent function

1 الدوال المثلثية العكسية من خلال الدرس 7-1، ستتعلم أن كل دالة لها دالة عكسية فقط إذا كانت *واحدًا إلى واحد*، بمعنى أن كل قيمة y في الدالة يمكن أن ترتبط بقيمة x واحدة فقط. وبما أن دالة الـ sin لا تحقق اختبار المستقيم الأفقي، فهي ليست واحدًا إلى واحد.

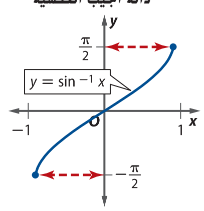


ولكن إذا قيدنا مجال دالة الـ sin في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$، فإن الدالة المقيدة تكون واحدًا إلى واحد، وتأخذ كل قيم المدى المحتملة [1 ,1-] للدالة غير المقيدة. في هذا المجال المقيد، $y = \sin x$ لها دالة عكسية تسمى *دالة الـ sin العكسية* $y = \sin^{-1} x$. ويكون التمثيل البياني للدالة $y = \sin^{-1} x$ هو معكوس تمثيل الدالة الـ sin المقيدة على الخط $y = x$.

دالة الجيب المقيدة



دالة الجيب العكسية



لاحظ أن مجال الدالة يكون $y = \sin^{-1} x$ هو [1 ,1-]، والمدى يكون $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. ولأن الزوايا والأقواس الموجودة في دائرة الوحدة لها قياسات مكافئة بالراديان، فأحيانًا يشار إلى دالة الـ sin العكسية **بدالة قوس الجيب** $y = \arcsin x$.

في الدرس 1-3، استخدمتَ العلاقة العكسية بين دالة الـ sin وبين دوال $\sin^{-1}$ لإيجاد قياس الزاوية الحادة. ومن التمثيل البياني بالأعلى، يمكنك أن ترى بشكل عام،

$y = \sin^{-1} x$ أو $y = \arcsin x$ إذا وفقط إذا كان $\sin y = x$، عندما يكون $-1 \le x \le 1$ و $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. **إذا وفقط إذا كان تعني أنه شرط ضروري وكافٍ.**

هذا يعني أن $\sin^{-1} x$ أو $\arcsin x$ يمكن تفسيره على أنه *الزاوية (أو القوس)* بين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ $\sin x$. مثلاً $\sin^{-1} 0.5$ هو الزاوية التي قيمة الـ sine لها يساوي 0.5.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 6-3 أوجِد معكوسات العلاقات والدوال ومثّلها بيانيًا.

الدرس 6-3 أوجد قيمة الدوال المثلثية العكسية ومثّلها بيانيًا.

أوجد تراكيب الدوال المثلثية.

بعد الدرس 6-3 أوجد حل المعادلات المثلثية.

2 التدريس

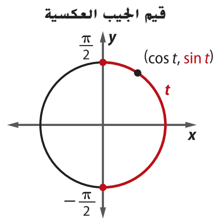
أسئلة داعمة

هل قرأ الطلاب قسم **لماذا؟** من الدرس.

اسأل:

- ما المقصود بمعكوس الدالة؟ الإجابة النموذجية: f و g دالتان عكسيتان إذا كان $f(g(x)) = x$ و $g(f(x)) = x$.
- هل يمكن أن يكون القاطع معكوس دالة الـ Cosine؟ لِمَ أو لِمَ لا؟ لا. $\cos x\left(\frac{1}{\cos x}\right) = 1$. إذا كانت الدالتان معكوستين، لكان سينطبق ذلك على جميع قيم x بأن يكون $\cos(\sec x) = \sec(\cos x) = x$. ولكن هذا لا ينطبق.

تذكّر أن $\sin t$ هي الإحداثي y لتلك النقطة على دائرة الوحدة التي تتوافق مع الزاوية أو طول القوس t. لأن مدى دالة الـ $\sin^{-1}$ مقيد بـ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ فإن قياسات الزاوية المحتملة لدالة الـ $\sin^{-1}$ تقع في النصف الأيمن من دائرة الوحدة كما هو موضح.

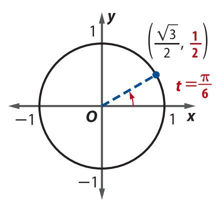


ويمكنك الاستعانة بدائرة الوحدة في إيجاد القيمة الدقيقة لبعض التعبيرات التي تتضمن $\sin^{-1} x$ أو $\arcsin x$.

مثال 1 إيجاد قيم دوال الـ $\sin^{-1}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

a. $\sin^{-1} \frac{1}{2}$



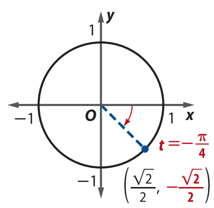
أوجد نقطة على دائرة الوحدة تقع في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

بإحداثي y يساوي $\frac{1}{2}$. عندما تكون $t = \frac{\pi}{6}$، $\sin t = \frac{1}{2}$.

من ثم تكون $\sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

التحقق إذا كان $\sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$، إذًا $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ✓

b. $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



أوجد نقطة على دائرة الوحدة تقع في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

بإحداثي y يساوي $\frac{\sqrt{2}}{2}$. عندما يكون $t = -\frac{\pi}{4}$، $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

من ثم يكون $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

التحقق إذا كان $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$، إذًا $\sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓

c. $\sin^{-1} 3$

نظرًا لأن مجال الدالة $\sin^{-1}$ هو $[-1, 1]$ و $3 > 1$. فلا توجد زاوية sine بقيمة 3. ومن ثم، فإن قيمة $\sin^{-1} 3$ غير موجودة.

تمرين موجه

1A. $\arcsin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\frac{\pi}{3}$ **1B.** $\sin^{-1} (-2\pi)$ **1C.** $\arcsin (-1)$ $-\frac{\pi}{2}$

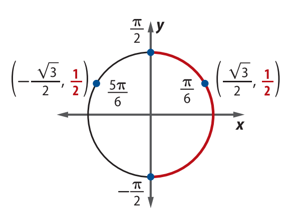
نصيحة تقنية

إيجاد قيمة $\sin^{-1}$ يمكنك أيضًا الاستعانة بحاسبة التمثيل البياني لإيجاد الزاوية التي قيمة sine لها $\frac{1}{2}$

```
sin⁻¹(0.5)
        .5235987756
π/6
        .5235987756
```

تأكد من اختيار RADIAN من MODE في حاسبتك البيانية.

لاحظ أنه في المثال 1a بينما $\frac{5\pi}{6}$ تساوي $\frac{1}{2}$، فإن $\sin \frac{5\pi}{6}$ ليست في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. من ثم، فإن $\sin^{-1} \frac{1}{2} \neq \frac{5\pi}{6}$.



- كيف يمكنك إعادة كتابة $y = \sin x$ لعزل x. قياس الزاوية؟ ماذا سيساوي x ؟ الإجابة النموذجية: $\sin^{-1} y = x$؛ x يساوي معكوس $y = \sin x$.
- بعض الدوال المثلثية لا تكون دوال واحد لواحد، وتكون لكل قيمة من قيم y قيمة واحدة مرتبطة من x. هل توجد أجزاء من التمثيل البياني لـ $y = \sin x$ تعد واحدًا لواحد؟ إن وُجدت، اذكر جزءًا واحدًا من التمثيل البياني يكون واحدًا لواحد. الإجابة النموذجية: نعم، من $-\frac{\pi}{2}$ إلى $\frac{\pi}{2}$

1 الدوال المثلثية العكسية

الأمثلة 1–3 توضّح كيفية تحديد قيم الدوال العكسية لـ Sine و لـ Cosine و الـ Tan **المثال 4** يوضّح كيفية تمثيل الدوال المثلثية العكسية بيانيًا. **المثال 5** يوضّح كيفية تطبيق الدوال المثلثية العكسية على موقف من الحياة اليومية.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير، إن وُجدت.

a. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\frac{\pi}{4}$

b. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $-\frac{\pi}{3}$

c. $\sin^{-1}(-2\pi)$ غير موجودة

إرشاد للمعلمين الجدد

المعكوسات لاحظ أن في المجالات المقيدة، يُحدد $\sin x$ في الربعين الأول والثالث، ويُحدد $\cos x$ في الربعين الأول والثاني، ويُحدد $\tan x$ في الربعين الأول والثالث.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

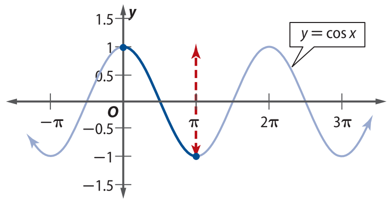
اللوحة البيضاء التفاعلية مثّل دالة جيب الزاوية بيانيًا على اللوحة البيضاء التفاعلية. ثم ارسم مستقيمًا أفقيًا يمر بمنحنى الدالة. اطلب من الطلاب توضيح السبب في أن دالة الـ Cosine ليست واحدًا لواحد بالنسبة لجميع قيم x. توجد أكثر من قيمة واحدة لـ x بالنسبة لكل قيمة من y. ثم اطلب منهم تحديد مجال تكون فيه الدالة واحدًا لواحد. الإجابة النموذجية: من $-\frac{\pi}{2}$ to $\frac{\pi}{2}$ وضّح كيف يسمح تقييد الدالة بتحديد معكوسها. كرر هذه العملية مع دوال الـ Cosine و الـ Tan.

نصيحة دراسية

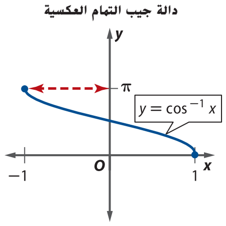
القيم الأساسية أحيانًا يشار إلى الدوال المثلثية التي لها مجالات مقيدة بحروف إنجليزية كبيرة. على سبيل المثال، $y = \text{Sin}\ x$ تمثل الدالة $y = \sin x$، بحيث تكون $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. وغالبًا ما يطلق على القيم في هذه المجالات المقيدة *القيم الأساسية*.

عندما يكون المجال مقيدًا على $[0, \pi]$، تكون دالة cosine واحدًا إلى واحد، وتأخذ كل قيم المدى المحتملة على $[-1, 1]$. وفي هذا المجال المقيد، يكون لدالة cosine دالة معكوسة يطلق عليها $y = \cos^{-1} x$ و **دالة قوس جيب التمام** $y = \arccos x$. والتمثيل البياني للدالة $y = \cos^{-1} x$ عبارة عن معكوس التمثيل البياني لدالة cosine المقيدة على الخط $y = x$.

دالة جيب التمام المقيدة

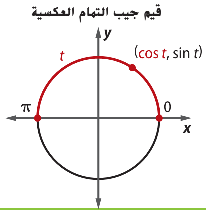


دالة جيب التمام العكسية



تذكر أن $\cos t$ هي الإحداثي x للنقطة على دائرة الوحدة التي تتوافق مع الزاوية أو طول القوس t. لأن مدى $y = \cos^{-1} x$ مقيد بـ $[0, \pi]$، تقع قيم دالة $\cos^{-1}$ في النصف العلوي من دائرة الوحدة.

قيم جيب التمام العكسية



مثال 2 إيجاد قيمة دوال $\cos^{-1}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

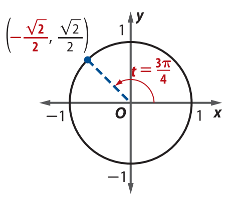
a. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

أوجد نقطة على دائرة في الفترة الفاصلة $[0, \pi]$ بإحداثي x يساوي $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

عندما تكون $t = \frac{3\pi}{4}$، $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

من ثم يكون $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

التحقق إذا كان $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$، إذًا $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. ✓



b. $\arccos(-2)$

بما أن مجال الدالة cosine هو $[-1, 1]$ و $-2 < -1$، فلا توجد زاوية cosine بقيمة -2. لذا، فإن قيمة (-2) غير موجودة.

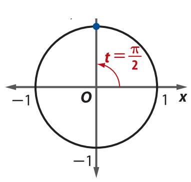
c. $\cos^{-1} 0$

أوجد نقطة على دائرة الوحدة في الفترة الفاصلة $[0, \pi]$ بإحداثي x يساوي 0.

عندما تكون $t = \frac{\pi}{2}$، $\cos t = 0$.

من ثم يكون $\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$.

التحقق إذا كان $\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$، إذًا $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. ✓



تمرين موجه

2A. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\frac{5\pi}{6}$ **2B.** arccos 2.5 **2C.** $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\frac{2\pi}{3}$

إرشاد للمعلمين الجدد

المعكوسات ذكّر الطلاب بأن التمثيل البياني للدالة ومعكوسها متماثلان بالنسبة إلى المستقيم $y = x$.

مثال إضافي

2 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير، إن وُجدت.

a. $\cos^{-1} 1$ 0

b. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\frac{5\pi}{6}$

c. $\cos^{-1}(-2)$ غير موجودة

التركيز على محتوى الرياضيات

تمثيل الدوال المثلثية العكسية بيانيًا لكي تكون الدوال المثلثية العكسية واحدًا لواحد، يجب أن تشتمل على مجالات مقيدة. في حين يوجد عدد لا نهائي من الفواصل المحتملة، فإنه تم اختيار الفواصل المعيارية (المتمركزة عند 0 أو المتخذة 0 نقطة النهاية لها).

التمثيل البياني لكل معكوس دالة هو انعكاس للتمثيل البياني للدالة المقيدة في المستقيم $y = x$.

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون بالطريقة السمعية/الموسيقية اطلب من الطلاب إعداد تسجيل صوتي يوضّح كيفية تحديد $\sin x$، و$\cos x$، و$\tan x$ مع اعتبار وجود دوال عكسية لها. اطلب من الطلاب تحديد مجال الدالة المقيدة ومداها ومجال الدالة العكسية ومداها.

مثال إضافي

3 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير، إن وُجدت.

a. $\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\frac{\pi}{6}$

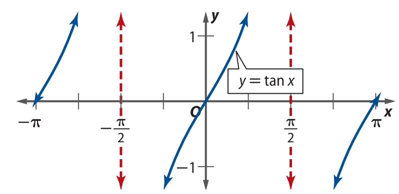
b. $\arctan 1$ $\frac{\pi}{4}$

عندما تكون مقيدة بمجال $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$، تكون دالة ظل الزاوية واحدًا إلى واحد. وفي هذا المجال المقيد، يكون لدالة قوس الظل دالة عكسية تسمى *دالة معكوس ظل الزاوية* $y = \tan^{-1} x$ أو **دالة قوس الظل** $y = \arctan x$. التمثيل البياني $y = \tan^{-1} x$ يمكن إيجاده عن طريق انعكاس التمثيل البياني لدالة ظل الزاوية على الخط $y = x$. لاحظ أنه على عكس دوال sine وcosine، فإن مجال $\tan^{-1}$ الزاوية هو $(-\infty, \infty)$.

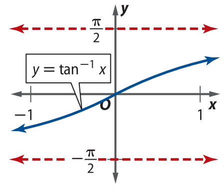
نصيحة دراسية

السلوك الطرفي لمعكوس ظل الزاوية لاحظ أنه عند انعكاس التمثيل البياني لدالة ظل الزاوية المقيدة على الخط $y = x$، تصير خطوط المقاربة الرأسية $x = \pm\frac{\pi}{2}$ خطوط المقاربة الأفقية $y = \pm\frac{\pi}{2}$ لدالة $\tan^{-1}$ الزاوية. من ثم تكون $\lim_{x\to-\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$ و $\lim_{x\to\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$.

دالة ظل الزاوية المقيدة



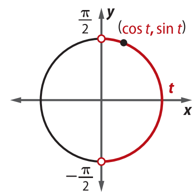
دالة معكوس ظل الزاوية



يمكنك أيضًا الاستعانة بدائرة الوحدة لإيجاد قيمة تعبير معكوس ظل الزاوية.

وفي دائرة الوحدة، تكون $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ أو $\frac{y}{x}$، وستقع قيم $y = \tan^{-1} x$ في النصف الأيمن من دائرة الوحدة. ولا تشمل $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$؛ لأن دالة ظل الزاوية غير محددة على تلك النقاط.

قيم معكوس ظل الزاوية



مثال 3 إيجاد قيمة دوال معكوس ظل الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

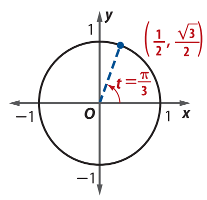
a. $\tan^{-1}\sqrt{3}$

أوجد نقطة (x, y) على دائرة الوحدة في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

بحيث يكون $\frac{y}{x} = \sqrt{3}$. عندما تكون $t = \frac{\pi}{3}$، $\tan t = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$

أو $\sqrt{3}$. من ثم تكون $\tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

التحقق إذا كان $\tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$، إذًا $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. ✓



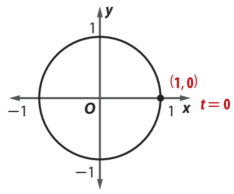
b. arctan 0

أوجد نقطة (x, y) على دائرة الوحدة في الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

بحيث يكون $\frac{y}{x} = 0$. عندما تكون $t = 0$، $\tan t = \frac{0}{1}$ أو 0.

من ثم يكون $\arctan 0 = 0$.

التحقق إذا كان $\arctan 0 = 0$، إذًا $\tan 0 = 0$. ✓



نصيحة تقنية

إيجاد قيمة $\tan^{-1}$ يمكنك أيضًا استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد الزاوية التي ظل زاويتها $\sqrt{3}$.

```
tan⁻¹(√(3))
        1.047197551
π/3
        1.047197551
```

تأكد من اختيار RADIAN من MODE في حاسبتك البيانية.

تمرين موجه

3A. $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $-\frac{\pi}{6}$

3B. $\tan^{-1}(-1)$ $-\frac{\pi}{4}$

في حين أن الدوال العكسية لـ ____ Sec, Csc, Cot موجودة بالفعل. فإنها نادرة الاستخدام في العمليات الحسابية؛ لوجود دوال معكوسة لمقلوبها. علاوة على عدم وضوح كيفية تقرير حصر مجالات كل من Sec, Csc, Cot للحصول على Sec^{-1} الزاوية و Csc^{-1} و Cot^{-1}. ستكتشف هذه الدوال في التمرين 66.

وفيما يلي تلخيص الدوال المثلثية العكسية الأكثر شيوعًا.

المفهوم الأساسي الدوال المثلثية العكسية

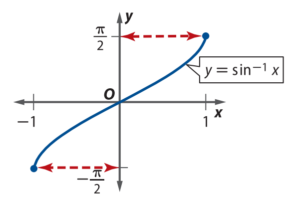
معكوس $\sin x$

الشرح الزاوية (أو القوس) بين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ بقيمة $\sin x$.

الرموز $y = \sin^{-1} x$ إذا كان فقط $\sin y = x$ بالنسبة لـ $-1 \le x \le 1$ و $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.

المجال: $[-1, 1]$

المدى: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



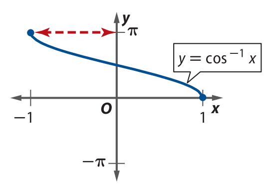
معكوس $\cos x$

الشرح الزاوية (أو القوس) بين 0 و π بقيمة $\cos x$.

الرموز $y = \cos^{-1} x$ إذا كان فقط $\cos y = x$ بالنسبة لـ $-1 \le x \le 1$ و $0 \le y \le \pi$.

المجال: $[-1, 1]$

المدى: $[0, \pi]$



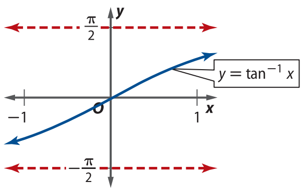
معكوس $\tan x$

الشرح الزاوية (أو القوس) بين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ بقيمة $\tan x$.

الرموز $y = \tan^{-1} x$ إذا كان فقط $\tan y = x$ بالنسبة لـ $-\infty < x < \infty$ و $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

المجال: $(-\infty, \infty)$

المدى: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



يمكنك تمثيل الدوال المثلثية العكسية الموجودة بالأعلى بيانيًا عن طريق إعادة كتابتها بالصيغة $\sin y = x$، $\cos y = x$، أو $\tan y = x$. وتعيين قيم y. ثم إنشاء جدول للقيم. ثم تحديد النقاط وتوصيلها بمنحنى منتظم.

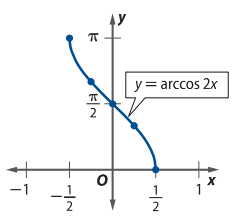
مثال 4 رسم التمثيلات البيانية للدوال المثلثية العكسية

مثّل بيانيًا $y = \arccos 2x$.

حسب التعريف، $y = \arccos 2x$ و $\cos y = 2x$ متساويين عند $0 \le y \le \pi$؛ لذا فالتمثيل البياني لكليهما واحد. أعد كتابة $\cos y = 2x$ حيث $x = \frac{1}{2}\cos y$ وعيّن قيم y في الفترة $[0, \pi]$ لإنشاء جدول القيم.

y	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$x = \frac{1}{2}\cos y$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{1}{2}$

ثم حدد النقاط (x, y) وصِلها بمنحنى منتظم. لاحظ أن لهذا المنحنى نقاط نهاية عند $\left(-\frac{1}{2}, \pi\right)$ و $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. تشير إلى أن التمثيل البياني بأكمله $y = \arccos 2x$ موضّح.



تمرين موجه

مثّل كل دالة بيانيًا. 4A–B. انظر الحاشية.

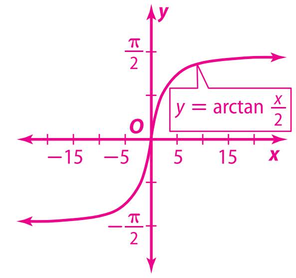
4A. $y = \arcsin 3x$ **4B.** $y = \tan^{-1} 2x$

انتبه!

تذكر أن $\pi = 3.14$ radians أو 180°.

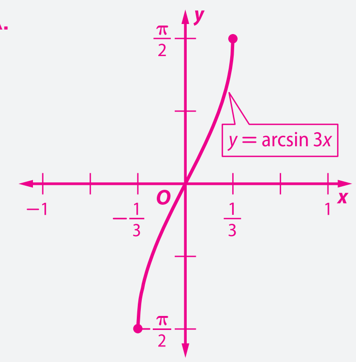
مثال إضافي

4 مثّل بيانيًا $y = \arctan \frac{x}{2}$.

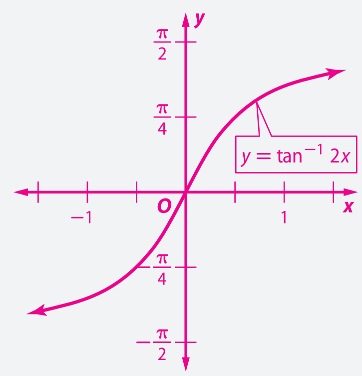


إجابات إضافية (تمرين موجه)

4A.



4B.



202 | الدرس 3-6 | الدوال المثلثية العكسية

مثال إضافي

5 السينما توجد في السينما شاشة طولها 32 قدمًا على ارتفاع 8 أقدام من الأرض.

a. اكتب دالة تمثل زاوية الرؤية θ لشخص في السينما مستوى عينيه عند الجلوس هو 6 أقدام فوق مستوى الأرض.
$\theta = \tan^{-1}\frac{34}{d} - \tan^{-1}\frac{2}{d}$

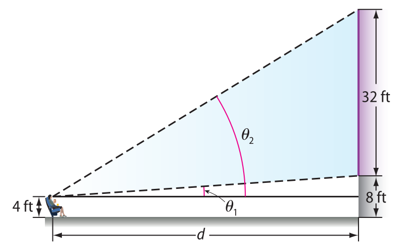
b. حدد المسافة التي تتوافق مع أقصى زاوية رؤية.
حوالي 8.2 ft

مثال 5 من الحياة اليومية استخدام الدالة المثلثية العكسية

الأفلام في صالة السينما، تتغير زاوية رؤية المشاهد لمشاهدة الفيلم؛ بناءً على المكان الذي يجلس فيه في السينما.

a. اكتب دالة تمثل زاوية الرؤية θ لشخص في السينما مستوى عينيه عند الجلوس هو 4 أقدام فوق مستوى الأرض.

اصنع رسمًا تخطيطيًا لإيجاد زاوية الرؤية.
افترض أن θ_1 تمثل الزاوية التي تتشكل من مستوى العين إلى أسفل الشاشة، ثم افترض أن θ_2 تمثل الزاوية التي تتشكل من مستوى العين إلى أعلى الشاشة.



بذلك، تكون زاوية الرؤية هي $\theta = \theta_2 - \theta_1$. يمكنك استخدام دالة ظل الزاوية لإيجاد قيمة θ_1 و θ_2. وبما أن مستوى عين المشاهد في أثناء جلوسه هو 4 أقدام فوق مستوى الأرض. إذًا فالمسافة المقابلة لـ θ_1 هي 4 – 8 أقدام أو 4 أقدام.

$\tan \theta_1 = \frac{4}{d}$ adj = d و opp = 4

$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{4}{d}$ دالة $\tan^{-1}$ الزاوية

المسافة المقابلة لـ θ_2 هي (32 + 8) - 4 أقدام أو 36 قدمًا.

$\tan \theta_2 = \frac{36}{d}$ adj = d و opp = 36

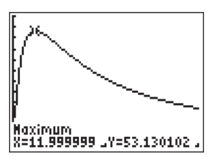
$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{36}{d}$ دالة $\tan^{-1}$ الزاوية

لذا، يمكن تمثيل زاوية الرؤية بالدالة $\theta = \tan^{-1}\frac{36}{d} - \tan^{-1}\frac{4}{d}$.

b. حدد المسافة التي تتوافق مع أقصى زاوية رؤية.

مسافة أقصى زاوية رؤية هي أقصى نقطة في التمثيل البياني. يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لإيجاد هذه النقطة.

ومن خلال التمثيل البياني، ترى أن أقصى زاوية رؤية تحدث تقريبًا عند مسافة 12 قدمًا من الشاشة.



[0, 100] scl: 10 by [0, 60] scl: 5

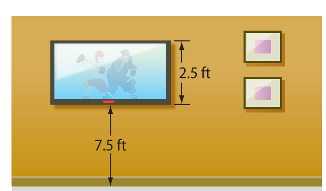
الربط بالحياة اليومية

في أواخر القرن 19، بدأ توماس إديسون في العمل على اختراع جهاز لتسجيل الصور المتحركة يسمى الكينيتوسكوب، صار فيما بعد عارض الأفلام. وكانت أول صورة متحركة محفوظة الحقوق فيلمًا لأحد موظفي إديسون وهو يعطس.

المصدر: مكتبة الكونغرس

تمرين موجه

5. التلفاز اشترى أحمد شاشة تلفاز مسطحة جديدة. حتى تتمكن أسرته من مشاهدته، قرّر تعليق التلفاز على الحائط كما هو موضح.



A. اكتب دالة تمثل المسافة d التي تقع فيها أقصى زاوية رؤية θ لأحمد إذا كان مستوى عينه في أثناء الجلوس يبعد 3 أقدام عن مستوى سطح الأرض.
$\theta = \tan^{-1}\frac{7}{d} - \tan^{-1}\frac{4.5}{d}$

B. حدد المسافة التي تتوافق مع أقصى زاوية رؤية. 5.6 ft

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 تراكيب الدوال المثلثية

تعلمت في الدرس 1-7 أنه إذا كانت x في مجال $f(x)$ و $f^{-1}(x)$، إذًا

$$f[f^{-1}(x)] = x \quad \text{و} \quad f^{-1}[f(x)] = x.$$

وبما أن مجالات الدوال المثلثية مقيدة للحصول على الدوال المثلثية العكسية، فإن الخواص لا تنطبق على قيم x.

على سبيل المثال، عندما يكون $\sin x$ محددة لجميع قيم x، يكون مجال $\sin^{-1} x$ هو [-1, 1]. ومن ثم، $\sin(\sin^{-1} x) = x$ لا يكون صحيحًا إلا عندما يكون $-1 \leq x \leq 1$. وينطبق قيد مختلف على التركيب $\sin^{-1}(\sin x)$. نظرًا لأن $\sin x$ مقيد بالفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$، $\sin^{-1}(\sin x) = x$ يكون صحيحًا فقط عندما يكون $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

وفيما يلي تلخيص لقيود هذا المجال.

المفهوم الأساسي مجال تراكيب الدوال المثلثية

$f[f^{-1}(x)] = x$	$f^{-1}[f(x)] = x$
إذا كان $-1 \leq x \leq 1$، يكون $\sin(\sin^{-1} x) = x$.	إذا كان $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$، يكون $\sin^{-1}(\sin x) = x$.
إذا كان $-1 \leq x \leq 1$، يكون $\cos(\cos^{-1} x) = x$.	إذا كان $0 \leq x \leq \pi$، يكون $\cos^{-1}(\cos x) = x$.
إذا كان $-\infty < x < \infty$، يكون $\tan(\tan^{-1} x) = x$.	إذا كان $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$، يكون $\tan^{-1}(\tan x) = x$.

مثال 6 استخدام خصائص الدوال المثلثية العكسية

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

a. $\sin\left[\sin^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$

تطبق خواص الدوال المثلثية العكسية لأن $-\frac{1}{4}$ تقع في الفترة $[-1, 1]$.

ومن ثم، فإن $\sin\left[\sin^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)\right] = -\frac{1}{4}$.

b. $\arctan\left(\tan\frac{\pi}{2}\right)$

وبما أن $\tan x$ غير محددة عندما يكون $x = \frac{\pi}{2}$، فإن $\arctan\left(\tan\frac{\pi}{2}\right)$ غير موجودة.

c. $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

لاحظ أن الزاوية $\frac{7\pi}{4}$ لا تقع في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. ومع ذلك، $\frac{7\pi}{4}$ مشتركة في ضلع الانتهاء مع $\frac{7\pi}{4} - 2\pi$ أو $-\frac{\pi}{4}$، والتي تقع في الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \arcsin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad \sin\frac{7\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{4} \qquad \text{بما أن } -\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}\text{، فإن } \arcsin(\sin x) = x.$$

ومن ثم، فإن $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

انتبه!

التراكيب والمعكوسات عند حساب $f^{-1}[f(x)]$ بالدوال المثلثية، يبدو المجال $(-\infty, \infty)$. ومع ذلك، نظرًا إلى أن مدى الدوال العكسية مقيد، فأحيانًا يجب إيجاد الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء.

تمرين موجه

6A. $\tan\left(\tan^{-1}\frac{\pi}{3}\right)$ $\frac{\pi}{3}$

6B. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)$ $\frac{3\pi}{4}$

6C. $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ $\frac{\pi}{3}$

2 تراكيب الدوال المثلثية

المثال 6 يوضّح كيفية إيجاد القيمة الدقيقة للتعبير المثلثي باستخدام الخصائص المثلثية العكسية. **المثالان 7 و 8** يوضّحان كيفية إيجاد قيمة تراكيب الدوال المثلثية.

مثال إضافي

6 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير، إن وُجدت.

a. $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$ $\frac{1}{2}$

b. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{2}\right)$ $\frac{\pi}{2}$

c. $\arctan\left[\tan\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\right]$

غير موجودة

التركيز على محتوى الرياضيات

تراكيب الدوال نظرًا لأن الدوال المثلثية العكسية تُحدد فقط على الفاصل، بدلاً من تعريفها بالقيم، فإن تراكيب الدوال المشتملة على دوال مثلثية عكسية قد تكون موجودة أو غير موجودة حسب قيمة x.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indb 204 12/15/2016 11:41:30 PM

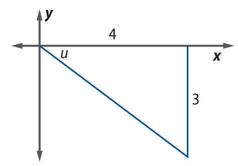
يمكنك أيضًا إيجاد قيمة التركيب الذي يحتوي على دالتين مثلثتين معكوستين مختلفتين.

مثال 7 إيجاد قيمة تراكيب الدوال المثلثية

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\left[\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$.

لتحويل التعبير إلى أبسط صورة، افترض أن $u = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)$. ومن ثم تكون $\tan u = -\frac{3}{4}$.

وبما أن دالة ظل الزاوية سلبية في الربع الثاني و الرابع، ومجال دالة معكوس ظل الزاوية مقيد في الربع الأول والرابع، يجب أن تكون u في الربع الرابع.



باستخدام مبرهنة فيثاغورس، ستجد أن طول الوتر هو 5. والآن، عليك حل المسألة لإيجاد $\cos u$.

$$\cos u = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$ دالة cosine

$$= \frac{4}{5}$$ hyp = 5 و adj = 4

ومن ثم، فإن $\cos\left[\tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)\right] = \frac{4}{5}$.

تمرين موجه

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

7A. $\cos^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$ $\frac{\pi}{6}$

7B. $\sin\left(\arctan\frac{5}{12}\right)$ $\frac{5}{13}$

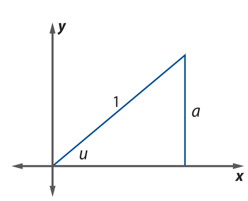
أحيانًا يقلّ التركيب الذي يحتوي على الدالتين المثلثتين المختلفتين إلى تعبير جبري لا يحتوي على أي تعابير مثلثية.

مثال 8 إيجاد قيمة تراكيب الدوال المثلثية

اكتب $\tan(\arcsin a)$ في صورة تعبير جبري لـ a لا يحتوي على دوال مثلثية.

افترض أن $u = \arcsin a$. ومن ثم يكون $\sin u = a$.

ولأن مجال دالة arcsine مقيد بالربع الأول والرابع، لا بد أن تقع u في الربع الأول أو الرابع. ويكون الحل مماثلاً في كل ربع؛ لذا سنحسن الربع الأول.



من نظرية فيثاغورس، تجد أن طول الضلع المجاور لـ u هو $\sqrt{1-a^2}$. والآن، عليك حل $\tan u$.

$$\tan u = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$ دالة tan

$$= \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{a\sqrt{1-a^2}}{1-a^2}$$ $\text{adj} = \sqrt{1-a^2}$ و $\text{opp} = a$

ومن ثم، فإن $\tan(\arcsin a) = \frac{a\sqrt{1-a^2}}{1-a^2}$.

تمرين موجه

اكتب كل تعبير في صورة تعبير جبري لـ x لا يحتوي على دوال مثلثية.

8A. $\sin(\arccos x)$ $\sqrt{1-x^2}$

8B. $\cot[\sin^{-1} x]$ $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

نصيحة دراسية

تحليل الدوال الجبرية يمكن عكس التقنية المستخدمة لتحويل التعابير المثلثية إلى تعابير جبرية. تحليل الدالة الجبرية كتركيب من دالتين مثلثتين هو تقنية تستخدم كثيرًا في حساب التفاضل والتكامل.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

أمثلة إضافية

7 أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\left(\cos^{-1}\frac{4}{5}\right)$ $\frac{3}{5}$

8 اكتب $\cot(\arccos x)$ في صورة تعبير جبري بدلالة x بحيث لا يشتمل على أي دوال مثلثية. $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$

المتابعة

لقد استكشف الطلاب الدوال المثلثية ومعكوساتها.

اسأل:

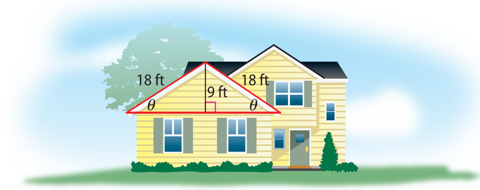
- ما وجه المقارنة بين الدالة المثلثية العكسية والدالة العكسية الجبرية؟ الإجابة النموذجية: كما هو الحال مع المعكوس الجبري، الدالة المثلثية العكسية تلغي عمل الدالة المثلثية، ويكون تمثيلها البياني انعكاسًا لتمثيل الدالة في المستقيم $y = x$. ويجب أن يكون المجال مقيدًا لاعتبارها دالة.

تمارين

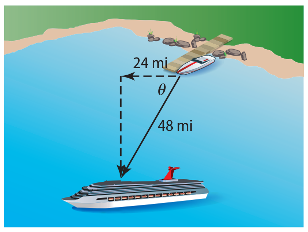
أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي، إن وُجدت. (الأمثلة 1-3)

1. $\sin^{-1} 0$ 0
2. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\pi}{3}$
3. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\pi}{4}$
4. $\sin^{-1} \frac{1}{2}$ $\frac{\pi}{6}$
5. $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $-\frac{\pi}{4}$
6. $\arccos 0$ $\frac{\pi}{2}$
7. $\cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\pi}{4}$
8. $\arccos(-1)$ π
9. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\pi}{6}$
10. $\cos^{-1} \frac{1}{2}$ $\frac{\pi}{3}$
11. $\arctan 1$ $\frac{\pi}{4}$
12. $\arctan(-\sqrt{3})$ $-\frac{\pi}{3}$
13. $\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\frac{\pi}{6}$
14. $\tan^{-1} 0$ 0

15. **الهندسة المعمارية** داعم سطح على شكل مثلثين قائمين كما هو موضح أدناه. أوجد قيمة θ. (المثال 3) $\frac{\pi}{6}$



16. **الإنقاذ** أبحرت سفينة سياحية غربًا بمقدار 24 ميلاً قبل الاتجاه نحو الجنوب. وعندما لم تستطع السفينة المتابعة، طلب طاقم السفينة المساعدة لاسلكيًا. ووجد قارب الإنقاذ أن أسرع طريق يبلغ طوله 48 ميلاً. أوجد الزاوية θ التي يجب أن يأخذها قارب الإنقاذ لمساعدة السفينة السياحية. (المثال 3) **انظر الهامش.**

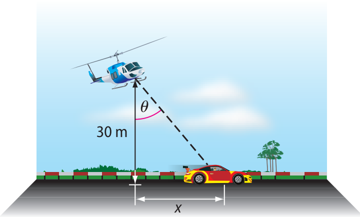


17–26. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

مثّل كل دالة بيانيًا. (المثال 4)

17. $y = \arcsin x$
18. $y = \sin^{-1} 2x$
19. $y = \sin^{-1}(x + 3)$
20. $y = \arcsin x - 3$
21. $y = \arccos x$
22. $y = \cos^{-1} 3x$
23. $y = \arctan x$
24. $y = \tan^{-1} 3x$
25. $y = \tan^{-1}(x + 1)$
26. $y = \arctan x - 1$

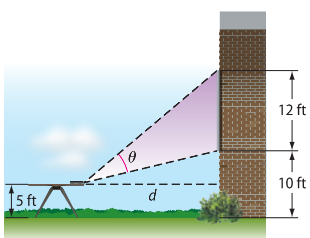
27. **سباق السيارات** تُصوِّر كاميرا تليفزيونية سباق سيارات. وتدور الكاميرات مع حركة السيارات أمامها. وتبعد الكاميرا عن حلقة السباق مسافة 30 مترًا. أوجد قيمة θ و x كما هو موضح في الشكل. (المثال 5)



a. اكتب θ كدالة لـ x. $\theta = \arctan \frac{x}{30}$

b. أوجد θ عندما تكون أمتار $x = 6$ ومترًا $x = 14$. **11.3°, 25.0°**

28. **الرياضة** يريد سالم وراشد عرض لعبة كرة القدم للمحترفين بجانب مبنى سكنهما. فوضعا عارض الأفلام على طاولة يبلغ طولها 5 أقدام. ثم ثبّتا شاشة طولها 12 قدمًا ترتفع عن الأرض بمقدار 10 أقدام. (المثال 5)



a. اكتب دالة تعبّر عن θ من حيث المسافة d.

b. استخدم حاسبة التمثيل البياني في تحديد مسافة أقصى زاوية عرض. **9.2 ft تقريبًا**

a. $\theta = \tan^{-1}\frac{17}{d} - \tan^{-1}\frac{5}{d}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي، إن وُجدت. (المثالان 6 و7)

29. $\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)$ $\frac{3}{4}$
30. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$ $\frac{\pi}{2}$
31. $\cos\left(\cos^{-1}\frac{2}{9}\right)$ $\frac{2}{9}$
32. $\cos^{-1}(\cos \pi)$ π
33. $\tan\left(\tan^{-1}\frac{\pi}{4}\right)$ $\frac{\pi}{4}$
34. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)$ $\frac{\pi}{3}$
35. $\cos(\tan^{-1} 1)$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
36. $\sin^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)$ 0
37. $\sin\left(2\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 1
38. $\sin(\tan^{-1} 1 - \sin^{-1} 1)$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
39. $\cos(\tan^{-1} 1 - \sin^{-1} 1)$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
40. $\cos\left(\cos^{-1} 0 + \sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$ $-\frac{1}{2}$

3 تمرين

التقويم التكويني

استخدم تمارين 1-48 للتحقق من عملية الفهم.

استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع راجع الترميز المثلثي العكسي وأكد على أن -1 في $\sin^{-1}x$ و $\cos^{-1}x$، و $\tan^{-1}x$ تعني $\arcsin x$، و$\arccos x$، و $\arctan x$. وليس $\frac{1}{\sin x} = \csc x$، و لا $\frac{1}{\cos x} = \sec x$، أو $\frac{1}{\tan x} = \cot x$.

تحليل الخطأ بالنسبة للتمرين 66. يختلط الأمر على أحمد بين معكوس الدالة والمتطابق العكسي للدالة. أكد على أن $\tan^{-1}x \neq \frac{1}{\tan x}$ ؛ بدلاً من $(\tan x)^{-1} = \frac{1}{\tan x} = \cot x$.
ينطبق منطق مشابه لهذا على الـ Sine و الـ Cosine.

إجابات إضافية

16. $\frac{\pi}{3}$ أو $60°$ جنوبية غربية

41. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

42. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$

49. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مُزاحًا بمقدار وحدة واحدة إلى اليمين ووحدتين لأسفل.

50. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مُوسعًا أفقيًا ومُزاحًا بمقدار 3 وحدات لأسفل.

51. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مُوسعًا رأسيًا ومُزاحًا بمقدار 6 وحدات لأسفل.

52. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مُزاحًا بمقدار وحدتين إلى اليسار ومضغوطًا رأسيًا.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-48, 66, 68-87	1-47 فردي 84-87 .	2-48 زوجي, 66, 68-83
OL ضمن المستوى	1-61 فردي, 62, 63-67, 68-87	1-48, 84-87	49-66, 68-83
BL أعلى من المستوى	49-87		

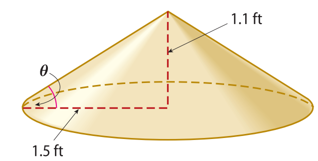
اكتب كل تعبير مثلثي في صورة تعبير جبري لـ x. (المثال 8) **41–42.** انظر الهامش.

41. $\tan(\arccos x)$
42. $\csc(\cos^{-1} x)$
43. $\sin(\cos^{-1} x)$ $\sqrt{1-x^2}$
44. $\cos(\arcsin x)$ $\sqrt{1-x^2}$
45. $\csc(\sin^{-1} x)$ $\frac{1}{x}$
46. $\sec(\arcsin x)$ $\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$
47. $\cot(\arccos x)$ $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$
48. $\cot(\arcsin x)$ $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

صف كيفية ربط التمثيلات $f(x)$ و $g(x)$ البيانية. **49–54** انظر الهامش.

49. $f(x) = \sin^{-1} x$ و $g(x) = \sin^{-1}(x-1) - 2$
50. $f(x) = \arctan x$ و $g(x) = \arctan 0.5x - 3$
51. $f(x) = \cos^{-1} x$ و $g(x) = 3(\cos^{-1} x - 2)$
52. $f(x) = \arcsin x$ و $g(x) = \frac{1}{2}\arcsin(x+2)$
53. $f(x) = \arccos x$ و $g(x) = 5 + \arccos 2x$
54. $f(x) = \tan^{-1} x$ و $g(x) = \tan^{-1} 3x - 4$

55. **الرمال** عند تراكم الرمال، تشكلت زاوية بين الكومة والأرض، وبقيت ثابتة إلى حد ما. ويطلق على هذه الزاوية زاوية السكون. وبافتراض أن امرأة صنعت كومة من الرمال على الشاطئ يبلغ قطرها 3 أقدام وارتفاعها 1.1 قدم.



a. ما قيمة زاوية السكون؟ **تقريبًا 36°**

b. إذا ظلت زاوية السكون ثابتة، فكمْ يبلغ القطر الذي تحتاج إليه الكومة لتصل إلى الارتفاع 4 أقدام؟ **تقريبًا 11 ft**

56–61. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

حدد المجال والمدى لكل دالة تركيب. ومن ثم، استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيلها بيانيًا.

56. $y = \cos(\tan^{-1} x)$
57. $y = \sin(\cos^{-1} x)$
58. $y = \arctan(\sin x)$
59. $y = \sin^{-1}(\cos x)$
60. $y = \cos(\arcsin x)$
61. $y = \tan(\arccos x)$

62. **المعكوسات** تمثل دالة Sec^{-1} بيانيًا بتقييد مجال دالة Sec التي تقع في الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ و $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. وتمثل دالة Csc^{-1} عن طريق تحديد مجال دالة Csc للفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ و $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a. حدد المجال والمدى لكل دالة.

b. مثّل كل دالة بيانيًا.

c. اشرح لماذا يعد تقييد المجال لدوال Sec, Csc ضروريًا في التمثيل البياني للدوال العكسية.

اكتب كل تعبير جبري كدالة مثلثية للدالة المثلثية العكسية x.

63. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ **$\tan(\sin^{-1} x)$ أو $\cot(\cos^{-1} x)$**

64. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ **$\tan(\cos^{-1} x)$ أو $\cot(\sin^{-1} x)$**

65. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف التمثيلات البيانية لتركيبات الدوال المثلثية. **a–g.** انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

a. **تحليليًا** افترض أن $f(x) = \sin x$ و $f^{-1}(x) = \arcsin x$. صف مجال ومدى $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$.

b. **بيانيًا** صمّم جدولاً من القيم العديدة لكل دالة تركيب في الفترة $[-2, 2]$. ثم استخدم الجدول لرسم التمثيلات البيانية لـ $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$. استخدم حاسبة التمثيل البياني للتحقق من تمثيلاتك البيانية.

c. **تحليليًا** افترض أن $g(x) = \cos x$ و $g^{-1}(x) = \arccos x$. صف مجال ومدى $g \circ g^{-1}$ و $g^{-1} \circ g$ وخمن كيف سيبدو شكل التمثيلات البيانية لـ $g \circ g^{-1}$ و $g^{-1} \circ g$. اشرح استنتاجك.

d. **بيانيًا** ارسم التمثيلات البيانية لـ $g \circ g^{-1}$ و $g^{-1} \circ g$. استخدم حاسبة التمثيل البياني للتحقق من تمثيلاتك البيانية.

e. **كلاميًا** خمن شكل التمثيلات البيانية للتركيبين المحتملين لدوال ظل الزاوية وقوس ظل الزاوية. اشرح استنتاجك. ثم تحقق من تخمينك باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

66. **تحليل الخطأ** يناقش أحمد وعلي الدوال المثلثية العكسية. بما أن $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ خمّن أحمد أن $\tan^{-1} x = \frac{\sin^{-1} x}{\cos^{-1} x}$. ولكن لم يوافقه علي الرأي. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

67. **تحدٍ** استخدم التمثيلات البيانية لـ $y = \sin^{-1} x$ و $y = \cos^{-1} x$ لإيجاد قيمة $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ في الفترة $[-1, 1]$. اشرح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

68. **التبرير** حدّد ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أم خاطئة: إذا كانت $\cos \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$، فإن $\cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\pi}{4}$. اشرح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

التبرير حدد ما إذا كانت كل دالة فردية أم زوجية أم لا فردية ولا زوجية. علل إجابتك. **69–71.** انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

69. $y = \sin^{-1} x$
70. $y = \cos^{-1} x$
71. $y = \tan^{-1} x$

72. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف يمكن لقيود دوال sine و cosine و tangent التحكم في المجال والمدى لدوالها العكسية. **انظر ملحق إجابات الوحدة 3.**

إجابات إضافية

53. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مضغوطًا أفقيًا ومُزاحًا بمقدار 5 وحدات لأعلى.

54. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مضغوطًا أفقيًا ومُزاحًا بمقدار 4 وحدات لأسفل.

66, 49-

مراجعة شاملة

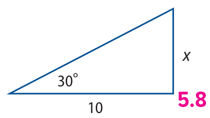
حدد الخطوط المقاربة الرأسية، ومثّل كل دالة بيانيًّا. 73–75. انظر الهامش.

73. $y = 3\tan\theta$ **74.** $y = \cot 5\theta$ **75.** $y = 3\csc \frac{1}{2}\theta$

76. **الأمواج** تطفو ورقة على سطح الماء، وتتحرك صعودًا وهبوطًا. والمسافة بين أعلى النقاط وأدناها 4 سنتيمترات. وتتحرك من النقطة العليا إلى النقطة الدنيا، ثم إلى النقطة العليا من جديد كل 10 ثوانٍ. اكتب الدالة التي تمثل حركة الورقة من حيث نقطة التوازن. $y = 2\cos\frac{\pi}{5}t$

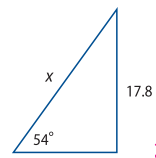
أوجد قيمة x. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

77.



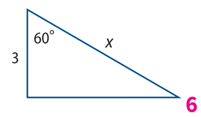
5.8

78.



22

79.



6

لكل زوج من الدوال، أوجد $[f\circ g](x)$، $[g\circ f](x)$، و$[f\circ g](4)$. 80–82. انظر الهامش.

80. $f(x) = x^2 + 3x - 6$, $g(x) = 4x + 1$

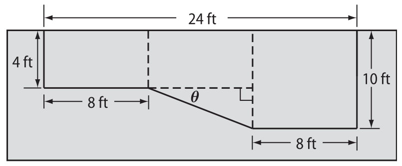
81. $f(x) = 6 - 5x$, $g(x) = \frac{1}{x}$

82. $f(x) = \sqrt{x+3}$, $g(x) = x^2 + 1$

83. **التعليم** أجاب طارق عن 11 سؤالاً من الاختبار اليومي القصير الذي يتكون من 20 سؤالاً بشكل صحيح. وقال له مدرب البيسبول الخاص به إنه يجب أن يرفع متوسط مستواه إلى 70% على الأقل إذا رغب في المشاركة في افتتاحية الموسم القادم. وتعهد طارق أن يدرس بجدٍّ، وأن يجيب عن جميع أسئلة الاختبار اليومي القصير بشكل صحيح في المستقبل. فكَم سؤالاً يجب عليه إجابته بشكل صحيح ليرفع متوسط مستواه إلى 70%؟ 10 أسئلة

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

84. **SAT/ACT** ما قيمة زاوية الانخفاض θ بين نهاية السطح ونهاية عمق حمام السباحة لأقرب درجة؟ B



رؤية جانبية لحمام السباحة

A 25° C 41° E 73°

B 37° D 53°

85. أي مما يلي يمثل القيمة الدقيقة $\sin\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$ H

F $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ H $\frac{\sqrt{5}}{5}$

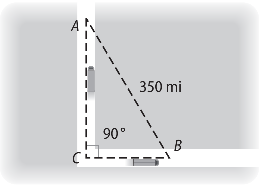
G $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ J $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

86. **مراجعة** يبلغ وتر المثلث القائم 67 بوصة. إذا كان قياس إحدى الزوايا 47°، فما طول أقصر ضلع في المثلث؟ A

A 45.7 in. C 62.5 in.

B 49.0 in. D 71.8 in.

87. **مراجعة** شاحنتان، A و B، بدأ سيرهما من التقاطع C لطريقين مستقيمين في الوقت نفسه. وكانت الشاحنة A تتحرك بضعف سرعة الشاحنة B. وبعد 4 ساعات، كان بُعد إحدى الشاحنتين عن الأخرى 350 ميلاً. أوجد تقريبًا سرعة الشاحنة B بالميل في كل ساعة. F



F 39 H 51

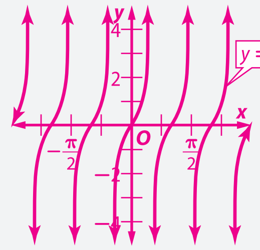
G 44 J 78

4 التقويم

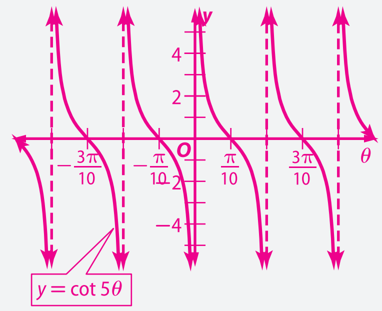
حصاد الأمس اطلب من الطلاب توضيح كيف ساعد الدرسان 4-3 و 5-3 حول تمثيل الدوال المثلثية، على إعدادهم لهذا الدرس عن تمثيل الدوال المثلثية العكسية.

إجابات إضافية

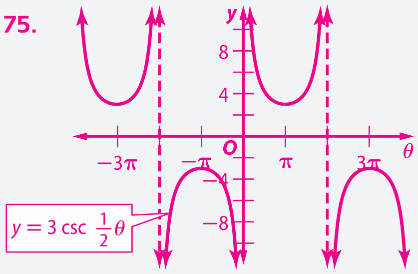
73.



74.



75.



80. $[f\circ g](x) = 16x^2 + 20x - 2$;
$[g\circ f](x) = 4x^2 + 12x - 23$;
$[f\circ g](4) = 334$

81. $[f\circ g](x) = 6 - \frac{5}{x}$;
$[g\circ f](x) = \frac{1}{6-5x}$;
$[f\circ g](4) = 4.75$

82. $[f\circ g](x) = \sqrt{x^2+4}$;
$[g\circ f](x) = x + 4$;
$[f\circ g](4) = \sqrt{20}$ أو $2\sqrt{5}$

التدريس المتمايز BL

الإثراء إذا علمت أن $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}$. فأثبت أن $\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$.

افترض أن $A = \arctan\frac{1}{3}$ و $B = \arctan\frac{1}{2}$.

عندها يكون، $\tan B = \frac{1}{2}$ و $\tan A = \frac{1}{3}$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

إذن، $\tan(A+B) = 1$

وهكذا فإن، $A + B = \arctan 1$ أو $\frac{\pi}{4}$ لذلك فإن، $\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 208 12/15/2016 11:41:39 PM

الدرس 3-7 قانون الـــــ Sine وقانون الـــــ Cosine

:: السابق
- تم حل المثلثات قائمة الزوايا باستخدام الدوال المثلثيّة.

:: الحالي
1. حل المثلثات المائلة؛ مستخدمًا قانون الـــ Sine و Cosine.
2. إيجاد مساحة المثلثات المائلة.

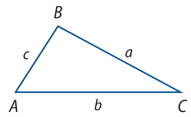
:: لماذا؟
- التثليث هو عملية إيجاد إحداثيات نقطة ما، والمسافة إلى تلك النقطة عن طريق حساب طول أحد أضلاع المثلث، مع توافر معطيات قياسات زوايا وأضلاع المثلث الذي شكلته تلك النقطة ونقطتان مرجعيتان أخريان معلومتان. ويمكن لمراقبي حالة الطقس استخدام التثليث لتحديد الأماكن التي ستضربها الأعاصير.

المفردات الجديدة
المثلث المائل oblique triangles
قانون الجيب Law of Sines
حالة مبهمة ambiguous case
قانون جيب التمام Law of Cosines
قاعدة هيرون Heron's Formula

1 حل المثلثات المائلة
في الدرس 3-1، استخدمت الدوال المثلثية لحل *المثلثات* قائمة الزوايا. في هذا الدرس، ستحل **المثلثات المائلة** — وهي مثلثات ليست قائمة الزوايا.

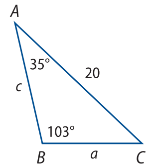
يمكنك تطبيق **قانون الـــ sin** لحل المثلث المائل إذا علمت قياس زاويتين وضلع غير محصور، أو زاويتين وضلع محصور، أو ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما.

المفهوم الأساسي قانون الجيب Law of Sines
إذا كانت أطوال أضلاع المثلث $\triangle ABC$ هي: a و b و c، وهي تمثل أطوال الأضلاع المقابلة للزوايا التي قياساتها: A و B و C، إذًا فإن، $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$



وستستنبط قانون الجيب Law of Sines في التمرين 69.

مثال 1 تطبيق قانون الجيب Law of Sines
حل $\triangle ABC$. قرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب رقم عشري وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



نظرًا لأن لدينا معطيات زاويتين، $C = 180° - (103° + 35°)$ أو $42°$.

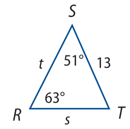
استخدم قانون الـــ sine لإيجاد قيمة كل من a و c.

$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	قانون الـــ Sine	$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$
$\frac{\sin 103°}{20} = \frac{\sin 42°}{c}$	بالتعويض	$\frac{\sin 103°}{20} = \frac{\sin 35°}{a}$
$c \sin 103° = 20 \sin 42°$	بالضرب.	$a \sin 103° = 20 \sin 35°$
$c = \frac{20 \sin 42°}{\sin 103°}$	بالقسمة.	$a = \frac{20 \sin 35°}{\sin 103°}$
$c \approx 13.7$	باستخدام حاسبة.	$a \approx 11.8$

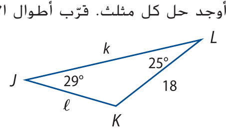
ومن ثمّ، $a \approx 11.8$ و $c \approx 13.7$ و $\angle C = 42°$.

تمرين موجه أوجد حل كل مثلث. قرّب أطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

1A.



1B.



1A. $T = 66°, t = 13.3, s = 11.3$
1B. $K = 126°, k = 30, \ell = 15.7$

التركيز 1
التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-7 حل المثلثات قائمة الزوايا باستخدام الدوال المثلثية.

الدرس 3-7 حل المثلثات المائلة باستخدام قانون الجيب أو قانون جيب التمام.
إيجاد مساحة المثلثات المائلة.

بعد الدرس 3-7 التحقق من المتطابقات المثلثية.

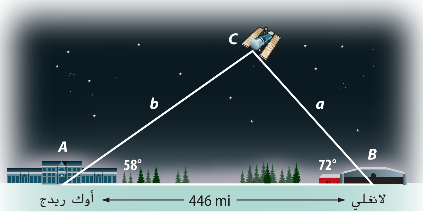
التدريس 2
أسئلة داعمة
اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:
- **ما الفرق بين المثلث قائم الزاوية والمثلث مائل الزاوية والمثلث حاد الزاوية؟** الإجابة النموذجية: المثلث قائم الزاوية يحتوي على زاوية قائمة. المثلث المائل هو أي مثلث ليس به زاوية قائمة. كل الزوايا في المثلث الحاد تكون أقل من 90°.

(يُتبع في الصفحة التالية)

مثال 2 من الحياة اليومية تطبيق قانون الـــ sine

الأقمار الصناعية يمر قمر صناعي يدور حول الأرض بين مختبر (أوك ريدج) في ولاية تينيسي ومركز أبحاث (لانغلي) في ولاية فيرجينيا، وتبلغ المسافة بينهما 446 ميلاً. فإذا كانت زاويتا ارتفاع القمر الصناعي عن منشأتي (أوك ريدج) و(لانغلي) هما 58° و 72° على الترتيب، فكم يبعد القمر الصناعي عن كل محطة منهما؟



نظرًا لأننا نمتلك معطيات زاويتين، فإن: $C = 180° - (58° + 72°)$ أو $50°$. استخدم قانون الـــ sine لإيجاد المسافة بين القمر الصناعي وبين كل محطة منهما.

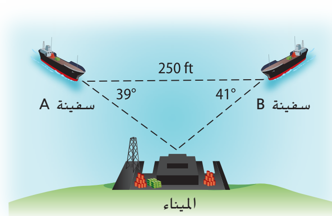
$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$	قانون الـــ Sine	$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b}$
$\frac{\sin 50°}{446} = \frac{\sin 58°}{a}$	بالتعويض	$\frac{\sin 50°}{446} = \frac{\sin 72°}{b}$
$a \sin 50° = 446 \sin 58°$	الضرب.	$b \sin 50° = 446 \sin 72°$
$a = \frac{446 \sin 58°}{\sin 50°}$	القسمة.	$b = \frac{446 \sin 72°}{\sin 50°}$
$a \approx 493.74$	باستخدام حاسبة.	$b \approx 553.72$

إذا، يبعد القمر الصناعي حوالي 554 ميلاً عن (أوك ريدج)، وحوالي 494 ميلاً عن (لانغلي).

تمرين موجه

2. **النقل البحري** سفينتان تبعد إحداهما عن الأخرى **250** قدمًا وتبحران في اتجاه الميناء نفسه كما هو مبين. أوجد المسافة بين الميناء وبين كل سفينة منهما على حدة.

السفينة A: 166.5 ft، والسفينة B: 159.8 ft

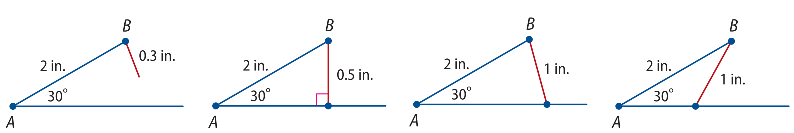


الربط بالحياة اليومية

لفهم أفضل للغلاف الجوي وتغيرات سطح الأرض وعمليات النظام البيئي، تستخدم وكالة ناسا مجموعة من الأقمار الصناعية كجزء من نظام رصد الأرض الخاص بها؛ بغرض دراسة الهواء والأرض والماء الموجود على الأرض.

المصدر: وكالة ناسا

تعلمت في علم الهندسة حقيقة أنه لا يُشكل قياس ضلعين وزاوية غير محصورة بالضرورة مثلثًا وحيدًا. لاحظ قياسات الزوايا والأضلاع المعطاة في الأشكال الموجودة أدناه.



نصيحة دراسية

تمثيلات بديلة يمكن كتابة قانون الـــ Sine بصيغة عكسية مثل:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

وبشكل عام، فإن معرفة قياس ضلعين وزاوية غير محصورة تعني صحة إحدى العبارات التالية: (1) لا يوجد مثلث، أو (2) يوجد مثلث واحد بالضبط، أو (3) يوجد مثلثان. بعبارة أخرى، عند حل مثلث مائل لهذه **الحالة المبهمة**، قد لا يوجد حل، أو يوجد حل واحد، أو حلان.

- لماذا لا يقوم مراقبو حالة الطقس الذين يقومون بتحديد الأعاصير باستخدام المثلثات قائمة الزاوية؟
الإجابة النموذجية: إن المواقع الموجودة في العالم الحقيقي لمراقبي حالة الطقس والأعاصير قد لا تؤدي إلى هندسة مثلث قائم الزاوية.
- لنفترض أن اثنتين من محطات رصد الزلازل تقومان بتسجيل زلزال. إذا كان يمكن لكل محطة تحديد المسافة من المحطة إلى الزلزال، فاشرح لماذا لا تكون المحطتان كافيتين لتحديد موقع الزلزال. هناك أكثر من نقطة واحدة تمثل المسافة الصحيحة من كلتا المحطتين.

1 حل المثلثات المائلة

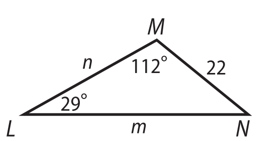
الأمثلة 1–4 توضح كيفية استخدام قانون الجيب لحل المثلثات المعروف فيها مجموعات مختلفة من الأضلاع والزوايا.
المثالان 5 و 6 يوضحان كيفية استخدام قانون الـــ Cosine لحل المثلثات.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 حل $\triangle LMN$. قرّب أطوال الأضلاع إلى أقرب رقم عشري وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة



$N = 39°, m \approx 42.1, n \approx 28.6$

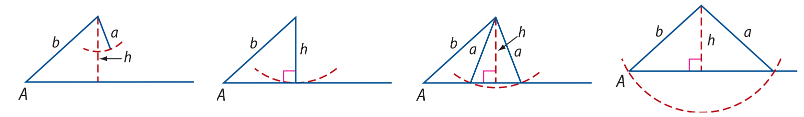
التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية ضع ثلاثة أشياء على الأرض بحيث تشكل رؤوس مثلث كبير. استخدم مسطرة ومنقلة لتحديد طول أحد الأضلاع واثنين من زوايا المثلث. حل المثلث باستخدام قانون الجيب. قم بقياس الأضلاع والزوايا الأخرى للتحقق من الحل. كرر هذا النشاط من خلال تشكيل مثلث مختلف وقياس زاوية واحدة واثنين من أضلاع المثلث.

المفهوم الأساسي الحالة المبهمة

افترض أن مثلثًا فيه a وb وA معلومة. في الحالة الحادة، تكون: $\sin A = \frac{h}{b}$, so $h = b \sin A$

A هي زاوية حادة. $(A < 90°)$



$a < b$ و $a < h$ لا يوجد حل	$a < b$ و $a = h$ حل واحد	$a < b$ و $a > h$ يوجد حلان	$a \geq b$ حل واحد

A هي زاوية قائمة أو منفرجة. $(A \geq 90°)$

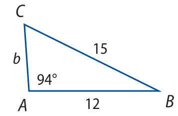
$a \leq b$، لا يوجد حل	$a > b$، يوجد حل واحد

لحل مثلث مائل ذي حالة مبهمة، أولاً حدّد عدد الحلول الممكنة. وإذا كان للمثلث حل واحد أو حلان، فاستخدم قانون الـــ Sine لإيجادهما.

مثال 3 الحالة المبهمة — يوجد حل واحد أو لا توجد حلول

أوجد جميع الحلول للمثلث المعطى، إن أمكن. إذا لم يوجد حل، فاكتب *لا يوجد حل*. قرّب أطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

a. $a = 15, c = 12, A = 94°$



لاحظ أن الزاوية A منفرجة، و$a > c$؛ لأن **15 > 12**. ومن ثم، لا يوجد حل. طبّق قانون الـــ Sine لإيجاد قيمة c.

$\frac{\sin C}{12} = \frac{\sin 94°}{15}$ — قانون الـــ Sine

$\sin C = \frac{12 \sin 94°}{15}$ — اضرب كل طرف في 12.

$C = \sin^{-1}\left(\frac{12 \sin 94°}{15}\right)$ أو حوالي **53°** — تعريف $\sin^{-1}$

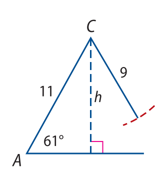
نظرًا لأن هناك الآن زاويتين معلومتين، فإن **$B \approx 180° - (94° + 53°)$** أو حوالي **33°**. طبّق قانون الـــ Sine لإيجاد قيمة b. اختر النسب ذات أقل القيم الحسابية لتحقيق دقة قصوى.

$\frac{\sin 94°}{15} \approx \frac{\sin 33°}{b}$ — قانون الـــ Sine

$b \approx \frac{15 \sin 33°}{\sin 94°}$ أو حوالي **8.2** — حل المسألة لإيجاد قيمة b.

ومن ثم، تكون قياسات المثلث $\triangle ABC$ المتبقية هي: **$B \approx 33°$** و **$C \approx 53°$** و **$b \approx 8.2$**.

b. $a = 9, b = 11, A = 61°$



لاحظ أن الزاوية A حادة، و $a < b$؛ لأن **9 < 11**. أوجد قيمة h.

$\sin 61° = \frac{h}{11}$ — تعريف sin

$h = 11 \sin 61°$ أو حوالي **9.6** — $h = b \sin A$

نظرًا لأن $a < h$، إذًا لا يوجد مثلث يمكن تشكيله من الأضلاع: **$a = 9$** و **$b = 11$** و **$A = 61°$**. إذًا لا يوجد حل لهذه المسألة.

تمرين موجه

حل واحد؛ $C = 90°$، $B = 60°$، $b \approx 22.5$

3A. $a = 12, b = 8, B = 61°$ **لا يوجد حل**

3B. $a = 13, c = 26, A = 30°$

نصيحة دراسية

ارسم رسمًا تصوُّريًا منطقيًا

عند حل المثلثات، يمكن للرسم التصوري المنطقي الدقيق أن يساعدك في معرفة ما إذا كانت إجابتك ممكنة. وفي رسمك، تحقق من أن الضلع الأطول مواجه للزاوية الكبرى، بينما الضلع الأقصر يواجه الزاوية الصغرى.

أمثلة إضافية

2 **ركوب المنطاد** يلاحظ أحد الأشخاص الذين يركبون في منطاد هواء ساخن أن زاوية الانخفاض تجاه مبنى على الأرض هي 8.65°. وبعد الارتفاع لمسافة 500 قدم، يلاحظ الشخص الآن أن زاوية الانخفاض هي 2.70°. فكم يبعد المنطاد عن المبنى؟ حوالي 2671.6 ft

3 أوجد جميع الحلول للمثلث المعطى، إن أمكن. إن لم يكن له حل، فاكتب *ليس هناك حل*. حوّل طول الجانب لأقرب عدد عشري، وحوّل قياس الزاوية إلى أقرب درجة.

a. $A = 63°$, $a = 18$, $b = 25$
لا يوجد حل

b. $A = 105°$, $a = 73$, $b = 55$
$B \approx 47°$, $C \approx 28°$, $c \approx 35.5$

إرشاد للمعلمين الجدد

الحلول المتعددة في المثالين 3 و 4، قد يجد بعض الطلاب أنه من المفيد رسم المثلثات لمساعدتهم على تصور عدد الحلول الممكن. وهناك طريقة أخرى لتحديد ما إذا كان هناك نوعان من الحلول، وهي إيجاد مجموع المكملة $\angle C$ وقياس $\angle A$. إذا كان المجموع أقل من 180°، فهناك حلّان.

التركيز على محتوى الرياضيات

قانون الـــ Sine وقانون الـــ Cosine

اعتمادًا على القيم المعروفة، يمكن استخدام قانون الـــ Sine وقانون الـــ Cosine لحل المثلث المائل. لاحظ أنه بينما يمكن الحصول على أكثر من إجابة واحدة ممكنة عند استخدام قانون الجيب، إلا أنه إذا وجد الحل عند استخدام قانون الـــ Cosine، فيكون الحل فريدًا من نوعه.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو اطلب من الطلاب تسجيل فيديو عن متى يتم تطبيق قانون الـــ Sine أو قانون الـــ Cosine. ينبغي على الطلاب قياس الزوايا والأضلاع المعروفة، ثم عرض كيفية استخدام كل قانون لحل المقاييس المتبقية من المثلث. يجب أن يوضح الفيديو تطبيق القانون والتحقق من النتيجة.

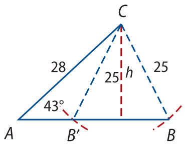
UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indb 211 12/15/2016 11:41:44 PM

مثال إضافي

4 أوجد مثلثين فيهما $A = 45°$، $a = 18$ و $c = 24$. حوّل طول الجانب لأقرب عدد عشري، وحوّل قياس الزاوية إلى أقرب درجة.
$B \approx 65°, C \approx 70°, b \approx 23.0,$
$B \approx 25°, C \approx 110°, b \approx 11.0$

مثال 4 الحالة المبهمة - حلان

أوجد مثلثين فيهما $A = 43°$ و $a = 25$ و $b = 28$. قرّب أطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

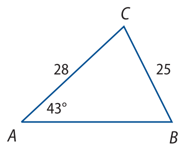


A هي زاوية حادة، و $h = 28 \sin 43°$ أو حوالي 19.1. لاحظ أن $a < b$ لأن $25 < 28$، و $a > h$ لأن $25 > 19.1$.
ومن ثم، ثمة مثلثان مختلفان يمكن إيجادهما باستخدام قياسات الزوايا والأضلاع المعطاة. وستكون الزاوية B زاوية حادة، بينما الزاوية B' ستكون منفرجة.

ارسم رسمًا تصوُّريًا منطقيًا لكل مثلث وطبّق قانون الـ Sine لإيجاد كل حل. ابدأ بالحالة التي تكون فيها الزاوية B زاوية حادة.

الحل 1 $\angle B$ حادة.

أوجد B.



$\frac{\sin B}{28} = \frac{\sin 43°}{25}$ قانون الـ Sine

$\sin B = \frac{28 \sin 43°}{25}$ حل المسألة لإيجاد قيمة $\sin B$.

$\sin B \approx 0.7638$ باستخدام حاسبة.

$B \approx \sin^{-1} 0.7638$ أو حوالي $50°$ تعريف $\sin^{-1}$

أوجد قيمة C.

$C \approx 180° - (43° + 50°) \approx 87°$

طبّق قانون الـ Sine لإيجاد c.

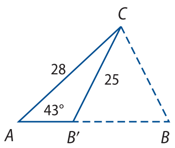
$\frac{\sin 87°}{c} \approx \frac{\sin 43°}{25}$ قانون الـ Sine

$c \approx \frac{25 \sin 87°}{\sin 43°}$ أو حوالي 36.6 حل المسألة لإيجاد قيمة c.

تلميح تقني

باستخدام $\sin^{-1}$ لاحظ أنه عند حساب $\sin^{-1}$ الخاص بأحد النسب، فإن الآلة الحاسبة لن تعرض أبدًا قياسين محتملين للزوايا؛ نظرًا لأن $\sin^{-1}$ تعد *دالة*. كذلك، لن تعرض الآلة الحاسبة أيضًا قياسًا منفرجًا للزاوية لـ $\sin^{-1}$؛ لأن دالة الـ Sine المعكوسة لها مدى يقدر بين $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ أو $-90°$ إلى $90°$.

الحل 2 $\angle B$ منفرجة.



لاحظ أن $m\angle CBB' \cong m\angle CB'B$. ولإيجاد قياس الزاوية B'، عليك إيجاد زاوية منفرجة الـ sines لها 0.7638 أيضًا. ولفعل ذلك، اطرح القياس المعطى على الآلة الحاسبة إلى أقرب درجة، $50°$ من $180°$. ومن ثم، تكون B' $180° - 50°$ أو $130°$ تقريبًا.

أوجِد قيمة C.

$C \approx 180° - (43° + 130°)$ أو $7°$

طبّق قانون الـ Sine لإيجاد c.

$\frac{\sin 7°}{c} \approx \frac{\sin 43°}{25}$ قانون الـ Sine

$c \approx \frac{25 \sin 7°}{\sin 43°}$ أو حوالي 36.6 حل المسألة لإيجاد c.

وتكون القياسات المجهولة للمثلث الحاد $\triangle ABC$ هي: $B \approx 50°$ و $C \approx 87°$ و $c \approx 36.6$، بينما القياسات المجهولة للمثلث المنفرج $\triangle AB'C$ هي: $B' \approx 130°$ و $C \approx 7°$ و $c \approx 4.5$.

تمرين موجه

أوجد مثلثين لهما القياسات المعطاة للزوايا وأطوال الأضلاع. قرّب أطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

4A. $A = 38°, a = 8, b = 10$

4B. $A = 65°, a = 55, b = 57$

4A. حلان؛ $B \approx 50°, C \approx 92°,$ و $c \approx 13.0$ $B \approx 130°,$ $C \approx 12°, c \approx 2.7$

4B. حلان؛ $B \approx 70°, C \approx 45°,$ و $c \approx 42.9$ $B \approx 110°, C \approx 5°,$ $c \approx 5.3$

212 | الدرس 3-7 | قانون الـ Sine وقانون الـ Cosine

مثال إضافي

5 تنسيق الحدائق يوجد رشاش عند كل رأس في حديقة مثلثية المساحة. إذا كانت أضلاع الحديقة $a = 19$ قدمًا، $b = 24.3$ قدمًا، و $c = 21.8$ قدمًا، فأي زاوية امتداد ينبغي وضع كل رشاش بها لتغطية المساحة؟
$A \approx 48°$, $B \approx 73°$, $C \approx 59°$

يمكنك استخدام **قانون الـ cosine** لحل مثلث مائل للحالتين المتبقيتين: عندما تُعطى لك قياسات الأضلاع الثلاث، أو قياس ضلعين والزاوية المحصورة بينهما.

نصيحة دراسية

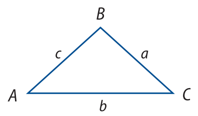
قانون الـ Cosine لاحظ أن الزاوية المشار إليها في كل معادلة من قانون الـ cosine تتوافق مع طول الضلع في الطرف الآخر من المعادلة.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

المفهوم الأساسي قانون جيب التمام Law of Cosines

في المثلث $\triangle ABC$، إذا كانت الأضلاع التي أطوالها a وb وc مواجهة لزوايا قياساتها A وB وC، على الترتيب، فإن الحل التالي يكون صحيحًا.

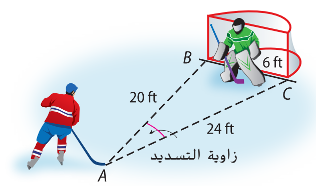
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



ستستنبط القاعدة الأولى لقانون جيب التمام Law of Cosines في التمرين 70.

مثال 5 من الحياة اليومية تطبيق قانون الـ cosine

الهوكي حين يحاول لاعب هوكي تسديد رمية ويكون على بعد 20 قدمًا من القائم الأيسر للمرمى وعلى بعد 24 قدمًا من القائم الأيمن، كما هو موضح. إذا كان الاتساع المعياري لمرمى الهوكي 6 أقدام، فما زاوية تسديد اللاعب مُقرَّبة لأقرب درجة؟



بما أن الأضلاع الثلاثة معلومة، يمكنك استخدام قانون الـ Sine لإيجاد زاوية تسديد اللاعب، التي يُرمَز لها بـ A.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	قانون الـ cosine
$6^2 = 24^2 + 20^2 - 2(24)(20) \cos A$	$a = 6$ و $b = 24$ و $c = 20$
$36 = 576 + 400 - 960 \cos A$	بسّط
$36 = 976 - 960 \cos A$	اجمع.
$-940 = -960 \cos A$	اطرح 976 من كل طرف من طرفي المعادلة.
$\frac{940}{960} = \cos A$	اقسم كل طرف من طرفي المعادلة على -960.
$\cos^{-1}\left(\frac{940}{960}\right) = A$	استخدم الدالة الخاصة بـ $\cos^{-1}$.
$11.7° \approx A$	باستخدام الحاسبة.

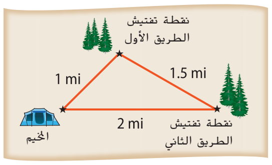
إذًا فزاوية تسديد اللاعب تساوي $12°$ تقريبًا.

نصيحة دراسية

تحقق من مدى صحة الحل نظرًا لأن المثلث قد يكون له زاوية منفرجة واحدة فقط على الأكثر، من المنطقي إيجاد قياس الزاوية الكبرى في المثلث أولاً، وهي تكون الزاوية المقابلة لأطول أضلاعه. فإذا كانت الزاوية الكبرى منفرجة، فإنك تعلم أنه لا بد أن تكون الزاويتان الأخيرتان حادتين. وإذا كانت الزاوية الكبرى حادة، فإنه لا بد أن تكون الزاويتان الأخيرتان حادتين.

تمرين موجه

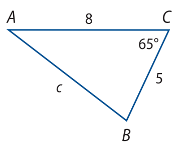
5. التجول سيرًا على الأقدام يقرر مجموعة من الأصدقاء المشاركين في رحلة تخييم أن يخرجوا للتجول سيرًا على الأقدام. وفقًا للخريطة الموضحة، ما الزاوية التي يشكلها الطريقان المؤديان إلى المخيم؟ **46.6°**



التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون أصحاب النمط اللفظي/اللغوي اطلب من الطلاب مناقشة كيفية حل المثلثات بمجموعات مختلفة من الأضلاع والزوايا المعروفة. وينبغي عليهم تحديد ما إذا لم يكن هناك أي حل أو ما إذا كان يمكن حل المثلث باستخدام حساب المثلثات قائمة الزاوية أو قانون الـ Sine أو قانون الـ Cosine.

مثال 6 تطبيق قانون الــ sine



حِل $\triangle ABC$. قرِّب أطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

الخطوة 1 استخدم قانون الــ cosine لإيجاد قياس الضلع المجهول.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	قانون الــ cosine
$c^2 = 5^2 + 8^2 - 2(5)(8) \cos 65°$	$a = 5$ و $b = 8$ و $C = 65°$
$c^2 \approx 55.19$	استخدم الحاسبة.
$c \approx 7.4$	خذ الجذر التربيعي الموجب لكل طرف من طرفي المعادلة.

الخطوة 2 استخدم قانون الــ sine لإيجاد قياس الزاوية المجهولة.

$\frac{\sin A}{5} = \frac{\sin 65°}{7.4}$	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$
$\sin A = \frac{5 \sin 65°}{7.4}$	اضرب كل طرف في 5.
$A \approx 38°$	تعريف $\sin^{-1}$

الخطوة 3 أوجد قياس الزاوية المتبقية.

$B \approx 180° - (65° + 38°)$ أو $77°$

وبالتالي، $c \approx 7.4$ و $A \approx 38°$ و $B \approx 77°$.

تمرين موجه

6. حِل المثلث $\triangle HJK$ إذا علمت أن $H = 34°$ و $j = 7$ و $k = 10$. $h \approx 5.7,\ J \approx 43°,\ K \approx 103°$

2 أوجد مساحات المثلثات المائلة

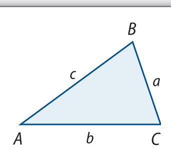
إذا علمتَ قياسات جميع الأضلاع الثلاث، يمكن استخدام قانون الــ cosine لإثبات **قاعدة هيرون** لمساحة المثلث.

المفهوم الأساسي قاعدة هيرون

إذا كانت قياسات أضلاع المثلث $\triangle ABC$ هي a و b و c، إذًا فستكون مساحة المثلث هي

المساحة $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$،

حيث $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

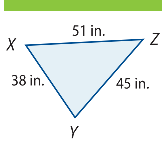


ستُثبت هذه القاعدة في الدرس 5-1

نصيحة دراسية

نصف المحيط يسمى القياس s المستخدم في قاعدة هيرون باسم نصف محيط المثلث.

مثال 7 قاعدة هيرون



أوجد مساحة المثلث $\triangle XYZ$.

وتكون قيمة s هي $\frac{1}{2}(45 + 51 + 38)$ أو 67.

المساحة $= \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$	قاعدة هيرون
$= \sqrt{67(67-45)(67-51)(67-38)}$	$s = 67$ و $x = 45$ و $y = 51$ و $z = 38$
$= \sqrt{683{,}936}$	بسّط
$\approx 827 \text{ in}^2$	استخدم الحاسبة.

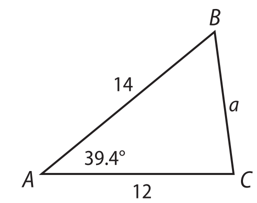
تمرين موجه

7A. $x = 24$ cm, $y = 53$ cm, $z = 39$ cm 432.8 cm^2

7B. $x = 61$ ft, $y = 70$ ft, $z = 88$ ft 2123.7 ft^2

مثال إضافي

6 حل $\triangle ABC$. حوّل طول الجانب لأقرب عد عشري، وحوّل قياس الزاوية إلى أقرب درجة.



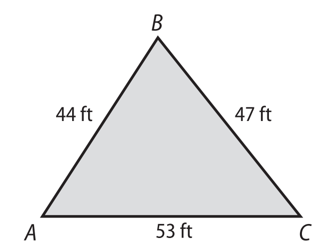
$a \approx 9.0,\ B \approx 58°,\ C \approx 83°$

2 أوجد مساحة المثلثات المائلة

مثال 7 يوضح كيفية إيجاد مساحة مثلث مائل باستخدام صيغة هيرون. **مثال 8** يوضح كيفية إيجاد مساحة مثلث محدد بضلعين وزاوية محصورة.

مثال إضافي

7 أوجد مساحة المثلث $\triangle ABC$ مُقرَّبة إلى أقرب عدد عشري.

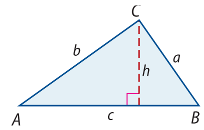


978.6 ft^2

التركيز على محتوى الرياضيات

صيغ المساحة هناك اثنتان من الصيغ لحساب مساحة المثلث عندما يكون الارتفاع غير معروف. إذا كانت جميع مقاييس الأضلاع الثلاثة معروفة، استخدم صيغة هيرون. عندما يكون الضلعان والزاوية المحصورة معروفين، تكون مساحة المثلث مساوية لنصف ناتج ضرب أطوال الضلعين وجيب الزاوية لزاويتها المحصورة.

في الحالة المبهمة الخاصة بقانون الـ sine، قارنت بين طول الضلع a وقيمة $h = b \sin A$.
في المثلث الموضّح، تمثل h طول ارتفاع الضلع c في $\triangle ABC$. يمكنك استخدام هذا التعبير لارتفاع المثلث لوضع قاعدة لمساحة المثلث.



$$\text{المساحة} = \frac{1}{2}ch$$ قاعدة مساحة المثلث

$$= \frac{1}{2}c(b \sin A)$$ عوّض عن h بـ $b \sin A$.

$$= \frac{1}{2}bc \sin A$$ بسّط

وبفرضية مشابهة، يمكنك وضع القواعد:

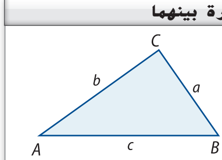
$$\text{المساحة} = \frac{1}{2}ab \sin C \quad \text{و} \quad \text{المساحة} = \frac{1}{2}ac \sin B$$

لاحظ أنه في كل قاعدة من هذه القواعد، تكون المعلومات المطلوبة لإيجاد مساحة المثلث هي قياسات ضلعين والزاوية المحصورة بينهما.

المفهوم الأساسي مساحة مثلث معلوم الضلعين والزاوية المحصورة بينهما

الكلمات مساحة المثلث هي نصف ناتج ضرب طولي ضلعين والـ sine الزاوية المحصورة بينهما.

الرموز
$\text{المساحة} = \frac{1}{2}bc \sin A$
$\text{المساحة} = \frac{1}{2}ac \sin B$
$\text{المساحة} = \frac{1}{2}ab \sin C$



نصيحة دراسية
مساحة مثلث منفرج الزاوية تسري هذه القاعدة على أي نوع من أنواع المثلث، بما فيها المثلثات منفرجة الزاوية. ستثبت هذا في الدرس 5-3

نظرًا لأن مساحة المثلث ثابتة، يمكن كتابة القواعد الواردة أعلاه في قاعدة واحدة.

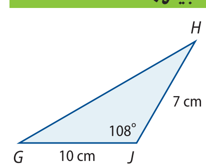
$$\text{المساحة} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B$$

وإذا كان قياس الزاوية المحصورة $90°$، فلاحظ أن كل قاعدة منها تتحول إلى صورة أبسط متمثلة في القاعدة الخاصة بمساحة المثلث قائم الزاوية، $\frac{1}{2}$ (القاعدة)(الارتفاع)؛ لأن $\sin 90° = 1$.

مثال 8 إيجاد مساحة مثلث معلوم الضلعين والزاوية المحصورة بينهما

أوجد مساحة المثلث $\triangle GHJ$ مُقرَّبة إلى أقرب جزء من عشرة.

في المثلث $\triangle GHJ$، نجد أن $g = 7$ و $h = 10$ و $J = 108°$.



$$\text{المساحة} = \frac{1}{2}gh \sin J$$ مساحة مثلث باستخدام قياسات طول ضلعين والزاوية المحصورة بينهما

$$= \frac{1}{2}(7)(10) \sin 108°$$ بالتعويض

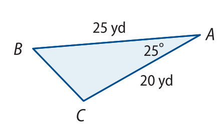
$$\approx 33.3$$ بسّط

إذًا، تبلغ المساحة حوالي 33.3 سنتيمتر مربع.

تمرين موجه

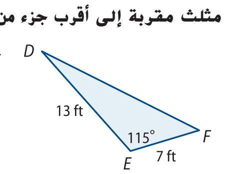
أوجد مساحة كل مثلث مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

8A.



$105.7\ yd^2$

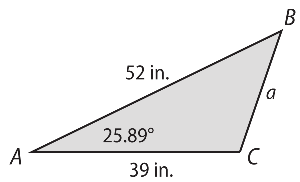
8B.



$41.2\ ft^2$

مثال إضافي

8 أوجد مساحة المثلث $\triangle ABC$ مُقرَّبة إلى أقرب عدد عشري.



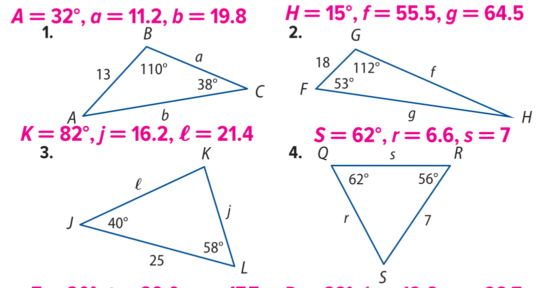
$442.8\ in^2$

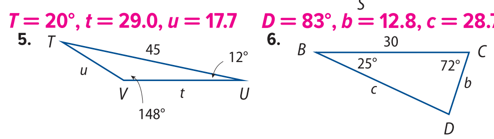
إرشاد للمعلمين الجدد

صيغ المساحة أكد على الطلاب أنه لا توجد حاجة إلى حفظ كل من معادلات المساحة الثلاث لمثلث الأضلاع والزاوية المحصورة. وبدلاً من ذلك، ينبغي على الطلاب تعلم الشكل العام لمعادلة المساحة، وهو المساحة تساوي نصف ناتج ضرب طولي الضلعين وجيب زاويتهم المحصورة.

تمارين

حِل كل مثلث. قرّب إلى أقرب جزء عشري إذا لزم الأمر. (المثالان 1 و 2)

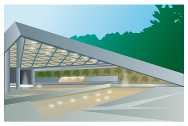




7. **الجولف** أخفق لاعب جولف في ضربته التي يبلغ مسارها 12 قدمًا بانحراف 3° عن المسار الصحيح. وتقع الحفرة الآن بزاوية قياسها 120° بين الكرة والنقطة التي كانت بها قبل تنفيذ الضربة. كم تبلغ المسافة التي يتعين على لاعب الجولف تحريك الكرة إليها من أجل تنفيذ الضربة؟ (المثالان 1 و 2) **نحو 0.85 ft.**

8. **الهندسة المعمارية** يريد عميل متعاقد مع مهندس معماري بناء منزل على طراز منزل (شيتس جولدشتاين)، الذي صممه المهندس المعماري جون لوتنر. وسيبلغ طول الفناء 60 قدمًا. وسيكون الضلع الأيسر من السطح على زاوية ارتفاع 49°، بينما الضلع الأيمن على زاوية ارتفاع 18°. حدد أطوال الضلعين الأيمن والأيسر للسطح، وكذلك زاوية التقائهما. (المثالان 1 و 2)

اليسار: حوالي 20.1 ft؛
اليمين: حوالي 49.2 ft، 113°



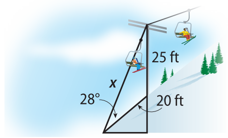
9. **السفر** انحرف طيار عن مساره الصحيح بمقدار 8° تفاديًا لعاصفة خلال قطعه للـــ 90 ميلاً الأولى من رحلته. ثم غيّر الطيار مساره ليتجه نحو مقصده بقية الرحلة؛ صانعًا زاوية قياسها 157° مع المسار الأول لرحلته. (المثالان 1 و 2)
   a. حدد المسافة الكلية المقطوعة خلال الرحلة. **حوالي 138.4 ميل**
   b. حدد مسافة الرحلة المباشرة إلى الوجهة المقصودة. **حوالي 135.9 ميل**

أوجد جميع الحلول للمثلث المعطى، إن أمكن. إذا لم يوجد حل، فاكتب *لا يوجد حل*. قرّب أطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (المثال 3)

10–17. انظر الحاشية.

10. $a = 9, b = 7, A = 108°$
11. $a = 14, b = 15, A = 117°$
12. $a = 18, b = 12, A = 27°$
13. $a = 35, b = 24, A = 92°$
14. $a = 14, b = 6, A = 145°$
15. $a = 19, b = 38, A = 30°$
16. $a = 5, b = 6, A = 63°$
17. $a = 10, b = \sqrt{200}, A = 45°$

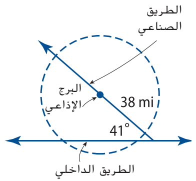
18. **التزلج** يرتفع مصعد التزلج بزاوية 28° في أثناء صعود أول 20 قدمًا من الجبل لتحقيق ارتفاع يبلغ 25 قدمًا، ويُحافظ على هذا الارتفاع خلال بقية رحلة صعود الجبل. حدد طول الكابل المطلوب لهذا الصعود الأولي. (المثال 3) **نحو 41 ft.**



أوجد مثلثين لهما القياسات المعطاة للزوايا وأطوال الأضلاع. قرّب أطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (المثال 4) **19–24. انظر الحاشية.**

19. $A = 39°, a = 12, b = 17$
20. $A = 26°, a = 5, b = 9$
21. $A = 61°, a = 14, b = 15$
22. $A = 47°, a = 25, b = 34$
23. $A = 54°, a = 31, b = 36$
24. $A = 18°, a = 8, b = 13$

25. **الإذاعة** برج إذاعي يقع على بعد 38 ميلاً من الطريق الصناعي ينقل بثًّا إذاعيًّا له مدى نصف قطره 30 ميلاً. ويتقاطع الطريق الصناعي مع الطريق الداخلي للمدينة بزاوية 41°. ما طول المسافة التي تستطيع السيارات السائرة على الطريق الداخلي للمدينة التقاط إشارة البث خلالها؟ (المثال 4) **33.4 mi**



26. **القوارب** يمكن رؤية الضوء الصادر عن منارة في دائرة نصف قطرها 18 ميلاً. وقد رسا قارب بحيث يمكنه بالكاد رؤية ضوء المنارة. بينما يقع قارب ثانٍ على بعد 25 ميلاً من المنارة ويتجه مباشرةً نحوها؛ صانعًا زاوية 44° مع المنارة ومع القارب الأول. أوجد المسافة بين القاربين حين يدخل القارب الثاني نصف قطر ضوء المنارة. (المثال 4) **18.3 mi**

حُـــــل كل مثلث. قرّب أطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة. (المثالان 5 و6) **27–34. انظر الحاشية.**

27. $\triangle ABC$، إذا كانت $A = 42°$ و $b = 12$ و $c = 19$
28. $\triangle XYZ$، إذا كانت $x = 5$ و $y = 18$ و $z = 14$
29. $\triangle PQR$، إذا كانت $P = 73°$ و $q = 7$ و $r = 15$
30. $\triangle JKL$، إذا كانت $J = 125°$ و $k = 24$ و $\ell = 33$
31. $\triangle RST$، إذا كانت $r = 35$ و $s = 22$ و $t = 25$
32. $\triangle FGH$، إذا كانت $f = 39$ و $g = 50$ و $h = 64$
33. $\triangle BCD$، إذا كانت $B = 16°$ و $c = 27$ و $d = 3$
34. $\triangle LMN$، إذا كانت $\ell = 12$ و $m = 4$ و $n = 9$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-51, 65-70, 72-89	1-51 فردي, 87-89	2-50 زوجي, 65-70, 72-86
OL ضمن المستوى	1-55 فردي, 56, 57, 59, 61-70, 72-89	1-51, 87-89	52-70, 72-86
BL أعلى من المستوى	52-89		

تمرين 3

التقويم التكويني

استخدم تمارين 1-51 للتحقق من عملية الفهم.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص واجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع في التمارين 10-17. يمكن للطلاب تجاهل الحلول الممكنة في المسألة ما إذا توفر حلان. ذكرهم بالتحقق من حلول متعددة عند توفر مقاييس اثنين من الأضلاع وزاوية حادة غير محصورة.

إجابات إضافية

10. $B = 48°, C = 24°, c = 3.9$
11. لا يوجد حل
12. $B = 18°, C = 135°, c = 27.8$
13. $B = 43°, C = 45°, c = 24.7$
14. $B = 14°, C = 21°, c = 8.7$
15. $B = 90°, C = 60°, c = 32.9$
16. لا يوجد حل
17. $B = 90°, C = 45°, c = 10$
19. $B = 63°, C = 78°, c = 18.7$ و $B = 117°, C = 24°, c = 7.8$
20. $B = 52°, C = 102°, c = 11.2$ و $B = 128°, C = 26°, c = 5.0$
21. $B = 70°, C = 49°, c = 12.2$ و $B = 110°, C = 9°, c = 2.5$
22. $B = 84°, C = 49°, c = 25.8$ و $B = 96°, C = 37°, c = 20.6$
23. $B = 70°, C = 56°, c = 31.8$ و $B = 110°, C = 16°, c = 10.6$
24. $B = 30°, C = 132°, c = 19.2$ و $B = 150°, C = 12°, c = 5.4$
27. $B = 39°, C = 99°, a = 12.9$
28. $X = 11°, Y = 137°, Z = 32°$
29. $Q = 27°, R = 80°, p = 14.6$
30. $K = 23°, L = 32°, j = 50.7$
31. $R = 96°, S = 39°, T = 45°$
32. $F = 38°, G = 52°, H = 90°$
33. $C = 162°, D = 2°, b = 24.1$
34. $L = 131°, M = 15°, N = 34°$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 216 12/15/2016 11:41:56 PM

35. **الطائرات** حلقت قائدة طائرة خلال ورديتها من كولومبوس إلى أتلانتا قاطعةً مسافة تبلغ 448 ميلاً، ثم توجهت إلى فينيكس قاطعةً مسافة تبلغ 1583 ميلاً. ومن فينيكس، عادت ثانية إلى كولومبوس قاطعةً مسافة تبلغ 1667 ميلاً. عيِّن قياسات زوايا المثلث الذي شكله مسار رحلة طيرانها. (المثالان 5 و 6) **15.6°؛ 71.5°؛ 92.9°**

36. **لعبة التقاط الكرة** تُدحرِج ليلى كرة على الأرض بزاوية 23° إلى يمين قطتها نميرة. فإذا كانت الكرة قد تدحرجت لمسافة كلية قدرها 48 قدمًا، بينما هي تقف على بعد 30 قدمًا، فما طول المسافة التي ستقطعها القطة نميرة حتى تصل إلى الكرة؟ (المثالان 5 و 6) **23.5 ft**

استخدم قاعدة هيرون لإيجاد مساحة كل مثلث. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة. (المثال 7)

37. $x = 9$ cm, $y = 11$ cm, $z = 16$ cm **47.6 cm^2**

38. $x = 29$ in., $y = 25$ in., $z = 27$ in. **312.2 in^2**

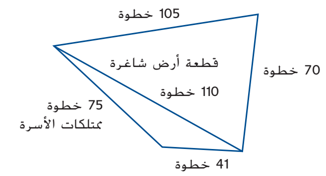
39. $x = 58$ ft, $y = 40$ ft, $z = 63$ ft **1133.0 ft^2**

40. $x = 37$ mm, $y = 10$ mm, $z = 34$ mm **167.6 mm^2**

41. $x = 8$ yd, $y = 15$ yd, $z = 8$ yd **20.9 yd^2**

42. $x = 133$ mi, $y = 82$ mi, $z = 77$ mi **2895.1 mi^2**

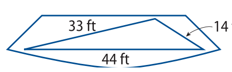
43. **تنسيق الحدائق** تريد عائلة فهد توسعة الفناء الخلفي لمنزلها من خلال شراء قطعة أرض خالية مجاورة لممتلكاتها. لتحديد قياس تقريبي لمساحة قطعة الأرض تلك، عَدّ فهد الخطوات اللازمة للسير حول حدود قطعة الأرض وقطرها. (المثال 7)



a. قدِّر مساحة قطعة الأرض بالخطوات. **4511.5 خطوة^2**

b. إذا كان فهد قد قدَّر طول خطوته بـ **1.8** قدم، فحدد مساحة قطعة الأرض بالقدم المربع. **14,617 ft^2**

44. **المسرح** خلال أحد العروض، ظل أحد الممثلين واقفًا داخل مساحة مثلثية على خشبة المسرح. (المثال 7)



a. عيّن مساحة خشبة المسرح المستخدمة في العرض. **163.9 ft^2**

b. إذا كانت مساحة خشبة المسرح تبلغ **250** قدمًا مربعًا، فحدد نسبة المساحة المستخدمة في الأداء. **66%**

أوجد مساحة كل مثلث مقربة إلى أقرب جزء من عشرة. (المثال 8)

45. $\triangle ABC$، إذا كانت $A = 98°$ و $b = 13$ mm و $c = 8$ mm **51.5 mm^2**

46. $\triangle JKL$، إذا كانت $L = 67°$ و $j = 11$ yd و $k = 24$ yd **121.5 yd^2**

47. $\triangle RST$، إذا كانت $R = 35°$ و $s = 42$ ft و $t = 26$ ft **313.2 ft^2**

48. $\triangle XYZ$، إذا كانت $Y = 124°$ و $x = 16$ m و $z = 18$ m **119.4 m^2**

49. $\triangle FGH$، إذا كانت $F = 41°$ و $g = 22$ in. و $h = 36$ in. **259.8 in^2**

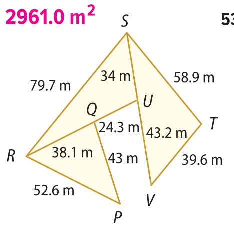
50. $\triangle PQR$، إذا كانت $Q = 153°$ و $p = 27$ cm و $r = 21$ cm **128.7 cm^2**

51. **التصميم** يحتاج مشروع فني مستقل إلى قطعة إسناد مثلثية الشكل لضمان تثبيته. لا بد أن يبلغ طول ضلعين من المثلث 18 و 15 قدمًا، ولا بد أن تبلغ قياس زاويته غير المحصورة بينهما 42°. وإذا كانت أغراض التثبيت تتطلب أن تكون مساحة المثلث على الأقل 75 قدمًا مربعًا، فما طول الضلع الثالث للمثلث؟ (المثال 8)

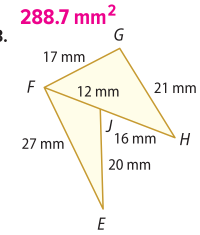
B **حوالي 22.3 ft أو ما يقارب 26.1 ft**

استخدم قاعدة هيرون لإيجاد مساحة كل شكل. قرّب الإجابات إلى أقرب جزء عشري.

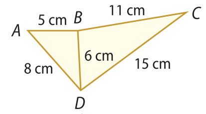
52. **2961.0 m^2**



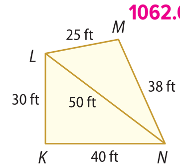
53. **288.7 mm^2**



54. **43.3 cm^2**

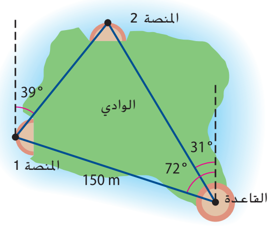


55. **1062.6 ft^2**



56. **زيب لاينز** منشأة سياحية لها حاليًا قاعدة تتصل بمنصة مركّبة على شجرة تبعد 150 مترًا بحبل انزلاق. ويرغب المالكون الآن في توصيل القاعدة بمنصة أخرى تقع عبر وادٍ ضيق، ثم ربط المنصتين معًا. والمحامل المنصوبة من القاعدة إلى كل منصة منهما، ومن المنصة الأولى إلى الثانية أيضًا معلومة. حدد المسافات من القاعدة إلى المنصة الثانية، ومن المنصة الأولى إلى المنصة الثانية.

حوالي 149.02 m، حوالي 104.72 m



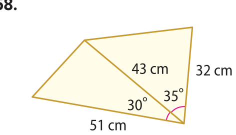
57. **المنارات** تبلغ المسافة بين منارة "ساوث بِي" ومنارة "ستيب روك" 25 ميلاً بزاوية 28° شرق الشمال. ورصدت كل منارة منهما قاربًا صغيرًا في حالة استغاثة، وكان المسار إليه يبلغ 50° غرب الشمال من منارة "ساوث بِي"، و 80° غرب الجنوب من منارة "ستيب روك". كم يبعد كل برج منهما عن القارب؟

تبعد منارة "ساوث بِي" حوالي 25.72 mi من القارب، بينما تبعد منارة "ستيب روك" حوالي 31.92 mi من القارب.

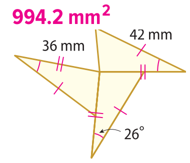
UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 217 12/15/2016 11:42:00 PM

أوجد مساحة كل شكل. قرّب الإجابات إلى أقرب جزء من العشرة.

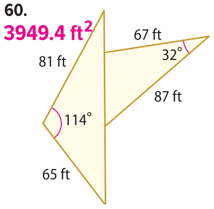
58. $942.9\ cm^2$



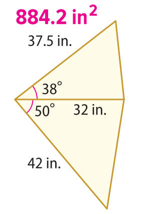
59. $994.2\ mm^2$



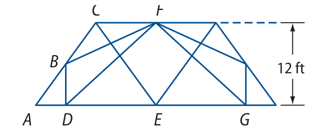
60. $3949.4\ ft^2$



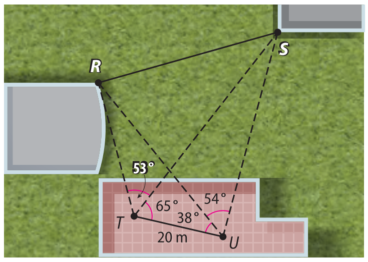
61. $884.2\ in^2$



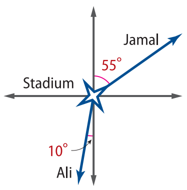
.62 **تصميم الجسور** في الشكل المدرج أدناه، $\angle FDE = 45°$، $\angle CED = 55°$، $\angle B$ $FDE \cong \angle FGE,$ هي نقطة المنتصف لـــ AC و DE $EG \cong$. إذا كانت $AD = 4$ أقدام $DE = 12$ قدمًا و $CE = 14$ قدمًا، فأوجد قيمة BF. **≈13.5 ft**



.63 **المباني** تود بدرية معرفة المسافة بين قمتي المبنيين R و S. ومن على قمة مبناها، تقيس المسافة بين النقطتين T و U، فتجد قياسات الزوايا المعطاة. أوجد المسافة بين المبنيين. **≈40.9 m**



.64 **القيادة** بعد مباراة كرة قدم بالمدرسة الثانوية، غادر جمال موقف السيارات قاطعًا مسافة بسرعة 35 ميلاً في الساعة في اتجاه 55° شرق الشمال. إذا تحرك علي بعد جمال بمدة 20 دقيقة بسرعة 45 ميلاً في الساعة في اتجاه 10° غرب الجنوب، فكم تكون المسافة بين علي ومنى بعد مرور ساعة ونصف من تحرك جمال؟ **≈97 mi**



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

.65 **تحليل الأخطاء** تحل نبيلة ورشيد مسألة لمثلث حاد الزاوية فيه $\angle A = 34°$ و $a = 16$ و $b = 21$. ترى نبيلة أن للمثلث حلاً واحدًا، بينما يرى رشيد أن المثلث ليس له حل. فهل إجابة أي منهما صحيحة؟ وضّح استنتاجك. **انظر الحاشية.**

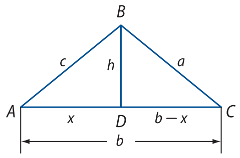
.66 **الكتابة في الرياضيات** وضّح الأحوال المختلفة التي يمكنك فيها استخدام قانون الـــ cosine و sine ومبرهنة فيثاغورس والدوال المثلثية لحل مثلث.
انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

.67 **التبرير** لماذا يظهر على الحاسبة البيانية قياس لزاوية منفرجة لجيوب التمام المعكوسة، بينما يظهر قياس سالب للجيوب المعكوسة؟
انظر الحاشية.

.68 **البرهان** برهن على أنه يمكن إيجاد مساحة معين هندسي معطى طول ضلعه s وزاويته المحصورة θ باستخدام القاعدة: $A = s^2 \sin \theta$.
انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

.69 **البرهان** استنبط قانون الـــ sine.
انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

.70 **البرهان** لاحظ الشكل الوارد أدناه.
a–b. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

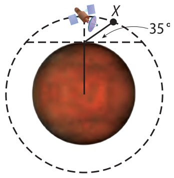


a. استخدم الشكل والإرشادات الواردة أدناه لاستنباط القاعدة الأولى $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ في قانون الـــ cosine.

- استخدم مبرهنة فيثاغورس لحل المثلث $\triangle DBC$.
- في المثلث $\triangle ADB$، نجد أن $c^2 = x^2 + h^2$
- $\cos A = \frac{x}{c}$

b. اشرح كيف يمكنك استنباط القاعدتين الأخريَيْنِ في قانون جيوب التمام.

.71 **التحدي** يدور قمر صناعي على ارتفاع 850 ميلاً من المريخ، بينما هو الآن مباشرةً فوق أحد القطبين. ويبلغ نصف قطر المريخ 2110 ميلاً. فإذا كان القمر الصناعي متمركزًا عند النقطة X منذ 14 دقيقة مضت، فكم ساعة يستغرقها ليدور دورة كاملة إذا افترضنا أنه يتحرك بمعدل ثابت وفي مدار دائري؟ **حوالي 4.36 ساعة، أو 4 ساعات و 22 دقيقة**



.72 **الكتابة في الرياضيات** وضح الأسباب لوجود حلين عند حل مثلث فيه $h < a < b$ باستخدام قانون الـــ sine. هل هذا الحل صحيح أيضًا إذا استخدامنا قانون الـــ cosine؟ وضّح استنتاجك. **انظر الحاشية.**

إجابة إضافية

.65 لا هذا ولا ذاك. في مسألة الزاوية الحادة $h = 21 \sin 34°$ أو 11.7. لأن $a < b$ و $h < a$، هناك حلّان.

مراجعة شاملة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير، إن وُجِدت.

73. $\cos^{-1} -\frac{1}{2}$ $\frac{2\pi}{3}$

74. $\sin^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\pi}{4}$

75. $\arctan 1$ $\frac{\pi}{4}$

76. $\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\pi}{3}$

حدد عامل التضاؤل $f(x)$ في كل دالة. استخدم الحاسبة البيانية في رسم التمثيلات البيانية لـ $f(x)$، $-f(x)$ وللدوال المعطاة باستخدام النافذة الظاهرة نفسها. صِف سلوك التمثيل البياني. 77–80. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

77. $y = -2x \sin x$

78. $y = \frac{3}{5}x \cos x$

79. $y = (x-1)^2 \sin x$

80. $y = -4x^2 \cos x$

81. **رسم الخرائِط** يمكن إيجاد المسافة المقطوعة حول الأرض على طول خط عرض معلوم باستخدام $C = 2\pi r \cos L$، حيث r هي نصف قطر الأرض و L خط العرض. يبلغ نصف القطر تقريبًا حوالي 3960 ميلاً. أنشئ جدولاً لقيم خط العرض والمسافة المقابلة لها حول الأرض، يشمل $L = 0°$ و30° و45° و60° و90°. استخدم الجدول لوصف المسافات بطول خطوط العرض عند تحركك من زاوية 0° عند خط الاستواء إلى زاوية 90° عند أحد القطبين.
انظر ملحق إجابات الوحدة 6.

82. **النشاط الإشعاعي** بدأ عالِم باستخدام عينة من الرصاص–211 وزنها جرام واحد. والكمية المتبقية من العينة بعد فترات زمنية مختلفة موضحة في الجدول المدرج أدناه.

الوقت (min)	10	20	30	40
الرصاص Pb-211 الموجود (g)	0.83	0.68	0.56	0.46

a. أوجد معادلة انحدار أسية للكمية y من الرصاص كدالة في الزمن x. $y = 1.0091(0.9805)^x$

b. اكتب معادلة انحدار بدلالة القاعدة e. $y = 1.0091e^{-0.0197x}$

c. استخدم المعادلة الموجودة في الجزء b لتقدير زمن الوصول إلى 0.01 جرام من الرصاص -211 الموجود. 234 min

83–86. تُقدَّم نماذج لبعض الإجابات.

اكتب دالةً كثيرة الحدود ذات معاملاتٍ حقيقية، وبأصغر درجة ممكنة بصيغة قياسية بحيث تكون لها الأصفار المعطاة.

84. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 18x - 8$

86. $f(x) = x^4 + 26x^2 + 25$

83. $-1, 1, 5$
$f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$

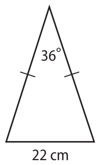
84. $-2, -0.5, 4$

85. $-3, -2i, 2i$
$f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 12$

86. $-5i, -i, i, 5i$

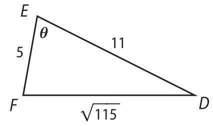
مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

87. **SAT/ACT** أي الخيارات التالية يمثل نصف محيط المثلث المعروض؟ E



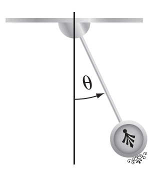
A 49.0 cm
B 66.0 cm
C 71.2 cm
D 91.4 cm
E 93.2 cm

88. في المثلث $\triangle DEF$، ما قيمة Θ مقربة إلى أقرب درجة؟ G



F 26°
G 74°
H 80°
J 141°

89. **الحل الحر** يتحرك البندول على جهة اليمين وفقًا لــ $\theta = \frac{1}{4}\cos 12t$ حيث θ هي الإزاحة الزاويّة بالراديان و t تمثل الزمن بالثواني.



a–e. انظر ملحق إجابات الفصل 3.

a. اضبط الحاسبة على وضع الراديان، وارسم تمثيلاً بيانيًّا للدالة $0 \le t \le 2$.

b. ما تردّد الدالة ودورتها وأعلى قيمة تصل إليها؟ ما الذي يمثله كل منها في سياق هذه المسألة؟

c. ما الحد الأقصى لإزاحة البندول الزاويّة بالدرجات؟

d. ما الذي يمثله خط المنتصف في التمثيل البياني؟

e. ما الزمن الذي يقطع فيه البندول إزاحة بمقدار 5 درجات؟

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 65. لأن $\angle A$ زاوية حادة، يجب على الطلاب التحقق من الأطوال النسبية في a, b, h. أخفق مونيك وروجيليو في تحليل المسألة تمامًا. وأدى ذلك إلى استنتاجاتهم الخاطئة. لأن $a < b$ و $a > h$، يكون للمثلث حلاّن.

التقويم 4

تعيين مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب كتابة القانون الذي سيستخدمونه لحل مثلث عند توفر زاويتين وضلع محصور قانون الجيب

إجابات إضافية

67. الإجابة النموذجية: يتضمن مجال معكوس الـ Cosine زوايا بقياس 0 إلى 180 درجة. يتضمن مجال معكوس الـ Cosine زوايا بقياس -90 إلى 90 درجة.

72. الإجابة النموذجية: في دائرة الوحدة، تكون دالة جيب الزاوية موجبة في الربعين الأولين/ أو عندما $0 < \theta < \pi$. وبالإضافة إلى ذلك، إذا كان $\sin \theta = x$، فإنه يوجد أيضًا $\sin (180 - \theta) = x$. يشير هذا إلى أنه سيكون هناك قيمتان محتملتان لـ θ عند إيجاد $\sin^{-1} x = \theta$. وهذا لا ينطبق على قانون الـ Cosine. لا تكون دالة الـ Cosine موجبة إلا عندما $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. لأن مقياس زاوية المثلث يجب أن يكون أكبر من صفر، فهناك قيمة واحدة فقط في θ.

التدريس المتمايز BL

التوسّع أوجد مساحة مثلث في المستوى الإحداثي مع الرؤوس $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(3, 3\sqrt{3})$.
$9\sqrt{3}$ وحدات مربعة

3 دليل الدراسة والمراجعة

التقويم التكويني

المفردات الأساسية تشير الصفحات المرجعية بعد كل كلمة إلى المكان الذي ورد فيه ذلك المصطلح لأول مرة. وإذا كان الطلاب يعانون من صعوبة في الإجابة عن الأسئلة 1-10، فذكرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لإنعاش ذاكراتهم بشأن المفردات.

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

حساب مثلثات المثلثات قائمة الزاوية (الدرس 3-1)

$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$ $\quad \cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$ $\quad \tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$

$\csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$ $\quad \sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$ $\quad \cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}}$

الدرجات والراديان (الدرس 3-2)

- للتحويل من الدرجات إلى الراديان، اضرب في $\frac{\pi \text{ راديان}}{180^\circ}$
- للتحويل من راديان إلى درجة، اضرب في $\frac{180^\circ}{\pi \text{ راديان}}$
- السرعة الخطية: $v = \frac{s}{t}$، حيث s هي طول القوس خلال الزمن t
- السرعة الزاويّة: $\omega = \frac{\theta}{t}$، حيث θ هي زاوية الدوران (بالراديان) المحركة خلال الزمن t

الدوال المثلثيّة على دائرة الوحدة (الدرس 3-3)

- بالنسبة لزاوية θ المقيسة بالراديان، والتي بها: (x, y) و $\cos\theta = \frac{x}{r}$ و $\sin\theta = \frac{y}{r}$ و $\tan\theta = \frac{y}{x}$، حيث $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- بالنسبة للزاوية t التي بها (x, y) على دائرة الوحدة $\cos\theta = x$ و $\sin\theta = y$ و $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

تمثيل دوال الـ sine الزاوية والـ cosine بيانيًّا (الدرس 3-4)

- تُكتب دالة الـ sine كالتالي: $y = a\sin(bx + c) + d$ أو $y = a\cos(bx + c) + d$، حيث السعة= $|a|$، والفترة = $\frac{2\pi}{|b|}$ والتردد = $\frac{|b|}{2\pi}$، وإزاحة الطور = $-\frac{c}{|b|}$، والإزاحة الرأسية = d.

التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى (الدرس 3-5)

- تُكتب الدالة المثلثية المتضائلة كالتالي: $y = f(x)\sin bx$ أو $y = f(x)\cos bx$، عندما تكون $f(x)$ هي العامل المتضائل.

الدوال المثلثية العكسية (الدرس 3-6)

- $y = \sin^{-1}x$ iff $\sin y = x$، لـ $-1 \le x \le 1$ و $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$
- $y = \cos^{-1}x$ iff $\cos y = x$، لـ $-1 \le x \le 1$ و $0 \le y \le \pi$
- $y = \tan^{-1}x$ iff $\tan y = x$، لـ $-\infty < x < \infty$ و $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

قانون الـ sine وقانون الـ cosine (الدرس 3-7)

افترض أن $\triangle ABC$ هو أي مثلث.

- قانون الـ sine: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
- قانون الـ cosine: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

المفردات الأساسية

السعة	المثلث المائل
زاوية الانخفاض	الفترة الزمنية
زاوية الارتفاع	دالة زمنية
السرعة الزاوية	إزاحة الطور
دالة دائرية	الزاوية الربعية
قاطع التمام	الراديان
جيب التمام	دالة المقلوب
ظل التمام	الزاوية المرجعية
زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء	القاطع
الدالة المثلثية المتضائلة	القطاع
الموجة المتضائلة	جيب الزاوية
عامل التضاؤل	منحنى الـ Sine
التكرار	الوضع القياسي
ضلع الابتداء	المماس
الدالة المثلثية العكسية	ضلع الإنتهاء
قانون جيب التمام	الدوال المثلثية
قانون الـ Sine	الدوال المثلثية
السرعة الخطية	دائرة الوحدة
خط الوسط	إزاحة رأسية

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة*. إذا كانت *خاطئة*، فاستبدل المصطلح الموضوع تحته خط لصياغة عبارة صحيحة.

1. Sine الزاوية الحادة في مثلث قائم الزاوية هو نسبة طول الساق المقابل إلى الوتر. **صحيحة**
2. نسبة دالة الـ Sec هي المعكوس الضربي لنسبة الـ Sine. **خاطئة، قاطع التمام**
3. زاوية الارتفاع هي زاوية تتكون من خط أفقي وخط نظر المراقب تجاه هدف أدنى من هذا الخط. **خاطئة، زاوية الانخفاض**
4. قياس الراديان لزاوية يساوي نسبة طول قوسها المحصور إلى نصف القطر. **صحيحة**
5. معدل تحرك الجسم على طول مسار دائري يسمى سرعته الخطية. **صحيحة**
6. 0° و π و $-\frac{\pi}{2}$ هي أمثلة لزوايا الإسناد. **خاطئة، الزاوايا الربعية**
7. دورة التمثيل البياني للدالة $y = 4\sin 3x$ هي 4. **خاطئة، السعة**
8. بالنسبة إلى $f(x) = \cos bx$ كلما ازداد b انخفض التكرار. **خاطئة، الفترة**
9. مدى دالة Sin^{-1} هو $[0, \pi]$. **خاطئة، قوس جيب التمام**
10. يمكن استخدام قانون الـ Sine لتحديد أطوال الأضلاع أو قياسات الزوايا غير المعلومة لبعض المثلثات. **صحيحة**

مراجعة درس بدرس

التدخل إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لعرض المواضيع التي تتناولها الأسئلة. فذّكر الطلاب بأن الصفحات المرجعية تخبرهم بمواضع مراجعة الموضوع في كتيبهم المدرسية.

إجابات إضافية

11. $\sin\theta = \frac{12}{13}, \cos\theta = \frac{5}{13},$

$\tan\theta = \frac{12}{5}, \csc\theta = \frac{13}{12},$

$\sec\theta = \frac{13}{5}, \cot\theta = \frac{5}{12}$

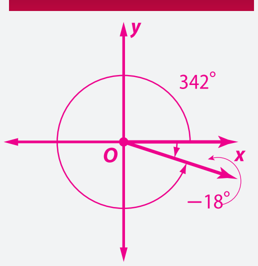
12. $\sin\theta = \frac{9}{41}, \cos\theta = \frac{40}{41},$

$\tan\theta = \frac{9}{40}, \csc\theta = \frac{41}{9},$

$\sec\theta = \frac{41}{40}, \cot\theta = \frac{40}{9}$

21–22. n هو عدد صحيح.

21. $342° + 360n°$ ؛الإجابة النموذجية: $702°, \quad -18°$

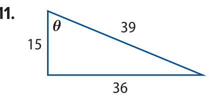


المراجعة التابعة للدرس

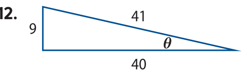
3-1 حساب مثلثات المثلثات قائمة الزوايا

أوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست لـ θ. **11–12. انظر الهامش.**

11.

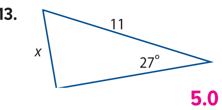


12.



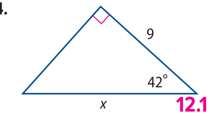
أوجد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

13.



5.0

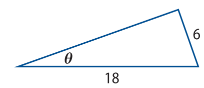
14.



12.1

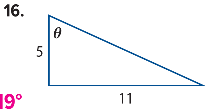
أوجد قياس زاوية θ. قرّب إلى أقرب درجة إذا لزم الأمر.

15.



19°

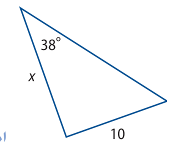
16.



66°

مثال 1

أوجد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$ دالة tan

$\tan 38° = \frac{10}{x}$ $\quad \theta = 38°, \text{opp} = 10, \text{adj} = x$

$x \tan 38° = 10$ اضرب كل طرف في x.

$x = \frac{10}{\tan 38°}$ اقسم كل طرف على $\tan 38°$.

$x \approx 12.8$ استخدم الحاسبة.

3-2 الدرجات والراديان

حول كل قياس درجات الى الراديان كمضاعف لـ π، و العكس.

17. $135°$ $\quad \frac{3\pi}{4}$

18. $450°$ $\quad \frac{5\pi}{2}$

19. $\frac{7\pi}{4}$ $\quad$ **315°**

20. $\frac{13\pi}{10}$ $\quad$ **234°**

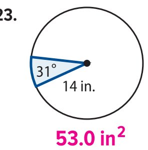
حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المعطاة. ثم أوجد مع الرسم زاوية موجبة وزاوية سلبية مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة.

21. $342°$

22. $-\frac{\pi}{6}$

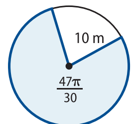
أوجد مساحة كل قطاع.

23.



$53.0\ in^2$

24.



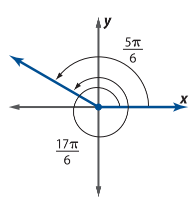
$246.1\ m^2$

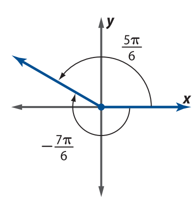
مثال 2

حدد جميع الزوايا المشتركة في ضلع الانتهاء مع $\frac{5\pi}{12}$. ثم أوجد مع الرسم زاوية موجبة وزاوية سلبية مشتركة في ضلع الانتهاء مع الزاوية المُعطاة.

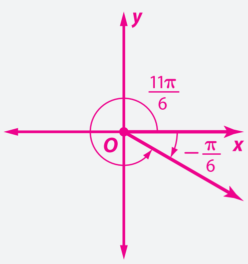
قياسات جميع الزوايا $\frac{5\pi}{12} + 2n\pi$ مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية $\frac{5\pi}{12}$. افترض أن $n = 1, \ -1$.

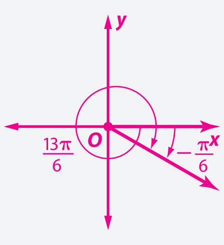
$\frac{5\pi}{6} + 2\pi(1) = \frac{17\pi}{6}$ $\qquad$ $\frac{5\pi}{6} - 2\pi(-1) = -\frac{7\pi}{6}$





22. $-\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ ؛الإجابة النموذجية: $-\frac{13\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$





3 الوحدة دليل الدراسة والمراجعة متابعة

3-3 الدوال المثلثية على دائرة الوحدة

ارسم كل زاوية. ثم أوجد زاوية الإسناد. 25–28. انظر الهامش.

25. $240°$
26. $75°$
27. $-\frac{3\pi}{4}$
28. $\frac{11\pi}{18}$

أوجد القيم الدقيقة للدوال الخمس المثلثية المتبقية لـ θ. 29–32. انظر الهامش.

29. $\cos\theta = \frac{2}{5}$، حيث تكون $\sin\theta > 0$ و $\tan\theta > 0$
30. $\tan\theta = -\frac{3}{4}$، حيث تكون $\sin\theta > 0$ و $\cos\theta < 0$
31. $\sin\theta = -\frac{5}{13}$، حيث تكون $\cos\theta > 0$ و $\cot\theta < 0$
32. $\cot\theta = \frac{2}{3}$، حيث تكون $\sin\theta < 0$ و $\tan\theta > 0$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي. إذا لم تكن مُعرَّفة، فاكتب غير مُعرَّفة.

33. $\sin 180°$ **0**
34. $\cot\frac{11\pi}{6}$ $-\sqrt{3}$
35. $\sec 450°$ **غير مُعرَّفة**
36. $\cos\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال 3

افترض أن $\cos\theta = \frac{5}{13}$، حيث تكون $\sin\theta < 0$. أوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الخمس المتبقية لـ θ.

بما أن $\cos\theta$ موجبة و $\sin\theta$ سالبة. فإن θ تقع في الربع IV. وهذا يعني أن الإحداثي x لنقطة ما على الضلع الطرفي لـ θ موجب، والإحداثي y سالب.

بما أن $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{5}{13}$، استخدم $x = 5$ و $r = 13$ لإيجاد y.

$y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ نظرية فيثاغورس

$= -\sqrt{169 - 25} = -12$ $\quad x = 5$ و $r = 13$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{12}{13}$ $\quad \tan\theta = \frac{y}{x} = -\frac{12}{5}$ $\quad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{13}{5}$

$\csc\theta = \frac{r}{y} = -\frac{13}{12}$ $\quad \cot\theta = \frac{x}{y} = -\frac{5}{12}$

3-4 تمثيل دوال sine و cosine بيانيًا

وضح كيفية ترابط التمثيلات البيانية لـ $f(x)$ و $g(x)$. ثم أوجد دورة وسعة $g(x)$. وارسم دورة واحدة على الأقل لكلتا الدالتين على محاور الإحداثيات نفسها. 37–40. انظر الهامش.

37. $f(x) = \sin x$
$g(x) = 5\sin x$
38. $f(x) = \cos x$
$g(x) = \cos 2x$
39. $f(x) = \sin x$
$g(x) = \frac{1}{2}\sin x$
40. $f(x) = \cos x$
$g(x) = -\cos\frac{1}{3}x$

حدد السعة، والفترة، والتكرار، وإزاحة الطور، والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثّل بيانيًا فترتين للدالة.

41. $y = 2\cos(x - \pi)$
42. $y = -\sin 2x + 1$
43. $y = \frac{1}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
44. $y = 3\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

41–44. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

مثال 4

حدد السعة، والدورة، والتكرار، وإزاحة الطور، والإزاحة الرأسية لـ $y = 4\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 4$. ثم مثّل بيانيًا دورتين للدالة.

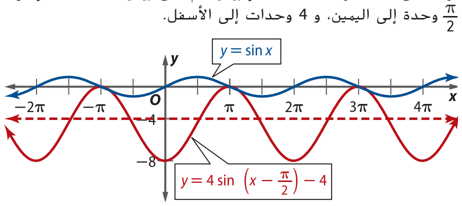
في هذه الدالة، $a = 4$ و $b = 1$ و $c = -\frac{\pi}{2}$ و $d = -4$.

السعة: $|a| = |4|$ أو 4 $\quad$ الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|}$ أو 2π

التكرار: $\frac{|b|}{2\pi} = \frac{|1|}{2\pi}$ أو $\frac{1}{2\pi}$ $\quad$ الإزاحة الرأسية: d أو -4

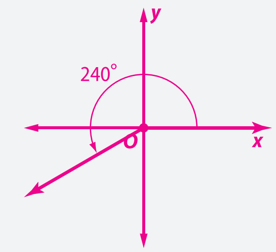
إزاحة الطور: $-\frac{c}{|b|} = -\frac{-\frac{\pi}{2}}{|1|}$ أو $\frac{\pi}{2}$

أولاً، مثّل خط الوسط $y = -4$ بيانيًا. ثم مثّل بيانيًا $y = 4\sin x$ مزاحة $\frac{\pi}{2}$ وحدة إلى اليمين و 4 وحدات إلى الأسفل.

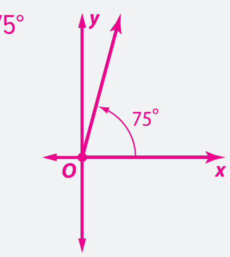


إجابات إضافية

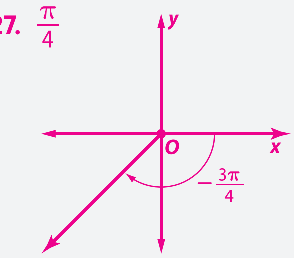
25. $60°$



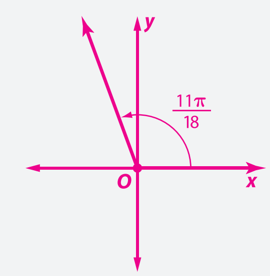
26. $75°$



27. $\frac{\pi}{4}$



28. $\frac{7\pi}{18}$



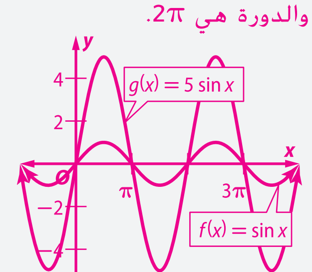
29. $\sin\theta = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\tan\theta = \frac{\sqrt{21}}{2}$, $\csc\theta = \frac{5\sqrt{21}}{21}$, $\sec\theta = \frac{5}{2}$, $\cot\theta = \frac{2\sqrt{21}}{21}$

30. $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\csc\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = -\frac{5}{4}$, $\cot\theta = -\frac{4}{3}$

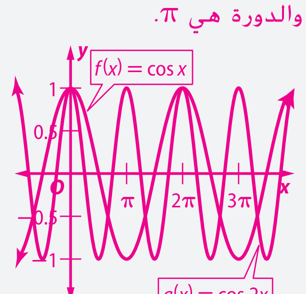
31. $\cos\theta = \frac{12}{13}$, $\csc\theta = -\frac{13}{5}$, $\sec\theta = \frac{13}{12}$, $\tan\theta = -\frac{5}{12}$, $\cot\theta = -\frac{12}{5}$

32. $\sin\theta = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos\theta = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $\csc\theta = -\frac{\sqrt{13}}{3}$, $\sec\theta = -\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\tan\theta = \frac{3}{2}$

37. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مُوسعًا رأسيًا. سعة $g(x)$ هي 5. والدورة هي 2π.



38. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مضغوطًا أفقيًا. سعة $g(x)$ هي 1. والدورة هي π.



UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 222 12/15/2016 11:42:17 PM

3-5 التمثيل البياني للدوال المثلثية الأخرى

حَدد الخطوط المُقاربة العمودية، ومَثل كل دالة بيانيًّا.
45–52. انظر ملحق إجابات الوحدة 3.

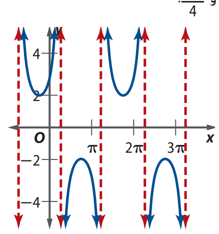
45. $y = 3\tan x$
46. $y = \frac{1}{2}\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
47. $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
48. $y = -\cot(x - \pi)$
49. $y = 2\sec\left(\frac{x}{2}\right)$
50. $y = -\csc(2x)$
51. $y = \sec(x - \pi)$
52. $y = \frac{2}{3}\csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

مثال 5

حَدد الخطوط المقاربة الرأسية، وارسم تمثيلاً بيانيًّا لـ $y = 2\sec\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

لأن التمثيل البياني لـ $y = 2\sec\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ هو التمثيل البياني لـ $y = 2\sec x$ مزاحًا $\frac{\pi}{4}$ وحدات إلى اليسار، فإن الخطوط المقاربة الرأسية لفترة واحدة تقع في $-\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4}$، و $\frac{5\pi}{4}$.

مثِّل بيانيًّا دورتين على الفترة الفاصلة $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}\right]$



3-6 الدوال المثلثية العكسية

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

53. $\sin^{-1}(-1)$ $-\frac{\pi}{2}$
54. $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\pi}{6}$
55. $\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $-\frac{\pi}{6}$
56. $\arcsin 0$ 0
57. $\arctan(-1)$ $-\frac{\pi}{4}$
58. $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\pi}{4}$
59. $\sin^{-1}\left[\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$ $-\frac{\pi}{3}$
60. $\cos^{-1}[\cos(-3\pi)]$ π

مثال 6

أوجد القيمة الدقيقة لـ $-\sqrt{3}$.

أوجد نقطة على دائرة الوحدة في الفترة الفاصلة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ بالمماس $-\sqrt{3}$. عندما تكون $t = -\frac{\pi}{3}$، $\tan t = -\sqrt{3}$.
وبذلك، $\arctan -\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

3-7 قانون الـ Sine وقانون الـ Cosine

أوجد جميع الحلول للمثلث المعطى، إن أمكن. إن لم يكن له حل، فاكتب *ليس هناك حل*. قرِّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزاوية إلى أقرب درجة. **61–64. انظر الهامش.**

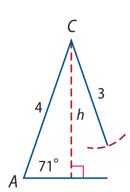
61. $a = 11, b = 6, A = 22°$
62. $a = 9, b = 10, A = 42°$
63. $a = 20, b = 10, A = 78°$
64. $a = 2, b = 9, A = 88°$

65–66. انظر الهامش.
حل كل مثلث. قرِّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزاوية إلى أقرب درجة.

65. $a = 13, b = 12, c = 8$
66. $a = 4, b = 5, C = 96°$

مثال 7

حل المثلث إذا كان $a = 3$، $b = 4$، و $A = 71°$.

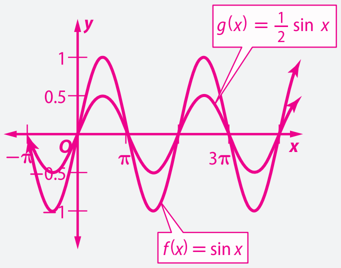


في الشكل، $h = 4 \sin 71°$ أو حوالي 3.8.

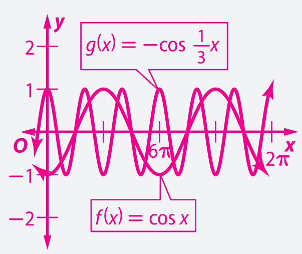
لأن $h \le a$، فإنه لا يوجد مثلث يمكن تشكيله بالأضلاع $a = 3$، و $b = 4$، و $A = 71°$. إذًا، لا حل لهذه المسألة.

إجابات إضافية

39. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مضغوطًا رأسيًا. سعة $g(x)$ هي $\frac{1}{2}$. والدورة هي 2π.



40. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ مُوسعًا أفقيًا ومنعكسًا على المحور الأفقي x. سعة $g(x)$ هي 1. والدورة هي 6π.



61. $B = 12°, C = 146°, c = 16.4$
62. $B = 48°, C = 90°, c = 13.5$ و $B = 132°, C = 6°, c = 1.4$
63. $B = 29°, C = 73°, c = 19.5$
64. لا يوجد حل
65. $A = 78°, B = 65°, C = 37°$
66. $c = 6.7, A = 36°, B = 48°$

الوحدة 3 دليل الدراسة والمراجعة متابعة

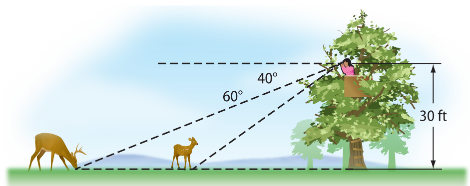
التطبيقات وحل المسائل

67. البناء تقوم شركة تعمير بتركيب منحدر للكراسي المتحركة بارتفاع ثلاث أقدام على بسطة درج أحد المكاتب. بحيث تكون زاوية المنحدر °4. (الدرس 3-1)

a. ما طول المنحدر؟ **43 ft**

b. ما ميل المنحدَر؟ **0.07**

68. الطبيعة ضمن مشروع تصوير فوتوغرافي، تقوم خديجة بتصوير غزال من موقع على شجرة. من موقع نظرها الذي يرتفع 30 قدمًا عن الأرض، تلمح غزالين في خط مستقيم، كما هو موضح أدناه. كم يبعد الغزال الثاني عن الأول؟ (الدرس 3-1) **18.4 ft**



69. التزلّج الفني على الجليد تؤدي متزلّجة أوليمبية حركة معتادة بالقفز في الهواء لمدة 2.4 ثانية، بينما تدور 3 دورات كاملة. (الدرس 3-2)

a. أوجد السرعة الزاوية للمتزلّجة. **150π/min أو 2.5π/s**

b. عبّر عن السرعة الزاويّة للمتزلّجة بالدرجات لكل دقيقة. **27,000°/min**

70. الساعات يبلغ طول عقرب دقائق ساعة جيب 1.5 بوصة. ما المساحة التي يغطيها عقرب الدقائق خلال 40 دقيقة؟ (الدرس 3-2) **$4.7\ in^2$**

71. المعرض العالمي كان قطر أول ساقية دوارة 250 قدمًا واستغرقت 10 دقائق لإتمام دورة واحدة كاملة حول محورها. (الدرس3-3)

a. كم عدد الدرجات التي تدورها عجلة فيريس خلال 100 ثانية؟ **60°**

b. ما المسافة التي يتحرَّكها شخص ما إن ركب عجلة فيريس لمدة 7 دقائق؟ **550 ft**

c. كم يستغرق شخص ليتحرك 200 قدم؟ **2.5 min**

72. تكييف الهواء تعمل وحدة تكييف الهواء وتتوقف للمحافظة على درجة الحرارة المرادة. في أحد أيام الصيف، يعمل مكيف الهواء في الساعة 8:30 صباحًا. عندما تكون درجة الحرارة °80 فهرنهايت، ويتوقف تشغيله في الساعة 8:55 صباحًا. عندما تكون درجة الحرارة °74. (الدرس 3-4)

a. أوجد السعة والفترة إذا كنت ستستخدم دالة مثلثية لتمثيل التغير في درجة الحرارة؛ مُفترِضًا أن دورة درجة الحرارة ستستمر. **3; 50 min**

b. هل يصح تمثيل هذه الحالة باستخدام دالة مثلثية؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

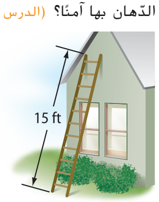
73. المد والجزر في خليج لويس، سُجِّل مقدار الجزر بقدمين في 4:30 صباحًا، ومقدار المد بـــ 5.5 قدم في 10:45 صباحًا. (الدرس 3-4)

a. أوجد فترة التمثيل المثلثي. **12 h 30 min**

b. في أي وقت يحدث المد التالي؟ **11:15 مساءً**

74. الموسيقى عندما يُسحَب وتر الكمان، فإنه يتحرك بمقدار 1.5 بوصة، بينما يكون عامل التضاؤل الخاص به 1.9. يصدر نوتة بتردد 90 دورة في الثانية. حدد المدة الزمنية التي يستغرقها الوتر ليتضاءل بحيث تكون: $-0.1 \le y \le 0.1$. (الدرس 3-5) **حوالي 1.41 s**

75. الطلاء يستخدم الدّهان سلمًا طوله 15 قدمًا ليطلي جانب أحد المنازل. وإذا أصبحت الزاوية بين السلم والأرض أقل من °65، فسينزلق السلم من تحته. ما أكبر مسافة يمكن أن يبتعد بها قاع السلم عن جانب المنزل ويظل الدّهان بها آمنًا؟ (الدرس 3-6) **6.3 ft**

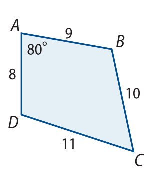


76. المِلاحة يبعد قارب 20 ميلاً ملاحيًا عن الميناء بمقدار °30 شمال الشرق. ويري الربان قاربًا ثانيًا، ويبلّغ الميناء بأن قاربه يبعد 15 ميلاً ملاحيًا عن القارب الثاني الموجود شرق الميناء. هل يمكن لموظفي الميناء التأكد من موقع القارب الثاني؟ علل إجابتك. (الدرس 3-7) **انظر الهامش.**

77. الهندسة فكّر في رباعي الأضلاع $ABCD$. (الدرس 3-7)

a. أوجد C. **63°**

b. أوجد مساحة $ABCD$. **84 وحدة مربعة**



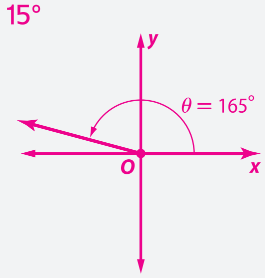
إجابات إضافية

72b. الإجابة النموذجية: لا تبدو الدالة دورية؛ لأن الأمر قد يستغرق وقتًا أكثر أو أقل لكي تدفأ الحرارة صعودًا مرة أخرى إلى °80

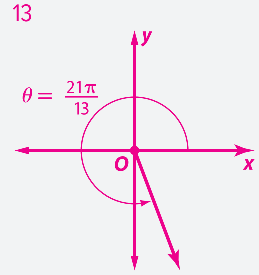
76. لا. الإجابة النموذجية: بما أن $a < b$، و $a > h$، فإنه يوجد مثلثان محتملان بالأبعاد المعطاة. لذا، لا يمكن للمقرات الرئيسية التأكد من موقع القارب المجهول.

إجابات إضافية (تمرين على الاختبار)

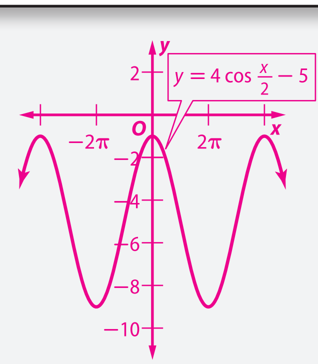
9. 15°



10. $\frac{5\pi}{13}$



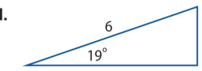
14. السعة $= 4$؛ الدورة $= 4\pi$؛ التكرار $= \frac{1}{4\pi}$؛ إزاحة الطور $= 0$؛ الإزاحة الرأسية $= -5$؛



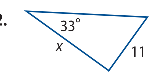
UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indd 224
12/15/2016 11:42:23 PM

الوحدة 3 تدريب على الاختبار

أوجد قيمة x. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

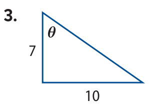
1. 

2.0

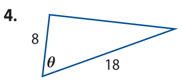
2. 

16.9

أوجد قياس زاوية θ. قرِّب إلى أقرب درجة إذا لزم الأمر.

3. 

55°

4. 

64°

5. **الاختيار من متعدد** ما السرعة الخطية لنقطة تدور بسرعة زاويّة 36 راديان لكل ثانية على بعد 12 بوصة من مركز الدوران؟ **B**

A 420 in./s

B 432 in./s

C 439 in./s

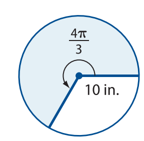
D 444 in./s

اكتب كل مقياس درجة بالراديان كمضاعف لـ π، وكل مقياس راديان بالدرجات.

6. $200°$ $\frac{10\pi}{9}$

7. $-\frac{8\pi}{3}$ $-480°$

8. أوجِد مساحة القطاع المعروض من الدائرة. $209.4\ \text{in}^2$



ارسم كل زاوية. ثم أوجد زاوية الإسناد. **9–10. انظر الهامش.**

9. $165°$

10. $\frac{21\pi}{13}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

11. $\sec \frac{7\pi}{6}$ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

12. $\cos(-240°)$ $-\frac{1}{2}$

13. **الاختيار من متعدد** تتحقق في زاوية θ المتباينات التالية: $\csc\theta < 0$، $\cot\theta > 0$، و $\sec\theta < 0$. في أي ربع تقع θ؟ **H**

F I

G II

H III

J IV

حدد السعة، والفترة، والتكرار، وإزاحة الطور، والإزاحة الرأسية لكل دالة. ثم مثِّل بيانيًا فترتين للدالة. **14–15. انظر الهامش.**

14. $y = 4\cos\frac{x}{2} - 5$

15. $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

16. **المد والجزر** يبين الجدول الأوقات التقريبية التي حدث فيها المد والجزر في خليج سان أزاليا على مدار يومين.

المد والجزر	المد 1	الجزر 1	المد 2	الجزر 2
اليوم 1	2:35 صباحًا	8:51 صباحًا	3:04 مساءً	9:19 مساءً
اليوم 2	3:30 صباحًا	9:48 صباحًا	3:55 مساءً	10:20 مساءً

a. يمكن تمثيل المد والجزر بدالة مثلثية. ما الفترة الزمنية لهذه الدالة تقريبًا؟ **الإجابة النموذجية: 12 h 30 min**

b. الفرق في الارتفاع بين المد والجزر هو 7 أقدام. ما سعة هذه الدالة؟ **3.5 ft**

c. اكتب دالة توضح المد والجزر حين تكون t مقيسة بالساعات. افترض أن هذه الدالة ليس لها إزاحة طور أو إزاحة رأسية. $y = 3.5 \sin\left(\frac{4\pi}{25}t\right)$

حَدد الخطوط المقاربة الرأسية، ومثِّل كل دالة بيانيًا. **17–18. انظر الهامش.**

17. $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

18. $y = \frac{1}{2}\sec 2x$

أوجد جميع الحلول للمثلث المعطى، إن أمكن. إن لم يكن هناك حل، فاكتب *ليس هناك حل*. قرِّب أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسات الزاوية إلى أقرب درجة.

19. $a = 8, b = 16, A = 22°$ **$B = 49°, C = 109°, c = 20.1$ and $B = 131°, C = 27°, c = 9.7$**

20. $a = 9, b = 7, A = 84°$ **$B = 51°, C = 45°, c = 6.4$**

21. $a = 3, b = 5, c = 7$ **$A = 22°, B = 38°, C = 120°$**

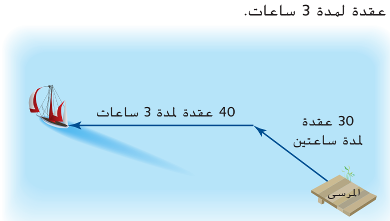
22. $a = 8, b = 10, C = 46°$ **$c = 7.3, A = 52°, B = 82°$**

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي، إن وُجدت.

23. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\frac{5\pi}{6}$

24. $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ $-\frac{\pi}{6}$

25. **الملاحة** يغادر قاربٌ الميناء ويتحرك °45 شمال الغرب بمتوسط 30 عقدة لمدة ساعتين. ثم يتحرك القارب غربًا مباشرةً بمتوسط 40 عقدة لمدة 3 ساعات.

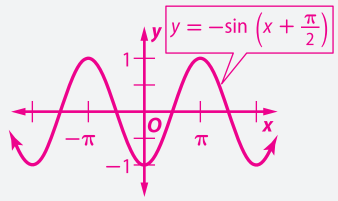


a. كم عدد الأميال الملاحية التي يبعدها القارب عن المرسى بعد 5 ساعات؟ **حوالي 167.9 ميلاً بحريًا**

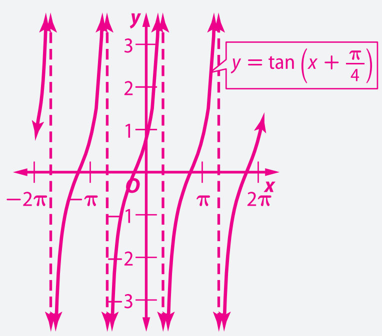
b. كم درجةً جنوب الشرق يقع عندها المرسى بالنسبة إلى الموضع الحالي للمركب؟ **حوالي °15 جنوب الشرق**

إجابات إضافية

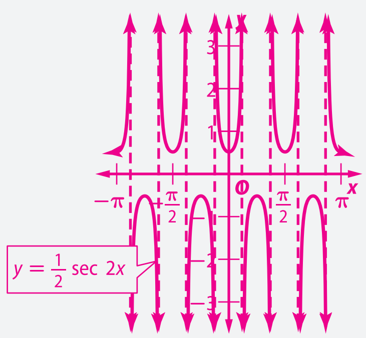
15. السعة = 1؛ الدورة = 2π؛ التكرار = $\frac{1}{2\pi}$؛ إزاحة الطور = $-\frac{\pi}{2}$؛ الإزاحة الرأسية = 0؛



17.



18.



UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indb 225 12/15/2016 11:42:26 PM

الوحدة 3 الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم المعدلات المرتبطة

1 التركيز

الهدف تمثيل مسائل المعدلات المترابطة وحلها.

نصيحة تدريسية

قد يشعر بعض الطلاب بالصعوبة بسبب تعقيد هذه المسائل. يُرجى التأكيد على أن يقوم الطلاب بتحليل الوضع وتطبيق ما يعرفونه باستخدام نهج الخطوة بخطوة. فمثلاً، قبل التفكير في معدل التغير في المسافة بين السيارات، يجب على الطلبة أولاً تمثيل حركة كل سيارة على حدة.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسّم الطلبة في الصف الدراسي إلى مجموعات ثنائية ذات قدرات متنوعة. اطلب من كل مجموعة العمل من خلال الخطوات 1 إلى 5 من النشاط 1. ثم اطلب من أحد المتطوعين تقديم عمل مجموعته الثنائية للخطوة 1. كرر الخطوات من 2 إلى 5. بعد مراجعة الخطوات مع الصف الدراسي، اطلب من كل مجموعة ثنائية إكمال التمارين 1 إلى 3 من قسم تحليل النتائج.

كرر النشاط 2.

إجابات إضافية

نشاط 1

الخطوة 2 سيارة تسير شمالاً: $d = 35t$؛ سيارة تسير شرقًا: $d = 55t$

الخطوة 3 سيارة تسير شمالاً: $d(1) = 35$ mi، $d(2) = 70$ mi، $d(3) = 105$ أميال، $d(4) = 140$ mi؛ سيارة تسير شرقًا: $d(1) = 55$ mi، $d(2) = 110$ mi، $d(3) = 165$ mi، $d(4) = 220$ mi

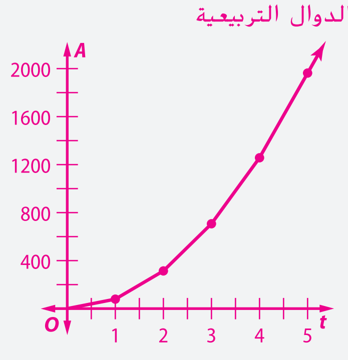
الخطوة 4 $t = 1$, 65.19 mi; $t = 2$, 130.38 mi; $t = 3$, 195.58 mi; $t = 4$, 260.77 mi

الخطوة 5 $1 \le t \le 2 = 65.19$ mi/h; $2 \le t \le 3 = 65.2$ mi/h; $3 \le t \le 4 = 65.19$ mi/h

نشاط 3

الخطوة 3 $x = 3$: $h = 0.1$, $m = 479.1$; $h = 0.01$, $m = 472$; $h = 0.001$, $m = 471.3$
$x = 4$: $h = 0.1$, $m = 636.2$; $h = 0.01$, $m = 629.1$; $h = 0.001$, $m = 628.4$

6. الدوال التربيعية

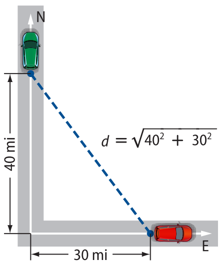


الهدف..

- تمثيل مسائل المعدلات المرتبطة وحلها.

إذا كان الهواء يُضخ في بالون بمعدل معلوم، فهل يمكننا إيجاد معدل تمدد حجم البالون؟ كيف يؤثر معدل إنفاق شركة ما لأموالها في الدعاية في معدل مبيعاتها؟ *المعدلات المترابطة* تظهر مشكلاتها عندما يمكن إيجاد معدل التغير لمتغير واحد من خلال *ربط* ذلك بمعدلات التغير للمتغيرات الأخرى.

لنفترض أن سيارتين تغادران نقطة ما في الوقت نفسه. إحداهما تبلغ سرعتها 40 ميلاً في الساعة وتتجه نحو الشمال، بينما الأخرى تبلغ سرعتها 30 ميلاً في الساعة وتتجه نحو الشرق. كم تبعد إحداهما عن الأخرى بعد ساعة واحدة؟ وبعد ساعتين؟ وبعد 3 ساعات؟ يمكننا استخدام القانون: $d = rt$ ومبرهنة فيثاغورس للوصول إلى هذه القيم.



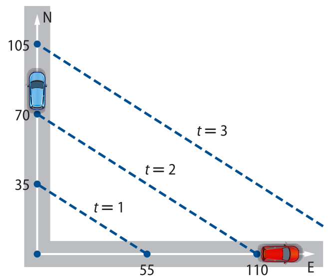
في هذه الحالة، نعرف معدلات التغير لكل سيارة. ماذا لو أردنا معرفة معدل تغير المسافة بين السيارتين؟

نشاط 1 معدل التغير

سيارتان تغادران منزلاً في الوقت نفسه. تغادر إحداهما باتجاه الشمال بسرعة 35 ميلاً في الساعة، بينما الأخرى تتجه إلى الشرق بسرعة 55 ميلًا في الساعة. عيِّن معدل تغير المسافة بين السيارتين تقريبًا.

الخطوات 5-2. انظر الحاشية.

الخطوة 1 ارسم رسمًا تصوريًا لهذه الحالة.



الخطوة 2 اكتب معادلات تمثل المسافة التي تسيرها كل سيارة منهما بعد عدد t من الساعات.

الخطوة 3 أوجد المسافة التي قطعتها كل سيارة بعد ساعة وساعتين و3 ساعات و4 ساعات.

الخطوة 4 استخدم مبرهنة فيثاغورس لإيجاد المسافة بين السيارتين عند كل نقطة في الوقت المحدد.

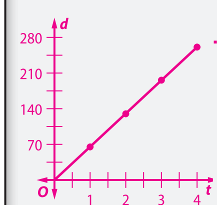
الخطوة 5 أوجد متوسط معدل تغير المسافة بين السيارتين لــ $1 \le t \le 2$ و $2 \le t \le 3$ و$3 \le t \le 4$.

تحليل النتائج

1. ارسم مخطط تشتت يعرض المسافة الكلية بين السيارتين. افترض أن الزمن t هو المتغير المستقل، والمسافة الكلية d هي المتغير التابع. ارسم خطًّا بين النقاط.
2. أي نوع من الدوال يعبّر عنه التمثيل البياني؟ ما فرضيتك المبنية على القيم الموجودة في الخطوة 5؟
3. ماذا يحدث لمتوسط معدل تغير المسافة بين السيارتين إذا أبطأت إحدى السيارتين سرعتها أو زادتها؟ اشرح استنتاجك.

معدل تغير المسافة بين السيارتين *يرتبط* بمعدلات السيارتين. في حساب التفاضل والتكامل، يمكن حل المسائل التي تتضمن المعدلات المترابطة باستخدام *التفاضل الضمني*. ومع ذلك، قبل أن يكون بإمكاننا استخدام تقنيات التفاضل المتقدمة، نحتاج إلى فهم كيفية ارتباط المعدلات بعضها ببعض. ولذلك، فإن أولى خطوات حل أي مسألة معدلات مترابطة يجب أن تكون تمثيل الحالة باستخدام رسم تصوري أو تمثيل بياني، وبكتابة المعادلات باستخدام المتغيرات والقيم ذات الصلة.

.1



2. الدالة الخطية؛ الإجابة النموذجية: كانت معدلات التغير المتوسطة واحدة في كل الفترات الفاصلة، وهو ما يشير إلى ميل ثابت.

3. الإجابة النموذجية: إذا أبطأت إحدى السيارتين من سرعتها، فستزداد المسافة بين السيارتين بمعدل أبطأ. وبذلك، يكون متوسط معدل تغير المسافة بين السيارتين أصغر. إذا زادت سرعة إحدى السيارتين، فستزداد المسافة بين السيارتين بمعدل أسرع. وبذلك، يكون متوسط معدل تغير المسافة بين السيارتين أكبر.

تمرين اطلب من الطلاب إتمام النشاط 3 والتمرين 10 في قسم استخدام النماذج والتطبيق.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرين 10 الأجزاء من a إلى c لتقييم قدرات الطلاب لتمثيل موقف معدل مرتبط بالحياة اليومية.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب تحديد العلاقات الأساسية التي تم استخدامها لتمثيل الأحداث في النشاطين 1 و2 ووصفها. فمثلاً، في النشاط 1، يتم وصف حركة كل سيارة من خلال المعادلة: المسافة = السرعة × الوقت. ثم يتم ربط معادلتي المسافة من خلال نظرية فيثاغورس.

توسيع المفهوم

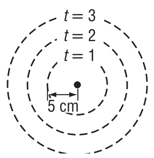
حدد المعدلين المترابطين وصِف العلاقة الأساسية اللازمة لتمثيل الموقف التالي. يتم ضخ الهواء في بالون بمعدل $1\ cm^3/s$. إذا كان البالون كرويًا، فعند أي معدل يزداد نصف قطره عندما يكون قطر البالون 15 cm؟ المعدلان هما المعدل الذي يتغير عنده الحجم والمعدل الذي يتغير عنده نصف القطر. العلاقة الأساسية هي حجم الكرة: الحجم = $\frac{4}{3}\pi r^3$، حيثما يكون r هو نصف قطر البالون.

إجابات إضافية

9. الإجابة النموذجية: في النشاط الأول، يشبه التمثيل البياني دالة خطية. ولذلك، يمكن إيجاد متوسط معدل التغيير باستخدام أي نقطتين طالما ظل معدل التغيير ثابتًا. وفي النشاط الثاني، يشبه التمثيل البياني دالة تربيعية. كان لابد من استخدام ناتج قسمة الفرق لتقريب معدل التغيير عند كل قيمة فردية من t.

نشاط 2 تمثيل المعدلات المرتبطة

أُلقِي حجر في جسم مائي ساكن، فصنع تموجًا دائريًا يتَّسع بمعدل 5 سنتيمترات في الثانية. أوجد مساحة الدائرة بعد ثلاث ثوانٍ إذا كان نصف قطر الدائرة يبلغ 5 سنتيمترات عندما تكون $t = 1$.



الخطوة 1 ارسم رسمًا تصوريًا لهذه الحالة.

الخطوة 2 اكتب معادلة لنصف قطر الدائرة r بعد عدد t من الثواني. $r = 5t$

الخطوة 3 أوجد نصف القطر عندما تكون $t = 3$، ثم أوجد المساحة.
نصف القطر = 15 cm؛ المساحة = 225π أو $705.9\ cm^2$

تحليل النتائج

4. أوجد معادلة للمساحة A في الدائرة بدلالة t. $A = \pi(5t)^2$ أو $25\pi t^2$

5. أوجد مساحة الدائرة عندما $t = 1, 2, 3, 4, 5$ ثانية.

6. اصنع تمثيلًا بيانيًا للقيم. ما نوع الدوال الذي يعبّر عنه التمثيل البياني؟ **انظر الحاشية.**

5. عندما تكون $t = 1$، فإن $A \approx 79\ cm^2$.
عندما تكون $t = 2$، فإن $A \approx 314\ cm^2$.
عندما تكون $t = 3$، فإن $A \approx 707\ cm^2$.
عندما تكون $t = 4$، فإن $A \approx 1257\ cm^2$.
عندما تكون $t = 5$، فإن $A \approx 1963\ cm^2$.

يمكنك استخدام ناتج قسمة الفرق لحساب معدل التغير في مساحة الدائرة عند نقطة زمنية محددة.

نشاط 3 تقريب المعدل المترابط

عيّن معدل تغير مساحة الدائرة في النشاط 2 على وجه التقريب.

الخطوة 1 استبدل تعبير مساحة الدائرة بناتج قسمة الفرق.
$$m = \frac{\pi[5(t+h)]^2 - \pi(5t)^2}{h}$$

الخطوة 2 عيّن معدل تغير الدائرة بعد ثانيتين على وجه التقريب. افترض أن $h = 0.1, 0.01, 0.001$.
**$h = 0.1, m = 322;$
$h = 0.01, m = 314.9;$
$h = 0.001, m = 314.2$**

الخطوة 3 كرر الخطوات 1, 2 عندما ثوانٍ $t = 3$، و ثوانٍ $t = 4$. **انظر الحاشية.**

نصيحة دراسية
ناتج قسمة الفرق تذكَّر أن ناتج قسمة الفرق لحساب ميل خط المماس بالتمثيل البياني الخاص بـ $f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ يكون $m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

تحليل النتائج

7. إلى أي قيمة من قيم t يبدو اقتراب معدلات التغير؟

8. ماذا يحدث لمعدل تغير مساحة الدائرة مع زيادة نصف القطر؟ اشرح.

9. ما وجه اختلاف هذا المنهج عن المنهج الذي استخدمته في النشاط 1 لإيجاد معدل تغير المسافة بين السيارتين؟ اشرح لماذا كان هذا ضروريًا. **انظر الحاشية.**

7. عندما تكون $t = 2$، فإن m تصل إلى $314\ cm^2/sec$. عندما تكون $t = 3$، فإن m تصل إلى $471\ cm^2/sec$. عندما تكون $t = 4$، فإن m تصل إلى $628\ cm^2/sec$.

8. الإجابة النموذجية: بزيادة نصف القطر، يكون معدل زيادة مساحة الدائرة أكبر. وبما أن مساحة الدائرة تُعيَّن من خلال تربيع نصف القطر، فإن أي زيادة في نصف القطر تؤثر في المساحة.

التمثيل والتطبيق **a, d, e. انظر الحاشية.**

10. سلّم يبلغ طوله 13 قدمًا يستند إلى جدار، بحيث تكون قاعدته على بعد 5 أقدام من قاعدة الجدار. إذا بدأ قاع السلم في الانزلاق بعيدًا عن الجدار بمعدل قدمين في الثانية، فما سرعة انزلاق قمة السلم إلى أسفل الجدار؟

a. مثّل الحالة. افترض أن d هي المسافة من قمة السلم إلى الأرض، وm هو معدل انزلاق قمة السلم إلى أسفل الجدار.

b. اكتب تعبيرًا للمسافة من قاعدة السلم إلى الحائط بعد عدد t من الثواني. $5 + 2t$

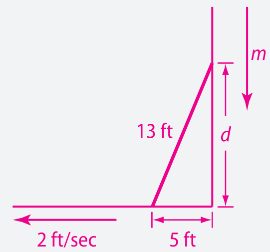
c. أوجد معادلة للمسافة d من قمة السلم إلى الأرض بدلالة t بالتعويض بالتعبير الموجود في الجزء b في مبرهنة فيثاغورس.

d. استخدم مبرهنة فيثاغورس لإيجاد المسافة d من قمة السلم إلى الأرض عندما يكون $t = 0, 1, 2, 3, 3.5, 3.75$.

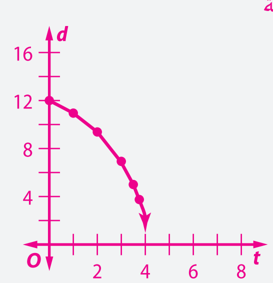
e. اصنع تمثيلاً بيانيًا للقيم. ما نوع الدوال الذي يعبّر عنه التمثيل البياني؟

f. استخدم ناتج قسمة الفرق لتقدير معدل تغير m للمسافة من قمة السلم إلى الأرض عندما تكون $t = 2$. افترض أن $h = 0.1, 0.01, 0.001$. وباقتراب قيمة h من الصفر، فإلى أي القيم يبدو اقتراب قيم m ؟ **حوالي -1.92 ft/s**

10a.



10e. الدوال التربيعية

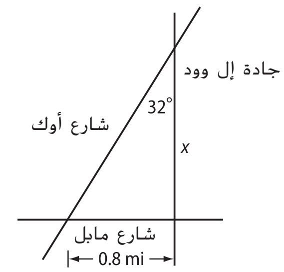


10d.

t	0	1	2	3	3.5	3.75
d	12	10.95	9.38	6.93	5	3.57

الدرس 3-1

29a.



83. الإجابة النموذجية: بالنسبة إلى الزاوية الحادة θ من المثلث قائم الزاوية، $\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}, \cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}, \tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}, \cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}}$

باستخدام تلك التعريفات، $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\text{opp}}{\text{hyp}}}{\frac{\text{adj}}{\text{hyp}}} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \tan\theta$.

وبالمثل، $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{\text{adj}}{\text{hyp}}}{\frac{\text{opp}}{\text{hyp}}} = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \cot\theta$.

84. محمد؛ الإجابة النموذجية: دالة الـ Csc هي دالة المعكوس الضربي لدالة الـ Sine . إذن، إذا كانت $\sin\theta = a$، فإن $\csc\theta = \frac{1}{a}$ حيث $a \neq 0$.

85. الدوال المثلثية دوال متسامية لأنه لا يمكن التعبير عنها من خلال العمليات الجبرية. على سبيل المثال، لا سبيل لإيجاد قيمة θ في $y = \cos\theta$ بجمع الثابت أو طرحها أو ضربها أو قسمتها و θ أو رفع θ إلى قوة نسبية.

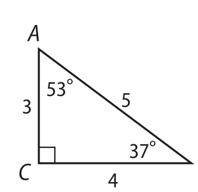
86. الإجابة النموذجية: إذا رسمت ارتفاع المثلث، فإنه يكوّن مثلثين قائمي الزاوية. طول الارتفاع يساوي $a\sin\theta$ باستخدام الصيغة $A = \frac{1}{2}bh$ حيث تكون قاعدة المثلث b والارتفاع $a\sin\theta$.

87. الإجابة النموذجية: بفرض وجود مثلث وتره c وساقان a و b وبفرض أن $\theta = \frac{b}{c}$ و $\cos\theta = \frac{a}{c}$. باستخدام نظرية فيثاغورس، $c^2 = a^2 + b^2$

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2$$
$$= \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2}$$
$$= \frac{b^2 + a^2}{c^2}$$
$$= \frac{c^2}{c^2}$$
$$= 1$$

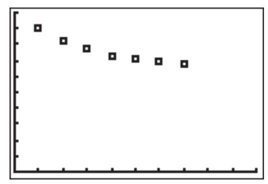
إذن، $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

89. خطأ؛ الإجابة النموذجية: في $\triangle ABC$، $m\angle B < m\angle A$، $\cos B \approx 0.7986$ و $\cos A \approx 0.6018$. إذن، $\cos B > \cos A$ وبالتالي العبارة خاطئة.



91. الإجابة النموذجية: بما أن دالة الـ Cosine هي المعكوس الضربي لدالة الـ Sec . فإن دالة الـ Sine هي المعكوس الضربي لدالة الـ Csc، ودالة الـ Tan هي المعكوس الضربي لدالة الـ Csc . يمكنك إيجاد قيمة الـ Cot أو الـ Csc أو دالة Sec ظل التمام على حاسبة التمثيل البياني عن طريق إيجاد واحد مقسوم على المعكوس الضربي للدالة.

101a.

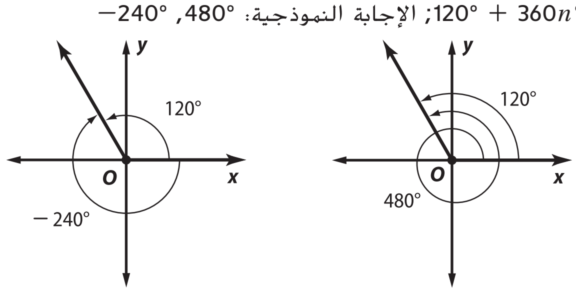


[0, 10] scl: 1 by [0, 1000] scl: 100

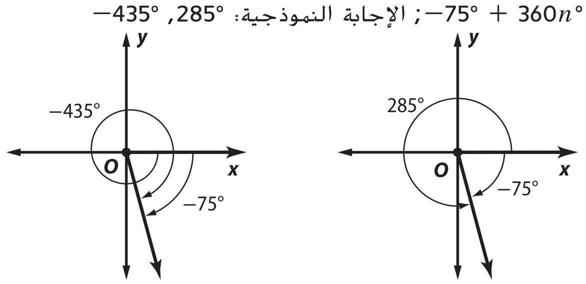
الدرس 3-2

18–25. n هو عدد صحيح.

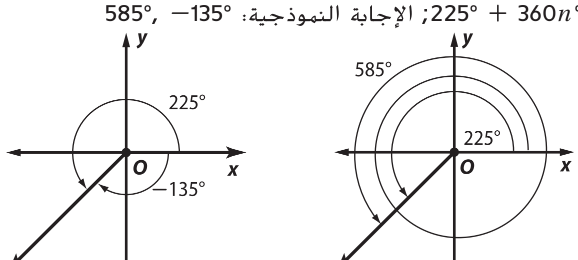
18. $120° + 360n°$؛ الإجابة النموذجية: 480°، −240°



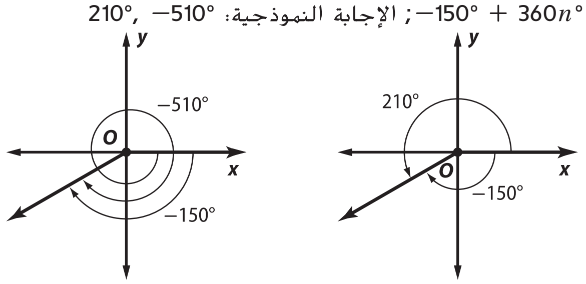
19. $-75° + 360n°$؛ الإجابة النموذجية: 285°، −435°



20. $225° + 360n°$؛ الإجابة النموذجية: 585°، −135°



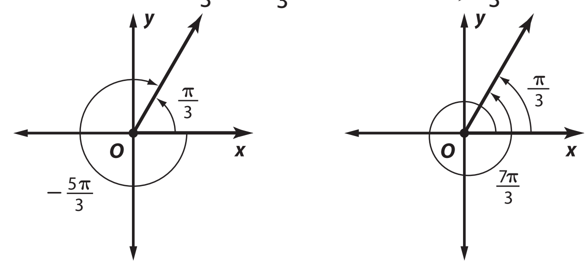
21. $-150° + 360n°$؛ الإجابة النموذجية: 210°، −510°



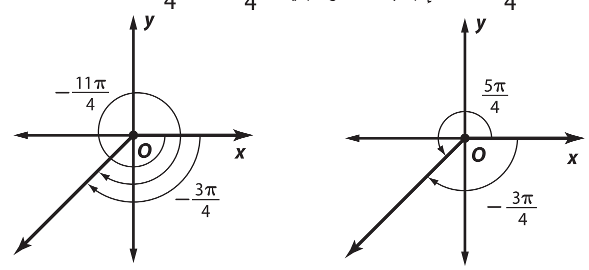
الوحدة 3 ملحق الإجابات

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_Co3_v2_718375.indb 1 12/15/2016 11:42:34 PM

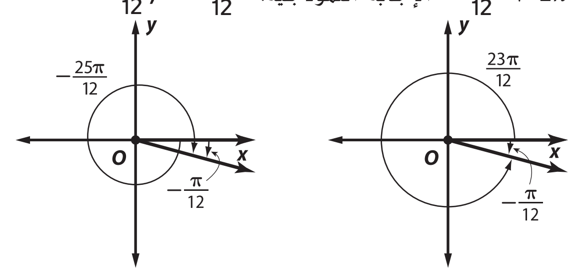
.22 $\frac{\pi}{3}+2n\pi$ الإجابة النموذجية: $\frac{7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$



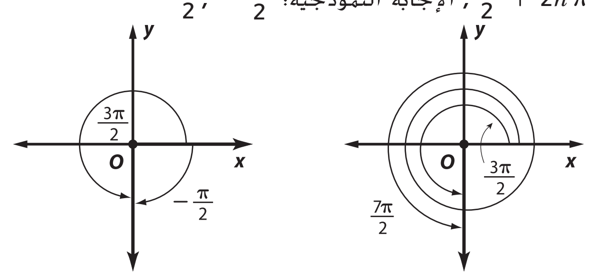
.23 $-\frac{3\pi}{4}+2n\pi$؛ الإجابة النموذجية: $\frac{5\pi}{4}, -\frac{11\pi}{4}$



.24 $-\frac{\pi}{12}+2n\pi$; الإجابة النموذجية: $\frac{23\pi}{12}, -\frac{25\pi}{12}$



.25 $\frac{3\pi}{2}+2n\pi$; الإجابة النموذجية: $\frac{7\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$



.75 تناقص. الإجابة النموذجية: إذا تناقص نصف القطر، فسوف تتناقص السرعة الخطية أيضًا لأن السرعة الخطية تتناسب طرديًا مع نصف القطر.

.76 تزايد. الإجابة النموذجية: إذا تناقص نصف القطر، فسوف تتزايد السرعة الخطية أيضًا لأن السرعة الخطية تتناسب عكسيًا مع الوحدة الزمنية.

.77 تزايد. الإجابة النموذجية: وقد تُكتب معادلة السرعة الخطية على النحو التالي $v = r\omega$. إذا تزايدت سرعة الزاوية، فسوف تتزايد السرعة الخطية أيضًا لأن السرعة الخطية تتناسب طرديًا مع سرعة الزاوية.

.78 البرهان:

المعطيات: $\frac{s_1}{r_1}=\frac{s_2}{r_2}$

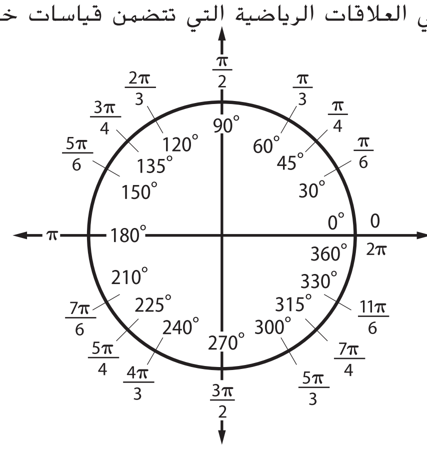
برهن: $\theta_1=\theta_2$

1. $\frac{s_1}{r_1}=\frac{s_2}{r_2}$	(المعطيات)
2. $s=r\theta$	(صيغة طول القوس)
3. $s_1=r_1\theta_1, s_2=r_2\theta_2$	(التعويض)
4. $\frac{s_1}{r_1}=\theta_1, \frac{s_2}{r_2}=\theta_2$	(خاصية القسمة في المساواة)
5. $\theta_1=\theta_2$	(خاصية التحويل في المساواة باستخدام 1 و 4)

.79a المحيط يتضاعف. الإجابة النموذجية: محيط قطاع الدائرة P يساوي مجموع أطوال القوس s وضعف نصف القطر r. إذن $P = s + 2r$. لأن $s = r\theta$. إذا تضاعف نصف القطر، فسوف يصبح طول القوس طول قوس جديد $s' = (2r)\theta$، الذي يساوي $s' = 2(r\theta)$ أو $s' = 2s$. إذن، سيكون المحيط $P = 2s + 2(2r)$ أو $P = 2(s + 2r)$. إذن، يتضاعف المحيط.

.79b تزيد المساحة أربعة أضعاف. الإجابة النموذجية: لأن $A=\frac{1}{2}r^2\theta$، إذا تضاعف نصف القطر، فسوف تصبح المساحة مساحة جديدة $A'=\frac{1}{2}(2r)^2\theta$ وهو ما يساوي $A'=\frac{1}{2}4r^2\theta$ أو $A'=4\left(\frac{1}{2}r^2\theta\right)$. إذن، تتضاعف المساحة أربعة أضعاف.

.80 الإجابة النموذجية: تستخدم الدرجة ومقاييس راديان في وصف قياسات الزوايا. وقياسات الدرجات لها وحدات؛ بينما تعتبر قياسات راديان بلا وحدات ومن ثم يمكن استخدامها في العلاقات الرياضية التي تتضمن قياسات خطية.



81. $\cos\theta=\frac{\sqrt{161}}{15}, \tan\theta=\frac{8\sqrt{161}}{161}, \csc\theta=\frac{15}{8},$
$\sec\theta=\frac{15\sqrt{161}}{161}, \cot\theta=\frac{\sqrt{161}}{8}$

82. $\sin\theta=\frac{\sqrt{21}}{14}, \cos\theta=\frac{5\sqrt{7}}{14}, \tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{5}, \csc\theta=\frac{2\sqrt{21}}{3},$
$\cot\theta=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

83. $\sin\theta=\frac{19\sqrt{26}}{130}, \cos\theta=\frac{17\sqrt{26}}{130}, \tan\theta=\frac{19}{17},$
$\csc\theta=\frac{5\sqrt{26}}{19}, \sec\theta=\frac{5\sqrt{26}}{17}$

الدرس 3-3

33. $\sin\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \csc\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}, \sec\theta = \sqrt{5},$
$\cot\theta = \frac{1}{2}$

34. $\sin\theta = \frac{1}{2}, \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \sec\theta = -\frac{2\sqrt{3}}{3},$
$\cot\theta = -\sqrt{3}$

35. $\cos\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \tan\theta = -\frac{\sqrt{6}}{12}, \csc\theta = -5, \sec\theta = \frac{5\sqrt{6}}{12},$
$\cot\theta = -2\sqrt{6}$

36. $\sin\theta = -\frac{5}{13}, \tan\theta = \frac{5}{12}, \csc\theta = -\frac{13}{5}, \sec\theta = -\frac{13}{12},$
$\cot\theta = \frac{12}{5}$

37. $\sin\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}, \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \tan\theta = -\sqrt{2}, \csc\theta = -\frac{\sqrt{6}}{2},$
$\cot\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

38. $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan\theta = 1, \csc\theta = -\sqrt{2},$
$\sec\theta = -\sqrt{2}$

39. $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \csc\theta = -\sqrt{2}, \sec\theta = \sqrt{2},$
$\cot\theta = -1$

40. $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan\theta = -\sqrt{3}, \csc\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \sec\theta = -2,$
$\cot\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

59.

t	θ
0	22
0.5	0
1	−22
1.5	0
2	22
2.5	0

78a.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin 2\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\sin 4\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

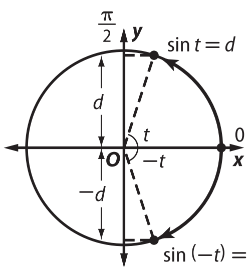
θ	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\theta$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\sin 2\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\sin 4\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

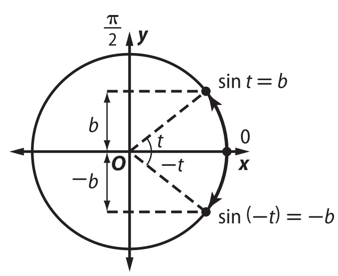
78b. الدورة $\sin\theta$ هي 2π. الدورة $\sin 2\theta$ هي π. الدورة $\sin 4\theta$ هي $\frac{\pi}{2}$.

78c. الإجابة النموذجية: تقل الدورة كلما زادت قيمة n.

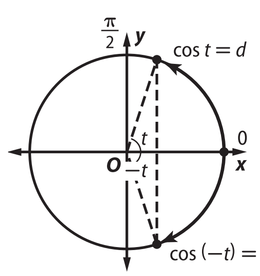
83. الإجابة النموذجية: تُمثِّل دالة الـ Sine بإحداثي y– في دائرة الوحدة. مقارنة $\sin t$ و $\sin(-t)$ للقيم المختلفة من t. لاحظ أن الإحداثي y–موجب بالنسبة إلى $\sin t$ وسالب بالنسبة إلى $\sin(-t)$. على سبيل المثال، على دائرة الوحدة الأولى، $\sin t = b$ و $\sin(-t) = -b$. والآن أوجد $-(\sin t)$ للتحقق من العلاقة.

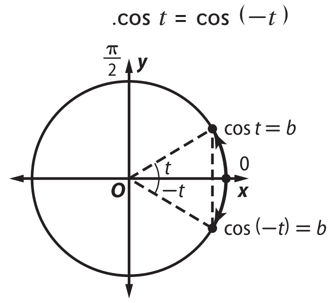
$-(\sin t) = -(b)$ أو $-b$. الذي يساوي $\sin(-t)$. وبالتالي، $-\sin t = \sin(-t)$.





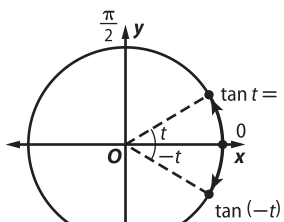
84. الإجابة النموذجية: تُمثِّل دالة الـ Cosine بإحداثي x في دائرة الوحدة. وبمقارنة $\cos(-t)$ و $\cos t$ لقيم مختلفة من t. لاحظ أن قيمة الـ Cosine. إحداثي x–. سوف يكون هو نفسه بغض النظر عن الإشارة t. وبالتالي فإنّ، $\cos t = \cos(-t)$.

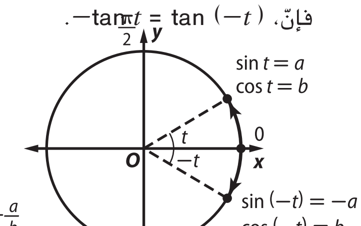




85. الإجابة النموذجية: بما أن $t = \frac{\sin t}{\cos t}$ يمكننا أن نحلل $\tan-$ t و $\tan(-t)$ بالنظر أولاً إلى الـ Sine والـ Cosine لـ t و $(-t)$ على دائرة الوحدة للقيمة المفترضة لـ t. بغض النظر عن إشارة t. فإن قيمة الـ Cosine تظل كما هي. ومع ذلك تكون قيمة الـ Sine موجبة عند t وسالبة عند $-t$. وهذا ينتج عنه $\tan t = \frac{a}{b}$. لكن $\tan(-t) = -\frac{a}{b}$.
والآن أوجد $\tan t-$ للتحقق من العلاقة.

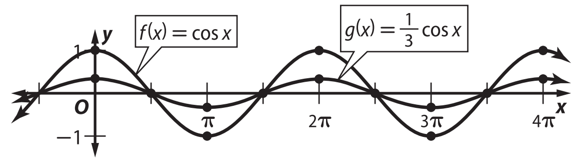
$-\tan t = -(\frac{a}{b})$ أو $-\frac{a}{b}$ التي تساوي $\tan(-t)$. وبالتالي فإنّ، $-\tan t = \tan(-t)$.



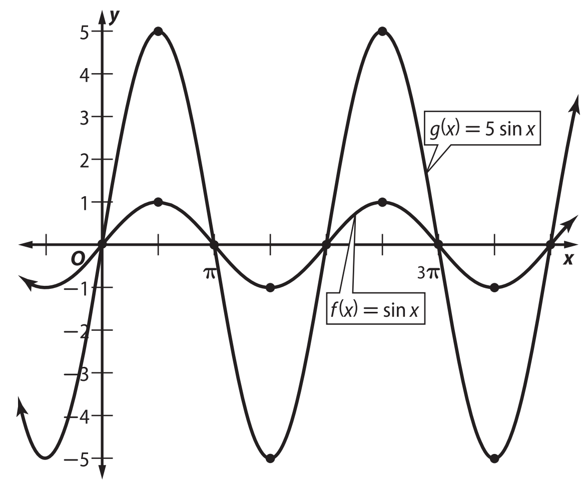


الدرس 3-4 (تمرين موجه)

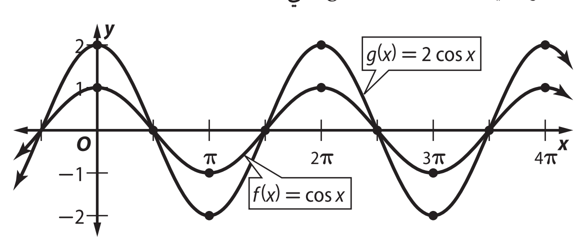
1A. التمثيل البياني لـ$g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـ $f(x)$ المضغوط رأسيًّا. السعة لـ $g(x)$ هي $\frac{1}{3}$.



1B. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـ $f(x)$ الممتد رأسيًّا. السعة لـ $g(x)$ هي 5.

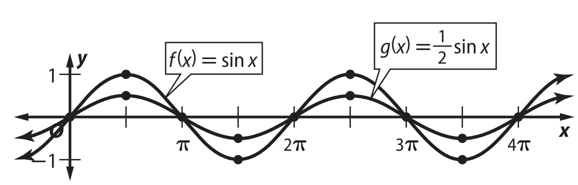


1C. التمثيل البياني لـ$g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـ $f(x)$ الممتد رأسيًّا. السعة لـ $g(x)$ هي 2.

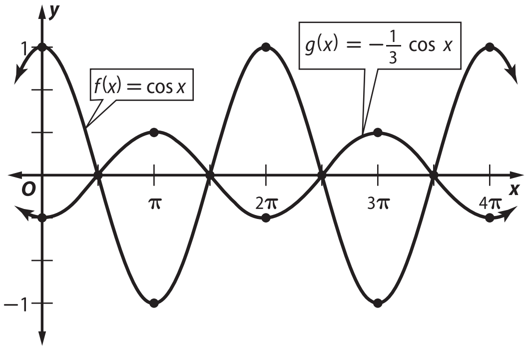


الدرس 3-4

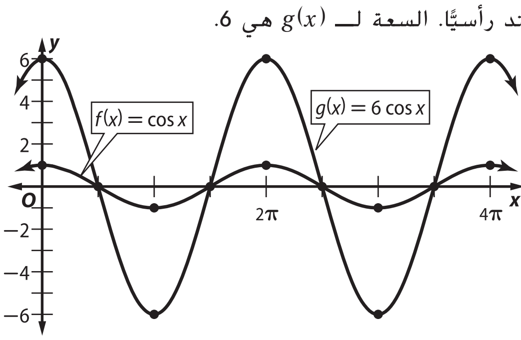
1. التمثيل البياني لـ$g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ المضغوط رأسيًّا. السعة لـ $g(x)$ هي $\frac{1}{2}$.



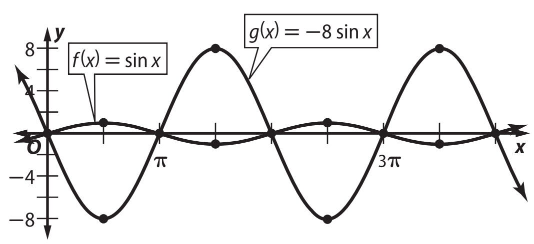
2. التمثيل البياني لـ$g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـ $f(x)$ المضغوط رأسيًّا ومن ثم منعكس في المحور x. السعة لـ $g(x)$ هي $\frac{1}{3}$.



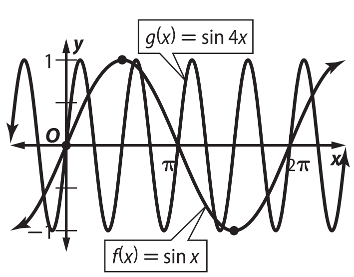
3. التمثيل البياني لـ$g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـ $f(x)$ الممتد رأسيًّا. السعة لـ $g(x)$ هي 6.



4. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـ $f(x)$ الممتد رأسيًّا ومن ثم منعكس في المحور x. السعة لـ $g(x)$ هي 8.

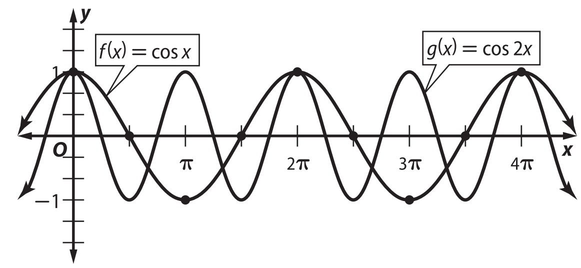


5. التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـ $f(x)$ المضغوط أفقيًّا. الدورة لـ $g(x)$ هي $\frac{\pi}{2}$.

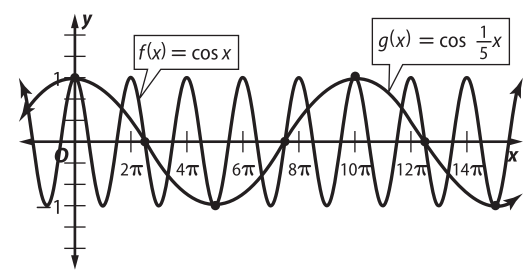


الوحدة 3 ملحق الإجابات

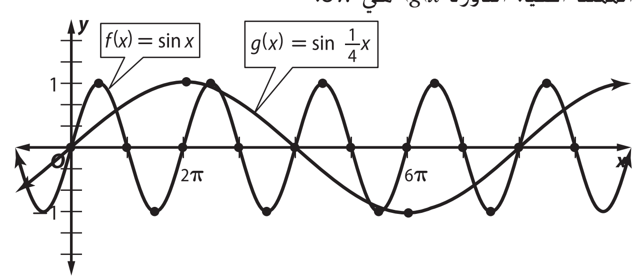
.6 التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـ $f(x)$ المضغوط أفقيًّا. الدورة $g(x)$ هي π.



.7 التمثيل البياني لـ $g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـ $f(x)$ الممتد أفقيًّا. الدورة $g(x)$ هي 10π.



.8 التمثيل البياني لـ$g(x)$ هو نفسه التمثيل البياني لـ $f(x)$ الممتد أفقيًّا. الدورة $g(x)$ هي 8π.



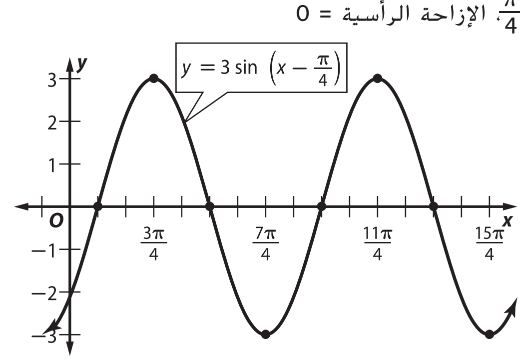
.10 الإجابة النموذجية: $y = 0.3 \sin 880\pi t$

.11 الإجابة النموذجية: $y = 0.25 \sin 1864\pi t$

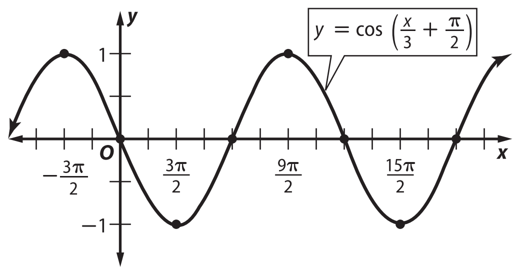
.12 الإجابة النموذجية: $y = 0.12 \sin 2490\pi t$

.13 الإجابة النموذجية: $y = 0.2 \sin 1246\pi t$

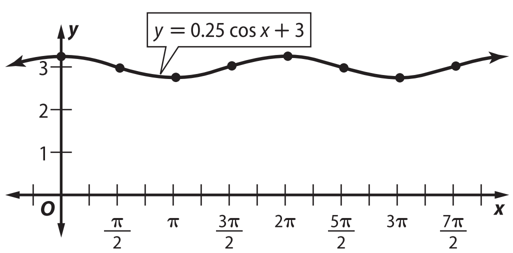
.14 السعة = 3؛ الدورة = 2π. التكرار = $\frac{1}{2\pi}$ ؛ الإزاحة الطور = $\frac{\pi}{4}$. الإزاحة الرأسية = 0



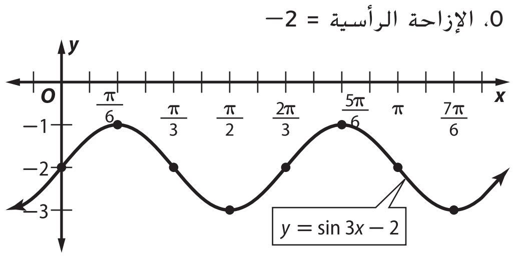
.15 السعة = 1. الدورة = 6π. التكرار = $\frac{1}{6\pi}$. الإزاحة الطور = $-\frac{3\pi}{2}$. الإزاحة الرأسية = 0



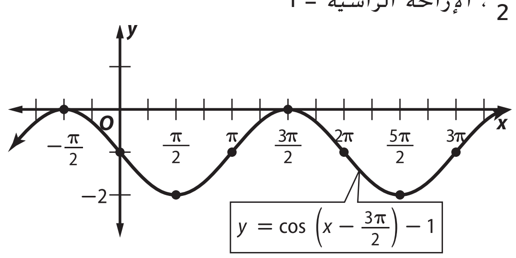
.16 السعة = $\frac{1}{4}$. الدورة = 2π. التكرار= $\frac{1}{2\pi}$. الإزاحة الطور = 0; الإزاحة الرأسية = 3



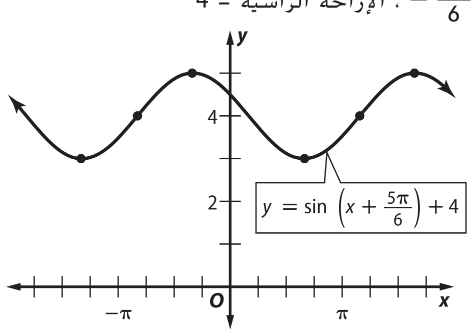
.17 السعة = 1. الدورة = $\frac{2\pi}{3}$. التكرار = $\frac{3}{2\pi}$. الإزاحة الطور = 0. الإزاحة الرأسية = -2



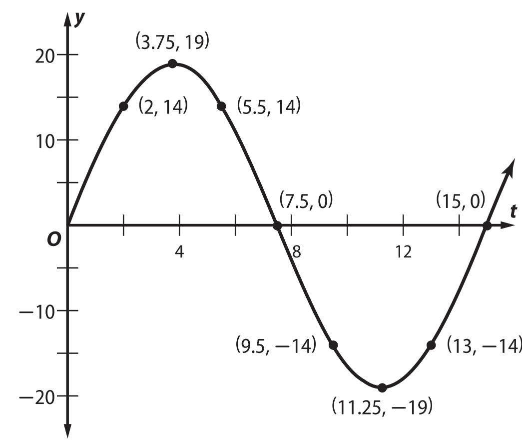
.18 السعة = 1. الدورة = 2π. التكرار = $\frac{1}{2\pi}$. الإزاحة الطور = $\frac{3\pi}{2}$. الإزاحة الرأسية = -1



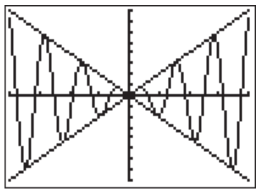
.19 السعة = 1. الدورة = 2π. التكرار = $\frac{1}{2\pi}$. الإزاحة الطور = $-\frac{5\pi}{6}$. الإزاحة الرأسية = 4



.30c



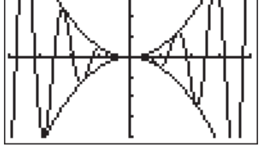
.39a



$[-20, 20]$ scl: 5 by $[-40, 40]$ scl: 5

.39b التمثيل البياني لـ $y = 2x \cos x$ يتذبذب بين التمثيلات البيانية لـ $y = 2x$ و $y = -2x$.

.39c



$[-20, 20]$ scl: 5 by $[-200, 200]$ scl: 50

.39d التمثيل البياني لـ $y = x^2 \sin x$ يتذبذب بين التمثيلات البيانية لـ $y = x^2$ و $y = -x^2$.

.39e التمثيل البياني لـ $y = f(x) \sin x$ أو $y = f(x) \cos x$ سوف يتذبذب بين التمثيلات البيانية لـ $y = f(x)$ و $y = -f(x)$.

.41 صواب. الإجابة النموذجية: التمثيل البياني لـ $y = \cos x$ هو الإزاحة الأفقية للتمثيل البياني لـ $y = \sin x$. إذن، يمكن كتابة دالة الـ Cosine من أي دالة الـ Sine باستخدام السعة نفسها والدورة عن طريق تطبيق الإزاحة الطور اللازمة.

.44 الإجابة النموذجية: تأمل $y = a \sin (bx + c)$، حيث $a, b, c \neq 0$. لإيجاد صفر دالة ما، أوجد قيمة x التي تكون فيها $a \sin(bx + c) =$ 0. بما أن $\sin 0 = 0$. فإن حل $bx + c = 0$ سينتج صفر الدالة.

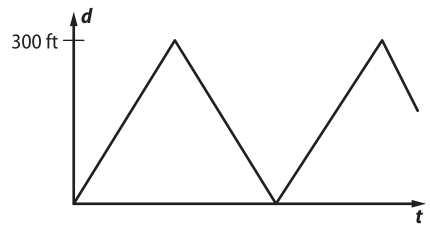
$$bx + c = 0$$
$$bx = -c$$
$$x = -\frac{c}{b}$$

إذن، $y = 0$ عندما تكون $x = -\frac{c}{b}$. قيمة $-\frac{c}{b}$ هي الإزاحة الطور.

عندما تكون $c > 0$: التمثيل البياني لـ $y = a \sin (x + c)$ هو نفسه التمثيل البياني لـ $y = a \sin bx$. وحدات $\left|\frac{c}{b}\right|$ مزاحة إلى اليسار.

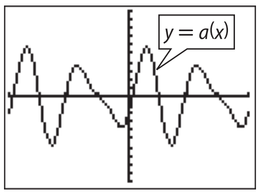
عندما تكون $c < 0$: التمثيل البياني لـ $y = a \sin (x + c)$ هو نفسه التمثيل البياني لـ $y = a \sin bx$. مزاحًا بمقدار $\left|\frac{c}{b}\right|$ وحدة إلى اليمين.

.45 الإجابة النموذجية: برغم أن النبض يمكن تمثيله كدالة لها الدورة، فهو ليس دالة منحنى الـ Sine لأن مسافة بُعد نبض الضوء عن الأرض تتغير بمعدل ثابت. ونتيجة لذلك، فإن التمثيل البياني لهذه الدالة يشبه التمثيل البياني التالي.

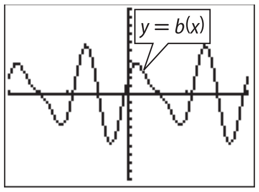


التوسع 3-4

.1 الإجابة النموذجية: $[0, 2\pi]$. الدورة: 2π

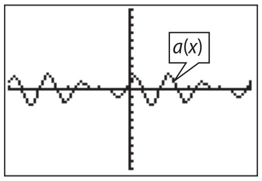


$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

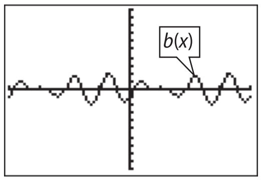


$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

.2 الإجابة النموذجية: $[0, \pi]$. الدورة: π

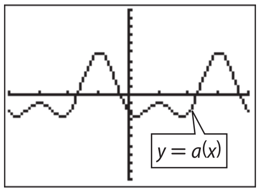


$[-\pi, \pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

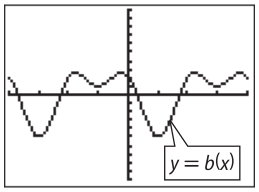


$[-\pi, \pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

.3 الإجابة النموذجية: $[0, 2\pi]$. الدورة: 2π

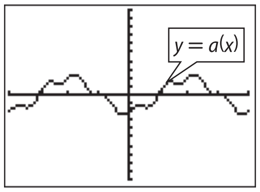


$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

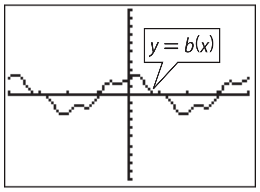


$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

.4 الإجابة النموذجية: $[0, 2\pi]$. الدورة: 2π

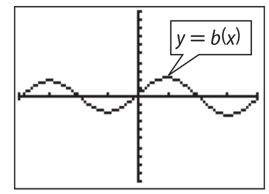


$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

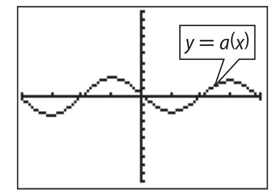


$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

.5 الإجابة النموذجية: $[0, 4\pi]$. الدورة: 4π

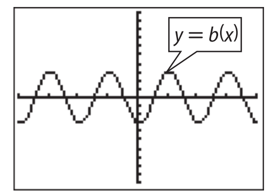


$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

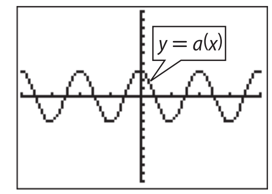


$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

.6 الإجابة النموذجية: $[0, \pi]$. الدورة: π



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

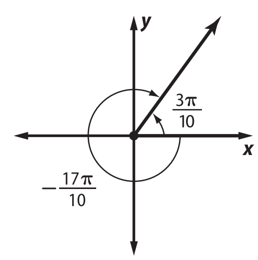


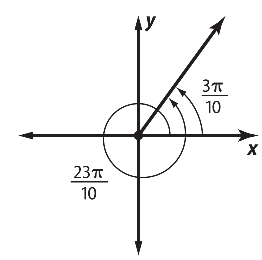
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

اختبار منتصف الوحدة

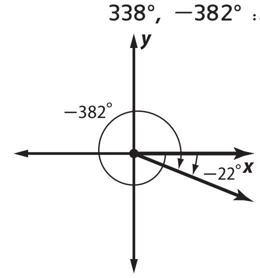
9–10. n هو عدد صحيح.

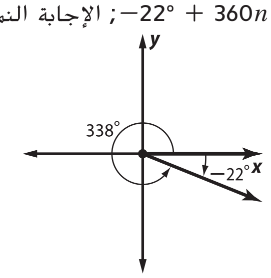
.9 $\frac{3\pi}{10} + 2n\pi$؛ الإجابة النموذجية: $\frac{23\pi}{10}, -\frac{17\pi}{10}$



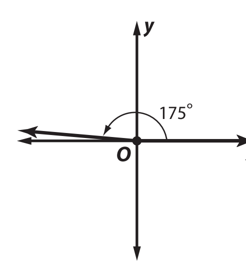


.10 $-22° + 360n°$؛ الإجابة النموذجية: $338°, -382°$

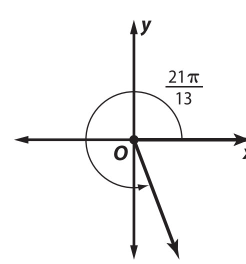




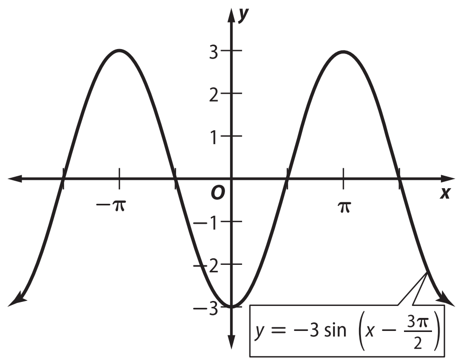
.13 $5°$



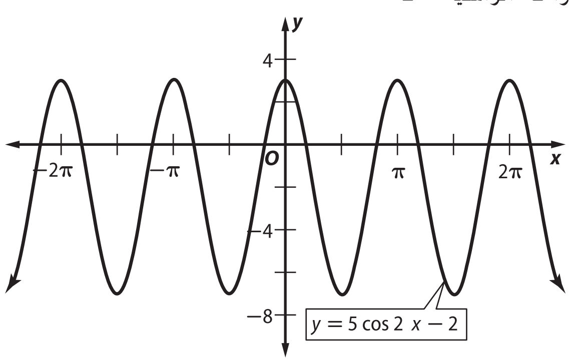
.14 $\frac{5\pi}{13}$



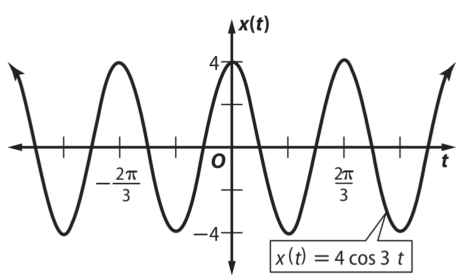
.21 السعة = 3. الدورة = 2π. التكرار = $\frac{1}{2\pi}$. الإزاحة الطور = $-\frac{3\pi}{2}$. الإزاحة الرأسية = 0



.22 السعة = 5. الدورة = π. التكرار = $\frac{1}{\pi}$. الإزاحة الطور = 0.
الإزاحة الرأسية = -2

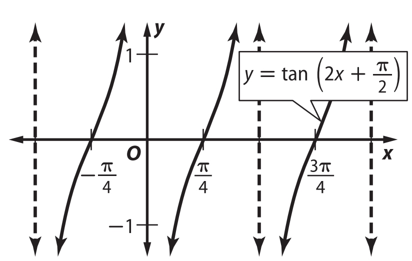


24a.

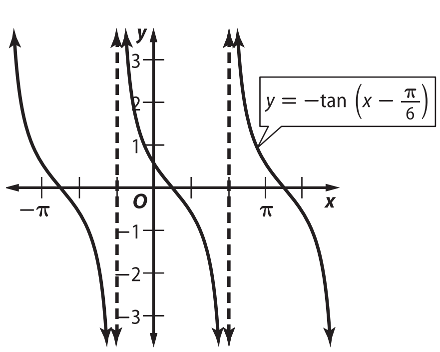


الدرس 3-5 (تمرين موجه)

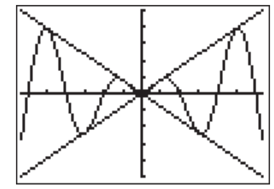
2A.



2B.

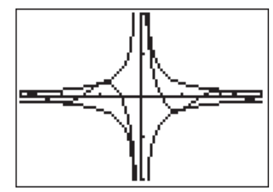


5A. $f(x) = 5x$ تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من 0.



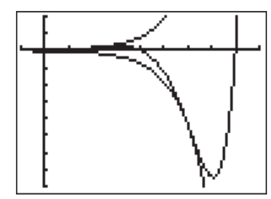
$[-10, 10]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-50, 50]$ scl: 10

5B. $f(x) = \frac{1}{x}$. تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من $\pm\infty$.



$[-3\pi, 3\pi]$ scl: π by $[-2, 2]$ scl: 1

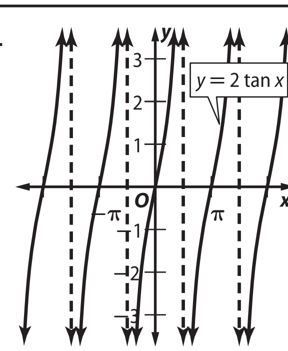
5C. $f(x) = 3^x$. تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من $-\infty$.



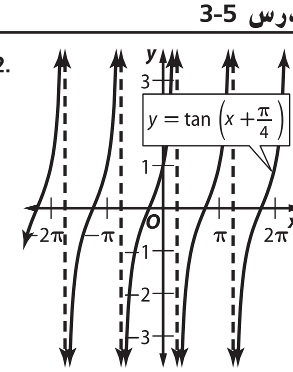
$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-320, 80]$ scl: 40

الدرس 3-5

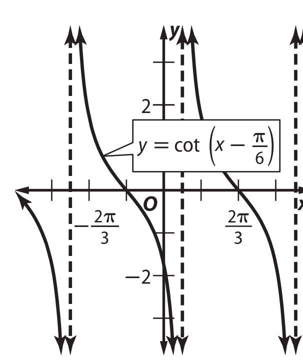
1.



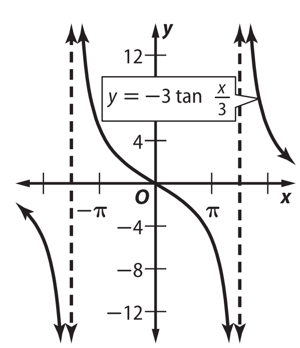
2.



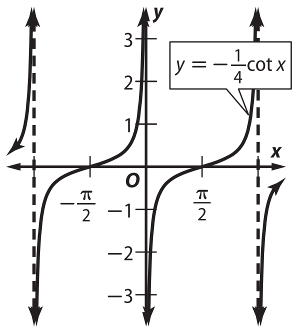
3.



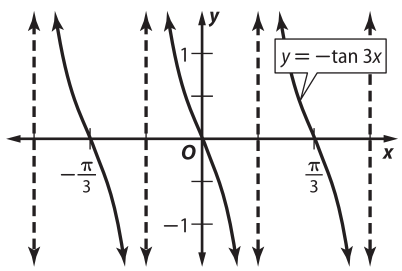
4.



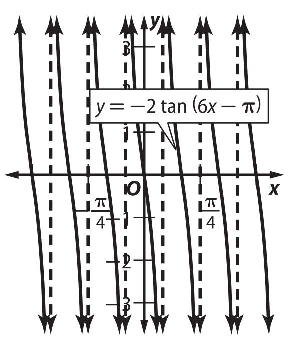
5.



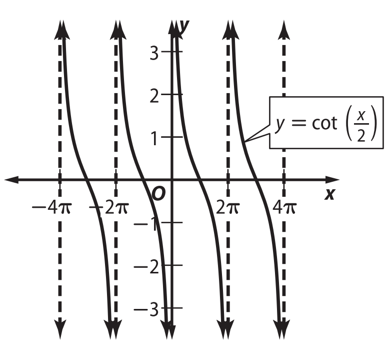
6.



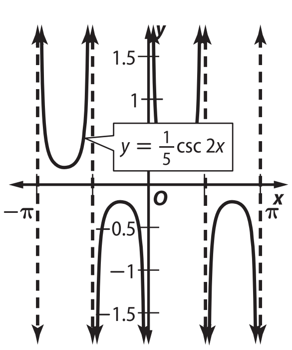
7.



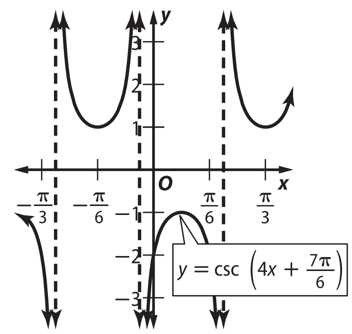
8.



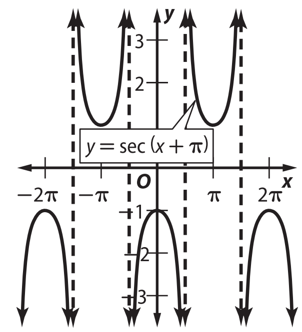
9.



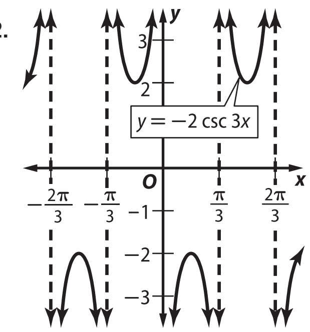
10.



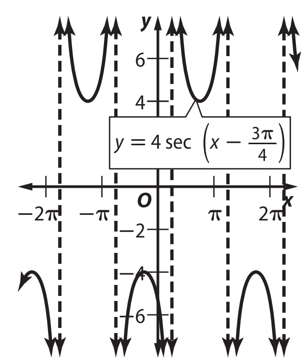
11.



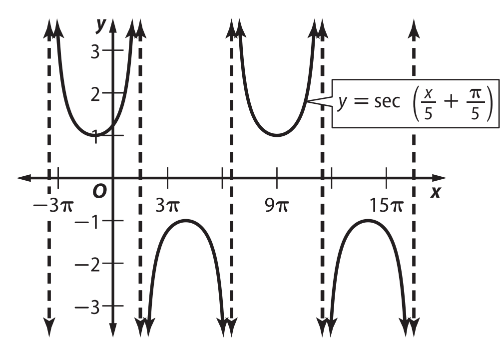
12.



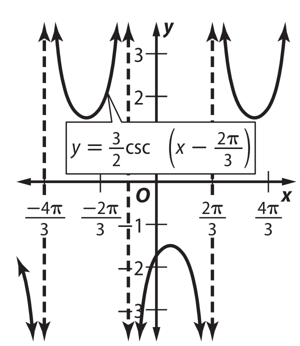
13.



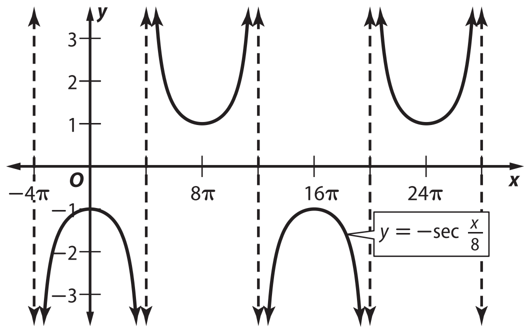
14.



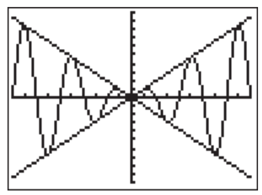
15.



16.

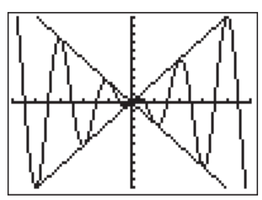


.17 $f(x) = \frac{3}{5}x$. تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من 0 من كلا الاتجاهين.



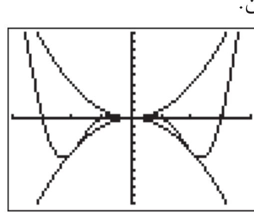
$[-5\pi, 5\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

.18 $f(x) = 4x$. تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من 0 من كلا الاتجاهين.



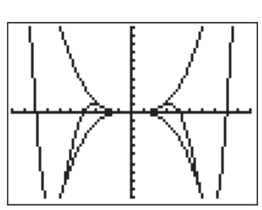
$[-5\pi, 5\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-50, 50]$ scl: 5

.19 $f(x) = 2x^2$. تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من 0 من كلا الاتجاهين.



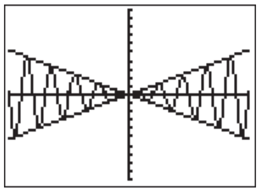
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-50, 50]$ scl: 5

.20 $f(x) = \frac{x^3}{2}$. تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من 0 من كلا الاتجاهين.



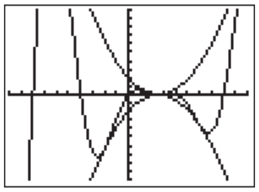
$\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-50, 50]$ scl: 5

21. $f(x) = \frac{1}{3}x$، تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من 0 من كلا الاتجاهين.



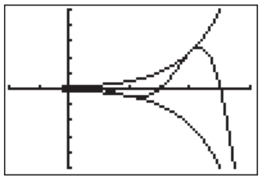
$[-5\pi, 5\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-10, 10]$ scl: 1

22. $f(x) = (x - 2)^2$، تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من 2 من كلا الاتجاهين.



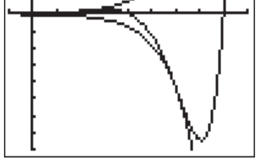
$\left[-\frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-20, 20]$ scl: 2

23. $f(x) = e^{0.5x}$، تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من اللانهاية السالبة وتزيد كلما اقتربت x من اللانهاية الموجبة.



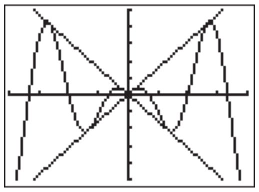
$[-\pi, 3\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-50, 50]$ scl: 10

24. $f(x) = 3^x$، تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من $-\infty$.



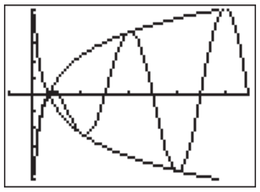
$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-320, 80]$ scl: 40

25. $f(x) = |x|$، تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من 0 من كلا الاتجاهين.



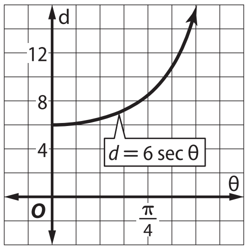
$[-\pi, \pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-2.5, 2.5]$ scl: 0.5

26. $f(x) = \ln x$; $\lim_{x \to 0^+} (\ln x \cos x) = -\infty$ وسعة الدالة تزيد كلما اقتربت x من ∞.

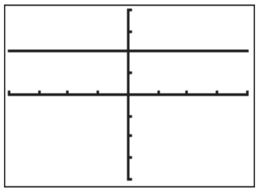


$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2.5, 2.5]$ scl: 0.5

36b.



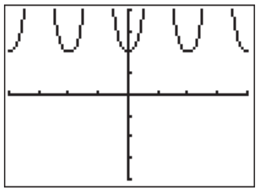
48.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.5

التعابير لا تساوي جميع الأعداد الحقيقية.

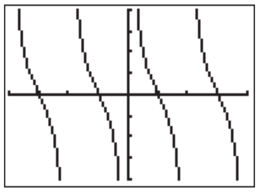
49.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.5

التعابير متساوية.

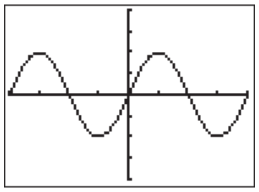
50.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.5

التعابير متساوية.

51.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.5

التعابير لا تساوي جميع الأعداد الحقيقية.

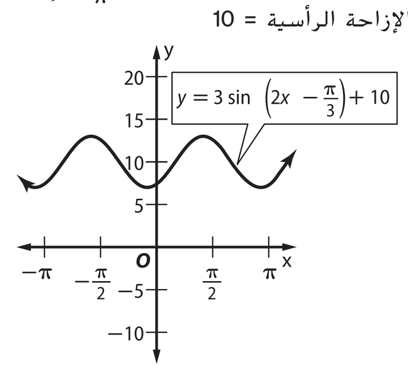
57. لإيجاد التقاطع مع المحور y افترض أن $t = 0$.

المعادلة الأصلية	$y = ke^{-ct}\cos \omega t$
عوّض $t = 0$	$= ke^{-c(0)}\cos(\omega \cdot 0)$
اضرب.	$= ke^{0}\cos 0$
$e^{0} = 1, \cos 0 = 1$	$= k(1)(1)$
حوّل لأبسط صورة.	$= k$

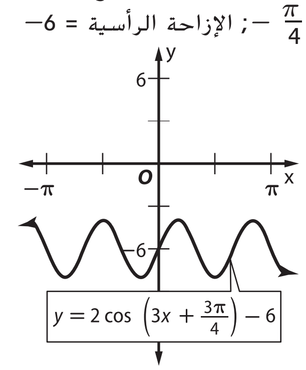
60. هدى، الإجابة النموذجية: التمثيل البياني لـ $y = \cot x$ ليس له تقاطع مع المحور y. بينما التمثيل البياني لـ $y = \tan x$ له التقاطع 0 مع المحور y من. نظرًا لأن كلتا المعادلتين في المسألة لا تشير إلى الإزاحة أفقية للكسر الجزئي ومنحنى التمثيل البياني لا يمر بنقطة الأصل، فلا بد أن تكون إجابة ميرا خاطئة. وكذلك، باستخدام المهارات المستنبطة من هذا الالدرس، تكون لمعادلة هدى a الدورة $\frac{\pi}{2}$، وخطوط مقاربة عند $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = 0$ ، وتقاطعات مع المحور x عند $-\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{4}$ ، و النقاط المتوسطة $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{1}{3}\right)$ و $\left(\frac{3\pi}{8}, -\frac{1}{3}\right)$. التي تتناسب كلها مع التمثيل البياني.

62. الإجابة النموذجية: نظرًا لأن التمثيلات البيانية لـ $y = \sin bx$ و $y = \cos bx$ تتذبذب بين $y = -1$ و $y = 1$. فعند ضرب أي من تلك العوامل في عامل التضاؤل لـ $f(x)$، سوف يتذبذب التمثيل البياني الناتج بين $y = -1 \cdot f(x)$ أو $y = -f(x)$ و $y = 1 \cdot f(x)$ أو $y = f(x)$.

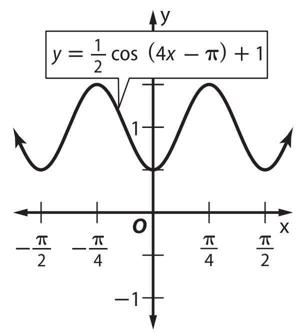
63. السعة = 3، الدورة π. التكرار= $\frac{1}{\pi}$ ، الإزاحة الطور = $-\frac{\pi}{6}$. الإزاحة الرأسية = 10



64. السعة = 2، الدورة = $\frac{2\pi}{3}$ ، التكرار = $\frac{3}{2\pi}$، الإزاحة الطور = $-\frac{\pi}{4}$؛ الإزاحة الرأسية = -6

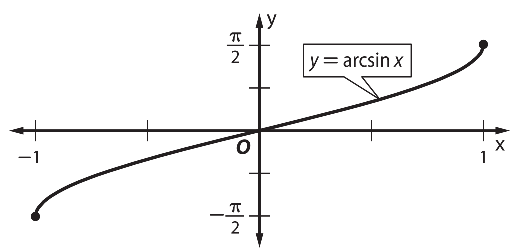


65. السعة = $\frac{1}{2}$، الدورة = $\frac{\pi}{2}$. التكرار = $\frac{2}{\pi}$. الإزاحة الطور = $\frac{\pi}{4}$.
الإزاحة الرأسية = 1

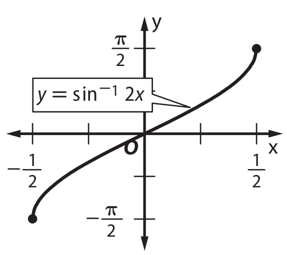


الدرس 3-6

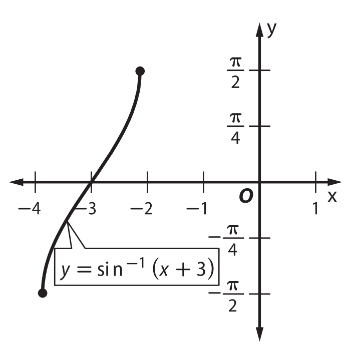
17.



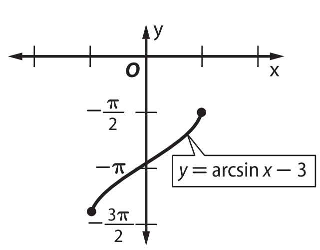
18.



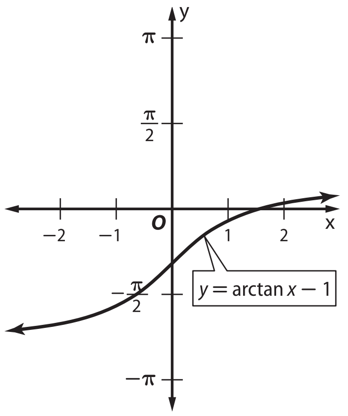
19.



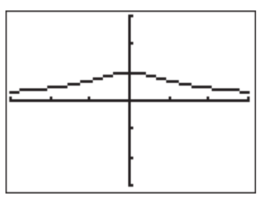
20.



26.

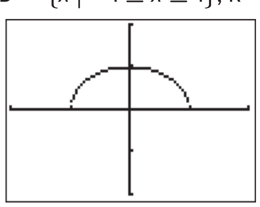


56. $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}; R = \{y \mid 0 < y \leq 1\}$



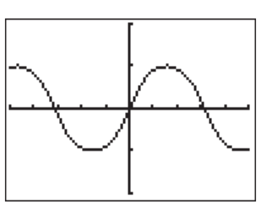
[−3, 3] scl: 1 by [−3, 3] scl: 1

57. $D = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}; R = \{y \mid 0 \leq y \leq 1\}$



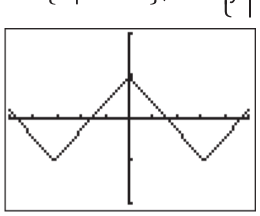
[−2, 2] scl: 1 by [−2, 2] scl: 1

58. $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}; R = \left\{y \,\middle|\, -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}\right\}$



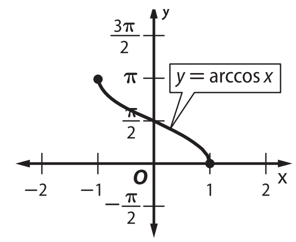
[−5, 5] scl: 1 by $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ scl: $\frac{\pi}{4}$

59. $D = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}; R = \left\{y \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$

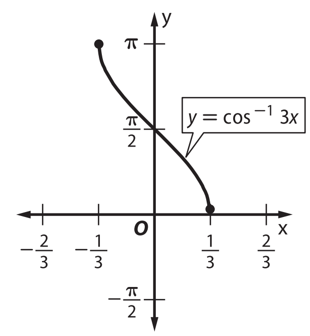


[−5, 5] scl: 1 by [−π, π] scl: $\frac{\pi}{2}$

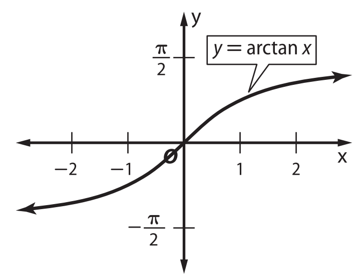
21.



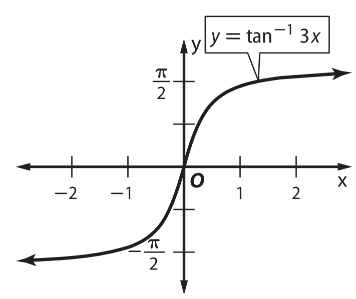
22.



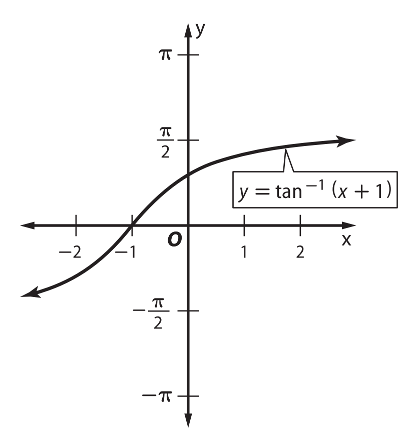
23.



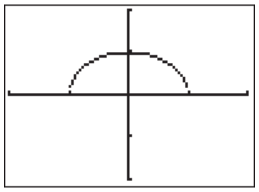
24.



25.

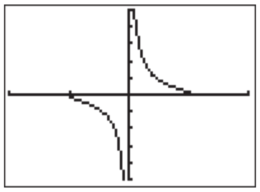


60. $D = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$; $R = \{y \mid 0 \leq y \leq 1\}$



[−2, 2] scl: 1 by [−2, 2] scl: 1

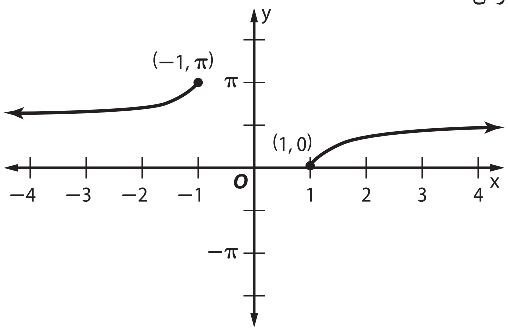
61. $D = \{x \mid -1 \leq x \leq 1, x \neq 0\}$; $R = \{y \mid y \neq 0\}$



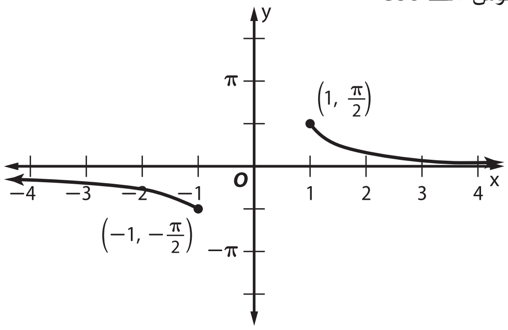
[−2, 2] scl: 1 by [−10, 10] scl: 2

62a. الإجابة النموذجية: قوس الـ Sec: $D: (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$، $R: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$؛ قوس الـ Csc: $D: (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$، $R: \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

62b. قوس الـ Sec



قوس الـ Csc



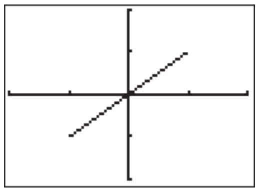
62c. إذا لم تكن القيود موضوعة على مجال الـ Csc و الـ Sec عند التمثيل البياني للمعكوسات. الشبيهة بمعكوسات الـ Sine و الـ Cosine و Sine. فلن تكون المعكوسات دوال.

65a. الإجابة النموذجية: بالنسبة إلى $f \circ f^{-1}$، المجال هو $[-1, 1]$ والمدى هو $[-1, 1]$. بالنسبة إلى $f^{-1} \circ f$، المجال هو $(-\infty, \infty)$ والمدى هو $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

65b. الإجابة النموذجية:

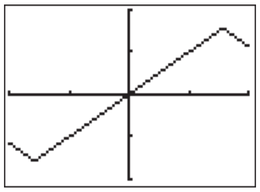
x	−2.0	−1.5	−1.0	−0.75	−0.5	−0.25	0
$f \circ f^{-1}$			−1.0	−0.75	−0.5	−0.25	0
x	0.25	0.5	0.75	1.0	1.5	2.0	
$f \circ f^{-1}$	0.25	0.5	0.75	1.0			
x	−2.0	−1.5	−1.0	−0.75	−0.5	−0.25	0
$f^{-1} \circ f$	−1.142	−1.5	−1.0	−0.75	−0.5	−0.25	0
x	0.25	0.50	0.75	1.0	1.5	2.0	
$f^{-1} \circ f$	0.25	0.50	0.75	1.0	1.5	1.142	

$f \circ f^{-1}$



[−2, 2] scl: 1 by [−2, 2] scl: 1

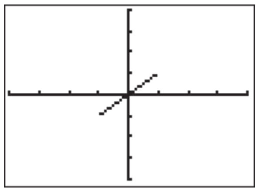
$f^{-1} \circ f$



[−2, 2] scl: 1 by [−2, 2] scl: 1

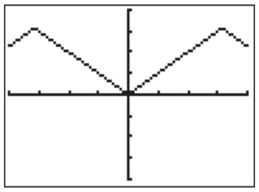
65c. الإجابة النموذجية: بالنسبة إلى $g \circ g^{-1}$، المجال هو $[-1, 1]$ والمدى هو $[-1, 1]$. بالنسبة إلى $g^{-1} \circ g$، المجال هو $(-\infty, \infty)$ والمدى هو $[0, \pi]$. التمثيل البياني لــ $g \circ g^{-1}$ يجب أن يكون الخط $y = x$ بالنسبة إلى $-1 \leq x \leq 1$. الخاصية العكسية للدوال المثلثية تقول إنه خلال الدورة المغلقة $[-1, 1]$، $\cos(\cos^{-1} x) = x$. الرسم البياني لــ $g^{-1} \circ g$ يجب أن يكون الخط $y = x$ بالنسبة إلى $0 \leq x \leq \pi$. بمجرد اقتراب التمثيل البياني من π، يتحول ويتناقص إلى أن يصل إلى المحور x بالمعدل نفسه. عندما يصل إلى المحور x يتحول مرة أخرى ويتزايد إلى أن يصل إلى π. وسوف يواصل على هذا النحو كلما اقترب x من اللانهاية.

65d. $g \circ g^{-1}$



[−4, 4] scl: 1 by [−4, 4] scl: 1

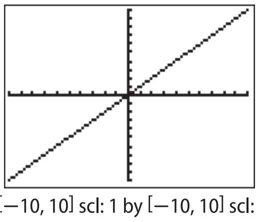
$g^{-1} \circ g$



[−4, 4] scl: 1 by [−4, 4] scl: 1

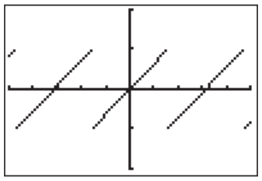
65e. الإجابة النموذجية: بالنسبة إلى $f(x) = \tan(\tan^{-1} x)$، نظرًا للخاصية العكسية في الدوال المثلثية. فإن كل قيم x، $f(x) = x$. وهذا يؤدي بالضرورة إلى أن المستقيم $y = x$ لجميع الأعداد الحقيقية. التمثيل البياني لــ $g(x) = \tan^{-1}(\tan x)$ سيكون مختلفًا لأن $y = \tan x$ غير محددة بالنسبة إلى مضاعفات $\frac{\pi}{2}$. نتيجة لذلك، فإن خطوط المقاربة للمضاعفات $\frac{\pi}{2}$ ممكنة التوقع. يمكننا أيضًا أن نتوقع مدى $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ نظرًا لتعريف arctan.

$f(x) = \tan(\tan^{-1} x)$



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

$g(x) = \tan^{-1}(\tan x)$



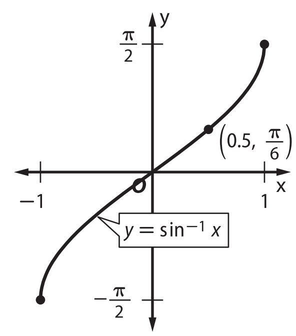
[−5, 5] scl: 0.5 by [−π, π] scl: $\frac{\pi}{2}$

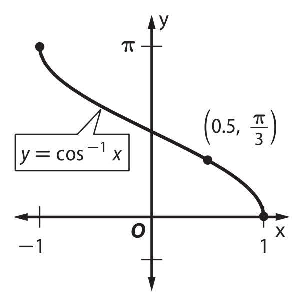
.66 علي. الإجابة النموذجية: لا ينبغي لأحمد أن يفترض أن جميع علاقات الدوال المثلثية تنطبق على معكوساتها. ولا ينبغي له أيضًا أن يقع في خطأ الاعتقاد بأن

$$\sin^{-1}x = \frac{1}{\sin x},\ \cos^{-1}x = \frac{1}{\cos x}, \text{ and } \tan^{-1}x = \frac{1}{\tan x},$$

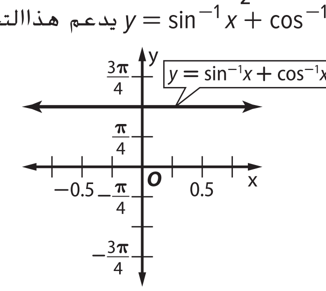
واستخدام تلك العلاقات الخاطئة في إثبات افتراضه الخاطئ. ترتبط القيم المثلثية للزوايا ببعضها البعض. ومع ذلك، عندما نجد $\sin^{-1}x, \cos^{-1}x$, and $\tan^{-1}x$ نحسب قياسات الزوايا. وقياسات الزوايا في حد ذاتها لا تملك تلك العلاقة الفريدة.

.67





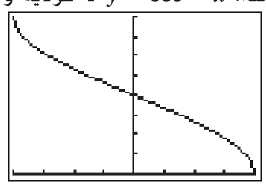
لاحظ من التمثيلات البيانية لـ $y = \sin^{-1}x$ و $y = \cos^{-1}x$ أنه عندما يكون $x = 0.5, \sin^{-1}x = \frac{\pi}{6}$ و $\cos^{-1}x = \frac{\pi}{3}$. إذن، هو $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x$ $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$ أو $\frac{\pi}{2}$. عندما يكون $x = 1, \sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ و $\cos^{-1}x = 0$. إذن $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x$ هي $\frac{\pi}{2} + 0$ أو $\frac{\pi}{2}$. عندما $x = -1, \sin^{-1}x = -\frac{\pi}{2}$ و $\cos^{-1}x = \pi$، إذن $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x$ is $-\frac{\pi}{2} + \pi$ أو $\frac{\pi}{2}$ وبالتالي خلال الدورة الزمنية $[-1, 1]$ يظهر أن $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$. والتمثيل البياني لـ $y = \sin^{-1}x + \cos^{-1}x$ يدعم هذاالتخمين.



.68 خطأ؛ الإجابة النموذجية: $\frac{7\pi}{4}$ لا تندرج ضمن مدى المعكوس. تذكر أن قوس الـ Cosine مقيد بالنصف العلوي من دائرة الوحدة. قيمة θ بالنسبة إلى $\theta = \cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$ هي $\frac{\pi}{4}$.

.69 الإجابة النموذجية: افترض أن $y = \sin^{-1}x$ دالة فردية. تعريف الدالة الفردية يقول إنه لكل x في مجال f، $f(-x) = -f(x)$. إذا افترضنا أن $\sin^{-1}x = u$، فلدينا $x = \sin u$. من خلال الدرس 3-3، عرفنا أن دالة الـ Sine فردية. إذن $-x = \sin(-u)$.

.70 الإجابة النموذجية: التمثيل البياني لـ $y = \cos^{-1}x$ ليس متماثلاً فيما يتعلق بالمحور y أو نقطة الأصل نقطة الأصل. لذا، $y = \cos^{-1}x$ لا فردية ولا زوجية.



$[-1, 1]$ scl: $\frac{1}{4}$ by $[0, \pi]$ scl: $\frac{\pi}{8}$

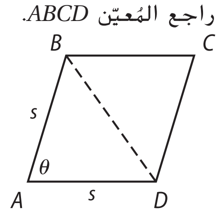
.71 الإجابة النموذجية: افترض أن $y = \tan^{-1}x$ دالة فردية. تعريف الدالة الفردية يقول إن x في مجال f، $f(-x) = -f(x)$. إذا افترضنا أن $\tan^{-1}x = u$. فلدينا $x = \tan u$. من خلال الدرس 3-3، عرفنا أن دالة الـ Tan فردية. إذن $-x = \tan(-u)$. من هنا، يمكننا أن نحصل على $^{-1}(-x) = -u$.

.72 الإجابة النموذجية: تصبح المجالات المقيدة من الـ Cosine والـ Sine، ودوال الـ Tan مدى لقوس الـ Cosine وقوس الجيب ودوال قوس الـ Tan على الترتيب. وكذلك، يصبح مدى الـ Cosine والجيب ودوال الـ Tan في ظل تلك القيود مجالات لمعكوسها.

الدرس 3-7

.66 يجب أن يستخدم قانون الـ Cosine إذا كان لديك SSS أو SAS من مثلث ما. يجب أن يستخدم قانون الـ Cosine إذا كان لديك AAS أو ASA أو SSA من مثلث ما. يجب استخدام نظرية فيثاغورس إذا كان لديك مثلث قائم الزاوية ولديك طول ضلعين منه. ومع ذلك، لا تصلح نظرية فيثاغورس إلا في حل مسائل إيجاد الضلع المفقود فقط. يمكن استخدام النسب المثلثية إذا كان لديك مثلث قائم الزاوية ولديك إما طول ضلعيه أو طول أحد أضلاعه مع قياس إحدى الزوايا بخلاف الزاوية القائمة.

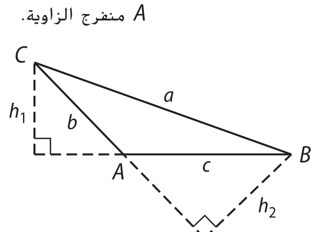
.68 راجع المعيّن $ABCD$.



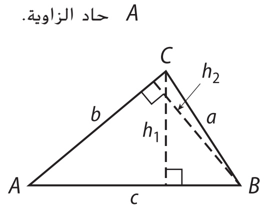
خط مرسوم من B إلى D ينتج مثلثين متطابقين. استخدام صيغة المساحة بالنسبة إلىSAS، مساحة أحد المثلثين $\frac{1}{2}(s)(s)\sin\theta$ تكون $\frac{1}{2}s^2\sin\theta$. لإيجاد مساحة المعين، ضاعف مساحة أحد المثلثين. إذًا، مساحة المعين $ABCD$ هي $2\left(\frac{1}{2}s^2\sin\theta\right)$ أو $s^2\sin\theta$.

.69

A منفرج الزاوية.



A حاد الزاوية.



الإجابة النموذجية: افترض أن h_1 هو ارتفاع أحد المثلثين الموضحين أعلاه. من خلال تعريف دالة الـ Sine، $\sin A = \frac{h_1}{b}$ أو $h_1 = b \sin A$ و $\sin B = \frac{h_1}{a}$ أو $h_1 = a \sin B$. إنشاء معادلة لـ h_1، $b \sin A = a \sin B$. $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$ أو، حيث $\sin B \neq 0$ و $\sin A \neq 0$. عند رسم ارتفاع h_2 من الرأس B إلى الضلع AC (ممتد في مثلث منفرج الزاوية). $\sin A = \frac{h_2}{c}$ أو $h_2 = c \sin A$ و $\sin C = \frac{h_2}{a}$ أو $h_2 = a \sin C$. إنشاء معادلة لقيمتي h_2، $c \sin A = a \sin C$ أو $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$. من خلال خاصية تحول المساواة $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

70a. $a^2 = (b - x)^2 + h^2$ استخدم نظرية فيثاغورس لـ $\triangle DBC$.

$= b^2 - 2bx + x^2 + h^2$ يمتد $(b - x)^2 + h^2$.

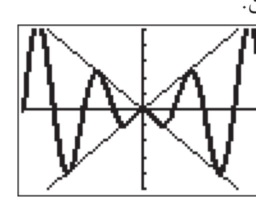
$= b^2 - 2bx + c^2$ في $\triangle ADB$, $c^2 = x^2 + h^2$.

$= b^2 - 2b(c \cos A) + c^2$ $\cos A = \frac{x}{c}$، إذن $x = c \cos A$.

$= b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ خاصية التبديل

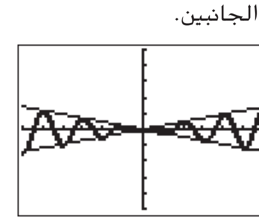
70b. لحل b^2 and c^2. يمكن رسم الارتفاعات من A و C ويمكن استخدام العملية نفسها.

77. $f(x) = -2x$. تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من 0 من كلا الجانبين.



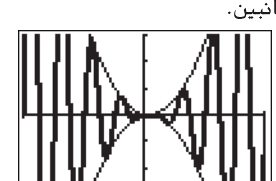
$[-4\pi, 4\pi]$ scl: π by $[-20, 20]$ scl: 4

78. the; $f(x) = \frac{3}{5}x$ تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من 0 من كلا الجانبين.



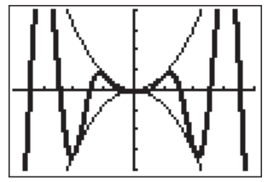
$[-6\pi, 6\pi]$ π by $[-40, 40]$ scl: 8

79. $f(x) = (x - 1)^2$. تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من 0 من كلا الجانبين.



$[-8\pi, 8\pi]$ scl: 2π by $[-150, 150]$ scl: 50

80. $f(x) = -4x^2$. تقل سعة الدالة كلما اقتربت x من 0 من كلا الجانبين.



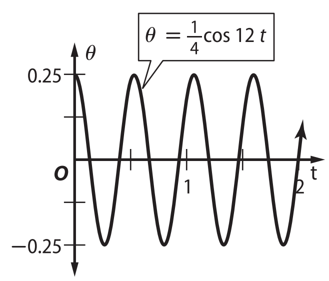
$[-4\pi, 4\pi]$ scl: π by $[-200, 200]$ scl: 50

81.

خط العرض	المسافة
0°	24,881.4
30°	21,547.9
45°	17,593.8
60°	12,440.7
90°	0

مدى المسافات من نحو 24,881 mi إلى 0 mi.

89a.



89b. الدورة هي $\frac{\pi}{6}$ أو نحو 0.524 ثانية. هذا يمثل مقدار الوقت الذي يستغرقه البندول لاستكمال لفة أو دورة كاملة. السعة هي $\frac{1}{4}$. هذا يمثل أقصى الإزاحة للزاوية يحدثها البندول. التكرار هو $\frac{6}{\pi}$ نحو 1.91. هذا يمثل عدد اللفات التي يكملها البندول في كل ثانية.

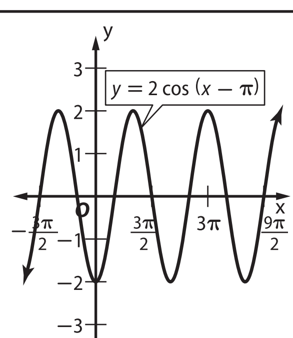
89c. أقصى الإزاحة للزاوية هي 3.14°.

89d. يمثل الخط المتوسط عندما يكون البندول رأسيًا ولا يوجد الإزاحة للزاوية.

89e. نحو $0.101 + 0.524n$ ثانية و $0.161 + 0.524n$ ثانية

دليل الدراسة والمُراجعة

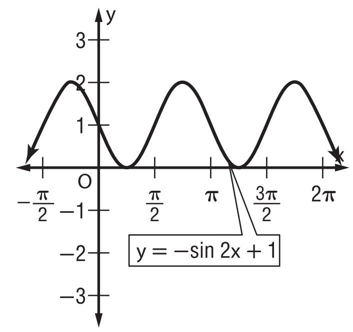
41. السعة = 2; الدورة = 2π; التكرار = $\frac{1}{2\pi}$ ، الإزاحة الطور = π. الإزاحة الرأسية = 0



الوحدة 3 ملحق الإجابات

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C03_v2_718375.indb 15 12/15/2016 11:42:42 PM

.42



السعة = 1;

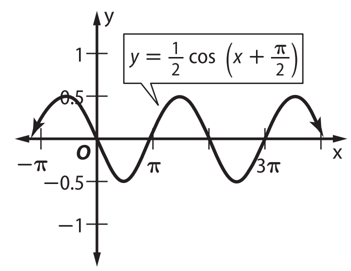
الدورة = π.

التكرار = $\frac{1}{\pi}$.

الإزاحة الطور = 0.

الإزاحة الرأسية = 1

.43



السعة = $\frac{1}{2}$.

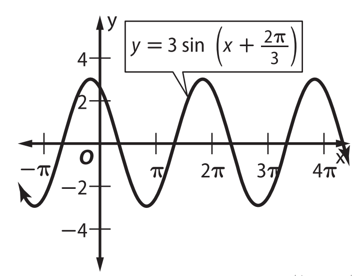
الدورة = 2π.

التكرار = $\frac{1}{2\pi}$;

الإزاحة الطور = $-\frac{\pi}{2}$;

الإزاحة الرأسية = 0

.44



السعة = 3.

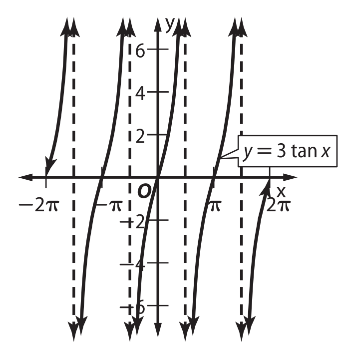
الدورة = 2π;

التكرار = $\frac{1}{2\pi}$;

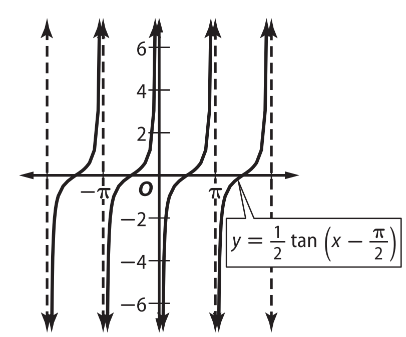
الإزاحة الطور = $-\frac{2\pi}{3}$;

الإزاحة الرأسية = 0

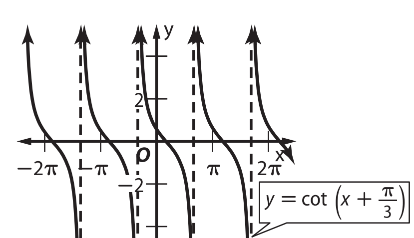
.45



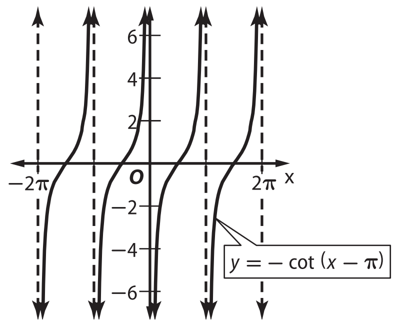
.46



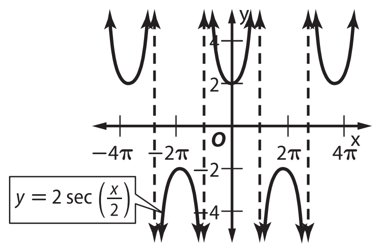
.47



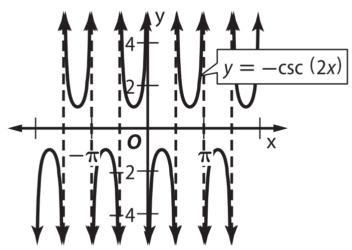
.48



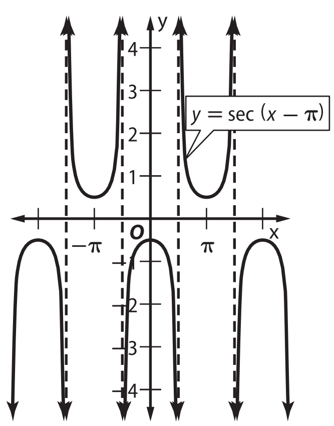
.49



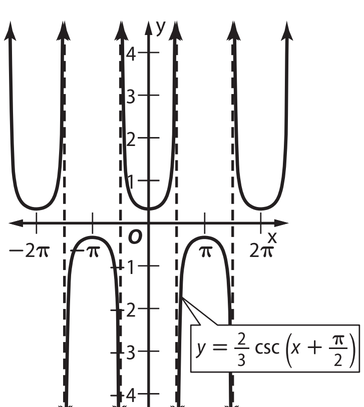
.50



.51



.52



الوحدة 4 المتطابقات والمعادلات المثلثية

:: السابق

لقد تعلمتَ تمثيل الدوال المثلثية بيانيًا وحل المثلثات قائمة الزاوية والمائلة.

:: الحالي

ستتعلم التالي:

- استخدام المتطابقات المثلثية والتحقق من صحتها.
- حل المعادلات المثلثية.
- استخدام متطابقات المجموع والفروق لتقييم التعابير المثلثية ولحل المعادلات.
- استخدام متطابقات الزوايا المزدوجة واختصار الأس والزاوية النصفية، ومتطابقة تحويل حاصل الضرب لمجموع في تقييم التعابير المثلثية وحل المعادلات.

:: لماذا؟ ▲

الأعمال التجارية يضبط الموسيقيون نغمات آلاتهم الموسيقية من خلال الاستماع إلى *إيقاع*، وما هو إلا تداخل بين موجتين صوتيتين باختلاف بسيط بين ترددهما. ويمكن تمثيل مجموع الموجات الصوتية باستخدام معادلة مثلثية.

القراءة المسبقة باستخدام ما تعرفه عن الدوال المثلثية، تفيد بما ستتعلمه في هذه الوحدة. **راجع عمل الطلاب.**

شجّع الطلاب على بدء دراستهم للوحدة بقراءة كل درس مسبقًا. وينبغي عليهم أن يفكّروا في معلوماتهم الأساسية ويتوقعوا المحتوى. امنح المجموعات وقتًا لمناقشة ما قرؤوه وطرح الأسئلة. وركز على عناصر النص، مثل عناوين الأقسام ومربعات المفهوم الأساسي وملخص المفهوم.

مشروع الوحدة

تسمية ذاك اللحن

يَستخدم الطلاب ما تعلّموه بخصوص المعادلات المثلّثية لاستكشاف العلاقة بين الموسيقى والدوال المثلّثية.

- اطلب من الطلاب العمل في مجموعات من ثلاثة أفراد. حاول أن تجعل في كل مجموعة شخصًا يستطيع قراءة اللحن الموسيقي. سيتعيّن على المجموعات الاستعانة بمعمل الحاسبة البيانية (CBL) ومكبّر الصوت الخاص بمختبر الحاسبة البيانية.
- اطلب من المجموعات البحث عن العلاقة بين الدوال المثلّثية والنغمات الموسيقية، وكتابة ملخّص لبحثهم بعد ذلك.
- اطلب من شخص واحد من كل مجموعة أن يغني أو يعزف نغمة. استخدم مختبر الحاسبة البيانية (CBL) ومكبّر صوت المعمل لجمع بيانات الصوت وتسجيلها في حاسبة التمثيل البياني. استخدم البيانات لتحديد الموجة الجيبية التي تمثّل النغمة.
- ينبغي على كل مجموعة تكرار هذا النشاط بنغمة منخفضة. قارن التمثيلات البيانية ودوالها.
- اطلب من المجموعات التنوّع في صوت النغمة ذاتها وتحديد كيفية تأثير هذا على الدالة.
- اطلب من المجموعات كتابة ملخّص يصف كيفية ارتباط المعادلات المثلّثية بالنغمات الموسيقية.

المفردات الأساسية قدّم المفردات الأساسية في الوحدة متبعًا النظام التالي.

التعريف: المتطابقة هي معادلة يكون طرفها الأيسر مساويًا لطرفها الأيمن لجميع قيم المتغير الذي يتم بموجبه تحديد كلا الطرفين.

المثال: تعدّ $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$ متطابقة.

اسأل: هل تعدّ $2x(x^2 - 7) = 2x^3 - 14x^2$ متطابقة؟ اشرح. لا، بما أن $2x(x^2 - 7) \neq 2x^3 - 14x^2$ لكل قيم x، لا تعدّ هذه متطابقة.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indb 228 12/15/2016 8:08:59 PM

الاستعداد للوحدة

أجب عن أسئلة التدريب السريع أدناه.

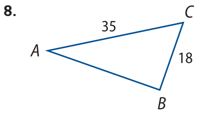
التدريب السريع

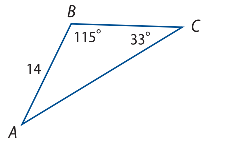
حل كل معادلة عن طريق التحليل الى العوامل. (الدرس 0-3)

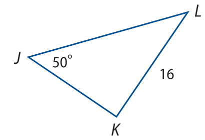
1. $x^2 + 5x - 24 = 0$ **$-8, 3$**
2. $x^2 - 11x + 28 = 0$ **$4, 7$**
3. $2x^2 - 9x - 5 = 0$ **$-\frac{1}{2}, 5$**
4. $15x^2 + 26x + 8 = 0$ **$-\frac{4}{3}, -\frac{2}{5}$**
5. $2x^3 - 2x^2 - 12x = 0$ **$-2, 0, 3$**
6. $12x^3 + 78x^2 - 42x = 0$ **$-7, 0, \frac{1}{2}$**

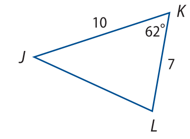
7. **الصواريخ** أطلق صاروخ رأسيًا في الهواء. والمسافة الرأسية التي قطعها بالأقدام يمثلها $s(t) = -16t^2 + 192t$ بينما يمثّل الزمن بالثواني t. أوجد المدة الزمنية التي ظل فيها الصاروخ بالهواء. (الدرس 0-3) **12 s**

أوجد أطوال الأضلاع الناقصة وقياسات الزاوية لكل مثلث. (الدرس 4-1) **8–11. انظر الهامش.** (4-7و)

8.


9.


10.


11.


أوجد القيمة الصحيحة لكل تعبير. (الدرس 4-3)

12. $\cot 420°$ **$\frac{\sqrt{3}}{3}$**
13. $\cos \frac{7\pi}{4}$ **$\frac{\sqrt{2}}{2}$**
14. $\sec \frac{10\pi}{3}$ **-2**
15. $\tan 480°$ **$-\sqrt{3}$**
16. $\csc \frac{2\pi}{3}$ **$\frac{2\sqrt{3}}{3}$**
17. $\sin 510°$ **$\frac{1}{2}$**

المفردات الجديدة

- متطابقة مثلثية trigonometric identity
- متطابقة المقلوب reciprocal identity
- متطابقة نسبية quotient identity
- متطابقة فيثاغورس Pythagorean identity
- متطابقة الدوال الزوجية والدوال الفردية odd-even–identity
- دالة متساوية القيمة cofunction
- إثبات صحة المتطابقة verify an identity
- متطابقة المجموع sum identity
- متطابقة الاختزال reduction identity
- متطابقة الزوايا المزدوجة double-angle identity
- متطابقة اختصار الأس power-reducing identity
- متطابقة نصف الزاوية half-angle identity

مراجعة المفردات

حل دخيل (extraneous solution) صفحة 91 هو حل لا يوافق المعادلة الأصلية

زاوية ربعية (quadrantal angle) في صفحة 243 θ هي زاوية في وضع قياسي يستقر ضلع الانتهاء لها على أحد محوري الإحداثيات

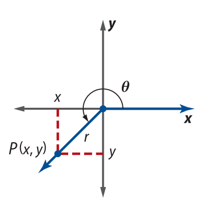
دائرة الوحدة (unit circle) في صفحة 247 دائرة نصف قطرها 1 مركزها على نقطة الأصل

دالة دورية (periodic function) في صفحة 250 دالة قيم مداها تتكرر على فترات منتظمة

الدوال المثلثية (trigonometric functions) في صفحة 220 افترض أن θ هي أي زاوية في وضع قياسي وأن النقطة $P(x, y)$ هي نقطة على ضلع الانتهاء للزاوية θ. افترض أن r تمثل المسافة غير الصفرية من النقطة P إلى نقطة الأصل أو أن $|r| = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$. بالتالي تكون الدوال المثلثية للزاوية θ هي كما يلي.

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ $\cos \theta = \frac{x}{r}$ $\tan \theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$

$\csc \theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$ $\sec \theta = \frac{r}{x}, x \neq 0$ $\cot \theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$



إجابات إضافية

8. $c \approx 30.02, A \approx 30.95°, C \approx 59.05°$
9. $a \approx 13.62, b \approx 23.30, A = 32°$
10. $\ell \approx 13.43, k \approx 20.89, L = 40°$
11. $k \approx 9.13, J \approx 42.63°, L \approx 75.37°$

الأسئلة المهمة

- كيف يمكن أن يكون تمثيل نفس العلاقة الرياضية بطرق مختلفة أمرًا مفيدًا؟ الإجابة النموذجية: حسب الموقف، قد يكون استخدام التمثيل البصري مثل التمثيل البياني أو الرسم التخطيطي أمرًا أكثر إفادة. في مواقف أخرى، قد يكون استخدام التمثيل العددي أو الجبري مثل جدول القيم أو المعادلة هو الأكثر إفادة.
- لماذا يعدّ استبدال تعبير بتعبير مكافئ أمرًا مفيدًا؟ الإجابة النموذجية: يمكن أن يحوِّل المسألة لأبسط صورة؛ مما يجعل عملية حل المسألة أسهل عندئذ.

الوحدة 4 مخطط الوحدة

التقويم التشخيصي
تدريب سريع

	الدرس 4-1 وتيرة التقدم: يومان	الدرس 4-2 وتيرة التقدم: يومان	الدرس 4-3 وتيرة التقدم: يومان	
العنوان	**المتطابقات المثلثية**	**التحقق من صحة المتطابقات المثلثية**	**حل المعادلات المثلثية**	
الأهداف	■ تحديد المتطابقات المثلّثية الأساسية واستخدامها لإيجاد القيم المثلّثية. ■ استخدام المتطابقات المثلّثية الأساسية لتحويل التعابير المثلّثية لأبسط صورة وإعادة كتابتها.	■ التحقق من صحة المتطابقات المثلّثية. ■ تحديد ما إذا كانت المعادلات متطابقات.	■ حل المعادلات المثلّثية باستخدام الأساليب الجبرية. ■ حل المعادلات المثلثية باستخدام المتطابقات الأساسية.	
المفردات الأساسية	متطابقة (identity). متطابقة مثلّثية (trigonometric identity). متطابقة الزاويتين المتتامتين (cofunction). متطابقات الدوال الفردية أو الزوجية (odd-even identities)	إثبات صحة المتطابقة (verify an identity)		

التقويم التكويني
اختبار نصف الوحدة

الفترات الزمنية	التدريس	المراجعة والتقويم	الإجمالي
45 دقيقة	11 يومًا	يومان	13 يومًا
90 دقيقة	5 أيام	يوم	6 أيام

الجدول الزمني المُقترح

التوسع 4-3 وتيرة التقدم: نصف يوم	الدرس 4-4 وتيرة التقدم: يومان	التوسع 4-4 وتيرة التقدم: نصف يوم	الدرس 4-5 وتيرة التقدم: يومان
مختبر تقنية التمثيل البياني: حل المتباينات المثلّثية	**متطابقات المجموع والفرق**	**مختبر تقنية التمثيل البياني: متطابقة انخفاض**	**متطابقات الزوايا المتعددة وتحويل حاصل الضرب لمجموع**
■ استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المتباينات المثلّثية.	■ استخدام متطابقات المجموع والفرق لإيجاد قيمة الدوال المثلّثية. ■ استخدام متطابقات المجموع والفرق لإيجاد حل للمعادلات المثلّثية.	■ استخدام تقنية التمثيل البياني والزوايا الربعية لخفض المتطابقات.	■ استخدام متطابقات الزوايا المزدوجة واختصار الأس والزوايا النصفية ومتطابقات تحويل حاصل الضرب لمجموع لإيجاد قيمة التعابير المثلّثية وحل المعادلات المثلّثية.
	متطابقة انخفاض (reduction identity)		

التقويم الختامي
دليل الدراسة والمراجعة
تمرين على الاختبار

4 تقويم

	التشخيص	سُبُل الحل
التقويم التشخيصي	**بداية الوحدة 4**	
	الاستعداد للوحدة 4 **كتاب الطالب**	الاستجابة للتدخل التقويمي **كتاب المعلم**
	بداية كل درس	
	السابق، الحالي، لماذا؟ **كتاب الطالب**	الوحدة 0 **كتاب الطالب**
التقويم التكويني	**أثناء/بعد كل درس**	
	تمرين موجّه **كتاب الطالب**، كل مثال التحقق من فهمك **كتاب الطالب** مسائل مهارات التفكير العليا **كتاب الطالب** مراجعة شاملة **كتاب الطالب** أمثلة إضافية **كتاب المعلم** انتبه! **كتاب المعلّم** الخطوة 4، التقويم **كتاب المعلم**	التدريس المتمايز **كتاب المعلم**
	نصف الوحدة	
	اختبار نصف الوحدة **كتاب الطالب**	التدريس المتمايز **كتاب المعلم**
التقويم الختامي	**اختبار ما قبل الوحدة**	
	دليل الدراسة والمراجعة للوحدة **كتاب الطالب** تمرين على الاختبار **كتاب الطالب** تمرين على الاختبار المعياري **كتاب الطالب**	التدريس المتمايز **كتاب المعلم**

التدريس المتمايز

الخيار 1 توصيل المعلومة لجميع المتعلمين AL OL BL

المتعلمون أصحاب النمط اللفظي/اللغوي اطلب من الطلاب كتابة قصيدة أو نشيد عن المتطابقات المثلّثية الأساسية. ينبغي على كل طالب اختيار متطابقة واحدة وإدراج الدوال المختلفة التي تتضمنها هذه المتطابقة في قصيدته. اطلب منهم مشاركة القصيدة أو النشيد مع الصف الدراسي.

المتعلمون بطريقة التواصل اطلب من الطلاب العمل في مجموعات من أربعة أفراد. اطلب منهم كتابة عشر متطابقات مثلّثية مختلفة على بطاقات فهرسة مقاس 6 × 4 مع كتابة الطرف الأيسر للمتطابقة على وجه البطاقة والطرف الأيمن للمتطابقة على ظهرها.

بعد انتهاء كل مجموعة من الكتابة على بطاقاتها، ينبغي عليها تمرير البطاقات إلى المجموعات الأخرى. استخدم جهازًا لضبط الوقت لمنح الصف الدراسي ثلاث دقائق قبل تمرير البطاقات إلى المجموعة الأخرى. ومن أجل التحدي، تختار كل مجموعة بطاقة من بطاقات الفهرسة الخاصة بها، وتظهر للمجموعة الأخرى جانبًا واحدًا من البطاقة. ثم تعمل كل مجموعة بعد ذلك على تحديد ماهية الطرف الآخر للمتطابقة بدون استخدام الكتب. وتسجَّل نقطة لكل متطابقة تتوصّل إليها المجموعة على نحو صحيح. والمجموعة التي تحصل على نقاط أكثر في النهاية تكون الفائزة.

$\sec^2\theta$	$\tan^2\theta+1$

الخيار 2 قريب من المستوى AL

اطلب من الطلاب العمل في مجموعات. ينبغي على كل مجموعة استخدام شريط لاصق أو خيط لتمثيل المحور x والمحور y على الأرض. اطلب من أحد الطلاب وضع مسطرة مِترية على المستوى الإحداثي مع جعل إحدى نهايتيها على نقطة الأصل. وينبغي على الطلاب الآخرين تحديد علامات الدوال المثلثية الست للزاوية التي تشكّلت وذلك بناءً على الربع الذي تقع فيه الزاوية. اطلب من طالب آخر قياس أضلاع المثلّث القائم الزاوية الذي تشكّل باستخدام مسطرة مترية أخرى. ينبغي على المجموعة بعد ذلك تحديد قيم جميع الدوال المثلّثية الست للزاوية التي تشكّلت.

الخيار 3 أعلى من المستوى BL

اطلب من الطلاب وضع قائمة بالخصائص يرجعون إليها عند تقرير كيفية البدء في إثبات صحة المتطابقة. يجب أن تتضمن القائمة طرف المتطابقة الذي سيبدؤون به، والدلائل المختلفة الموجودة في المتطابقة التي تساعد الطلاب على معرفة المتطابقات الأخرى التي سيستخدمونها، والأساليب الجبرية المتنوعة الأكثر شيوعًا في الاستخدام.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indb 4 12/15/2016 8:09:02 PM

الوحدة 4 المتطابقات والمعادلات المثلّثية

التركيز على محتوى الرياضيات

التخطيط الرأسي

قبل الوحدة 4

الموضوعات ذات الصلة

- إيجاد القيم المثلّثية باستخدام دائرة الوحدة.
- إيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية.
- حل المثلثات قائمة الزاوية.
- تمثيل الدوال المثلّثية بيانيًا.
- تحويل قياسات الزوايا بالدرجات إلى قياسات بالراديان والعكس.

الوحدة 4

- تحديد المتطابقات المثلّثية واستخدامها لإيجاد القيم المثلّثية.
- استخدام المتطابقات المثلّثية لتحويل التعابير المثلثية لأبسط صورة وإعادة كتابتها.
- إثبات صحة المتطابقات المثلّثية.
- حل المعادلات المثلثية.
- استخدام متطابقات المجموع والفرق لإيجاد قيمة الدوال المثلّثية.
- استخدام متطابقات الزوايا المزدوجة واختصار الأس والزوايا النصفية ومتطابقات تحويل حاصل الضرب لمجموع لإيجاد قيمة التعابير المثلّثية وحل المعادلات المثلّثية.

بعد الوحدة 4

التهيئة لحساب التفاضل والتكامل

- استخدام المتطابقات المثلّثية لتحويل التعابير إلى صيغ تتناسب أكثر مع التفاضل والتكامل.
- استخدام التعويض المثلّثي للتكامل.

مراجعة درس بدرس

4-1 المتطابقات المثلّثية

تكون المعادلة متطابقة إذا كان الطرف الأيسر مساويًا للطرف الأيمن لجميع قيم المتغير الذي يتم بموجبه تحديد كلا الطرفين.

لأن التعبيرات التي تشكّل المتطابقات متكافئة، يمكن تعويض بعضها ببعض بدون تغيير قيمة التعبير. بعض الدوال المثلّثية الأساسية موضّحة في الجدول أدناه.

المتطابقات العكسية	$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$ $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$	$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$
متطابقات ناتج القسمة	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
متطابقات فيثاغورس	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$
متطابقة الزاويتين المتتامتين	$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
متطابقات الدوال الفردية أو الزوجية	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\tan(-\theta) = -\tan\theta$	$\csc(-\theta) = -\csc\theta$ $\sec(-\theta) = \sec\theta$ $\cot(-\theta) = -\cot\theta$

4-2 التحقق من صحة المتطابقات المثلثية

إن التحقق من صحة المتطابقة يعني إثبات أن كلا طرفي المعادلة متساويان لجميع قيم المتغير الذي يتم بموجبه تحديد كلا الطرفين. وهذا يتضمّن تحويل أحد طرفي المتطابقة إلى تعبير الطرف الآخر. وكل خطوة يبرّرها سبب، وهذا السبب يكون عادةً متطابقة مثلّثية أو عملية جبرية أخرى تم إثبات صحتها. ويمكن استخدام أساليب جبرية – مثل تحليل العوامل وجمع الكسور – لإثبات صحة المتطابقة.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 5 12/15/2016 8:09:03 PM

4-3 حل المعادلات المثلّثية

يمكن حل المعادلات التي تشتمل على دوال مثلّثية باستخدام أساليب جبرية، أو متطابقات مثلّثية، أو الاثنين معًا. والأساليب الجبرية قد تتضمّن تحليل العوامل، أو عزل التعبير المثلّثي، أو الحصول على الجذر التربيعي لكلا الطرفين. ويمكن تعويض المتطابقات المعروفة داخل المعادلة لتحويل المعادلة إلى صيغة يكون حلّها أكثر سهولة.

4-4 متطابقات المجموع والفرق

يمكن استخدام متطابقات المجموع والفرق لإيجاد القيم الدقيقة للزوايا الأقل شيوعًا عن طريق تغييرها إلى زوايا أكثر شيوعًا. فعلى سبيل المثال، يمكن كتابة 105° على أنها مجموع 45° + 60°. والجدول المدرج أدناه يوضّح متطابقات المجموع والفرق.

متطابقات المجموع	متطابقات الفرق
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$	$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$	$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$	$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

بمجرّد تحديد الزوايا التي يتم جمعها أو طرحها، يمكن تعويضها في الصيغة المناسبة.

4-5 متطابقات الزوايا المتعددة وتحويل حاصل الضرب إلى مجموع

هناك العديد من المتطابقات المثلّثية المتوفّرة لتساعد في إيجاد قيم التعابير المثلّثية وحل المعادلات المثلّثية.

متطابقات الزوايا المزدوجة	$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$	$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$
متطابقات اختصار الأس	$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$ $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$	$\tan^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$
متطابقة الزاوية النصفية	$\sin\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$ $\cos\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$	$\tan\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$
متطابقات تحويل حاصل الضرب إلى مجموع	$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$ $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$ $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$	
متطابقات تحويل المجموع إلى حاصل ضرب	$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$	

4-1 المتطابقات المثلثية

:: السابق

- أوجدت القيم المثلّثية باستخدام دائرة الوحدة.

:: الحالي

1 تحديد المتطابقات المثلثية الأساسية واستخدمها لإيجاد القيم المثلثية.

2 استخدام المتطابقات المثلثية الأساسية لتحويل التعابير المثلثية لأبسط صورة وإعادة كتابتها.

:: لماذا؟

- يتضمن العديد من التطبيقات الفيزيائية والهندسية، مثل تحديد مسار طائرة، استخدام الدوال المثلثية. وتصبح هذه الدوال أكثر مرونة إذا أمكنك تغيير التعابير المثلثية المتضمنة من إحدى الصيغ إلى صيغة مساوية لها ولكنها أكثر ملاءمة. ويمكنك عمل ذلك باستخدام المتطابقات المثلثية.

المفردات الجديدة

متطابقة (identity)
متطابقة مثلثية (trigonometric identity)
دالة متساوية القيمة (cofunction)

1 المتطابقات المثلثية الأساسية

تكون المعادلة **متطابقة** إذا كان طرفها الأيسر مساويًا لطرفها الأيمن في كل قيم المتغير المُعرف في كلا طرفي المعادلة. فكّر في المعادلات أدناه.

$$\frac{x^2-9}{x-3}=x+3$$

هذه متطابقة لأن كلا طرفي المعادلة محدد ومساوٍ لكل x حيث يكون $x \neq 3$.

$$\sin x = 1 - \cos x$$

هذه *ليست* متطابقة. كلا طرفي هذه المعادلة محدد ومساوٍ لقيم معينة، كما هو الحال حين يكون $x = 0$، ولكنهما ليسا مساويين لقيم أخرى يتم تحديد كلا الطرفين من خلالها، كما هو الحال حين يكون $x = \frac{\pi}{4}$.

المتطابقات المثلثية هي المتطابقات التي تضم دوال مثلثية. تعرفُ بالفعل القليل من المتطابقات المثلثية الأساسية. والمتطابقات العكسية ومتطابقات ناتج القسمة أدناه تتبع تمامًا تعريفات الدوال المثلثية الست التي تم شرحها في الدرس 4-1.

المفهوم الأساسي متطابقات المقلوب والمتطابقات النسبية

المتطابقات النسبية		متطابقات المقلوب	
$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}$	$\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}$	$\sin\theta=\frac{1}{\csc\theta}$
$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$	$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$	$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$

يمكنك استخدام المتطابقات المثلثية الأساسية لإيجاد القيم المثلثية. وكما هو الحال في أي كسر، لا يمكن أن يساوي المقام صفرًا.

مثال 1 استخدام متطابقات المقلوب والمتطابقات النسبية

a. إذا كانت $\csc\theta=\frac{7}{4}$، فأوجد $\sin\theta$.

$\sin\theta=\frac{1}{\csc\theta}$ متطابقة مقلوب

$=\frac{1}{\frac{7}{4}}$ $\csc\theta=\frac{7}{4}$

$=\frac{4}{7}$ اقسم

b. إذا كانت $\cot x=\frac{2}{5\sqrt{5}}$ وكانت $\sin x=\frac{\sqrt{5}}{3}$، فأوجد $\cos x$.

$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ متطابقة نسبية

$\frac{2}{5\sqrt{5}}=\frac{\cos x}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$ $\cot x=\frac{2}{5\sqrt{5}};\ \sin x=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\frac{2}{5\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\cos x$ اضرب كل طرف في $\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\frac{2}{15}=\cos x$ بسّط

تمرين موجه

1A. إذا كانت $\sec x=\frac{5}{3}$، فأوجد $\cos x$. $\frac{3}{5}$

1B. إذا كانت $\csc\beta=\frac{25}{7}$ وكانت $\sec\beta=\frac{25}{24}$، فأوجد $\tan\beta$. $\frac{7}{24}$

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-1 أوجد القيم المثلّثية باستخدام دائرة الوحدة.

الدرس 4-1 تحديد المتطابقات المثلّثية الأساسية واستخدمها لإيجاد القيم المثلّثية.
استخدام المتطابقات المثلّثية الأساسية لتحويل التعابير المثلّثية لأبسط صورة وأعد كتابتها.

بعد الدرس 4-1 تحديد صحة المتطابقات المثلّثية.
استخدام المتطابقات المثلّثية لإيجاد حل للمعادلات المثلّثية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- ما المعنى المقصود عندما يُطلق على المعادلة اسم متطابقة؟ الطرفان يساوي كل منهما الآخر لكل قيم المتغير.

- لماذا قد تُستخدم الدوال المثلّثية في تمثيل مسار طائرة؟ الإجابة النموذجية: قد تمثّل الدالة المثلّثية المنحنى الذي تتبعه رحلة الطائرة.

1 المتطابقات المثلّثية الأساسية

المثال 1 يوضّح كيفية استخدام المتطابقات العكسية وناتج القسمة لإيجاد القيم المثلّثية. **المثال 2** يوضّح كيفية استخدام متطابقات فيثاغورس لإيجاد القيم المثلّثية. **المثال 3** يوضّح كيفية استخدام متطابقات الزاويتين المتتامتين ومتطابقات الدوال الفردية أو الزوجية لإيجاد القيم المثلّثية.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال للتأكد من استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 **a.** إذا كانت $\cos\theta = \frac{3}{4}$، أوجد $\sec\theta$. $\frac{4}{3}$

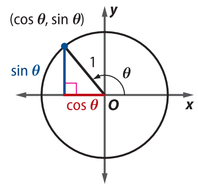
b. إذا كانت $\sec x = \frac{5}{4}$ و $\tan x = \frac{3}{4}$، أوجد $\sin x$. $\frac{3}{5}$

2 إذا كانت $\cot\theta = 2$ و $\cos\theta < 0$، أوجد $\sin\theta$ و $\cos\theta$. $\cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ أو $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$، $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ أو $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

التركيز على محتوى الرياضيات

متطابقات فيثاغورس توجد ثلاث متطابقات فيثاغورس. إلا أنه يكفي فقط تذكّر $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ لإيجاد المتطابقتين الأخريين عن طريق قسمة كل حدود المتطابقة إما على $\sin^2 x$ أو $\cos^2 x$.

يمكن تحديد المتطابقات المثلثية على دائرة الوحدة كما هو موضح. لاحظ أنه بالنسبة لأي زاوية θ، فإن Sine الزاوية و Cosine هما الطولان الموجهان للضلعين الجانبين لمثلث قائم الزاوية له الوتر 1. يمكننا تطبيق نظرية فيثاغورس على هذا المثلث قائم الزاوية لصياغة متطابقة مثلثية أساسية أخرى.



نظرية فيثاغورس	$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1^2$
بسّط	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

في حين أن إشارات هذه الأطوال الموجهة قد تتغير بناءً على الربع الذي يستقر عليه المثلث، فلاحظ أنه بسبب تربيع هذه الأطوال فإن المعادلة أعلاه تبقى صحيحة لأي قيمة لــ θ. هذه المعادلة هي إحدى **متطابقات فيثاغورس** الثلاث.

> **قراءة الرياضيات**
> **أسس الدوال المثلثية** $\sin^2\theta$ تُقرأ هكذا: *sine square theta* وتُفسّر على أنها تربيع كمية $\sin\theta$.

المفهوم الأساسي متطابقات فيثاغورس

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\qquad$ $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ $\qquad$ $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

ستُثبت صحة متطابقتي فيثاغورس المتبقيتين في التمرينين 69 و 70.

لاحظ ترميز الاختصار المستخدم لتمثيل أسس الدوال المثلثية: $\sin^2\theta = (\sin\theta)^2$، و $\cos^2\theta = (\cos\theta)^2$ و $\tan^2\theta = (\tan\theta)^2$، وهكذا.

مثال 2 استخدام متطابقات فيثاغورس

إذا كانت $\tan\theta = -8$ وكانت $\sin\theta > 0$، فأوجد $\sin\theta$ و $\cos\theta$

استخدم متطابقة فيثاغورس التي تتضمن $\tan\theta$.

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	متطابقة فيثاغورس
$(-8)^2 + 1 = \sec^2\theta$	$\tan\theta = -8$
$65 = \sec^2\theta$	بسّط
$\pm\sqrt{65} = \sec\theta$	خذ الجذر التربيعي لكل طرف.
$\pm\sqrt{65} = \frac{1}{\cos\theta}$	متطابقة عكسية
$\pm\frac{\sqrt{65}}{65} = \cos\theta$	حُل لإيجاد $\cos\theta$

بما أن $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \theta$ سالبة و $\sin\theta$ موجب، إذًا ينبغي أن تكون $\cos\theta$ سالبة. إذًا، فستكون $\cos\theta = -\frac{\sqrt{65}}{65}$. ويمكنك حينها استخدام متطابقة ناتج القسمة هذه لإيجاد $\sin\theta$.

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	متطابقة نسبية
$-8 = \frac{\sin\theta}{-\frac{\sqrt{65}}{65}}$	$\cos\theta = -\frac{\sqrt{65}}{65}$ و $\tan\theta = -8$
$\frac{8\sqrt{65}}{65} = \sin\theta$	اضرب كل طرف في $-\frac{\sqrt{65}}{65}$.

تحقق

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	متطابقة فيثاغورس
$\left(\frac{8\sqrt{65}}{65}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{65}}{65}\right)^2 \stackrel{?}{=} 1$	$\sin\theta = \frac{8\sqrt{65}}{65}$ و $\cos\theta = -\frac{\sqrt{65}}{65}$
$\frac{64}{65} + \frac{1}{65} = 1$ ✓	بسّط

2A. $\csc\theta = \sqrt{10}, \tan\theta = -\frac{1}{3}$

2B. $\cot\theta = \sqrt{35}, \sec\theta = \frac{6}{\sqrt{35}}$ or $\frac{6\sqrt{35}}{35}$

> **نصيحة دراسية**
> **التحقق من الإجابات** من المفيد تأكيد إجاباتك باستخدام متطابقة مختلفة عن المتطابقات التي استخدمتها لحل المسألة، كما في المثال 2، بحيث لا تقع في نفس الخطأ مرتين.

تمرين موجه

أوجد قيمة كل تعبير مستخدمًا البيانات المعطاة.

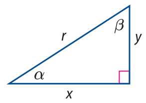
2A. $\csc\theta$ و $\tan\theta$؛ $\cot\theta = -3$، و $\cos\theta < 0$ $\qquad$ **2B.** $\cot x$ و $\sec x$؛ $\sin x = \frac{1}{6}$، و $\cos x > 0$

نصيحة للمعلمين الجدد

إشارات الدوال المثلّثية إذا واجه الطلاب مشكلة في تذكّر إشارات الدوال المثلثية في مختلف أرباع دائرة الوحدة، فاستخدم الحروف "ASTC" لمساعدتهم على التذكّر. عند البدء في الربع الأول والتحرّك عكس عقارب الساعة، تكون كل الدوال موجبة في الربع الأول، ولا يكون سوى جيب الزاوية وقاطع تمام المعكوس الضربي الخاص به موجبين في الربع الثاني، ولا يكون سوى المماس وظل تمام المعكوس الضربي الخاص به موجبين في الربع الثالث، كما لا يكون سوى جيب التمام وقاطع المعكوس الضربي الخاص به موجبين في الربع الرابع. وتتوافق هذه الحروف الإنجليزية مع الدوال الموجبة في كل ربع.

مجموعة أخرى من المتطابقات المثلثية الأساسية تتضمن دوال متساوية القيمة

f هي **دالة متساوية القيمة** لدالة مثلثية أخرى g إذا كانت $f(\alpha) = g(\beta)$ حين تكون α وβ زاويتان متتامتان. في المثلث قائم الزاوية الموضح، الزاويتان α و β هما زاويتان متتامتان. باستخدام نِسب المثلث قائم الزاوية، يمكنك توضيح أن العبارات التالية صحيحة.



$$\sin\alpha = \cos\beta = \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{y}{r}$$

$$\tan\alpha = \cot\beta = \cot(90^\circ - \alpha) = \frac{y}{x}$$

$$\sec\alpha = \csc\beta = \csc(90^\circ - \alpha) = \frac{r}{y}$$

من خلال هذه العبارات، يمكننا كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين التالية، وهي صحيحة لكل الأعداد الحقيقية، وليس لقياسات الزاوية الحادة فقط.

نصيحة دراسية

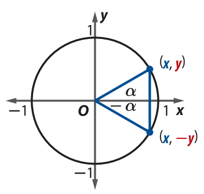
كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين يمكن كذلك كتابة كل من متطابقات الزاويتين المتتامتين بدلالة الدرجات. فعلى سبيل المثال، $\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)$.

المفهوم الأساسي متطابقات الزاويتين المتتامتين

$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

ستُثبت صحة هذه المتطابقات لأي زاوية في الدرس 4-3.

لقد عرفت أيضًا أن كلًا من الدوال المثلثية الأساسية—sin, cos, tan, cot, sec, csc—هي إما فردية أو زوجية. باستخدام دائرة الوحدة، يمكنك توضيح أن العبارات التالية صحيحة.



$$\sin\alpha = y \qquad \sin(-\alpha) = -y$$
$$\cos\alpha = x \qquad \cos(-\alpha) = x$$

تذكّر من الدرس 1-2 أن الدالة f زوجية إذا كان لكل x في مجال f، $f(-x) = f(x)$، وفردية إذا كان لكل x في مجال f، $f(-x) = -f(x)$. وهذه العلاقات تؤدي إلى المتطابقات الفردية الزوجية التالية.

المفهوم الأساسي متطابقات الدوال الزوجية و الفردية

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
$\csc(-\theta) = -\csc\theta$	$\sec(-\theta) = \sec\theta$	$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

يمكنك استخدام متطابقات الزاويتين المتتامتين ومتطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية لإيجاد القيم المثلثية.

مثال 3 استخدام متطابقات الزاويتين المتتامتين ومتطابقات الدوال الزوجية الفردية

إذا كانت $\tan\theta = 1.28$، فأوجد $\cot\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\cot\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cot\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$$ حلل

$$= -\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$ متطابقة الدوال الزوجية الفردية

$$= -\tan\theta$$ متطابقة الدالة متساوية القيمة

$$= -1.28$$ $\tan\theta = 1.28$

تمرين موجه

3. إذا كانت $\sin x = -0.37$، فأوجد $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. -0.37

مثال إضافي

3 إذا كانت $\cos x = -0.75$، فأوجد $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. 0.75

التدريس باستخدام التكنولوجيا

صفحة الويب أنشئ صفحة ويب خاصة بالصف الدراسي تضم كل المتطابقات المثلّثية الموجودة في هذه الوحدة. اطلب من الطلاب الاشتراك في خدمة تلقيم مقتطفات الأخبار "RSS feed" حتى يتمكنوا من متابعة تحديثك للصفحة بكل سهولة.

2 تحويل التعابير المثلّثية لأبسط صورة وإعادة كتابتها

الأمثلة من 4 إلى 7 توضّح كيفية استخدام مختلف المتطابقات المثلّثية والأساليب الجبرية لتحويل التعابير المثلّثية لأبسط صورة وإعادة كتابتها.

نصيحة للمعلمين الجدد

استخدام الحاسبات البيانية معظم الحاسبات البيانية ووسائل التمثيل البياني بها دوال الـــ Sine و الـــ Cosine و الـــ Tan فقط، ولذا فاستخدم المعكوسات الضربية لهذه الدوال لإيجاد قيم دوال الـــ Csc و الـــ Sec و الـــ Cot.

التدريس المتمايز OL BL

المتعلمون أصحاب النمط المنطقي اطلب من كل طالب كتابة تعبير يحتوي على جميع الدوال المثلّثية الست، ويساوي 3. الإجابة النموذجية: $\sin^2 x + \cos^2 x + \sec^2 x - \tan^2 x + \csc^2 x - \cot^2 x$

أمثلة إضافية

4 حوّل لأبسط صورة
$\cos x \cdot \frac{1}{\cos x}(1 - \sin^2 x)$ $\cos x$

5 حوّل لأبسط صورة
$\cos x \tan x - \sin x \cos^2 x$
$\sin^3 x$

2 تبسيط التعابير المثلثية وإعادة كتابتها

لتحويل التعبير المثلثي لأبسط صورة، ابدأ بإعادة كتابته بدلالة الدالة المثلثية أو بدلالة الزاوية sine والــ cosine فقط.

مثال 4 التحويل لأبسط صورة بإستخدام sin and cos فقط

حوّل لأبسط صورة $\csc\theta \sec\theta - \cot\theta$.

أوجد الحل جبريًا

$$\csc\theta\sec\theta - \cot\theta = \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$ أعد الكتابة بدلالة sin and cos باستخدام المتطابقات العكسية والمتطابقات النسبية.

$$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$ أوجد ناتج الضرب.

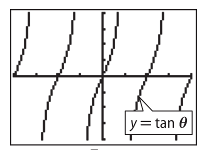
$$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$ أعد كتابة الكسور باستخدام مقام مشترك.

$$= \frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$ اطرح.

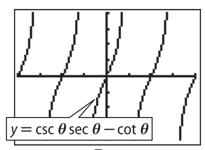
$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$ نظرية فيثاغورس

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \text{ or } \tan\theta$$ اقسم البسط والمقام على $\sin\theta$.

الدعم بالتمثيل البياني التمثيلان البيانيان اللذان يمثلان $y = \csc\theta\sec\theta - \cot\theta$ و $y = \tan\theta$ يبدوان متطابقين.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.5



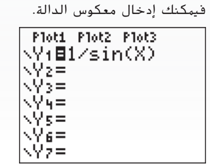
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.5

تمرين موجه

4. حوّل لأبسط صورة $\sec x - \tan x \sin x$. $\cos x$

نصيحة تقنية

تمثيل الدوال العكسية بيانيًا عند استخدام حاسبة لتمثيل الدوال العكسية بيانيًا، مثل $y = \csc x$. فيمكنك إدخال معكوس الدالة.



ويمكن تحليل التعابير المثلثية لأبسط صورة من خلال تطبيق المتطابقات والتحليل الى العوامل.

مثال 5 التحويل لأبسط صورة باستخدام تحليل العوامل

حوّل لأبسط صورة $\sin^2 x\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

أوجد الحل جبريًا

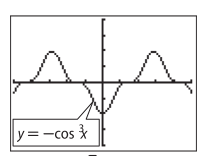
$$\sin^2 x\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin^2 x\cos x - \cos x$$ متطابقة زاويتين متتامتين

$$= -\cos x(-\sin^2 x + 1)$$ حلل عامل $-\cos x$ من كل حد.

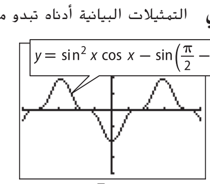
$$= -\cos x(1 - \sin^2 x)$$ خاصية التبديل

$$= -\cos x(\cos^2 x) \text{ or } -\cos^3 x$$ متطابقة فيثاغورس

الدعم بالتمثيل البياني التمثيلات البيانية أدناه تبدو متطابقة.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.5



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.5

تمرين موجه

5. حوّل لأبسط صورة $\tan^2 x\sec x - \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. $-\sec^3 x$

انتبه!

التمثيل البياني في حين يمكن لمنهجية التمثيل البياني الموضحة في المثالين 4 و 5 أن تقدم الدعم لفكرة المساواة بين تعبيرين. فلا يمكن استخدامها لإثبات أن تعبيرين متساويان. من المستحيل توضيح أن التمثيلين البيانيين متطابقان على كامل امتداد مجاليهما باستخدام الجزء الموضح من التمثيل البياني على حاسبتك.

التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني اطلب من الطلاب العمل في مجموعات من ثلاثة أو أربعة أفراد لابتكار ملصق به كل المتطابقات الواردة في الدرس. ينبغي أن يتضمن كل ملصق مثالاً يستخدم كل متطابقة. ويمكن استخدام لون مختلف لكل متطابقة. وبعد استخدام المتطابقة في المثال، ينبغي كتابتها باللون المطابق. على الطلاب إضافة متطابقات أخرى للملصقات تدريجيًا تماشيًا مع التقدم في الوحدة.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 233 12/15/2016 8:09:08 PM

أمثلة إضافية

6 حوّل لأبسط صورة $\frac{\sec x}{1-\sec x} - \frac{\sec x}{1+\sec x}$.
$-2\csc^2 x$

7 أعد كتابة $\frac{1+\tan^2 x}{\csc^2 x}$ في صورة تعبير لا يضم كسرًا. $\tan^2 x$

يمكنك تحويل بعض التعابير المثلثية لأبسط صورة عن طريق جمع الكسور.

مثال 6 التحويل لأبسط صورة باستخدام جمع الكسور

حوّل لأبسط صورة $\frac{1+\sin x}{\cos x} - \frac{\sin x \cos x}{1-\sin x}$.

$$\frac{\sin x\cos x}{1-\sin x} - \frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x\cos x(\cos x)}{(1-\sin x)(\cos x)} - \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{(\cos x)(1-\sin x)}$$ مقام مشترك

$$= \frac{\sin x\cos^2 x}{\cos x - \sin x\cos x} - \frac{1-\sin^2 x}{\cos x - \sin x\cos x}$$ أوجد حاصل الضرب.

$$= \frac{\sin x\cos^2 x}{\cos x - \sin x\cos x} - \frac{\cos^2 x}{\cos x - \sin x\cos x}$$ متطابقة فيثاغورس

$$= \frac{\sin x\cos^2 x - \cos^2 x}{\cos x - \sin x\cos x}$$ اطرح.

$$= \frac{(\cos^2 x)(\sin x - 1)}{(-\cos x)(\sin x - 1)}$$ حلل البسط والمقام إلى العوامل.

$$= -\cos x$$ اختصر العوامل المشتركة.

تمرين موجه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

6A. $\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{1+\sin x}{\cos x}$ $2\sec x$

6B. $\frac{\csc x}{1+\sec x} + \frac{\csc x}{1-\sec x}$ $-2\cot^2 x\csc x$

في حساب التفاضل والتكامل، ستحتاج أحيانًا إلى إعادة كتابة التعبير المثلثي بحيث لا يضم كسرًا. حينما يكون المقام من الصيغة $1 \pm u$ أو $u \pm 1$، يمكنك أحيانًا فعل ذلك عن طريق ضرب البسط والمقام في مُرافق المقام وتنفيذ متطابقة فيثاغورس.

مراجعة المفردات

المُرافق (conjugate) عامل ذو حدين يُضرب في العامل ذي الحدين الأصلي ويكون حاصل الضرب هو الفرق بين المربعين (الدرس 0-3)

مثال 7 إعادة الكتابة لحذف الكسور

أعد كتابة $\frac{1}{1+\cos x}$ في صورة تعبير لا يضم كسرًا.

$$\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{1+\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{1-\cos x}$$ اضرب البسط والمقام في مُرافق $1+\cos x$، وهو $1-\cos x$.

$$= \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}$$ أوجد حاصل الضرب.

$$= \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$$ متطابقة فيثاغورس

$$= \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$ اكتب بصيغة توضح الفارق بين كسرين.

$$= \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}$$ حلل.

$$= \csc^2 x - \cot x\csc x$$ متطابقات المقلوب والمتطابقات النسبية

تمرين موجه

أعد الكتابة في صورة تعبير لا يضم كسرًا.

7A. $\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$ $1+\sin x$

7B. $\frac{4}{\sec x + \tan x}$ $4\sec x - 4\tan x$

234 | الدرس 4-1 | المتطابقات المثلثية

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 234 12/15/2016 8:09:09 PM

تمارين

أوجد قيمة كل تعبير مستخدمًا البيانات المعطاة. (مثال 1)

1. إذا كانت $\cot \theta = \frac{5}{7}$، فأوجد $\tan \theta$. $\frac{7}{5}$
2. إذا كانت $\cos x = \frac{2}{3}$، فأوجد $\sec x$. $\frac{3}{2}$
3. إذا كانت $\tan \alpha = \frac{1}{5}$، فأوجد $\cot \alpha$. 5
4. إذا كانت $\sin \beta = -\frac{5}{6}$، فأوجد $\csc \beta$. $-\frac{6}{5}$
5. إذا كانت $\cos x = \frac{1}{6}$ وكانت $\sin x = \frac{\sqrt{35}}{6}$، فأوجد $\cot x$. $\frac{\sqrt{35}}{35}$
6. إذا كانت $\sec \varphi = 2$ وكانت $\tan \varphi = \sqrt{3}$، فأوجد $\sin \varphi$. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
7. إذا كانت $\csc \alpha = \frac{7}{3}$ وكانت $\cot \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{3}$، فأوجد $\sec \alpha$. $\frac{7\sqrt{10}}{20}$
8. إذا كانت $\sec \theta = 8$ وكانت $\theta = 3\sqrt{7}$، فأوجد $\csc \theta$. $\frac{8\sqrt{7}}{21}$

أوجد قيمة كل تعبير مستخدمًا المعلومات المعطاة. (مثال 2)

9–16. انظر الهامش.

9. $\sec \theta$ و $\cos \theta$; $\tan \theta = -5, \cos \theta > 0$
10. $\cot \theta$ و $\sec \theta$; $\sin \theta = \frac{1}{3}, \tan \theta < 0$
11. $\tan \theta$ و $\sin \theta$; $\sec \theta = 4, \sin \theta > 0$
12. $\sin \theta$ و $\cot \theta$; $\cos \theta = \frac{2}{5}, \sin \theta < 0$
13. $\cos \theta$ و $\tan \theta$; $\csc \theta = \frac{8}{3}, \tan \theta > 0$
14. $\sin \theta$ و $\cos \theta$; $\cot \theta = 8, \csc \theta < 0$
15. $\cot \theta$ و $\sin \theta$; $\sec \theta = -\frac{9}{2}, \sin \theta > 0$
16. $\tan \theta$ و $\csc \theta$; $\cos \theta = -\frac{1}{4}, \sin \theta < 0$

أوجد قيمة كل تعبير مستخدمًا المعلومات المعطاة. (مثال 3)

17. إذا كانت $\csc \theta = -1.24$، فأوجد $\sec\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$. -1.24
18. إذا كانت $\cos x = 0.61$، فأوجد $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. -0.61
19. إذا كانت $\tan \theta = -1.52$، فأوجد $\cot\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$. 1.52
20. إذا كانت $\sin \theta = 0.18$، فأوجد $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$. 0.18
21. إذا كانت $\cot x = 1.35$، فأوجد $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. -1.35

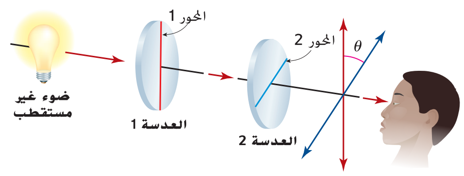
حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (المثالان 4 و5)

22. $\csc x \sec x - \tan x$ $\cot x$
23. $\csc x - \cos x \cot x$ $\sin x$
24. $\sec x \cot x - \sin x$ $\cos x \cot x$
25. $\frac{\tan x + \sin x \sec x}{\csc x \tan x}$ $2 \sin x$
26. $\frac{1 - \sin^2 x}{\csc^2 x - 1}$ $\sin^2 x$
27. $\frac{\csc x \cos x + \cot x}{\sec x \cot x}$ $2 \cos x$
28. $\frac{\sec x \csc x - \tan x}{\sec x \csc x}$ $\cos^2 x$
29. $\frac{\sec^2 x}{\cot^2 x + 1}$ $\tan^2 x$
30. $\cot x - \csc^2 x \cot x$ $-\cot^3 x$
31. $\cot x - \cos^3 x \csc x$ $\sin x \cos x$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (مثال 6)

32. $\frac{\cos x}{\sec x + 1} + \frac{\cos x}{\sec x - 1}$ $2 \cot^2 x$
33. $\frac{1 - \cos x}{\tan x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ $\sin x$
34. $\frac{1}{\sec x + 1} + \frac{1}{\sec x - 1}$ $2 \cot x \csc x$
35. $\frac{\cos x \cot x}{\sec x + \tan x} + \frac{\sin x}{\sec x - \tan x}$ $\cot x - \cos x + \tan x + \sin x \tan x$
36. $\frac{\sin x}{\csc x + 1} + \frac{\sin x}{\csc x - 1}$ $2 \tan^2 x$

37. **النظارات الشمسية** تُصنع العديد من النظارات الشمسية من عدسات مستقطبة تقلل من شدة الضوء. ويمكن حساب شدة الضوء الظاهر من نظام مكوّن من عدستين مستقطبتين، يمكن حساب I باستخدام $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2 \theta}$، حيث يكون I_0 هو شدة الضوء الداخل لنظام العدستين وتكون θ هي زاوية محور العدسة الثانية بالنسبة لزاوية محور العدسة الأولى. (مثال 6)



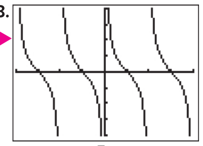
a. حوّل صيغة شدة الضوء الظاهر من نظام العدستين المستقطبتين لأبسط صورة. $I = I_0 \cos^2 \theta$

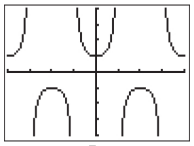
b. إذا كانت النظارة الشمسية تحتوي على نظام من عدستين مستقطبتين بحيث يكون المحوران على زاوية 30° من بعضهما البعض. فما الجزء الذي يظهر من شدة الضوء الداخلة إلى النظارة الشمسية؟ $\frac{3}{4}$

أعد الكتابة في صورة تعبير لا يضم كسرًا. (مثال 7)

38. $\frac{\sin x}{\csc x - \cot x}$ $1 + \cos x$
39. $\frac{\csc x}{1 - \sin x}$ $\sec^2 x(\csc x + 1)$
40. $\frac{\cot x}{\sec x - \tan x}$ $\csc x + 1$
41. $\frac{\cot x}{1 + \sin x}$ $\sec x(\csc x - 1)$
42. $\frac{3 \tan x}{1 - \cos x}$ $3 \csc x(\sec x + 1)$
43. $\frac{2 \sin x}{\cot x + \csc x}$ $2 - 2 \cos x$
44. $\frac{\sin x}{1 - \sec x}$ $-\cot x(\cos x + 1)$
45. $\frac{\cot^2 x \cos x}{\csc x - 1}$ $\cos x(\csc x + 1)$
46. $\frac{5}{\sec x + 1}$ $5 \cot^2 x(\sec x - 1)$
47. $\frac{\sin x \tan x}{\cos x + 1}$ $\sec x - 1$

حدد ما إذا كانت كل دالة مثلثية رئيسة موضحة هي دالة فردية أم زوجية. اشرح استدلالك.

48. B

$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

49.

$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 47 للتحقّق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص الواجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع في التمارين من 9 إلى 16. قد يخطئ الطلاب في التعرف على علامة الحلول. وقد يكون من المفيد للطلاب رسم الدالة على دائرة الوحدة وفحص علامات الدوال الموجودة في الربع.

إجابات إضافية

9. $\sec \theta = \sqrt{26}$, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{26}}$ أو $\frac{\sqrt{26}}{26}$

10. $\cot \theta = -2\sqrt{2}$, $\sec \theta = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$

11. $\tan \theta = \sqrt{15}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$

12. $\sin \theta = -\frac{\sqrt{21}}{5}$, $\cot \theta = -\frac{2}{\sqrt{21}}$ أو $-\frac{2\sqrt{21}}{21}$

13. $\tan \theta = \frac{3}{\sqrt{55}}$ أو $\frac{3\sqrt{55}}{55}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{55}}{8}$

14. $\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{65}}$ أو $-\frac{\sqrt{65}}{65}$, $\cos \theta = -\frac{8}{\sqrt{65}}$ أو $-\frac{8\sqrt{65}}{65}$

15. $\cot \theta = -\frac{2}{\sqrt{77}}$ أو $-\frac{2\sqrt{77}}{77}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{77}}{9}$

16. $\tan \theta = \sqrt{15}$, $\csc \theta = -\frac{4}{\sqrt{15}}$ أو $-\frac{4\sqrt{15}}{15}$

48. فردية. التمثيل البياني الموضّح هو $f(x) = \cot x$. $f(-x) = \cot(-x) = -\cot x = -f(x)$. حيث $f(x) = \cot x$. $f(-x) = -f(x)$ هي دالة فردية.

49. زوجية. التمثيل البياني الموضّح هو $f(x) = \sec x$. $f(-x) = \sec(-x) =$ $\sec x = f(x)$. حيث $f(-x) = f(x)$. $f(x) = \sec x$ هي دالة زوجية.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة OL BL AL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1–47, 62, 63, 67–90	1–47 فردي, 87–90	2–46 زوجي, 62, 63, 67–86
OL ضمن المستوى	1–49 فردي, 50, 51–59 فردي, 60–63, 67–90	1–47, 87–90	48–63, 67–86
BL أعلى من المستوى	48–90		

50. **كرة القدم** عند ركل كرة قدم من سطح الأرض، فإن ارتفاعها المتمثل في y وإزاحتها الأفقية x مرتبطان بواسطة $y = \frac{-gx^2}{2{v_0}^2 \cos^2 \theta} + \frac{x \sin \theta}{\cos \theta}$، حيث تكون v_0 هي سرعة الكرة المبدئية، وتكون θ هي الزاوية التي رُكِلت بها الكرة، وتكون g هي التسارع بسبب الجاذبية. أعد كتابة هذه المعادلة بحيث تكون $\tan \theta$ هي الدالة المثلثية الوحيدة التي تظهر في المعادلة.

$$y = -\frac{gx^2}{2{v_0}^2}(1 + \tan^2 \theta) + x \tan \theta$$

اكتب كل تعبير بدلالة دالة مثلثية مفردة.

51. $\tan x - \csc x \sec x$ $-\cot x$

52. $\cos x + \tan x \sin x$ $\sec x$

53. $\csc x \tan^2 x - \sec^2 x \csc x$ $-\csc x$

54. $\sec x \csc x - \cos x \csc x$ $\tan x$

55. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف كيفية التحقق من المتطابقات المثلثية. فكّر في الدوال الموضحة.

C

i. $y_1 = \tan x + 1$
$y_2 = \sec x \cos x - \sin x \sec x$

ii. $y_3 = \tan x \sec x - \sin x$
$y_4 = \sin x \tan^2 x$

a. **العرض الجَدْوَلي** انسخ وأكمل الجدول أدناه بدون تمثيل الدوال بيانيًا.

x	-2π	$-\pi$	0	π	2π
y_1	1	1	1	1	1
y_2	1	1	1	1	1
y_3	0	0	0	0	0
y_4	0	0	0	0	0

b, d. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

b. **التمثيل البياني** مثّل كل دالة بيانيًا على حاسبة بيانية.

c. **التمثيل اللفظي** كوّن مرافقًا عن العلاقة بين y_1 و y_2. كرر العملية لكل من y_3 و y_4.

d. **طريقة التحليل** هل المرافقات التي كوّنتها في الجزء c صحيحه للمجال الكامل لكل دالة؟ اشرح استنتاجك.

c. $y_1 \neq y_2, y_3 = y_4$

أعد كتابة كل تعبير في صورة لوغاريتم مفرد وحوّل الإجابة لأبسط صورة.

56. $\ln |\sin x| - \ln |\cos x|$ $\ln |\tan x|$

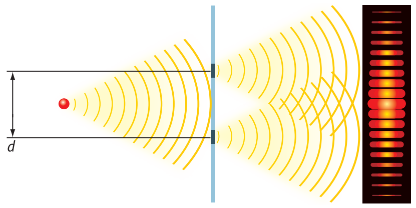
57. $\ln |\sec x| - \ln |\cos x|$ $-2 \ln |\cos x|$

58. $\ln (\cot^2 x + 1) + \ln |\sec x|$ $\ln |\csc^2 x \sec x|$

59. $\ln (\sec^2 x - \tan^2 x) - \ln (1 - \cos^2 x)$ $-\ln |\csc^2 x|$

60. **الكهرباء** التيار الساري في سلك في مجال مغناطيسي يسبب فرض قوة على السلك. ويمكن تحديد قوة المجال المغناطيسي باستخدام الصيغة $B = \frac{F \csc \theta}{I\ell}$، حيث تكون F هي القوة الواقعة على السلك، وتكون I هي التيار داخل السلك، وتكون ℓ هي طول السلك، وتكون θ هي الزاوية التي يصنعها السلك مع المجال المغناطيسي. في بعض كتب الفيزياء، يتم توضيح الصيغة كما يلي $F = I\ell B \sin \theta$ وضّح أن الصيغتين متساويتان. انظر الهامش.

61. **موجات الضوء** حين يشع الضوء عبر فتحتين ضيقتين، تظهر سلسلة من الحواف المضيئة والمظلمة. يمكن حساب الزاوية θ، بمقياس الزوايا نصف القطرية، المحددة لموقع الحافة رقم mth بواسطة $\sin \theta = \frac{m\lambda}{d}$، حيث تكون d هي المسافة بين الفتحتين وتكون λ هي طول موجة الضوء.

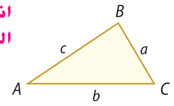


a. أعد كتابة الصيغة بدلالة θ. $\csc \theta = \frac{d}{m\lambda}$

b. حدد الزاوية المحددة لموقع الحافة المئة عندما يكون طول موجي للضوء يبلغ 550 نانومتر يشع عبر الفتحتين المزدوجتين اللتين تفصل بينهما مسافة 0.5 ميلّيمتر. $\approx$ زاوية نصف قطرية قياس 0.11

مسائل مهارات التفكير العليا

62. **التحقق من الصحة** أثبت أن مساحة المثلث هي $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ حيث تكون $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. (**تلميح:** مساحة المثلث المائل هي $A = \frac{1}{2} bc \sin A$) انظر ملحق إجابات الوحدة 4.



63. **تحليل الخطأ** مها وموزة تحوّلان ما يلي لأبسط صورة $\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$. وتظن مها أن التعبير يتم تبسيطه إلى $\frac{\cos^2 x}{1 - 2\cos^2 x}$، وتظنُ موزة أن التعبير يتم تبسيطه إلى $\csc^2 x - \tan^2 x$. هل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

التحدي اكتب كلاً من الدوال المثلثية الأساسية بناءً على الدوال التالية. 64–66. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

64. $\sin x$ 65. $\cos x$ 66. $\tan x$

الاستنتاج حدد ما إذا كانت كل عبارة ***صحيحة أم خاطئة*. اشرح استنتاجك.** 67–68. انظر الهامش.

67. $\csc^2 x \tan x = \csc x \sec x$ صحيحة بالنسبة لكل الأعداد الحقيقية.

68. يمكن استخدام متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية لإثبات أن التمثيلات البيانية التي تخص $y = \cos x$ و $y = \sec x$ متماثلة بالنسبة للمحور الرأسي y.

الإثبات أثبت كل متطابقة فيثاغورس. 69–70. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

69. $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$ 70. $\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$

71. **الكتابة المسبقة** استخدم مخططًا أو جدولاً لمساعدتك على تنظيم المتطابقات المثلثية الرئيسية الموجودة في الدرس 4-1. راجع عمل الطلاب.

إجابة إضافية

60. $B = \frac{F \csc \theta}{I\ell}$

$BI\ell = F \csc \theta$

$F = \frac{BI\ell}{\csc \theta}$

$F = BI\ell \left(\frac{1}{\csc \theta}\right)$

$F = BI\ell \sin \theta$

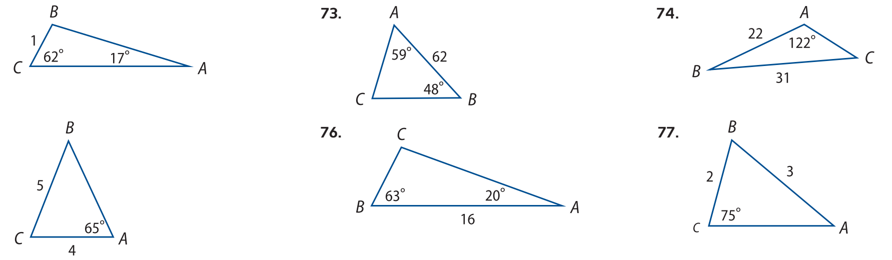
236 | الدرس 4-1 | المتطابقات المثلثية

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 236 12/15/2016 8:09:12 PM

مراجعة شاملة

حلّ كل مثلث. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. 72–77. انظر الهامش.

72. 73. 74. 75. 76. 77.



أوجد القيمة الصحيحة لكل تعبير، إن وُجدت.

78. $\cot\left(\sin^{-1}\frac{7}{9}\right)$ $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

79. $\tan(\arctan 3)$ 3

80. $\cos\left[\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ $-\frac{1}{2}$

81. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

82. $\cos^{-1}\left(\sin^{-1}\frac{\pi}{2}\right)$ ليس لها قيمة

83. $\sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)$ $\frac{4}{5}$

.84 **علم الأجناس البشرية** **قِياسُ التَّنامِي** هو دراسة العلاقة بين حجم كائن حي وحجم أي جزء من أجزائه. قرر أحد الباحثين إجراء اختبار لقياس التنامي بين حجم رأس الإنسان مقارنةً بجسمه بينما يتقدم الشخص في العمر. تمثل البيانات في الجدول تمثل الذَّكَر الأمريكي العادي.

معدل نمو الذكر الأمريكي العادي (بعمر من 0 إلى 3 أعوام)	
محيط الرأس (in.)	الطول (in.)
14.1	19.5
18.0	26.4
18.3	29.7
18.7	32.3
19.1	34.4
19.4	36.2
19.6	37.7

المصدر: المركز القومي للإحصاءات الصحية

.a أوجد نموذجًا تربيعيًا يربط هذه البيانات من خلال تقريب البيانات خطيًا وإيجاد معادلة الانحدار الخطي. $y = 0.117\hat{x} + 1.28$

.b استخدم نموذج البيانات المقربة خطيًا لإيجاد نموذج للبيانات الأصلية. $y = 3.6e^{0.117x}$

.c استخدم نموذجك للتنبؤ بطول الذكر الأمريكي الذي محيط رأسه يساوي 24 بوصة. حوالي 59.7 in.

لنفترض أن $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{6, 9\}$, $B = \{6, 9, 10\}$, $C = \{0, 1, 6, 9, 11\}$, $D = \{2, 5, 11\}$. **حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة*. اشرح استنتاجك.** 85–86. انظر الهامش.

85. $A \subset B$

86. $D \subset U$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

.87 **SAT/ACT** إذا كان $x > 0$، إذًا

$$\frac{x^2-1}{x+1} + \frac{(x+1)^2-1}{x+2} + \frac{(x+2)^2-1}{x+3} =$$ D

A $(x+1)^2$

B $(x-1)^2$

C $3x-1$

D $3x$

E $3(x-1)^2$

.88 **مراجعة** إذا كانت $\sin x = m$ وكانت $0 < x < 90°$، إذًا $\tan x =$ H

F $\frac{1}{m^2}$

G $\frac{1-m^2}{m}$

H $\frac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

J $\frac{m}{1-m^2}$

.89 أيٌّ مما يلي يتساوى مع $\frac{1-\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}\cdot\tan\theta$؟ B

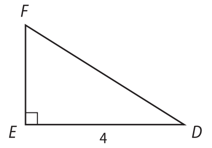
A $\tan\theta$

B $\cot\theta$

C $\sin\theta$

D $\cos\theta$

.90 **مراجعة** انظر إلى الشكل. إذا كانت $\cos D = 0.8$، فما طول $\overline{DF}$؟ F



F 5

G 4

H 3.2

J $\frac{4}{5}$

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 63، على الطلاب إدراك أن متطابقة فيثاغورس $\sin 2x = 1 - \cos 2x$ يمكن استخدامها في كالحل الذي توصلت لمقام وهذا سيؤدي إلى الحل الذي توصلت إليه مها.

4 التقويم

الكرة البلورية اطلب من الطلاب كتابة رأيهم فيما يتعلق بكيفية استفادتهم مما تعلّموه في هذا الدرس لمساعدتهم في الدرس القادم الذي يتناول إثبات صحة المتطابقات المثلّثية.

إجابات إضافية

.67 خطأ، الإجابة النموذجية: لا يحتوي المجال على قيم لـ x حيث $\csc x$ غير محدّد، مثل $n\pi$.

.68 صواب، الإجابة النموذجية: التمثيلات البيانية للدوال الزوجية متماثلة بالنسبة إلى محور y. حيث إن $\cos x$ و$\sec x$ دالتان زوجيتان. إذًا، فالتمثيلات البيانية لهاتين الدالتين متماثلة بالنسبة إلى محور y.

72. $B = 101°$, $c \approx 3.0$, $b \approx 3.4$

73. $C = 73°$, $a \approx 55.6$, $b \approx 48.2$

74. $B \approx 21°$, $C \approx 37°$, $b \approx 13.1$

75. $B \approx 46°$, $C \approx 69°$, $c \approx 5.2$

76. $C = 97°$, $a \approx 5.5$, $b \approx 14.4$

77. $A \approx 40°$, $B \approx 65°$, $b \approx 2.8$

.85 صحيح. جميع عناصر A هي أيضًا عناصر B.

.86 خطأ. جميع عناصر D ليست عناصر U. 11 هو عنصر D وليس عنصر U.

التدريس المتمايز BL

التوسع عبِّر عن $\cos x$ بدلالة كل واحدة من الدوال المثلّثية الخمس الأخرى. ينبغي أن يتضمّن كل تعبير بالضبط دالة واحدة أخرى غير جيب التمام افترض أن x تقع في الربع ا.

الإجابة النموذجية: $\sqrt{1-\sin^2 x}$, $\frac{\sqrt{\csc^2 x - 1}}{\csc x}$, $\frac{1}{\sec x}$, $\sqrt{\frac{1}{\tan^2 x + 1}}$, $\frac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$

4-2 اثبات صحة المتطابقات المثلثية

.. السابق
- حوّلت التعابير المثلثية إلى أبسط صورة.

.. الحالي
- 1 اثبات صحة المتطابقات المثلثية.
- 2 تحديد ما إذا كانت المعادلات متطابقات.

.. لماذا؟
- تتحرك لعبتان ناريتان بنفس السرعة *v*. ويرغب فني الألعاب النارية في تفجير إحداهما على ارتفاع أعلى من الأخرى عن طريق تعديل الزاوية θ الخاصة بالمسار الذي يشكله كل صاروخ مع الأرض. ولحساب أقصى ارتفاع h لكل صاروخ، فالصيغة $h = \frac{v^2 \tan^2 \theta}{2g \sec^2 \theta}$ يمكن استخدامها، ولكن هل ستؤدي $h = \frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g}$ إلى نفس النتيجة؟

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-2 حوّل التعابير المثلثية إلى أبسط صورة.

الدرس 4-2 التحقق من صحة المتطابقات المثلثية.
تحديد ما إذا كانت المعادلات متطابقات.

بعد الدرس 4-2 إيجاد حل المعادلات المثلثية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:
- ما الشيء المشترك بين كلتا المعادلتين؟ h, v^2, and $2g$
- ما وجه الاختلاف بين المعادلتين؟ الدوال المثلثية
- ما الذي قد يلزم أن يكون صحيحًا في المعادلتين حتى تصبح الصيغتان متكافئتين؟ $\sin^2 \theta = \frac{\tan^2 \theta}{\sec^2 \theta}$

مفردات جديدة
إثبات صحة المتطابقة
verify an identity

1 اثبات صحة المتطابقات المثلثية

لقد استخدمتَ المتطابقات المثلثية لإعادة كتابة التعابير بصيغ متكافئة وأحيانًا بصيغ أكثر جدوى. عند اثبات صحتها، يمكن استخدام هذه المتطابقات *الجديدة* أيضًا لحل المسائل أو لإعادة كتابة تعابير مثلثية أخرى.

إن **اثبات صحة متطابقة** يعني *التحقق* من أن كلا طرفي المعادلة متساويان لكل قيم المتغير المعرف في كلا الطرفين من خلالها. ويتم هذا عن طريق تحويل التعبير في أحد طرفي المتطابقة إلى التعبير في الطرف الآخر عن طريق سلسلة من التعابير الوسيطة التي تتساوى كلها مع التعبير الأول. وكما هو الحال مع أنواع الإثباتات الأخرى، كل خطوة يبررها سبب، وهذا السبب هو عادةً متطابقة مثلثية أو عملية جبرية أخرى تم التحقق من صحتها.

ستجد في الأغلب أنه من الأسهل البدء في التحقق من صحة متطابقة مثلثية عن طريق البدء من الطرف الذي به التعبير الأكثر تعقيدًا ثم المتابعة للوصول إلى التعبير الأقل تعقيدًا.

مثال 1 اثبات صحة متطابقة فيثاغورس

تحقق من أن $\frac{\csc^2 x - 1}{\csc^2 x} = \cos^2 x$.

الطرف الأيسر من هذه المتطابقة أكثر تعقيدًا، لذا عليك البدء بهذا التعبير أولاً.

$$\frac{\csc^2 x - 1}{\csc^2 x} = \frac{\cot^2 x}{\csc^2 x}$$ متطابقة فيثاغورس

$$= \cot^2 x \sin^2 x$$ متطابقة مقلوب

$$= \left(\frac{\cos^2 x}{\cancel{\sin^2 x}}\right)\cancel{\sin^2 x}$$ متطابقة نسبية

$$= \cos^2 x \checkmark$$ متطابقة فيثاغورس

لاحظ أن عملية اثبات الصحة تنتهي بوجود تعبير على الطرف الآخر من المتطابقة.

تمرين موجه

أثبت صحة كل متطابقة. **1A–B. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

1A. $\sec^2 \theta \cot^2 \theta - 1 = \cot^2 \theta$

1B. $\tan^2 \alpha = \sec \alpha \csc \alpha \tan \alpha - 1$

وهناك في العادة أكثر من طريقة لإثبات صحة متطابقة. فعلى سبيل المثال، المتطابقة في المثال 1 يمكن التحقق من صحتها أيضًا كما يلي.

$$\frac{\csc^2 x - 1}{\csc^2 x} = \frac{\csc^2 x}{\csc^2 x} - \frac{1}{\csc^2 x}$$ اكتب في صور الفرق بين كسرين

$$= 1 - \sin^2 x$$ بسّط وطبّق متطابقة مقلوب

$$= \cos^2 x$$ متطابقة فيثاغورس

1 التحقق من المتطابقات المثلثية

توضح الأمثلة 1-5 طريقة استخدام المتطابقات والأساليب الجبرية لإثبات تساوي طرفي المعادلة المعطاة لجميع القيم المحدد لها طرفا المعادلة.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال لتأكيد استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أثبت أن $\frac{\tan^2 x + 1}{1 - \sin^2 x} = \sec^4 x$.

$$\frac{\tan^2 x + 1}{1 - \sin^2 x} = \frac{\sec^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sec^2 x}{\frac{1}{\sec^2 x}}$$

$$= \sec^4 x$$

2 أثبت أن

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} - \frac{\sin x}{1 - \cos x} = -2 \cot x$$

انظر الهامش.

3 تحقق من أن

$$\frac{\sin x}{\sec x - 1} = \cos x \cot x + \cot x$$

$$\frac{\sin x}{\sec x - 1} = \frac{\sin x (\sec x + 1)}{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}$$

$$= \frac{\sin x (\sec x + 1)}{\sec^2 x - 1}$$

$$= \frac{\sin x (\sec x + 1)}{\tan^2 x}$$

$$= \frac{\sin x (\sec x + 1)}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= \sin x (\sec x + 1) \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{(\sec x + 1) \cos^2 x}{\sin x}$$

$$= \frac{\cos^2 x \sec x + \cos^2 x}{\sin x}$$

$$= \frac{\cos^2 x \times \frac{1}{\cos x}}{\sin x} + \cos x \times \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} + \cos x \times \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \cot x + \cos x \cot x$$

حين يكون هناك الكثير من الكسور التي لها مقامات مختلفة في أحد التعابير، يمكنك إيجاد مقام مشترك لتقليل التعبير إلى كسر واحد.

مثال 2 اثبات صحة متطابقة مثلثية باستخدام جمع الكسور

أثبت أن $2 \csc x = \frac{1}{\csc x + \cot x} + \frac{1}{\csc x - \cot x}$

الطرف الأيمن من هذه المتطابقة أكثر تعقيدًا، لذا عليك البدء من هناك، وإعادة كتابة كل كسر باستخدام المقام المشترك $(\csc x + \cot x)(\csc x - \cot x)$.

ابدأ بالطرف الأيمن من المتطابقة.
$$\frac{1}{\csc x + \cot x} + \frac{1}{\csc x - \cot x}$$

المقام المشترك
$$= \frac{\csc x - \cot x}{(\csc x + \cot x)(\csc x - \cot x)} + \frac{\csc x + \cot x}{(\csc x + \cot x)(\csc x - \cot x)}$$

اجمع.
$$= \frac{2 \csc x}{(\csc x + \cot x)(\csc x - \cot x)}$$

أوجد حاصل الضرب.
$$= \frac{2 \csc x}{\csc^2 x - \cot^2 x}$$

متطابقة فيثاغورس
$$= 2 \csc x \checkmark$$

تمرين موجه

2. أثبت أن $2 \sec \alpha = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$ **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

ولحذف كسر مقامه بالصيغة $1 \pm u$ أو $u \pm 1$، تذكّر أن تحاول ضرب البسط والمقام في مُرافق المقام. ثم يُحتمل أنه يمكنك تطبيق متطابقة فيثاغورس.

مثال 3 اثبات صحة متطابقة مثلثية باستخدام الضرب

أثبت أن $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \csc \alpha + \cot \alpha$.

لأن الطرف الأيسر من هذه المتطابقة يضم كسرًا، فهو أكثر تعقيدًا بقليل من الطرف الأيمن. لذا، عليك البدء بالطرف الأيسر.

اضرب البسط والمقام في مُرافق $1 - \cos \alpha$، وهو $1 + \cos \alpha$.
$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

أوجد حاصل الضرب.
$$= \frac{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)}{1 - \cos^2 \alpha}$$

متطابقة فيثاغورس
$$= \frac{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha}$$

اقسم المقام المشترك لـ $\sin \alpha$.
$$= \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

اكتب في صورة مجموع كسرين.
$$= \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

متطابقة المقلوب ومتطابقة نسبية.
$$= \csc \alpha + \cot \alpha \checkmark$$

تمرين موجه

3. أثبت أن $\frac{\tan x}{\sec x + 1} = \csc x - \cot x$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

نصيحة دراسية

طريقة بديلة ليس عليك دومًا البدء بالطرف الأكثر تعقيدًا من المعادلة. فإذا بدأت بالطرف الأيمن في المثال 3، فلا يزال بإمكانك إثبات صحة المتطابقة.

$\csc \alpha + \cot \alpha$
$$= \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$
$$= \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$
$$= \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$
$$= \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \checkmark$$

وحتى يتم إثبات صحة متطابقة، لا يمكنك افتراض أن كلا الطرفين متساويان. ولهذا، لا يمكنك استخدام خصائص المعادلة لإجراء العمليات الجبرية على كل طرف من طرفي المتطابقة، مثل جمع نفس الكمية على كل طرف من المعادلة.

إجابة إضافية (مثال إضافي)

2. $\frac{\sin x}{1 + \cos x} - \frac{\sin x}{1 - \cos x}$

$$= \frac{\sin x (1 - \cos x) - \sin x (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{\sin x - \sin x \cos x - \sin x - \sin x \cos x}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \frac{-2 \sin x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-2 \sin x \cos x}{(\sin x)(\sin x)} = -2 \cot x$$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indb 239 12/15/2016 8:09:16 PM

حين يضم التعبير الأكثر تعقيدًا في متطابقة أُسسًا، جرّب التحليل الى العوامل.

مثال 4 اثبات صحة متطابقة مثلثية باستخدام التحليل الى العوامل

أثبت أن $\cot\theta \sec\theta \csc^2\theta - \cot^3\theta \sec\theta = \csc\theta$

$\cot\theta \sec\theta \csc^2\theta - \cot^3\theta \sec\theta$ — ابدأ بالطرف الأيسر من المتطابقة.

$= \cot\theta \sec\theta (\csc^2\theta - \cot^2\theta)$ — حلل الى العوامل.

$= \cot\theta \sec\theta$ — متطابقة فيثاغورس

$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta}$ — المتطابقات العكسية ومتطابقة نسبية

$= \frac{1}{\sin\theta}$ — أوجد حاصل الضرب.

$= \csc\theta$ ✓ — متطابقة مقلوب

تمرين موجه

4. أثبت أن $\sin^2 x \tan^2 x \csc^2 x + \cos^2 x \tan^2 x \csc^2 x = \sec^2 x$.   **انظر الهامش.**

فمن المفيد أحيانًا العمل بشكل مستقل على كل طرف من طرفي المتطابقة للحصول على تعبير وسيط مشترك.

مثال 5 اثبات صحة متطابقة بالعمل على كل طرف بشكل مستقل

أثبت أن $\frac{\tan^2 x}{1 + \sec x} = \frac{1 - \cos x}{\cos x}$

يبدو أن كلا الطرفين معقد، ولكن الطرف الأيسر أكثر تعقيدًا بقليل لأن مقامه يضم حدين. لذا، عليك البدء بالطرف الأيسر.

$\frac{\tan^2 x}{1 + \sec x} = \frac{\sec^2 x - 1}{1 + \sec x}$ — متطابقة فيثاغورس

$= \frac{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}{1 + \sec x}$ — حلل الى العوامل.

$= \sec x - 1$ — اقسم المقام المشترك لـ $\sec x + 1$.

من هذه النقطة، ليس واضحًا كيفية تحويل $\sec x - 1$ إلى $\frac{1 - \cos x}{\cos x}$، لذا عليك البدء بالطرف الأيمن والعمل لتحويله إلى صيغة وسيطة $\sec x - 1$.

$\frac{1 - \cos x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x}$ — اكتب في صورة الفارق بين كسرين.

$= \sec x - 1$ — استخدم متطابقة ناتج القسمة وحوّل لأبسط صورة

لإكمال الإثبات، حُل بترتيب عكسي لربط طرفي الإثبات.

$\frac{\tan^2 x}{1 + \sec x} = \frac{\sec^2 x - 1}{1 + \sec x}$ — متطابقة فيثاغورس

$= \frac{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}{1 + \sec x}$ — حلل العوامل.

$= \sec x - 1$ — اقسم المقام المشترك لـ $\sec x + 1$

$= \frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x}$ — استخدم متطابقة ناتج القسمة واكتبها 1 في صورة $\frac{\cos x}{\cos x}$

$= \frac{1 - \cos x}{\cos x}$ ✓ — اجمع الكسور.

تمرين موجه

5. أثبت أن $\sec^4 x - \sec^2 x = \tan^4 x + \tan^2 x$

$\sec^4 x - \sec^2 x = \sec^2 x(\sec^2 x - 1)$
$= \sec^2 x \tan^2 x$
$= (\tan^2 x + 1)\tan^2 x$
$= \tan^4 x + \tan^2 x$

نصيحة دراسية

خطوات إضافية أثناء إثبات صحة متطابقة، قد يكون عدد الخطوات اللازمة لتبرير التحقق واضحًا. ولكن، إذا لم يكن واضحًا، فمن الأسلم عادةً تضمين خطوات أكثر من اللازم بدلاً من اعتماد خطوات أقل من اللازم.

أمثلة إضافية

4 أثبت أن $\cos x \sec^2 x \tan x - \cos x \tan^3 x = \sin x$.

$\cos x \sec^2 x \tan x - \cos x \tan^3 x$
$= \cos x \tan x(\sec^2 x - \tan^2 x)$
$= \cos x \tan x(1)$
$= \cos x \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$
$= \sin x$

5 أثبت أن $\cot^3 x + \cot x = \cos x \csc^3 x$

$\cos x \sec^2 x \tan x - \cos x \tan^3 x$
$= \cos x \tan x(\sec^2 x - \tan^2 x)$
$= \cos x \tan x(1)$
$= \cos x \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$
$= \sin x$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

السبورة التفاعلية ابدأ في حل الأمثلة على السبورة التفاعلية، واحفظ عملك في صورة صفحات ملاحظات. وفي نهاية الفصل، انشر ملاحظاتك على صفحة الويب الخاصة بالصف الدراسي. وقد يساعد ذلك الطلاب في التركيز على الدرس بدلاً من نسخ الملاحظات لكل خطوة من خطوات إيجاد البرهان.

التركيز على محتوى الرياضيات

التحقق من صحة التطابقات المثلثية للتحقق من صحة المتطابقة المثلثية، يجب إثبات تساوي الأطراف لكل قيم المتغير. ويمكن إثبات ذلك بتحويل طرف أو كلا طرفي المعادلة. وقد يفضل بعض الطلاب محاولة إيجاد الحل لطرف واحد فقط في المرة لتجنب الالتباس.

نصيحة للمعلمين الجدد

تحليل العوامل هناك بداية جيدة لإثبات صحة المتطابقة وهي رؤية ما إذا كان هناك أي شيء في أي طرف يمكن تحليله إلى عامل أم لا.

إجابات إضافية (تمرين موجه)

4. $\sin^2 x \tan^2 x \csc^2 x + \cos^2 x \tan^2 x \csc^2 x$
$= \tan^2 x \csc^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)$
$= \tan^2 x \csc^2 x$
$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\sin^2 x}$
$= \frac{1}{\cos^2 x}$
$= \sec^2 x$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 240   12/15/2016 8:09:17 PM

ملخص المفاهيم إستراتيجيات لإثبات صحة المتطابقات المثلثية

- ابدأ بالطرف الأكثر تعقيدًا من المتطابقة واعمل على تحويله إلى الطرف الأبسط، مع إبقاء الطرف الآخر من المتطابقة في الحسبان على أنه هدفك.
- استخدم متطابقات المقلوب والمتطابقات النسبية ومتطابقات فيثاغورس وغيرها من المتطابقات المثلثية الأساسية.
- استخدم عمليات جبرية مثل جمع الكسور، وإعادة كتابة الكسور في صيغة مجموع أو فرق، وضرب التعابير، أو تحليل التعابير الى العوامل.
- حوّل مقامًا بصيغة $u \pm 1$ أو صيغة $1 \pm u$ إلى حد فردي باستخدام المُرافق ومتطابقة فيثاغورس.
- اعمل على كل طرف بصورة منفصلة للوصول إلى تعبير وسيط مشترك.
- إذا لم تَظهر جدوى أي إستراتيجية، فحاول تحويل التعبير بالكامل إلى تعبير لا يشتمل إلا على جيوب الزوايا وجيوب التمام.

2 تحديد المتطابقات واللامتطابقات

يمكنك استخدام الحاسبة البيانية لاستكشاف ما إذا كان من المحتمل أن المعادلة هي متطابقة أم لا من خلال التمثيل البياني للدوال المرتبطة بكل طرف من المعادلة.

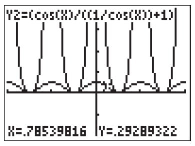
انتبه!
استخدام تمثيل بياني يمكنك استخدام حاسبة بيانية للمساعدة في تأكيد لامتطابقة، ولكنك لا تستطيع استخدام حاسبة بيانية *لإثبات* أن إحدى المعادلات هي متطابقة. عليك تقديم تحقق جبري من صحة متطابقة.

مثال 6 تحديد ما إذا كانت المعادلة متطابقة أم لا

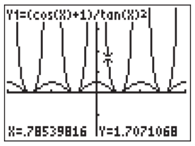
استخدم الحاسبة البيانية لاختبار ما إذا كانت كل معادلة متطابقة أم لا. فإذا بدا أنها متطابقة، فأثبت صحتها. وإن لم تبد كذلك، فأوجد قيمة يكون عندها الطرفان محددين وغير متساويين.

a. $\dfrac{\cos\beta+1}{\tan^2\beta}=\dfrac{\cos\beta}{\sec\beta+1}$

التمثيلات البيانية الخاصة بالدوال ذات الصلة لا تتطابق في كل قيم x التي تحدد كلتا الدالتين. حين تكون $x=\frac{\pi}{4}$، فإنّ $Y1 \approx 1.7$ ولكن $Y2 \approx 0.3$. وعندها تكون هذه المعادلة ليست متطابقة.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: π by $[-1, 3]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: π by $[-1, 3]$ scl: 1

b. $\dfrac{\cos\beta+1}{\tan^2\beta}=\dfrac{\cos\beta}{\sec\beta-1}$

المعادلة تبدو كأنها متطابقة لأن التمثيلات البيانية الخاصة بالدوال ذات الصلة تتطابق. تحقق من صحة هذا جبريًا.

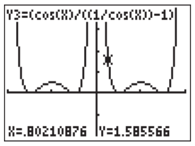
$$\frac{\cos\beta}{\sec\beta-1}=\frac{\cos\beta}{\sec\beta-1}\cdot\frac{\sec\beta+1}{\sec\beta+1}$$ اضرب البسط والمقام في مُرافق $\beta - 1$.

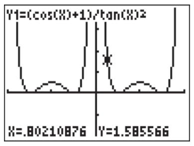
$$=\frac{\cos\beta\sec\beta+\cos\beta}{\sec^2\beta-1}$$ أوجد حاصل الضرب.

$$=\frac{\cos\beta\left(\frac{1}{\cos\beta}\right)+\cos\beta}{\sec^2\beta-1}$$ متطابقة مقلوب

$$=\frac{1+\cos\beta}{\sec^2\beta-1}$$ بسّط

$$=\frac{\cos\beta+1}{\tan^2\beta}\ ✓$$ خاصية التبديل ومتطابقة فيثاغورس





$[-2\pi, 2\pi]$ scl: π by $[-1, 3]$ scl: 1

تمرين موجه **6A–B. انظر الهامش.**

6A. $\csc\theta=\dfrac{\cot\theta\tan^2\theta+\cot\theta}{\sec\theta}$

6B. $\dfrac{\cos x+1}{\sec^2 x}=\dfrac{\cos x}{\sec x-1}$

التدريس المتمايز

المتعلمون بطريقة التواصل اطلب من المجموعات الثنائية من الطلاب التعاون لإثبات صحة المتطابقات في التمرينات الموجهة. اطلب من الطلاب تسجيل الأشياء والأساليب المفيدة التي بحثوا عنها عند البدء. جمّع قائمة بالصف الدراسي على اللوحة.

2 تحديد المتطابقات واللامتطابقات

يوضح **المثال 6** كيف يمكن تحديد ما إذا كانت المعادلة تمثل متطابقة أم لا باستخدام التمثيل البياني. يمكن استخدام البرهان لتوضيح أن المعادلة متطابقة. إذا لم تكن المعادلة متطابقة، فإنه يمكن استخدام التمثيل البياني لتحديد قيمة محددة لكلا الطرفين ولكنها غير متساوية.

مثال إضافي

6 استخدم الحاسبة البيانية لاختبار ما إذا كانت كل معادلة تمثل متطابقة أم لا. فإذا بدا أنها متطابقة، فتحقق من صحتها. وإذا كانت عكس ذلك، فأوجد قيمة x التي يُحدَّد لها كلا الطرفين دون أن يكونا متساويين.

a. $\dfrac{1+\tan^2 x}{\csc x\sec x}=\tan x$ $\quad\dfrac{1+\tan^2 x}{\csc x\sec x}$

$$=\frac{\sec^2 x}{\csc x\sec x}=\frac{\sec x}{\csc x}$$

$$=\frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\sin x}}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$$

b. $\dfrac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\cos x-\sin x}=\cos^2 x-\sin^2 x$

عندما $x=\frac{\pi}{3}$، $Y1\approx 1.43$ و $Y2=-0.5$. فإن هذه المعادلة ليست متطابقة.

إجابات إضافية (تمرين موجه)

6A. $\dfrac{\cot\theta\tan^2\theta+\cot\theta}{\sec\theta}$

$$=\frac{\cot\theta(\tan^2\theta+1)}{\sec\theta}$$

$$=\frac{\cot\theta(\sec^2\theta)}{\sec\theta}$$

$$=\cot\theta\sec\theta$$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{\sin\theta}$$

$$=\csc\theta$$

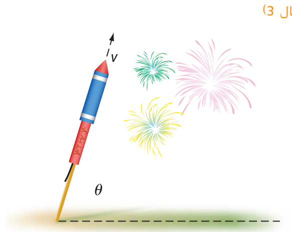
6B. عندما تكون $x=\pi$. فإن $Y1\approx 0$ و $Y2\approx 0.5$؛ ولذلك فالمعادلة ليست متطابقة.

تمارين

أثبت صحة كل متطابقة. (الأمثلة 1-3) **1–18. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

1. $(\sec^2\theta - 1)\cos^2\theta = \sin^2\theta$
2. $\sec^2\theta(1-\cos^2\theta) = \tan^2\theta$
3. $\sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta = \sin^3\theta$
4. $\csc\theta - \cos\theta\cot\theta = \sin\theta$
5. $\cot^2\theta\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot^4\theta$
6. $\tan\theta\csc^2\theta - \tan\theta = \cot\theta$
7. $\frac{\sec\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \cot\theta$
8. $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = 2\csc\theta$
9. $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \tan\theta = \sec\theta$
10. $\frac{\sin\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\tan\theta} = \sin\theta + \cos\theta$
11. $\frac{1}{1-\tan^2\theta} + \frac{1}{1-\cot^2\theta} = 1$
12. $\frac{1}{\csc\theta+1} + \frac{1}{\csc\theta-1} = 2\sec^2\theta\sin\theta$
13. $(\csc\theta - \cot\theta)(\csc\theta + \cot\theta) = 1$
14. $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
15. $\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta} = 2\sec^2\theta$
16. $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = 2\sec\theta$
17. $\csc^4\theta - \cot^4\theta = 2\cot^2\theta + 1$
18. $\frac{\csc^2\theta + 2\csc\theta - 3}{\csc^2\theta - 1} = \frac{\csc\theta + 3}{\csc\theta + 1}$

.19 **الألعاب النارية** إذا أُطلق صاروخ من مستوى الأرض، فإن أقصى ارتفاع يصل إليه يُعطى بالعلاقة $h = \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$، بحيث تكون θ هي الزاوية بين الأرض والمسار الأولي للصاروخ، وتكون v هي سرعة الصاروخ المبدئية، وتكون g هي التسارع بسبب الجاذبية التي مقدارها تربيع 9.8 أمتار في الثانية. (مثال 3)



a. أثبت أن $\frac{v^2\tan^2\theta}{2g\sec^2\theta} = \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$. **انظر الهامش.**

b. لنفترض أنه تم إطلاق صاروخ آخر بزاوية قياسها °80 من الأرض بسرعة مبدئية تبلغ 110 أمتار في الثانية. فأوجد أقصى ارتفاع للصاروخ. **598.7 m**

أثبت صحة كل متطابقة. (المثالان 4 و5) **20–31. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

20. $(\csc\theta + \cot\theta)(1 - \cos\theta) = \sin\theta$
21. $\sin^2\theta\tan^2\theta = \tan^2\theta - \sin^2\theta$
22. $\frac{1-\tan^2\theta}{1-\cot^2\theta} = \frac{\cos^2\theta - 1}{\cos^2\theta}$
23. $\frac{1+\csc\theta}{\sec\theta} = \cos\theta + \cot\theta$
24. $(\csc\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$
25. $\frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{1}{2\cos^2\theta - 1}$
26. $\tan^2\theta\cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
27. $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\sin\theta$
28. $1 - \tan^4\theta = 2\sec^2\theta - \sec^4\theta$
29. $(\csc\theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$
30. $\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \sec\theta$
31. $\frac{2+\csc\theta\sec\theta}{\csc\theta\sec\theta} = (\sin\theta + \cos\theta)^2$

.32 **علم البصريات** إذا وُضع منشوران بنفس القوة بجوار بعضهما البعض، يمكن تحديد إجمالي قوتهما باستخدام الصيغة $z = 2p\cos\theta$، حيث z هي القوة المجمعة للمنشورين، وتكون p هي قوة كل منشور على حدة، وتكون θ هي الزاوية بين المنشورين. فتحقق من أن $2p\cos\theta = 2p(1-\sin^2\theta)\sec\theta$. (مثال 4) **انظر الهامش.**

.33 **التصوير الفوتوغرافي** كمية الضوء المارة عبر مرشح استقطاب يمكن تمثيلها في نموذج باستخدام الصيغة $I = I_m\cos^2\theta$، حيث تكون I هي كمية الضوء المارة عبر المرشح، وتكون I_m هي كمية الضوء المُشعة على المرشح، وتكون θ هي زاوية الدوران بين مصدر الضوء والمرشح. أثبت أن $I_m\cos^2\theta = I_m - \frac{I_m}{\cot^2\theta + 1}$. (مثال 4) **انظر الهامش.**

الحاسبة البيانية اختبر ما إذا كانت كل معادلة متطابقة أم لا عن طريق التمثيل البياني. فإذا بدا أنها متطابقة، فأثبت صحتها. وإن لم تبد كذلك، فأوجد قيمة يكون عندها الطرفان محددين وغير متساويين. (مثال 6) **34–39. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

34. $\frac{\tan x + 1}{\tan x - 1} = \frac{1+\cot x}{1-\cot x}$
35. $\sec x + \tan x = \frac{1}{\sec x - \tan x}$
36. $\sec^2 x - 2\sec x\tan x + \tan^2 x = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$
37. $\frac{\cot^2 x - 1}{1+\cot^2 x} = 1 - 2\sin^2 x$
38. $\frac{\tan x - \sec x}{\tan x + \sec x} = \frac{\tan^2 x - 1}{\sec^2 x}$
39. $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\cot x - \tan x}{\tan x + \cot x}$

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 39 للتحقق من فهم الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص واجبات للطلاب.

نصيحة للمعلمين الجدد

البدء عند إثبات صحة المتطابقة، غالبًا ما يواجه الطلاب صعوبة في معرفة من أين يبدؤون. اطلب منهم الاطلاع على قائمة المتطابقات في الوحدة، ثم تحديد المتطابقات التي تتطابق مع جزء من المعادلة التي يوجدون حلها.

انتبه!

خطأ شائع في التمرينات 40-43، قد لا يطبّق الطلاب القيمة المطلقة تطبيقًا صحيحًا. اطلب من الطلاب تدوين كل خطوة في حلولهم لتجنب الأخطاء.

إجابات إضافية

19a. $\frac{v^2\tan^2\theta}{2g\sec^2\theta} = \frac{v^2\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)}{2g\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)}$

$= \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$

32. $2p(1-\sin^2\theta)\sec\theta$

$= 2p\cos^2\theta\sec\theta$

$= 2p\cos^2\theta \times \frac{1}{\cos\theta}$

$= 2p\cos\theta$

33. $I_m - \frac{I_m}{\cot^2\theta + 1}$

$= I_m\left(1 - \frac{1}{\cot^2\theta + 1}\right)$

$= I_m\left(1 - \frac{1}{\csc^2\theta}\right)$

$= I_m(1 - \sin^2\theta)$

$= I_m\cos^2\theta$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-39, 60, 62-92	1-39 فردي، 89-92	2-38 زوجي، 60, 62-88
OL ضمن المستوى	1-49 فردي، 50، 51-59 فردي، 60، 62-92	1-39, 89-92	40-60, 62-88
BL أعلى من المستوى	40-92		

B

أثبت صحة كل متطابقة. **40–43. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

40. $\sqrt{\frac{\sin x \tan x}{\sec x}} = |\sin x|$

41. $\sqrt{\frac{\sec x - 1}{\sec x + 1}} = \left|\frac{\sec x - 1}{\tan x}\right|$

42. $\ln|\csc x + \cot x| + \ln|\csc x - \cot x| = 0$

43. $\ln|\cot x| + \ln|\tan x \cos x| = \ln|\cos x|$

أثبت صحة كل متطابقة. **44–49. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

44. $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \tan^4\theta$

45. $-2\cos^2\theta = \sin^4\theta - \cos^4\theta - 1$

46. $\sec^2\theta \sin^2\theta = \sec^4\theta - (\tan^4\theta + \sec^2\theta)$

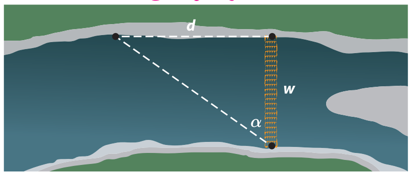
47. $3\sec^2\theta\tan^2\theta + 1 = \sec^6\theta - \tan^6\theta$

48. $\sec^4 x = 1 + 2\tan^2 x + \tan^4 x$

49. $\sec^2 x \csc^2 x = \sec^2 x + \csc^2 x$

50. **البيئة** عالم أحياء يدرس التلوث وَضَعَ شبكة بعرض نهر ووضع أدوات في نقطتين مختلفتين على ضفة النهر لجمع العينات. وفي الرسم التخطيطي الموضح، فإن d هي المسافة بين المحطات وw هي عرض النهر.

a–b, d. انظر الهامش.



a. حدد معادلة فيما يتعلق بـ $\tan\alpha$ الذي يمكن استخدامه لإيجاد المسافة بين المحطتين.

b. أثبت أن $d = \frac{w\cos(90° - \alpha)}{\cos\alpha}$

c. أكمل الجدول الموضح حينما تكون $d = 40$ قدمًا.

w	20	40	60	80	100	120
α	63.4	45	33.7	26.6	21.8	18.4

d. إذا كان $\alpha > 60°$ أو كان $\alpha < 20°$، فالأدوات لن تعمل بشكل سليم. استخدِم الجدول من الجزء c لتحديد أي من الموقعين – حيث يكون عرض النهر فيه 5 أو 35 أو 140 قدمًا – يمكن استخدامه لإجراء التجربة.

C

الدوال الزائدية *الدوال المثلثية الزائدية* يمكن تحديدها بالطرق التالية.

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $\quad$ $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}, x \neq 0$

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ $\quad$ $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$

$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ $\quad$ $\coth x = \frac{1}{\tanh x}, x \neq 0$

51–54. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

أثبت صحة كل متطابقة باستخدام الدوال الموضحة أعلاه.

51. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ $\quad$ **52.** $\sinh(-x) = -\sinh x$

53. $\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$ $\quad$ **54.** $\cosh(-x) = \cosh x$

الحاسبة البيانية مَثِّل كل طرف من كل معادلة بيانيًا. فإذا بدا أن المعادلة متطابقة، أثبت صحتها جبريًا.

55–58. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

55. $\frac{\sec x}{\cos x} - \frac{\tan x \sec x}{\csc x} = 1$

56. $\sec x - \cos^2 x \csc x = \tan x \sec x$

57. $(\tan x + \sec x)(1 - \sin x) = \cos x$

58. $\frac{\sec x \cos x}{\cot^2 x} - \frac{1}{\tan^2 x - \sin^2 x \tan^2 x} = -1$

59. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف الطرق المستخدمة لحل المعادلات المثلثية. فكّر في $2\sin x = 1$.

a. **تمثيل عددي** اعزل الدالة المثلثية في المعادلة بحيث يكون $\sin x$ هو التعبير الوحيد الموجود بأحد طرفي المعادلة. $\sin x = \frac{1}{2}$

b. **تمثيل بياني** مَثّل بيانيًا الطرفين الأيسر والأيمن من المعادلة التي أوجدتها في الجزء a على نفس التمثيل البياني فوق $[0, 2\pi)$. حدد مكان أي نقاط تقاطع وعبّر عن القيم بالنسبة للزوايا نصف القطرية.

c. **تمثيل هندسي** استخدم دائرة الوحدة للتحقق من صحة الإجابات التي أوجدتها في الجزء b.

d. **تمثيل بياني** مثّل بيانيًا الطرفين الأيسر والأيمن من المعادلة التي أوجدتها في الجزء a على نفس التمثيل البياني فوق $-2\pi < x < 2\pi$. حدد مكان أي نقاط تقاطع وعبّر عن القيم بالنسبة للزوايا نصف القطرية.

e. **تمثيل لفظي** خمّن ما هي حلول $2\sin x = 1$. اشرح استنتاجك.

b–e. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

مسائل مهارات التفكير العليا

60. **التبرير** هل يمكن استخدام طريقة التعويض لتحديد ما إذا كانت المعادلة متطابقة أم لا؟ اشرح استنتاجك.
انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

61. **التحدي** أثبت صحة أن مساحة مثلث A موضحه بالمعادلة

$$A = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin(\beta + \gamma)}$$

حيث يمثل كلّ من a و b و c أضلاع المثلث ويمثل α و β و γ الزوايا المقابلة ذات الصلة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

62. **الكتابة في الرياضيات** استخدم خصائص اللوغاريتمات لشرح السبب في أن مجموع اللوغاريتمات الطبيعية الخاصة بالدوال المثلثية الأساسية الست لأي زاوية θ يساوي 0.
انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

63. **مسألة ذات إجابة مفتوحة** كوّن متطابقات لكل من $\sec x$ و$\csc x$ بدلالة دالتين أو أكثر من الدوال المثلثية الأخرى.
انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

64. **التبرير** إذا كانت الزاويتان α و β متتامتين. فهل $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$؟ اشرح استنتاجك. علل إجاباتك.
انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

65. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف تثبت صحة متطابقة مثلثية يكون فيها طرفا المعادلة متساويين في درجة التعقيد.
انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

إجابات إضافية

50a. $d = w\tan\alpha$

50b. $d = w\tan\alpha$
$= \frac{w\sin\alpha}{\cos\alpha}$
$= \frac{w\cos(90° - \alpha)}{\cos\alpha}$

50d. الإجابة النموذجية: لم يمكن استخدام المواقع التي عرضها 5 و140 قدمًا لأن $\alpha > 60°$ و $\alpha < 20°$. على التوالي. كان من الممكن استخدام الموقع الذي عرضه 35 قدمًا لأن $20° < \alpha < 60°$.

مراجعة شاملة

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

66. $\cos\theta \csc\theta$ **$\cot\theta$**

67. $\tan\theta \cot\theta$ **1**

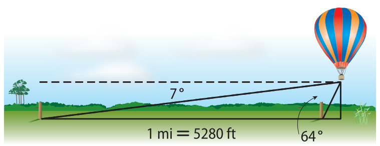
68. $\sin\theta \cot\theta$ **$\cos\theta$**

69. $\frac{\cos\theta \csc\theta}{\tan\theta}$ **$\cot^2\theta$**

70. $\frac{\sin\theta \csc\theta}{\cot\theta}$ **$\tan\theta$**

71. $\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$ **1**

.72 **ركوب المنطاد** بينما يمر منطاد هواء ساخن عبر جزء مستقيم من الطريق السريع، رأى قائده نقطتين متتابعتين من نقاط توضيح المسافة على نفس الجانب من المنطاد. وحين معاينة النقطتين، كانت زاويتا الانخفاض 64° و7°. فما ارتفاع المنطاد مقربًا لأقرب قدم؟ **690 ft**



حدد الخطوط المقاربة العمودية، ومَثّل كل دالة بيانيًا. **75–73. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

73. $y = \frac{1}{4}\tan x$

74. $y = \csc 2x$

75. $y = \frac{1}{2}\sec 3x$

حول قياس الزاوية من الدرجات الى الزوايا نصف القطرية بدلالة π وبالعكس.

76. $660°$ **$\frac{11\pi}{3}$**

77. $570°$ **$\frac{19\pi}{6}$**

78. $158°$ **$\frac{79\pi}{90}$**

79. $\frac{29\pi}{4}$ **1305°**

80. $\frac{17\pi}{6}$ **510°**

81. 9 **$\frac{1620}{\pi} \approx 515.7°$**

حُل كلاً من المتباينات التالية. **82. $(-\infty, -3) \cup (6, \infty)$ 83. $(-7, 4)$ 84. $[-1, 5]$**

82. $x^2 - 3x - 18 > 0$

83. $x^2 + 3x - 28 < 0$

84. $x^2 - 4x \leq 5$

85. $x^2 + 2x \geq 24$ **$(-\infty, -6] \cup [4, \infty)$**

86. $-x^2 - x + 12 \geq 0$ **$[-4, 3]$**

87. $-x^2 - 6x + 7 \leq 0$ **$(-\infty, -7] \cup [1, \infty)$**

.88 **الطعام** يفحص مدير مخبز عشوائيًا قِطَع من الكعك الذي أعدّه العاملون لضمان الطعم الصحيح والمضبوط في كل قِطعة. وينبغي أن تحتوي كل قطعة بوزن 12 أوقية على كريمة نصفها بطعم الشوكولاتة ونصفها بطعم الفانيليا. يمكن تمثيل كمية الشوكولاتة التي تختلف فيها كل شريحة بالصيغة $g(x) = \frac{1}{2}|x - 12|$. صِف التحوّلات في الدالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا. **انظر الهامش.**

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

89. SAT/ACT

$a, b, a, b, b, a, b, b, b, a, b, b, b, b, a, \ldots$

إذا استمرت المتتالية على هذه الوتيرة، فكم عدد حروف b الموجودة بين المرة الرابعة والأربعين والسابعة والأربعين لظهور الحرف a؟ **B**

A 91　　C 138　　E 230

B 135　　D 182

.90 أي تعبير يمكن استخدامه لتكوين متطابقة فيها $\frac{\sec\theta + \csc\theta}{1 + \tan\theta}$ حين تكون $\tan\theta \neq -1$؟ **J**

F $\sin\theta$

G $\cos\theta$

H $\tan\theta$

J $\csc\theta$

.91 **مراجعة** أيٌّ مما يلي لا يساوي $\cos\theta$ عندما يكون $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$؟ **D**

A $\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$　　C $\cot\theta \sin\theta$

B $\frac{1 - \sin^2\theta}{\cos\theta}$　　D $\tan\theta \csc\theta$

.92 **مراجعة** أيٌّ مما يلي يساوي $\sin\theta + \cot\theta \cos\theta$؟ **G**

F $2\sin\theta$

G $\frac{1}{\sin\theta}$

H $\cos^2\theta$

J $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin^2\theta}$

4 التقويم

حصاد الأمس اطلب من كل طالب كتابة كيف استفاد من درس الأمس في اليوم الجديد.

المتابعة

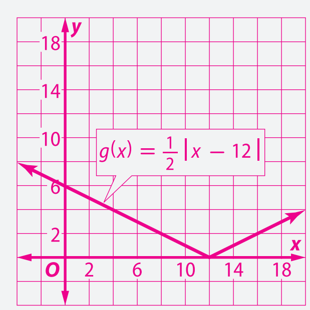
استكشفَ الطلابُ المتطابقات المثلثية وأثبتوا صحتها.

اسأل:

- ما وجه الاستفادة من المتطابقات المثلثية؟ **الإجابة النموذجية: تُوفر المتطابقات المثلثية طريقة لتحويل التعابير المثلثية المعقدة إلى أبسط صورة وذلك بإعادة كتابتها بصور متكافئة ولكنها أكثر ملاءمة.**

إجابة إضافية

.88 الدالة عبارة عن تغيير للأبعاد وتفسير لها. التمثيل البياني للدالة $g(x) = \frac{1}{2}|x - 12|$ اضغط التمثيل البياني $f(x) = |x|$ رأسيًا وانقله 12 نقطة جهة اليمين.



التدريس المتمايز BL

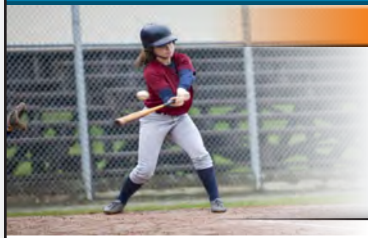
التوسع اطلب من الطلاب إكمال التمرين 63 بمفرده ثم بالتعاون مع زميل آخر. وينبغي أن يتبادل كل طالب المتطابقات المكتملة مع زميله ويرى إن كان بإمكان كل طالب إثبات صحة متطابقات الآخر أم لا. اطلب منهم التعاون للقيام بالشيء ذاته مع المتطابقة $\cot x$ بدلاً من $\frac{\cot x}{\sin x}$.

4-3 حل المعادلات المثلثية

.. السابق
- لقد قمت بإثبات صحة المتطابقات المثلثية.

.. الحالي
1 حل المعادلات المثلثية باستخدام الأساليب الجبرية.
2 حل المعادلات المثلثية باستخدام المتطابقات الأساسية.

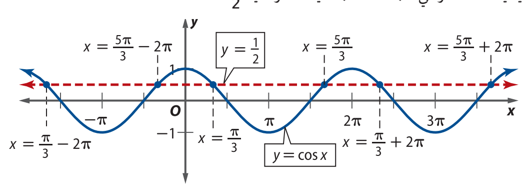
.. لماذا؟
- كرة بيسبول تنطلق من سطح المضرب بزاوية انطلاق θ وتعود إلى ارتفاع ضربها الإبتدائي بعد مسافة d من الأمتار. ولإيجاد سرعة v_0 للكرة بينما تنطلق من سطح المضرب، يمكنك حل المعادلة المثلثية $d = \frac{2{v_0}^2 \sin\theta \cos\theta}{9.8}$



1 استخدام الأساليب الجبرية للحل

في الدرس 4-2، قمت بإثبات صحة المتطابقات المثلثية التي تكون صحيحة لجميع قيم المتغير في كلا الطرفين. وفي هذا الدرس، سندرس المعادلات المثلثية الشرطية والتي قد تكون صحيحة لبعض قيم المتغير ولكنها خاطئة عند القيم الأخرى.

فكّر في التمثيلات البيانية لكلا طرفي المعادلة المثلثية الشرطية $\cos x = \frac{1}{2}$



يوضح التمثيل البياني أن $\cos x = \frac{1}{2}$ لها حلين بالفترة $[0, 2\pi)$، $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{5\pi}{3}$.
حيث إن دورة $y = \cos x$ هي 2π، فإن $\cos x = \frac{1}{2}$ لها حلول لانهائية للفترة $(-\infty, \infty)$. يمكن إيجاد حلول إضافية بجمع مضاعفات الأعداد الصحيحة للفترات، بحيث يمكننا التعبير عن جميع الحلول كتابةً

$x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ و $x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$، حيث يكون n هو عدد صحيح.

لحل المعادلات المثلثية التي تضم تعبيرًا مثلثيًا واحدًا فقط، ابدأ بعزل هذا التعبير.

مثال 1 الحل بعزل التعابير المثلثية

حُل $2 \tan x - \sqrt{3} = \tan x$.

$2 \tan x - \sqrt{3} = \tan x$	المعادلة الأصلية
$\tan x - \sqrt{3} = 0$	اطرح $\tan x$ من كل طرف لعزل التعبير المثلثي
$\tan x = \sqrt{3}$	اجمع $\sqrt{3}$ على كل طرف

الدورة الخاصة بـــ tan هي π، لذا فأنت لا تحتاج إلا إيجاد الحلول بالفترة $[0, \pi)$. الحل الوحيد بهذه الفترة هو $x = \frac{\pi}{3}$. الحلول بالفترة $(-\infty, \infty)$ يتم إيجادها فيما بعد عن طريق جمع مضاعفات العدد الصحيح π. ولهذا، فالصيغة العامة للحل هي

$x = \frac{\pi}{3} + n\pi$، حيث يكون n عددًا صحيحًا.

تمرين موجه

1. حُل $4 \sin x = 2 \sin x + \sqrt{2}$. $\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-3 التحقق من المتطابقات المثلثية.

الدرس 4-3 حل المعادلات المثلثية باستخدام الأساليب الجبرية.
حل المعادلات المثلّثية باستخدام المتطابقات الأساسية.

بعد الدرس 4-3 استخدام متطابقات المجموع والفرق لحل الدوال المثلّثية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:
- في المعادلة المذكورة، ما الذي تمثله d؟ المسافة التي تقطعها الكرة بالمتر من وقت ضربها إلى أن تصل إلى نفس الارتفاع الذي ضربت عنده
- في المعادلة المذكورة، ما تأثير 2 على المعادلة؟ تُضرب زاوية الإطلاق في 2.

(يُتبع في الصفحة التالية)

■ إذا كان كل من المسافة وزاوية الإطلاق معروفتين. فصِف الخطوات اللازمة لإيجاد السرعة الابتدائية. عوّض القيم المعطاة فيها لـ d و θ. ثم اضرب كلا الطرفين في 9.8. ثم احسب $\sin 2\theta$. واقسم كلا الطرفين على هذه القيمة. بعد ذلك استخدم الجذر التربيعي لكلا الطرفين.

1 استخدام الأساليب الجبرية لإيجاد الحل

المثال 1 يوضّح كيفية حل المعادلات المثلّثية عن طريق عزل التعبيرات المثلّثية. **والمثال 2** يوضّح كيفية حل المعادلات المثلّثية عن طريق أخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين. **والمثال 3** يوضّح كيفية حل المعادلات المثلّثية عن طريق تحليل العوامل. **والمثال 4** يوضّح كيفية حل المعادلات المثلّثية التي تتضمّن مضاعفات الزوايا.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال للوقوف على استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد حل $5 \cos x = 3 \cos x + \sqrt{3}$.
$\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{11\pi}{6} + 2n\pi; n \in \mathbb{Z}$

2 أوجد حل $3 \tan^2 x - 4 = -3$.
$\frac{\pi}{6} + n\pi, \frac{5\pi}{6} + n\pi; n \in \mathbb{Z}$

3 أوجد جميع حلول كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi)$.

a. $2 \sin x \cos x = \sqrt{3} \sin x$
$0, \frac{\pi}{6}, \pi, \frac{11\pi}{6}$

b. $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$
$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

مثال 2 الحل بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف

حُل $4 \sin^2 x + 1 = 4$.

$4 \sin^2 x + 1 = 4$	المعادلة الأصلية
$4 \sin^2 x = 3$	اطرح 1 من كل طرف
$\sin^2 x = \frac{3}{4}$	اقسم كل طرف على 4
$\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	خُذ الجذر التربيعي لكل طرف

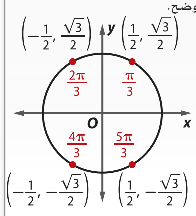
بالفترة $[0, 2\pi)$. حين يكون $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{2\pi}{3}$ وحين يكون $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $x = \frac{4\pi}{3}$ و $x = \frac{5\pi}{3}$. بما أن دورة الزاوية sin هي 2π. فالحلول بالفترة $(-\infty, \infty)$ لها الصيغة العامة $x = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ و $x = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$ و $x = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$ و $x = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$. حيث يكون n عددًا صحيحًا.

تمرين موجه

2. حُل $3 \cot^2 x + 4 = 7$. $\frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{3\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

نصيحة دراسية

إيجاد الحلول باستخدام دائرة الوحدة بما أن sin الزاوية يتوافق مع الإحداثي y بدائرة الوحدة. فيمكنك إيجاد حلول sin بالفترة $[0, 2\pi)$ هي $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ باستخدام دائرة الوحدة كما هو موضح.



أي زاوية تشترك في ضلع الإنتهاء، مع هذه الزوايا ستكون أيضًا حلاً للمعادلة.

حين لا يمكن جمع الدوال المثلثية على أحد طرفي معادلةٍ ما. جرّب طريقة التحليل الى العوامل وتطبيق خاصية ناتج الضرب الصفري. إذا كانت للمعادلة صيغة تربيعية. فحلل الى العوامل إن أمكن. وإذا تعذّر ذلك. فطبّق الصيغة التربيعية.

مثال 3 الحل باستخدام التحليل الى العوامل

أوجد جميع حلول كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi)$.

a. $\cos x \sin x = 3 \cos x$

$\cos x \sin \theta = 3 \cos x$		المعادلة الأصلية
$\cos x \sin x - 3 \cos x = 0$		اعزل التعبير المثلثي
$\cos x (\sin x - 3) = 0$		حلل الى العوامل
$\cos x = 0$	أو $\sin x - 3 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = \frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$	$\sin x = 3$	حُل لإيجاد x في $[0, 2\pi)$

المعادلة $\sin x = 3$ ليس لها حل حيث إن القيمة العظمى التي يمكن لدالة الـ Sine الزاوية الحصول عليها هي 1. ولهذا، في الفترة $[0, 2\pi)$. إن حلول المعادلة الأصلية هي $\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$.

b. $\cos^4 x + \cos^2 x - 2 = 0$

$\cos^4 x + \cos^2 x - 2 = 0$		المعادلة الأصلية
$(\cos^2 x)^2 + \cos^2 x - 2 = 0$		اكتب بالصيغة التربيعية
$(\cos^2 x + 2)(\cos^2 x - 1) = 0$		حلل الى العوامل
$\cos^2 x + 2 = 0$	أو $\cos^2 x - 1 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$\cos^2 x = -2$	$\cos^2 x = 1$	حُل لإيجاد $\cos^2 x$
$\cos x = \pm\sqrt{-2}$	$\cos x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$	خذ الجذر التربيعي لكل طرف

المعادلة $\cos x = \pm\sqrt{-2}$ ليست لها حلول حقيقية. في الفترة $[0, 2\pi)$. المعادلة $\cos x = \pm 1$ لها حلان هما 0 و π.

تمرين موجه $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

3A. $2 \sin x \cos x = \sqrt{2} \cos x$ $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$ **3B.** $4 \cos^2 x + 2 \cos x - 2\sqrt{2} \cos x = \sqrt{2}$

انتبه!

القسمة على العوامل المثلثية لا تقسم $\cos x$ في المثال 3a. وإذا كنت ستفعل ذلك. فلاحظ أنك قد تستنتج أن المعادلة لم يكن لها حل. في حين أنها في الواقع لها حلان بالفاصل $[0, 2\pi)$.

مثال إضافي

4 المقذوفات أُطلق مقذوف بسرعة ابتدائية v_0 تبلغ 350 m/s وتجاوز سورًا على بعد 3000 m. وارتفاع السور هو نفس الارتفاع الابتدائي للمقذوف. إذا كانت المسافة التي قطعها المقذوف يعبّر عنها بالصيغة $d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{9.8}$، فأوجد فاصل زوايا الإطلاق المحتملة لتجاوز السور. $7.0° \le \theta \le 83.1°$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

مدونة في مدونة الصف، ينبغي على الطلاب كتابة مداخلة عن كيفية حل المعادلات المثلّثية. اطلب منهم وصف أوجه التشابه والاختلاف بين هذه العملية وحل الأنواع الأخرى من المعادلات.

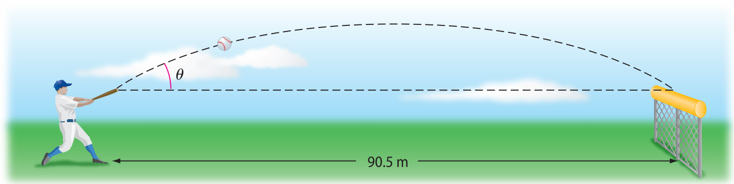
تشتمل بعض المعادلات المثلثية على دوال لأضعاف زوايا. مثل $\cos 2x = \frac{1}{2}$. ولحل هذه المعادلات، عليك أولاً حل أضعاف الزاوية.

نصيحة دراسية

الحلول الدقيقة مقابل الحلول التقريبية أثناء حل المعادلات المثلثية التي ليست في سياق من الحياة اليومية، اكتب إجاباتك باستخدام القيم الدقيقة بدلاً من التقريبات العشرية. فعلى سبيل المثال، الحلول العامة للمعادلة $\tan x = 2$ ينبغي التعبير عنها كما يلي $x = \tan^{-1} 2 + n\pi$ أو $x = \arctan 2 + n\pi$.

مثال 4 من الحياة اليومية الدوال المثلثية لأضعاف الزوايا

البيسبول كرة بيسبول تنطلق من سطح المضرب بسرعة إبتدائية تبلغ 30 مترًا بالثانية وتتجاوز سورًا على بعد 90.5 مترًا. وارتفاع السور هو نفس الارتفاع الإبتدائي للكرة المضروبة. فإذا كانت المسافة التي قطعتها الكرة متمثلة في $d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{9.8}$، حيث وحدة 9.8=متراً لكل ثانية مربعة. فأوجد فترة لزوايا الإطلاق المحتملة للكرة.



$d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{9.8}$	الصيغة الأصلية
$90.5 = \frac{30^2 \sin 2\theta}{9.8}$	$d = 90.5$ و $v_0 = 30$
$90.5 = \frac{900 \sin 2\theta}{9.8}$	بسّط
$886.9 = 900 \sin 2\theta$	اضرب كل طرف في 9.8
$\frac{886.9}{900} = \sin 2\theta$	اقسم كل طرف على 900
$\sin^{-1} \frac{886.9}{900}$	تعريف Sin^{-1}

تعلمت سابقاً أن مدى دالة Sin^{-1} مقصور على الزوايا الحادة لـــ θ في الفترة $[-90°, 90°]$. بما أننا نوجِد Sin^{-1} الخاص بـــ 2θ بدلاً من θ، فنحن بحاجة إلى التفكير في الزوايا الموجودة في الفترة $[-2(90°), 2(90°)]$ أو $[-180°, 180°]$. استخدم حاسبتك لإيجاد علاقة الزاوية الحادة وزاوية المرجع $\sin \theta = \sin(180° - \theta)$ لإيجاد الزاوية المنفرجة.

$\sin^{-1} \frac{886.9}{900} = 2\theta$	تعريف Sin^{-1}
$80.2° = 99°.8 = 2\theta$	$\sin^{-1} \frac{886.9}{900} \approx 80.2°$ و $\sin(180° - 80.2°) = \sin 99.8°$
$40.1° = 49°.9 = \theta$	اقسم على 2

الفترة هي $[40°.1, 49°.9]$. ستتجاوز الكرة السور إذا كانت الزاوية بين 40°.1 و49°.9.

التحقق عوّض عن قياسات الزاوية في المعادلة الأصلية لتأكيد الحل.

$d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{9.8}$	الصيغة الأصلية	$d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{9.8}$
$90.5 \stackrel{?}{=} \frac{30^2 \sin(2 \times 40.1°)}{9.8}$	$\theta = 40.1°$ أو $\theta = 49.9°$	$90.5 \stackrel{?}{=} \frac{30^2 \sin(2 \times 49.9°)}{9.8}$
$90.5 \approx 90.497$ ✓	استخدم حاسبة	$90.5 \approx 90.497$ ✓

نصيحة دراسية

الزاوية المثالية بتجاهل مقاومة الريح والعوامل الأخرى، ستقطع كرة البيسبول أطول مسافة حين تُضرب بزاوية 45°. وهذا لأن $\sin 2(45) = 1$، والتي تزيد من مدى صيغة المسافة لأقصى حد في المثال.

تمرين موجه

4. **البيسبول** أوجد فترة زوايا الإطلاق المحتملة المطلوبة لتجاوز السور. إذا:

A. تزايدت السرعة الإبتدائية لتصل إلى 35 مترا بالثانية. $8.66°$ و $23.2°$

B. ظلت السرعة الإبتدائية كما هي. ولكن المسافة نحو السور كانت 80 مترا. $7.59°$ و $30.3°$

التدريس المتمايز AL OL

المتعلمون بطريقة التمرين الشخصي اطلب من الطلاب ابتكار عدد من المعادلات المثلّثية وإيجاد حلول لكل منها. اقترح عليهم إضافة مسألة جديدة للمجموعة كل يوم على مدار عدة أيام قادمة.

2 استخدام المتطابقات المثلثية للحل

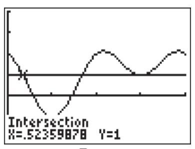
يمكنك استخدام المتطابقات المثلثية مع الطرق الجبرية لحل المعادلات المثلثية.

مثال 5 الحل بإعادة الكتابة باستخدام دالة مثلثية واحدة

أوجد كل حلول $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$ بالفترة $[0, 2\pi)$.

$2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$	المعادلة الأصلية
$2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 = 0$	متطابقة فيثاغورس
$2 - 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$	اضرب
$-2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$	بسّط
$-1(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$	حلل العوامل
$2\sin x - 1 = 0 \quad = \quad \sin x + 1 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$\sin x = \frac{1}{2} \qquad \sin x = -1$	حُل لإيجاد $\sin x$
$x = \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \qquad x = \frac{3\pi}{2}$	حُل لإيجاد x في $[0, 2\pi]$

التحقق التمثيلات البيانية التي تخص $Y_1 = 2\cos^2 x - \sin x$ و $Y_2 = 1$ تتقاطع في $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{3\pi}{2}$ بالفترة $[0, 2\pi]$ كما هو موضح ✔

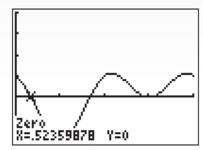


$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 4]$ scl: 1

نصيحة دراسية

طريقة بديلة هناك طريقة بديلة للتحقق من المثال 5 وهي التمثيل البياني لما يلي $y = 2\cos^2 x - \sin x - 1$.

تتضمن أصفارًا $\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ في الفترة $[0, 2\pi)$ كما هو موضح.



$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 4]$ scl: 1

تمرين موجه

أوجد جميع حلول كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi)$.

5A. $1 - \cos x = 2\sin^2 x$ $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

5B. $\cot^2 x \csc^2 x + 2\csc^2 x - \cot^2 x = 2$ $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

ويمكنك أحيانًا الحصول على معادلة في دالة مثلثية واحدة من خلال تربيع كل طرف، ولكن هذه الطريقة قد تؤدي إلى الوصول لحلول غير مترابطة.

مثال 6 الحل باستخدام التربيع

أوجد كل حلول $\csc x - \cot x = 1$ على الفترة $[0, 2\pi]$.

$\csc x - \cot x = 1$	المعادلة الأصلية
$\csc x = 1 + \cot x$	اجمع $\cot x$ على كل طرف
$(\csc x)^2 = (1 + \cot x)^2$	قم بتربيع كل طرف
$\csc^2 x = 1 + 2\cot x + \cot^2 x$	اضرب
$1 + \cot^2 x = 1 + 2\cot x + \cot^2 x$	متطابقة فيثاغورس
$0 = 2\cot x$	اطرح $1 + \cot^2 x$ من كل طرف
$0 = \cot x$	اقسم كل طرف على 2
$x = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$	حُل لإيجاد x على $[0, 2\pi]$

التحقق

$\csc x - \cot x = 1$	$\csc x - \cot x = 1$	المعادلة الأصلية
$\csc \frac{3\pi}{2} - \cot \frac{3\pi}{2} \stackrel{?}{=} 1$	$\csc \frac{\pi}{2} - \cot \frac{\pi}{2} \stackrel{?}{=} 1$	استبدل
$-1 - 0 \neq 1$ ✗	$1 - 0 = 1$ ✔	بسّط

ولهذا، فالحل المتاح الوحيد هو $\frac{\pi}{2}$ بالفترة $[0, 2\pi]$.

تمرين موجه

6A. $\sec x + 1 = \tan x$ π

6B. $\cos x = \sin x - 1$ $\pi, \frac{\pi}{2}$

2 استخدام المتطابقات المثلّثية لإيجاد الحل

المثال 5 يوضّح كيفية حل معادلة مثلّثية عن طريق إعادة كتابتها بدلالة دالة مثلّثية فردية. **المثال 6** يوضّح كيفية حل معادلة مثلّثية عن طريق تربيع كلا طرفي المعادلة.

أمثلة إضافية

5 أوجد جميع حلول $\sin^2 x - \sin x + 1 = \cos^2 x$ في الفترة $[0, 2\pi)$. $0, \pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

6 أوجد جميع حلول $\sin x - \cos x = 1$ في الفترة $[0, 2\pi)$. $\frac{\pi}{2}, \pi$

التركيز على محتوى الرياضيات

حل المعادلات الأساليب الجبرية ذاتها التي تُستخدم في حل المعادلات الأخرى، مثل استخدام خواص التساوي وخاصية التوزيع وتحليل العوامل والتمثيل البياني وتربيع كلا الطرفين، يمكن أن تُستخدم لحل المعادلات المثلّثية. لاحظ أنه قد يكون من الأسهل تحديد الأساليب الجبرية التي ستستخدمها عن طريق تعويض متغير لتعبير مثلّثي وحل المعادلة الناتجة ذات الصلة. وتعدّ المتطابقات المثلّثية أداة إضافية لحل هذه المعادلات. وبما أن الدوال المثلّثية دورية، فقد يكون هناك العديد من الحلول لهذه المعادلات.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 248 12/15/2016 8:09:30 PM

تمارين

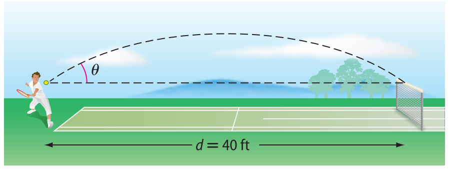
حُل كل معادلة لجميع قيم x. (المثالان 1 و2) **1–12. انظر الهامش.**

1. $5 \sin x + 2 = \sin x$
2. $5 = \sec^2 x + 3$
3. $2 = 4 \cos^2 x + 1$
4. $4 \tan x - 7 = 3 \tan x - 6$
5. $9 + \cot^2 x = 12$
6. $2 - 10 \sec x = 4 - 9 \sec x$
7. $3 \csc x = 2 \csc x + \sqrt{2}$
8. $11 = 3 \csc^2 x + 7$
9. $6 \tan^2 x - 2 = 4$
10. $9 + \sin^2 x = 10$
11. $7 \cot x - \sqrt{3} = 4 \cot x$
12. $7 \cos x = 5 \cos x + \sqrt{3}$

أوجد جميع حلول كل معادلة في $[0, 2\pi]$. (مثال 3)

13. $\sin^4 x + 2 \sin^2 x - 3 = 0$ $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$
14. $-2 \sin x = -\sin x \cos x$ $0, \pi$
15. $4 \cot x = \cot x \sin^2 x$ $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$
16. $\csc^2 x - \csc x + 9 = 11$ $\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
17. $\cos^3 x + \cos^2 x - \cos x = 1$ π ،0
18. $2 \sin^2 x = \sin x + 1$ $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

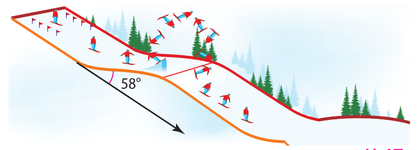
19. **التنس** كرة تنس تنطلق من سطح المضرب وتتجه نحو شبكة على بعد 40 قدمًا. وارتفاع الشبكة هو نفس الارتفاع الإبتدائي لكرة التنس. (مثال 4)



a. فإذا ضُربت الكرة بسرعة 50 قدمًا بالثانية، وبتجاهل مقاومة الهواء، فاستخدم $d = \frac{1}{32} v_0^2 \sin 2\theta$ لإيجاد فترة الزوايا المحتملة التي تحتاجها الكرة لعبور الشبكة. **[6.74° و 15.4°]**

b. أوجد θ إذا ظلت السرعة الإبتدائية كما هي ولكن المسافة نحو الشبكة كانت 50 قدمًا. **1.70° و 19.9°**

20. **التزحلق على الجليد** في المنافسة الأولیمبية لرياضة التزحلق الهوائي على الجليد، يُسرع المتزحلقون نزولاً على منحدر يُطلقهم في الهواء، كما هو موضح. وأقصى ارتفاع يمكن للمتزحلق تحقيقه مُمثل فيما يلي $h_{peak} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$، حيث يكون g هو تسارع الجاذبية و تساوي 9.8 أمتار بالثانية المربعة. (مثال 4)



a. إذا حقق متزحلق ارتفاع 5 أمتار أعلى نهاية المنحدر، فماذا كانت سرعته الإبتدائية؟ **≈ 11.67 m/s**

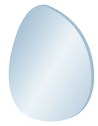
b. استخدم إجابتك من الجزء a لتحديد الزمن الذي يستغرقه المتزحلق ليصل لأقصى ارتفاع إذا كانت $t_{peak} = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$. **$\approx 1.0$ s**

أوجد جميع حلول كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$. (المثالان 5 و6)

21. $1 = \cot^2 x + \csc x$ $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$
22. $\sec x = \tan x + 1$ 0
23. $\tan^2 x = 1 - \sec x$ $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ ،0
24. $\csc x + \cot x = 1$ $\frac{\pi}{2}$
25. $2 - 2 \cos^2 x = \sin x + 1$ $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$
26. $\cos x - 4 = \sin x - 4$ $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$
27. $3 \sin x = 3 - 3 \cos x$ $\frac{\pi}{2}, 0$
28. $\cot^2 x \csc^2 x - \cot^2 x = 9$ $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$
29. $\sec^2 x - 1 + \tan x - \sqrt{3} \tan x = \sqrt{3}$ $\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$
30. $\sec^2 x \tan^2 x + 3 \sec^2 x - 2 \tan^2 x = 3$ $0, \pi$

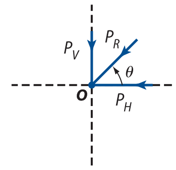
31. **فحص البصر** يضم أخصائيو فحص البصر أحيانًا منشورين منحرفين أو مائلين لتصحيح الرؤية. القوة الانكسارية الناتجة P_R عن ضم منشورين منحرفين يمكن حسابها عن طريق تحليل كل منشور إلى مكوناته الأفقية والرأسية، P_H وP_V. **$\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{5\pi}{4} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$**

المنشور العيني



القاعدة

وضع القاعدة



حل قوة المنشور

$P_V = P_R \sin \theta$

$P_H = P_R \cos \theta$

باستخدام المعادلات أعلاه، حدد قيم θ التي يكون فيها كلٌ من P_V وP_H متساويين.

أوجد جميع حلول كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$.

32. $\frac{\tan^2 x}{\sec x} + \cos x = 2$
33. $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1 + \sin x}{\cos x} = -4$
34. $\frac{\sin x + \cos x}{\tan x} + \frac{1 - \sin x}{\sin x} = \cos x$ **لا يوجد حل**
35. $\cot x \cos x + 1 = \frac{1}{\sec x - 1} + \frac{\sin x}{\tan^2 x}$

الحاسبة البيانية حُل كل معادلة بالفترة $[0, 2\pi]$ عن طريق التمثيل البياني. قرّب إلى أقرب جزء من مائة.

36. $3 \cos 2x = e^x + 1$ **0.33**
37. $\sin \pi x + \cos \pi x = 3x$ **0.41**
38. $x^2 = 2 \cos x + x$ **1.34**
39. $x \log x + 5x \cos x = -2$ **1.84, 4.49**

249

التمرين 3

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 30 للتحقّق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص واجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع قد يجد الطلاب صعوبة في تحليل عوامل التعابير التربيعية ذات القيم المثلّثية مثل تلك الموجودة في التمرين 13 ومن 16 إلى 18. إذا كان الأمر كذلك، فاطلب من الطلاب تحليل العوامل عن طريق تبديل الدالة المثلّثية بمتغير، ثم تحليل عوامل المعادلة، ثم إعادة الدالة المثلّثية إلى الصيغة محلَّلة العوامل للمعادلة.

إجابات إضافية

1–12. n هو عدد صحيح.

1. $\frac{7\pi}{6} + 2n\pi, \frac{11\pi}{6} + 2n\pi$
2. $\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \frac{5\pi}{4} + 2n\pi, \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$
3. $\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \frac{4\pi}{3} + 2n\pi, \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$
4. $\frac{\pi}{4} + n\pi$
5. $\frac{\pi}{6} + n\pi, \frac{5\pi}{6} + n\pi$
6. $\frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \frac{4\pi}{3} + 2n\pi$
7. $\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$
8. $\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \frac{2\pi}{3} + 2n\pi, \frac{4\pi}{3} + 2n\pi, \frac{5\pi}{3} + 2n\pi$
9. $\frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{3\pi}{4} + n\pi$
10. $\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$
11. $\frac{\pi}{3} + n\pi$
12. $\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{11\pi}{6} + 2n\pi$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة OL BL AL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1–30, 57, 60–78	1–29 فردي، 75–78	2–30 زوجي، 57، 60–74
OL ضمن المستوى	1–39 فردي، 40، 41–55 فردي، 56، 57، 60–78	1–30, 75–78	31–57, 60–74
BL أعلى من المستوى	31–78		

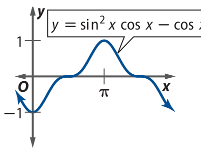
40. **الأرصاد الجوية** متوسط درجة الحرارة اليومية لإحدى المدن بدرجات الفهرنهايت يمكن تمثيله بما يلي $t = 8.05 \cos\left(\frac{\pi}{6}x - \pi\right) + 66.95$، حيث تكون x دالة عن الزمن، وتمثل $x = 1$ يوم 15 يناير، وتمثل $x = 2$ يوم 15 فبراير وهكذا. **61.3°**

a. استخدم حاسبة بيانية لتقدير درجة الحرارة يوم 31 يناير.

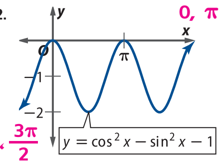
b. قرّب عدد الشهور التي يكون فيها متوسط درجة الحرارة أكبر من 70 درجة على مدار الشهر. **3**

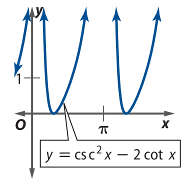
c. قدّر أعلى درجة حرارة في العام والشهر الذين تحدث فيهما.
75°، يونيو

أوجد التقاطع مع المحاور الأفقية x لكل تمثيل بياني بالفترة $[0, 2\pi]$.

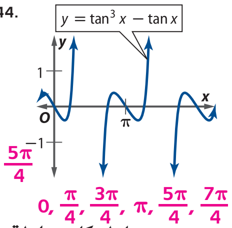
41. 

$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

42. **0, π**


43. 

$\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

44. 

$0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

أوجد جميع حلول كل معادلة بالفترة $[0, 4\pi]$. **45–48. انظر الهامش.**

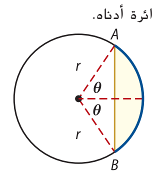
45. $4 \tan x = 2 \sec^2 x$

46. $2 \sin^2 x + 1 = -3 \sin x$

47. $\csc x \cot^2 x = \csc x$

48. $\sec x + 5 = 2 \sec x + 3$

49. **الهندسة** فكّر في الدائرة أدناه.



a. طول s للقوس AB يتمثل في $s = r(2\theta)$ حيث يكون $0 \le \theta \le \pi$. حين يكون $s = 18$ و$AB = 14$، فنصف القطر هو $r = \frac{7}{\sin \theta}$. استخدم حاسبة بيانية لإيجاد قياس 2θ بالراديان.

2.39 راديان

b. مساحة المنطقة المظللة تتمثل في $A = \frac{r^2(\theta - \sin \theta)}{2}$. استخدم حاسبة بيانية لإيجاد قياس θ بالراديان إذا كان نصف القطر هو 5 بوصات والمساحة هي 36 بوصة مربعة. قرّب إلى أقرب جزء من المئة. **3.01 راديان**

حل كل معادلة بالفترة $[0, 2\pi)$. **50–55. انظر الهامش**

50. $1 > 2 \sin x$

51. $0 < 2 \cos x - \sqrt{2}$

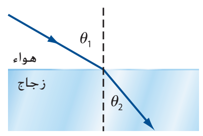
52. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$

53. $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \le \tan x \cot x$

54. $\cos x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$

55. $\sqrt{2} \sin x - 1 < 0$

56. **انكسار الضوء** حين ينتقل الضوء من وسط شفاف لوسطٍ آخر شفاف فإنه ينحني أو ينكسر، كما هو موضح.



يوصف انكسار الضوء بما يلي $n_2 \sin \theta_1 = n_1 \sin \theta_2$، حيث يكون n_1 هو معامل انكسار الضوء الخاص بالوسط الذي يدخله الضوء، ويكون n_2 هو معامل انكسار الضوء الخاص بالوسط الذي يخرج منه الضوء، ويكون θ_1 هو زاوية السقوط، ويكون θ_2 هو زاوية الانكسار.

المادة	معامل الانكسار
الزجاج	1.52
الجليد	1.31
البلاستيك	1.50
المياه	1.33

a. أوجد θ_2 لكل مادة موضحة إذا كانت زاوية السقوط هي 40° ومعامل انكسار الهواء هو 1.00.

b. إذا تضاعفت زاوية السقوط لتصل إلى 80°، فهل ستكون زوايا الانكسار الناتجة أكبر بمرتين من تلك الزوايا الموجودة في الجزء a؟ **لا**

56a. الزجاج = 0.25°، والجليد = 4.29°، والبلاستيك = 4.25°، والمياه = 9.28°

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

57. **تحليل الخطأ** يحاول عامر وطارق حل ما يلي $\tan^2 x - \tan x + \sqrt{3} = \sqrt{3} \tan x$. يظن عامر أن الحلول هي $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$، و$x = \frac{5\pi}{4} + n\pi$، و $x = \frac{\pi}{3} + n\pi$، و $x = \frac{4\pi}{3} + n\pi$. ويظن طارق أن الحلول هي $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ و$x = \frac{\pi}{3} + n\pi$. هل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

58. $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$

تحدٍّ حل كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$.

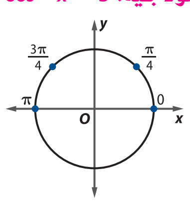
58. $16 \sin^5 x + 2 \sin x = 12 \sin^3 x$

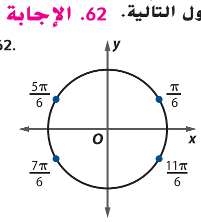
59. $4 \cos^2 x - 4 \sin^2 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x = 3$

59. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

60. **التبرير** هل الحلان $\csc x = \sqrt{2}$ و $\cot^2 x + 1 = 2$ متساويان؟ إذا كانتا كذلك، فتحقق من صحة إجابتك جبريًا. وإذا لم تكونا متساويتين، فاشرح استنتاجك. **انظر الهامش.**

مسألة ذات إجابة مفتوحة اكتب معادلة مثلثية بها كل حل من الحلول التالية. **62. الإجابة النموذجية: $4 \cos^2 x = 3$**

61. 

62. 

الإجابة النموذجية:

63. **الكتابة في الرياضيات** اشرح الفرق في الأساليب التي تُستخدم أثناء حل المعادلات والتحقق من صحة المتطابقات. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

إجابات إضافية

45. $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}$

46. $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}, \frac{23\pi}{6}$

47. $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$

48. $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 250 12/15/2016 8:09:34 PM

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 57، على الطلاب إدراك أن الإجابتين متماثلتان حيث $n = 1, \frac{\pi}{4} + n\pi$ تساوي $\frac{3\pi}{4}$. الحلّان صحيحان.

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب اطلب من كل طالب أن يخبر زميله أو أن يكتب خطوات حل $2\sin^2 x + 2 = 3$.

الإجابة النموذجية: اعزل الدالة المثلّثية في طرف واحد من المعادلة، ثم استخدم معكوس الجيب لإيجاد قيمة المتغير.

إجابات إضافية

50. $0 \le x < \frac{\pi}{6}$ أو $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$

51. $0 \le x < \frac{\pi}{4}$ أو $\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$

52. $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$

53. $0 \le x < 2\pi$

54. $\frac{5\pi}{6} \le x \le \frac{7\pi}{6}$

55. $0 \le x < \frac{\pi}{4}$ أو $\frac{3\pi}{4} < x < 2\pi$

57. كلاهما. الإجابة النموذجية: حلول عامر صحيحة، لكن صيغتها ليست في أبسط صورة. فعلى سبيل المثال، حلوله لـ $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ و $x = \frac{5\pi}{4} + n\pi$ يمكن أن تكون ببساطة $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ حيث إن $n = 1$. $\frac{\pi}{4} + n\pi$ تساوي $\frac{5\pi}{4}$.

60. لا. الإجابة النموذجية: حلول $\csc x = \sqrt{2}$ هي $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ باستخدام متطابقة فيثاغورس، تحوّل $\cot^2 x + 1 = 2$ لأبسط صورة إلى $\csc^2 x = 2$ أو $\csc x = \pm\sqrt{2}$. إذًا هناك إجابتان إضافيتان حيث $\frac{7\pi}{4}$. $\frac{5\pi}{4}$:$\csc x = -\sqrt{2}$.

مراجعة شاملة

اثبت صحة كل متطابقة. 66–64. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

64. $\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta} = \frac{\cot^2\theta}{\csc\theta - 1}$

65. $\frac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

66. $\frac{1}{\sec^2\theta} + \frac{1}{\csc^2\theta} = 1$

أوجد قيمة كل تعبير مستخدمًا المعلومات المعطاة.

67. $\tan\theta,\ \sin\theta = \frac{1}{2},\ \tan\theta > 0$ **$\frac{\sqrt{3}}{3}$**

68. $\csc\theta,\ \cos\theta = -\frac{3}{5},\ \csc\theta < 0$ **$-\frac{5}{4}$**

69. $\sec\theta,\ \tan\theta = -1,\ \sin\theta < 0$ **$\sqrt{2}$**

70. **تعداد الأحياء** يمكن تمثيل تعداد نوع معين من الغزلان بالدالة $p = 30000 + 20000\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$. حيث p هو التعداد و t هو الزمن بالأعوام.

a. ما سعة الدالة؟ ما الذي تمثله؟ **a. 2,0000؛ تختلف قيمة التعداد لمقدار أكثر من 30,000 وأقل منه**

b. ما دورة الدالة؟ ما الذي تمثله؟ **b. 20 عامًا؛ يعود التعداد إلى مقداره الأصلي بعد 20 عامًا.**

c. مثّل الدالة بيانيًا. **انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

بفرض أن $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ و $g(x) = 6x + 4$، أوجد كلاً مما يلي.

71. $(f - g)(x)$ **$(f - g)(x) = 2x^2 - 11x - 1$**

72. $(f \times g)(x)$ **$(f \times g)(x) = 12x^3 - 22x^2 - 2x + 12$**

73. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

74. **الأعمال التجارية** ينبغي على صاحب شركة صغيرة توظيف عمال موسميين حسب تزايد حاجته للعمال. توضح القائمة التالية عدد الموظفين الذين يتم توظيفهم شهريًا لمدة 5 شهور.

الشهر	عدد الموظفين الإضافيين
أغسطس	5
سبتمبر	14
أكتوبر	6
نوفمبر	8
ديسمبر	12

فإذا كان متوسط هذه البيانات هو 9. فما الانحراف المعياري للتعداد لهذه البيانات؟ قرب إلى أقرب جزء من عشرة. **3.5**

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

75. **SAT/ACT** بالنسبة لكل القيم الموجبة لـ m و n، إذا كان $\frac{3x}{m - nx} = 2$, then $x =$ **D**

A $\frac{2m - 2n}{3}$

B $\frac{3 + 2n}{2m}$

C $\frac{2m - 3}{2n}$

D $\frac{2m}{3 + 2n}$

E $\frac{3}{2m - 2n}$

76. إذا كانت $\cos x = -0.45$، فما هي $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$؟ **H**

F -0.55

G -0.45

H 0.45

J 0.55

77. أيّ مما يلي ليس حلًا لما يلي: $\sin\theta + \cos\theta\tan^2\theta = 0$؟ **D**

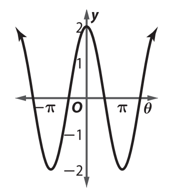
A $\frac{3\pi}{4}$

B $\frac{7\pi}{4}$

C 2π

D $\frac{5\pi}{2}$

78. **مراجعة** فيما يلي التمثيل البياني الذي يخص $y = 2\cos\theta$. أيّ مما يلي هو حل لـ $2\cos\theta = 1$؟ **G**



F $\frac{8\pi}{3}$

G $\frac{10\pi}{3}$

H $\frac{13\pi}{3}$

J $\frac{15\pi}{3}$

التدريس المتمايز BL

التوسع اطرح المسألة التالية.

في المعادلة $\frac{a}{2} + d = d + a\sin(bx + c)$، حيث تكون $a \neq 0, c, d$ أي أعداد حقيقية، وتكون b عددًا صحيحًا موجبًا. فكم عدد الحلول الموجودة في الفترة $[0, 2\pi)$؟ **$2b$**

4-3 التوسع

مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المتباينات المثلّثية

الهدف:
- استخدام الحاسبة البيانية لحل المتباينات المثلّثية.

يمكنك استخدام الحاسبة البيانية لحل المتباينات المثلّثية. مثّل كل متباينة بيانيًا. ثم حدّد موقع نقاط نهاية كل تقاطع على التمثيل البياني لإيجاد الفواصل التي تكون المتباينة فيها صحيحة.

نشاط 1 تمثيل متباينة مثلّثية بيانيًا

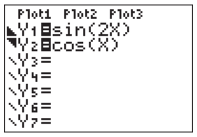
مثّل بيانيًا وأوجد حل $\sin 2x \geq \cos x$.

الخطوة 1 استبدل كل طرف من هذه المتباينة بالمتغير y لصياغة المتباينات الجديدة.

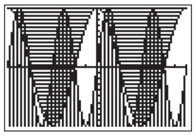
$Y_2 \geq \cos x$ و $\sin 2x \geq Y_1$

الخطوة 2 مثّل كل متباينة بيانيًا. واجعل لكل متباينة رمزًا بالانتقال إلى يسار علامة التساوي واختيار ENTER إلى أن تومض المثلّثات المظلّلة. يمثّل المثلّث العلوي أكبر من، ويمثّل المثلّث السفلي أقل من (الشكل 4.3.1). في القائمة MODE اختر RADIAN.

الخطوة 3 مثّل المعادلات بيانيًا في النافذة الملائمة. استخدم مجال ومدى كل دالة مثلّثية كدليل (الشكل 4.3.2).



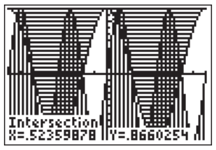
الشكل 4.3.1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-1, 1]$ scl: 0.1

الشكل 4.3.2

الخطوة 4 تشير المنطقة المظلّلة بلون داكن لنقطة تقاطع التمثيلات البيانية وحل نظام المتباينات. استخدم CALC: intersect لتحديد مواقع هذه التقاطعات. حرّك المؤشر فوق التقاطع واختر ENTER ثلاث مرات.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-1, 1]$ scl: 0.1

الخطوة 5 يحدث التقاطع الأول عندما تكون $y = 0.866$ أو $\frac{\sqrt{3}}{2}$. وبما أن $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$، يكون التقاطع عند $x = \frac{\pi}{6}$. ويكون التقاطع التالي عند $x = \frac{\pi}{2}$. إذًا، إحدى فترات الحل هي $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$. والفترة الأخرى هي $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$. هناك عدد لا نهائي من الفترات، وإذًا تكون حلول كل قيم x هي $\left[\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$ و $\left[\frac{5\pi}{6} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right]$.

تمارين

مثّل كل متباينة بيانيًا وأوجد حلًا لها. **1–6. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

1. $\sin 3x < 2\cos x$
2. $3\cos x \geq 0.5\sin 2x$
3. $\sec x < 2\cos x$
4. $\csc 2x > \sin 8x$
5. $2\tan 2x < 3\sin 2x$
6. $\tan x \geq \cos x$

1 التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المتباينات المثلّثية.

نصيحة للتدريس

تأكّد من أن حاسبات الطلاب تعمل على وضع الراديان (الزاوية نصف قطرية).

أكّد على الطلاب أنهم يبحثون عن الفترة؛ مما يعني أنهم يستطيعون استخدام خاصية التقاطع لإيجاد نقطة البداية ونقطة النهاية لكل فترة.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

قسّم الطلاب إلى مجموعات من ثلاثة أو أربعة أفراد لهم قدرات متنوعة. واطلب منهم إكمال النشاط والتمرين 1.

تحقّق من أن الطلاب يجدون التقاطعات التي تحدّد المناطق المظلّلة الداكنة للغاية. قد يحتاجون إلى التمرير بجانب واحدة من الدوال ليقتربوا من نقطة التقاطع.

تمرين اطلب من الطلاب إكمال التمارين من 2 إلى 6.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرينين 3 و 4 لتقييم قدرة الطلاب على استخدام التمثيلات البيانية للمتباينات لتحديد الحل.

من العملي إلى النظري

اطلب من الطلاب تلخيص ما تعلّموه بشأن المتباينات المثلّثية. اطلب منهم ذكر أمثلة.

الدروس من 4-1 إلى 4-3

التقويم التكويني

استخدم اختبار نصف الوحدة لتقييم تقدّم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

بالنسبة للمسائل المجاب عنها بإجابات خاطئة، اطلب من الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها بين الأقواس.

الوحدة 4 اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 4-1 إلى 4-3

أوجد قيمة كل تعبير مستخدمًا المعلومات المعطاة. (الدرس 4-1)

1. $\sin\theta$ و $\cos\theta > 0$ ،$\cot\theta = 4$ ،$\cos\theta$ $\frac{\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17}$

2. $\sec\theta$ و $\csc\theta > 0$ ،$\tan\theta = -\frac{2}{3}$ ،$\sin\theta$ $-\frac{\sqrt{13}}{3}, \frac{2\sqrt{13}}{13}$

3. $\tan\theta$ و $\sin\theta > 0$ ،$\cos\theta = \frac{1}{4}$ ،$\csc\theta$ $\sqrt{15}, \frac{4\sqrt{15}}{15}$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 4-1)

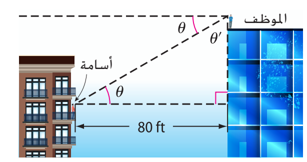
4. $\frac{\sin(-x)}{\tan(-x)}$ $\cos x$

5. $\frac{\sec^2 x}{\cot^2 x + 1}$ $\tan^2 x$

6. $\frac{\sin(90° - x)}{\cot^2(90° - x) + 1}$ $\cos^3 x$

7. $\frac{\sin x}{1 + \sec x}$ $\cot x - \cot x \cos x$

8. **زاوية الانخفاض** يستطيع أسامة أن يرى من نافذة شقّته قمة مبنى البنك في الجهة المقابلة من الشارع من زاوية ارتفاع θ. كما هو موضّح أدناه. (الدرس 4-1)



a. إذا نظر موظّف بالبنك من أعلى المبنى إلى الأسفل ناحية شقّة أسامة. فما المتطابقة التي يمكن استخدامها لاستنتاج أن $\sin\theta = \cos\theta'$؟ $\sin\theta = \cos(90° - \theta)$

b. إذا نظر أسامة إلى الأسفل ناحية إحدى النوافذ السفلية للبنك من زاوية انخفاض 35°. فكم سيكون بُعد نافذة البنك أسفل شقّته؟   حوالي 56 ft

9. **الاختيار من متعدد** أي من العناصر التالية لا يساوي $\csc\theta$؟ (الدرس 4-1)   D

A $\sec(90° - \theta)$

B $\sqrt{\cot^2\theta + 1}$

C $\frac{1}{\sin\theta}$

D $\frac{1}{\sin(90° - \theta)}$

أثبت صحة كل متطابقة. (الدرس 4-2)   10-15. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

10. $\frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} - \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} = -2\tan\theta$

11. $\csc^2\theta - \sin^2\theta - \cos^2\theta - \cot^2\theta = 0$

12. $\sin\theta + \frac{\cos\theta}{\tan\theta} = \csc\theta$

13. $\frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} = \sec\theta - \tan\theta$

14. $\frac{\csc\theta}{\sin\theta} + \frac{\cot\theta}{\cos\theta} = \cot^2\theta + \csc\theta + 1$

15. $\frac{1 + \sin\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{\csc\theta}{1 - \sin\theta}$

أوجد جميع حلول كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi)$. (الدرس 4-3)

16. $4\sec\theta + 2\sqrt{3} = \sec\theta$ $\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

17. $2\tan\theta + 4 = \tan\theta + 5$ $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

18. $4\cos^2\theta + 2 = 3$ $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

19. $\cos\theta - 1 = \sin\theta$ $0, \frac{3\pi}{2}$

20. **الاختيار من متعدد** أي من العناصر التالية يُمثل مجموعة حل $\cos\theta\tan\theta - \sin^2\theta = 0$؟ (الدرس 4-3)   J

F $\frac{\pi}{2}n$ حيث يكون n عددًا صحيحًا

G $\frac{\pi}{2} + n\pi$ حيث يكون n عددًا صحيحًا

H $\pi + 2n\pi$. حيث يكون n عددًا صحيحًا

J $n\pi$ حيث يكون n عددًا صحيحًا

أوجد حل كل معادلة لجميع قيم θ. (الدرس 4-3)

21. $3\sin^2\theta + 6 = 2\sin^2\theta + 7$ $\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

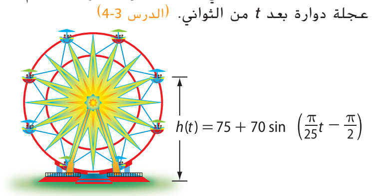
22. $\sin\theta + \cos\theta = 0$ $\frac{3\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

23. $\sec\theta + \tan\theta = 0$ لا يوجد حل

24. $3 - 3\cos^2\theta = 1 + \sin^2\theta$ $\frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{3\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

25. **حركة المقذوف** إن المسافة d بالقدم التي تقطعها كرة تم ركلها بتسارع 32 قدمًا في الثانية المربّعة موضحة من خلال $d = \frac{{v_0}^2 \sin 2\theta}{32}$. حيث v_0 هي السرعة المبدئية للجسم وθ هي الزاوية التي تم إطلاق الجسم منها. إذا تمّ ركل الكرة بسرعة مبدئية تبلغ 82 قدمًا في الثانية. وقطعت 185 قدمًا. فأوجد الزاوية (الزوايا) الممكنة التي تم إطلاق الكرة منها. (الدرس 4-3)   30.8°, 59.2°

26. **العجلة الدوارة** فيما يلي أدناه موضح ارتفاع h بالقدم لراكب على عجلة دوارة بعد t من الثواني. (الدرس 4-3)



a. إذا كانت العجلة الدوارة تبدأ عند $t = 0$. فكم سيكون الارتفاع الإبتدائي للراكب؟   5 ft

b. متى سيصل الراكب أول مرة للحد الأقصى للارتفاع عند 145 قدمًا؟   25 ثانية

الدرس 4-4 متطابقات المجموع والفرق

:: السابق
- أوجَدْت قيم الدوال المثلّثية باستخدام دائرة الوحدة.

:: الحالي
1. استخدام متطابقات المجموع والفرق لإيجاد قيمة الدوال المثلّثية.
2. استخدام متطابقات المجموع والفرق لإيجاد حل للمعادلات المثلّثية.

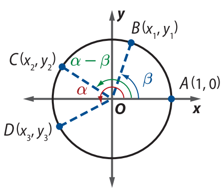
:: لماذا؟
- عندما تكون الصورة على شاشة التليفزيون مشوّشة، أو عندما لا يعمل توليف محطة إذاعية على نحو صحيح، تكون المشكلة غالبًا بسبب *التداخل في الإشارات*.
ويحدث هذا التداخل عندما تمر الموجات في الفراغ ذاته في نفس الوقت. يمكنك استخدام المتطابقات المثلّثية لتحديد نوع التداخل الذي يحدث.

المفردات الجديدة
متطابقة اختزال
reduction identity

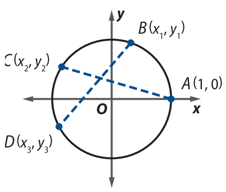
1 إيجاد قيمة الدوال المثلّثية

لقد استخدمتَ متطابقات أساسية تشتمل على متغير واحد فقط. لكن في هذا الدرس، سنستخدم متطابقات تشتمل على متغيرين. إحدى هذه المتطابقات متطابقة *الفرق* لــ *cosine*.

حدّد مواقع للنقاط A و B و C و D على دائرة الوحدة، واجعل α و β زوايا في الفترة $[0, 2\pi]$، و$\alpha > \beta$ كما هو موضّح في الشكل 4.4.1. لأن كل نقطة لها موقع على دائرة الوحدة، فإن $x_1^2 + y_1^2 = 1$ و $x_2^2 + y_2^2 = 1$ و $x_3^2 + y_3^2 = 1$.
لاحظ أيضًا أن قياس $\text{arc } CD = \alpha - (\alpha - \beta)$ أو β وقياس $\text{arc } AB = \beta$.



الشكل 4.4.1



الشكل 4.4.2

بما أن arcs AB و CD لهما نفس القياس، إذًا يكون الوتران AC و BD الموضحان في الشكل 4.4.2 متطابقين.

$AC = BD$	الوتران AC و BD متطابقان.
$\sqrt{(x_2-1)^2+(y_2-0)^2} = \sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}$	قانون المسافة
$(x_2-1)^2+(y_2-0)^2 = (x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2$	قم بتربيع كل طرف.
$x_2^2-2x_2+1+y_2^2 = x_3^2-2x_3x_1+x_1^2+y_3^2-2y_3y_1+y_1^2$	قم بتربيع كل ذات حدّين.
$(x_2^2+y_2^2)-2x_2+1 = (x_1^2+y_1^2)+(x_3^2+y_3^2)-2x_3x_1-2y_3y_1$	جمّع الحدود التربيعية المتشابهة.
$1-2x_2+1 = 1+1-2x_3x_1-2y_3y_1$	التعويض
$2-2x_2 = 2-2x_3x_1-2y_3y_1$	اجمع.
$-2x_2 = -2x_3x_1-2y_3y_1$	اطرح 2 من كل طرف.
$x_2 = x_3x_1+y_3y_1$	اقسم كل طرف على -2.

في الشكل 4.4.1، لاحظ أنه وفقًا لتعريفات دائرة الوحدة لــ sin and cos، فإن $x_1 = \cos\beta$ و $x_2 = \cos(\alpha-\beta)$ و $x_3 = \cos\alpha$ و $y_1 = \sin\beta$ و $y_3 = \sin\alpha$. وعند التعويض، فإن $x_2 = x_3x_1 + y_3y_1$ تصبح
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. — متطابقة الفرق لــ cos

يمكننا الآن الحصول على متطابقة المجموع لــ cosine.

$\cos[\alpha+(-\beta)] = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$	$\alpha-\beta = \alpha+(-\beta)$
$\cos[\alpha+(-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$	$\cos(-\beta) = \cos(\beta)$, $\sin\beta = -\sin(-\beta)$
$\cos[\alpha+\theta] = \cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta$	اجعل $(-\beta) = \theta$

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-4 إيجاد قيم الدوال المثلثية باستخدام دائرة الوحدة.

الدرس 4-4 استخدام متطابقات المجموع والفرق لإيجاد قيمة الدوال المثلّثية.
استخدام متطابقات المجموع والفرق لإيجاد حل للمعادلات المثلّثية.

بعد الدرس 4-4 استخدام متطابقات الزوايا المتعددة وتحويل ناتج الضرب لمجموع لإيجاد قيمة تعابير مثلثية وحل معادلات مثلثية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

أسأل:
- كيف ترتبط الدوال المثلثية بترددات التلفاز والراديو؟ تنتقل هذه الترددات في موجات يمكن تمثيلها باستخدام الدوال المثلثية.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 254 12/15/2016 8:09:41 PM

يمكن استخدام متطابقتي cosine هاتين لإثبات كل من متطابقات المجموع والفرق الأخرى المدرجة أدناه.

المفهوم الأساسي متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع	متطابقات الفرق
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$	$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$	$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$	$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

سوف تُثبِت متطابقات المجموع والفرق لـ sin ولـ tan في التمارين 57-60.

من خلال كتابة قياسات الزاوية بصيغة مجاميع أو فروق قياسات خاصة للزاوية، يمكنك استخدام متطابقات المجموع والفروق هذه لإيجاد قيم دقيقة للدوال المثلّثية للزوايا الأقل شيوعًا.

مثال 1 إيجاد قيمة تعبير مثلّثي

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مثلّثي.

a. $\sin 15°$

اكتب °15 بصيغة مجموع أو فرق قياسات زاوية تعرفُ قيمة جيوبها.

$\sin 15° = \sin(45° - 30°)$ — $45° - 30° = 15°$

$= \sin 45° \cos 30° - \sin 30° \cos 45°$ — متطابقة الفرق لـ sin

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ — $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{6}}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ — أوجد ناتج الضرب.

$= \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ — جمّع الكسور.

b. $\tan \frac{7\pi}{12}$

$\tan\frac{7\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$ — $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}$

$= \dfrac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}$ — متطابقة المجموع لـ tan

$= \dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}(1)}$ — $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ و $\tan\frac{\pi}{4}=1$

$= \dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$ — بسّط

$= \dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\times\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ — طبّق إنطاق المقام (تخليصه من الجذر التربيعي).

$= \dfrac{\sqrt{3}+1+3+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-3}$ — أوجد ناتج الضرب.

$= \dfrac{4+2\sqrt{3}}{-2}$ — بسّط

تمرين موجه

1A. $\cos 15°$ $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

1B. $\sin\frac{5\pi}{12}$ $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

نصيحة دراسية

تحقّق من إجابتك يمكنك التحقّق من إجاباتك عن طريق استخدام الحاسبة البيانية. في المثال 1a، إن $\sin 15° \approx 0.259$ و $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \approx 0.259$. تأكّد من أن الحاسبة في الإعداد الصحيح.

- اذكر بعض الطرق لمنع التداخل. الإجابات النموذجية: تغيير التردد؛ أغلق التردد المتداخل إذا كان المصدر يمكن تحديده.

1 إيجاد قيم الدوال المثلثية

توضح الأمثلة 3-1 كيف يمكن استخدام متطابقات المجموع والفرق لإيجاد القيمة الدقيقة للتعبير المثلثي. يوضح **المثال 4** كيف يمكن استخدام متطابقات المجموع والفرق لإعادة كتابة التعبير المثلثي في صورة تعبير جبري لا يتضمن دوال مثلثية. يوضح **المثالان 5 و 6** كيف يمكن استخدام متطابقات المجموع والفرق لإثبات صحة المتطابقات متساوية القيمة ومتطابقات الانخفاض.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال لتأكيد استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مثلّثي.

a. $\cos 75°$ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b. $\tan\dfrac{11\pi}{12}$ $-2+\sqrt{3}$

نصيحة للمعلمين الجدد

الحلول الدقيقة رغم أن القيمة التقريبية لتعبيرات مثل $\sin 15°$ يمكن إيجادها بسرعة وبسهولة باستخدام الحاسبة، فذكّر الطلاب أن الحاسبة لا تعطي حلولاً دقيقة. وبالتالي يمكن استخدام متطابقات المجموع أو الفرق لإيجاد الحلول الدقيقة.

انتبه!

متطابقات المجموع والفرق أكّد على الطلاب ألا يعتقدوا فيما يتعلق بالدوال المثلثية أن $f(x+y)=f(x)+f(y)$. وبوجه عام، $\cos(\alpha+\beta)\neq\cos\alpha+\cos\beta$, $\sin(\alpha+\beta)\neq\sin\alpha+\sin\beta$, and $\tan(\alpha+\beta)\neq\tan\alpha+\tan\beta$.

غالبًا ما تُستخدم متطابقات المجموع والفرق لحل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 2 من الحياة اليومية استخدام متطابقة المجموع أو الفرق

الكهرباء يمكن إيجاد تذبذب التيار i بوحدات الأمبير في دائرة بعينها بعد t من الثواني باستخدام الصيغة $i = 3\ (\sin 165)t$، حيث *165 هي قياس الدرجة*.

a. أعد كتابة القاعدة بدلالة مجموع قياسات زاويتين.

$i = 3\ (\sin 165)t$ — المعادلة الأصلية

$= 3\ [\sin (120 + 45)]t$ — $120 + 45 = 165$

b. استخدم متطابقة المجموع لـ sin لإيجاد التيار الدقيق بعد ثانية واحدة.

$i = 3\ [\sin (120 + 45)]t$ — معادلة أعيدت كتابتها

$= 3 \sin (120 + 45)$ — $t = 1$

$= 3[(\sin 120)(\cos 45) + (\cos 120)(\sin 45)]$ — متطابقة المجموع لـ sin

$= 3\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ — عوّض.

$= 3\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ — أوجد ناتج الضرب.

$= \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ — بسّط

التيار الدقيق بعد ثانية واحدة هو $\frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ بوحدات الأمبير.

تمرين موجه

2. **الكهرباء** يمكن إيجاد تذبذب التيار i بوحدات الأمبير في دائرة أخرى بعد t من الثواني باستخدام الصيغة $i = 2\ (\sin 285)t$، حيث 285 هي قياس الدرجة. $2\ [\sin (315 - 30)]t$

A. أعد كتابة القاعدة بدلالة فرق قياسات زاويتين.

B. استخدم متطابقة الفرق لـ sin لإيجاد التيار الدقيق بعد ثانية واحدة. $\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ أمبير

مهن من الحياة اليومية

فني التوصيلات السلكية فنيو التوصيلات السلكية هم المسئولون عن إنشاء مرافق نقل وتوزيع القدرة الكهربائية وصيانتها. ويطلق هذا المصطلح أيضًا على الفنيين الذين يقومون بتثبيت الهواتف وأجهزة التليفزيون الكبلي وخطوط الألياف الضوئية وصيانتها.

إذا كان التعبير المثلّثي له صيغة متطابقة المجموع أو الفرق، تستطيع حينها استخدام المتطابقة لإيجاد قيمة دقيقة أو لتحويل تعبير إلى أبسط صورة عن طريق إعادة كتابة التعبير بصفته دالة لزاوية واحدة.

مثال 3 إعادة الكتابة في صيغة تعبير مثلّثي واحد

a. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\frac{\tan 32° + \tan 13°}{1 - \tan 32° \tan 13°}$.

$\frac{\tan 32° + \tan 13°}{1 - \tan 32° \tan 13°} = \tan (32° + 13°)$ — متطابقة المجموع لـ tan

$= \tan 45° = 1$ — بسّط

b. حوّل لأبسط صورة: $\sin x \sin 3x - \cos x \cos 3x$.

$\sin x \sin 3x - \cos x \cos 3x = -(\cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x)$ — خاصيتا التوزيع والتبديل

$= -\cos (x + 3x) = -\cos 4x$ — متطابقة المجموع لـ tan

تمرين موجه

3A. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\frac{7\pi}{8} \cos \frac{5\pi}{24} + \sin \frac{7\pi}{8} \sin \frac{5\pi}{24}$. $-\frac{1}{2}$

3B. حوّل لأبسط صورة: $\frac{\tan 6x - \tan 7x}{1 + \tan 6x \tan 7x}$. $-\tan x$

أمثلة إضافية

2 **الكهرباء** يمكن إيجاد قيمة التيار المتردد i بوحدة الأمبير في دائرة معينة بعد t ثانية باستخدام $i = 4\ (\sin 255)t$.

a. أعد كتابة القاعدة بدلالة مجموع قياسات زاويتين. $i = 4 \sin (210 + 45)t$

b. استخدم متطابقة جيب المجموع لإيجاد التيار الدقيق بعد ثانية واحدة. $-\sqrt{2} - \sqrt{6}$ أمبير

3 a. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\frac{\tan 78° - \tan 18°}{1 + \tan 78° \tan 18°}$. $\sqrt{3}$

b. حوّل لأبسط صورة $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$. $\sin \frac{7\pi}{12}$

التدريس باستخدام التكنولوجيا

كاميرا المستندات اختر بعض الطلاب لحل الأمثلة وشرح طريقة تطبيق المجموع والفرق لمتطابقات الزوايا.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 256 12/15/2016 8:09:44 PM

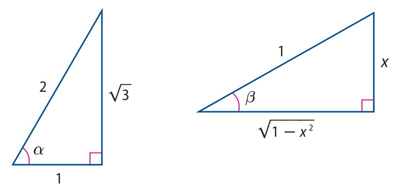
يمكن استخدام متطابقات المجموع والفرق لإعادة كتابة تعابير مثلّثية بصفتها تعابير جبرية.

مثال 4 الكتابة بصيغة تعبير جبري

اكتب $\sin(\arctan\sqrt{3} + \arcsin x)$ بصيغة تعبير جبري لـ x بحيث لا يشتمل على دوال مثلّثية.

عند تطبيق متطابقة المجموع لـ sin ، نجد أن
$\sin(\arctan\sqrt{3} + \arcsin x) = \sin(\arctan\sqrt{3})\cos(\arcsin x) + \cos(\arctan\sqrt{3})\sin(\arcsin x)$.

إذا فرضنا أن $\alpha = \arctan\sqrt{3}$ و $\beta = \arcsin x$، إذًا تكون $\tan\alpha = \sqrt{3}$ و $\sin\beta = x$. ارسم مثلّثًا قائم الزاوية بزاوية حادة α وآخر بزاوية حادة β. قم بتسمية الأضلاع على أن يكون $\tan\alpha = \sqrt{3}$ و $\sin\beta = x$. ثم استخدم مبرهنة فيثاغورس للتعبير عن طول كل ضلع ثالث.



باستخدام هذين المثلثين، نجد أن $\sin(\arctan\sqrt{3}) = \sin\alpha$ أو $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\cos(\arctan\sqrt{3}) = \cos\alpha$ أو $\frac{1}{2}$ و $\cos(\arcsin x) = \cos\beta$ or $\sqrt{1-x^2}$ و $\sin(\arcsin x) = \sin\beta$ أو x.

الآن قم بالتعويض وحوّل لأبسط صورة.

$$\sin(\arctan\sqrt{3} + \arcsin x) = \sin(\arctan\sqrt{3})\cos(\arcsin x) + \cos(\arctan\sqrt{3})\sin(\arcsin x)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{1-x^2}\right) + \frac{1}{2}x$$

$$= \frac{\sqrt{3-3x^2}}{2} + \frac{x}{2} = \frac{x + \sqrt{3-3x^2}}{2}$$

تمرين موجه

اكتب كل تعبير مثلّثي بصيغة تعبير جبري.

4A. $\cos(\arcsin 2x + \arccos x)$ **4B.** $\sin\left(\arctan x - \arccos\frac{1}{2}\right)$

4A. $x\sqrt{1-4x^2} - 2x\sqrt{1-x^2}$

4B. $\frac{x-\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x\sqrt{x^2+1} - \sqrt{3x^2+3}}{2x^2+2}$

يمكن استخدام متطابقات المجموع والفرق لإثبات صحة المتطابقات الأخرى.

مثال 5 إثبات صحة المتطابقات متساوية القيمة

اثبت صحة $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x$ — متطابقة الفرق لـ sin

$= 1(\cos x) - 0(\sin x)$ — $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ و $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$= \cos x$ ✓ — أوجد ناتج الضرب.

تمرين موجه

اثبت صحة كل متطابقة متساوية القيمة باستخدام متطابقة فرق. 5A–B. انظر الهامش.

5A. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ **5B.** $\csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$

قراءة في الرياضيات

الدوال المثلثية و تمامها(co)

متساوية القيمة كلمة "co" هنا تعني "تمام". ولذا تعدّ دوال sine and cosine, tan and cotan, secant and cosecant أزواج دوال متساوية القيمة لزوايا متتامة.

أمثلة إضافية

4 اكتب $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos x\right)$ في صورة تعبير جبري للقيمة x التي لا تتضمن دوال مثلثية.
$\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3-3x^2}}{2}$ or $\frac{x - \sqrt{3-3x^2}}{2}$

5 أثبت صحة $\cos(-\theta) = \cos\theta$.

$\cos(-\theta) = \cos(0 - \theta)$
$= \cos 0 \cos\theta + \sin 0 \sin\theta$
$= 1\cos\theta + 0\sin\theta$
$= \cos\theta$

التركيز على محتوى الرياضيات

متطابقات المجموع والفرق إذا كان الطلاب على علم بضرب المصفوفة 2×2. فإنه يمكن كتابة قواعد جيب الزاوية وجيب التمام في شكل مصفوفة، كما هو موضح.

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix}$$

إجابات إضافية (تمرين موجه)

5A. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$= \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x$
$= 0(\cos x) + 1(\sin x)$
$= \sin x$

5B. $\csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$
$= \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}\cos\theta - \cos\frac{\pi}{2}\sin\theta}$
$= \frac{1}{(1)\cos\theta - (0)\sin\theta}$
$= \frac{1}{\cos\theta}$
$= \sec\theta$

التدريس المتمايز AL

المتعلمون أصحاب النمط اللفظي/اللغوي من الصعوبات التي يواجهها الطلاب في تعلم الرياضيات هي تفسير الرموز. اطلب من الطلاب تدوين كل متطابقة في هذا الدرس باستخدام المفردات بدلاً من الترميز الرياضي.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indb 257 12/15/2016 8:09:45 PM

يمكن استخدام متطابقات المجموع والفرق لإعادة كتابة التعبيرات المثلّثية التي تكون إحدى الزوايا بها مضاعف $90°$ أو $\frac{\pi}{2}$ بمقياس الزاوية النصف قطرية (راديان). تسمى المتطابقة الناتجة **متطابقة اختزال** لأنها تختزل صعوبة التعبير.

مثال 6 إثبات صحة متطابقات الاختزال

اثبت صحة كل متطابقة اختزال.

a. $\sin\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos\theta$

$\sin\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\theta\cos\frac{3\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{3\pi}{2}$ — قانون المجموع لـ sin

$= \sin\theta(0) + \cos\theta(-1)$ — $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ و $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$

$= -\cos\theta$ ✓ — بسّط

b. $\tan(x - 180°) = \tan x$

$\tan(x - 180°) = \frac{\tan x - \tan 180°}{1 + \tan x \tan 180°}$ — متطابقة المجموع لـ tan

$= \frac{\tan x - 0}{1 + \tan x(0)}$ — $\tan 180° = 0$

$= \tan x$ ✓ — بسّط

تمرين موجه

اثبت صحة كل متطابقة متساوية القيمة.

6A. $\cos(360° - \theta) = \cos\theta$

6B. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

2 حل المعادلات المثلّثية

يمكنك حل المعادلات المثلّثية باستخدام متطابقات المجموع والفرق ونفس الطرق التي استخدمتها في الدرس 4-3.

مثال 7 حل معادلة مثلّثية

أوجد حلول $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$ **في الفترة** $[0, 2\pi)$.

$\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$ — المعادلة الأصلية

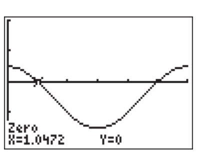
$\cos\frac{\pi}{3}\cos x - \sin\frac{\pi}{3}\sin x + \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{1}{2}$ — متطابقات المجموع و الفرق لـ cos

$\frac{1}{2}(\cos x) - \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin x) + \frac{1}{2}(\cos x) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin x) = \frac{1}{2}$ — عوّض.

$\cos x = \frac{1}{2}$ — بسّط

في الفترة $[0, 2\pi)$، حيث $\cos x = \frac{1}{2}$ و $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{5\pi}{3}$.

التحقّق التمثيل البياني لـ $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \frac{1}{2}$ يتضمن أصفارًا في $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ في الفترة $[0, 2\pi)$. ✓



$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{3}$ by $[-2, 2]$ scl: 1

تمرين موجه

7. أوجد حلول $\cos(x + \pi) - \sin(x - \pi) = 0$ في الفترة $[0, 2\pi)$. $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

6A. $\cos(360° - \theta)$
$= \cos 360° \cos\theta + \sin 360° \sin\theta$
$= 1(\cos\theta) + 0(\sin\theta)$
$= \cos\theta$

6B. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
$= \sin\frac{\pi}{2}\cos x + \cos\frac{\pi}{2}\sin x$
$= 1(\cos x) + 0(\sin x)$
$= \cos x$

تلميح تقني

نافذة العرض عند التحقّق من إجابتك على الحاسبة البيانية تذكّر أن الفترة الواحدة لـ $y = \sin x$ أو $y = \cos x$ تكون 2π والسعة تكون 1. وهذا سيساعدك على تحديد نافذة العرض.

مثال إضافي

6 أثبت صحة كل متطابقة انخفاض.

a. $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta$

$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$
$= \cos\theta\cos\frac{\pi}{2} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{2}$
$= \cos\theta\,(0) + \sin\theta\,(1)$
$= \sin\theta$

b. $\tan(x - 360°) = \tan x$

$\tan(x - 360°)$
$= \frac{\tan x - \tan 360°}{1 + \tan x \tan 360°}$
$= \frac{\tan x - 0}{1 + \tan x\,(0)} = \tan x$

2 حل المعادلات المثلثية

يوضح المثال 7 طريقة استخدام متطابقات المجموع والفرق، بالإضافة إلى الأساليب الجبرية، لحل المعادلات المثلثية.

مثال إضافي

7 أوجد حلول $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ في الفترة $[0, 2\pi)$. $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

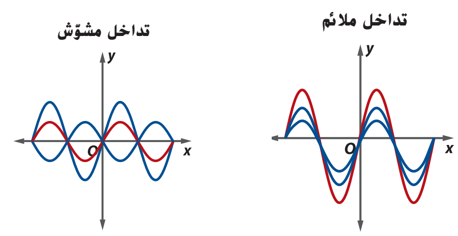
تمارين

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مثلّثي. (مثال 1)

1. $\cos 75°$ $\quad \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
2. $\sin(-210°)$ $\quad \frac{1}{2}$
3. $\sin \frac{11\pi}{12}$ $\quad \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
4. $\cos \frac{17\pi}{12}$ $\quad \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
5. $\tan \frac{23\pi}{12}$ $\quad -2+\sqrt{3}$
6. $\tan \frac{\pi}{12}$ $\quad 2-\sqrt{3}$

7. الجهد الكهربائي يتضمن تحليل الجهد الكهربائي في مجفّف الشعر حدودًا بصيغة $\sin(nwt - 90°)$، حيث تكون n عددًا صحيحًا موجبًا و w تردد الجهد و t الزمن. استخدم متطابقة لتحويل هذا التعبير لأبسط صورة. (مثال 2) $-\cos nwt$

8. **البَثّ** عندما يكون مجموع سعات موجتين أكبر من مجموع سعات الموجات المتراكبة، ينتج عن ذلك *تداخل ملائم*. وعندما تتجمّع الموجات المتراكبة لتكون لها سعة أصغر، يحدث *تداخل مشوّش*.



افترض أن هناك إشارتين ممثّل لهما بـــ $y = 10 \sin(2t + 30°)$ و $y = 10 \sin(2t + 210°)$. (مثال 2)

a. أوجد مجموع الدالتين. **0**

b. ما نوع التداخل الذي ينتج عندما تجتمع الإشارتان الممثّل لهما بالمعادلتين؟ **انظر الهامش.**

9. **الطقس** يمكن تمثيل درجات الحرارة المرتفعة شهريًا في دبي بالصيغة $f(x) = 31.65 \sin\left(\frac{\pi}{6}x - 2.09\right) + 52.35$، حيث x تمثّل الشهور والتي يكون فيها يناير $= 1$، وفبراير $= 2$، وهكذا.

ويمكن تمثيل درجات الحرارة المنخفضة شهريًا في دبي بالصيغة $g(x) = 31.65 \sin\left(\frac{\pi}{6}x - 2.09\right) + 32.95$. (مثال 2)

a–b. انظر الهامش.

a. اكتب دالة جديدة $h(x)$ عن طريق جمع الدالتين وقسمة الناتج على 2.

b. ما الذي تمثّله الدالة التي كتبتها في الجزء a؟

10. **التكنولوجيا** تَستخِدم أجهزة مساعدة المكفوفين على الحركة نفسَ فكرة السونار بالنسبة للخفّاش؛ وذلك لتمكين ذوي الإعاقة البصرية من اكتشاف الأشياء حولهم. ويمكن تمثيل الموجة الصوتية التي تنبعث من الجهاز لمريض بعينه بالصيغة $b = 30(\sin 195°)t$، حيث t تمثّل الوقت بالثواني و b تمثّل ضغط الهواء بالباسكال. (مثال 2) **a–b. انظر الهامش.**

a. أعد كتابة القانون بدلالة فرق قياسات زاويتين. $b = 30[\sin(240° - 45°)]t$

b. ما قياس الضغط بعد ثانية واحدة؟ **-7.8 باسكال**

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير. (مثال 3)

11. $\frac{\tan 43° - \tan 13°}{1 + \tan 43° \tan 13°}$ $\quad \frac{\sqrt{3}}{3}$
12. $\cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{12} \sin \frac{\pi}{4}$ $\quad \frac{\sqrt{3}}{2}$
13. $\sin 15° \cos 75° + \cos 15° \sin 75°$ $\quad 1$
14. $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{12}$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{2}$
15. $\cos 40° \cos 20° - \sin 40° \sin 20°$ $\quad \frac{1}{2}$
16. $\frac{\tan 48° + \tan 12°}{1 - \tan 48° \tan 12°}$ $\quad \sqrt{3}$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (مثال 3)

17. $\frac{\tan 2\theta - \tan \theta}{1 + \tan 2\theta \tan \theta}$ $\quad \tan \theta$
18. $\cos \frac{\pi}{2} \cos x + \sin \frac{\pi}{2} \sin x$ $\quad \sin x$
19. $\sin 3y \cos y + \cos 3y \sin y$ $\quad \sin 4y$
20. $\cos 2x \sin x - \sin 2x \cos x$ $\quad -\sin x$
21. $\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x$ $\quad \cos x$
22. $\frac{\tan 5\theta + \tan \theta}{\tan 5\theta \tan \theta - 1}$ $\quad -\tan 6\theta$

23. **العلوم** تحتوي الدائرة الكهربائية على مكثّف ومستحث ومقاوم. يتم تحديد هبوط الجهد الكهربائي في المستحث بالصيغة $V_L = IwL \cos\left(wt + \frac{\pi}{2}\right)$، حيث I هو التيار الذروي، و w هو التردد، و L هو المحاثة، و t هو الوقت. استخدم متطابقة المجموع لـــ cos للتعبير عن V_L بصيغة دالة $\sin wt$. (مثال 3) $V_L = -IwL \sin wt$

اكتب كل تعبير مثلّثي بصيغة تعبير جبري. (مثال 4)

25-31. انظر الهامش.

24. $\sin(\arcsin x + \arccos x)$ $\quad 1$
25. $\cos(\sin^{-1} x + \cos^{-1} 2x)$
26. $\cos\left(\sin^{-1} x - \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
27. $\sin\left(\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} - \tan^{-1} x\right)$
28. $\cos(\arctan \sqrt{3} - \arccos x)$
29. $\tan(\cos^{-1} x + \tan^{-1} x)$
30. $\tan\left(\sin^{-1} \frac{1}{2} - \cos^{-1} x\right)$
31. $\tan\left(\sin^{-1} x + \frac{\pi}{4}\right)$

اثبت صحة كل متطابقة متساوية القيمة باستخدام متطابقة فرق واحدو أو أكثر. (مثال 5) **32–34. ملحق إجابات الوحدة 4.**

32. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$
33. $\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc x$
34. $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-45 للتحقّق من الاستيعاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص واجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع فيما يتعلق بالتمارين 24-31. يمكن للطلاب رسم مثلث قائم الزاوية وتحديد الأضلاع بناء على المعطيات لتجنب الأخطاء.

إجابات إضافية

8b. تداخل هدّام

9a. $h(x) = 31.65 \sin\left(\frac{\pi}{6}x - 2.09\right) + 42.65$

9b. الدالة الجديدة $h(x)$ تمثل متوسط ارتفاع درجات الحرارة وانخفاضها لكل شهر.

25. $2x\left(\sqrt{1-x^2}\right) - x\left(\sqrt{1-4x^2}\right)$

26. $\frac{\sqrt{3-3x^2}+x}{2}$

27. $\frac{\left(\sqrt{3}-x\right)\sqrt{x^2+1}}{2x^2+2}$

28. $\frac{x+\sqrt{3-3x^2}}{2}$

29. $\frac{1+(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}{x^3}$

30. $\frac{\sqrt{3}-4x\sqrt{1-x^2}}{4x^2-1}$

31. $\frac{-x^2+1+(2x-2x^3)\sqrt{1-x^2}}{2x^4-3x^2+1}$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-45, 57-61, 65-82	1-45 فردي، 79-82	2-44 زوجي، 57-61, 65-78
OL ضمن المستوى	1-53 فردي، 55-61, 65-82	1-45, 79-82	46-61, 65-78
BL أعلى من المستوى	46-82		

اثبت صحة كل متطابقة اختزال. (مثال 6)
35–39. انظر الهامش.

35. $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

36. $\cos(2\pi + \theta) = \cos\theta$

37. $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

38. $\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$

39. $\cos(270^\circ - \theta) = -\sin\theta$

أوجد حل كل تعبير في الفترة $[0, 2\pi]$. (مثال 7)

40. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$ **$\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$**

41. $\cos(\pi + x) + \cos(\pi + x) = 1$ **$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$**

42. $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0$ **$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$**

43. $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2}$ **$\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$**

44. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -2$ **0**

45. $\tan(\pi + x) + \tan(\pi + x) = 2$ **$\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$**

46–49. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

اثبت صحة كل متطابقة.

B

46. $\tan x - \tan y = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y}$

47. $\cot\alpha - \tan\beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$

48. $\frac{(\tan u - \tan v)}{(\tan u + \tan v)} = \frac{\sin(u - v)}{\sin(u + v)}$

49. $2\sin a\cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$

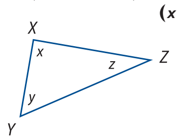
الحاسبة البيانية مثّل كل دالة بيانيًا، وخمّن بناءً على التمثيل البياني. اثبت صحة فرضيتك جبريًا. **50–51. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

50. $y = \frac{1}{2}[\sin(x + 2\pi) + \sin(x - 2\pi)]$

51. $y = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

52–54. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

الإثبات اعتبر أن $\triangle XYZ$. اثبت كل متطابقة.
(تلميح: $x + y + z = \pi$)



52. $\cos(x + y) = -\cos z$

53. $\sin z = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

54. $\tan x + \tan y + \tan z = \tan x\tan y\tan z$

55. **حساب التفاضل والتكامل** يعبّر عن ناتج قسمة الفرق بواسطة $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

C

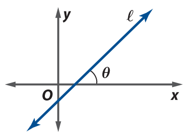
a. افترض أن $f(x) = \sin x$. اكتب تعبيرًا لناتج قسمة الفرق واكتب صيغة موسعة منه. **انظر الهامش.**

b. اجعل إجابتك من الجزء a مساويةً لـ y. استخدم حاسبة بيانية لتمثيل دالة القيم التالية لـ h بيانيًا: 2 و 1 و 0.1 و 0.01.
انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

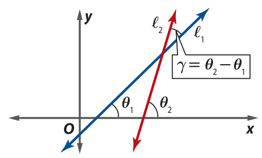
c. ما الدالة التي يشابهها التمثيل البياني في الجزء b حيث h تقترب من الصفر؟ **$\cos x$**

56. **زاوية الميل** إن *زاوية الميل* θ للمستقيم هي الزاوية التي تتكون بين المحور الأفقي x الموجب والمستقيم، حيث $0^\circ < \theta < 180^\circ$.
a–b. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

a. اثبت أن الميل m للمستقيم ℓ الموضّح جهة اليسار تحدّده الصيغة $m = \tan\theta$.



b. افترض أن المستقيمين ℓ_1 و ℓ_2 أدناه بميل m_1 و m_2 على التوالي. اشتق قاعدة للزاوية γ التي يُكوّنها المستقيمان.



c. استخدم القاعدة التي توصلتَ إليها في الجزء b لإيجاد الزاوية التي يكوّنها $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ و $y = x$. **15°**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

الإثبات اثبت صحة كل متطابقة.

57. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ **57–60. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

58. $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

59. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

60. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

61. **التبرير** استخدم متطابقة المجموع لـ sin من أجل اشتقاق متطابقة لـ $\sin(x + y + z)$ بدلالة sin and cos.
انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

تحدٍّ إذا كانت $x = -\frac{2}{3}$ وكانت $\cos y = \frac{1}{3}$، فأوجد كلاًّ مما يلي إذا كان x في الربع الرابع و y في الربع الأول.

62. $\cos(x + y)$ 63. $\sin(x - y)$ 64. $\tan(x + y)$

62–64. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

65. **التبرير** فكّر في $\sin 3x\cos 2x = \cos 3x\sin 2x$.

a. أوجد حلول المعادلة على الفترة $[0, 2\pi]$ جبريًا.
a–b. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

b. دعّم إجابتك بالتمثيل البياني.

66–67. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

الإثبات اثبت كلًّا من متطابقات ناتج قسمة الفرق.

66. $\frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} = \sin x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\frac{\sin h}{h}$

67. $\frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} = \cos x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \sin x\frac{\sin h}{h}$

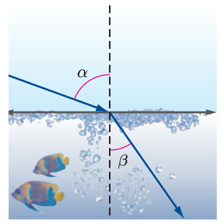
68. **الكتابة في الرياضيات** هل يمكن استخدام متطابقة المجموع أو الفرق لـ tan لحل أي من قواعد الانخفاض لـ tan؟ اشرح استنتاجك.
انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

إجابة إضافية

35. $\cos(\pi - \theta)$
$= \cos\pi\cos\theta + \sin\pi\sin\theta$
$= -1(\cos\theta) + 0(\sin\theta)$
$= -\cos\theta$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 260 12/15/2016 8:09:50 PM

مراجعة شاملة



.69 **الفيزياء** وفقًا لقانون سنيل (Snell)، ترتبط زاوية دخول الضوء إلى المياه α بزاوية انتقال الضوء في المياه β بالعلاقة $\sin \alpha = 1.33 \sin \beta$. بأي زاوية تدخل حزمة ضوء إلى المياه إذا كانت تنتقل عبر المياه بزاوية 23°؟ **≈31.3°**

اثبت صحة كل متطابقة. 70–71. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

70. $\frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \sec \theta$

71. $\frac{\sec \theta}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \cot \theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير، إن وُجِدت.

72. $\sin^{-1}(-1)$ $-\frac{\pi}{2}$

73. $\tan^{-1}\sqrt{3}$ $\frac{\pi}{3}$

74. $\tan\left(\arcsin \frac{3}{5}\right)$ $\frac{3}{4}$

.75 **المال** افترض أنك أودعت مبلغًا أساسيًا يقدّر بـــ P من الدراهم في حساب بنكي يدفع نسبة مرابحة مركّبة. إذا كانت نسبة المرابحة السنوية r (التي يعبّر عنها في صورة عدد عشري) ويُقدِّم البنك مدفوعات الفائدة لعدد n مرات كل عام، فإن مبلغ المال A الذي ستحصل عليه بعد t من الأعوام تحدّده الصيغة $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.

a. إذا كان المبلغ الأساسي ونسبة المرابحة وعدد مدفوعات الفائدة معلومة، فما نوع الدالة $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$؟ اشرح استنتاجك.

b. اكتب معادلة مبينًا مبلغ المال الذي ستحصل عليه بعد t من الأعوام إذا أودعت AED 1000 في حساب يدفع 4% نسبة مرابحة سنوية مركبة كل ثلاثة أشهر (أربع مرات في العام). $A(t) = 1000(1.01)^{4t}$

c. أوجد رصيد الحساب بعد 20 عامًا. **AED 2216.72**

.75a الأسيّة – يكون الأساس، $1+\frac{r}{n}$، ثابتًا، لكن الأس nt، متغير حيث إن الوقت t يمكن أن يختلف.

اذكر جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل دالة. ثم حدد أيًا منها أصفارًا، إن وجدت.

76. $p(x) = x^4 + x^3 - 11x - 5x + 30$
±1, ±2, ±3, ±5, ±6, ±10, ±15, ±30; −3, 2

77. $d(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 + 5x - 1$
$\pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{2}, \pm 1; \frac{1}{2}$

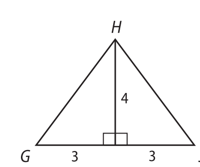
78. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 6$
±1, ±2, ±3, ±6 ، لا توجد أصفار نسبية

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

.79 **SAT/ACT** توجد 16 كرة زجاجية خضراء، وكرتان زجاجيتان حمراوتان، و 6 كرات زجاجية صفراء في وعاء. كم عدد الكرات الزجاجية الصفراء التي تحتاج إلى إضافتها في الوعاء لمضاعفة احتمالية اختيار كرة زجاجية صفراء؟ **D**

A 4 　 **B** 6 　 **C** 8 　 **D** 12 　 **E** 16

.80 **مراجعة** انظر الشكل الموضح أدناه. أي معادلة يمكن استخدامها لإيجاد $m\angle G$؟ **H**



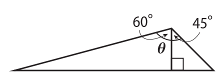
F $\sin G = \frac{3}{4}$

G $\cos G = \frac{3}{4}$

H $\cot G = \frac{3}{4}$

I $\tan G = \frac{3}{4}$

.81 أوجد القيمة الدقيقة لـــ $\sin \theta$. **A**



A $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

B $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

C $\frac{2 + \sqrt{3}}{4}$

D $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

.82 مراجعة أي مما يلي يساوي $\frac{\cos \theta (\cot^2 \theta + 1)}{\csc \theta}$؟ **G**

F $\tan \theta$

G $\cot \theta$

H $\sec \theta$

J $\csc \theta$

انتبه!

خطأ شائع غالبًا ما يجد الطلاب بعض، وليس كل، الحلول للمعادلات المثلثية بطريقة صحيحة. فعند حل المعادلات المثلثية، تأكد من أن الطلاب يراعون جميع الحلول الممكنة للفترة المحددة. غالبًا ما توجد حلول متعددة.

4 التقويم

عيّن مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب كتابة اسم ومثال على إحدى المتطابقات الواردة في الدرس.

إجابات إضافية

36. $\cos(2\pi + \theta)$
$= \cos 2\pi \cos \theta - \sin 2\pi \sin \theta$
$= 1(\cos \theta) - 0(\sin \theta)$
$= 1(\cos \theta) - 0$
$= \cos \theta$

37. $\sin(\pi - \theta)$
$= \sin \pi \cos \theta - \cos \pi \sin \theta$
$= 0(\cos \theta) - (-1)(\sin \theta)$
$= \sin \theta$

38. $\sin(90° + \theta)$
$= \sin 90° \cos \theta + \cos 90° \sin \theta$
$= 1(\cos \theta) + 0(\sin \theta)$
$= \cos \theta$

39. $\cos(270° - \theta)$
$= \cos 270° \cos \theta + \sin 270° \sin \theta$
$= 0(\cos \theta) + (-1)(\sin \theta)$
$= -\sin \theta$

55a. $\frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$

التدريس المتمايز BL

التوسع استخدم المتطابقة لإيجاد حل $\sin(x + y)$ من أجل صياغة متطابقة لإيجاد حل $\sin(x + y + z)$.
$\sin x \cos y \cos z + \cos x \sin y \cos z + \cos x \cos y \sin z - \sin x \sin y \sin z$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 261 　 12/15/2016 8:09:52 PM

1 التركيز

الهدف استخدام تقنية التمثيل البياني والزوايا الربعية لاختزال المتطابقات.

نصيحة للتدريس

قد يكون من المفيد أن تطلب من الطلاب تمثيل الدوال الآتية بيانيًا على نفس الشاشة.

$y = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$

$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$y = \sin(\pi - x)$

ناقش أوجه تشابه واختلاف هذه الدوال.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

اطلب من الطلاب العمل في مجموعات من ثلاثة أو أربعة أفراد لهم قدرات متنوعة. اطلب من المجموعات إكمال النشاط 1 والنشاط 2 وتمارين تحليل النتائج من 1A إلى 2C.

اسأل:

- لماذا تسمّى متطابقات الانخفاض بهذا الاسم؟ أي المتطابقات يمكن استخدامها لاشتقاق هذه المتطابقات؟ يمكن استخدامها لتصغير الدوال المثلثة للزوايا الكبيرة – الموجبة والسالبة – إلى زوايا في الربع الأول. يمكن استخدام متطابقات المجموع والفرق لاشتقاقها.

مختبر تقنية التمثيل البياني 4-4 متطابقة الاختزال

الهدف:

- استخدام تقنية التمثيل البياني والزوايا الربعية لمتطابقات الانخفاض.

تتضمن متطابقة انخفاض أخرى مجموع أو فرق قياسات إحدى الزوايا وزاوية ربعية. ويمكن توضيح ذلك بمقارنة التمثيل البياني للدوال الموجودة في دائرة الوحدة بتقنية التمثيل البياني.

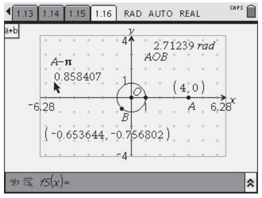
نشاط 1 استخدام دائرة الوحدة

استخدم دائرة الوحدة لتوضيح متطابقة الاختزال بيانيًا.

الخطوة 1 أضف صفحة Graphs (التمثيلات البيانية). اختر Zoom-Trig من القائمة Window، ثم اختر Show Grid (عرض شبكي) من القائمة View (عرض). من القائمة File (ملف) ضمن Tools (أدوات)، اختر Document Settings (إعدادات الملفات)، ثم اضبط Display Digits (عرض رقمي) على Float 2 (غير مقيد 2). وفي النهاية تأكد من أن قياس الزاوية بالراديان.

الخطوة 2 اختر Points & Lines (نقاط وخطوط) ثم Point (نقطة) من القائمة. حدد النقطة عند (1, 0). بعد ذلك، اختر Shapes (أشكال)، ومن ثم Circle (دائرة) من القائمة. لرسم دائرة متمركزة عند نقطة الأصل من خلال (1, 0)، انقر على الشاشة وحدد نقطة المركز عند نقطة الأصل. حرّك المؤشر بعيدًا عن المركز، وستظهر الدائرة. توقف عندما تحصل على نصف قطر بمقدار 1 ووقوع (1, 0) في الدائرة.

الخطوة 3 حدد نقطة تجاه يمين الدائرة على المحور الأفقي x ثم قم بتسميتها بالحرف A. اختر Actions (إجراءات)، ثم Coordinatesand Equations (إحداثيات ومعادلات). من القائمة وبعد ذلك انقر مرتين على النقطة لعرض إحداثياتها. من القائمة Construction (إنشاء). اختر Measurement transfer (تحويل القياس). اختر الإحداثي x لـــ A والدائرة والنقطة عند (1, 0). قم بتسمية النقطة المنشأة على الدائرة بالحرف B ثم اعرض إحداثياتها.

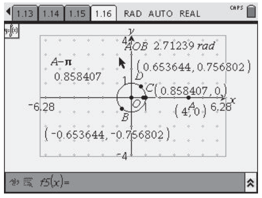


الخطوة 4 مع اعتبار أن O تمثل نقطة الأصل، قم باحتساب وكتابة قياس $\angle AOB$. اختر Text (نص) من القائمة Actions لكتابة التعبير $a - \pi$. ثم اختر Calculate (احسب) من القائمة Actions لاحتساب فرق الإحداثي x لكل من A وπ.

موقع A	$m\angle AOB$ (بالراديان)
(4, 0)	2.7124
(3, 0)	3.0708
(2, 0)	2.5708
(5, 0)	2.2123
(−2, 0)	0.5708

الخطوة 5 حرّك A بمحاذاة المحور الأفقي x، ولاحظ تأثير قياس $\angle AOB$.

الخطوة 6 من القائمة Construction، اختر Measurement transfer. اختر المحور الأفقي x وقيمة $a - \pi$. قم بتسمية النقطة بالحرف C ثم اعرض إحداثياتها. باستخدام Measurement transfer مجددًا، اختر الإحداثي x للنقطة C والدائرة والنقطة عند (1, 0). قم بتسمية النقطة بالحرف D ثم اعرض إحداثياتها.



نصيحة دراسية

قياس الزاوية لا تساعد تقنية التمثيل البياني إلا في قياس الزوايا بين 0 و π.

تحليل النتائج

1A. في الخطوة 5، ما وجه ارتباط موقع A وقياس $\angle AOB$؟

1A. الإحداثي xA يمثل قيمة $m\angle AOB$.

1B. بمراعاة مواقع النقطتين B و D، ما متطابقة أو متطابقات الإختزال الصحيحة المقترحة من خلال هذه العلاقة؟

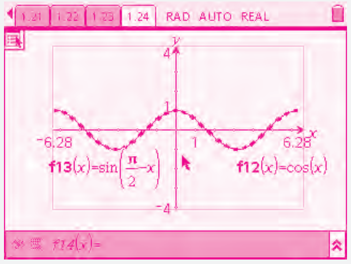
$\cos(x - \pi) = -\cos x$، $\sin(x - \pi) = -\sin x$

1C. **التخمين** في حالة تغيير التعبير $\pi - a$ إلى $a + \pi$، فما متطابقات الإختزال التي تعتقد بأنها ستكون النتيجة؟

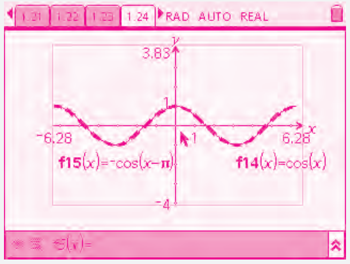
1C. الإجابة النموذجية: $\cos(x + \pi) = -\cos x$، $\sin(x + \pi) = -\sin x$

إجابات إضافية (تحليل النتائج)

2A. الإجابة النموذجية: $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$



2B. الإجابة النموذجية: $\cos x = -\cos(x - \pi)$



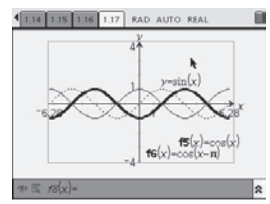
UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 262 12/15/2016 8:09:54 PM

نشاط 2 استخدام التمثيلات البيانية

استخدم تمثيلات بيانية لتحديد الدوال المثلثية المتساوية.

الخطوة 1 افتح صفحة Graphs (تمثيلات بيانية) جديدة. اختر Zoom-Trig من القائمة Window.

الخطوة 2 مثّل بيانيًا $f(x) = \cos x$. $f(x) = \cos(x - \pi)$. $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos(x - \pi)$. باستخدام خاصية Attributes (سمات) من القائمة Actions (إجراءات). مع ضبط سمك الخط $f(x) = \cos(x - \pi)$ إلى متوسط ونمط الخط $f(x) = \sin x$ إلى مُنَقّط.



الخطوة 3 استخدم إزاحات أو انعكاسات أو تغيير الأبعاد لتحويل $f(x) = \sin x$ بحيث تتطابق التمثيلات البيانية مع $f(x) = \cos x$. اختر التمثيل البياني ثم اسحبه على $f(x) = \cos x$. وأثناء تحريك التمثيل البياني، ستتغير دالته على الشاشة.

الخطوة 4 استخدم إزاحات أو انعكاسات أو تغيير الأبعاد لتحويل $f(x) = \cos(x - \pi)$ وبالتالي تتطابق التمثيلات البيانية مع التمثيلين البيانيين الآخرين. مجددًا، أثناء تحريك التمثيل البياني، ستتغير دالته على الشاشة.

تحليل النتائج 2A–B. انظر الهامش.

2A. اكتب المتطابقة الناتجة عن تحويلك لـ $f(x) = \sin x$ في الخطوة رقم 3. مثّل الدوال بيانيًا لتأكيد متطابقتك.

2B. اكتب المتطابقة الناتجة عن تحويلك لـ $f(x) = \cos(x - \pi)$ في الخطوة رقم 3. مثّل الدوال بيانيًا لتأكيد متطابقتك.

2C. **التخمين** ما الذي يقترحه انعكاس التمثيل البياني لغرض تطوير متطابقة؟ إزاحة؟

2C. الإجابة النموذجية: يوضح الانعكاس أن إحدى المتطابقات يمكن كتابتها بواسطة استخدام معكوس إحدى الدوال. توضح الإزاحة أنه سيلزم إزاحة إحدى التمثيلات البيانية بواسطة أحد مضاعفات $\frac{\pi}{2}$.

تمارين

استخدم دائرة الوحدة لكتابة متطابقة تنتمي إلى التعابير المعطاة. تحقق من صحة متطابقتك بالتمثيل البياني. 1-2. انظر الهامش.

1. $\cos(90° - x), \sin x$
2. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right), \sin x$

اكتب الدالة المثلثية التي تكمل كل متطابقة.

3. $\cos x =$ ______ $\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$ **sin**
4. $\cot x =$ ______ $(x + 90°)$ **−tan**
5. $\sec x =$ ______ $(x - 180°)$ **−sec**
6. $\csc x =$ ______ $\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **−sec**

استخدم التحويلات لإيجاد قيمة a لكل تعبير مما يلي.

7. $\sin ax = 2 \sin x \cos x$ **2**
8. $\cos 4ax = \cos^2 x - \sin^2 x$ **$\frac{1}{2}$**
9. $a \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ **2**
10. $1 + \cos 6ax = 2\cos^2 x$ **$\frac{1}{3}$**

تمرين اطلب من الطلاب إكمال التمارين من 1 إلى 10.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1 و 3 و 7 لتقويم ما إذا كان الطلاب يستطيعون استخدام الأدوات المتاحة مع تقنية التمثيل البياني لتحديد متطابقات الانخفاض الصحيحة للتعبيرات المذكورة.

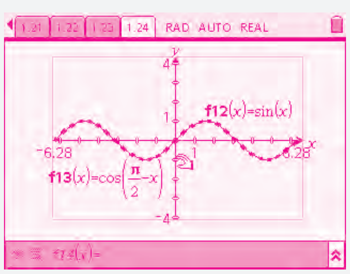
من العملي إلى النظري

اسأل:

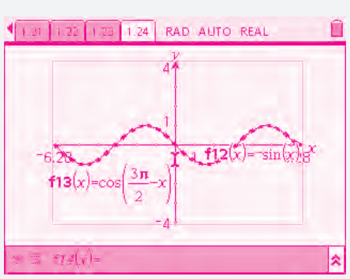
- ما مزايا استخدام الأدوات المتوفّرة في حاسبة التمثيل البياني لتحديد هذه المتطابقات؟ الإجابة النموذجية: إنها تقدّم التمثيل البياني في صورة تمثيل بصري للمتطابقة.

إجابات إضافية

1. $\cos(90° - x) = \sin x$



2. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$



4-5 متطابقات اضعاف الزاوية وتحويل ناتج الضرب الى مجموع

السابق

- لقد قمتَ بإثبات واستخدام متطابقات المجموع والفرق.

الحالي

1. استخدام متطابقات ضعف الزاوية واختصار الأس و نصف الزاوية لإيجاد قيمة تعابير مثلثية وحل معادلات مثلثية.
2. استخدام متطابقات تحويل ناتج الضرب لمجموع لإيجاد قيمة تعابير مثلثية وحل معادلات مثلثية.

لماذا؟

- يمكن وصف سرعة طيران إحدى الطائرات بواسطة عدد *الماخ*؛ وهو نسبة سرعة الطائرة إلى سرعة الصوت. ويؤدي تجاوز سرعة الصوت إلى إحداث موجة صادمة مخروطية الشكل خلف الطائرة. وترتبط الزاوية θ الموجودة عند رأس هذا المخروط بعدد الماخ ويصف الحرف M سرعة الطائرة بواسطة معادلة نصف الزاوية $\frac{\theta}{2} = \frac{1}{M}$.

1 استخدام متطابقات اضعاف الزاوية

بافتراض أن α وβ كليهما مساوٍ لــ θ في كل متطابقات مجموع الزوايا التي تعلمتَها في الدرس السابق، يمكنك اشتقاق متطابقات ضعف الزاوية التالية.

المفهوم الأساسي متطابقات ضعف الزاوية

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

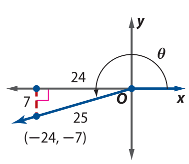
الإثبات متطابقة ضعف الزاوية لــ sine

$\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta)$	$2\theta = \theta + \theta$
$= \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta$	متطابقة المجموع لــ sine $\alpha = \beta = \theta$
$= 2\sin\theta\cos\theta$	بسّط

ستثبتُ متطابقات ضعف الزاوية لــ cos ولــ tan في التمارين 63-65.

مثال 1 إيجاد قيمة التعابير التي تتضمن أضعاف الزوايا

إذا كان $\sin\theta = -\frac{7}{25}$ في الفترة $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$، فأوجد $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$.



بما أن $\sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{7}{25}$ في الفترة $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$، فإن نقطة واحدة على ضلع الإنتهاء لــ θ سيكون لها الإحداثي y-7 ومسافة 25 وحدة من الأصل، كما هو موضح. الإحداثي x لهذه النقطة هو $-\sqrt{25^2 - 7^2}$ أو **24−**. باستخدام هذه النقطة، سنجد أن

$\cos\theta = \frac{x}{r}$ أو $-\frac{24}{25}$ و $\tan\theta = \frac{y}{x}$ أو $\frac{7}{25}$.

استخدم هذه القيم ومتطابقات أضعاف الزاوية لــ sin و لــ cos لإيجاد $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$. ثم أوجد $\tan 2\theta$ باستخدام أي من متطابقة ضعف الزاوية لــ tan أو تعريف الــ tan.

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2\left(-\frac{7}{25}\right)\left(-\frac{24}{25}\right)$ أو $\frac{336}{625}$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$= 2\left(-\frac{24}{25}\right)^2 - 1$ أو $\frac{527}{625}$

الطريقة 1 $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$= \dfrac{2\left(\frac{7}{24}\right)}{1-\left(\frac{7}{24}\right)^2}$ أو $\frac{336}{527}$

الطريقة 2 $\tan 2\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

$= \dfrac{\frac{336}{625}}{\frac{527}{625}}$ أو $\frac{336}{527}$

تمرين موجه

1. إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{5}$ في الفترة $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ فأوجد $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$، $\tan 2\theta$.

$\frac{24}{25}$; $-\frac{7}{25}$; $-\frac{24}{7}$

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 4-5 إثبات صحة متطابقات المجموع والفرق واستخدمها.

الدرس 4-5 استخدام متطابقات الزوايا المزدوجة واختصار الأس والزاوية النصفية لإيجاد قيمة تعابير مثلثية وحل معادلات مثلثية.
استخدام متطابقات تحويل ناتج الضرب لمجموع لإيجاد قيمة تعابير مثلثية وحل معادلات مثلثية.

بعد الدرس 4-5 استخدام المتطابقات المثلثية لإيجاد نواتج الضرب ونواتج القسمة والأسس والجذور والأعداد المركبة في صورة قطبية.

2 التدريس

أسئلة داعمة

اطلب من الطلاب قراءة قسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اسأل:

- ما الذي يجعل هذه المعادلة معادلة زوايا نصفية؟ يُقسَم قياس الزاوية على 2.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indb 264 12/15/2016 8:09:59 PM

- بناء على استنتاجك السابق، ما العبارات الصحيحة بشأن معادلة الزوايا المزدوجة؟ يُضرب قياس الزاوية في 2.
- إذا كانت $\theta = 45$. فما عدد الماخ؟ $M \approx 2.61$

1 استخدام متطابقات الزوايا المتعددة

يوضح المثالان 1 و 2 طريقة إيجاد قيمة التعابير وحل المعادلات التي تحتوي على متطابقات مزدوجة الزوايا. **يوضح المثالان 3 و 4** طريقة استخدام متطابقات اختصار الأس لإيجاد قيمة التعابير الثلاثية وحل المعادلات التي بها أس. **يوضح المثالان 5 و 6** طريقة استخدام متطابقات الزاوية النصفية لإيجاد قيمة التعابير الثلاثية وحل المعادلات التي تحتوي على نصف زاوية.

التقويم التكويني

استخدم التمرينات الموجهة الموجودة بعد كل مثال لتأكيد استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 إذا كانت $\sin\theta = \frac{3}{4}$ على الفترة $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. أوجد قيمة $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$.
$\sin 2\theta = \frac{3\sqrt{7}}{8}$, $\cos 2\theta = -\frac{1}{8}$, $\tan 2\theta = -3\sqrt{7}$

2 أوجد حل $\cos 2\theta - \cos\theta = 2$ على الفترة $[0, 2\pi]$. π

3 أعد كتابة $\csc^4\theta$ بدلالة جيب التمام لزوايا متعددة بها أس لا يكون أكبر من 1.
$\frac{8}{3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta}$

نصيحة دراسية

أكثر من متطابقة واحدة لاحظ وجود ثلاث متطابقات مرتبطة مع $\cos 2\theta$. بينما توجد متطابقات أخرى يمكن أن تكون مرتبطة أيضًا مع $\sin 2\theta$ و$\tan 2\theta$. وتلك المرتبطة مع $\cos 2\theta$ يجب حفظها نظرًا لاستخدامها بمعدل أكثر شيوعًا.

مثال 2 حل معادلة باستخدام متطابقة أضعاف الزوايا

حل $\sin 2\theta - \sin\theta = 0$ في الفترة $[0, 2\pi]$.

استخدم متطابقة ضعف الزاوية لـ sin لإعادة كتابة المعادلة بصفتها دالة لزاوية فردية.

$\sin 2\theta - \sin\theta = 0$	المعادلة الأصلية
$2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta = 0$	متطابقة ضعف الزاوية sin
$\sin\theta(2\cos\theta - 1) = 0$	العامل.
$\sin\theta = 0$ أو $2\cos\theta - 1 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري

$\theta = 0 = \pi$ $\qquad$ $\cos\theta = \frac{1}{2}$ لذا، $\theta = \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.

الحلول الموجودة في الفترة $[0, 2\pi]$ هي $\theta = 0$. أو $\frac{\pi}{3}$، أو π؛ أو $\frac{5\pi}{3}$.

تمرين موجه حل كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$.

2A. $\cos 2\alpha = -\sin^2\alpha$ $\quad \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

2B. $\tan 2\beta = 2\tan\beta$ $\quad 0, \pi$

يمكن استخدام متطابقات ضعف الزاوية لاشتقاق متطابقات اختصار الأس أدناه. تساهم هذه المتطابقات في تيسير تنفيذ عمليات للدوال مرتبطة بحساب التفاضل والتكامل مثل $y = \cos^2 x$ بدرجة أكبر.

الربط بتاريخ الرياضيات

فرانسوا فييت (1540–1603)

وُلد في قرية تقع في غرب فرنسا، وقد تم استدعاؤه في باريس لفك شفرة رسائل للملك هنري الثالث. ونظرًا لمهارته الفائقة في استخدام المعادلات، استخدم متطابقات وضعف الزاوية لـ sin and cos لاستخلاص متطابقات الزاوية الثلاثية والرباعية والخماسية.

المفهوم الأساسي متطابقات اختصار الأس

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \qquad \cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \qquad \tan^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$$

الإثبات متطابقة اختصار الأس لـ sine

$\frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \frac{1 - (1 - 2\sin^2\theta)}{2}$	متطابقة ضعف الزاوية لـ cos
$= \frac{2\sin^2\theta}{2}$	اطرح.
$= \sin^2\theta$	بسّط

ستُثبت صحة متطابقات الاختصار الأسي لـ cos و لـ tan في التمرينين 82 و83.

مثال 3 استخدام متطابقة لاختصار الأس

أعد كتابة $\sin^4 x$ في حدود بها أس لا يكون أكبر من 1.

$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$	$(\sin^2 x)^2 = \sin^4 x$
$= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2$	متطابقة الاختصار الأسي sin
$= \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}$	أوجد ناتج الضرب.
$= \frac{1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}}{4}$	متطابقة اختصار أس cos
$= \frac{2 - 4\cos 2x + 1 + \cos 4x}{8}$	مقام مشترك
$= \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2x + \cos 4x)$	عامل.

تمرين موجه

أعد كتابة كل تعبير بشرط عدم زيادة قيمة الأس عن 1.

3A. $\cos^4 x$ $\quad \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2x + \cos 4x)$

3B. $\sin^3\theta$ $\quad \frac{\sin\theta - \sin\theta\cos 2\theta}{2}$

مثال إضافي

4 أوجد حل

$\sin^2\theta + \cos 2\theta - \cos\theta = 0$

$2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$

مثال 4 حل معادلة باستخدام متطابقة اختصار أسي

أوجد حل $\cos^2 x - \cos 2x = \frac{1}{2}$.

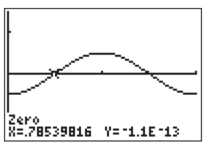
أوجد الحل جبريًا

$\cos^2 x - \cos 2x = \frac{1}{2}$	المعادلة الأصلية
$\frac{1 + \cos 2x}{2} - \cos 2x = \frac{1}{2}$	متطابقة اختصار أس cos
$1 + \cos 2x - 2\cos 2x = 1$	اضرب كل طرف في 2.
$\cos 2x - 2\cos 2x = 0$	اطرح 1 من كل طرف.
$-\cos 2x = 0$	اطرح الحدود المتشابهة.
$\cos 2x = 0$	اضرب كل طرف في 1−.
$2x = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$	حلول ضعف الزاوية في $[0, 2\pi]$
$x = \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$	اقسم كل حل على 2.

يتضمن التمثيل البياني لـــ $y = \cos 2x$ دورة π. إذًا فإن الحلول هي $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ أو $\frac{3\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

دعّم بالتمثيل البياني

التمثيل البياني لـــ $y = \cos^2 x - \cos 2x - \frac{1}{2}$ يتضمن أصفارًا في $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ في الفترة $[0, \pi]$. ✓



$[0, \pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-1.5, 1.5]$ scl: 1

تمرين موجه **أوجد حل كل معادلة.**

4A. $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \frac{1}{2}$

$\frac{5\pi}{6} + n\pi, \frac{\pi}{6} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

4B. $\sin^2 3\beta = \sin^2\beta$

$n\pi, \frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{3\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

باستبدال θ بـــ $\frac{\theta}{2}$ في كل متطابقة من متطابقات اختصار الأس، يمكنك اشتقاق كل متطابقة نصف الزاوية مما يلي. تُحدَّد علامة كل متطابقة تتضمن الرمز ± بالتحقق من الربع الذي يقع فيه الضلع الطرفي $\frac{\theta}{2}$.

المفهوم الأساسي متطابقات نصف الزاوية

$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}$

$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$

$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$

$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$

انتبه!

تحديد العلامات لتحديد الإشارة المناسبة عند استخدام متطابقة نصف زاوية، تحقق من الربع الذي يقع فيه $\frac{\theta}{2}$، *وليس* الربع الذي يقع فيه θ.

الإثبات متطابقة نصف الزاوية لـــ cosine

$\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\left(2 \times \frac{\theta}{2}\right)}{2}}$	أعد كتابة θ بصيغة $\frac{\theta}{2} \times 2$.
$= \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$	عوّض $x = \frac{\theta}{2}$.
$= \pm\sqrt{\cos^2 x}$	متطابقة اختصار أس cosine
$= \cos x$	بسّط
$= \cos\frac{\theta}{2}$	عوّض.

ستُثبت متطابقات نصف الزاوية لـــ cos والـــ tan في التمارين 66-68.

التركيز على محتوى الرياضيات

المتطابقات تُستخدم متطابقات تحويل ناتج الضرب إلى مجموع لكتابة تعبير يتضمن ناتج ضرب للتعابير الثلاثية في صورة تعبير مجموع أو فرق. تُستخدم متطابقات تحويل المجموع إلى ناتج ضرب لاختزال تعبير مجموع أو فرق إلى ناتج ضرب للتعابير المثلثية.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو قسّم الصف الدراسي إلى مجموعات. خصص مسألة لكل مجموعة باستخدام متطابقة مزدوجة الزوايا أو زوايا نصفية مختلفة. اطلب من كل مجموعة عمل تسجيل فيديو يوضح كيفية تطبيق المتطابقة المناسبة لحل المعادلة.

أمثلة إضافية

5 أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 22.5°$.

$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

6 أوجد حل $\sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2}$ على الفترة $[0, 2\pi)$.

$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

مثال 5 إيجاد قيمة تعبير يتضمن نصف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 112.5°$.

لاحظ أن $112.5°$ تبلغ نصف $225°$. لذا، استخدم متطابقة نصف الزاوية لـ cosine. مع ملاحظة أنه بوقوع $112.5°$ في الربع الثاني، فإن cosine سيكون سالبًا.

$\cos 112.5° = \cos \frac{225°}{2}$ $112.5° = \frac{225°}{2}$

$= -\sqrt{\frac{1+\cos 225°}{2}}$ متطابقة نصف الزاوية cosine (زاوية الربع الثاني)

$= -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ $\cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ اطرح ثم اقسم.

$= -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$ أو $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ خاصية ناتج القسمة للجذور التربيعية

التحقق استخدم الآلة الحاسبة لدعم إثبات أن $112.5° = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$\cos 112.5° \approx -0.3826834324$ و $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \approx -0.3826834324$ ✓

تمرين موجه

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

5A. $\sin 75°$ **5A.** $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

5B. $\tan \frac{7\pi}{12}$ $-2-\sqrt{3}$

نصيحة دراسية

متطابقات نصف زاوية الـ tan عند إيجاد قيمة دالة tan لقيم نصف الزاوية، من الأسهل عادة استخدام نموذج متطابقة نصف زاوية tan $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ نظرًا لأن المقام يتضمن حدًا واحدًا فقط.

تذكّر أنه يمكنك استخدام متطابقات المجموع والفروق لإيجاد حل للمعادلات. ويمكن استخدام متطابقات نصف الزاوية أيضًا لإيجاد حل للمعادلات.

مثال 6 حل معادلة باستخدام متطابقة نصف الزاوية

أوجد حل $\sin^2 x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$ على الفترة $[0, 2\pi)$.

$\sin^2 x = 2\cos^2 \frac{x}{2}$ المعادلة الأصلية

$\sin^2 x = 2\left(\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)^2$ متطابقة نصف الزاوية cosine

$\sin^2 x = 2\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)$ بسّط

$\sin^2 x = 1 + \cos x$ أوجد ناتج الضرب.

$1 - \cos^2 x = 1 + \cos x$ متطابقة فيثاغورس

$-\cos^2 x - \cos x = 0$ اطرح 1 من كل طرف.

$\cos x(-\cos x - 1) = 0$ حلل لإيجاد العوامل

$\cos x = 0$ أو $-\cos x - 1 = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$x = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ $\cos x = -1$; لذا . $x = \pi$.   حلول لـ $[0, 2\pi)$

الحلول الموجودة في الفترة $[0, 2\pi)$ هي $x = \frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$ أو π.

تمرين موجه

حل كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi)$.

6A. $2\sin^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1 + \sin x$ $0, \pi$

6B. $8\tan \frac{x}{2} + 8\cos x \tan \frac{x}{2} = 1$ $7.2°, 172.8°$

2 استخدام متطابقات تحويل ناتج الضرب لمجموع
لاستخدام دوال مثل $y = \cos 5x \sin 3x$ في حساب التفاضل والتكامل، ستحتاج إلى تطبيق إحدى المتطابقات التالية لتحويل ناتج الضرب لمجموع.

المفهوم الأساسي متطابقات تحويل ناتج الضرب لمجموع

$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ $\qquad$ $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ $\qquad$ $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$

الإثبات متطابقة تحويل ناتج الضرب لمجموع لـ $\sin \alpha \cos \beta$

$\frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ الطرف الأكثر تعقيدًا في المتطابقة

$= \frac{1}{2}(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)$ متطابقات المجموع والفرق

$= \frac{1}{2}(2 \sin \alpha \cos \beta)$ اجمع الحدود المتشابهة.

$= \sin \alpha \cos \beta$ أوجد ناتج الضرب.

ستُثبت المتطابقات الثلاث المتبقية لتحويل ناتج الضرب لمجموع في التمارين 84-86.

نصيحة دراسية
الإثباتات تذكّر العمل على حل الطرف الأكثر تعقيدًا أولاً عند إثبات هذه المتطابقات.

مثال 7 استخدام متطابقة لكتابة ناتج الضرب في صيغة مجموع أو فرق

أعد كتابة $\cos 5x \sin 3x$ في صيغة مجموع أو فرق.

$\cos 5x \sin 3x = \frac{1}{2}[\sin(5x + 3x) - \sin(5x - 3x)]$ متطابقة تحويل ناتج الضرب لمجموع

$= \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x)$ بسّط

$= \frac{1}{2}\sin 8x - \frac{1}{2}\sin 2x$ خاصية التوزيع

تمرين موجه أعد كتابة كل ناتج ضرب في صيغة مجموع أو فرق.

7A. $\sin 4\theta \cos \theta$ $\quad \frac{1}{2}\sin 5\theta + \frac{1}{2}\sin 3\theta$ $\qquad$ **7B.** $\sin 7x \sin 6x$ $\quad \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 13x$

تتوافق متطابقات تحويل ناتج الضرب لمجموع هذه مع متطابقات تحويل المجموع لناتج الضرب.

المفهوم الأساسي متطابقات تحويل المجموع لناتج ضرب

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ $\qquad$ $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ $\qquad$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

الإثبات متطابقة تحويل المجموع لناتج ضرب لـ $\sin \alpha + \sin \beta$

$2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

$= 2 \sin x \cos y$ استخدم التعويض في $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ و $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$

$= 2\left\{\frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]\right\}$ متطابقة تحويل ناتج الضرب لمجموع

$= \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ استخدم التعويض وحوّل لأبسط صورة.

$= \sin\left(\frac{2\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\beta}{2}\right)$ اجمع الكسور.

$= \sin \alpha + \sin \beta$ بسّط

ستُثبت المتطابقات الثلاث المتبقية لتحويل المجموع لناتج الضرب في التمارين 87-89.

2 استخدام متطابقات تحويل حاصل الضرب إلى مجموع

يشرح **المثال 7** طريقة استخدام متطابقات تحويل حاصل الضرب إلى مجموع لكتابة تعبير مثلثي يتضمن حاصل ضرب في صورة مجموع أو فرق. يوضح **المثالان 8 و 9** طريقة استخدام متطابقات تحويل المجموع إلى حاصل ضرب لكتابة تعبير مثلثي يتضمن مجموعًا في صورة حاصل ضرب لإيجاد قيمة تعبير وحل معادلة.

مثال إضافي

7 أعد كتابة $\cos 6x \cos 3x$ في صورة مجموع أو فرق.
$\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos 9x$

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون بطريقة التواصل يقدم هذا الدرس آخر ما في المتطابقات المثلثية لتلك الوحدة. اطلب من المجموعات الصغيرة إعداد بطاقات فهرسة لكل متطابقة وكتابة الطرف الأيسر لكل متطابقة على إحدى البطاقات والطرف الأيمن على بطاقة أخرى. وعندئذٍ ينبغي للمجموعات خلط البطاقات وجعل وجهها إلى الأسفل وممارسة لعبة مطابقة البطاقات بالاعتماد على الذاكرة.

أمثلة إضافية

8 أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 255° + \cos 195°$ $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

9 أوجد حل $\sin 8x - \sin 2x = 0$

$\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}n, \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}n, \frac{2\pi}{3}n, \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}n; n \in \mathbb{Z}$

المتابعة

استكشف الطلاب إثبات صحة المتطابقات المثلثية باستخدام أساليب متنوعة.

اسأل:

- كيف تُحدد الأساليب التي ينبغي استخدامها عند إثبات صحة متطابقة مثلثية؟ الإجابة النموذجية: إذا أمكن، فحوّل أكثر أطراف المتطابقة تعقيدًا إلى أبسط صورة عن طريق التعويض بالمتطابقات المثلثية الأساسية. وعند التعامل مع متطابقة أكثر تعقيدًا، أوجد الحل لكل طرف على حدة للحصول على تعبير عام.

مثال 8 استخدام متطابقة تحويل ناتج الضرب إلى المجموع أو المجموع إلى ناتج الضرب

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}$.

$$\sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} = 2 \sin \left(\frac{\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}}{2}\right) \cos \left(\frac{\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}}{2}\right)$$ متطابقة تحويل المجموع إلى ناتج الضرب

$$= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6}$$ حوّل لأبسط صورة.

$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$ $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}$$ بسّط

تمرين موجه

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

8A. $3 \cos 37.5° \cos 187.5°$ $\frac{-3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{4}$

8B. $\cos \frac{7\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}$ $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

ويمكنك أيضًا استخدام متطابقات تحويل المجموع إلى ناتج ضرب لإيجاد الحل لبعض المعادلات المثلثية.

مثال 9 حل المعادلة باستخدام متطابقة تحويل المجموع إلى ناتج الضرب

أوجد حل $\cos 4x + \cos 2x = 0$.

أوجد الحل جبريًا

$$\cos 4x + \cos 2x = 0$$ المعادلة الأصلية

$$2 \cos \left(\frac{4x + 2x}{2}\right) \cos \left(\frac{4x - 2x}{2}\right) = 0$$ متطابقة تحويل المجموع إلى ناتج الضرب لـ cosine

$$(2 \cos 3x)(\cos x) = 0$$ بسّط

اجعل كل عامل يساوي صفرًا مع إيجاد حلول في الفترة $[0, 2\pi]$.

مجموعة العامل الثاني تساوي 0 $\cos x = 0$ | مجموعة العامل الأول تساوي 0 $2 \cos 3x = 0$

حلول في $[0, 2\pi]$ $x = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ | اقسم كل طرف على 2. $\cos 3x = 0$

حلول أضعاف الزاوية *في $[0, 2\pi]$ $3x = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

اقسم كل حل على 3. $x = \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

الفترة الخاصة بـ $y = \cos 3x$ هي $\frac{2\pi}{3}$ ، إذًا الحلول هي

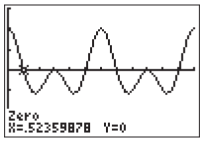
$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n$ $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}n$ أو $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

انتبه

فترات الدوال المثلثية لزوايا متعددة تذكّر ما تعلمته من الدروس السابقة أن فترات $y = \sin kx$ و $y = \cos kx$ هي $\frac{2\pi}{k}$ ، وليس 2π.

دعّم بالتمثيل البياني

التمثيل البياني لـ $y = \cos 4x + \cos 2x$ يتضمن أصفارًا في $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ ، $\frac{7\pi}{6}$ ، $\frac{3\pi}{2}$ ، و $\frac{11\pi}{6}$ في الفترة $[0, 2\pi]$. ✓



$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{6}$ by $[-3, 3]$ scl: 1

9A. $\frac{2n\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{2n\pi}{3}, \frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{3\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

تمرين موجه

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

9A. $\sin x + \sin 5x = 0$

9B. $\cos 3x - \cos 5x = 0$ $\frac{n\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

تمارين

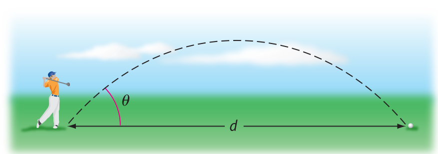
أوجد قيمة$\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و$\tan 2\theta$ للقيمة والفترة الموضحتين. (مثال 1)

1. $\cos \theta = \frac{3}{5}, (270°, 360°)$ $-\frac{24}{25}; -\frac{7}{25}; \frac{24}{7}$
2. $\tan \theta = \frac{8}{15}, (180°, 270°)$ **2.** $\frac{240}{289}; \frac{161}{289}; \frac{240}{161}$
3. $\cos \theta = -\frac{9}{41}, (90°, 180°)$ $-\frac{720}{1681}; -\frac{1519}{1681}; \frac{720}{1519}$
4. $\sin \theta = -\frac{7}{12}, \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ $-\frac{7\sqrt{95}}{72}; \frac{23}{72}; -\frac{7\sqrt{95}}{23}$
5. $\tan \theta = -\frac{1}{2}, \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ $-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; -\frac{4}{3}$
6. $\tan \theta = \sqrt{3}, \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; -\sqrt{3}$
7. $\sin \theta = \frac{4}{5}, \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ $-\frac{24}{25}; -\frac{7}{25}; \frac{24}{7}$
8. $\cos \theta = -\frac{5}{13}, \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ $\frac{120}{169}; -\frac{119}{169}; -\frac{120}{119}$

حل كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$. (مثال 2)

9. $\sin 2\theta = \cos \theta$ $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$
10. $\cos 2\theta = \cos \theta$ **10.** $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$
11. $\cos 2\theta - \sin \theta = 0$ $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$
12. $\tan 2\theta - \tan 2\theta \tan^2 \theta = 2$ **12.** $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$
13. $\sin 2\theta \csc \theta = 1$ $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
14. $\cos 2\theta + 4 \cos \theta = -3$ π

15. **رياضة الجولف** تم ضرب كرة جولف بسرعة مبدئية تبلغ 88 قدمًا في الثانية. ويتم قياس مسافة تحرك الكرة بالصيغة $d = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{32}$، حيث يمثل v_0 المسافة الإبتدائية، بينما يمثل θ الزاوية التي يحدثها مسار الكرة في الملعب، و32 هي المسافة بالقدم المربع في الثانية. (مثال 2)



a. إذا تحركت الكرة مسافة 242 قدمًا، فما مقدار θ بالنسبة لأقرب زاوية؟ **45°**

b. استخدم متطابقةضعف الزاوية لإعادة كتابة المعادلة لــ d. $d = \frac{v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{16}$

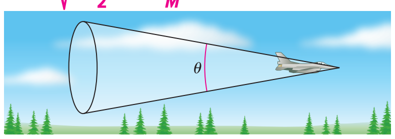
أعد كتابة كل تعبير في حدود بها أس لا يكون أكبر من 1. (مثال 3) **16–23. انظر الهامش.**

16. $\cos^3 \theta$
17. $\tan^3 \theta$
18. $\sec^4 \theta$
19. $\cot^3 \theta$
20. $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta$
21. $\sin^2 \theta \cos^3 \theta$
22. $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta$
23. $\frac{\sin^4 \theta}{\cos^2 \theta}$

أوجد حل كل من المعادلات التالية. (مثال 4) **24–27. n هو عدد صحيح.**

24. $1 - \sin^2 \theta - \cos 2\theta = \frac{1}{2}$ $\frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{3\pi}{4} + n\pi$
25. $\cos^2 \theta - \frac{3}{2} \cos 2\theta = 0$ $\frac{\pi}{6} + n\pi, \frac{5\pi}{6} + n\pi$
26. $\sin^2 \theta - 1 = \cos^2 \theta$ $\frac{\pi}{2} + n\pi$
27. $\cos^2 \theta - \sin \theta = 1$ $n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

28. **عدد الماخ** ترتبط الزاوية θ الموجودة عند رأس الموجة الصادمة مخروطية الشكل، التي أحدثتها إحدى الطائرات مخترقة الحاجز الصوتي، بعدد الماخ M والذي يصف سرعة الطائرة بواسطة معادلة نصف الزاوية $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{M}$. (مثال 5) **a.** $\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} = \frac{1}{M}$



a. عبّر عن عدد الماخ للطائرة استنادًا إلى cosine.

b. استخدم التعبير الموجود في الجزء a لإيجاد عدد الماخ لطائرة ما إذا كان $\cos \theta = \frac{4}{5}$. **≈3.2**

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

29. $\sin 67.5°$ $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$
30. $\cos \frac{\pi}{12}$ $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$
31. $\tan 157.5°$ $1 - \sqrt{2}$
32. $\sin \frac{11\pi}{12}$ $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

حل كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$. (مثال 6)

33. $\sin \frac{\theta}{2} + \cos \theta = 1$ $0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
34. $\tan \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta}{2}$ 0
35. $2 \sin \frac{\theta}{2} = \sin \theta$ 0
36. $1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} = \frac{3}{4}$ $\frac{4\pi}{3}$

37–40. انظر الهامش.

أعد كتابة كل ناتج ضرب في صيغة مجموع أو فرق. (مثال 7)

37. $\cos 3\theta \cos \theta$
38. $\cos 12x \sin 5x$
39. $\sin 3x \cos 2x$
40. $\sin 8\theta \sin \theta$

41–48. انظر الهامش.

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي. (مثال 8)

41. $2 \sin 135° \sin 75°$
42. $\cos \frac{7\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}$
43. $\frac{2}{3} \sin 172.5° \sin 127.5°$
44. $\sin 142.5° \cos 352.5°$
45. $\sin 75° + \sin 195°$
46. $2 \cos 105° + 2 \cos 195°$
47. $3 \sin \frac{17\pi}{12} - 3 \sin \frac{\pi}{12}$
48. $\cos \frac{13\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12}$

أوجد حل كل من المعادلات التالية. (مثال 9) **49–54. انظر الهامش.**

49. $\cos \theta - \cos 3\theta = 0$
50. $2 \cos 4\theta + 2 \cos 2\theta = 0$
51. $\sin 3\theta + \sin 5\theta = 0$
52. $\sin 2\theta - \sin \theta = 0$
53. $3 \cos 6\theta - 3 \cos 4\theta = 0$
54. $4 \sin \theta + 4 \sin 3\theta = 0$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة AL BL OL

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL قريب من المستوى	1-54, 77-79, 82-108	1-53 فردي، 105-108	2-54 زوجي، 77-79، 82-105
OL ضمن المستوى	1-61 فردي، 62، 63-75 فردي، 77-79، 82-108	1-54, 105-108	55-75, 77-79, 82-105
BL أعلى من المستوى	55-108		

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-54 للتحقّق من الاستيعاب.

ثم استخدم الجدول التالي لتخصيص واجبات للطلاب.

انتبه!

خطأ شائع غالبًا ما يواجه الطلاب مشكلات في اختيار المتطابقة الصحيحة لتطبيقها. في المسائل التي تحتوي على دوال جيب التمام للزوايا المتعددة مثل التمرينين 13 و 14. ذكّر الطلاب بأنه توجد ثلاث متطابقات مختلفة. وإذا واجهوا مشكلة عند استخدام متطابقة، فربما لا يستخدمون المتطابقة الصحيحة.

إجابات إضافية

16. $\frac{\cos \theta + \cos \theta \cos 2\theta}{2}$
17. $\frac{\tan \theta - \tan \theta \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$
18. $\frac{8}{3 + 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta}$
19. $\frac{\cot \theta + \cot \theta \cos 2\theta}{1 - \cos 2\theta}$
20. $\cos 2\theta$
21. $\frac{\cos \theta - \cos \theta \cos 4\theta}{8}$
22. $-\cos 2\theta$
23. $\frac{3 - 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta}{4 + 4 \cos 2\theta}$
37. $\frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \cos 4\theta$
38. $\frac{1}{2} \sin 17x - \frac{1}{2} \sin 7x$
39. $\frac{1}{2} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin x$
40. $\frac{1}{2} \cos 7\theta - \frac{1}{2} \cos 9\theta$
41. $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ 42. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
43. $\frac{\sqrt{2} - 1}{6}$ 44. $\frac{1 + \sqrt{2}}{4}$
45. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 46. $-\sqrt{6}$
47. $-\frac{3\sqrt{6}}{2}$ 48. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

49–54. n هو عدد صحيح.

49. $n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi$
50. $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n, \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}n, \frac{\pi}{2} + n\pi$
51. $\frac{\pi}{2}n, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$
52. $\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}n, \pi + \frac{4\pi}{3}n, n\pi$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indb 270 12/15/2016 8:10:12 PM

إجابات إضافية

53. $\frac{2\pi n}{5}, \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}, n\pi$

54. $n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi$

57. $\frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b)$

58. $\frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$

59. $\frac{1}{2}[\sin(2b + \theta + \pi) + \sin(\theta - \pi)]$

60. $-\frac{1}{2}\sin(2a - 2b)$

B حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

55. $\sqrt{\frac{1+\cos 6x}{2}}$ **$\pm\cos 3x$**

56. $\sqrt{\frac{1-\cos 16\theta}{2}}$ **$\pm\sin 8\theta$**

اكتب كل تعبير في صيغة مجموع أو فرق. **57–60. انظر الهامش.**

57. $\cos(a+b)\cos(a-b)$

58. $\sin(\theta-\pi)\sin(\theta+\pi)$

59. $\sin(b+\theta)\cos(b+\pi)$

60. $\cos(a-b)\sin(b-a)$

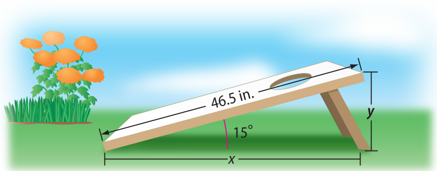
61. خرائط الإسقاط المركاتوري هو إسقاط مسطح للكرة الأرضية تزداد فيه المسافة بين خطوط العرض مع بُعدها عن خط الاستواء.

تتضمن عملية احتساب نقطة ما على الإسقاط المركاتوري التعبير $\tan\left(45° + \frac{\ell}{2}\right)$، حيث يمثل ℓ خط عرض النقطة.

a. اكتب التعبير بدلالة $\sin \ell$ و $\cos \ell$.
61a. $\frac{1+\cos\ell+\sin\ell}{1+\cos\ell-\sin\ell}$

b. أوجد قيمة هذا التعبير إذا كان $\ell = 60°$. **$2+\sqrt{3}$**

62. لعبة التصويب BEAN BAG TOSS قام علي بإعداد هيكل للعبة التصويب كما هو موضح في الصورة أدناه.



a. كم سيبلغ المقدار الدقيق لبُعد الحافة الخلفية للوحة عن الأرضية؟ **$23.25\sqrt{2-\sqrt{3}}$ in.**

b. كم سيستغرق الإعداد بالضبط؟ **$23.25\sqrt{2+\sqrt{3}}$ in.**

الإثبات اثبت صحة كل متطابقة. **63–68. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

63. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

64. $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

65. $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

66. $\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

67. $\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

68. $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

اثبت صحة كل متطابقة باستخدام متطابقات الاختصار الأسي ثم تأكد مجددًا باستخدام متطابقات تحويل ناتج الضرب لمجموع.

69. $2\cos^2 5\theta - 1 = \cos 10\theta$

70. $\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = \cos 4\theta$

69–70. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

أعد كتابة كل تعبير بدلالة cosine لزوايا متعددة بها أس لا يكون أكبر من 1. **71–74. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

71. $\sin^6\theta$

72. $\sin^8\theta$

73. $\cos^7\theta$

74. $\sin^4\theta\cos^4\theta$

C **75. التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستعمل على استكشاف كيفية استخدام التمثيلات البيانية للدالات لإيجاد المتطابقات. **a–d. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.**

a. التمثيل البياني استخدم الحاسبة البيانية لتمثيل $f(x) = 4\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$ في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$.

b. التحليل اكتب h(x) كدالة sin تعبّر عن التمثيل البياني لـ f(x). ثم اثبت صحة $f(x) = h(x)$ جبريًا.

c. التمثيل البياني استخدم حاسبة بيانية لتمثيل $g(x) = \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$.

d. التحليل اكتب k(x) كدالة cos تعبّر عن التمثيل البياني لـ g(x). ثم اثبت صحة $g(x) = k(x)$ جبريًا.

مسائل مهارات التفكير العليا
استخدام مهارات التفكير العليا

76. تحدّ اثبت صحة المتطابقة التالية.

$\sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta = \sin\theta$

انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

التبرير فكّر في وجود زاوية داخل دائرة الوحدة. حدد في أي ربع ستقع فيه ضعف الزاوية ونصف الزاوية للزاوية إذا كان ضلع الإنتهاء في كل ربع. **78. III، IV أو بين III و IV،**

77. I **I، II أو بين I و II**

78. II

79. III **I، II، أو بين I و II**

تحدّ اثبت صحة كل متطابقة.

80. $\sin 4\theta = 4\sin\theta\cos\theta - 8\sin^3\theta\cos\theta$

81. $\cos 4\theta = 1 - 8\sin^2\theta\cos^2\theta$

80–89. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

الإثبات اثبت صحة كل متطابقة.

82. $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

83. $\tan^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$

84. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

85. $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

86. $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$

87. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

88. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

89. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

90. الكتابة في الرياضيات صف الخطوات التي قد تستخدمها لإيجاد القيمة الدقيقة لـ $\cos 8\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

مراجعة شاملة

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مثلثي مما يلي.

91. $\cos \frac{\pi}{12}$ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

92. $\cos \frac{19\pi}{12}$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

93. $\sin \frac{5\pi}{6}$ $\frac{1}{2}$

94. $\sin \frac{13\pi}{12}$ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

95. $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

96. $\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$ $\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

97. **زراعة الحدائق** تنتظر رنا اليوم الأول من فصل الربيع حيث ستكون ساعات النهار 14 ساعة من أجل بدء زراعة حديقة الزهور. يمكن تمثيل عدد ساعات النهار H في بلدتها بالصيغة $H = 11.45 + 6.5 \sin(0.0168d - 1.333)$. حيث يمثل d يوم من أيام العام. و$d = 1$ يمثل 1 يناير، و$d = 2$ يمثل 2 يناير وهكذا. في أي الأيام ستبدأ رنا في زراعة الحديقة؟ **اليوم 104 من العام، أو 14 أبريل تقريبًا**

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي. إذا لم تكن مُعرَّفة فاكتب غير مُعرَّفة.

98. $\csc\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

99. $\tan 210°$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

100. $\sin \frac{19\pi}{4}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

101. $\cos(-3780°)$ -1

مثِّل كل دالة بيانيًا وحللها. وضح المجال والمدى ونقاط التقاطع والسلوك الطرفي والاتصال، و فترات تزايد أو تناقص الدالة. **102–105. انظر الهامش.**

102. $f(x) = -\frac{1}{5}x^{\frac{2}{3}}$

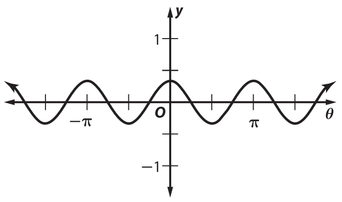
103. $f(x) = 4x^{\frac{5}{4}}$

104. $f(x) = -3x^6$

105. $f(x) = 4x^5$

مراجعة المهارات للاختبارات المعيارية

106. **مراجعة** حدد المعادلة الخاصة بالتمثيل البياني. **B**



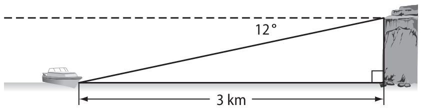
A $y = 3\cos 2\theta$

B $y = \frac{1}{3}\cos 2\theta$

C $y = 3\cos \frac{1}{2}\theta$

D $y = \frac{1}{3}\cos \frac{1}{2}\theta$

107. **مراجعة** من نقطة مراقبة على كهف موجود أعلى البحيرة. تبلغ زاوية الانخفاض لقارب على المياه °12. وعلمًا بأن القارب يبعُد عن الشاطئ بمقدار 3 كيلومترات أدنى المنحدر الصخري مباشرة. فما ارتفاع المنحدر الصخري بدءًا من سطح المياه وانتهاء بنقطة المراقبة؟ **J**



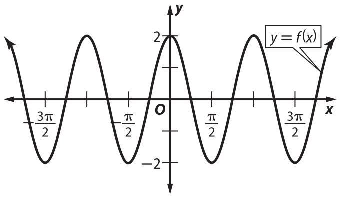
F $\frac{3}{\sin 12°}$

G $\frac{3}{\tan 12°}$

H $\frac{3}{\cos 12°}$

J $3 \tan 12°$

108. **إجابة حرة** استخدم التمثيل البياني للإجابة على كل مما يلي.



a. اكتب دالة بالصيغة $f(x) = a\cos(bx + c) + d$ تتوافق مع التمثيل البياني. $f(x) = 2\cos 2x$

b. أعد كتابة $f(x)$ كدالة sin. $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

c. أعد كتابة $f(x)$ كدالة cos لزاوية فردية.

108c. $f(x) = 4\cos^2 x - 2$

d. إيجاد جميع حلول $f(x) = 0$. $x = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

e. كيف ترتبط الحلول التي وجدتها في الجزء d بالتمثيل البياني الخاص بـ $f(x)$؟ **حلول $f(x)$ تمثل التقاطع مع المحور الأفقي x للتمثيل البياني الخاص بـ $f(x)$.**

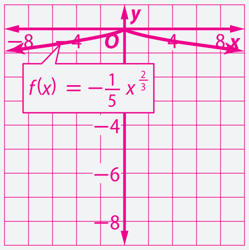
التقويم 4

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب

اطلب من كل طالب كتابة أي نوع من المتطابقات التي قد يستخدمها لإيجاد قيمة $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$. متطابقة الزاوية النصفية

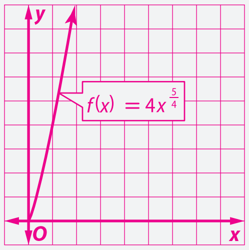
إجابات إضافية

102.



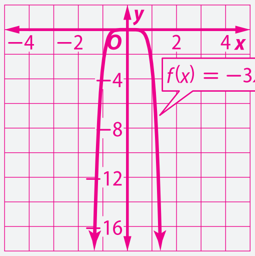
$D = (-\infty, \infty)$، $R = (-\infty, 0]$؛ التقاطع عند المحور الرأسي y: 0
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ متزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$. متناقصة على الفترة $(0, \infty)$

103.



$D = [0, \infty)$، $R = [0, \infty)$؛ التقاطع مع المحور الرأسي y: 0
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$؛ متصلة على الفترة $[0, \infty)$؛ متزايدة على الفترة $(0, \infty)$

104.



$D = (-\infty, \infty)$، $R = (-\infty, 0]$؛ التقاطع مع المحور الرأسي y: 0
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$؛ مستمرة لجميع الأعداد الحقيقية؛ تتزايد عند النقطة $(-\infty, 0)$ تتناقص عند النقطة $(0, \infty)$

التدريس المتمايز BL

التوسع اطلب من الطلاب اختيار كتابة متطابقتين لدوال قاطع التمام أو القاطع أو ظل التمام: متطابقات الزوايا المزدوجة أو اختصار الأس أو الزوايا النصفية أو تحويل حاصل الضرب إلى مجموع أو تحويل المجموع إلى حاصل ضرب.

الإجابات النموذجية:

$\csc 2x = \frac{1}{2}\csc x \sec x$; $\sec 2x = \frac{\sec^2 x \csc^2 x}{\csc^2 x - \sec^2 x}$; $\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$;

$\sec^2 x = \frac{2}{1+\cos 2x}$; $\csc^2 x = \frac{2}{1-\cos 2x}$; $\cot^2 x = \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$

التقويم التكويني

المفردات الأساسية تشير الصفحات المرجعية بعد كل كلمة إلى المكان الذي ورد فيه ذلك المصطلح لأول مرة. إذا واجه الطلاب صعوبة في الإجابة عن الأسئلة 1-10، فذكِّرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لإنعاش ذاكراتهم بشأن المفردات.

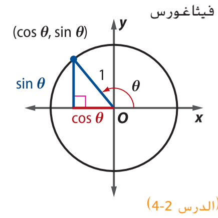
الوحدة 4 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

المتطابقات المثلثية (الدرس 4-1)

- المتطابقات المثلثية هي متطابقات تتضمن دوال مثلثية ويمكن استخدامها لإيجاد قيم مثلثية.
- يمكن تحويل التعابير المثلثية إلى أبسط صورة بكتابة التعبير بدلالة إحدى الدوال المثلثية أو بدلالة sine and cosine.
- أكثر متطابقة مثلثية شيوعًا هي متطابقة فيثاغورس $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.



إثبات صحة المتطابقات المثلثية (الدرس 4-2)

- ابدأ بالطرف الأكثر تعقيدًا من المتطابقة واعمل على تحويله إلى الطرف الأسهل.
- استخدم المتطابقات العكسية ومتطابقات ناتج القسمة ومتطابقات فيثاغورس وغيرها من المتطابقات المثلثية الأساسية.
- استخدم عمليات جبرية مثل جمع الكسور، أو إعادة كتابة الكسور في صيغة مجموع أو فروق، أو إيجاد ناتج ضرب التعابير، أو تحليل التعابير إلى العوامل.
- حوِّل مقام بالصيغة $1 \pm u$ أو $u \pm 1$ إلى حد فردي باستخدام متطابقة المرافق وفيثاغورس الخاصة به.
- اعمل على كل طرف بصورة منفصلة للوصول إلى تعبير مشترك.

حل معادلات مثلثية (الدرس 4-3)

- تقنيات جبرية يمكن استخدامها لحل معادلات مثلثية تتضمن عزل التعبير المثلثي، والحصول على الجذر التربيعي لكلا الطرفين، وتحليل العوامل.
- يمكن استخدام متطابقات مثلثية لحل معادلات مثلثية بواسطة كتابة المعادلة باستخدام دالة مثلثية فردية أو بواسطة تربيع كل طرف للحصول على المتطابقة.

متطابقات المجموع والفروق (الدرس 4-4)

- يمكن استخدام متطابقات المجموع والفروق لإيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية لزوايا غير معروفة.
- يمكن أيضًا استخدام متطابقات المجموع والفروق لإعادة كتابة تعابير مثلثية في صورة تعبير جبري.

متطابقات اضعاف الزوايا ومتطابقات تحويل ناتج الضرب لمجموع (الدرس 4-5)

- يمكن استخدام المتطابقات المثلثية لإيجاد قيم التعابير التي لا يمكن إيجاد قيمتها بطريقة أخرى.

المفردات الأساسية

- الدالة متساوية القيمة (cofunction)
- متطابقة الفرق (difference identity)
- متطابقة ضعف الزاوية (double-angle identity)
- متطابقة نصف الزاوية (half-angle identity)
- متطابقة (identity)
- متطابقة فردية-زوجية (odd-even identity)
- متطابقة اختصار الأس (power-reducing identity)
- متطابقة تحويل ناتج الضرب لمجموع (product-to-sum identity)
- متطابقة فيثاغورس (Pythagorean identity)
- متطابقة ناتج القسمة (quotient identity)
- متطابقة عكسية/معكوسة (reciprocal identity)
- متطابقة اختزال (reduction identity)
- متطابقة المجموع (sum identity)
- متطابقة مثلثية (trigonometric identity)
- إثبات صحة المتطابقة (verify an identity)

10. $\cos\alpha\cos\beta$؛ متطابقة تحويل ناتج الضرب لمجموع

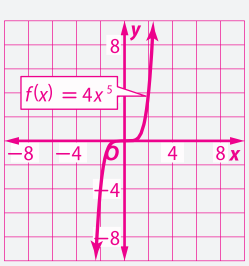
مراجعة المفردات

أكمل كل متطابقة بإكمال الفراغات. ثم قم بتسمية المتطابقة.

1. $\sec\theta =$ ________ $\frac{1}{\cos\theta}$؛ متطابقة عكسية
2. ________ $= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $-\tan\theta$؛ متطابقة فردية-زوجية
3. ________ $+ 1 = \sec^2\theta$ $\tan^2\theta$؛ متطابقة فيثاغورس
4. $\cos(90° - \theta) =$ ________ $\sin\theta$؛ متطابقة متساوية القيمة
5. $\tan(-\theta) =$ ________ $\tan\theta$؛ متطابقة ناتج القسمة
6. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha$ ________ $+ \cos\alpha$ ________ $\cos\beta, \sin\beta$؛ متطابقة مجموع
7. ________ $= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $\cos 2\alpha$؛ متطابقة زوايا مزدوجة
8. ________ $= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ $\cos\frac{\theta}{2}$؛ متطابقة زاوية نصفية
9. $\frac{1-\cos 2\theta}{2} =$ ________ $\sin^2\theta$؛ متطابقة الاختصار الأسي
10. ________ $= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$

إجابات إضافية (الدرس 4-5)

105.



$D = (-\infty, \infty)$، $R = (-\infty, \infty)$؛ نقطة التقاطع مع المحور y: 0؛ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$؛ متصلة لجميع الأعداد الحقيقية؛ متزايدة على الفترة $(-\infty, \infty)$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indb 273 12/15/2016 8:10:18 PM

الوحدة 4 دليل الدراسة والمراجعة تابع

المراجعة التابعة للدرس

4-1 المتطابقات المثلثية

أوجد قيمة كل تعبير مستخدمًا المعلومات المعطاة.

11–16. انظر الهامش.

11 $\sec\theta$ and $\cos\theta$, $\tan\theta = 3$, $\cos\theta > 0$

12. $\cot\theta$ and $\sin\theta$; $\cos\theta = -\frac{1}{5}$; $\tan\theta < 0$

13. $\csc\theta$ and $\tan\theta$; $\cos\theta = \frac{3}{5}$; $\sin\theta < 0$

14. $\cot\theta$ and $\cos\theta$; $\tan\theta = \frac{2}{7}$; $\csc\theta > 0$

15. $\sec\theta$ and $\sin\theta$; $\cot\theta = -2$, $\csc\theta < 0$

16. $\cos\theta$ and $\sin\theta$, $\cot\theta = \frac{3}{8}$, $\sec\theta < 0$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

17. $\sin^2(-x) + \cos^2(-x)$ **1**

18. $\sin^2 x + \cos^2 x + \cot^2 x$ **$\csc^2 x$**

19. $\frac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\cos(-x)}$ **$\sec x$**

20. $\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 1}$ **1**

21. $\frac{1}{1 - \sin x}$ **$\sec^2 x + \tan x \sec x$**

22. $\frac{\cos x}{1 + \sec x}$ **$\cot^2 x - \cot^2 x \cos x$**

مثال 1

إذا كانت $\sec\theta = -3$ و$\sin\theta > 0$، **فأوجد** $\sin\theta$.

بما أن $\sin\theta > 0$ و$\sec\theta < 0$، إذًا θ يجب أن تكون في الربع الثاني. لإيجاد $\sin\theta$، قم أولاً بإيجاد $\cos\theta$ باستخدام المتطابقة العكسية لـ $\sec\theta$ و$\cos\theta$.

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \quad \text{متطابقة عكسية}$$

$$= -\frac{1}{3} \quad \sec\theta = -3$$

يمكنك الآن استخدام متطابقة فيثاغورس التي تتضمن $\sin\theta$ و$\cos\theta$ لإيجاد $\sin\theta$.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \text{متطابقة فيثاغورس}$$

$$\sin^2\theta + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \quad \cos\theta = -\frac{1}{3}$$

$$\sin^2\theta + \frac{1}{9} = 1 \quad \text{أوجد ناتج الضرب.}$$

$$\sin^2\theta = \frac{8}{9} \quad \text{اطرح.}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{بسّط}$$

4-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

اثبت صحة كل متطابقة مما يلي.

23–32. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

23. $\frac{\sin}{1 - \cos\theta} + \frac{}{1 + \cos\theta} = 2\csc\theta$

24. $\frac{\cos\theta}{\sec\theta} + \frac{\sin\theta}{\csc\theta} = 1$

25. $\frac{\cot\theta}{1 + \csc\theta} + \frac{1 + \csc\theta}{\cot\theta} = 2\sec\theta$

26. $\frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$

27. $\frac{\cot^2\theta}{1 + \csc\theta} = \csc\theta - 1$

28. $\frac{\sec\theta}{\tan\theta} + \frac{\csc\theta}{\cot\theta} = \sec\theta + \csc\theta$

29. $\frac{\sec\theta + \csc\theta}{1 + \tan\theta} = \csc\theta$

30. $\cot\theta\csc\theta + \sec\theta = \csc^2\theta\sec\theta$

31. $\frac{\sin\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \frac{\tan\theta}{1 + \tan\theta}$

32. $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \frac{1 - \tan^2\theta}{\sec^2\theta}$

مثال 2

اثبت صحة $\frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} + \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} = 2\csc\theta$

الطرف الأيسر من هذه المتطابقة أكثر تعقيدًا. لذا عليك البدء بذلك التعبير.

$$\frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} + \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + (1 + \cos\theta)^2}{\sin\theta(1 + \cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta(1 + \cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 1 + 2\cos\theta}{\sin\theta(1 + \cos\theta)}$$

$$= \frac{1 + 1 + 2\cos\theta}{\sin\theta(1 + \cos\theta)}$$

$$= \frac{2 + 2\cos\theta}{\sin\theta(1 + \cos\theta)}$$

$$= \frac{2(1 + \cos\theta)}{\sin\theta(1 + \cos\theta)}$$

$$= \frac{2}{\sin\theta}$$

$$= 2\csc\theta$$

مراجعة درس بدرس

التدخل التقويمي إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولها الأسئلة، فذكّر الطلاب بأن الصفحات المرجعية ترشدهم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

إجابات إضافية

11. $\sec\theta = \sqrt{10}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

12. $\cot\theta = -\frac{1}{2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{12}$, $\sin\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

13. $\csc\theta = -\frac{5}{4}$, $\tan\theta = -\frac{4}{3}$

14. $\cot\theta = \frac{7}{2}$, $\cos\theta = \frac{7}{\sqrt{53}} = \frac{7\sqrt{53}}{53}$

15. $\sec\theta = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

16. $\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{73}} = -\frac{3\sqrt{73}}{73}$, $\sin\theta = -\frac{8}{\sqrt{73}} = -\frac{8\sqrt{73}}{73}$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 274 12/15/2016 8:10:21 PM

إجابات إضافية

45. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

46. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

47. $2-\sqrt{3}$

48. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

49. $\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

50. $2+\sqrt{3}$

55. $\cos(\theta+30°)-\sin(\theta+60°)$

$= \cos\theta\cos 30° - \sin\theta\sin 30° - (\sin\theta\cos 60° + \cos\theta\sin 60°)$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \dfrac{1}{2}\sin\theta - \dfrac{1}{2}\sin\theta - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$

$= -\sin\theta$

56. $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$= \cos\theta\cos\dfrac{\pi}{4} - \sin\theta\sin\dfrac{\pi}{4}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta-\sin\theta)$

57. $\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\theta\cos\dfrac{\pi}{3} + \sin\theta\sin\dfrac{\pi}{3} + \cos\theta\cos\dfrac{\pi}{3} - \sin\theta\sin\dfrac{\pi}{3}$

$= \dfrac{1}{2}\cos\theta + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \dfrac{1}{2}\cos\theta - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$

$= \cos\theta$

58. $\tan\left(\theta+\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$= \dfrac{\tan\theta+\tan\frac{3\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{3\pi}{4}}$

$= \dfrac{\tan\theta-1}{1-\tan\theta\cdot(-1)}$

$= \dfrac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}$

المراجعة التابعة للدرس

4-3 حل المعادلات المثلثية

أوجد جميع حلول كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$.

33. $2\sin x=\sqrt{2}$ $\dfrac{\pi}{4}$؛ $\dfrac{3\pi}{4}$

34. $4\cos^2 x=3$

34. $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$

35. $\tan^2 x-3=0$

36. $9+\cot^2 x=12$

37. $2\sin^2 x=\sin x$ $0, \pi, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}$

38. $3\cos x+3=\sin^2 x$ π

35. $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$

أوجد حل كل معادلة لجميع قيم x. **39–44. n هو عدد صحيح.**

39. $\sin^2 x-\sin x=0$ $n\pi, \dfrac{\pi}{2}+2n\pi$

40. $\tan^2 x=\tan x$ $n\pi, \dfrac{\pi}{4}+n\pi$

41. $3\cos x=\cos x-1$ $\dfrac{2\pi}{3}+2n\pi; \dfrac{4\pi}{3}+2n\pi$

42. $\sin^2 x=\sin x+2$ $\dfrac{3\pi}{2}+2n\pi$

43. $\sin^2 x=1-\cos x$ $2n\pi; \dfrac{\pi}{2}+n\pi$

44. $\sin x=\cos x+1$ $\dfrac{\pi}{2}+2n\pi; \pi+2n\pi$

36. $\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}$

مثال 3

حل المعادلة $\sin\theta = 1-\cos\theta$ لجميع قيم θ.

$\sin\theta = 1-\cos\theta$	المعادلة الأصلية.
$\sin^2\theta = (1-\cos\theta)^2$	أوجد تربيع كل طرف.
$\sin^2\theta = 1-2\cos\theta+\cos^2\theta$	اكتب الصيغة الموسعة.
$1-\cos^2\theta = 1-2\cos\theta+\cos^2\theta$	متطابقة فيثاغورس
$0 = 2\cos^2\theta-2\cos\theta$	اطرح.
$0 = 2\cos\theta(\cos\theta-1)$	حلل إلى العوامل.

أوجد حل x في $[0, 2\pi]$.

$\cos\theta = 0$ أو $\cos\theta = 1$

$\theta = \cos^{-1} 0$ $\qquad$ $\theta = \cos^{-1} 1$

$\theta = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2}$ $\qquad$ $\theta = 0$

يوضح التحقق أن $\dfrac{3\pi}{2}$ هو حل غير مقبول. إذًا، فإن الحل هو $\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ أو $\theta = 0 + 2n\pi$.

4-4 متطابقات المجموع والفروق

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مثلّثي مما يلي. **45–50. انظر الهامش.**

45. $\cos 15°$ **46.** $\sin 345°$ **47.** $\tan\dfrac{13\pi}{12}$

48. $\sin\dfrac{7\pi}{12}$ **49.** $\cos -\dfrac{11\pi}{12}$ **50.** $\tan\dfrac{5\pi}{12}$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

51. $\dfrac{\tan\frac{\pi}{9}+\tan\frac{\pi}{9}}{1-\tan\frac{\pi}{9}\tan\frac{8\pi}{9}}$ **0**

52. $\cos 24°\cos 36° - \sin 24°\sin 36°$ $\dfrac{1}{2}$

53. $\sin 95°\cos 50° - \cos 95°\sin 50°$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

54. $\cos\dfrac{2\pi}{9}\cos\dfrac{\pi}{18} + \sin\dfrac{2\pi}{9}\sin\dfrac{\pi}{18}$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

اثبت صحة كل متطابقة مما يلي. **55–58. انظر الهامش.**

55. $\cos(\theta+30°)-\sin(\theta+60°) = -\sin\theta$

56. $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta-\sin\theta)$

57. $\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\theta$

58. $\tan\left(\theta+\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}$

مثال 4

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan\dfrac{23\pi}{12}$

$\tan\dfrac{23\pi}{12} = \tan\left(\dfrac{5\pi}{4}+\dfrac{2\pi}{3}\right)$	$\dfrac{23\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{4}+\dfrac{2\pi}{3}$
$= \dfrac{\tan\frac{5\pi}{4}+\tan\frac{2\pi}{3}}{1-\tan\frac{5\pi}{4}\tan\frac{2\pi}{3}}$	متطابقة المجموع
$= \dfrac{1-\sqrt{3}}{1-(-\sqrt{3})}$	إيجاد قيمة tan
$= \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$	بسّط
$= \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\times\dfrac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$	طبّق عملية إنطاق المقام (تخليصه من الجذور).
$= \dfrac{4-2\sqrt{3}}{1-3}$	اضرب.
$= \dfrac{4-2\sqrt{3}}{-2} = -2+\sqrt{3}$	بسّط

الوحدة 4 دليل الدراسة والمراجعة تابع

المراجعة التابعة للدرس

4-5 متطابقات الزوايا المتعددة وتحويل ناتج الضرب لمجموع

مثال 5

أوجد قيم $\cos 2\theta$، $\sin 2\theta$، و$\tan 2\theta$ إذا كان θ في الربع الرابع و $\sin\theta = -\frac{24}{25}$.

يوجد θ في الربع الرابع، إذًا $\cos\theta = \frac{7}{25}$ و $\sin\theta = -\frac{24}{25}$.

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2\left(-\frac{24}{25}\right)\frac{7}{25} = -\frac{336}{625}$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$= 2\left(\frac{7}{25}\right)^2 - 1 = -\frac{527}{625}$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\left(-\frac{24}{7}\right)}{1-\left(-\frac{24}{7}\right)^2} = \frac{-\frac{48}{7}}{-\frac{527}{49}} = \frac{336}{527}$$

أوجد قِيمَ $\cos 2\theta$، $\sin 2\theta$، و$\tan 2\theta$ للقيمة والفترة الموضحين. **62–59. انظر الهامش.**

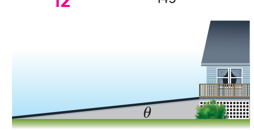
59. $\cos\theta = \frac{1}{3}, (0°, 90°)$
60. $\tan\theta = 2, (180°, 270°)$
61. $\sin\theta = \frac{4}{5}, \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
62. $\sec\theta = \frac{13}{5}, \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

63. $\sin 75°$ $\quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$
64. $\cos\frac{11\pi}{12}$ $\quad -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$
65. $\tan 67.5°$ $\quad \sqrt{2}+1$
66. $\cos\frac{3\pi}{8}$ $\quad \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
67. $\sin\frac{15\pi}{8}$ $\quad -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
68. $\tan\frac{13\pi}{12}$ $\quad 2-\sqrt{3}$

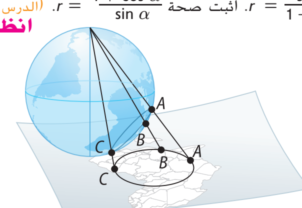
التطبيقات وحل المسائل

69. **الإنشاء** أوجد $\tan\theta$ التي يحدثها المنحدر مع سطح الأرض إذا كان $\sin\theta = \frac{\sqrt{145}}{145}$ و $\cos\theta = \frac{12\sqrt{145}}{145}$. $\frac{1}{12}$ (الدرس 4-1)



70. **الإضاءة** يمكن حساب شدة الضوء المنبعث من نظام مكوّن من عدستين مستقطبتين، باستخدام الصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$، حيث يكون I_0 شدة الضوء الداخل للنظام، بينما θ فتكون زاوية محور العدسة الثانية مع العدسة الأولى. اكتب معادلة لشدة الضوء مستخدمًا $\tan\theta$ فقط. (الدرس 4-1) $I = I_0 - I_0\left(\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

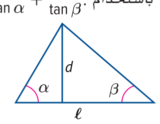
71. **الإسقاطات الخرائطية** يُستخدم الإسقاط المُجسّم من أجل إسقاط الخطوط المحيطة بشكل كروي ثلاثي الأبعاد على خريطة ثنائية الأبعاد. وترتبط النقاط الموجودة على الشكل الكروي بالنقاط الموجودة على الخريطة باستخدام الصيغة r $r = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$. اثبت صحة $r = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$. (الدرس 4-2) **انظر الهامش.**



72. **حركة المقذوف** ستبقى كرة ما تُرمى بسرعة إبتدائية v_0 بزاوية θ وتتحرك بمسافة أفقية d في الهواء لمدة t ثانية، حيث $t = \frac{d}{v_0\cos\theta}$. افترض أن الكرة رُميت بسرعة مبدئية تبلغ 50 قدمًا في الثانية، وتحركت لمسافة 100 قدم وبقيت في الهواء لمدة 4 ثوانٍ. أوجد الزاوية التي ستُرمى الكرة منها. (الدرس 4-3) **60°** **انظر الهامش.**

73. **الإذاعة** يحدث تداخل عندما تمر موجتان في الفراغ ذاته في نفس الوقت. ويكون هذا التداخل مشوّشًا، إذا كانت سعة مجموع الموجتين أقل من سعة الموجات الفردية. حدد ما إذا كان التداخل مشوشًا عند تمثيل الموجتين بواسطة الجمع بين $y = 20\sin(3t + 225°)$ و $y = 20\sin(3t + 45°)$. (الدرس 4-4) **نعم**

74. **التثليث** *التثليث* هو عملية قياس مسافة ما d باستخدام الزاويتين α وβ والمسافة ℓ باستخدام $\ell = \frac{d}{\tan\alpha} + \frac{d}{\tan\beta}$. (الدرس 4-5) **انظر الهامش.**



a. حل القاعدة لإيجاد d.

b. اثبت أن $d = \frac{\ell\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$.

c. اثبت أن $d = \frac{\ell\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

d. وضّح ما إذا كان $\alpha = \beta$، ثم $d = 0.5\ell\tan\alpha$.

إجابات إضافية

59. $\frac{4\sqrt{2}}{9}, -\frac{7}{9}, -\frac{4\sqrt{2}}{7}$

60. $\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{4}{3}$

61. $-\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}, \frac{24}{7}$

62. $-\frac{120}{169}, -\frac{119}{169}, \frac{120}{119}$

71. $$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\times\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

74a. $$d = \frac{\ell}{\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}}$$

74b. $$\frac{\ell}{\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}} = \frac{\ell}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}} = \frac{\ell}{\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}} = \frac{\ell}{\frac{\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}} = \frac{\ell\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta}$$

74c. $$\frac{\ell\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta} = \frac{\ell\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

74d. $$\frac{\ell\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\ell\sin\alpha\sin\alpha}{\sin(\alpha+\alpha)} = \frac{\ell\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\ell\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\ell\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{\ell}{2}\tan\alpha$$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 276 12/15/2016 8:10:26 PM

إجابات إضافية

19. $-2+\sqrt{3}$

20. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

21. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

22. $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

23. $-6\sqrt{2}$

27a. $\dfrac{2}{g}v^2(\tan\theta-\tan\theta\sin^2\theta)$

$=\dfrac{2}{g}v^2\tan\theta\,(1-\sin^2\theta)$

$=\dfrac{2}{g}v^2\tan\theta\cos^2\theta$

$=\dfrac{2}{g}v^2\sin\theta\cos\theta$

$=\dfrac{v^2\sin 2\theta}{g}$

الوحدة 4 تمرين على الاختبار

أوجد قيمة كل تعبير مستخدمًا المعلومات المعطاة.

1. $\sin\theta$ and $\cos\theta$; $\csc\theta=-4$, $\cos\theta<0$ $-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4}$
2. $\csc\theta$ and $\sec\theta$; $\tan\theta=\frac{2}{5}$; $\csc\theta<0$ $-\frac{\sqrt{29}}{2}, -\frac{\sqrt{29}}{5}$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

3. $\dfrac{\sin(90°-x)}{\tan(90°-x)}$ $\csc\theta$

4. $\dfrac{\sec^2 x-1}{\tan^2 x+1}$ $\sin^2 x$

5. $\sin\theta(1+\cot^2\theta)$ $\sin x$

اثبت صحة كل متطابقة. 6–10. انظر ملحق إجابات الوحدة 4.

6. $\dfrac{\csc^2\theta-1}{\csc^2\theta}+\dfrac{\sec^2\theta-1}{\sec^2\theta}=1$

7. $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2\cos\theta}{1+\sin\theta}$

8. $\dfrac{1}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{1-\cos\theta}=2\csc^2\theta$

9. $-\sec^2\theta\sin^2\theta=\dfrac{\cos^2\theta-1}{\cos^2\theta}$

10. $\sin^4 x-\cos^4 x=2\sin^2 x-1$

11. **اختيار من متعدد** أي التعابير غير صحيح؟ **D**

A $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

B $\tan(-\theta)=\dfrac{1}{\cot(-\theta)}$

C $\tan(-\theta)=\dfrac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}$

D $\tan(-\theta)+1=\sec(-\theta)$

أوجد جميع حلول كل معادلة في الفترة $[0, 2\pi]$.

12. $\sqrt{2}\sin\theta+1=0$ $\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

13. $\sec^2\theta=\frac{4}{3}$ $\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$

أوجد حل كل معادلة لجميع قيم θ.

14. $\tan^2\theta-\tan\theta=0$ $n\pi, \frac{\pi}{4}+n\pi, n\in\mathbb{Z}$

15. $\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\cos\theta$ $n\pi, n\in\mathbb{Z}$

16. $\dfrac{1}{\sec\theta-1}-\dfrac{1}{\sec\theta+1}=2$ $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, n\in\mathbb{Z}$

17. $\sec\theta-2\tan\theta=0$ $\frac{\pi}{6}+2n\pi, \frac{5\pi}{6}+2n\pi, n\in\mathbb{Z}$

18. **التيار الكهربائي** يتم احتساب التيار الكهربائي المنتج بواسطة مولّد التيار من خلال الصيغة $I=40\sin 135\pi t$، حيث I هي قياس التيار بالأمبير، بينما t هو الوقت بالثانية. في أي وقت t سيبلغ التيار 20 أمبيرًا لأول مرة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة آلاف. **0.0012 s**

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مثلّثي مما يلي. 19–23. انظر الهامش.

19. $\tan 165°$
20. $\cos -\frac{\pi}{12}$
21. $\sin 75°$
22. $\cos 465°-\cos 15°$
23. $6\sin 675°-6\sin 45°$

24. **اختيار من متعدد** ما المتطابقة الصحيحة؟ **H**

F $\cos(\theta+\pi)=-\sin\pi$

G $\cos(\pi-\theta)=\cos\theta$

H $\sin\left(\theta-\dfrac{3\pi}{2}\right)=\cos\theta$

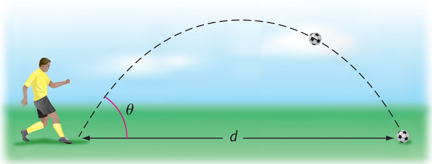
J $\sin(\pi+\theta)=\sin\theta$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

25. $\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}$ **0**

26. $\dfrac{\tan 135°-\tan 15°}{1+\tan 135°\tan 15°}$ $-\sqrt{3}$

27. **الفيزياء** رُكلت كرة قدم من مستوى أرضية الملعب بسرعة إبتدائية v بزاوية ارتفاع θ.



a. يمكن تحديد المسافة الأفقية d التي ستتحركها الكرة باستخدام $d=\dfrac{v^2\sin 2\theta}{g}$، حيث g هي التسارع بسبب الجاذبية. اثبت صحة أن هذا التعبير مماثل للصيغة $\frac{2}{g}v^2(\tan\theta-\tan\theta\sin^2\theta)$. انظر الهامش.

b. يمكن تحديد الحد الأقصى للارتفاع h الذي يمكن للعنصر بلوغه باستخدام الصيغة $h=\dfrac{v^2\sin^2\theta}{2g}$. أوجد نسبة الارتفاع القصوى المحققة إلى المسافة الأفقية المقطوعة. $\frac{1}{4}\tan\theta$

أوجد قِيمَ $\cos 2\theta$، $\sin 2\theta$ و$\tan 2\theta$ للقيمة والفترة الموضحين.

28. $\tan\theta=-3, \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ $-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{3}{4}$

29. $\cos\theta=\frac{1}{5}, (0°, 90°)$ $\frac{4\sqrt{6}}{25}, -\frac{23}{25}, -\frac{4\sqrt{6}}{23}$

30. $\cos\theta=\frac{5}{9}, \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $\frac{20\sqrt{14}}{81}; -\frac{31}{81}; -\frac{20\sqrt{14}}{31}$

1 التركيز

الهدف تقريب معدّلات التغير لدوال جيب الزاوية وجيب التمام باستخدام ناتج قسمة الفرق.

نصيحة للتدريس

في حساب التفاضل والتكامل، يطلق على استخدام ناتج قسمة الفرق لإيجاد معدّل التغيّر عند نقاط متعدّدة في الدالة مصطلح "التفاضل". ويطلق على قياس هذا التغيّر مصطلح "المشتق".

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

اطلب من الطلاب العمل في مجموعات من ثلاثة أو أربعة أفراد لهم قدرات متنوعة. اطلب من الطلاب إكمال النشاط 1 والنشاط 2.

- ذكّر الطلاب بأن ناتج قسمة الفرق $m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ يمكن استخدامه لإيجاد معدّل التغيّر عند نقطة فردية في الدالة عندما توجد قيمة النهاية عندما تقترب h من صفر.
- ذكّر الطلاب بأن ناتج قسمة الفرق يحدّد ميل الخط المماس لتلك النقطة في الدالة.
- يمكن للطلاب الرجوع إلى صفحة 255 في الدرس 4-4 إذا واجهوا صعوبة في تذكّر متطابقات المجموع والفرق لجيب الزاوية وجيب التمام.

إجابات إضافية

نشاط 1

الخطوة 2 $h = 0.1, m \approx -0.0500;$
$h = 0.01, m \approx -0.0050;$
$h = 0.001, m \approx -0.0005;$
$h = 0.0001, m \approx -0.00005$

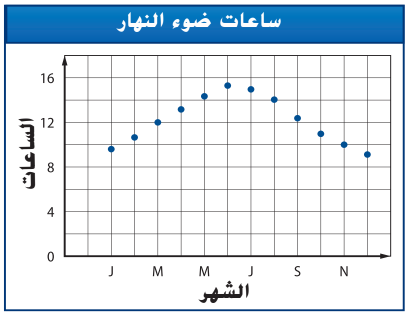
الخطوة 3 $x = 0: h = 0.1, m \approx 0.9983;$
$h = 0.01, m \approx 1.0000;$
$h = 0.001, m \approx 1.0000;$
$h = 0.0001, m \approx 1.0000$
$x = \pi: h = 0.1, m \approx -0.9983;$
$h = 0.01, m \approx -1.0000;$
$h = 0.001, m \approx -1.0000;$
$h = 0.0001, m \approx -1.0000$

الربط مع حساب التفاضل والتكامل المتقدم
معدلات التغير لــ sine و cosine الزاوية

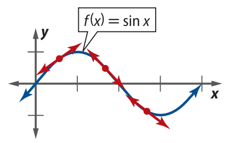
الهدف

- تقريب معدلات التغير لدوال cosine و sine الزاوية باستخدام ناتج قسمة الفرق.

لقد تعلمتَ أن العديد من المواقف في الحياة اليومية تتضمن سلوك متكررًا على مدار الوقت، وبالتالي يمكن تمثيلها بواسطة دوال منحنى الــ sine. ومن الممكن استخدام تحويلات الدوال الرئيسية sin x وcos x ونماذج مثلثية لتمثيل البيانات وتحليل الاتجاهات وتوقع القيم المستقبلية.



بينما يمكنك تمثيل مواقف من الحياة اليومية باستخدام تمثيلات بيانية لــ sine و cosine الزاوية. فيمكن استخدام حساب التفاضل لتحديد معدل تغير النموذج في أي نقطة زمنية. إن معرفتك بناتج قسمة الفرق، ومتطابقات المجموع لــ sine الزاوية و الــ cosine، وإيجاد قيمة الحدود يتيح لك الآن اكتشاف معدلات تغير هذه الدوال في أي نقطة زمنية.



نشاط 1 الحساب التقريبي لمعدل التغير

قرّب معدل تغير $f(x) = \sin x$ لعدة نقاط. **الخطوة 2-3. انظر الهامش.**

الخطوة 1 عوّض عن $f(x) = \sin x$ في ناتج قسمة الفرق.

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \longrightarrow m = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

الخطوة 2 قرّب معدل تغير $f(x)$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$. افترض أن $h = 0.1$ و0.01 و0.001 و0.0001.

الخطوة 3 كرر الخطوتين 1 و2 عندما $x = 0$ و$x = \pi$.

تحليل النتائج **1-2. انظر الهامش.**

1. استخدم خطوط المماس والتمثيل البياني لــ $f(x) = \sin x$ لتوضيح القيم الموجودة في الخطوتين 2 و3.
2. ما الذي سيحدث لمعدل تغير $f(x)$ كلما زاد x؟

على عكس الدالة الأسية للأساس الطبيعي $g(x) = e^x$ والمعادلة اللوغاريتمية الطبيعية $h(x) = \ln x$، فإن تعبير تمثيل معدل تغير $f(x) = \sin x$ في أي نقطة سيكون غير واضح. ورغم ذلك، يمكننا تعويض $f(x)$ في ناتج قسمة الفرق ثم تحويل التعبير لأبسط صورة.

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ ناتج قسمة الفرق

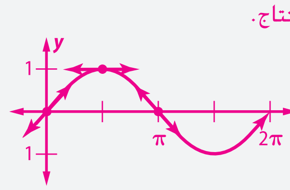
$$= \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$ $f(x) = \sin x$

$$= \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h}$$ متطابقة مجموع الــ sine الزاوية

$$= \frac{(\sin x \cos h - \sin x) + \cos x \sin h}{h}$$ اجمع الحدود مع $\sin x$.

$$= \sin x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$$ حلل الى العوامل في $\sin x$ و$\cos x$

1. الإجابة النموذجية: توضّح القيم أن معدل تغيّر $f(x)$ عند $\frac{\pi}{2}$ هو 0، و عند 0 هو 1، وعند π هو -1. وينبغي أن يكون هذا هو ميل خطوط المماس لــ $f(x)$ عند تلك القيم لــ x. التمثيل البياني لــ $f(x)$ وخطوط المماس تثبت صحة هذا الاستنتاج.



2. الإجابة النموذجية: من خلال تحليل التمثيل البياني للدالة $f(x)$، يبدو أنه كلما تزيد x عن 2π يتكرر معدل التغيّر. فعلى سبيل المثال، سيكون معدّل التغيّر عند $x = 0$ نفس معدّل التغيّر عند $x = 2\pi$ و 4π. فترة معدّل التغيّر هي 2π.

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indd 278 12/15/2016 8:10:31 PM

تمرين اطلب من الطلاب إكمال تمارين تحليل النتائج 1-4 وتمرين التمثيل بالنماذج والتطبيق رقم 5.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم تمرين التمثيل بالنماذج والتطبيق رقم 5 لتقويم مدى استيعاب الطلاب لكيفية استخدام متطابقات المجموع لجيب الزاوية وجيب التمام لإيجاد تعابير معدّل التغيّر عند أي نقطة في دالة جيب الزاوية أو دالة جيب التمام.

من العملي إلى النظري

:أسأل

- هل من الممكن حساب معدّل التغيّر للصيغة $f(x) = \tan x$ عند نقطة x؟ إذا كانت الإجابة بنعم، فما التعبير الذي يعبّر عن معدّل التغيير هذا؟ نعم، $m = \sec^2 x$

إجابات إضافية

3. بالنسبة للصيغة $x = \frac{3\pi}{2}$، معدّل التغيير هو 0. بالنسبة للصيغة $x = 2\pi$، معدل التغيير هو 1. بالنسبة للصيغة $x = \frac{5\pi}{2}$، معدّل التغيير هو 0.

4. الإجابة النموذجية: يشير كون الدوال المثلّثية دورية إلى أن متوسط معدلات التغيير لهذه الدوال ستكون دورية أيضًا. إذًا، أنواع الدوال التي يمكنها تمثيل هذا السلوك الدوري هي الدوال المثلّثية فقط.

5a. $m = \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h}$

5b. $m = \cos x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \sin x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$

5c. $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0;\ \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

5f. بالنسبة للصيغة $x = 0$، معدّل التغيير هو 0. بالنسبة للصيغة $x = \frac{\pi}{2}$، معدّل التغيير هو -1. بالنسبة للصيغة $x = \pi$، معدّل التغيير هو 0. بالنسبة للصيغة $x = \frac{3\pi}{2}$، معدّل التغيير هو 1.

لدينا الآن تعبيران يتضمنان $\cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$ و $\sin x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right)$ للحصول على تقريب دقيق لمعدل تغير $f(x)$ عند إحدى النقاط. سيلزم تقريب h من 0 قدر الإمكان. سابقًا، كان بمقدورنا التعويض عن $h = 0$ في تعبير لإيجاد القيمة الدقيقة لميل إحدى الدوال عند نقطة ما. ورغم ذلك، كلا التعابير الكسرية غير محددة عند $h = 0$.

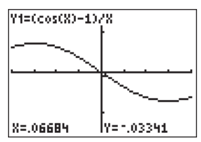
$\sin x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right)$	تعابير أصلية	$\cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$
$= \sin x\left(\frac{\cos 0 - 1}{0}\right)$	$h = 0$	$= \cos x\left(\frac{\sin 0}{0}\right)$
غير محددة		غير محددة

يمكننا تقريب القيمة للتعبيرين بواسطة إيجاد حد كل منهما كلما اقترب h من 0 وذلك باستخدام أساليب تمت مناقشتها في إحدى الدروس السابقة.

نشاط 2 حساب معدل التغير

أوجد تعبيرًا لمعدل تغير $f(x) = \sin x$.

الخطوة 1 استخدم الحاسبة البيانية لتقدير $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$. **0**



$[-\pi, \pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-1.5, 1.5]$ scl: 1

الخطوة 2 اثبت صحة القيمة الموجودة في الخطوة 1 باستخدام الخاصية TABLE بالآلة الحاسبة.

X	Y1
-.0030	.00150
-.0020	1.0E-3
-.0010	5.0E-4
0.0000	ERROR
.00100	-5E-4
.00200	-1E-3
.00300	-.0015

X=-.001

الخطوة 3 كرر الخطوتين 1 و2 لتقدير $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$. **1**

الخطوة 4 عوّض عن القيم الموجودة في الخطوة 2 والخطوة 3 في معادلة الميل $m = (0) \sin x + (1) \cos x$

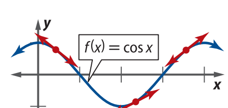
$$m = \sin x\left(\frac{\cos h \quad 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right).$$

الخطوة 5 حوّل التعبير الموجود في الخطوة 4 لأبسط صورة. $m = \cos x$

تحليل النتائج 3-4. انظر الهامش.

3. أوجد معدل تغير $f(x) = \sin x$ عند $x = \frac{3\pi}{2}$، 2، و $\frac{5\pi}{2}$.
4. خمّن لماذا يلزم تمثيل معدلات التغير لجميع الدوال المثلثية بدوال مثلثية أخرى.

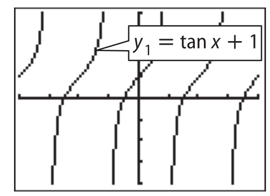
التمثيل والتطبيق



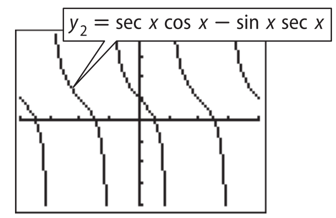
5. في هذه المسألة، ستجد تعبيرًا لمعدل تغير $f(x) = \cos x$ عند أي نقطة x. **a–c, f. انظر الهامش.**
   a. عوّض عن $f(x) = \cos x$ في ناتج قسمة الفرق.
   b. حوّل التعبير من الجزء **a** لأبسط صورة.
   c. استخدم الحاسبة البيانية لإيجاد حد تعبيري الكسور كلما اقترب h من 0.
   d. عوّض عن القيم الموجودة في الجزء **c** داخل معادلة الميل الموجودة في الجزء **b**. d. $m = \cos x\,(0) - \sin x\,(1)$
   e. حوّل معادلة الميل في الجزء **d** لأبسط صورة. $m = -\sin x$
   f. أوجد معدل تغير $f(x) = \cos x$ عند $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi = \frac{3\pi}{2}$.

الدرس 4-1

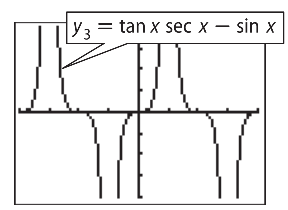
55b.



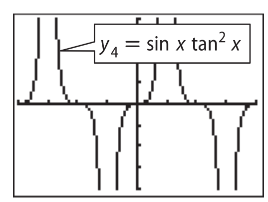
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

.55d نعم؛

$y_2 = \sec x \cos x - \sin x \sec x = \frac{1}{\cos x}\cos x - \sin x \frac{1}{\cos x} = 1 - \frac{\sin x}{\cos x} = 1 - \tan x = -\tan x + 1$

وحيث إن $y_2 = -\tan x + 1$. و $-\tan x + 1 \neq \tan x + 1$ للمجال الكامل لكل دالة. $y_1 \neq y_2$.

$y_4 = \sin x \tan^2 x = \sin x(\sec^2 x - 1) = \sin x \sec^2 x - \sin x$

$= \sin x \times \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x} - \sin x$

$= \tan x \sec x - \sin x$

وحيث إن $y_4 = \tan x \sec x - \sin x = y_3$. $y_3 = y_4$ للمجال الكامل لكل دالة.

62. $A = \frac{1}{2}bc \sin A$

$A^2 = \frac{1}{4}b^2c^2 \sin^2 A$

$A = \sqrt{\frac{1}{4}b^2c^2 \sin^2 A}$

$A = \sqrt{\frac{1}{4}b^2c^2(1 - \cos^2 A)}$

$A = \sqrt{\left[\frac{1}{2}bc(1 + \cos A)\right]\left[\frac{1}{2}bc(1 - \cos A)\right]}$

بواسطة قانون جيب التمام؛ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. إذًا، $\cos A = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$. أعد كتابة كل عامل أسفل الجذر باستخدام هذه القيمة لـ $\cos A$.

$\frac{1}{2}bc(1 + \cos A)$

$= \frac{1}{2}bc\left(1 + \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}\right)$

$= \frac{bc}{2} + \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{4}$

$= \frac{-a^2 + b^2 + 2bc + c^2}{4}$

$= \frac{-a^2 + (b + c)^2}{4}$

$= \frac{(a + b + c)(-a + b + c)}{4}$

$= \frac{a + b + c}{2} \times \frac{-a + b + c}{2}$

$\frac{1}{2}bc(1 - \cos A)$

$= \frac{1}{2}bc\left(1 - \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}\right)$

$= \frac{bc}{2} + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{4}$

$= \frac{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}{4}$

$= \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{4}$

$= \frac{a^2 - (b - c)^2}{4}$

$= \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{4}$

$= \frac{a + b + c}{2} \times \frac{-a + b + c}{2}$

أعد كتابة كل تعبير من هذه التعابير بدلالة s إذا كان $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

$\frac{1}{2}bc(1 + \cos A)$

$= \frac{a + b + c}{2} \times \frac{-a + b + c}{2}$

$= \frac{a + b + c}{2} \times \frac{(a + b + c) - 2a}{2}$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\left[\frac{1}{2}(a + b + c) - a\right]$

$= s(s - a)$

$\frac{1}{2}bc(1 - \cos A)$

$= \frac{a - b + c}{2} \times \frac{a + b - c}{2}$

$= \frac{(a + b + c) - 2b}{2} \times \frac{(a + b + c) - 2c}{2}$

$= \left[\frac{1}{2}(a + b + c) - b\right] \times \left[\frac{1}{2}(a + b + c) - c\right]$

$= (s - b)(s - c)$

بالتعويض،

$A = \sqrt{\left[\frac{1}{2}bc(1 + \cos A)\right]\left[\frac{1}{2}bc(1 - \cos A)\right]}$

$= \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)}.$

2. $\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}$

$$=\frac{\cos x\,(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}+\frac{\cos x\,(1+\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$$
$$=\frac{\cos x-\cos x\sin x}{1-\sin^2 x}+\frac{\cos x+\cos x\sin x}{1-\sin^2 x}$$
$$=\frac{2\cos x}{1-\sin^2 x}$$
$$=\frac{2\cos x}{\cos^2 x}$$
$$=2\sec x$$

3. $\frac{\tan x}{\sec x+1}=\frac{\tan x}{\sec x+1}\times\frac{\sec x-1}{\sec x-1}$

$$=\frac{\tan x\,(\sec x-1)}{\sec^2 x-1}$$
$$=\frac{\tan x\,(\sec x-1)}{\tan^2 x}$$
$$=\frac{\sec x-1}{\tan x}$$
$$=\frac{\sec x}{\tan x}-\frac{1}{\tan x}$$
$$=\frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}}-\frac{1}{\tan x}$$
$$=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}$$
$$=\csc x-\cot x$$

الدرس 4-2

1. $(\sec^2\theta-1)\cos^2\theta=(\tan^2\theta)\cos^2\theta$
$$=\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)\cos^2\theta$$
$$=\sin^2\theta$$

2. $\sec^2\theta\,(1-\cos^2\theta)=\sec^2\theta-\sec^2\theta\cos^2\theta$
$$=\sec^2\theta-1$$
$$=\tan^2\theta$$

3. $\sin\theta-\sin\theta\cos^2\theta=\sin\theta\,(1-\cos^2\theta)$
$$=\sin\theta\sin^2\theta$$
$$=\sin^3\theta$$

4. $\csc\theta-\cos\theta\cot\theta=\frac{1}{\sin\theta}-\cos\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$
$$=\frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}$$
$$=\sin\theta$$

5. $\cot^2\theta\csc^2\theta-\cot^2\theta=\cot^2\theta\,(\csc^2\theta-1)$
$$=\cot^2\theta\cot^2\theta$$
$$=\cot^4\theta$$

63. مهيا.

$$\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\frac{1-(1-\cos^2 x)}{(1-\cos^2 x)-\cos^2 x}$$
$$=\frac{\cos^2 x}{1-2\cos^2 x}$$

64. $\csc x=\frac{1}{\sin x},\ \cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x},$

$\sec x=\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{1-\sin^2 x},\ \tan x=\pm\frac{\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}}{1-\sin^2 x},$

$\cot x=\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$

65. $\sin x=\pm\sqrt{1-\cos^2 x},\ \csc x=\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{1-\cos^2 x},$

$\sec x=\frac{1}{\cos x},\ \tan x=\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x},$

$\cot x=\pm\frac{\cos x\sqrt{1-\cos^2 x}}{1-\cos^2 x}$

66. $\sin x=\pm\frac{\tan x\sqrt{1+\tan^2 x}}{1+\tan^2 x},\ \csc x=\pm\frac{\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan x},$

$\cos x=\pm\frac{\sqrt{1+\tan^2 x}}{1+\tan^2 x},\ \sec x=\pm\sqrt{1+\tan^2 x},\ \cot x=\frac{1}{\tan x}$

69. وفقًا لنظرية فيثاغورس، $x^2+y^2=r^2$. عند قسمة كل جانب من المعادلة على x^2 $1+\frac{y^2}{x^2}=\frac{r^2}{x^2}$.
بما أن $\tan\theta=\frac{y}{x}$ و $1+\frac{y^2}{x^2}=\frac{r^2}{x^2}$, $\sec\theta=\frac{r}{x}$ تتساوى مع
$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ أو $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$.

70. وفقًا لنظرية فيثاغورس، $x^2+y^2=r^2$. عند قسمة كل جانب من المعادلة على $\frac{r^2}{y^2}=\frac{x^2}{y^2}+1$, y^2.
بما أن $\cot\theta=\frac{x}{y}$ و $\frac{r^2}{y^2}=\frac{x^2}{y^2}+1$, $\csc\theta=\frac{r}{y}$ يساوي
$\cot^2\theta+1=\csc^2\theta$ أو $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$.

الدرس 4-2 (تمرين موجه)

1A. $\sec^2\theta\cot^2\theta-1=\frac{1}{\cancel{\cos^2}\theta}\times\frac{\cancel{\cos^2}\theta}{\sin^2\theta}-1$
$$=\frac{1}{\sin^2\theta}-1$$
$$=\csc^2\theta-1$$
$$=\cot^2\theta$$

1B. $\sec\alpha\csc\alpha\tan\alpha-1=\frac{1}{\cos\alpha}\times\frac{1}{\sin\alpha}\times\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-1$
$$=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$$
$$=\sec^2\alpha-1$$
$$=\tan^2\alpha$$

11. $\dfrac{1}{1-\tan^2\theta}+\dfrac{1}{1-\cot^2\theta}=\dfrac{1}{1-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}+\dfrac{1}{1-\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}$

$=\dfrac{1}{\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}+\dfrac{1}{\dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}-\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}$

$=\dfrac{1}{\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}+\dfrac{1}{\dfrac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}$

$=\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}+\dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}+\dfrac{-1}{-1}\times\dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}+\dfrac{-\sin^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$

$=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$

$=1$

12. $\dfrac{1}{\csc\theta+1}+\dfrac{1}{\csc\theta-1}$

$=\dfrac{\csc\theta-1}{\csc\theta-1}\times\dfrac{1}{\csc\theta+1}+\dfrac{\csc\theta+1}{\csc\theta+1}\times\dfrac{1}{\csc\theta-1}$

$=\dfrac{\csc\theta-1}{\csc^2\theta-1}+\dfrac{\csc\theta+1}{\csc^2\theta-1}$

$=\dfrac{2\csc\theta}{\csc^2\theta-1}$

$=\dfrac{2\csc\theta}{\cot^2\theta}$

$=\dfrac{2\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\right)}{\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}$

$=\dfrac{2}{\sin\theta}\times\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}$

$=\left(\dfrac{2}{\cos^2\theta}\right)\sin\theta$

$=2\sec^2\theta\sin\theta$

13. $(\csc\theta-\cot\theta)(\csc\theta+\cot\theta)=\csc^2\theta-\cot^2\theta$

$=1$

14. $\cos^4\theta-\sin^4\theta=(\cos a^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

15. $\dfrac{1}{1-\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\sin\theta}$

$=\dfrac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}\times\dfrac{1}{1-\sin\theta}+\dfrac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}\times\dfrac{1}{1+\sin\theta}$

$=\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin^2\theta}+\dfrac{1-\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

$=\dfrac{2}{1-\sin^2\theta}$

$=\dfrac{2}{\cos^2\theta}$

$=2\sec^2\theta$

6. $\tan\theta\csc^2\theta-\tan\theta=\tan\theta(\csc^2\theta-1)$

$=\tan\theta\cot^2\theta$

$=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$

7. $\dfrac{\sec\theta}{\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\dfrac{1}{\cos\theta}}{\sin\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}-\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$

8. $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}\times\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\dfrac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}\times\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}+\dfrac{1-2\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$

$=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+1-2\cos\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$

$=\dfrac{2-2\cos\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$

$=\dfrac{2(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}$

$=\dfrac{2}{\sin\theta}=2\csc\theta$

9. $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}\times\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}\times\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\dfrac{\cos^2\theta+\sin\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\dfrac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$

10. $\dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{1-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}+\dfrac{\cos\theta}{1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$=\dfrac{\sin\theta}{\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}}+\dfrac{\cos\theta}{\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$=\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}-\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$

$=\dfrac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sin\theta-\cos\theta}$

$=\sin\theta+\cos\theta$

22.
$$\begin{aligned}\frac{1-\tan^2\theta}{1-\cot^2\theta} &= \frac{1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}\\
&= \frac{\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}\\
&= \frac{\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}\\
&= \frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\times\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}\\
&= \frac{\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}\times\frac{1-\cos^2\theta}{(1-\cos^2\theta)-\cos^2\theta}\\
&= \frac{-1+2\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\times\frac{1-\cos^2\theta}{1-2\cos^2\theta}\\
&= \frac{-(1-2\cos^2\theta)(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta\,(1-2\cos^2\theta)}\\
&= \frac{-(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}\\
&= \frac{\cos^2\theta-1}{\cos^2\theta}\end{aligned}$$

23.
$$\begin{aligned}\frac{1+\csc\theta}{\sec\theta} &= \frac{1+\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}}\\
&= \frac{\frac{\sin\theta}{\sin\theta}+\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}}\\
&= \frac{\sin\theta+1}{\sin\theta}\times\frac{\cos\theta}{1}\\
&= \frac{\sin\theta\cos\theta+\cos\theta}{\sin\theta}\\
&= \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\
&= \cos\theta+\cot\theta\end{aligned}$$

24.
$$\begin{aligned}(\csc\theta-\cot\theta)^2 &= \csc^2\theta-2\csc\theta\cot\theta+\cot^2\theta\\
&= \frac{1}{\sin^2\theta}-\frac{2}{\sin\theta}\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\\
&= \frac{1-2\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\\
&= \frac{1-2\cos\theta+\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}\\
&= \frac{(1-\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}\\
&= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned}&\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\\
&= \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\times\frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\times\frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}\\
&= \frac{\cos\theta\,(1-\sin\theta)+\cos\theta\,(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}\\
&= \frac{\cos\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta}{1-\sin^2\theta}\\
&= \frac{2\cos\theta}{\cos^2\theta}\\
&= \frac{2}{\cos\theta}\\
&= 2\sec\theta\end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned}&\csc^4\theta-\cot^4\theta\\
&= (\csc^2\theta-\cot^2\theta)(\csc^2\theta+\cot^2\theta)\\
&= [\csc^2\theta-(\csc^2\theta-1)][\csc^2\theta+(\csc^2\theta-1)]\\
&= 2\csc^2\theta-1\\
&= 2(\cot^2\theta+1)-1\\
&= 2\cot^2\theta+2-1\\
&= 2\cot^2\theta+1\end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned}\frac{\csc^2\theta+2\csc\theta-3}{\csc^2\theta-1} &= \frac{(\csc\theta+3)(\csc\theta-1)}{(\csc\theta+1)(\csc\theta-1)}\\
&= \frac{\csc\theta+3}{\csc\theta+1}\end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned}&(\csc\theta+\cot\theta)(1-\cos\theta)\\
&= \csc\theta-\csc\theta\cos\theta+\cot\theta-\cot\theta\cos\theta\\
&= \frac{1}{\sin\theta}-\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\cos\theta+\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\theta\\
&= \frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\\
&= \frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta}\\
&= \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}\\
&= \sin\theta\end{aligned}$$

21.
$$\begin{aligned}\tan^2\theta-\sin^2\theta &= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta\\
&= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-(\sin^2\theta)\left(\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right)\\
&= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\\
&= \frac{\sin^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\\
&= \frac{\sin^2\theta\,(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}\\
&= \frac{\sin^2\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\\
&= \sin^2\theta\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)\\
&= \sin^2\theta\tan^2\theta\end{aligned}$$

25. $$\frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$
$$=\frac{\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$
$$=\frac{\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$
$$=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\times\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$
$$=\frac{1}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$
$$=\frac{1}{\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)}$$
$$=\frac{1}{2\cos^2\theta-1}$$

26. $$\tan^2\theta\cos^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\times\cos^2\theta$$
$$=\sin^2\theta$$
$$=1-\cos^2\theta$$

27. $$\sec\theta-\cos\theta=\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta$$
$$=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}$$
$$=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$
$$=\tan\theta\sin\theta$$

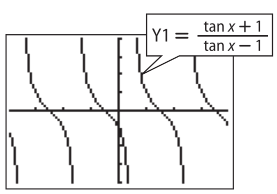
28. $$1-\tan^4\theta=(1-\tan^2\theta)(1+\tan^2\theta)$$
$$=[1-(\sec^2\theta-1)](\sec^2\theta)$$
$$=(2-\sec^2\theta)(\sec^2\theta)$$
$$=2\sec^2\theta-\sec^4\theta$$

29. $$(\csc\theta-\cot\theta)^2=\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$
$$=\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$
$$=\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$$
$$=\frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}$$
$$=\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$
$$=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

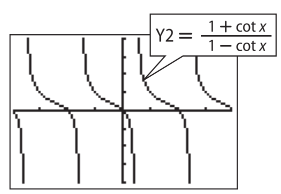
30. $$\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta+\cos\theta}$$
$$=\frac{\frac{\cos\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta+\cos\theta}$$
$$=\frac{\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta+\cos\theta}$$
$$=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

31. $$\frac{2+\csc\theta\sec\theta}{\csc\theta\sec\theta}=\frac{2}{\csc\theta\sec\theta}+1$$
$$=2\times\frac{1}{\csc\theta}\times\frac{1}{\sec\theta}+1$$
$$=2\sin\theta\cos\theta+(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$
$$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=(\sin\theta+\cos\theta)^2$$

34.



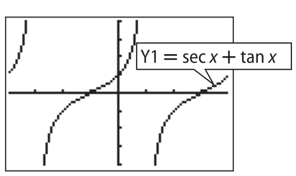
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1



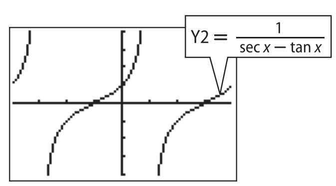
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

عندما تكون $x = \pi$، $Y1 = -1$ و Y2 غير محددة؛ فعندئذ لا تمثل المعادلة متطابقة.

35.



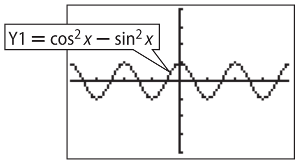
$-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1



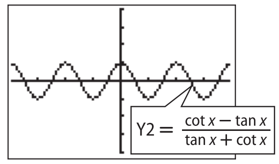
$-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

$$\frac{1}{\sec x-\tan x}=\frac{1}{\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}}$$
$$=\frac{1}{\frac{1-\sin x}{\cos x}}$$
$$=\frac{\cos x}{1-\sin x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}$$
$$=\frac{\cos x+\sin x\cos x}{1-\sin^2 x}$$
$$=\frac{\cos x+\sin x\cos x}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}$$
$$=\sec x+\tan x$$

39.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

$$\frac{\cot x - \tan x}{\tan x + \cot x} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x} - \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x}}{\frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x}}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x}}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}}$$

$$= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x}$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

40. $\sqrt{\dfrac{\sin x \tan x}{\sec x}} = \sqrt{\dfrac{\sin x\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{\frac{1}{\cos x}}}$

$$= \sqrt{\frac{\frac{\sin^2 x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}}}$$

$$= \sqrt{\sin^2 x}$$

$$= |\sin x|$$

41. $\sqrt{\dfrac{\sec x - 1}{\sec x + 1}} = \sqrt{\dfrac{\sec x - 1}{\sec x + 1}} \times \sqrt{\dfrac{\sec x - 1}{\sec x - 1}}$

$$= \sqrt{\frac{(\sec x - 1)^2}{\sec^2 x - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\sec x - 1)^2}{\tan^2 x}}$$

$$= \left|\frac{\sec x - 1}{\tan x}\right|$$

42. $\ln|\csc x + \cot x| + \ln|\csc x - \cot x| = \ln|\csc^2 x - \cot^2 x|$

$$= \ln|1|$$

$$= 0$$

43. $\ln|\cot x| + \ln|\tan x \cos x| = \ln\left|\dfrac{\cos x}{\sin x}\right| + \ln\left|\dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x\right|$

$$= \ln\left|\frac{\cos x}{\sin x} \times \sin x\right|$$

$$= \ln|\cos x|$$

44. $\sec^4 \theta - \tan^4 \theta = (\sec^2 \theta + \tan^2 \theta)(\sec^2 \theta - \tan^2 \theta)$

$$= \sec^2 \theta + \tan^2 \theta$$

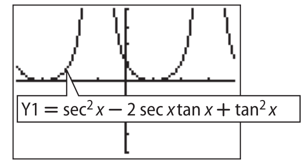
45. $\sin^4\theta - \cos^4\theta - 1 = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) - 1$

$$= (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) - 1$$

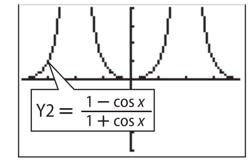
$$= 1 - \cos^2 \theta - \cos^2 \theta - 1$$

$$= -2\cos^2 \theta$$

36.



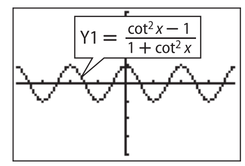
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1



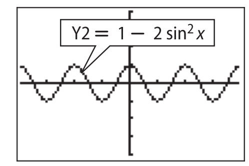
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

عندما تكون $x = 0$، $Y1 = 1$ و $Y2 = 0$؛ إذًا، لا تكون المعادلة متطابقة.

37.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

$$\frac{\cot^2 x - 1}{1 + \cot^2 x} = \frac{\cot^2 x - 1}{\csc^2 x}$$

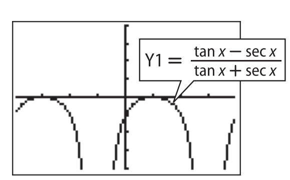
$$= \frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - 1}{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

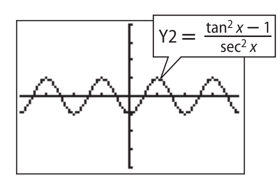
$$= (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$$

$$= 1 - 2\sin^2 x$$

38.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

في حالة $x = \frac{\pi}{4}$، $Y1 \approx -0.17$ و $Y2 = 0$؛ إذًا، لا تكون المعادلة متطابقة.

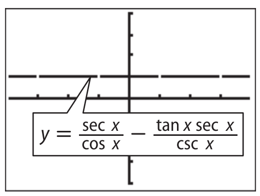
54. $\cosh(-x) = \frac{1}{2}[e^{-x} + e^{-(-x)}]$

$= \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x})$

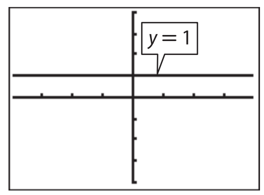
$= \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$

$= \cosh x$

55.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

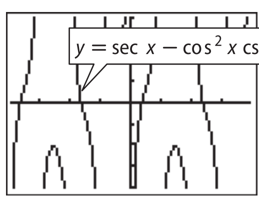
$\frac{\sec x}{\cos x} - \frac{\tan x \sec x}{\csc x} = \frac{1}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x} - \frac{\frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\sin x}}$

$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

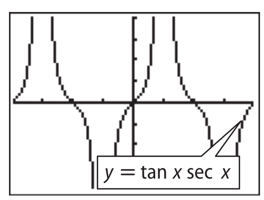
$= \sec^2 x - \tan^2 x$

$= 1$

56.



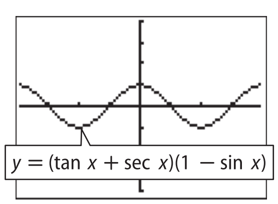
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1



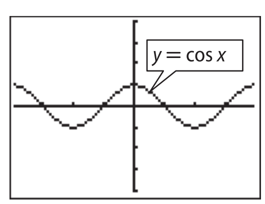
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

$\sec x - \cos^2 x \csc x \neq \tan x \sec x$

57.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

$(\tan x + \sec x)(1 - \sin x)$

$= \tan x - \tan x \sin x + \sec x - \sec x \sin x$

$= \tan x - \frac{\sin x}{\cos x} \times \sin x + \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} \times \sin x$

$= \tan x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} - \tan x$

$= \frac{1}{\cos x} + \frac{-\sin^2 x}{\cos x}$

$= \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x}$

$= \frac{\cos^2 x}{\cos x}$

$= \cos x$

46. $\sec^4\theta - (\tan^4\theta + \sec^2\theta)$

$= (\sec^4\theta - \tan^4\theta) - \sec^2\theta$

$= (\sec^2\theta - \tan^2\theta)(\sec^2\theta + \tan^2\theta) - \sec^2\theta$

$= \sec^2\theta + \tan^2\theta - \sec^2\theta$

$= \tan^2\theta$

$= \sec^2\theta \sin^2\theta$

47. $\sec^6\theta - \tan^6\theta = (\sec^3\theta - \tan^3\theta)(\sec^3\theta + \tan^3\theta)$

$= (\sec\theta - \tan\theta)(\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta + \tan^2\theta) \cdot$
$(\sec\theta + \tan\theta)(\sec^2\theta - \sec\theta\tan\theta + \tan^2\theta)$

$= (\sec^2 - \tan^2\theta)[(1 + \tan^2\theta) + \sec\theta\tan\theta + \tan^2\theta] \cdot$
$[(1 + \tan^2\theta) - \sec\theta\tan\theta + \tan^2\theta]$

$= (1 + 2\tan^2\theta + \sec\theta\tan\theta)(1 + 2\tan^2\theta - \sec\theta\tan\theta)$

$= (1 + 2\tan^2\theta)^2 - (\sec\theta\tan\theta)^2$

$= 1 + 4\tan^2\theta + 4\tan^4\theta - \sec^2\theta\tan^2\theta$

$= 1 + \tan^2\theta\,(4 + 4\tan^2\theta - \sec^2\theta)$

$= 1 + \tan^2\theta\,[4 + 4(\sec^2\theta - 1) - \sec^2\theta]$

$= 1 + \tan^2\theta\,(4 + 4\sec^2\theta - 4 - \sec^2\theta)$

$= 1 + \tan^2\theta\,(3\sec^2\theta)$

$= 1 + 3\tan^2\theta\sec^2\theta$

$= 3\sec^2\theta\tan^2\theta + 1$

48. $1 + 2\tan^2 x + \tan^4 x = 1 + 2(\sec^2 x - 1) + (\sec^2 x - 1)^2$

$= 1 + 2\sec^2 x - 2 + \sec^4 x - 2\sec^2 x + 1$

$= \sec^4 x$

49. $\sec^2 x \csc^2 x = (\tan^2 x + 1)\csc^2 x$

$= \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1\right)\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)$

$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$

$= \sec^2 x + \csc^2 x$

51. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2$

$= \frac{1}{4}[e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})]$

$= \frac{1}{4}(4)$

$= 1$

52. $\sinh(-x) = \frac{1}{2}[e^{-x} - e^{-(-x)}]$

$= \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x})$

$= \frac{1}{2}(-e^{x} + e^{-x})$

$= -\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$

$= -\sinh x$

53. $1 - \tanh^2 x = 1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}$

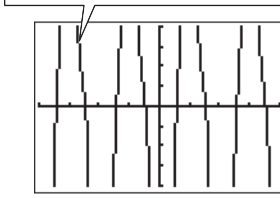
$= \frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x} - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}$

$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}$

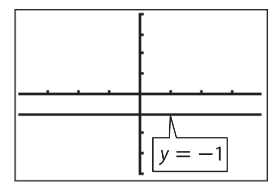
$= \frac{1}{\cosh^2 x}$

$= \text{sech}^2 x$

58. $y = \dfrac{\sec x \cos x}{\cot^2 x} - \dfrac{1}{\tan^2 x - \sin^2 x \tan^2 x}$



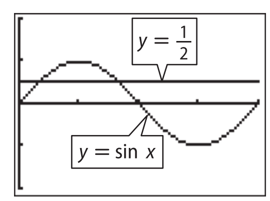
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

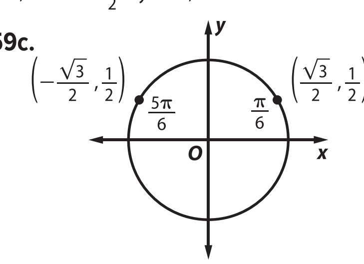
$$\frac{\sec x \cos x}{\cot^2 x} - \frac{1}{\tan^2 x - \sin^2 x \tan^2 x} \neq -1$$

59b. التمثيلات البيانية لـــ $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{2}$ لوغاريتم عند $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ على الفترة $[0, 2\pi)$.

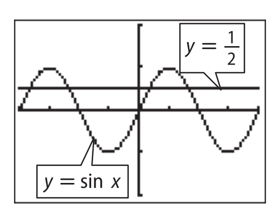


$[0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 1

59c.



59d. التمثيلات البيانية لـــ $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{2}$ تتقاطع عند $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ على $(-2\pi, 2\pi)$.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 1

59e. الإجابة النموذجية: بما أن جيب الزاوية دالة دورية. فإن حلول $\sin x = \frac{1}{2}$ هي $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ و $x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$، حيث يكون n عددًا صحيحًا.

60. الإجابة النموذجية: يمكن استخدام طريقة التعويض لتحديد ما إذا كانت المعادلة *ليست* متطابقة. رغم ذلك، لا يمكن استخدام هذه الطريقة لتحديد ما إذا كانت المعادلة متطابقة، لعدم وجود وسيلة للبرهنة على أن المتطابقة صحيحة للمجال بالكامل.

61. استخدام قانون الجيب. $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}$. إذًا $b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$.

$$A = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$$
$$A = \frac{1}{2}a\left(\frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}\right) \sin \gamma$$
$$A = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$$
$$A = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin [180° - (\beta + \gamma)]}$$
$$A = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin (\beta + \gamma)}$$

62. الإجابة النموذجية: وفقًا لخاصية ناتج ضرب اللوغاريتمات، فإن مجموع لوغاريتمات الدوال المثلثية الأساسية يتساوى مع لوغاريتم ناتج الضرب. بما أن ناتج ضرب القيم المطلقة للدوال هو 1، فإن مجموع اللوغاريتمات هو $\ln 1$ أو 0.

63. الإجابات النموذجية: $\tan x \sin x + \cos x = \sec x$ و $\sin x + \cot x \cos x = \csc x$

$$\tan x \sin x + \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \times \sin x + \cos x$$
$$= \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x$$
$$= \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} + \cos x$$
$$= \frac{1}{\cos x} - \cos x + \cos x$$
$$= \frac{1}{\cos x}$$
$$= \sec x$$

$$\sin x + \cot x \cos x = \sin x + \frac{\cos x}{\sin x} \times \cos x$$
$$= \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$
$$= \sin x + \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x}$$
$$= \sin x + \frac{1}{\sin x} - \sin x$$
$$= \frac{1}{\sin x}$$
$$= \csc x$$

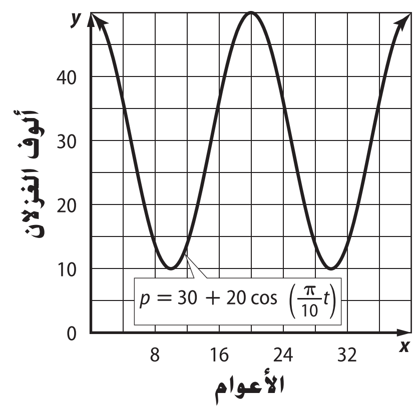
64. نعم؛ الإجابة النموذجية: إذ كانت α و β زاويتين متتامتين، فإن $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \cos^2 \alpha + \cos^2 (90° - \alpha) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$

65. الإجابة النموذجية: يمكنك البدء على الجانب الأيسر من المتطابقة وتحويلها لأبسط صورة بأكبر قدر ممكن. ثم يمكنك الانتقال إلى الجانب الأيمن والتحويل لأبسط صورة حتى تتطابق مع الجانب الأيسر.

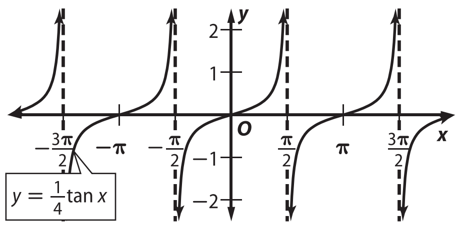
66. $\dfrac{1}{\sec^2\theta} + \dfrac{1}{\csc^2\theta} = \cos^2\theta + \sin^2\theta$

$= 1$

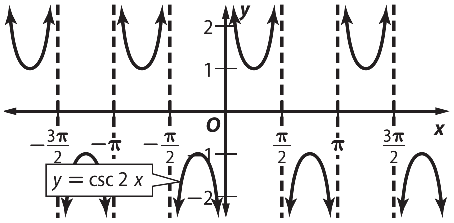
70c. عدد الغزلان



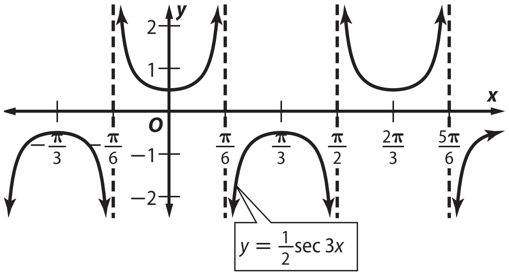
73.



74.



75.



الدرس 4-3

63. الإجابة النموذجية: عند حل معادلة، ستستخدم خواص المعادلة لاستخدام كل جانب من المعادلة لعزل متغير. عند إثبات صحة المتطابقة؛ فإنك تحوّل إحدى التعبيرات الموجودة على أحد جوانب المتطابقة إلى التعبير الموجود على الجانب الآخر من خلال عدة خطوات جبرية.

64. $\dfrac{\cot^2\theta}{\csc\theta - 1} = \dfrac{\cot^2\theta}{\csc\theta - 1} \cdot \dfrac{\csc\theta + 1}{\csc\theta + 1}$

$= \dfrac{\cot^2\theta\,(\csc\theta + 1)}{\csc^2\theta - 1}$

$= \dfrac{\cot^2\theta\,(\csc\theta + 1)}{\cot^2\theta}$

$= \csc\theta + 1$

$= \dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}$

$= \dfrac{1 + \sin\theta}{\sin\theta}$

65. $\dfrac{1 + \tan\theta}{1 + \cot\theta} = \dfrac{1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$

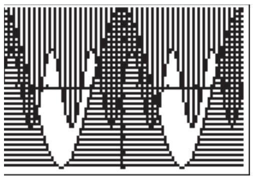
$= \dfrac{\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta}}$

$= \dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\cos\theta} \cdot \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$

$= \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

التوسع 4-3

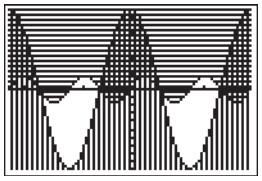
1.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.2

$-1.26 + n\pi < x < 1.88 + n\pi$

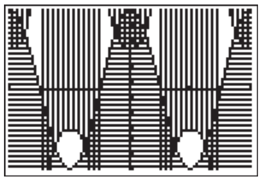
2.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-3, 3]$ scl: 0.3

$-\frac{\pi}{2} + n\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + n\pi$

3.



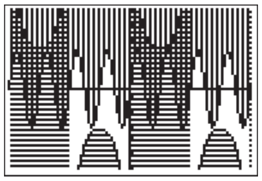
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.2

$-\frac{\pi}{4} + 2n\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2n\pi;$

$\frac{\pi}{2} + 2n\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2n\pi;$

$\frac{5\pi}{4} + 2n\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

4.



$[-\pi, \pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-2, 2]$ scl: 0.2

$0 + n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$

13. $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \frac{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$= \frac{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$= \frac{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$

$= \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \sec\theta - \tan\theta$

14. $\frac{\csc\theta}{\sin\theta} + \frac{\cot\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{\sin\theta}}{\sin\theta} + \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\cos\theta}$

$= \frac{1}{\sin\theta}\times\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\times\frac{1}{\cos\theta}$

$= \frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\sin\theta}$

$= \csc^2\theta + \csc\theta$

$= \cot^2\theta + 1 + \csc\theta$

$= \cot^2\theta + \csc\theta + 1$

15. $\frac{1+\sin\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}$

$= \frac{1+\sin\theta}{\sin\theta}\times\frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}\times\frac{\sin\theta}{\sin\theta}$

$= \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta\,(1-\sin\theta)} + \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\,(1-\sin\theta)}$

$= \frac{1}{\sin\theta\,(1-\sin\theta)}$

$= \frac{\csc\theta}{1-\sin\theta}$

الدرس 4-4

32. $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

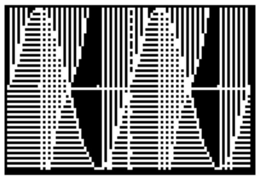
$= \frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x}{\cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x}$

$= \frac{1(\cos x) - 0(\sin x)}{0(\cos x) + 1(\sin x)}$

$= \frac{\cos x}{\sin x}$

$= \cot x$

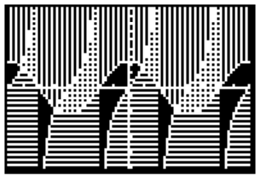
5.



$[-\pi, \pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-3, 3]$ scl: 0.3

$\frac{\pi}{4} + n\pi < x < \frac{\pi}{2} + n\pi$

6.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{4}$ by $[-3, 3]$ scl: 0.3

$0.67 + 2n\pi \le x < \frac{\pi}{2} + 2n\pi$; $2.48 + 2n\pi \le x < \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$

اختبار نصف الوحدة

10. $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

$= \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\times\frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\times\frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}$

$= \frac{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta\,(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$= \frac{\cos\theta\,(1-\sin\theta) - \cos\theta\,(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$= \frac{\cos\theta - \cos\theta\sin\theta - \cos\theta - \cos\theta\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

$= -\frac{2\cos\theta\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

$= -\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta}$

$= -\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}$

$= -2\tan\theta$

11. $\csc^2\theta - \sin^2\theta - \cos^2\theta - \cot^2\theta$

$= \csc^2\theta - (\sin^2\theta + \cos^2\theta + \cot^2\theta)$

$= \csc^2\theta - (1 + \cot^2\theta)$

$= \csc^2\theta - \csc^2\theta$

$= 0$

12. $\sin\theta + \frac{\cos\theta}{\tan\theta} = \sin\theta + \frac{\cos\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$= \sin\theta + \cos\theta\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \sin\theta + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$

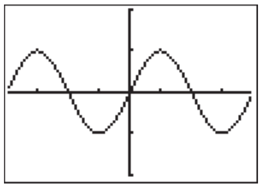
$= \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$

$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta}$

$= \frac{1}{\sin\theta}$

$= \csc\theta$

50.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 1

يبدو أن الدالة متساوية مع $y = \sin x$.

$\frac{1}{2}[\sin(x + 2\pi) + \sin(x - 2\pi)]$

$= \frac{1}{2}[(\sin x \cos 2\pi + \cos x \sin 2\pi) +$

$(\sin x \cos 2\pi - \cos x \sin 2\pi)]$

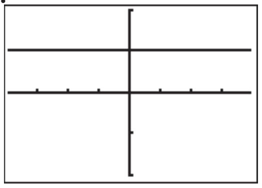
$= \frac{1}{2}(2 \sin x \cos 2\pi)$

$= \sin x \cos 2\pi$

$= \sin x\,(1)$

$= \sin x$

51.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 1

يبدو أن الدالة متساوية مع $y = 1$.

$\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}\right)^2 +$

$\left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4}\right)^2$

$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right)^2$

$= \frac{1}{2}\cos^2 x - \sin x \cos x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{2}\cos^2 x +$

$\sin x \cos x + \frac{1}{2}\sin^2 x$

$= \cos^2 x + \sin^2 x$

$= 1$

52. $\cos(x + y) = \cos(\pi - z)$

$= \cos \pi \cos z + \sin \pi \sin z$

$= -1(\cos z) + 0$

$= -\cos z$

53. $\sin z = \sin[\pi - (x + y)]$

$= \sin \pi \cos(x + y) - \cos \pi \sin(x + y)$

$= 0 \times \cos(x + y) - [(-1) \sin(x + y)]$

$= \sin(x + y)$

$= \sin x \cos y + \cos x \sin y$

33. $\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$= \dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

$= \dfrac{1}{\cos \frac{\pi}{2} \cos x + \sin \frac{\pi}{2} \sin x}$

$= \dfrac{1}{0(\cos x) + 1(\sin x)}$

$= \dfrac{1}{\sin x}$

$= \csc x$

34. $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

$= \dfrac{\cos \frac{\pi}{2} \cos x + \sin \frac{\pi}{2} \sin x}{\sin \frac{\pi}{2} \cos x - \cos \frac{\pi}{2} \sin x}$

$= \dfrac{0(\cos x) + 1(\sin x)}{1(\cos x) - 0(\sin x)}$

$= \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

46. $\dfrac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y} = \dfrac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y}$

$= \dfrac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} - \dfrac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}$

$= \dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\sin y}{\cos y}$

$= \tan x - \tan y$

47. $\dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = \dfrac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta}$

$= \dfrac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \cos \beta} - \dfrac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta}$

$= \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \dfrac{\sin \beta}{\cos \beta}$

$= \cot \alpha - \tan \beta$

48. $\dfrac{(\tan u - \tan v)}{(\tan u + \tan v)} = \dfrac{\frac{\sin u}{\cos u} - \frac{\sin v}{\cos v}}{\frac{\sin u}{\cos u} + \frac{\sin v}{\cos v}}$

$= \dfrac{\frac{\sin u \cos v}{\cos u \cos v} - \frac{\sin v \cos u}{\cos u \cos v}}{\frac{\sin u \cos v}{\cos u \cos v} + \frac{\sin v \cos u}{\cos u \cos v}}$

$= \dfrac{\sin u \cos v - \sin v \cos u}{\sin u \cos v + \sin v \cos u}$

$= \dfrac{\sin(u - v)}{\sin(u + v)}$

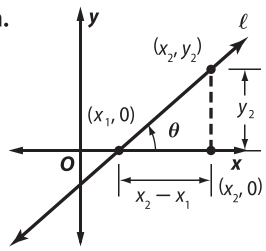
49. $\sin(a + b) + \sin(a - b)$

$= \sin a \cos b + \cos a \sin b + \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$= 2 \sin a \cos b$

$2 \sin a \cos b =$

56a.



$$\ell = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{ميل}$$
$$= \frac{y_2 - 0}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{y_2}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{\text{الضلع المقابل لـ } \theta}{\text{الضلع المجاور لـ } \theta}$$
$$= \tan \theta$$

56b. $\tan \theta_1 = m_1, \tan \theta_2 = m_2$

$$\tan \gamma = \tan (\theta_2 - \theta_1)$$
$$\tan \gamma = \frac{\tan \theta_2 - \tan \theta_1}{1 + \tan \theta_2 \tan \theta_1}$$
$$\tan \gamma = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$
$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right)$$

57. $\tan (\alpha + \beta) = \dfrac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos (\alpha + \beta)}$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$
$$= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}$$
$$= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}$$
$$= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

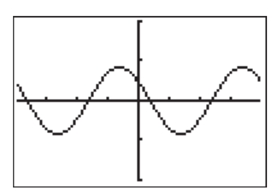
58. $\tan (\alpha - \beta) = \dfrac{\sin (\alpha - \beta)}{\cos (\alpha - \beta)}$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}$$
$$= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}$$
$$= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}$$
$$= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

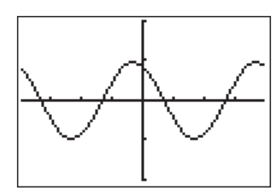
54. $\tan x + \tan y + \tan z$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} + \frac{\sin z}{\cos z}$$
$$= \frac{\sin x \cos y \cos z}{\cos x \cos y \cos z} + \frac{\sin y \cos x \cos z}{\cos x \cos y \cos z} + \frac{\sin z \cos x \cos y}{\cos x \cos y \cos z}$$
$$= \frac{\cos z (\sin x \cos y + \sin y \cos x)}{\cos x \cos y \cos z} + \frac{\sin z \cos x \cos y}{\cos x \cos y \cos z}$$
$$= \frac{\cos z \sin (x + y)}{\cos x \cos y \cos z} + \frac{\sin z \cos x \cos y}{\cos x \cos y \cos z}$$
$$= \frac{\cos z \sin (x + y)}{\cos x \cos y \cos z} + \frac{\sin z (\cos x \cos y - \sin x \sin y + \sin x \sin y)}{\cos x \cos y \cos z}$$
$$= \frac{\cos z \sin (x + y)}{\cos x \cos y \cos z} + \frac{\sin z [\cos (x + y) + \sin x \sin y]}{\cos x \cos y \cos z}$$
$$= \frac{\cos z \sin (\pi - z)}{\cos x \cos y \cos z} + \frac{\sin z [\cos (\pi - z) + \sin x \sin y]}{\cos x \cos y \cos z}$$
$$= \frac{\cos z (\sin \pi \cos z - \cos \pi \sin z)}{\cos x \cos y \cos z} + \frac{\sin z [(\cos \pi \cos z + \sin \pi \sin z) + \sin x \sin y]}{\cos x \cos y \cos z}$$
$$= \frac{\cos z [0 \times \cos z - (-1) \sin z]}{\cos x \cos y \cos z} + \frac{\sin z \{[(-1) \cos z + 0 \times \sin z] + \sin x \sin y\}}{\cos x \cos y \cos z}$$
$$= \frac{\cos z \sin z - \cos z \sin z + \sin x \sin y \sin z}{\cos x \cos y \cos z}$$
$$= \frac{\sin x \sin y \sin z}{\cos x \cos y \cos z}$$
$$= \tan x \tan y \tan z$$

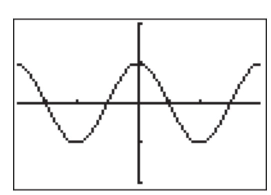
55b.



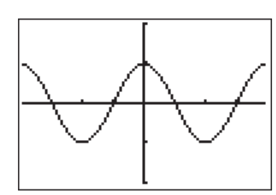
$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 1



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 1

59. $\sin(\alpha+\beta) = \cos[90° - (\alpha+\beta)]$

$= \cos[(90° - \alpha) - \beta]$

$= \cos(90° - \alpha)\cos\beta + \sin(90° - \alpha)\sin\beta$

$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

60. $\sin(\alpha-\beta) = \sin[\alpha + (-\beta)]$

$= \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta)$

$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

61. $\sin(x+y+z)$

$= \sin[(x+y)+z]$

$= \sin(x+y)\cos z + \cos(x+y)\sin z$

$= (\sin x\cos y + \cos x\sin y)\cos z + (\cos x\cos y - \sin x\sin y)\sin z$

$= \sin x\cos y\cos z + \cos x\sin y\cos z + \cos x\cos y\sin z - \sin x\sin y\sin z$

62. $\dfrac{\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{9}$

63. $\dfrac{-2-2\sqrt{10}}{9}$

64. $\dfrac{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}$

65a. $\sin 3x\cos 2x = \cos 3x\sin 2x$

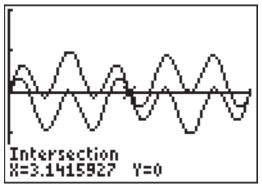
$\sin 3x\cos 2x - \cos 3x\sin 2x = 0$

$\sin(3x-2x) = 0$

$\sin x = 0$

$x = 0$ و $x = \pi$

65b.



$[-0, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 1

66. $\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

$= \dfrac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h}$

$= \dfrac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x\sin h}{h}$

$= \sin x\left(\dfrac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\dfrac{\sin h}{h}\right)$

67. $\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \dfrac{\cos x\cos h - \sin x\sin h - \cos x}{h}$

$= \dfrac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x\sin h}{h}$

$= \cos x\left(\dfrac{\cos h - 1}{h}\right) - \sin x\left(\dfrac{\sin h}{h}\right)$

.68 لا. الإجابة النموذجية: يمكن استخدام متطابقة ظل المجموع أو الفرق لحل صيغة انخفاض لدالة الظل طالما أن الزاوية ليست أحد مضاعفات $\frac{\pi}{2}$ راديان. لأن $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ غير موجود.

70. $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\cos^2\theta}$

$= \dfrac{1}{\cos\theta}$

$= \sec\theta$

71. $\dfrac{\sec\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta} - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta} - \dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$= \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$= \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \cot\theta$

الدرس 4-5

63. $\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta)$

$= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta$

$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$

64. $\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta)$

$= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta$

$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta)$

$= 2\cos^2 - 1$

65. $\tan 2\theta = \tan(\theta+\theta)$

$= \dfrac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan\theta\tan\theta}$

$= \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

.66 افترض أن $x = \dfrac{\theta}{2}$

$\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\left(2\times\frac{\theta}{2}\right)}{2}}$

$= \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}$

$= \pm\sqrt{\sin^2 x}$

$= \sin x$

$= \sin\dfrac{\theta}{2}$

.67 افترض أن $x = \frac{\theta}{2}$.

$$\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\left(2\times\frac{\theta}{2}\right)}{1+\cos\left(2\times\frac{\theta}{2}\right)}}$$
$$= \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$$
$$= \pm\sqrt{\tan^2 x}$$
$$= \tan x$$
$$= \tan\frac{\theta}{2}$$

.68 افترض أن $x = \frac{\theta}{2}$.

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\sin\left(2\times\frac{\theta}{2}\right)}{1+\cos\left(2\times\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$= \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$$
$$= \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x-\sin^2 x}$$
$$= \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x-(1-\cos^2 x)}$$
$$= \frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}$$
$$= \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$= \tan x$$
$$= \tan\frac{\theta}{2}$$

69. i. $2\cos^2 5\theta - 1 = 2\left[\frac{1}{2}(1+\cos 10\theta)\right] - 1$
$$= 1 + \cos 10\theta - 1$$
$$= \cos 10\theta$$

ii. $2\cos^2 5\theta - 1 = 2\cos 5\theta\cos 5\theta - 1$
$$= 2\left\{\frac{1}{2}[\cos(5\theta-5\theta)+\cos(5\theta+5\theta)]\right\} - 1$$
$$= (\cos 0 + \cos 10\theta) - 1$$
$$= 1 + \cos 10\theta - 1$$
$$= \cos 10\theta$$

70. i. $\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 4\theta) - \frac{1}{2}(1-\cos 4\theta)$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\theta$$
$$= \cos 4\theta$$

ii. $\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = \cos 2\theta\cos 2\theta - \sin 2\theta\sin 2\theta$
$$= \frac{1}{2}[\cos(2\theta-2\theta)+\cos(2\theta+2\theta)]$$
$$-\frac{1}{2}[\cos(2\theta-2\theta)-\cos(2\theta+2\theta)]$$
$$= \frac{1}{2}(\cos 0+\cos 4\theta) - \frac{1}{2}(\cos 0-\cos 4\theta)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\theta - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\theta$$
$$= \cos 4\theta$$

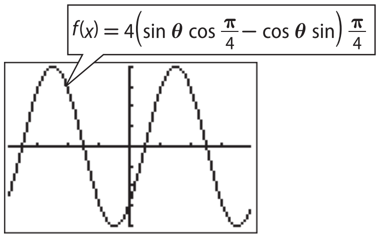
71. $\frac{1}{16}[5 - 7\cos 2\theta + 3\cos 4\theta - \cos 2\theta\cos 4\theta]$

72. $\frac{1}{128}(35 - 48\cos 2\theta + 28\cos 4\theta + \cos 8\theta - 16\cos 2\theta\cos 4\theta)$

73. $\frac{1}{16}(5\cos\theta + 7\cos\theta\cos 2\theta + 3\cos\theta\cos 4\theta + \cos\theta\cos 2\theta\cos 4\theta)$

74. $\frac{1}{128}(3 - 4\cos 4\theta + \cos 8\theta)$

75a.

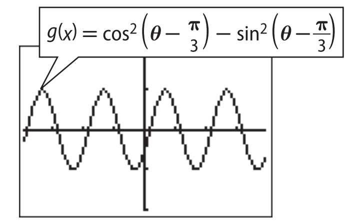


$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-4, 4]$ scl: 1

.75b $h(x) = 4\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$؛

$4\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$، متطابقة جيب زاوية الفرق

75c.



$[-2\pi, 2\pi]$ scl: $\frac{\pi}{2}$ by $[-2, 2]$ scl: 1

75d. $k(x) = \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$;

$\cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left[2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$

76. $\sin 2\theta \cos\theta - \cos 2\theta \sin\theta$

$= 2\sin\theta\cos\theta\cos\theta - (1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta$

$= 2\sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)$

$= 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) - \sin\theta(1 - \sin^2\theta)$

$= 2\sin\theta - 2\sin^3\theta - \sin\theta + 2\sin^3\theta$

$= \sin\theta$

80. $\sin 4\theta = \sin 2(2\theta)$

$= 2\sin 2\theta\cos 2\theta$

$= 2(2\sin\theta\cos\theta)(1 - 2\sin^2\theta)$

$= 2(2\sin\theta\cos\theta - 4\sin^3\theta\cos\theta)$

$= 4\sin\theta\cos\theta - 8\sin^3\theta\cos\theta$

81. $\cos 4\theta = \cos 2(2\theta)$

$= 1 - 2\sin^2 2\theta$

$= 1 - 2(\sin 2\theta)(\sin 2\theta)$

$= 1 - 2(2\sin\theta\cos\theta)(2\sin\theta\cos\theta)$

$= 1 - 8\sin^2\theta\cos^2\theta$

82. $\frac{1 + \cos 2\theta}{2} = \frac{1 + (2\cos^2\theta - 1)}{2}$

$= \frac{2\cos^2\theta}{2}$

$= \cos^2\theta$

83. $\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$= \frac{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$

$= \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$

84. $\frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$

$= \frac{1}{2}(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta +$
$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$

$= \frac{1}{2}(2\cos\alpha\cos\beta)$

$= \cos\alpha\cos\beta$

85. $\frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

$= \frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\beta +$
$\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$

$= \frac{1}{2}(2\sin\alpha\cos\beta)$

$= \sin\alpha\cos\beta$

86. $\frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] = \frac{1}{2}[\sin\alpha\cos\beta +$
$\cos\alpha\sin\beta - (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)]$

$= \frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta +$
$\cos\alpha\sin\beta)$

$= \frac{1}{2}(2\cos\alpha\sin\beta)$

$= \cos\alpha\sin\beta$

.87 افترض أن $x = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ وافترض أن $y = \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$،

$2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = 2\cos x\cos y$

$= 2\left\{\frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]\right\}$

$= \cos(x + y) + \cos(x - y)$

$= \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

$= \cos\alpha + \cos\beta$

.88 افترض أن $x = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ وافترض أن $y = \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$،

$2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = 2\cos x\sin y$

$= 2\left\{\frac{1}{2}[\sin(x + y) - \sin(x - y)]\right\}$

$= \sin(x + y) - \sin(x - y)$

$= \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

$= \sin\alpha - \sin\beta$

.89 افترض أن $x = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ وافترض أن $y = \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$،

$-2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = -2\sin x\sin y$

$= -2\left\{\frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]\right\}$

$= -\cos(x - y) + \cos(x + y)$

$= -\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

$= -\cos\beta + \cos\alpha$

$= \cos\alpha - \cos\beta$

UAE_Math_Grade11_ADVM_T_C04_v2_718375.indb 15 12/15/2016 8:10:39 PM

27. $\dfrac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = \dfrac{\cot^2\theta\,(1-\csc\theta)}{(1+\csc\theta)(1-\csc\theta)}$

$= \dfrac{\cot^2\theta\,(1-\csc\theta)}{1-\csc^2\theta}$

$= \dfrac{\cot^2\theta\,(1-\csc\theta)}{-\cot^2\theta}$

$= -(1-\csc\theta)$

$= \csc\theta - 1$

28. $\dfrac{\sec\theta}{\tan\theta} + \dfrac{\csc\theta}{\cot\theta} = \dfrac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} + \dfrac{\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$

$= \dfrac{1}{\cos\theta}\times\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} + \dfrac{1}{\sin\theta}\times\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta}$

$= \csc\theta + \sec\theta$

29. $\dfrac{\sec\theta+\csc\theta}{1+\tan\theta} = \dfrac{\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$= \dfrac{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}}{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta}}$

$= \dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}\times\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$

$= \dfrac{1}{\sin\theta}$

$= \csc\theta$

30. $\cot\theta\csc\theta + \sec\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\times\dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta}$

$= \dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta}$

$= \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos\theta} + \dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta\cos\theta}$

$= \dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin^2\theta\cos\theta}$

$= \dfrac{1}{\sin^2\theta\cos\theta}$

$= \csc^2\theta\sec\theta$

31. $\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \dfrac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}$

$= \dfrac{\tan\theta}{1+\tan\theta}$

32. $\cos^4\theta - \sin^4\theta = (\cos^2 + \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$= (1)\times\dfrac{1}{\sec^2\theta}(1-\tan^2\theta)$

$= \dfrac{1-\tan^2\theta}{\sec^2\theta}$

90. الإجابة النموذجية: بما أن $2(4\theta) = 8\theta$. فاستخدم متطابقة $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ لإيجاد تعبير لـ $\cos 8\theta$. ثم، بما أن $4\theta = 2(2\theta)$ تستخدم المتطابقة ذاتها مزدوجة الزوايا لإيجاد تعبير لـ $\cos 4\theta$. أخيرًا. استخدم المتطابقة ذاتها مزدوجة الزوايا لاستبدال التعبير مزدوج الزوايا ذاته $\cos 2\theta$. النتيجة ستكون تعبيرًا بدلالة $\cos\theta$ فقط. قم بتعويض $\frac{\sqrt{2}}{5}$ لإيجاد $\cos\theta$ في هذا التعبير وحوّل لأبسط صورة.

دليل الدراسة والمراجعة

23. $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$= \dfrac{\sin\theta\,(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta} + \dfrac{\sin\theta\,(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$

$= \dfrac{\sin\theta\,(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta} + \dfrac{\sin\theta\,(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta}$

$= \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \dfrac{2}{\sin\theta}$

$= 2\csc\theta$

24. $\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\csc\theta} = \cos\theta\cos\theta + \sin\theta\sin\theta$

$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$

$= 1$

25. $\dfrac{\cot\theta}{1+\csc\theta} + \dfrac{1+\csc\theta}{\cot\theta}$

$= \dfrac{\cot^2\theta}{\cot\theta\,(1+\csc\theta)} + \dfrac{(1+\csc\theta)^2}{\cot\theta\,(1+\csc\theta)}$

$= \dfrac{\cot^2\theta + (1+\csc\theta)^2}{\cot\theta\,(1+\csc\theta)}$

$= \dfrac{\csc^2\theta - 1 + 1 + 2\csc\theta + \csc^2\theta}{\cot\theta\,(1+\csc\theta)}$

$= \dfrac{2\csc^2\theta + 2\csc\theta}{\cot\theta\,(1+\csc\theta)}$

$= \dfrac{2\csc\theta\,(\csc\theta+1)}{\cot\theta\,(1+\csc\theta)}$

$= \dfrac{2}{\sin\theta}\times\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \dfrac{2}{\cos\theta}$

$= 2\sec\theta$

26. $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \dfrac{\cos\theta\,(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$

$= \dfrac{\cos\theta\,(1+\sin\theta)}{\cos^2\theta}$

$= \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

تمرين على الاختبار

6. $\dfrac{\csc^2\theta - 1}{\csc^2\theta} + \dfrac{\sec^2\theta - 1}{\sec^2\theta} = \dfrac{\cot^2\theta}{\csc^2\theta} + \dfrac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta}$

$= \dfrac{\cot^2\theta}{\dfrac{1}{\sin^2\theta}} + \dfrac{\tan^2\theta}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}$

$= \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\times\sin^2\theta + \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\times\cos^2\theta$

$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$

$= 1$

7. $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\times\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta} + \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\times\dfrac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}$

$= \dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\sin\theta)} + \dfrac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta\,(1+\sin\theta)}$

$= \dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\sin\theta)} + \dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\sin\theta)}$

$= \dfrac{2\cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\sin\theta)}$

$= \dfrac{2\cos\theta}{1+\sin\theta}$

8. $\dfrac{1}{1+\cos\theta} + \dfrac{1}{1-\cos\theta}$

$= \dfrac{1}{1+\cos\theta}\times\dfrac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta} + \dfrac{1}{1-\cos\theta}\times\dfrac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$= \dfrac{1-\cos\theta}{1-\cos^2\theta} + \dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$

$= \dfrac{2}{\sin^2\theta}$

$= 2\csc^2\theta$

9. $-\sec^2\theta\sin^2\theta = \sec^2\theta\,(-\sin^2\theta)$

$= \dfrac{1}{\cos^2\theta}(-\sin^2\theta)$

$= \dfrac{-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$= \dfrac{-(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}$

$= \dfrac{\cos^2\theta - 1}{\cos^2\theta}$

10. $\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$= (\sin^2 x - \cos^2 x)\times 1$

$= [\sin^2 x - (1-\sin^2 x)]$

$= \sin^2 x - 1 + \sin^2 x$

$= 2\sin^2 x - 1$

الوحدة 4 ملحق الإجابات

ملاحظات