الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

عام التسامح

2018 - 2019

10

McGraw-Hill Education

الرياضيات

المسار العام

نسخة الإمارات العربية المتحدة

Mc Graw Hill Education

8-1 الوسط الهندسي

السابق
استخدام علاقات التناسب بين متصفات الزوايا المتناظرة وارتفاعات ووسائط المثلثات المتشابهة.

الحالي
1 إيجاد الوسط الهندسي بين عددين.
2 حلّ مسائل تتضمن علاقات بين أجزاء مثلث قائم الزاوية وبين الارتفاع المنشأ من وتره.

لماذا؟
تصوير العناصر الطويلة أو العريضة للغاية يمكن أن يمثل تحديًا. فمن الممكن أن يكون تضمين عنصر بالكامل في لقطة واحدة دون تشويه الصورة أمرًا صعبًا. إذا تم ضبط الكاميرا لزاوية عرض رأسية بمقدار 90° وكنت تعرف ارتفاع العنصر المراد تصويره، فبإمكانك استخدام وسط هندسي للمسافة من قمة العنصر إلى مستوى الكاميرا والمسافة من أسفل العنصر إلى مستوى الكاميرا.

مفردات جديدة
وسط هندسي
geometric mean

ممارسات في الرياضيات
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 الوسط الهندسي

الوسط الهندسي عندما تكون أوساط التناسب هي العدد ذاته، فإن هذا العدد يسمى الوسط الهندسي للطرفين. **الوسط الهندسي** بين عددين هو الجذر التربيعي الموجب لناتج ضربهما.

$$\frac{\text{طرف} \rightarrow a}{\text{وسط} \rightarrow x} = \frac{\text{وسط} \leftarrow x}{\text{طرف} \leftarrow b}$$

المفهوم الأساسي الوسط الهندسي للعددين a و b

الشرح الوسط الهندسي لعددين موجبين a هو العدد x مثل $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$.
إذًا، $x^2 = ba$ و $x = \sqrt{ab}$.

مثال الوسط الهندسي لكل من $a = 4, b = 9$ هو 6، لأن $6 = \sqrt{9 \times 4}$

مثال 1 الوسط الهندسي

أوجد الوسط الهندسي بين 8 و 10.

$x = \sqrt{ab}$	تحديد الوسط الهندسي
$= \sqrt{8 \cdot 10}$	$a = 8 = 10$
$= \sqrt{(4 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 5)}$	عامل.
$= \sqrt{16 \cdot 5}$	خاصية التجميع
$= 4\sqrt{5}$	بسّط.

الوسط الهندسي بين 8 و 10 هو $4\sqrt{5}$ أو حوالي 9.8.

تمرين موجّه

أوجد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد.

1A. 5 و45 **1B.** 12 و15

2 الأوساط الهندسية في المثلثات قائمة الزاوية

في المثلث قائم الزاوية، ستجد أن الارتفاع المرسوم من رأس الزاوية القائمة إلى الوتر يشكّل مثلثين إضافيين قائمي الزاوية. وتتشارك هذه المثلثات الثلاثة قائمة الزاوية في علاقة خاصة.

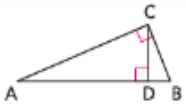
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة المصطلحات

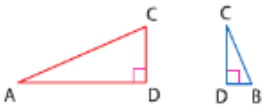
الارتفاع (للمثلث)

قطعة مستقيمة ممتدة من أحد الرؤوس إلى المستقيم المحتوي على الضلع المقابل، كما أنها عمودية على المستقيم المحتوي على هذا الضلع

النظرية 8.1



إذا رسمنا ارتفاعًا يمتد إلى وتر مثلث قائم الزاوية، فسيكون المثلثان المتشكلان مشابهين للمثلث الأصلي ولبعضهما البعض.

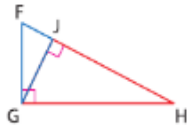


المثال إذا كان $\overline{CD}$ هو الارتفاع إلى الوتر $\overline{AB}$ الخاص بالمثلث قائم الزاوية، $\triangle ABC$ فإن $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ و $\triangle ABC \sim \triangle CBD$. $\triangle CBD \sim \triangle ACD$.

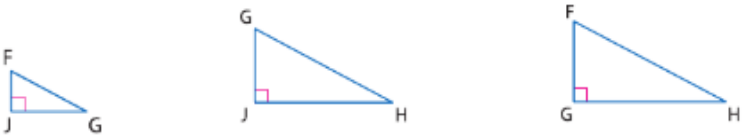
سوف تثبت النظرية 8.1 في التمرين 39.

مثال 2 تحديد المثلثات قائمة الزاوية المتشابهة

اكتب عبارة تَمَاثُل لتوضيح المثلثات الثلاثة قائمة الزاوية المتماثلة في الشكل.



اقسم المثلث إلى مثلثين بطول الارتفاع. بعد ذلك، ارسم المثلثات الثلاثة مع تعديل المثلثين الأصغر بحيث تكون زواياها وأضلاعها المتناظرة في الأوضاع ذاتها مثل المثلث الأصلي.



إذًا، وفقًا للنظرية 8.1، فإن $\triangle FJG \sim \triangle GJH \sim \triangle FGH$.

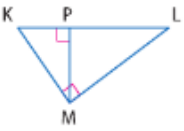
نصيحة دراسية

تعديل المثلثات

لتعديل المثلثات قائمة الزاوية في المثال 2، قم أولاً بمطابقة الزوايا اليمنى. ثم طابق الأضلاع الأقصر.

تمرين موجّه

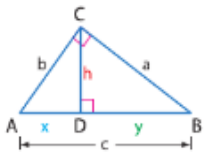
2A.

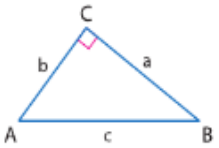


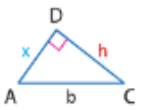
2B.

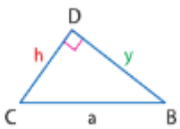
من النظرية 8.1، علمت أن ارتفاع $\overline{CD}$ المرسوم إلى وتر المثلث قائم الزاوية ABC يشكل ثلاثة مثلثات متشابهة: $\triangle ACB \sim \triangle ADC \sim \triangle CDB$.

من خلال تحديد المضلعات المتشابهة، يمكنك كتابة التناسبات التالية لمقارنة أطوال أضلاع هذه المثلثات.









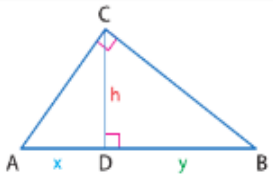
$$\frac{\text{الضلع الأقصر}}{\text{الساق الأطول}} = \frac{b}{a} = \left(\frac{x}{h} = \frac{h}{y}\right) \qquad \frac{\text{وتر المثلث}}{\text{الساق الأقصر}} = \left(\frac{c}{b} = \frac{b}{x}\right) = \frac{a}{h} \qquad \frac{\text{وتر المثلث}}{\text{الساق الأطول}} = \boxed{\frac{c}{a} = \frac{b}{h} = \frac{a}{y}}$$

لاحظ أن العلاقات المحاطة بدائرة تتضمن أوساطًا هندسية. وهذا يوصلنا إلى النظريات الموجودة أعلى الصفحة التالية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

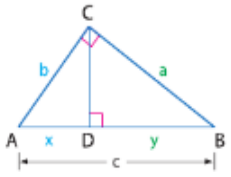
النظريات نظريات الوسط الهندسي للمثلثات قائمة الزاوية

8.2 نظرية الوسط الهندسي (الارتفاع) يفصل الارتفاع الممتد إلى وتر المثلث قائم الزاوية الوتر إلى قطعتين مستقيمتين. ويساوي طول هذا الارتفاع الوسط الهندسي بين أطوال هذين الجزأين.



المثال إذا كان $\overline{CD}$ يمثل الارتفاع للوتر $\overline{AB}$ بالمثلث $\triangle ABC$، فإن $h = \sqrt{xy}$ أو $\frac{x}{h} = \frac{h}{y}$.

8.3 نظرية الوسط الهندسي (الساق) يفصل الارتفاع الممتد إلى وتر المثلث قائم الزاوية الوتر إلى قطعتين مستقيمتين. وطول أحد ساقي هذا المثلث يمثل الوسط الهندسي بين طول الوتر والقطعة المستقيمة الموجودة على الوتر المجاور لتلك الساق.

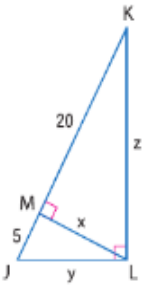


المثال إذا كان $\overline{CD}$ هو الارتفاع للوتر $\overline{AB}$ بالمثلث قائم الزاوية $\triangle ABC$ فإن $\frac{c}{a} = \frac{a}{y}$ أو $a = \sqrt{yc}$ و $\frac{c}{b} = \frac{b}{x}$ أو $b = \sqrt{xc}$.

سوف تقوم بإثبات نظريتي 8.2 و8.3 من خلال التمرينين 40 و 41 على الترتيب.

مثال 3 استخدام الأوساط الهندسية في المثلثات قائمة الزاوية

أوجد x و y و z.



بما أن x هو مقدار الارتفاع الممتد إلى وتر المثلث قائم الزاوية $\triangle JKL$، فإن x سيكون الوسط الهندسي لأطوال القطعتين التي يتألف منهما الوتر، JM.

نظرية الوسط الهندسي (الارتفاع)
$$x = \sqrt{JM \times MK}$$
التعويض
$$= \sqrt{5 \times 20}$$
بسّط.
$$= \sqrt{100} = 10$$

بما أن y يساوي طول الساق $\overline{JL}$، فإن y يعتبر الوسط الهندسي لـ $\overline{JM}$، وهما طول القطعة المجاورة لهذه الساق وطول الوتر JK.

نظرية الوسط الهندسي (الساق)
$$y = \sqrt{JM \cdot JK}$$
التعويض
$$= \sqrt{5 \cdot (20 + 5)}$$
استخدم الآلة الحاسبة للتبسّيط.
$$= \sqrt{125} \text{ أو حوالي } 11.2$$

بما أن z يساوي طول الساق $\overline{KL}$، فإن z هي الوسط الهندسي لـ $\overline{MK}$، وهما طول القطعة المجاورة لـ $\overline{KL}$ وطول الوتر JK.

نظرية الوسط الهندسي (الساق)
$$z = \sqrt{MK \cdot JK}$$
التعويض
$$= \sqrt{20 \cdot (20 + 5)}$$
استخدم الآلة الحاسبة للتبسّيط
$$= \sqrt{500} \text{ أو حوالي } 22.4$$

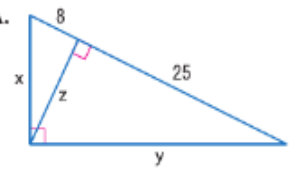
نصيحة دراسية
استخدام التناسب
في المثال 3، يمكن أيضًا إيجاد قيمة x بإيجاد حل للتناسب $\frac{5}{x} = \frac{x}{20}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

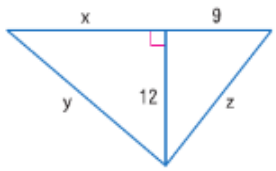
تمرين موجّه

أوجد x و y و z.

3A.



3B.



يمكنك استخدام الوسط الهندسي لقياس الارتفاع مباشرة.

مهنة من الحياة اليومية

منظّم الفعاليات

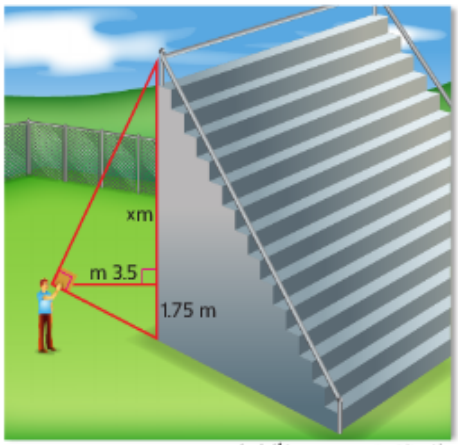
يقوم منظمو الفعاليات باختيار موقع محدد وتحضير الأطعمة ووضع خطة للعروض الترفيهية. ويقومون أيضًا بتنسيق خدمات مثل النقل والتصوير.

ومعظم المهارات المطلوبة لتنظيم الفعاليات غالبًا ما يتم اكتسابها من الخبرة العملية.

مثال 4 من الحياة اليومية القياس غير المباشر

الدعاية والإعلان يريد خالد لوحة إعلانية لتعليقها يريد خالد تعليق لوحة إعلانية على جانب مدرّج المشجعين في ملعب البيسبول التابع لمدرسته الثانوية، بحيث تمتدّ اللوحة من أعلى المدرّج لتصل إلى مستوى سطح الأرض.

و لكي يعرف ارتفاع اللوحة، قام خالد باستخدام لوح مقوّى على شكل مربع لمحاذاة أعلى المدرّج و أسفله، ثم قام بقياس بعده عن المدرّج و البعد بين مستوى سطح الأرض و مستوى نظره. أوجد ارتفاع المدرّج؟



ملاحظة: غير مرسوم وفقًا لمقياس رسم.

المسافة من خالد إلى المَدرّج هي مسافة الارتفاع إلى وتر المثلث قائم الزاوية. ويساوي طول هذا الارتفاع الوسط الهندسي لهاتين القطعتين اللتين يتألف منهما الوتر. يبلغ قياس القطعة الأقصر 1.75 m. لنفترض أن القياس المجهول هو x بالمترات.

$3.5 = \sqrt{1.75 \cdot x}$ نظرية الوسط الهندسي (الارتفاع)

$2.25 = 1.75x$ قم بتربيع كل طرف.

$x = 7$ اقسِم كل طرف على 1.75.

ارتفاع المَدرّج هو إجمالي طول الوتر، 1.75 + 7، أو حوالي 9 m.

تمرين موجّه

4. **الرياضة** يحتاج نادٍ ترفيهي اجتماعي تقدير تكلفة تركيب جدار تسلق صخور من خلال تقدير ارتفاع الجدار. لذا، حملتْ خديجة كتابًا أمام عينيها بحيث يتحاذى الجزآن العلوي والسفلي من الجدار مع الحافة السفلية وجزء التجليد بالغلاف. فإذا كان مستوى عينيها على ارتفاع 1.6 m أعلى الأرض وكانت تقف على بُعد 3 m من الجدار، فما مقدار ارتفاع الجدار؟ ارسم رسمًا تخطيطيًا واشرح استنتاجك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

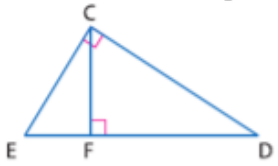
مثال 1

أوجد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد.

1. 5 و20
2. 36 و 4
3. 40 و15

مثال 2

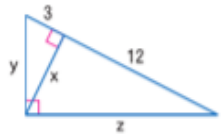
4. اكتب عبارة تناسب لتوضيح المثلثات الثلاثة المتماثلة في الشكل.



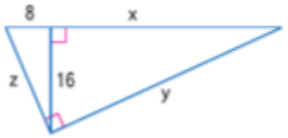
مثال 3

أوجد x و y و z.

5.

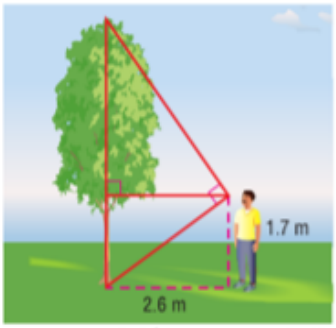


6.



مثال 4

7. **استخدام النماذج** يزور وليد منتزهاً مع أسرته. ويريد تقدير ارتفاع احدى الشجرات. لذا وقف وليد بحيث يكون خط رؤيته لأعلى الشجرة وأسفلها مشكلاً زاوية قائمة كما هو موضح في الرسم التخطيطي. فما مقدار طول الشجرة تقريبًا؟



ملاحظة: غير مرسوم وفقاً لمقياس رسم.

التمرين وحل المسائل

مثال 1

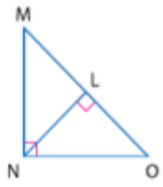
أوجد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد.

8. 81 و 4
9. 25 و 16
10. 20 و 25
11. 36 و 24
12. 12 و 2.4
13. 18 و 1.5

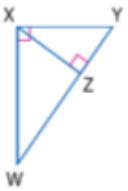
مثال 2

اكتب عبارة تَمَاثُل لتوضيح المثلثات الثلاثة المتماثلة في الشكل.

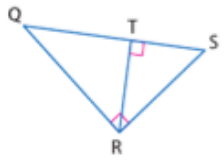
14.



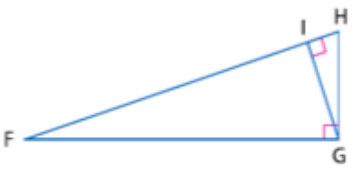
15.



16.



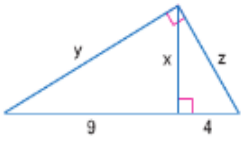
17.



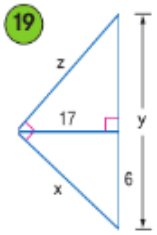
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 أوجد x و y و z.

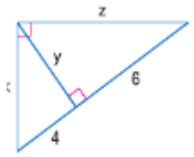
18.



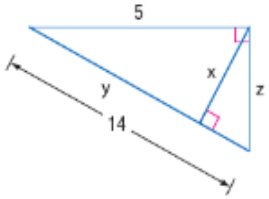
19.



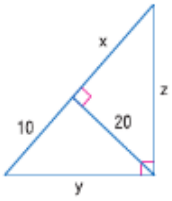
20.



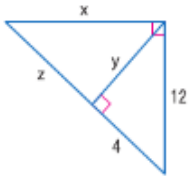
21.



22.

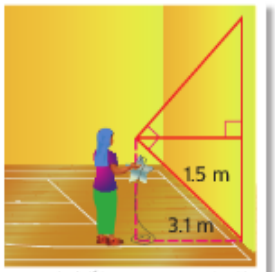


23.



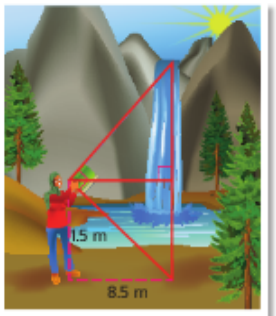
مثال 4

24. **استخدام النماذج** تعلّق خديجة نجومًا فضية في سقف صالة الألعاب الرياضية استعدادًا للاحتفال. وأرادت أن تكون أطراف الخيوط المربوط بها النجوم بارتفاع 2.2 m من الأرض. استخدم الرسم التخطيطي لتحديد مقدار الطول اللازم تحديده للخيوط.



ملاحظة: غير مرسوم وفقًا لمقياس رسم.

25. **استخدام النماذج** تستخدم أماني كتابًا لملاحظة مدى ارتفاع الشلال. ومستوى بصرها على ارتفاع 1.5 m من الأرض وأن المسافة الأفقية هي 8.5 m من الشلال. لذا أوجد ارتفاع الشلال إلى أقرب جزء من عشرة من القدم.



ملاحظة: غير مرسوم وفقًا لمقياس رسم.

B أوجد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد.

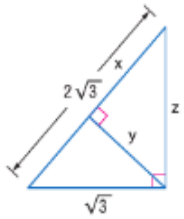
26. $\frac{1}{5}$ و 60

27. $\frac{3\sqrt{2}}{7}$ و $\frac{5\sqrt{2}}{7}$

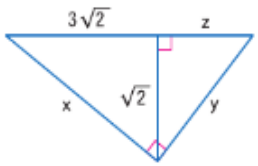
28. $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ و $\frac{5\sqrt{5}}{4}$

أوجد x و y و z.

29.



30.



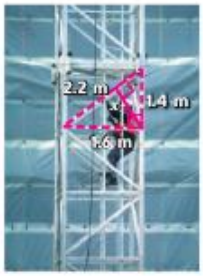
31. **الجبر** الوسط الهندسي لعدد ما وأربعة أضعاف العدد هو 22. فما العدد؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

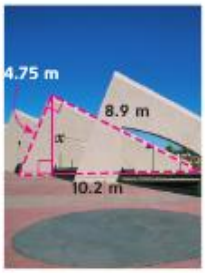
استخدم المثلثات المتشابهة لإيجاد قيمة x.

32.

33.

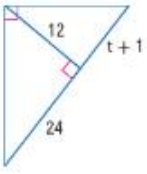


34.

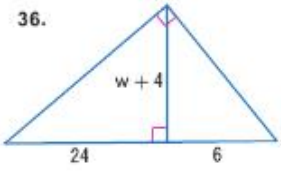


الجبر أوجد قيمة المتغير.

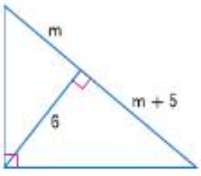
35.



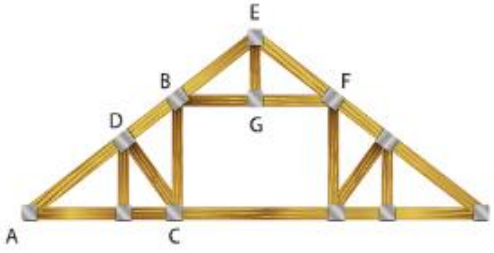
36.



37.



38. **أعمال البناء** جمالون الغرفة العلوية عبارة عن تصميم دعامي يوفر الدعم لهذه الغرفة ويوفر مساحة خالية يمكن استخدامها كمنطقة معيشة. في الرسم التخطيطي، يمثل $\triangle BCA$ و$\triangle EGB$ مثلثين بزاوية قائمة، والمثلث $\triangle BEF$ متساوي الساقين، ويمثل $\overline{CD}$ الارتفاع في $\triangle ABC$، ويمثل $\overline{EG}$ مقدار الارتفاع في $\triangle BEF$. إذا كان طول $DB = 1.5$ m، $DC = 1.9$ m، $BF = 3.3$ m، $EG = 1.4$ m؟ ما هو الطول التقريبي للضلع AE ؟



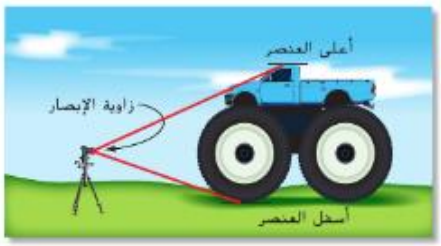
بناء فرضيات اكتب إثباتًا لكل نظرية.

39. النظرية 8.1

40. النظرية 8.2

41. النظرية 8.3

42. **الشاحنات** في فن التصوير، تعرّف زاوية الرؤية بأنها الزاوية المحصورة بين كل من أعلى العنصر و الكاميرا و أسفل العنصر كما هو موضح بالشكل المجاور. تريد أمل التقاط صورة لشاحنة عملاقة يبلغ ارتفاعها 4.7 m . لذا وضعت كاميرتها على الحامل الذي يرتفع عن مستوى سطح الأرض بمقدار 1.5 m، ثم قامت بضبط زاوية الرؤية الرأسية للكاميرا على زاوية مقدارها 90 درجة



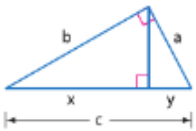
a. ارسم رسمًا تخطيطيًا لهذه الحالة.

b. ما مقدار البُعد عن الشاحنة الواجب على أمل اتخاذه لتتمكن من احتواء ارتفاع الشاحنة بالكامل في لقطتها؟

43. **التمويل** يمثل متوسطٌ معدل العائد على استثمار ما على مدى عامين الوسط الهندسي للعائد السنوي لعامين. إذا بلغت عائدات الاستثمار 12% في سنة واحدة و7% في السنة التالية، فما نسبة متوسط معدل العائد على هذا الاستثمار على مدى فترة العامين؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

44. **البرهان** اشتق نظرية فيثاغورس باستخدام الشكل الموضح على اليسار ونظرية الوسط الهندسي (الساق).



حدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة *دائمًا* أم *أحيانًا* أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

45. الوسط الهندسي لأعداد صحيحة موجبة ومتتالية هو وسط العددين.

46. الوسط الهندسي لمربعين كاملين هو عدد صحيح موجب.

47. الوسط الهندسي لعددين صحيحين موجبين هو عدد صحيح آخر.

48. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف الوسط الهندسي.

x	y	$\sqrt{xy}$
		8
		8
		8
		8
		8

a. **جدوليًا** انسخ وأكمل الجدول المحتوي على خمسة أزواج مرتبة (x, y) مثل $\sqrt{xy} = 8$

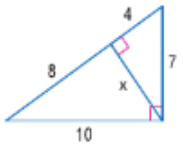
b. **بيانيًا** مثّل بيانيًا الأزواج المرتبة من الجدول في مخطط انتشار.

c. **لفظيًا** خمّن نوع التمثيل البياني الذي سيتم تشكيله في حالة توصيل النقاط من مخطط الانتشار. هل تعتقد أن التمثيل البياني لأي مجموعة أزواج مرتبة ناتجة في الوسط الهندسي ذاته سيكون له الشكل العام ذاته؟ اشرح استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

49. **تحليل الخطأ** يحاول كل من إياد وعائشة إيجاد قيمة x

في المثلث الموضح. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.



إياد

$\frac{4}{x} = \frac{x}{7}$

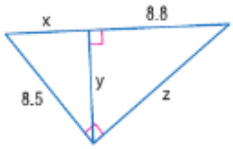
$x \approx 5.3$

عائشة

$\frac{4}{x} = \frac{x}{10}$

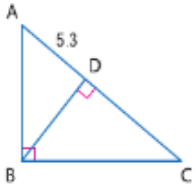
$x \approx 6.3$

50. **تحدٍ** راجع الشكل الموجود على اليمين. أوجد x و y و z.



51. **مسألة غير محددة الإجابة** أوجد زوجين من أعداد كلية بوسط هندسي يكون أيضًا عددًا كليًا. ما الحالة الواجب استيفاؤها للحصول على وسط هندسي يتألف من عدد كلي ناتج عن زوج من الأعداد؟

52. **التبرير** راجع الشكل الموجود على اليمين. يقع ملتقى ارتفاعات $\triangle ABC$ على بُعد 6.4 وحدات من النقطة D. أوجد BC.



53. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبيّن الفرق بين كل من الوسط الحسابي والهندسي لعددين. متى سيتساوى الوسطان؟ علل استنتاجك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

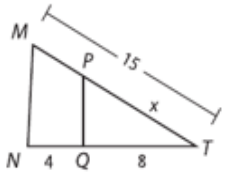
تمرين على الاختبار المعياري

54. ما الوسط الهندسي للعددين 8 و22 في أبسط صورة؟

A $4\sqrt{11}$ C $16\sqrt{11}$

B 15 D 176

55. إجابة مختصرة إذا كان $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$ فاستخدم التناسب لإيجاد قيمة x. اكتب الحل هنا.



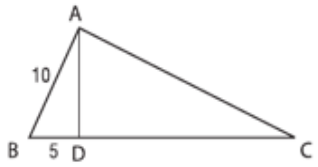
56. **الجبر** ما حلول المعادلة التربيعية $x^2 - 20 = 8x$?

F 2, 10 H −1, 20

G 20, 1 J −2, 10

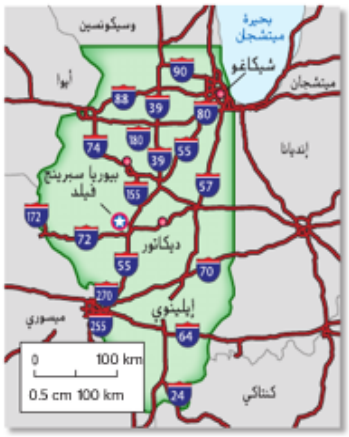
57. **SAT/ACT** في الشكل، تكون $\overline{AD}$ عمودية على $\overline{BC}$ وتكون $\overline{AB}$ عمودية على $\overline{AC}$. فما هو CB؟

A $5\sqrt{2}$
B $5\sqrt{3}$
C 20
D 25
E 75



مراجعة شاملة

58. **الخرائط** استخدم الخريطة لتقدير المدة التي سيتم استغراقها للقيادة من شيكاغو إلى سبرينج فيلد إذا كان متوسط سرعة القيادة 65 km/h.



ارسم الشكل الأصلي والصورة المغيرة الأبعاد. ثم تحقق من أن تغيير الأبعاد هو تحويل تشابه

59. A(−1 ,3), B(7 ,9), C(3, −2); D(−1 ,1), E(3 ,3), F(0 ,1)

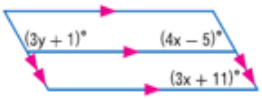
60. G(−4, −4), H(−2 ,1), J(2, −1); K(−3, −2), L(0 ,1)

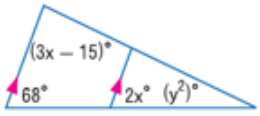
61. M(7, −4), N(5, −4), P(7, −1); Q(2, −8), R(6, −8), S(2, −2)

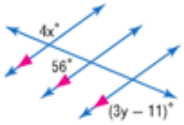
تعلمُ قياس الزاوية الداخلية لمضلع منتظم. حدد شكل المضلع.

62. 108 63.135

أوجد x و y في كل شكل.

64. 

65. 

66. 

حدّد كل مجسّم. وسَمِّ القواعد والأوجه والحواف والرؤوس.

67.

68.

69.

مراجعة المهارات

حوّل كل تعبير إلى أبسط صورة بإنطاق المقام.

70. $\frac{2}{\sqrt{2}}$ 71. $\frac{16}{\sqrt{3}}$ 72. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}}$ 73. $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$ 74. $\frac{21}{\sqrt{3}}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8-2 نظرية فيثاغورس وعكسها

السابق

استخدمنا نظرية فيثاغورس لإعداد قانون المسافة.

الحالي

1 استخدام نظرية فيثاغورس.

2 استخدام عكس نظرية فيثاغورس.

لماذا؟

تُستخدم الأحبال الشريطية لتثبيت رجل الثلج القابل للنفخ. افترض أنك تعرف مقدار ارتفاع الأحبال الشريطية الذي سيتم عنده ربط رجل الثلج ومقدار البُعد الذي تحتاج إليه لتثبيت الأحبال في الأرض. يمكنك استخدام عكس نظرية فيثاغورس لضبط أطوال الأحبال للحفاظ على بقاء رجل الثلج في وضع عمودي على الأرض.

مفردات جديدة

ثلاثية فيثاغورس
Pythagorean triple

ممارسات في الرياضيات

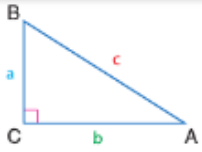
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

استخدام نماذج الرياضيات.

1 نظرية فيثاغورس من المرجح أن نظرية فيثاغورس أحد أكثر النظريات شهرة في الرياضيات. فهي متعلقة بأطوال الوتر (الضلع المقابل للزاوية القائمة) وساقي المثلث (الضلعين المجاورين للزاوية القائمة) في المثلث قائم الزاوية.

النظرية 8.4 نظرية فيثاغورس

الشرح في مثلث قائم الزاوية، يكون مجموع مربعات أطوال ساقي المثلث مساويًا لمربع طول الوتر.



الرموز إذا كان $\triangle ABC$ مثلثًا قائم الزاوية والزاوية القائمة به هي C، فإن $a^2 + b^2 = c^2$.

يمكن استخدام الأوساط الهندسية لإثبات نظرية فيثاغورس.

البرهان نظرية فيثاغورس

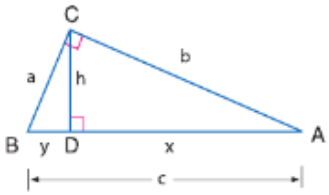
المعطيات: $\triangle ABC$ به الزاوية القائمة C

المطلوب: $a^2 + b^2 = c^2$

البرهان:

ارسم مثلثًا قائم الزاوية ABC بحيث تكون C هي الزاوية القائمة. ثم ارسم الارتفاع من C إلى $\overline{AB}$ فلنفترض أن $AB = c$ و $BC = a$، $AC = b$، $CD = h$، $AD = x$.

لدينا الآن وسطان هندسيان.



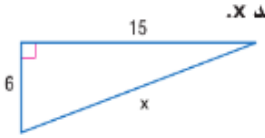
نظرية الوسط الهندسي (ساق المثلث)	$\frac{c}{b} = \frac{b}{x}$ و $\frac{c}{a} = \frac{a}{y}$
الضرب التبادلي	$a^2 = cy$ $\quad b^2 = cx$
اجمع المعادلات.	$a^2 + b^2 = cy + cx$
عامل.	$a^2 + b^2 = c(y + x)$
نظرًا لأن $c = y + x$، فقم بتعويض c مقابل $(y + x)$.	$a^2 + b^2 = c \times c$
بسّط.	$a^2 + b^2 = c^2$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك استخدام نظرية فيثاغورس لإيجاد طول أي ضلع من أضلاع مثلث قائم الزاوية مع العلم بطول الضلعين الآخرين.

مثال 1 إيجاد القياسات المفقودة باستخدام نظرية فيثاغورس

أوجد x.

a. 

الضلع المقابل للزاوية القائمة هو الوتر، إذًا $c = x$.

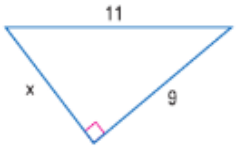
$a^2 + b^2 = c^2$ نظرية فيثاغورس

$6^2 + 15^2 = x^2$ $a = 6$ $= 15$

$261 = x^2$ بسّط.

$\sqrt{261} = x$ خُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين.

$3\sqrt{29} = x$ بسّط.

b. 

الوتر هو 11، إذًا $c = 11$.

$a^2 + b^2 = c^2$ نظرية فيثاغورس

$x^2 + 8^2 = 11^2$ $a = x = 9$

$x^2 + 81 = 121$ بسّط.

$x^2 = 40$ اطرح 18 من كل طرف.

$x = \sqrt{40}$ أو $2\sqrt{10}$ خُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين وبسّط.

تمرين موجّه

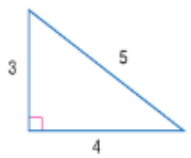
1A.

1B.

نصيحة دراسية

الجذر التربيعي الموجب

عند إيجاد طول أحد الأضلاع باستخدام نظرية فيثاغورس، لا تستخدم سوى الجذر التربيعي الموجب وليس السالب، لأن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا.



ثلاثية فيثاغورس هي مجموعة مكوّنة من ثلاثة أعداد كاملة غير صفرية a, b, c، بحيث $a^2 + b^2 = c^2$. إحدى أشهر ثلاثيات فيثاغورس هي 3، 4، 5. وبقصد منها أن أضلاع المثلث قائم الزاوية هي بنسب 3:4:5، وموضح أدناه في الصف الأول أكثر ثلاثيات فيثاغورس شيوعًا. والثلاثيات الموجودة أدنى هذه الثلاثية يتم إيجادها من خلال ضرب كل عدد من الثلاثية في العامل ذاته.

نصيحة دراسية

ثلاثيات فيثاغورس إذا كانت أطوال أضلاع أي مثلث قائم الزاوية *ليست* أعدادًا كلية، فإن الأطوال لا تمثّل ثلاثية فيثاغورس.

المفهوم الأساسي ثلاثيات فيثاغورس الشائعة

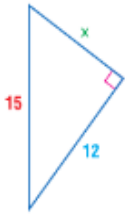
3, 4, 5	5, 12, 13	8, 15, 17	7, 24, 25
6, 8, 10	10, 24, 26	16, 30, 34	*14, 48, 50*
9, 12, 15	15, 36, 39	24, 45, 51	*21, 72, 75*
3x, 4x, 5x	5x, 12x, 13x	8x, 15x, 17x	*7x, 24x, 25x*

العدد الأكبر في كل ثلاثية هو طول الوتر.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 استخدام ثلاثية فيثاغورس

استخدم ثلاثية فيثاغورس لإيجاد قيمة x. اشرح استنتاجك.



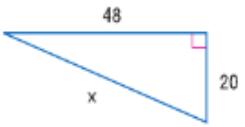
لاحظ أن 15 و 12 كلاهما مضاعف للعدد 3، لأن $15 = 3 \times 5$ و $12 = 3 \times 4$. بما أن "3، 4، 5" هي إحدى ثلاثيات فيثاغورس، فإن طول الساق المفقود x يكون 3×3 أو 9.

نظرية فيثاغورس — تحقق $12^2 + 8^2 \stackrel{?}{=} 15^2$

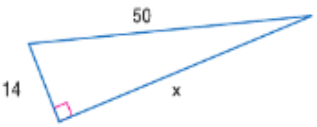
بسّط. — $225 = 225$ ✓

تمرين موجّه

2A.



2B.



قراءة في الرياضيات

3-4-5 يطلق على المثلث قائم الزاوية بأضلاع أطوالها 3 و 4 و 5 اسم مثلث قائم الزاوية 3-4-5 .

يمكن استخدام نظرية فيثاغورس لحل العديد من مسائل الحياة اليومية.

مثال 3 على الاختبار المعياري استخدام نظرية فيثاغورس

ملاحظة: ليس مرسومًا وفقًا لمقياس رسم.

لا يُمكِن لأيمن دخول شقته. والنافذة الوحيدة المفتوحة في الطابق الثاني الذي يرتفع 4 m عن سطح الأرض. لذا فهو يحتاج إلى اقتراض سلّم من جاره. إذا وجب عليه وضع السلّم على بعد 3 m من منزله لتجنّب بعض الشجيرات، فما طول السلّم الذي يحتاج إليه أيمن؟

A 7 m

C 5 m

B 1 m

D 8 m

الاجابة: C

قراءة فقرة الاختبار

إن كلاً من مقدار بُعد السلّم عن المنزل، والارتفاع الذي بلغه السلّم، وطول السلّم ذاته تُمثّل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية. سيلزمك إيجاد طول السلّم، والذي يمثل الوتر.

حَل فقرة الاختبار

الطريقة 1 استخدم ثلاثية فيثاغورس.

طول ساقيّ المثلث هو 3 و 4. و لكن 3 و 4 و 5 تمثل ثلاثية فيثاغورس. إذاً طول السلّم هو 5 m .

الطريقة 2 استخدم نظرية فيثاغورس.

افترض أن x يمثل طول السلّم.

نظرية فيثاغورس — $3^2 + 4^2 = x^2$

بسّط. — $25 = x^2$

خُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين. — $\sqrt{25} = x$

بسّط. — $5 = x$

إذاً، الإجابة هي الخيار C.

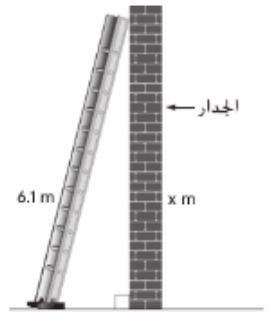
نصيحة عند حل الاختبار

التفكير المنطقي بما أن وتر المثلث قائم الزاوية دائماً ما يكون الضلع الأطول، فإن طول السلّم في المثال 3 يجب أن يكون أكبر من 3 m أو 4 m . و بما أن 1 m أقل منهما. إذاً الاختيار B يمكن استبعاده.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين موجّه

3. وفقًا للوائح السلامة الخاصة بالشركة، فإن المسافة من قاعدة السلّم إلى الجدار الذي تستند إليه يجب ألا تزيد عن ربع ارتفاع السلّم إجمالاً. وقد تم إعطاؤك سلّم ارتفاعه 6.1 m لوضعه مقابل أحد الجدران في موقع العمل. في حالة اتباع لوائح السلامة الخاصة بالشركة، فما الحد الأقصى للارتفاع x الذي سيصله السلّم على الجدار مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة؟



ملاحظة: ليس مرسومًا وفقًا لمقياس رسم.

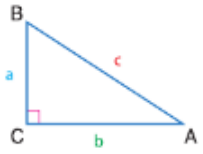
F 3.7 m
H 6.3 m
G 5.9 m
J 8.3 m

2 عكس نظرية فيثاغورس

عكس نظرية فيثاغورس ينطبق أيضًا. يمكنك استخدام هذه النظرية لتحديد ما إذا كان المثلثّ قائم الزاوية من خلال معرفة قياسات جميع أضلاعه الثلاثة.

النظرية 8.5 عكس نظرية فيثاغورس

الشرح إذا كان مجموع مربعات أطوال الضلعين الأقصر لأحد المثلثات مساويًا لمربع طول الضلع الأطول، فإن المثلث يكون قائم الزاوية.



الرموز إذا كان $a^2 + b^2 = c^2$، فإن $\triangle ABC$ مثلث قائم الزاوية.

سوف تثبتُ النظرية 8.5 في التمرين 35.

يمكنك أيضًا استخدام الأطوال الطرفية لتصنيف مثلث على أنه حاد أو منفرج.

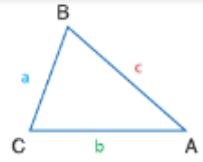
نصيحة دراسية

تحديد الضلع الأطول إذا تم التعبير عن مقاييس أي ضلع من أضلاع المثلث بصورة جذر، فربما ترغب في استخدام الآلة الحاسبة لتحديد الضلع الأطول.

نظريات نظريات متباينات فيثاغورس

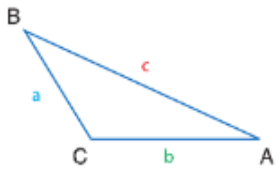
8.6 إذا كان مربع طول الضلع الأطول في أحد المثلثات أقل من مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين، فإن المثلث يكون حاد الزاوية.

الرموز إذا كانت $c^2 < a^2 + b^2$، فإن $\triangle ABC$ يكون حاد الزاوية.



8.7 إذا كان مربع طول الضلع الأطول في أحد المثلثات أكبر من مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين، فإن المثلث يكون منفرج الزاوية.

الرموز إذا كان $c^2 > a^2 + b^2$، فإن $\triangle ABC$ منفرج الزاوية.



سوف تثبتُ نظريتي 8.6 و 8.7 من خلال التمرينين 36 و 37 على الترتيب.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 تصنيف المثلثات

حدد ما إذا كانت أي مجموعة أعداد من المجموعات التالية يمكن أن تكون قياسات لأضلاع مثلث. إذا كان الأمر كذلك، فقم بتصنيف المثلث على أنه حاد أو قائم أو منفرج الزاوية. علل إجابتك.

a. 7, 14, 16

الخطوة 1 حدد ما إذا كانت القياسات يمكن أن تشكل مثلثًا باستخدام نظرية متباينة المثلث أم لا.

$7 + 16 > 14$ ✔ $14 + 16 > 7$ ✔ $7 + 14 > 16$ ✔

أطوال الأضلاع 7 و 14 و 16 يمكن أن تشكل مثلثًا.

الخطوة 2 صنّف المثلث بواسطة مقارنة مربع الضلع الأطول مع مجموع مربعي الضلعين الآخرين.

قارن c^2 ، $a^2 + b^2$.

التعويض $16^2 \stackrel{?}{=} 7^2 + 14^2$

بسّط وقارن. $256 > 245$

بما أن $c^2 > a^2 + b^2$، إذًا المثلث منفرج الزاوية.

b. 9, 40, 41

الخطوة 1 حدد ما إذا كانت القياسات يمكن أن تشكّل مثلثًا أم لا.

$9 + 41 > 40$ ✔ $40 + 41 > 9$ ✔ $9 + 40 > 41$ ✔

أطوال الأضلاع 9 و 40 و 41 يمكن أن تشكل مثلثًا.

الخطوة 2 صنّف المثلث.

قارن c^2 ، $a^2 + b^2$.

التعويض $41^2 \stackrel{?}{=} 9^2 + 40^2$

بسّط وقارن. $1681 = 1681$

بما أن $c^2 = a^2 + b^2$، إذًا المثلث قائم الزاوية.

تمرين موجّه

4A. 11, 60, 61 **4B.** $2\sqrt{3}, 4\sqrt{2}, 3\sqrt{5}$ **4C.** 6.2, 13.8, 20

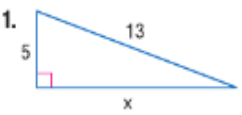
مراجعة المصطلحات

نظرية متباينة المثلث يجب أن يكون مجموع أطوال أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

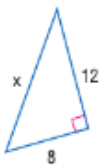
التحقق من فهمك

مثال 1 أوجد x.

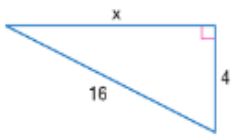
1.



2.

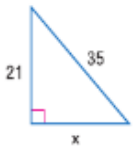


3



مثال 2

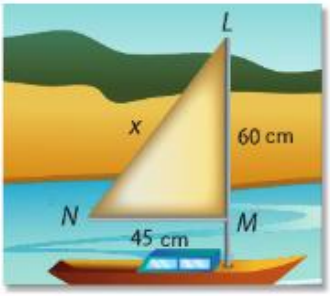
4. استخدم ثلاثية فيثاغورس لإيجاد قيمة x. اشرح استنتاجك.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3

5. الاختيار من متعدد يوضح الشكل التالي الشراع الرئيسي لقارب لعبة. ما طول $\overline{LN}$ بالسنتيمتر؟



A 52.5 C 72.5

B 65 D 75

مثال 4

حدد ما إذا كانت أي مجموعة أعداد من المجموعات التالية يمكن أن تكون قياسات لأضلاع مثلث. إذا كان الأمر كذلك، فصنّف المثلث على أنه حاد أو منفرج أو قائم الزاوية. علل إجابتك.

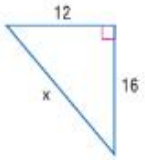
6. 15, 36, 39 **7.** 16, 18, 26 **8.** 15, 20, 24

التمرين وحل المسائل

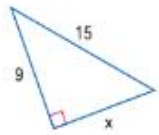
مثال 1

أوجد x.

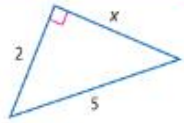
9.



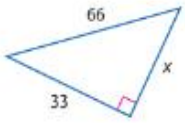
10.



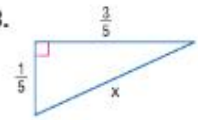
11.



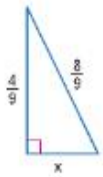
12.



13.



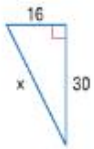
14.



مثال 2

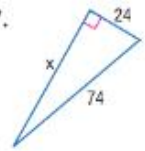
المثابرة استخدم ثلاثية فيثاغورس لإيجاد قيمة x.

15

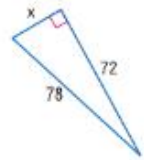


16.

17.

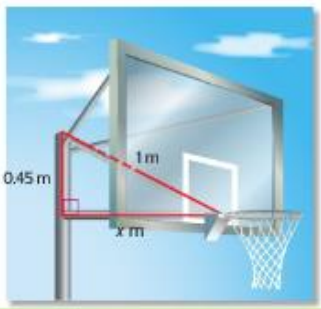


18.



مثال 3

19. كرة السلة الجزء الذي يدعم مرمى كرة السلة يشكّل زاوية قائمة كما هو موضّح. فما طول x من الطرف الأفقي من ذلك الجزء الداعم؟



20. قيادة المَركبات الشارع الذي تسلكه خديجة عادة للذهاب إلى المدرسة قيد الإنشاء. لذا، اتخذت تحويلة الطريق الموضحة. إذا بدأت منطقة الإنشاءات عند نقطة مغادرة خديجة للطريق الاعتيادي وانتهت عند نقطة دخولها مجددًا في هذا الطريق، فما مقدار المسافة الممتدة للطريق قيد الإنشاء؟

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

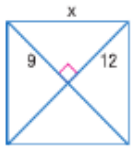
مثال 4 حدد ما إذا كانت أي مجموعة أعداد من المجموعات التالية يمكن أن تكون قياسات لأضلاع مثلث. إذا كان الأمر كذلك، فصنّف المثلث على أنه حاد أو منفرج أو قائم الزاوية. علل إجابتك.

21. 7, 15, 21 **22.** 10, 12, 23 **23.** 4.5, 20, 20.5

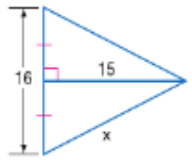
24. 44, 46, 91 **25.** 4.2, 6.4, 7.6 **26.** 4, 12, 14

أوجد x.

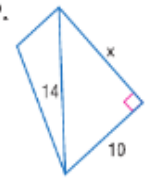
27.



28.



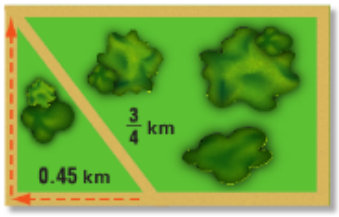
29.



الهندسة الإحداثية *حدد ما إذا كان $\triangle XYZ$ هو مثلث حاد أم قائم أم منفرج الزاوية بالنسبة للرؤوس المعطاة. اشرح.*

30. $X(-3, -2)$, $Y(-1, 0)$, $Z(0, -1)$ **31.** $X(-7, -3)$, $Y(-2, -5)$, $Z(-4, -1)$

32. $X(1, 2)$, $Y(4, 6)$, $Z(6, 6)$ **33.** $X(3, 1)$, $Y(3, 7)$, $Z(11, 1)$



34. العَدْو يركض ماجد في المتنزه ثلاث مرات أسبوعيًا. وعادة، يسلك ممر $\frac{3}{4}$ km يمر عبر المتنزه. واليوم، تم إغلاق الممر، إذًا سيسلك الطريق المظلل بالسهم البرتقالي. فما مقدار بُعد المسافة التي سيركضها على الطريق البديل عوضًا عما إذا سلك طريقه المعتاد؟

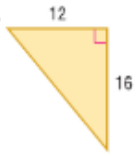
35. البرهان اكتب فقرة إثبات للنظرية 8.5.

البرهان اكتب فقرة إثبات من عمودين لكل نظرية.

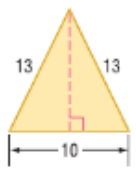
36. النظرية 8.6 **37.** النظرية 8.7

التبرير المنطقي أوجد محيط ومساحة كل شكل.

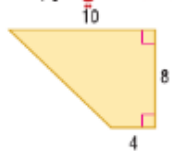
38.



39.



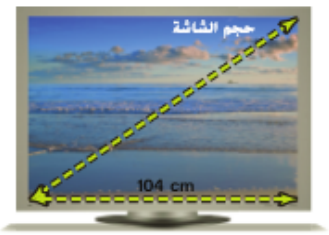
40.



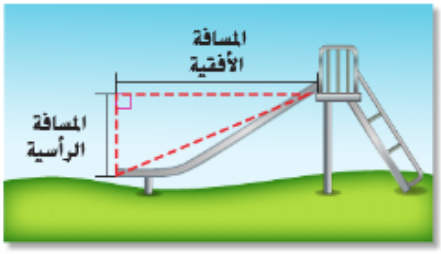
41. الجبر يبلغ أطوال أضلاع مثلث x و 5 و 25. فإذا كان طول الضلع الأطول 25، فما قيمة x التي تجعل المثلث قائم الزاوية؟

42. الجبر يبلغ أطوال أضلاع مثلث $2x$ و 8 و 12. إذا كان طول الضلع الأطول $2x$، فما قيمة x التي تجعل المثلث حاد الزاوية؟

43. التليفزيون نسبة العرض إلى الارتفاع لشاشة التليفزيون عالي الوضوح (HDTV) هي 16:9. ويوضّح حجم التليفزيون بواسطة المسافة القطرية عبر الشاشة. إذا كان تليفزيون HDTV عرضه 104 cm، فما مقدار حجم شاشته؟



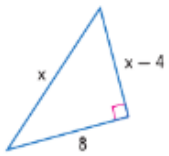
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.



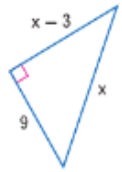
44. ساحات الألعاب وفقًا لكتيب السلامة في ساحات الألعاب العامة، فإن نسبة المسافة الرأسية إلى المسافة الأفقية المغطاة بواسطة الزحليقة ينبغي ألا تزيد عن 4 إلى 7. إذا كانت المسافة الأفقية المخصصة في تصميم الزحليقة بمقدار 3.5 m، فما مقدار الطول المفترض للزحليقة كحد أقصى؟

أوجد x.

45



46.



47.

48. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستستكشف مثلثات خاصة قائمة الزاوية.

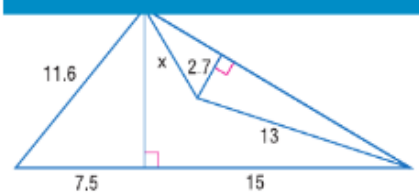
a. هندسيًا ارسم ثلاثة مثلثات قائمة الزاوية متساوية الساقين تكون أطوال أضلاعها أعدادًا كلية. قم بتسمية المثلثات *ABC*، بحيث تكون الزاوية القائمة في الرأس *A* على الترتيب. حدد طول الساق لكل ضلع، ثم أوجد طول الوتر بالضبط.

b. جدوليًا انسخ الجدول التالي وأكمله.

المثلث	الطول				النسبة	
ABC	*BC*		*AB*		$\frac{BC}{AB}$	
MNP	*NP*		*MN*		$\frac{NP}{MN}$	
XYZ	*YZ*		*XY*		$\frac{YZ}{XY}$	

c. بالكلمات خمّن نسبة الوتر إلى الساق لزاوية قائمة في مثلث متساوي الساقين.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا



49. تحدٍ أوجد قيمة x في الشكل الموجود على اليمين.

50. الفرضيات صواب أم خطأ؟ أي مثلثين قائمي الزاوية يشتركان في الوتر ذاته يكون لهما المساحة ذاتها. اشرح استنتاجك.

51. مسألة غير محددة الإجابة ارسم مثلثًا قائم الزاوية بأطوال أضلاع تشكّل ثلاثية فيثاغورس. إذا ضاعفت طول كل ضلع، فهل ستكون النتيجة مثلثًا حاد أم قائم أم منفرج الزاوية إذا كنت تعلمّ طول كل ضلع؟ اشرح.

52. الكتابة في الرياضيات ابحث في المقادير غير القابلة للقياس، ثم أوضح مدى ارتباط هذه العبارة باستخدام الأعداد غير النسبية في الهندسة. واذكر مثالاً للأعداد غير النسبية المستخدمة في الهندسة.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تمرين على الاختبار المعياري

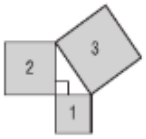
53. أي مجموعة أعداد من المجموعات التالية لا يمكن أن تكون قياسات لأضلاع مثلث؟

A 10, 11, 20
B 14, 16, 28
C 35, 45, 75
D 41, 55, 98

54. متنزه على شكل مربع به ممر مشي مائل (قطري) من أحد الأركان إلى الآخر. إذا كان طول الممر 120 m، فما المقدار التقريبي لكل ضلع في المتنزه؟

F 60 m
G 85 m
H 170 m
J 240 m

55. إجابة مختصرة إذا كان محيط المربع 2 هو 200 وحدة ومحيط المربع 1 هو 150 وحدة، فما محيط المربع 3؟



56. SAT/ACT في $\triangle ABC$، تُعد $\angle B$ زاوية قائمة و $\angle A$ أكبر بمقدار $20°$ عن $\angle C$. ما قياس $\angle C$؟

A 30
B 35
C 40
D 45
E 70

مراجعة شاملة

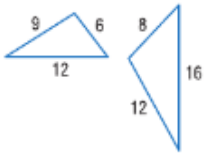
أوجد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد. (الدرس 1-8)

57. 4 و 9
58. 5 و 45
59. 12 و 15
60. 36 و 48

61. رسومات بقياسات نسبية يعمل بلال على تصميم نموذج بقياسات نسبية لمنحدر تزلج على ورقة تمثيل بياني مقاس 25.4 في 20.3 cm. إذا افترض أن المنحدر الفعلي سيكون 3.7 m في 2.4 m، فأوجد القياس النسبي الملائم للرسم وحدد أبعاد المنحدر.

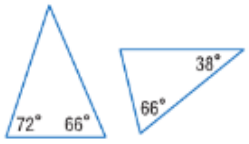
بيّن ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا. إن كانا متشابهين، فاكتب عبارة تشابه. وإن لم يكونا متشابهين، فما الشروط التي تكفي لإثبات تشابه المثلثين؟ اشرح استنتاجك.

62.

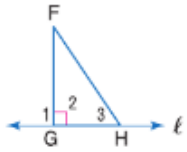


63.

64.



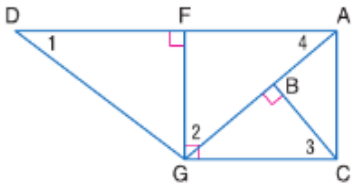
65. البرهان اكتب برهانًا من عمودين.



المعطيات $\overline{FG} \perp \ell$
$\overline{FH}$ هو أي قطعة غير عمودية من F إلى ℓ.

$FH > FG$

المطلوب:



أوجد كل قياس إذا كان $m\angle AGC = 40$ $m\angle DGF = 53$.

66. $m\angle 1$
67. $m\angle 2$
68. $m\angle 3$
69. $m\angle 4$

أوجد المسافة بين كل زوج من الخطوط المتوازية بمراعاة المعادلات المعطاة.

70. $y = 4x$
$y = 4x - 17$

71. $y = 2x - 3$
$2x - y = -4$

72. $y = -0.75x - 1$
$3x + 4y = 20$

مراجعة المهارات

أوجد قيمة x.

73. $18 = 3x\sqrt{3}$
74. $24 = 2x\sqrt{2}$
75. $9\sqrt{2} \cdot x = 18\sqrt{2}$
76. $2 = x \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8-3 المثلثات القائمة الخاصة

السابق
- استخدام خصائص المثلثات متساوية الساقين ومتساوية الأضلاع.

الحالي
1 استخدام خصائص المثلثات بزوايا 45° و45° و90°.
2 استخدام خصائص المثلثات بزوايا 30° و60° و90°.

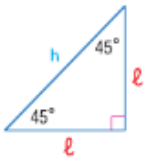
لماذا؟
- ضمن مجموعة أدوات أُعدت للطلاب الحاضرين اجتماع اتحاد الطلاب الإقليمي، طلبت حصة أقلام تظليل مثلثة الشكل. وأرادت شراء صناديق مستطيلة لأقلام التظليل وغيرها من الأدوات، لكنها قلقة بشأن احتمالية عدم استيعاب الصندوق الذي اشترته لأقلام التظليل. فإذا كانت تعلم أطوال ضلع في شكل قلم التظليل، فسيكون بإمكانها استخدام خصائص المثلثات الخاصة قائمة الزاوية لتحديد ما إذا كان الصندوق سيستوعب أقلام التظليل أم لا.

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 خصائص المثلثات بزوايا 45° و45° و90°

مثلثين قائمي الزاوية متطابقين ومتساويي الأضلاع. بما أن زوايا القاعدة في مثلث متساوي الأضلاع متطابقة، فإن قياس كل زاوية حادة هو 2 ÷ 90 أو 45. وهذا المثلث يُسمى أيضًا بمثلث بزوايا 45° و45° و90°.

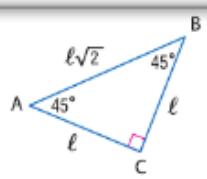
يمكنك استخدام نظرية فيثاغورس لإيجاد العلاقة بين أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية بزوايا 45° و45° و90°.



$\ell^2 + \ell^2 = h^2$	نظرية فيثاغورس
$2\ell^2 = h^2$	بسّط.
$\sqrt{2\ell^2} = \sqrt{h^2}$	خُذ الجذر التربيعي للطرفين.
$\ell\sqrt{2} = h$	بسّط.

هذا البرهان الجبري يبرهن على تطبيق النظرية التالية.

نظرية 8.8 نظرية المثلثات بزوايا قياساتها 45° و45° و90°



في مثلث بزوايا قياساتها 45° و45° و90°، يكون الساقان ℓ متطابقين وطول الوتر h يساوي $\sqrt{2}$ ضعف طول أحد الساقين.

الرموز في المثلث بزوايا قياساتها 45° و45° و90°، يكون $\ell = \ell$ و $h = \ell\sqrt{2}$.

مثال 1 إيجاد طول الوتر في مثلث بزوايا قياساتها 45° و45° و90°

أوجد x.

a.

قياس ساقي هذا المثلث قائم الزاوية متماثل، إذًا فهو مثلث متساوي الساقين. نظرًا لأن هذا مثلث بزوايا 45° و45° و90°، فاستخدم النظرية 8.8.

$h = \ell\sqrt{2}$	النظرية 8.8
$x = 6\sqrt{2}$	التعويض

b.

الزاويتان الحادتان في مثلث قائم الزاوية متتامتان، إذًا قياس الزاوية الثالثة هو 45 – 90 أو 45. نظرًا لأن هذا مثلث بزوايا 45° و45° و90°، فاستخدم النظرية 8.8.

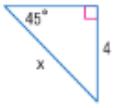
$h = \ell\sqrt{2}$	النظرية 8.8
$x = 9\sqrt{2} \times \sqrt{2}$	التعويض
$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$	$x = 9 \times 2$ أو 18

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

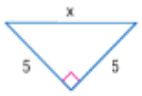
تمرين موجّه

أوجد *x*.

1A.



1B.

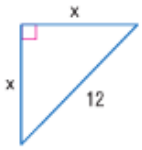


1C.

يمكنك أيضًا الحل بترتيب عكسي مستخدمًا النظرية 8.8 لإيجاد أطوال سيقان مثلث بزوايا 45° و45° و90° مع معرفة طول وتره.

مثال 2 إيجاد أطوال الساقين في مثلث بزوايا 45° و45° و90°

أوجد *x*.



ساقا المثلث قائم الزاوية لهما القياس ذاته، *x*.
إذًا يحتوي المثلث على زوايا 45° و45° و90°.
استخدم النظرية 8.8 لإيجاد *x*.

$h = \ell\sqrt{2}$	نظرية المثلث بزوايا 45° و45° و90°
$12 = x\sqrt{2}$	التعويض
$\frac{12}{\sqrt{2}} = x$	اقسم كل طرف على $\sqrt{2}$.
$\frac{12}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = x$	إنطاق المقام.
$\frac{12\sqrt{2}}{2} = x$	اضرب.
$6\sqrt{2} = x$	بسّط.

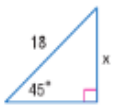
مراجعة المصطلحات

إنطاق المقام إحدى الطرق المستخدمة للتخلص من الجذور من مقام الكسر

تمرين موجّه

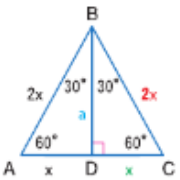
2A.

2B.



2 خصائص المثلثات بزوايا 30° و60° و90°

المثلث بزوايا 30° و60° و90° هو مثلث آخر خاص قائم الزاوية أو مثلث قائم الزاوية بأطوال أضلاع تتشارك في علاقة خاصة. يمكنك استخدام مثلث متساوي الأضلاع لإيجاد هذه العلاقة.عندما يمتد ارتفاع من أي رأس مثلث متساوي الأضلاع، فسيتكوّن منه مثلثان متطابقان بزوايا 30° و60° و90°. في الشكل الموضح، $\triangle ABD \cong \triangle CBD$.



إذًا $\overline{AD} \cong \overline{CD}$. إذا كان $AD = x$، فإن $CD = x$ و $AC = 2x$.
بما أن $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع، إذًا $AB = 2x$ و $BC = 2x$.

استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد a – طول ارتفاع $\overline{BD}$ والذي يعتبر الساق الأطول في $\triangle BDC$.

$a^2 + x^2 = (2x)^2$	نظرية فيثاغورس
$a^2 + x^2 = 4x^2$	بسّط.
$a^2 = 3x^2$	اطرح x^2 من كل طرف.
$a = \sqrt{3x^2}$	خُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين.
$a = x\sqrt{3}$	بسّط.

نصيحة دراسية

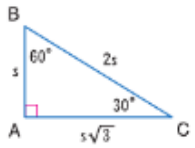
ارتفاع المثلثات متساوية الساقين لاحظ أن ارتفاع مثلث متساوي الساقين هو أيضًا متوسط المثلث. في الشكل الموجود على اليمين، إن $\overline{BD}$ ينصف $\overline{AC}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

هذا البرهان الجبري يبرهن على تطبيق النظرية التالية.

نصيحة دراسية
استخدام النِّسب أطوال أضلاع مثلث بزوايا °30 و°60 و°90 موضحة بنسبة 1 إلى $\sqrt{3}$ إلى 2 أو $1 : \sqrt{3} : 2$.

نظرية 8.9 نظرية المثلثات بزوايا قياساتها °30 و°60 و°90

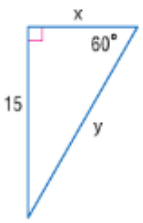


في مثلث بزوايا قياساتها °30 و°60 و°90، طول الوتر h يساوي ضعفي طول الساق الأقصر s، وطول الساق الأطول ℓ يساوي $\sqrt{3}$ ضعف طول الساق الأقصر.

الرموز في مثلث بزوايا قياساتها °30 و°60 و°90، فإن $h = 2s$ و $\ell = s\sqrt{3}$.

تذكّر أن الضلع الأقصر في المثلث هو الضلع المقابل للزاوية الأصغر. إذًا الساق الأقصر في مثلث بزوايا قياساتها °30 و°60 و°90 هو الضلع المقابل للزاوية °30، والساق الأطول مقابلة للزاوية °60.

مثال 3 إيجاد أطوال أضلاع مثلث بزوايا قياساتها °45 و°60 و°90



أوجد x و y.

الزوايتان الحادتان لمثلث قائم الزاوية متتامتان، إذًا قياس الزاوية الثالثة في هذا المثلث هو 90 − 60 أو 30. هذا مثلث زواياه هي °30 و°60 و°90.

استخدم نظرية 8.9 لإيجاد x، طول الضلع الأقصر.

النظرية 8.9 $\ell = s\sqrt{3}$

التعويض $15 = x\sqrt{3}$

اقسم كل طرف على $\sqrt{3}$. $\frac{15}{\sqrt{3}} = x$

إنطاق المقام. $\frac{15}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = x$

اضرب. $\frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = x$

$\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ $\frac{15\sqrt{3}}{3} = x$

بسّط. $5\sqrt{3} = x$

استخدم الآن نظرية 8.9 لإيجاد y، طول الوتر.

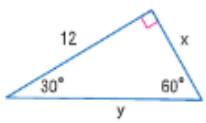
النظرية 8.9 $h = 2s$

التعويض $y = 2(5\sqrt{3})$ أو $10\sqrt{3}$

تمرين موجّه

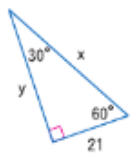
أوجد x و y.

3A.



3B.

3C.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يمكنك استخدام خصائص المثلثات بزوايا 30° و60° و90° والمثلثات بزوايا 45° و 45° و 90° لحل مسائل من الحياة اليومية.

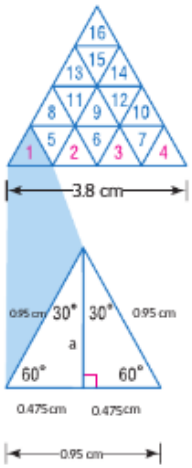
مثال 4 من الحياة اليومية استخدام خصائص المثلثات الخاصة قائمة الزاوية

الاختراعات قامت إحدى الشركات بتصنيع أقلام تلوين "مقاومة للدحرجة" من خلال إعدادها بشكل مثلثي بقواعد متساوية الأضلاع. ويتناسب حجم ستة عشرة قلمًا من أقلام التلوين هذه مع حجم صندوق له شكل منشور ثلاثي يبلغ عرضه 3.8 cm. ترتكز أقلام التلوين على نهاية الصندوق، كما أن قاعدة الصندوق متساوية الأضلاع. ما أبعاد كل قلم من أقلام التلوين؟

الفهم نعلم أن 16 قلم تلوين لها قواعد بشكل مثلث متساوي الأضلاع تتناسب داخل الشكل المنشوري. لذا، يلزم إيجاد طول القاعدة وارتفاعها لكل قلم تلوين.

التخطيط خمّن وتحقق لتحديد الترتيب اللازم لوضع 16 قلم تلوين من أجل تعبئة الصندوق. أوجد عرض قلم تلوين واحد واستخدم نظرية المثلث بزوايا 30° و60° و90° لإيجاد ارتفاعه.

الحل خمّن أن 4 أقلام تلوين متساوية الأضلاع سيتم استيعابها في قاعدة الصندوق. يُظهر الرسم أن إجمالي عدد أقلام التلوين اللازمة لتعبئة الصندوق بوضع 4 أقلام على القاعدة هو 16 قلمًا. ✓



عرض الصندوق هو 3.8 cm، إذًا عرض قلم واحد هو 3.8 ÷ 4 أو 0.95 cm.

ارسم مثلثًا متساوي الأضلاع يمثل قلم تلوين واحدًا. هل الارتفاع يشكّل الساق الأطول لمثلثين بزوايا 30° و60° و90°. استخدم نظرية 8.9 لإيجاد الطول التقريبي لارتفاع a.

طول الساق الأطول = **طول الساق الأقصر** × $\sqrt{3}$

$a = 0.475 \times \sqrt{3}$ أو حوالي 0.82

مقاس كل قلم تلوين هو 0.95 cm أو حوالي 1 cm في حوالي 0.8 cm.

التحقق أوجد ارتفاع الصندوق باستخدام نظرية المثلث بزوايا 30° و60° و90°. ثم اقسم على أربعة، بما أن الصندوق يساوي ارتفاع أربعة أقلام تلوين. النتيجة هي أن ارتفاع قلم التلوين هو حوالي 0.82 cm. ✓

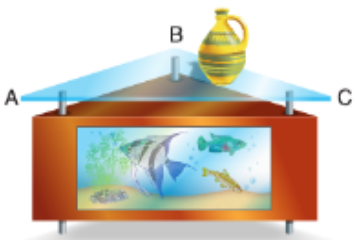
نصيحة في حل المسائل

خمّن وتحقق عند استخدام إستراتيجية التخمين والتحقق، ربما يكون من المفيد الاحتفاظ بقائمة تضم تلك التخمينات التي اجتهدت بالفعل للحصول عليها وعرفت بأنها لا تجدي نفعًا. في المثال 4، افترض أن التخمين الأول هو أن الصندوق يعرض 5 أقلام تلوين.

يوضح الرسم الخاص بهذه الاحتمالية أن هذا يؤدي إلى وضع 25 قلم تلوين وليس 16 قلمًا.

تمرين موجّه

4. الأثاث يمثل الجزء العلوي من طاولة القهوة المحتوية على حوض أسماك شكل مثلث قائم الزاوية متساوي الساقين. مقاس الضلع الأطول في الطاولة، $\overline{AC}$، يبلغ 107 cm. ما المسافة من الرأس B إلى الضلع $\overline{AC}$؟ ما طول الضلعين الآخرين؟

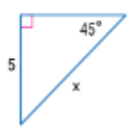


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

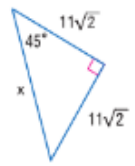
مثالان 1 و 2 أوجد x.

1.



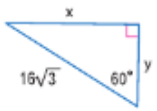
2.

3.

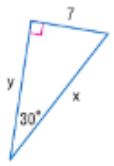


مثال 3 أوجد قيمة x وy.

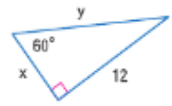
4.



5.



6.

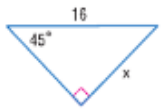


7. **الفن** يرسل جاسم بالبريد لوحة تقدير ارتفاعها $3\frac{1}{4}$ cm إلى الفائز في الشطرنج. كان لديه طرد بريدي على شكل منشور مثلثي بقاعدة مثلث متساوي الأضلاع مقاسه 4 cm كما هو موضح في الرسم التخطيطي. فهل ستتسع فتحة الطرد لدخول اللوحة؟ اشرح.

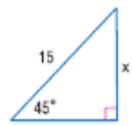
التمرين وحل المسائل

مثالان 1 و 2 **التفكير المنطقي** أوجد x.

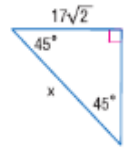
8.



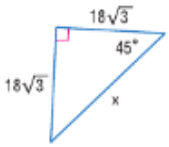
9.



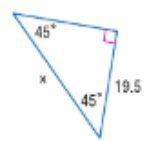
10.



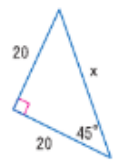
11



12.



13.



14. إذا كان مثلث بزوايا 45° و45° و90° به وتر بطول 9. فأوجد طول الساق.

15. حدد طول ساق مثلث بزوايا 45° و45° و90° طول وتره 11.

16. ما طول الوتر لمثلث بزوايا 45° و45° و90° إذا كان طول الساق 6 cm؟

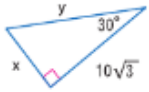
17. أوجد طول الوتر لمثلث بزوايا 45° و45° و90° يبلغ طول الساق به 8 cm.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

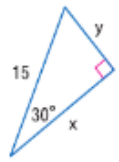
مثال 3 أوجد قيمة x و y.

18.

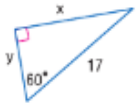
19.



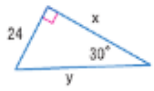
20.



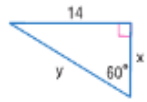
21.



22.



23.



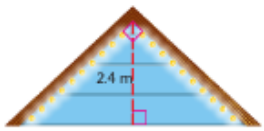
24. مثلث متساوي الأضلاع طول ارتفاعه 18 m. حدد طول أحد أضلاع المثلث.

25. أوجد طول ضلع مثلث متساوي الأضلاع طول ارتفاعه 24 m.

مثال 4

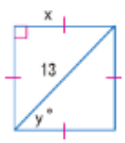
26. استخدام النماذج راجع بداية الدرس.
كل قلم تظليل هو عبارة عن مثلث متساوي الأضلاع بأضلاع يبلغ طولها 9 cm. فهل سيتم استيعاب قلم التظليل في صندوق أبعاده 10 cm في 7 cm؟ اشرح.

27. تنظم الفعاليات ستقيم فاطمة حفلة، وتريد تزيين الجزء العلوي من المنزل كما هو موضح. الجزء العلوي عبارة عن مثلث قائم الزاوية ومتساوي الأضلاع، وهي تعلمّ أن ارتفاع الجزء العلوي يبلغ 2.4 m. فما طول الأنوار التي ستحتاجها لتغطية الجزء العلوي أدنى مستوى السقف؟

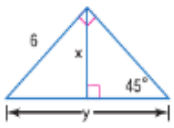


أوجد قيمة x و y.

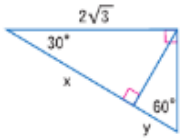
28.



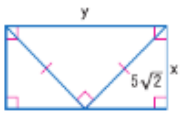
29.



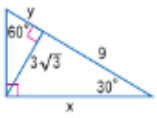
30.



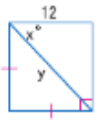
31.



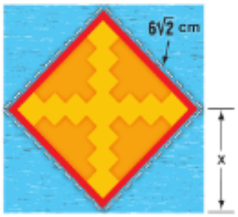
32.



33.

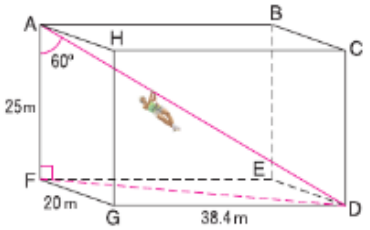


34. الألحفة قطعة اللحاف الموضحة مصنوعة من قطعة بشكل مربع وأربعة قطع بشكل مثلثات قائمة الزاوية ومتساوية الساقين. فما قيمة x؟ ما طول ضلع قطعة اللحاف بالكامل؟

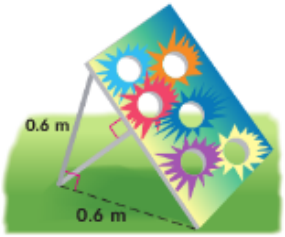


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

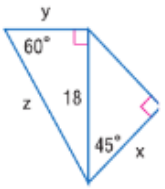
35 **حبل الانزلاق** افترض أن حبل انزلاق مرتكز على أحد أركان مسار على شكل منشور مستطيلي. بينما يرتكز الطرف الآخر على الركن المقابل كما هو موضح. إذا كان حبل الانزلاق يشكل زاوية 60° مع العمود $\overline{AF}$ فأوجد طول حبل الانزلاق AD.



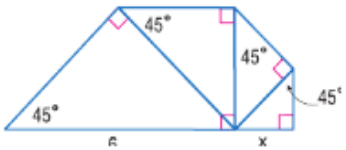
36. **الألعاب** يُصمم وليد لعبة التصويب لاحتفالية المدرسة. حيث استخدم دعامتين خلفيتين ارتفاعهما 0.6 m في وضع عمودي على الأرض على بعد 0.6 m من مقدمة اللوحة. كما أراد استخدام وسيلة دعم عمودية على اللوحة كما هو موضح في الرسم التخطيطي. ما مقدار الطول الذي يجب إعداده للدعم؟



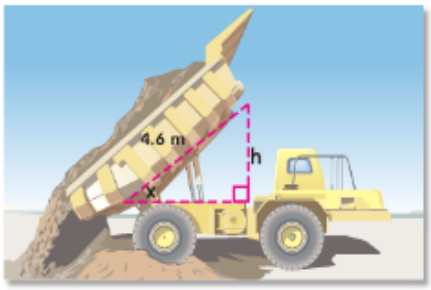
37. أوجد x و y و z.



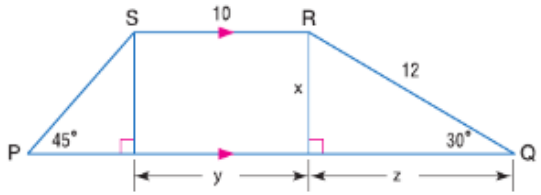
38. كل مثلث في الشكل هو مثلث بزوايا 45° و45° و90°. أوجد x.



39. **إعداد نموذج** يبلغ طول السيارة القلابة الموضحة 4.6 m. فما ارتفاع الحاوية h عندما تكون الزاوية x مقدارها 30°؟ 45°؟ 60°؟



40. أوجد x و y و z ومحيط شبه المنحرف $PQRS$.

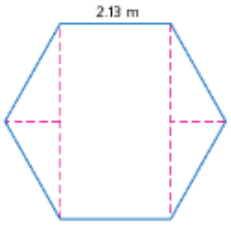


41. **الهندسة الإحداثية** $\triangle XYZ$ هو مثلث بزوايا 45° و45° و90° بزاوية قائمة Z. أوجد إحداثيات X في الربع الأول لكل من Y(-1, 2) و Z(6, 2).

42. **الهندسة الإحداثية** $\triangle EFG$ هو مثلث بزوايا 30° و60° و90° وفيه $m\angle F = 90$. أوجد إحداثيات E في الربع الثالث لصالح $F(-3, -4)$ و $G(-3, 2)$. $\overline{FG}$ هي الساق الأطول.

43. **الهندسة الإحداثية** $\triangle JKL$ هو مثلث بزوايا 45° و45° و90° بزاوية قائمة K. أوجد إحداثيات L في الربع الرابع لصالح $J(-3, 5)$ و $K(-3, -2)$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة



44. تنظيم الفعاليات حجزتْ هند مقصورة في حديقة عامة لإقامة حفلة. وتريد التأكد من توفر مساحة كافية لعدد 12 ضيفًا داخل الشرفة في الوقت ذاته. حيث ترغب في توفير مساحة 0.74 m مربع لكل ضيف. فإذا كانت أرضية الفرقة على شكل سداسي منتظم وكانت مساحة كل شكل منهما 2.13 m، فهل ستتوفر مساحة كافية لهند وصديقاتها؟ اشرح. (*إرشاد:* استخدم نظرية مجموع زوايا المضلع الداخلية وخصائص المثلثات الخاصة قائمة الزاوية.)

45. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستستكشف النِّسب في مثلثات قائمة الزاوية.

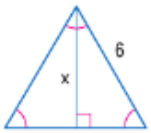
a. هندسيًا ارسم ثلاثة مثلثات قائمة الزاوية ومتشابهة تتضمن زاوية مقدارها 50°. سمِّ أحد المثلثات بالأحرف ABC بحيث تكون الزاوية A هي الزاوية القائمة وتكون الزاوية B بقياس 50°. وسمِّ المثلث الثاني بالأحرف MNP بحيث تكون الزاوية M هي الزاوية القائمة وتكون الزاوية N بقياس 50°. وسمِّ المثلث الثالث بالأحرف XYZ بحيث تكون الزاوية X هي الزاوية القائمة وتكون الزاوية Y بقياس 50°.

b. جدوليًا انسخ الجدول التالي وأكمله.

المثلث	الطول				النسبة	
ABC	AC		BC		$\frac{AC}{BC}$	
MNP	MP		NP		$\frac{MP}{NP}$	
XYZ	XZ		YZ		$\frac{XZ}{YZ}$	

c. بالكلمات خمّن نسبة الساق المقابلة للزاوية 50° إلى الوتر في أي مثلث قائم الزاوية به زاوية بقياس 50°.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا



46. التفكير النقدي تريد مها ومروة إيجاد x في المثلث الموضح. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح.

مها

$x = \frac{6\sqrt{3}}{2}$

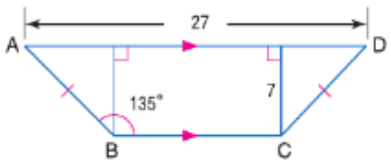
$x = 3\sqrt{3}$

مروة

$x = \frac{6\sqrt{2}}{2}$

$x = 3\sqrt{2}$

47. مسألة غير محددة الإجابة ارسم مستطيلاً له قطر يبلغ طوله ضعف عرضه. ثم اكتب معادلة لإيجاد طول المستطيل.



48. تحدٍ أوجد قطر الشكل رباعي الأضلاع $ABCD$.

49. التبرير النسبة بين قياسات الزوايا في مثلث هي 3:2:1. وطول الضلع الأقصر هو 8. فما محيط المثلث؟

50. الكتابة في الرياضيات لماذا تُعتبر بعض المثلثات قائمة الزاوية مثلثات خاصة؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تمرين على الاختبار المعياري

51. إذا كان طول الساق الأطول في مثلث بزوايا $30°$ و$60°$ و$90°$ هو $5\sqrt{3}$، فما طول الساق الأقصر؟

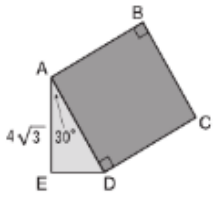
A 3 C $5\sqrt{2}$
B 5 D 10

52. الجبر أوجد حل $\sqrt{5-4x}-6=7$.

F -44 H 41
G -41 J 44

53. إجابة مختصرة الشكل $\triangle XYZ$ هو مثلث بزوايا قياساتها $45°$ و$45°$ و$90°$ به زاوية قائمة متمثلة في Y. أوجد إحداثيات X في الربع الثالث لكل من $Y(-3,\ -3)$ و $Z(-3,\ 7)$.

54. SAT/ACT في الشكل، أدناه، المربع $ABCD$ متصل بالشكل $\triangle ADE$ كما هو موضح. إذا كان قياس $m\angle EAD$ هو $30°$ وكانت AE تساوي $4\sqrt{3}$، فما مساحة المربع $ABCD$؟



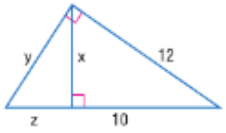
A $8\sqrt{3}$
B 16
C 64
D 72
E $64\sqrt{2}$

مراجعة شاملة

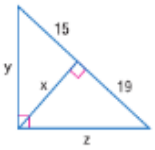
55. الرياضة قام أحمد بإعداد منحدر للقفز بالدراجة. وجزء تدعيم المنحدر يُشكّل زاوية قائمة. ويبلغ طول القاعدة 3.6 m، وارتفاعها 2.7 m. فما طول الخشب الرقائقي الذي سيحتاجه أحمد لإعداد المنحدر؟ (الدرس 2-8)

أوجد x و y و z. (الدرس 1-8)

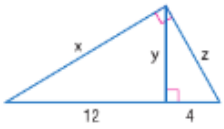
56.



57.



58.



أوجد قياسات زوايا كل مثلث.

59. نسبة قياسات الزوايا في مثلث هي $3:5:2$.

60. نسبة قياسات الزوايا في مثلث هي $10:8:6$.

61. نسبة قياسات الزوايا في مثلث هي $8:7:5$.

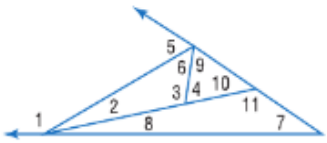
استخدم نظرية متباينة الزاوية الخارجية لإدراج جميع الزوايا المتوافقة للشرط المذكور.

62. قياسها أقل من $m\angle 5$

63. قياسها أكبر من $m\angle 6$

64 قياسها أكبر من $m\angle 10$

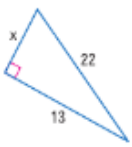
65. قياسها أقل من $m\angle 11$



مراجعة المهارات

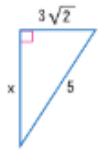
أوجد x.

66.



67.

68.



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

8-4 حساب المثلثات

السابق
- لقد استخدمتَ نظرية فيثاغورس لإيجاد الأطوال المفقودة في المثلثات القائمة.

الحالي
1. إيجاد النسب المثلثية باستخدام مثلثات قائمة الزاوية.
2. استخدام النسب المثلثية لإيجاد قياسات زاويا في مثلثات قائمة الزاوية.

لماذا؟
- يتم التعبير عن انحدار مسار رياضة المشي باسم *النسبة المئوية لدرجة الانحدار*. يبلغ انحدار الجزء الأكثر انحدارًا من مسار برايت أنجيل في متنزه جراند كانيون الوطني 15.7%. وهذا يعني أن مسار المشي يرتفع أو يهبط بمقدار 15.7 m عبر مسافة أفقية مقدارها 100 m. يمكنك استخدام نسب مثلثية لتحديد أن هذا الانحدار مكافئ لزاوية بقياس 9° تقريبًا.

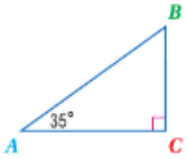
مفردات جديدة
- **حساب المثلثات** trigonometry
- **النسبة المثلثية** trigonometric ratio
- **جيب الزاوية** sine
- **جيب التمام** cosine
- **ظل الزاوية** tangent
- **معكوس الجيب** inverse sine
- **معكوس جيب التمام** inverse cosine
- **معكوس ظل الزاوية** inverse tangent

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها. استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

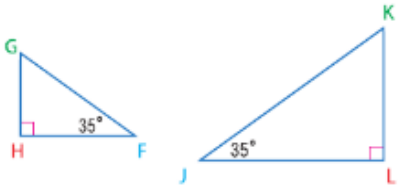
1 النسب المثلثية

حساب المثلثات كلمة مشتقة من مصطلحين إغريقيين هما *trigon* ومعناها مثلث، وكلمة *metron*، ومعناها قياس. تتضمن دراسة حساب المثلثات قياس المثلثات.

النسبة المثلثية هي نسبة أطوال ضلعين من مثلث قائم الزاوية. فنسبة مثلث واحد $\triangle ABC$ هي $\frac{AC}{AB}$.



استنادًا إلى تماثل AA، فإن المثلث قائم الزاوية بقياس زاوية حادة معيّنة يتشابه مع كل مثلث آخر قائم له قياس الزاوية الحادة ذاتها. إذًا، تُعد النسب المثلثية ثابتة لقياس زاوية معينة.



$\triangle ABC \cong \triangle FGH \cong \triangle JKL$, so $\frac{AC}{AB} = \frac{FH}{FG} = \frac{JL}{JK}$

أسماء أكثر النسب المثلثية شيوعًا موضحة أدناه.

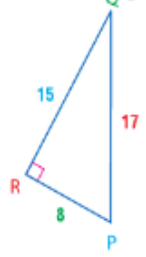
المفهوم الأساسي النسب المثلثية

الشرح	الرموز
إذا كان $\triangle ABC$ مثلثًا قائم الزاوية وكانت الزاوية $\angle A$ حادة، إذًا **sine** $\angle A$ (يكتب sin A) يمثل نسبة طول الساق المقابل $\angle A$ (opp) لطول الوتر (hyp).	$\sin A = \frac{opp}{hyp}$ أو $\frac{a}{c}$ $\sin B = \frac{opp}{hyp}$ أو $\frac{b}{c}$
إذا كان $\triangle ABC$ مثلثًا قائم الزاوية وكانت الزاوية $\angle A$ حادة، إذًا **cosine** $\angle A$ (يكتب cos A) يمثل نسبة طول الساق المشترك $\angle A$ (adj) لطول الوتر (hyp).	$\cos A = \frac{adj}{hyp}$ أو $\frac{b}{c}$ $\cos B = \frac{adj}{hyp}$ أو $\frac{a}{c}$
إذا كان $\triangle ABC$ مثلثًا قائم الزاوية وكانت الزاوية $\angle A$ حادة، إذًا **tan** $\angle A$ (يكتب tan A) يمثل نسبة طول الساق المقابل $\angle A$ (opp) لطول الساق المجاور $\angle A$ (adj).	$\tan A = \frac{opp}{adj}$ أو $\frac{a}{b}$ $\tan B = \frac{opp}{adj}$ أو $\frac{b}{a}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 1 إيجاد النسب الخاصة sine و Cosine و tan

عَبِّر عن كل نسبة بكسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.



a. $\sin P$

$$\sin P = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{15}{17} = 0.88$$

b. $\cos P$

$$\cos P = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{8}{17} = 0.47$$

c. $\tan P$

$$\tan P = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{15}{8} = 1.88$$

d. $\sin Q$

$$\sin Q = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} = \frac{8}{17} = 0.47$$

e. $\cos Q$

$$\cos Q = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} = \frac{15}{15} = 0.88$$

f. $\tan Q$

$$\tan Q = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{8}{17} = 0.53$$

نصيحة دراسية

تذكّر النسب المثلثية

SOH-CAH-TOA هي أداة مساعدة لمعرفة نسب sine و cosine و tan باستخدام الحرف الأول من كل كلمة في النِّسب.

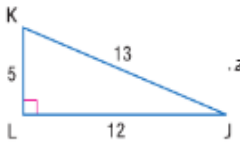
$$\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

$$\cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\tan A = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

تمرين موجّه

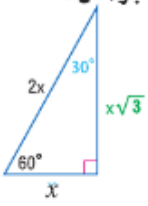
1. أوجد $\sin J$ و $\cos J$ و $\tan J$ و $\sin K$ و $\cos K$ و $\tan K$.
عَبِّر عن كل نسبة بكسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.



يمكن استخدام مثلثات خاصة قائمة الزاوية لتحديد sine و cosine و tan لزوايا 30° و60° و45°.

مثال 2 استخدام مثلثات خاصة قائمة الزاوية لإيجاد نسب مثلثية

استخدم مثلثًا قائم الزاوية للتعبير عن $\tan 30°$ بصيغة كسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.



ارسم أطوال الأضلاع لمثلث قائم الزاوية به الزوايا 30° و60° و90° واكتب بيانات الأضلاع على المثلث، مع اعتبار أن x هو طول الساق الأقصر.

الضلع المقابل للزاوية 30° يساوي قياس x.

الضلع المجاور للزاوية 30° يساوي قياس $x\sqrt{3}$.

$$\tan 30° = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$ تحديد نسبة الـ tan

$$= \frac{x}{x\sqrt{3}}$$ التعويض

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$ بسّط لإنطاق المقام.

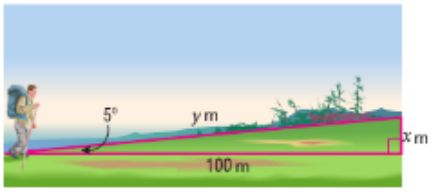
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$ أو حوالي 0.58 بسّط واستخدم الآلة الحاسبة.

تمرين موجّه

2. استخدم مثلثًا قائم الزاوية للتعبير عن $\cos 45°$ بصيغة كسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 من الحياة اليومية تقدير القياسات باستخدام حساب المثلثات



التجول سيرًا على الأقدام ينحدر أحد أجزاء منطقة المشي لأعلى بزاوية مقدارها 5°. وبعد السفر لمسافة أفقية مقدارها 100 m بطول هذا الجزء من منطقة المشي، فما مقدار التغيير في الوضع الرأسي لأحد المتجولين؟ وما مقدار المسافة التي قطعها المتجول بطول الطريق؟

لنفترض أن $m\angle A = 5$. إذًا التغيّر الرأسي في وضع المتجول هو x، وقياس الساق المقابلة $\angle A$. المسافة الأفقية المقطوعة هي 100 m وتمثل قياس الساق المجاورة لـ $\angle A$. بما أنه تم إيجاد طول الساق المقابلة والساق المجاورة لزاوية محددة، اكتب معادلة باستخدام نسبة ظل الزاوية.

$\tan A = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$ تحديد نسبة الـ tan

$\tan 5° = \frac{x}{100}$ التعويض

$100 \times \tan 5° = x$ اضرب كل طرف في 100.

استخدم الحاسية لإيجاد x.

100 TAN 5 ENTER 8.748866353

ازداد ارتفاع المتجول بمقدار 8.75 m عن نقطة بدء السير.

المسافة y المقطوعة بطول المسار هي طول الوتر، إذًا يمكنك استخدام نسبة cosine لإيجاد هذه المسافة.

$\cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$ تحديد نسبة الـ cosine

$\cos 5° = \frac{100}{y}$ التعويض

$y \times \cos 5° = 100$ اضرب كل طرف في y.

$y = \frac{100}{\cos 5°}$ اقسم كل طرف على 5°.

استخدم الحاسية لإيجاد y.

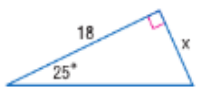
100 ÷ COS 5 ENTER 100.3818838

قطع المتجوّل مسافة 100.38 m تقريبًا بطول المسار.

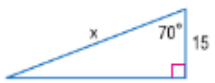
تمرين موجّه

أوجد x إلى أقرب جزء من مئة.

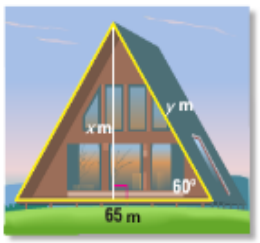
3A.



3B.



3C. الهندسة المعمارية تتخذ واجهة المتحف شكل مثلث متساوي الساقين. ما ارتفاع x للمتحف أعلى القاعدة الأساسية؟ ما طول y للسقف؟ اشرح استنتاجك.



الربط بالحياة اليومية

يتغير انحدار مسار الجري عدة مرات غالبًا. متوسط الانحدار هو متوسط عدة انحدارات متتابعة للمسار. والانحدار الأقصى هو القسم الأصغر من المسار الذي يتجاوز انحدار المسار القياسي. وغالبًا ما تتضمن المسارات انحدارات قصوى تكون أكثر انحدارًا من متوسط انحدار المسار.

الإدارة الفيدرالية للطرق السريعة

نصيحة دراسية

حاسبة التمثيل البياني تأكد من أن حاسبة التمثيل البياني في وضع الدرجات بدلاً من وضع الراديان.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

2 استخدام معكوس النسب المثلثية في المثال 2، وجدت أن $\tan 30° \approx 0.58$. يترتب على ذلك أنه إذا كان tan زاوية حادة هو 0.58، فإن قياس الزاوية هو 30 تقريبًا.

إذا كنت تعرف sine أو cosine أو tan الخاص بزاوية حادة، يمكنك استخدام آلة حاسبة لإيجاد قياس الزاوية، وهذا يُمثل معكوس النسبة المثلثية.

قراءة في الرياضيات

معكوس النسب المثلثية التعبير $\sin^{-1} x$ يتم تفسيره بأنه الزاوية $\sin x$. احرص على ألا تخلط هذه الصيغة بالصيغة الخاصة بالأسس السالبة

$\sin^{-1} x \neq -\frac{1}{\sin x}$

بدلاً من ذلك، هذه الصيغة تُشبه الصيغة الخاصة بمعكوس دالة، $f^{-1}(x)$.

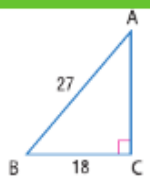
المفهوم الأساسي معكوس النسب المثلثية

الشرح	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة و $\sin A$ هو x، فإن $\sin^{-1} x$ هو قياس $\angle A$.
الرموز	إذا كان $\sin A = x$، فإن $\sin^{-1} x = m\angle A$.
الشرح	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة و $\cos A$ هو x، فإن $\cos^{-1} x$ هو قياس $\angle A$.
الرموز	إذا كان $\cos A = x$، فإن $\cos^{-1} x = m\angle A$.
الشرح	إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة و $\tan A$ الزاوية هو x، فإن $\tan^{-1} x$ هو قياس $\angle A$.
الرموز	إذا كان $\tan A = x$، فإن $\tan^{-1} x = m\angle A$.

لذا، إذا كان $\tan 30° \approx 0.58$، فإن $\tan^{-1} 0.58 \approx 30°$.

مثال 4 إيجاد قياسات الزاوية باستخدام معكوس النسب المثلثية

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قياس $\angle A$ مقربًا لأقرب جزء من عشرة.



موضح قياسات الساق المقابلة $\angle A$ والوتر في مثلث، فاكتب معادلة باستخدام نسبة sin الزاوية.

$\sin A = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$ $\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

إذا كانت $\sin A = \frac{2}{3}$، فإن $\sin^{-1} \frac{2}{3} = m\angle A$. استخدم الآلة الحاسبة.

خطوات العملية على الحاسبة: 41.8103149 [ENTER] [)] 3 [÷] 2 [(] [SIN^{-1}] [2nd]

إذًا، $m\angle A \approx 41.8°$.

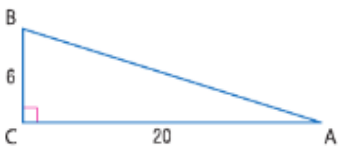
نصيحة دراسية

الأدوات استخدم حاسبة التمثيل البياني. الدوال الثانية للمفاتيح [SIN] و[COS] و[TAN] عادة ما تكون المعكوسات.

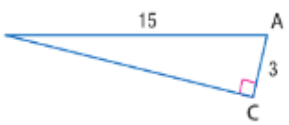
تمرين موجّه

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قياس $\angle A$ مقربًا لأقرب جزء من عشرة.

4A.



4B.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

عند استخدام القياسات المعطاة لإيجاد الزاوية المجهولة وقياسات الأضلاع للزاوية القائمة، فإن هذا يُعرف باسم *حل المثلث القائم الزاوية*. لحل مثلث قائم، يلزم معرفة

- أطوال ضلعين أو
- طول ضلع واحد وقياس زاوية واحدة حادة.

مثال 5 حل مثلث قائم الزاوية

حُـلّ المثلث قائم الزاوية. قرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب عدد عشري وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

الخطوة 1 أوجد $m\angle X$ باستخدام نسبة الظل.

$\tan X = \frac{9}{5}$ — $\tan X = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$

$\tan^{-1}\frac{9}{5} = m\angle X$ — تحديد $\tan^{-1}$

$60.8453859 \approx m\angle X$ — استخدم آلة حاسبة.

إذًا، $m\angle X \approx 61$.

الخطوة 2 أوجد $m\angle Y$ باستخدام النتيجة **8.1**، والتي تثبت أن الزوايا الحادة للمثلث قائم الزاوية هي زوايا متتامة.

$m\angle X + m\angle Y = 90$ — النتيجة 4.1

$61 + m\angle Y \approx 90$ — $m\angle X \approx 61$

$m\angle Y \approx 29$ — اطرح 61 من كل طرف.

إذًا، $m\angle Y \approx 29$.

الخطوة 3 أوجد XY باستخدام نظرية فيثاغورس.

$(XZ)^2 + (ZY)^2 = (XY)^2$ — نظرية فيثاغورس

$5^2 + 8^2 = (XY)^2$ — التعويض

$106 = (XY)^2$ — بسّط.

$\sqrt{106} = XY$ — خذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين.

$10.3 \approx XY$ — استخدم آلة حاسبة.

إذًا $XY \approx 10.3$.

نصيحة دراسية

وسائل بديلة يمكن حل الزوايا القائمة غالبًا بعدة وسائل مختلفة. في المثال 5، يمكن إيجاد $m\angle Y$ باستخدام نسبة الظل. كما يمكن استخدام $m\angle X$ ونسبة جيب زاوية لإيجاد XY.

انتبه!

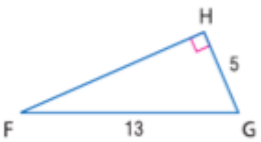
التقريب في حالة استخدام المقاييس المحسوبة لإيجاد مقاييس أخرى في مثلث قائم، فاحرص على عدم تقريب القيم وتأجيلها إلى الخطوة الأخيرة. إذًا، في المعادلة التالية، استخدم $\tan^{-1}\frac{9}{5}$ بدلاً من قيمته التقريبية، $61°$.

$$XY = \frac{9}{\sin X}$$
$$= \frac{9}{\sin\left(\tan^{-1}\frac{9}{5}\right)}$$
$$\approx 10.3$$

تمرين موجّه

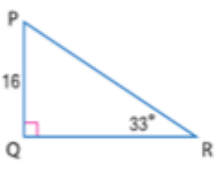
حل كل مثلث قائم الزاوية. قرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

5A.



5B.

5C.

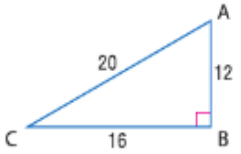


McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

التحقق من فهمك

مثال 1 **عَبِّر عن كل نسبة بكسر أو جزء من عشرة وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.**

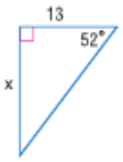
1. $\sin A$
2. $\tan C$
3. $\cos A$
4. $\tan A$
5. $\cos C$
6. $\sin C$



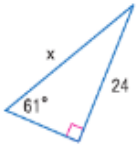
مثال 2 7. استخدم مثلثًا قائم الزاوية للتعبير عن $\sin 60°$ بصيغة كسر وكسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.

مثال 3 **أوجد x. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.**

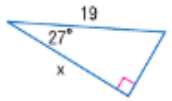
8.



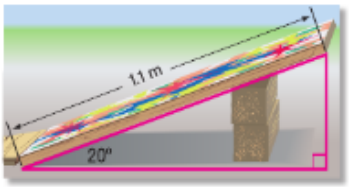
9.



10.

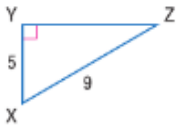


11. **الألعاب الرياضية** يقوم خالد ببناء مجرى منحدر للدراجات. ويريد أن تكون الزاوية التي يحدثها المجرى المنحدر مع الأرض بقياس $20°$. إذا كان طول اللوحة التي يريد استخدامها لإعداد مجرى المنحدر 1.1 m، فكم سيبلغ الارتفاع اللازم لمجرى المنحدر عند أعلى نقطة؟

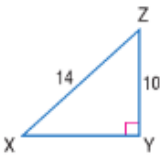


مثال 4 **الأدوات** **استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قياس $\angle Z$ إلى أقرب جزء من عشرة.**

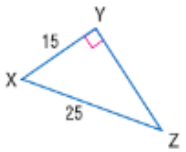
12.



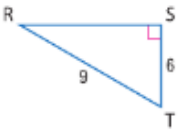
13.



14.



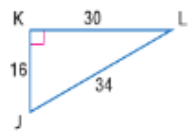
مثال 5 15. حل مثلث قائم الزاوية. قرّب قياسات الأضلاع إلى جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



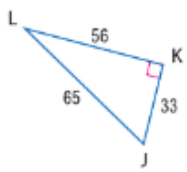
التمرين وحل المسائل

مثال 1 **أوجد $\sin J$ و$\cos J$ و$\tan J$ و$\sin L$ و$\cos L$ و$\tan L$. عبّر عن كل نسبة بكسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.**

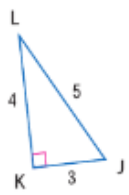
16.



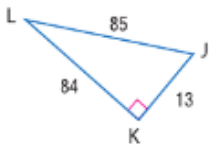
17.



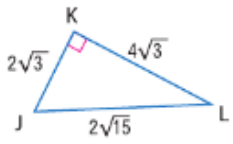
18.



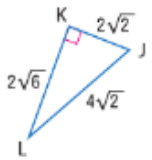
19.



20.



21.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

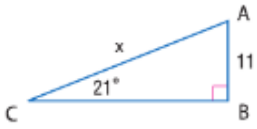
مثال 2 استخدم مثلثًا قائم الزاوية للتعبير عن كل نسبة مثلثية بكسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.

22. $\tan 60°$ **23.** $\cos 30°$ **24.** $\sin 45°$

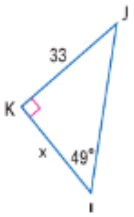
25. $\sin 30°$ **26.** $\tan 45°$ **27.** $\cos 60°$

مثال 3 أوجد x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

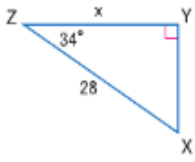
28.



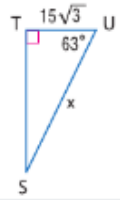
29.



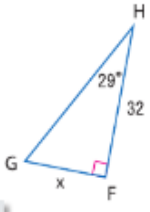
30.



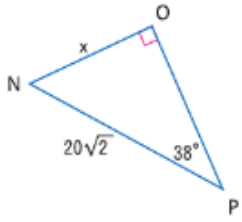
31.



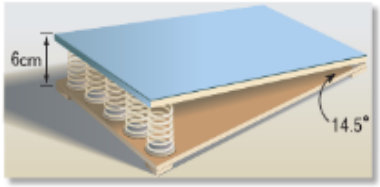
32.



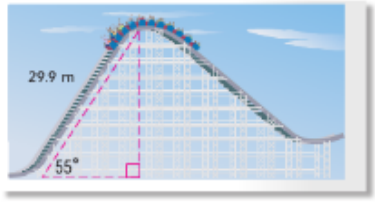
33.



34. الجمباز منصة الوثب التي يستخدمها وليد في صف التدريب على الجمباز تتضمن ملفات طولها 6 cm وتشكل زاوية مقدارها 14.5° مع القاعدة. فما مقدار طول منصة الوثب؟

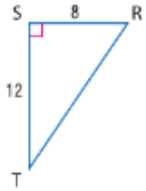


35. قطارات الملاهي تبلغ زاوية صعود أول مرتفع لقطار الملاهي 55°. إذا كان طول المسار من بداية المرتفع إلى أعلى نقطة هو 29.9 m، فما ارتفاع قطار الملاهي عندما يصل إلى قمة أول مرتفع؟

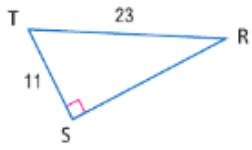


مثال 4 **الأدوات** استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قياس $\angle T$ إلى أقرب جزء من عشرة.

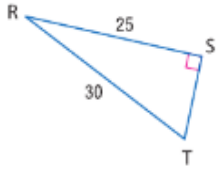
36.



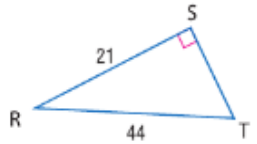
37.



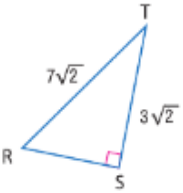
38.



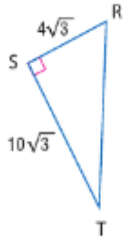
39.



40.



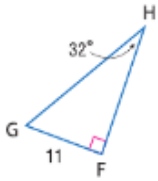
41.



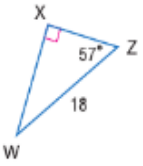
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 5 **حل كل مثلث قائم الزاوية. قرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.**

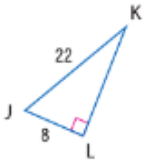
42.



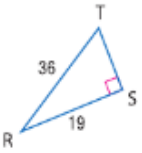
43.



44.



45.



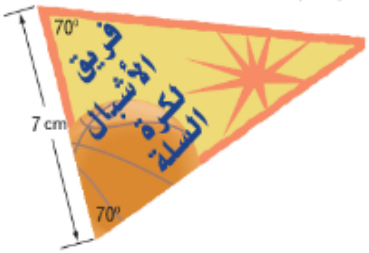
46. حقائب الظهر لدى سلطان حقيبة ظهر ذات عجلات يبلغ طولها 4 ft عند تمديد يد الحقيبة. عند سحب حقيبة الظهر، فإن يد سلطان تكون مرتفعة بمقدار 3 ft من الأرض. ما الزاوية التي تحدثها حقيبته مع الأرض؟ قرّب إلى أقرب درجة.

الهندسة الإحداثية أوجد قياس كل زاوية إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة باستخدام قانون المسافة ومعكوس النسب المثلثية.

47. $\angle K$ في المثلث قائم الزاوية JKL بالرؤوس $L(-2, 4)$ و $K(-7, -3)$ و $J(-2, -3)$

48. $\angle Y$ في المثلث قائم الزاوية XYZ بالرؤوس $Z(-2, 7)$ و $Y(-6, 3)$ و $X(4, 1)$

49. $\angle A$ في المثلث قائم الزاوية ABC بالرؤوس $C(8, -3)$ و $B(3, -3)$ و $A(3, 1)$



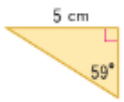
50. روح الدعم بالمدارس تقوم هنا بإعداد علَم مثلث لكل فتاة من 18 فتاة في فريق كرة السلة لديها. ستستخدم شريطًا مقاس $\frac{1}{2}$ cm لإضفاء اللمسات النهائية لحواف العلم المثلث.

a. فما طول الشريط اللازم للمسات النهائية للعلم المثلث إجمالاً؟

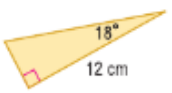
b. إذا كان الشريط يُباع في مجموعات طولها 2.7 m بسعر 6.57 AED، فكم ستبلغ التكلفة؟

الاستنتاج المنطقي أوجد محيط ومساحة كل مثلث. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

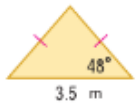
51.



52.

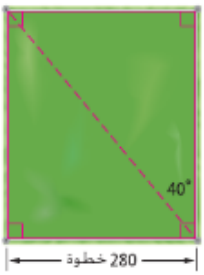


53.



54. أوجد **tan** الزاوية الحادة الأكبر في مثلث أطوال أضلاعه 3 cm و 4 cm و 5 cm.

55. أوجد **cosine** الزاوية الحادة الأصغر في مثلث أطوال أضلاعه 10 cm و 24 cm و 26 cm.

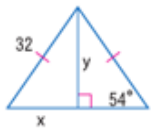


56. التقدير يريد وليد وطارق تقدير منطقة الملعب الذي سيستخدمه فريقهما للتدريب على كرة القدم. ويعلمان بأن الملعب مستطيل الشكل، وقاسا عرض الملعب بالقدم كما هو موضح. حيث استخدما أعمدة سياج عند أركان الملعب لتقدير أن الزاوية الواقعة بين طول الملعب وبين الخط القُطري تبلغ حوالي 40°. إذا قاما بافتراض أن كل خطوة من خطواتهما تبلغ حوالي 45.7 cm، فما مساحة ملعب التدريب بالمتر المربع؟ قرّب إلى أقرب جزء من المتر المربع.

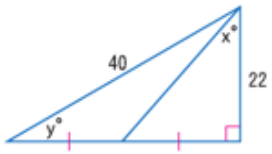
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

أوجد قيمة x و y. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

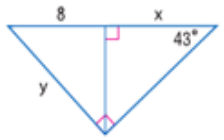
57



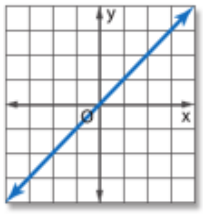
58.



59.



60. الهندسة الإحداثية وضّح أن ميل أحد الخطوط عند 225° من المحور x مساويًا لظل الزاوية 225°.



61. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سنبحث في العلاقة الجبرية بين نسب **sine** و**cosine**.

a. التمثيل الهندسي ارسم ثلاثة مثلثات قائمة لا يشبه أحدها الآخر. قم بتسمية المثلثات ABC وMNP وXYZ، بحيث تكون الزوايا القائمة في الرأس B وN وY على الترتيب. قم بقياس وتسمية كل ضلع من المثلثات الثلاثة.

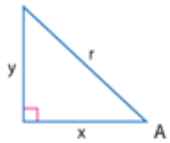
b. التمثيل الجدولي انسخ الجدول التالي وأكمله.

المثلث	النسب المثلثية				مجموع النسب المربعة	
ABC	$\cos A$		$\sin A$		$(\cos A)^2 + (\sin A)^2 =$	
	$\cos C$		$\sin C$		$(\cos C)^2 + (\sin C)^2 =$	
MNP	$\cos M$		$\sin M$		$(\cos M)^2 + (\sin M)^2 =$	
	$\cos P$		$\sin P$		$(\cos P)^2 + (\sin P)^2 =$	
XYZ	$\cos X$		$\sin X$		$(\cos X)^2 + (\sin X)^2 =$	
	$\cos Z$		$\sin Z$		$(\cos Z)^2 + (\sin Z)^2 =$	

c. التمثيل اللفظي خمّن فرضية عن مجموع مربع **sine** و **cosine** لزاوية حادة بمثلث قائم الزاوية.

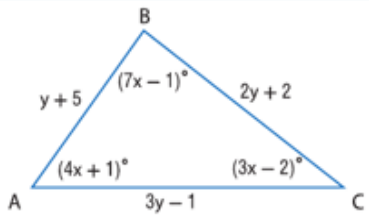
d. التمثيل الجبري عبّر عن تخمينك للزاوية X جبريًا

e. التمثيل التحليلي وضّح أن التخمين صالح للزاوية A في الشكل الموضّح على اليمين باستخدام دوال مثلثية ونظرية فيثاغورس.



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

62. تحدٍ حلّ $\triangle ABC$. قرّب إلى أقرب عدد كلي.



63. التبرير هل قيم **sine** و **cosine** لزاوية حادة من مثلث قائم الزاوية تكون دائمًا أقل من 1؟ اشرح.

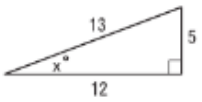
64. التبرير ما العلاقة بين **sine** و **cosine** للزوايا المتتامة؟ اشرح استنتاجك واستخدم العلاقة لإيجاد $\cos 50$ إذا كان $\sin 40 \approx 0.64$.

65. الكتابة في الرياضيات اشرح كيف يمكنك استخدام نسب أطوال الأضلاع لإيجاد قياسات الزاوية الخاصة بزوايا حادة لمثلث قائم الزاوية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين على الاختبار المعياري

66. ما قيمة $\tan x$؟



A $\tan x = \frac{13}{5}$

B $\tan x = \frac{12}{5}$

C $\tan x = \frac{5}{13}$

D $\tan x = \frac{5}{12}$

67. الجبر أيّا مما يلي له القيمة ذاتها مثل $2^3 \times 2^{-12}$؟

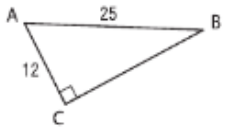
F 2^{-36}

G 4^{-9}

H 2^{-9}

J 2^{-4}

68. إجابة شبكية إذا كان $AC = 12$ و $AB = 25$، فما قياس $\angle B$ مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة؟



69. SAT/ACT تبلغ مساحة مثلث قائم الزاوية $240\ in^2$. إذا كان طول القاعدة 30 in، فما مقدار طول الوتر بالبوصة؟

A 5

B 8

C 16

D $2\sqrt{241}$

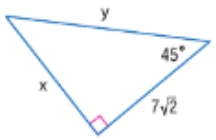
E 34

مراجعة شاملة

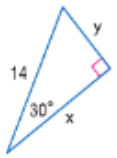
أوجد x و y. (الدرس 8-3)

70.

71.



72.



حدد ما إذا كانت أي مجموعة أعداد من المجموعات التالية يمكن أن تكون قياسات لأضلاع مثلث. إذا كان الأمر كذلك، فصنّف المثلث على أنه *حاد* أو *منفرج* أو *قائم* الزاوية. علل إجابتك. (الدرس 8-2)

73. 8, 15, 17

74. 11, 12, 24

75. 13, 30, 35

76. 18, 24, 30

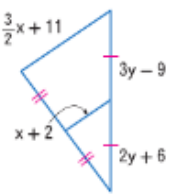
77. 3.2, 5.3, 8.6

78. $6\sqrt{3}$, 14, 17

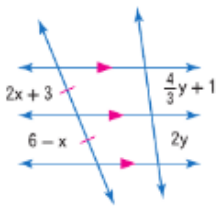
79. الخرائط يُقدَّر القياس على خريطة نيو مكسيكو بأن كل 2 cm = 160 mi. يبلغ عرض نيو مكسيكو عبر ألبوكيرك على الخريطة 4.1 cm. فما المدة اللازمة لاجتياز نيو مكسيكو إذا كنت تقود بسرعة 60 mi/h؟

الجبر أوجد قيمة x و y.

80.



81.



مراجعة المهارات

حل كلاً من التناسبات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.

82. $2.14 = \frac{x}{12}$

83. $0.05x = 13$

84. $0.37 = \frac{32}{x}$

85. $0.74 = \frac{14}{x}$

86. $1.66 = \frac{x}{23}$

87. $0.21 = \frac{33}{x}$

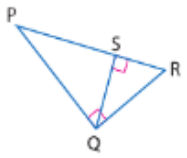
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

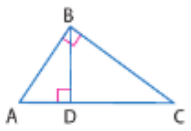
اختبار منتصف الوحدة
الدروس من 1-8 إلى 4-8

أوجد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد. (الدرس 1-8)

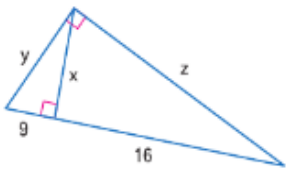
1. 3 و 12
2. 7 و 63
3. 20 و 45
4. 10 و 50

اكتب عبارة تَماثُل لتوضيح المثلثات الثلاثة المتماثلة في كل شكل. (الدرس 1-8)

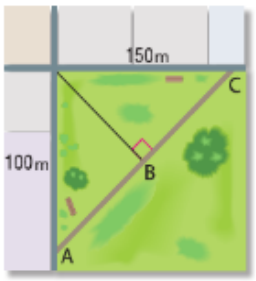
5. 

6. 

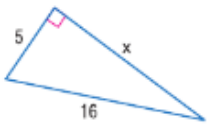
7. أوجِد x و y و z. (الدرس 1-8)



8. **ساحات الانتظار** هناك ساحة انتظار صغيرة عند زاوية شارعين متقاطعين. أبعاد ساحة الانتظار 100 m في 150 m بمسار مائل (قطري) كما هو موضح أدناه. ما طول المسار $\overline{AC}$؟ (الدرس 2-8)



أوجد x. قرّب إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 2-8)

9. 

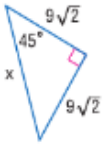
10.

11. **الاختيار من متعدد** أيّ من مجموعات الأعداد التالية لا يتوافق مع ثلاثية فيثاغورس؟ (الدرس 2-8)

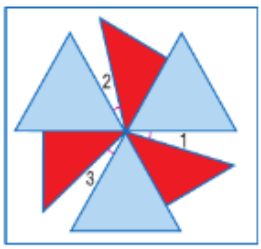
A 9, 12, 15
B 21, 72, 75
C 15, 36, 39
D 8, 13, 15

أوجد x. (الدرس 3-8)

12.

13. 

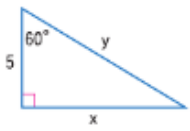
14. **تصميمات** صممتْ سهى مروحة لوضعها في حديقتها. المثلثات الزرقاء في المروحة متساوية الأضلاع ومتطابقة وارتفاع كل منها 4 cm. المثلثات الحمراء مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة بزوايا قائمة. وتر المثلث الأحمر متطابق مع أحد أضلاع المثلث الأزرق. (الدرس 3-8)

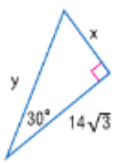


a. إذا كانت الزوايا 1 و 2 و 3 متطابقة، فأوجِد قياس كل زاوية.

b. أوجِد محيط المروحة.

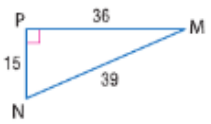
أوجد x و y. (الدرس 3-8)

15. 

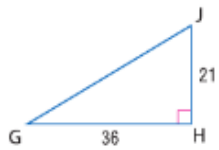
16. 

عَبِّر عن كل نسبة بكسر وكسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة. (الدرس 4-8)

17. $\tan M$
18. $\cos M$
19. $\cos N$
20. $\sin N$



21. حَـلّ المثلث قائم الزاوية. قَرِّب قياسات الزاويا لأقرب درجة وأطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة. (الدرس 4-8)



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8-5 زوايا الارتفاع والانخفاض

السابق
- استخدمت مثلثات متماثلة لقياس المسافات بطريقة غير مباشرة.

الحالي
1. حل المسائل التي تتضمن زوايا ارتفاع وانخفاض.
2. استخدام زوايا الارتفاع والانخفاض لإيجاد المسافة بين جسمين.

لماذا
- لتسجيل هدف في المرمى، لا بد أن يركل اللاعب الكرة بقوة كافية وزاوية ارتفاع مناسبة للتأكد من أن الكرة ستصل لعارضة المرمى بمستوى مرتفع بما يكفي حتى تمر فوق العارضة الأفقية ويتم تسجيل الهدف. لا بد من أن تتغير هذه الزاوية اعتمادًا على الوضع المبدئي للكرة من حيث بعدها عن قاعدة العارضة.

مفردات جديدة
زاوية الارتفاع
angle of elevation
زاوية الانخفاض
angle of depression

ممارسات في الرياضيات
استخدام نماذج الرياضيات.
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 زوايا الارتفاع والانخفاض

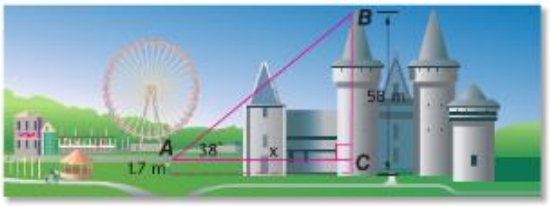
زاوية الارتفاع هي الزاوية التي تتكون من خط أفقي وخط (مسار) الرؤية للمُراقب تجاه هدف فوق الخط الأفقي.

زاوية الانخفاض هي زاوية تتكون من خط أفقي وخط رؤية المراقب تجاه هدف أدنى من الخط الأفقي.

الخطوط الأفقية متوازية، لذا فإن زاويتي الارتفاع والانخفاض في الرسم التخطيطي ستكونان متطابقتين بنظرية الزوايا الداخلية المتبادلة.

مثال 1 زاوية الارتفاع

العطلة **تريد سالي رؤية القلعة في مدينة الملاهي. وترى قمة القلعة بزاوية ارتفاع تبلغ 38°. وتعلمُ أن القلعة ارتفاعها 58 m. فإذا كان طول سالي 1.7 m، فكم تبعد عن القلعة لأقرب m؟**



ارسم رسمًا تصوريًّا لهذه الحالة.

نظرًا لأن طول سالي 1.7 m، فإن $BC = 57 - 1.7$ أو 55.3 m. افترض أن x تمثل المسافة بين سالي والقلعة AC.

$\tan A = \frac{BC}{AC}$ $\quad \tan = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$

$\tan 38° = \frac{55.3}{x}$ $\quad m\angle A = 38,\ BC = 184.5,\ AC = x$

$x = \frac{55.3}{\tan 38°}$ $\quad$ أوجد قيمة x

$x \approx 71$ $\quad$ استخدم الحاسبة

تبعد سالي بحوالي 71 m عن القلعة.

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

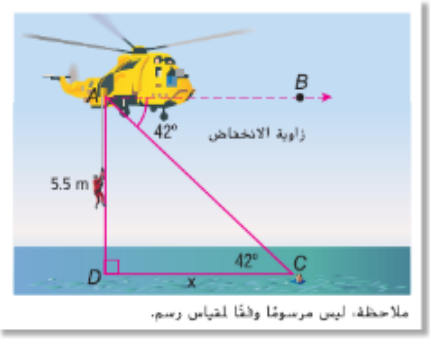
تمرين موجّه

1. **كرة القدم** العارضة الأفقية للمرمى ارتفاعها 10 ft. إذا تمت محاولة التهديف من مسافة 22.9 ft من قاعدة عارضة المرمى وأخطأت الهدف بمسافة قدم واحد، فما أصغر زاوية ارتفاع كان يمكن أن تُركل منها الكرة لأقرب درجة؟

مثال 2 زاوية الانخفاض

الطوارئ ينتشل فريق البحث والإنقاذ بالطائرة أشخاصًا من موقع حادثة قارب عند ملاحظة شخص آخر في حاجة للمساعدة. إذا كانت زاوية انخفاض ذلك الشخص الآخر هي 42° والطائرة على ارتفاع 5.5 m فوق سطح الماء، فما المسافة الأفقية بدءًا من فريق الإنقاذ حتى هذا الشخص لأقرب m؟

ارسم رسمًا تصوريًّا لهذه الحالة.



ملاحظة: ليس مرسومًا وفقًا لمقياس رسم.

نظرًا لأن $\overrightarrow{AB}$ و $\overline{DC}$ متوازيان، فإن $m\angle BAC = m\angle ACD$ حسب نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة.

افترض أن x تمثل المسافة الأفقية من فريق الإنقاذ إلى الشخص DC.

$\tan C = \frac{AD}{DC}$ $\quad \tan = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$

$\tan 42° = \frac{5.5}{x}$ $\quad DC = x$ و $AD = 5.5$ و $C = 42$

$x \tan 42° = 5.5$ $\quad$ اضرب كل ضلع في x

$x = \frac{5.5}{\tan 42°}$ $\quad$ اقسم كل من الطرفين على $\tan 42°$

$x \approx 6.1$ $\quad$ استخدم الحاسبة

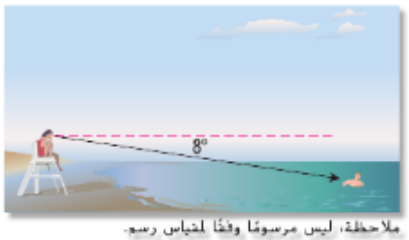
إذًا، فالمسافة الأفقية بين الشخص والطائرة تبلغ حوالي 6 m.

انتبه!
زوايا الارتفاع والانخفاض لتفادي الخطأ، تذكر أن زوايا الارتفاع والانخفاض تتشكل دائمًا بخط أفقي وليس رأسي على الإطلاق.

الربط بتاريخ الرياضيات
إراتوستينس (194–276ق.م)
كان إراتوستينس عالم رياضيات وفلك، وولد في قوريني وهي الآن ليبيا. استخدم زاوية ارتفاع الشمس في وقت الظهر في مدينتي الإسكندرية وأسوان (في مصر) لقياس محيط الأرض.
المصدر: موسوعة بريتانيكا

تمرين موجّه

2. **الإنقاذ** يراقب أحد المنقذين الشاطئ من مسار رؤية بمسافة 1.8 m فوق سطح الأرض. ويرى أحد الأشخاص يسبح في الماء بزاوية انخفاض قدرها 8°. فكم يبعد ذلك الشخص من برج المراقبة؟



ملاحظة: ليس مرسومًا وفقًا لمقياس رسم.

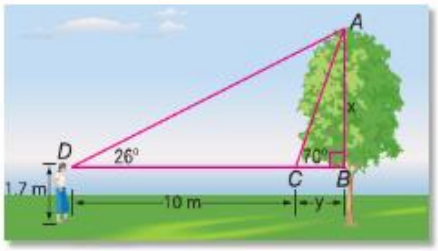
2 زاويتا الارتفاع والانخفاض

يمكن استخدام زوايا الارتفاع أو الانخفاض لجسمين مختلفين لتحديد المسافة بين هذين الجسمين. وبالمثل، يمكن استخدام الزوايا من موقعين مختلفين لملاحظة نفس الجسم لتحديد ارتفاع الشيء.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 استخدام زاويتي ارتفاع أو انخفاض

اقتلاع الأشجار لكي تُحدد سهى ارتفاع شجرة تريد اقتلاعها، ترى أن قمة الشجرة بزاوية ارتفاع 70°. ثم تراجعت 10 m للخلف ورأت القمة بزاوية 26°. إذا كان خط رؤية سهى يرتفع عن الأرض بمقدار 1.7 m، فما طول الشجرة لأقرب m؟



الفهم $\triangle ABD$ و $\triangle ABC$ مثلثان بزاوية قائمة. ارتفاع الشجرة هو مجموع طول سهى و AB.

التخطيط نظرًا لأن المسافة المبدئية بينها وبين الشجرة غير معروفة، فاكتب وحل نظام معادلات باستخدام كلا المثلثين. افترض أن $AB = x$ و $CB = y$.
لذا $DB = y + 10$ وارتفاع الشجرة $x + 1.7$.

الحل استخدم $\triangle ABC$.

$$\tan 70° = \frac{x}{y} \qquad \tan = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}};\ m\angle ACB = 70$$

$$y \tan 70° = x \qquad \text{اضرب كل طرف في } y$$

استخدم $\triangle ABD$.

$$\tan 26° = \frac{x}{y + 10} \qquad \tan = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}};\ m\angle D = 26$$

$$(y + 10) \tan 26° = x \qquad \text{اضرب كل ضلع في } y + 10$$

عوّض عن قيمة x من $\triangle ABD$ في المعادلة لـ $\triangle ABC$ وحل لإيجاد قيمة y.

$$y \tan = x$$

$$y \tan 70° = (y + 10) \tan 26°$$

$$y \tan 70° = y \tan 26° + 10 \tan 26°$$

$$y \tan 70° - y \tan 26° = 10 \tan 26°$$

$$y(\tan 70° - \tan 26°) = 10 \tan 26°$$

$$y = \frac{10 \tan 26°}{\tan 70° - \tan 26°}$$

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد أن $y \approx 2.16$. باستخدام المعادلة من $\triangle ABC$، فإن $x = 2.16 \tan 70°$ أو حوالي 5.9.

ارتفاع الشجرة يساوي 5.9 + 1.7 أو 7.6، أي حوالي 8 m.

التحقق عوّض قيمة y في المعادلة من $\triangle ABD$.

$x = (2.16 + 10) \tan 26°$ أو حوالي 5.9. هذه هي نفس القيمة الناتجة عن استخدام المعادلة من $\triangle ABC$. ✓

تمرين موجّه

3. **ناطحات السحاب** مبنيان مرئيان من أعلى ناطحة سحاب ارتفاعها 200 m. المبنى "أ" يُرى من زاوية انخفاض 35° والمبنى "ب" يُرى من زاوية انخفاض 36°. فكم يبعد المبنيان عن بعضهما لأقرب m؟

الربط بالحياة اليومية

في الولايات المتحدة، تُقاس كمية الخشب بالقدم اللوحي، وهي قطعة خشب تشتمل على قياس 2360 cm مكعبة. غالبًا ما يُقدّر أصحاب مزارع أشجار الخشب كمية خشب الأشجار لديهم لتحديد الكمية التي يريدون قطعها وبيعها.

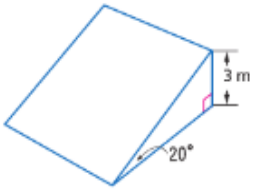
المصدر: كلية الموارد الطبيعية بجامعة ولاية أوهايو

نصيحة دراسية

القياس غير المباشر عند استخدام زوايا الانخفاض لجسمين مختلفين لحساب المسافة بينهما، من المهم أن تتذكر أن الجسمين يجب أن يكونا على نفس المستوى الأفقي. بمعنى آخر، لا يجوز أن يكون أحدهما أعلى أو أسفل الآخر.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك



مثال 1

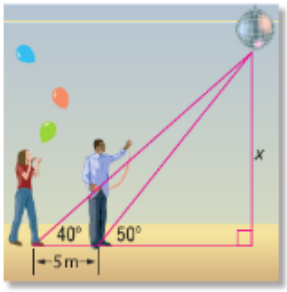
1. **ركوب الدراجات** تريد شيماء أن تبني منحدر الدراجات الموضح هنا. أوجِد طول قاعدة المنحدر.

مثال 2

2. **كرة القدم** يجلس مُشَجِّع في المنصة العلوية من الاستاد على بعد 61 m من القاعدة الرئيسية. إذا كانت زاوية الانخفاض للملعب هي 62°، فما ارتفاع مكان المُشجع؟

مثال 3

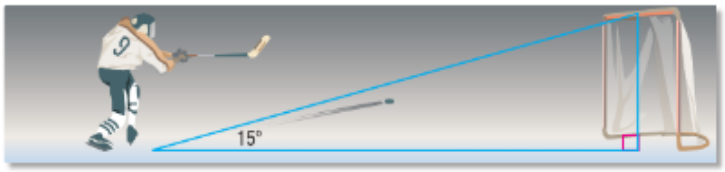
3. **استخدام النماذج** تعمل رنا وزوجها أحمد على تعليق الزينة للحفل المدرسي. ويقف أحمد على بعد 5 m أمام رنا وتحت كرة الزينة مباشرة. فإذا كانت زاوية الارتفاع من رنا للكرة 40° ومن أحمد للكرة 50° فما ارتفاع كرة الزينة؟



التمرين وحل المسائل

مثال 1

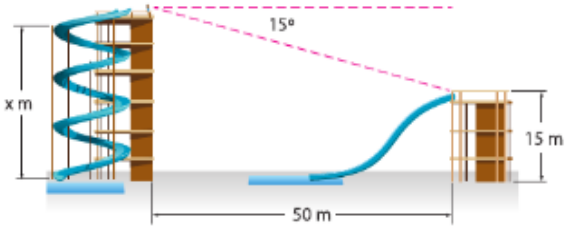
4. **الهوكي** يضرب لاعب هوكي القرص من على بُعد 6 m باتجاه مرمى بارتفاع 1.5 m. إذا تم ضرب القرص بزاوية ارتفاع 15° باتجاه منتصف المرمى، فهل سيسجل اللاعب هدفًا؟



5. **الجبال** أوجِد زاوية ارتفاع قمة جبل يراها المشاهد من بعد 155 m من الجبل إذا كان المشاهد يقف على ارتفاع 1.5 m من الأرض علمًا بأن ارتفاع الجبل هو 350 m.

مثال 2

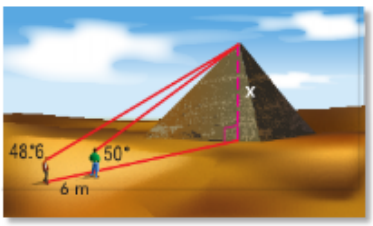
6. **الملاهي المائية** منحدرا تزحلق مائيتان يبعدان عن بعضهما 50 m على مستوى الأرض. من قمة منحدر التزحلق الأعلى، نستطيع رؤية قمة منحدر التزحلق الأقل ارتفاعًا بزاوية انخفاض 15°. إذا علمتَ أن ارتفاع منحدر التزلق الأخرى حوالى 15 m من سطح الأرض فما ارتفاعك تقريبًا من سطح الأرض؟ قرّب إلى أقرب عَشَر m.



7. **الطيران** بسبب عاصفة، يطير طيّار على ارتفاع 528 m ولا بد من أن يهبط بالطائرة. إذا كان ما زالت لديه مسافة أفقية 2000 m حتى الهبوط، فبأي زاوية انخفاض يجب أن يهبط؟

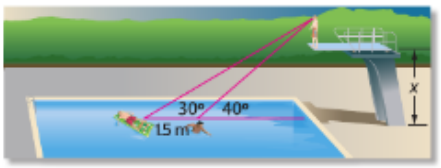
مثال 3

8. **الأهرامات** يزور كل من أحمد وعلي الهرم الأكبر في مصر. بدءًا من مكان أحمد، تبلغ زاوية الارتفاع لقمة الهرم 48.6°. ومن مكان علي، تبلغ زاوية الارتفاع 50°. فإذا كانا يقفان على بعد 6 m من بعضهما، وكلاهما طوله 1.7 m، فما ارتفاع الهرم؟

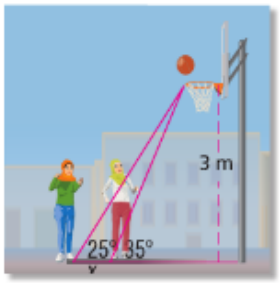


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

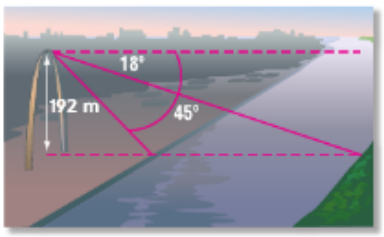
9 **رياضة الغوص** يقف محمد على لوح القفز الأعلى في حمام السباحة المحلي. وفي الماء، يوجد اثنان من أصدقائه كما هو مَوضّح. فإذا كانت زاوية الانخفاض لأحد أصدقائه هي 40° وللآخر 30° الذي يبعد عن الأول بمسافة 1.5 m للوراء، فما ارتفاع لوح القفز؟



10. **كرة السلة** تنتظر رنا وحصة ارتدادًا في مباراة كرة سلة. فإذا كان ارتفاع الحلقة 3 m وزاوية الارتفاع بين رنا والمرمى 35° وزاوية الارتفاع بين حصة والمرمى 25°، فما المسافة بينهما؟

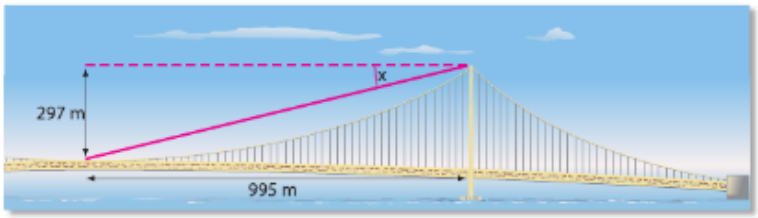


11. **الأنهار** يقف محمد على قمة قوس سانت لويس وينظر للأسفل على نهر المسيسيبي. وتبلغ زاوية الانخفاض تجاه ضفة النهر الأقرب 45° وزاوية انخفاض الضفة الأبعد 18°. ويبلغ ارتفاع القوس 192 m. قدّر عرض النهر في تلك النقطة.



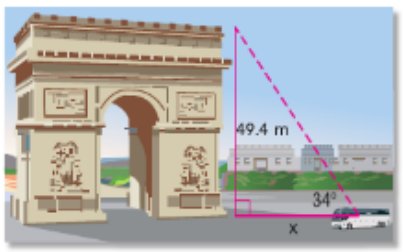
12. **استخدام النماذج** يشتمل بركان أونزن باليابان على حوض حمم على بعد 15 km أسفل خليج تشيجيوا الذي يقع شرق البركان. وترتفع قناة الحمم التي تصل بين البركان وحوض الحمم بزاوية ارتفاع 40° باتجاه البركان. فما طول قناة الحمم تحت مستوى سطح البحر؟

13. **الجسور** افترض أنك تقف في منتصف منصة جسر أكاشي كايكو الذي يُعد أطول جسر مُعلّق في العالم. فإذا كان الارتفاع من قمة المنصة الحاملة لكابلات التعليق هو 297 m، والمسافة من المنصة إلى منتصف الجسر 895 m، فما زاوية الانخفاض من منتصف الجسر إلى المنصة؟

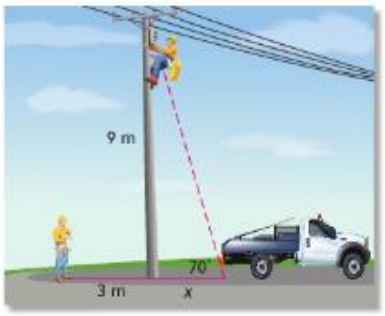


14. **الفنارات** يشع ضوء فنارة جزيرة النورس الصغيرة من ارتفاع 27.7 m بزاوية انخفاض 6°. ويشع ضوء فنارة جزيرة بِلّومْ من على بُعد 548.6 m من ارتفاع 10.4 m وبزاوية انخفاض 2°. أيّ ضوء فنارة سيصل للمركب الراسي بالدقة ما بين فنارة جزيرة النورس الصغيرة وفنارة جزيرة بلوم؟

15. **السياحة** من موقع الحافلة على الطريق، تبلغ زاوية ارتفاع قوس النصر 34°. فإذا كان ارتفاع القوس 48.4 m، فكم تبعد الحافلة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

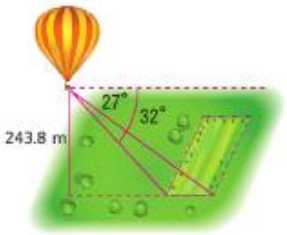


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



16. الصيانة وصَلَ عاملا إصلاح خطوط هواتف إلى أحد المواقع لاستعادة خط الاتصال بعد انقطاعه. تسلق أحدهما عمود خطوط الهواتف، بينما وقف الآخر على مسافة 3 m من العمود. إذا كان صندوق التحكم يرتفع 9 m عن الأرض على العمود بزاوية ارتفاع من الشاحنة لعامل الإصلاح تبلغ 70°، فكم يبعد العامل الواقف على الأرض عن الشاحنة؟

17. التصوير الفوتوغرافي تتميز كاميرا رقمية مزودة بانورامية بإمكانية عرض بزاوية ارتفاع 38°. إذا كانت الكاميرا محمولة على حامل ثلاثي موجَّه مباشرة لمبنى أثري ارتفاعه 37.8 m، فما المسافة من المبنى التي يجب أن تضع الحامل عندها لترى المبنى كله في الصورة؟

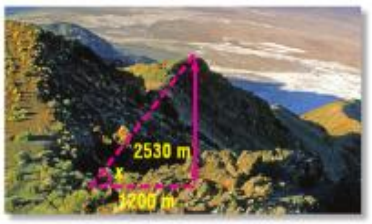


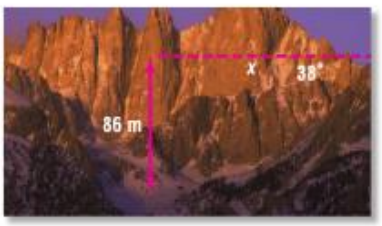
18. استخدام النماذج ضمن دراسات وحدة الطقس، زكّب صف سالم الدراسي منطادًا يعمل بالهواء الساخن. وأثناء طيرانهم فوق حقل مسيَّج، كانت زاوية انخفاض الجزء الأقرب من السياج هي 32° وزاوية انخفاض الجزء الأبعد 27°. إذا كان ارتفاع المنطاد 243.8 m، فقدّر عرض الحقل؟

19. سباقات الماراثون سباق بادووتر هو سباق يبدأ عند أدنى نقطة في ولاية كاليفورنيا – "وادي الموت" – وينتهي عند أعلى نقطة في الولاية – "جبل ويتني". يبدأ السباق عند عُمق 86 m تحت مستوى سطح البحر وينتهي عند ارتفاع 2530 m فوق مستوى سطح البحر.

a. حدد زاوية الارتفاع لجبل ويتني إذا كانت المسافة الأفقية من القاعدة للقمة 1200 m

b. إذا كانت زاوية الانخفاض لوادي الموت 38°. فما المسافة الأفقية من مستوى سطح؟

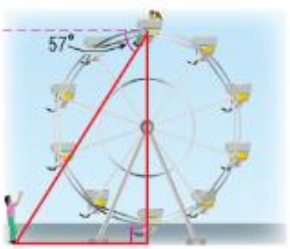


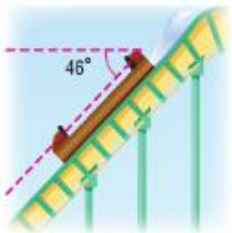


20. مدن الملاهي ذهب رنا وريهام وسهى لمدينة الملاهي أثناء زيارتهم لليابان. وركبوا عجلة دوارة قطرها 100 m وزحلوقة ارتفاعها 80 m.

a. عندما تكون ريهام وسهى على أقصى ارتفاع للعجلة كما هو مُوضح، فما مسافة بعدهما عن رنا؟

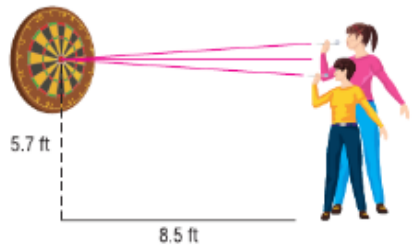
b. إذا كانت زاوية انخفاض الزحلوقة 46°، فما طول الزحلوقة؟





حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

21 رميُ السهام ترمي شيماء وحصة السهام من مسافة 2.6 m. يرتفع مركز نقطة الهدف على اللوحة بمقدار 1.7 m من الأرض. رمت حصة السهم من ارتفاع 1.8 m ورمت شيماء السهم من ارتفاع 1.5 m. ما زوايا الارتفاع أو الانخفاض التي يجب أن ترمي عندها كل منهما ليصيب نقطة الهدف؟ تجاهل العوامل الأخرى، مثل مقاومة الهواء والسرعة والجاذبية الأرضية.



22. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سنبحث في العلاقات بين أضلاع وزوايا المثلثات.

a. هندسيًا ارسم رسمًا هندسيًا لثلاثة مثلثات. ارسم أحدها حاد الزاوية وآخر منفرج الزاوية والثالث بزاوية قائمة. سمِّ أحدها ABC والثاني MNP والثالث XYZ. أوجِدْ أطوال الأضلاع وقياسات الزاوية لكل مثلث.

b. جدوليًا انسخ الجدول التالي وأكمله.

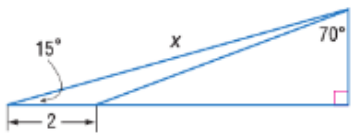
المثلث	النِسب		
ABC	$\frac{\sin A}{BC} =$	$\frac{\sin B}{CA} =$	$\frac{\sin C}{AB} =$
MNP	$\frac{\sin M}{NP} =$	$\frac{\sin N}{PM} =$	$\frac{\sin P}{MN} =$
XYZ	$\frac{\sin X}{YZ} =$	$\frac{\sin Y}{ZX} =$	$\frac{\sin Z}{XY} =$

c. الكلمات خمّن نسبة الـ sin زاوية لطول الضلع المقابل لتلك الزاوية بأحد المثلثات.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

23. تحليل الخطأ يحاول محمد ومحمود تحديد العلاقة بين زوايا الارتفاع والانخفاض. يقول محمد إنك إذا كنت تنظر لأعلى لشخص بزاوية ارتفاع تبلغ 35°، إذًا فهو ينظر إليك بزاوية انخفاض 55°، وهي الزاوية المتممة للزاوية 35°. لا يوافق محمود ويقول أن الشخص الآخر ينظر بزاوية انخفاض مساوية لزاوية ارتفاعك أو 35°. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح.

24. تحدٍ أوجد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.



25. التبرير هل ما قاله صواب أم خطأ. اشرح.

عندما يتحرك شخص باتجاه شيء وينظر إليه فإن زاوية الارتفاع تزيد.

26. اكتب سؤالاً وجدتْ زميلة بالصف الدراسي زاوية ارتفاع شيء ما، ولكنها تحاول أن تجد زاوية الانخفاض. اكتب سؤالاً لتساعدها على حل المسألة.

27. الكتابة في الرياضيات صِف طريقة يمكنك من خلالها تحديد ارتفاع الشيء دون استخدام حساب المثلثات عن طريق اختيار زاوية ارتفاعك. اشرح استنتاجك.

McGraw-Hill Education مؤسسة محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

تمرين على الاختبار المعياري

28. يريد محمد أن يعرف ارتفاع برج إرسال إشارة شبكة الهاتف النقال بجوار منزله. مشى محمد 24.4 m من قاعدة البرج وقاس زاوية الارتفاع لأعلى البرج بزاوية 54°. إذا كان طول محمد 1.5 m، فما ارتفاع البرج؟

A 15.8 m
B 18.2 m
C 33.5 m
D 35 m

29. إجابة قصيرة يبعد ضوء كشاف عن محطة الطقس بمسافة 1981.2 m. إذا كانت زاوية الارتفاع إلى موقع الضوء على السَحَب أعلى المحطة هي 45°، فما أقصى ارتفاع للسَحَب؟

30. الجبر ما حل نظام المعادلات؟

$$2x - 4y = -12$$
$$-x + 4y = 8$$

F (4, 4)
G (−4, 1)
H (−4, −4)
J (1, −4)

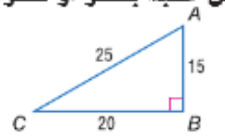
31. SAT/ACT مُثلث تمثل أضلاعه بِيتْسب 5:12:13. فما قياس الزاوية الصغرى للمثلث؟

A 13.34
B 22.62
C 34.14
D 42.71
E 67.83

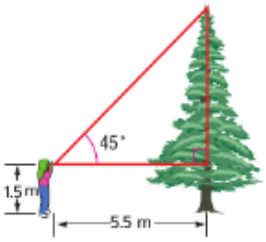
مراجعة شاملة

عَبِّر عن كل نسبة بكسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة. (الدروس 4-8)

32. sin *C*
33. tan *A*
34. cos *C*
35. tan *C*
36. cos *A*
37. sin *A*

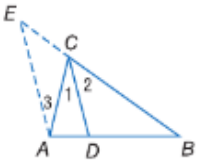


38. المناظر الطبيعية تريد إيمان قياس ارتفاع شجرة. وأمسكتْ مثلث تخطيط بزاوية 45° بحيث تكون إحدى ساقيه أفقية، ولاحظتْ قمة الشجرة بمحاذاة وتر المثلث كما هو مُوضَّح على اليمين. إذا كانت تبعد 5.5 m من الشجرة وعيناها على ارتفاع 1.5 m من الأرض، فأوجِدْ ارتفاع الشجرة. (الدروس 3-8)

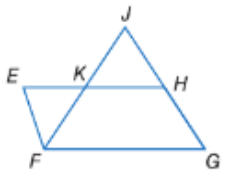


البرهان اكتب برهانًا من عمودين.

39. المعطيات: $\overline{CD}$ bisects $\angle ACB$.
حسب معطيات الشكل، فإن $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$.
المطلوب: $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$



40. المعطيات: $\overline{JF}$ تنصّف $\angle EFG$.
$\overline{EH} \parallel \overline{FG}, \overline{EF} \parallel \overline{HG}$
المطلوب: $\frac{EK}{KF} = \frac{GJ}{JF}$



الهندسة الإحداثية حدّد إحداثيات النقطة المركزية لكل مثلث.

41. *A*(2, 2), *B*(7, 8), *C*(12, 2)
42. *X*(−3, −2), *Y*(1, −12), *Z*(−7, −7)
43. *A*(−1, 11), *B*(3, 1), *C*(9, 6)
44. *X*(4, 0), *Y*(−2, 4), *Z*(0, 6)

مراجعة المهارات

حل كلاً من التناسبات التالية.

45. $\frac{1}{5} = \frac{x}{10}$
46. $\frac{2x}{11} = \frac{3}{8}$
47. $\frac{4x}{16} = \frac{62}{118}$
48. $\frac{12}{21} = \frac{45}{10x}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

8-1 وسيط هندسي

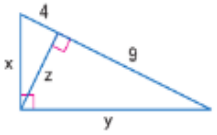
أوجد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد.

11. 9 و 4

12. $\sqrt{20}$ و $\sqrt{80}$

13. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ و $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

14. أوجد x و y و z.



15. **الاحتفالات** يعلّق راشد سلسلة من الأضواء فوق جزء من حديقته لتجهيز منطقة للاحتفال. باستخدام كتاب لرؤية أعلى وأسفل جزء الحديقة، يمكنه رؤية أنه على بُعد 4.6 m من ذلك الجزء. فإذا كان مستوى ارتفاع عينيه 1.5 m عن الأرض، فما ارتفاع جزء الاحتفال؟

مثال 1

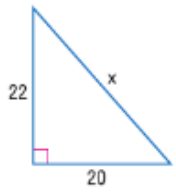
أوجد الوسط الهندسي بين 10 و 15.

$x = \sqrt{ab}$	تحديد الوسط الهندسي
$= \sqrt{10 \times 15}$	$b = 15$ و $a = 10$
$= \sqrt{(5 \times 2) \times (3 \times 5)}$	عامل.
$= \sqrt{25 \times 6}$	خاصية التجميع
$= 5\sqrt{6}$	بسّط.

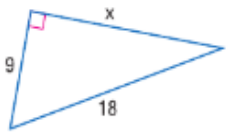
8-2 نظرية فيثاغورس وعكسها

أوجد x.

16.



17.



حدد هل من الممكن أن تكون أي مجموعة من الأعداد قياسات لأضلاع مثلث. إذا كان الأمر كذلك، فصنّف المثلث على أنه *حاد* أو *منفرج* أو *قائم*. علل إجابتك.

18. 7, 24, 25

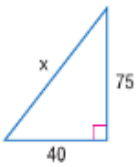
19. 13, 15, 16

20. 65, 72, 88

21. **السباحة** تسير نهى 27 m باتجاه الجنوب و 38 m باتجاه الشرق للدوران حول البحيرة. وتسبح أختها مباشرة عبر البحيرة. كم عدد الأمتار بالتقريب لأقرب جزء من عشرة التي وفرتها أخت نهى من خلال السباحة؟

مثال 2

أوجد x.



الضلع المقابل للزاوية القائمة هو الوتر، إذًا $c = x$.

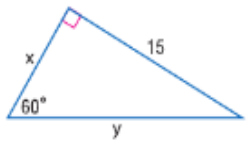
$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$40^2 + 75^2 = x^2$	$b = 75$ و $a = 40$
$7225 = x^2$	بسّط.
$\sqrt{7225} = x$	خُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين.
$85 = x$	بسّط.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

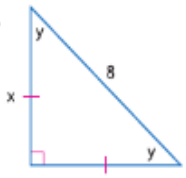
8-3 مثلثات خاصة قائمة الزاوية

أوجد x و y.

22.



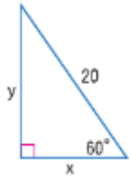
23.



24. **التسلق** يضيف جاسم جدارًا للتسلق إلى مجموعة ألعاب التأرجح لأخيه الصغير. إذا بدأ ببناء 1.5 m من الهيكل الحالي، ويرغب في الحصول على زاوية 60°، فما الطول الذي يجب أن يكون عليه الجدار؟

مثال 3

أوجد x و y.



قياس الزاوية الثالثة في هذا المثلث هو 90 - 60 أو 30. هذا مثلث زواياه هي 30° و60° و90°.

$h = 2s$ نظرية المثلث بزوايا 30° و 60° و 90°

$20 = 2x$ استخدم التعويض.

$10 = x$ أوجد ناتج القسمة.

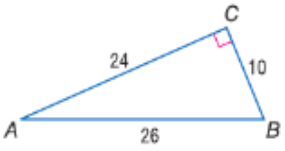
أوجد الآن y، طول الساق الأطول.

$\ell = s\sqrt{3}$ نظرية المثلث بزوايا 30° و 60° و 90°

$y = 10\sqrt{3}$ استخدم التعويض.

8-4 حساب المثلثات

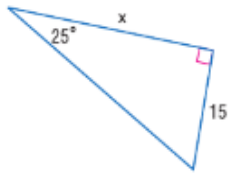
عَبِّر عن كل نسبة بكسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.



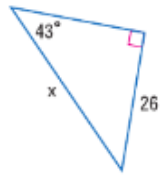
25. $\sin A$
26. $\tan B$
27. $\sin B$
28. $\cos A$
29. $\tan A$
30. $\cos B$

أوجد x.

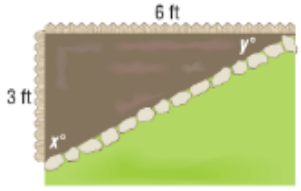
31.



32.

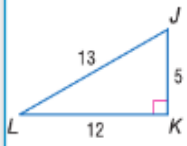


33. **تجهيز الحدائق** تريد فاطمة وضع حوض للزهور في زاوية حديقة منزلها من خلال وضع حد حجري يبدأ من مسافة 3 ft من زاوية سياج بالحديقة وينتهي على مسافة 6 ft من زاوية السياج الآخر. أوجد مقياس الزاويتين، x و y، اللتين يكونهما السياج مع الحد.



مثال 4

عَبِّر عن كل نسبة بكسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.



a. $\sin L$

$\sin L = \frac{5}{13}$ أو حوالي 0.38 $\sin L = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

b. $\cos L$

$\cos L = \frac{12}{13}$ أو حوالي 0.92 $\cos L = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$

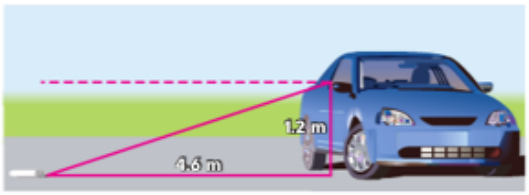
c. $\tan L$

$\tan L = \frac{5}{12}$ أو 0.42 $\tan L = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

8-5 زوايا الارتفاع والانخفاض

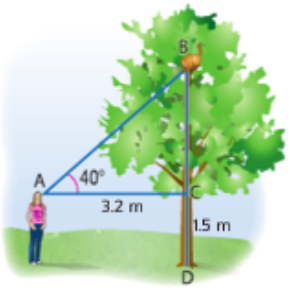
34. الوظائف يسلّم إبراهيم أوراقًا عند مروره بطريق ريفي من سيارته. إذا كان يقذف الأوراق من ارتفاع 1.2 m، وتسقط على بُعد 4.6 m من سيارته، فما زاوية الانخفاض التي قُذف من خلالها الورق إلى أقرب درجة؟



35. أبراج الهاتف الخلوي يوجد برج هاتف خلوي في الحقل المقابل لبيت مايسة. إذا سارت مايسة 15.2 m من البرج، ووجدت أن زاوية الارتفاع من موضعها إلى أعلى البرج هي 60°، فما ارتفاع البرج؟

مثال 5

تسلقت قطة نجاة شجرة. إذا نظرت إلى قطتها بزاوية ارتفاع 40°، وترتفع عيناها 1.5 m عن الأرض، فكم يبلغ ارتفاع قطتها عن الأرض؟



لإيجاد قياس ارتفاع القطة عن الأرض، أوجد CB.

$$\tan = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan 40 = \frac{CB}{3.2}$$

اضرب كل طرف في 1.5.

$$3.2(\tan 40) = CB$$

بسّط.

$$2.7 = CB$$

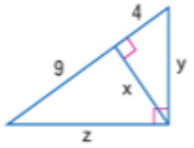
نظرا لأن عيني نجاة ترتفع 1.5 m عن الأرض فاجمع 1.5 الى 2.7. قطة نجاة على ارتفاع 4.2 m

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

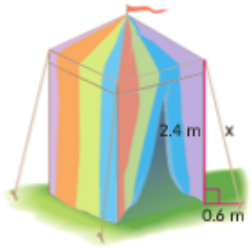
8 تدريب على الاختبار

أوجد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد.

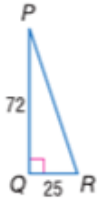
1. 7 و 11
2. 12 و 9
3. 14 و 21
4. $4\sqrt{3}$ و $10\sqrt{3}$
5. أوجد x و y و z.

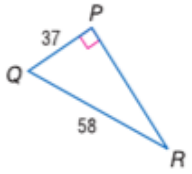


6. **المَعَارض** يجهّز بلال خيمته في معرض النهضة. إذا كان طول الخيمة هو 2.4 m، ولا يُمكن تثبيت الحبل لمسافة أكثر 0.6 m عن الخيمة، فما الطول الذي يجب أن يكون عليه الحبل؟

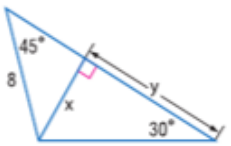


استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قياس $\angle R$ مقربًا لأقرب جزء من عشرة.

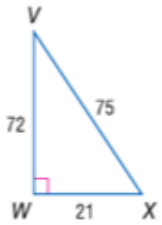
7. 

8. 

9. أوجد x و y.



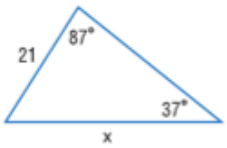
عَبِّر عن كل نسبة بكسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.



10. $\cos X$
11. $\tan X$
12. $\tan V$
13. $\sin V$

14. **الفضاء** تشاهد إيمان إطلاق مكوك فضائي على بعد 6 km من رأس كانافيرال في فلوريدا. إذا كانت زاوية الارتفاع من نقطة رؤيتها إلى المكوك 80°، فكم يبلغ ارتفاع المكوك إذا تم إطلاقه بشكل مستقيم لأعلى؟

أوجد x. قَرِّب قياسات الزوايا لأقرب درجة وأطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة.

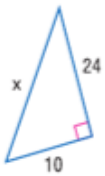
15. 

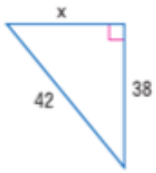
16.

17. **الاختيار من متعدد** أي مما يلي هو طول ساق المثلث الذي زواياه 45° و 45° و 90° وله وتر بقياس 20؟

A 10
C 20
B $10\sqrt{2}$
D $20\sqrt{2}$

أوجد x.

18. 

19. 

20. **جولات مشاهدة الحيتان** خلال جولة لمشاهدة الحيتان، كان ينظر أسامة من نظارته المعظّمة عندما لاحظ ثعلب الماء في الأفق البعيد. إذا كان أسامة على ارتفاع 6.1 m فوق مستوى سطح البحر في القارب، وكانت زاوية الانخفاض 30°، فما مقدار بُعد ثعلب الماء عن أقرب قدم للقارب؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

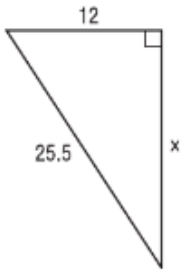
تدريب على الاختبارات المعيارية

تراكمي

اختيار من متعدّد

اقرأ كُل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. ما قيمة x في الشكل أدناه؟



A 22.5

B 23

C 23.5

D 24

2. ملعب البيسبول عبارة عن مربع تبلغ مساحة أضلاعه 27.4 m ما طول المسافة من القاعدة الثالثة إلى القاعدة الأولى؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

F 47.5 m

G 43.2 m

H 38.8 m

J 36 m

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 1 تحتاج بعض فقرات الاختبار إلى استخدام قانون محدد لحلها. استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد قيمة x.

3. يبلغ القياس النسبي للخريطة 4.5 cm = 1 km. كم تبلغ المسافة بين مدينتين تبعدان 2.4 cm على الخريطة؟

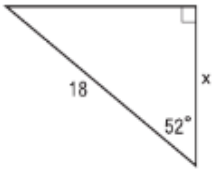
A 10.8 km

B 11.1 km

C 11.4 km

D 11.5 km

4. ما قيمة x في الشكل أدناه؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.



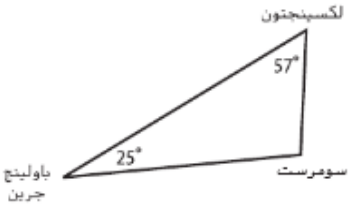
F 10.5

G 11.1

H 13.6

J 14.2

5. ما نوع المثلث الذي يتكوّن من مواقع مدن لكسينجتون وسومرست وباولينج جرين؟



A حاد الزاوية

B متساوي الزوايا

C منفرج الزاوية

D قائم الزاوية

6. يُطيّر حمد طائرة ورقية مثبتة في طرف خيط يمتد لمسافة 106.7 m. تبلغ زاوية الارتفاع بين حمد والطائرة الورقية 74°. كم يبلغ ارتفاع الطائرة الورقية عن الأرض؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.

F 102.5 m

G 90.1 m

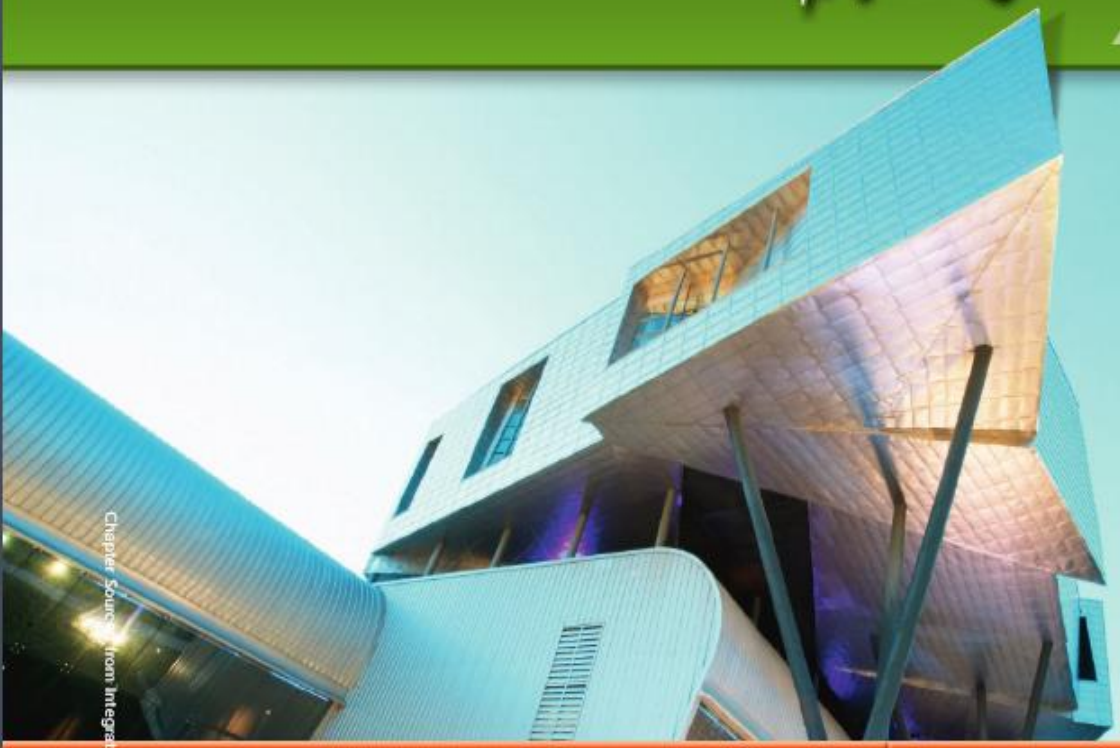
H 43 m

J 28.4 m

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 9

التوسع في مساحة السطح والحجم



السابق

- لقد حددت الأشكال ثلاثية الأبعاد وكذلك أسمائها، وقمت بحساب مساحة السطح والحجم لبعض المجسمات الشائعة.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - إيجاد المساحات الجانبية، ومساحات السطوح، والأحجام لمجسمات متنوعة.
  - استكشاف الهندسة الإقليدية والهندسة الدائرية.
  - استخدام خواص المجسمات المتشابهة.

لماذا؟ ▲

- **الهندسة المعمارية** يستخدم المهندسون المعماريون أنواعًا مختلفة من المجسمات لإنشاء تصميمات مثيرة للإعجاب وتؤدي مع وظيفتها في الوقت ذاته.

Chapter Source: from Integrated Math II Chapter 12 © 2012 McGraw-Hill Education

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الدرس 9-1

تمثيلات الأشكال ثلاثية الأبعاد

السابق

- لقد حددت المستويات المتوازية والمستويات المتقاطعة في الأشكال ثلاثية الأبعاد.

الحالي

1. رسم منظورات متماثلة للأشكال ثلاثية الأبعاد.
2. استكشاف المقاطع العرضية للأشكال ثلاثية الأبعاد.

لماذا؟

- يستخدم مبرمجو ألعاب الفيديو التكنولوجيا في جعل بيئات الألعاب تبدو في شكل ثلاثي الأبعاد. وكلما انتقل اللاعبون في عوالم ألعاب الفيديو، تبدو الأشياء من عدة منظورات مختلفة بشكل واقعي.

المفردات الجديدة

منظور متماثل isometric view

مقطع عرضي cross section

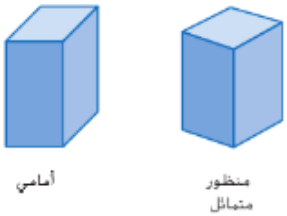
ممارسات في الرياضيات

استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 رسم منظورات متماثلة

في ألعاب الفيديو، يتم تمثيل الألعاب ثلاثية الأبعاد على شاشة ثنائية الأبعاد. ويمكنك استخدام ورقة منقطة متساوية القياس لرسم **منظورات متماثلة**، أو منظورات زاوية لمجسمات هندسية ثلاثية الأبعاد على ورقة ثنائية الأبعاد.



مثال 1 استخدام أبعاد مجسم لرسم مجسم

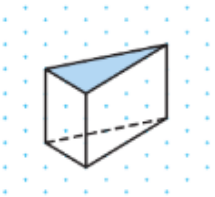
استخدم ورقة منقطة متساوية القياس لرسم منشور ثلاثي يبلغ ارتفاعه 3 وحدات، ويبلغ طولا ضلعي قاعدته وحدتين و 4 وحدات.

الخطوة 1

ضع علامة على زاوية المجسم. وارسم 3 وحدات للأسفل، ووحدتين لليسار، و 4 وحدات إلى اليمين. ثم ارسم مثلثًا على قمة المجسم.

الخطوة 2

ارسم قطعًا مستقيمة بطول 3 وحدات من كل رأس لتمثيل الجوانب الرأسية. صِل الرؤوس المناسبة باستخدام مستقيم منقط لتمثيل الجوانب غير المرئية.



تمرين موجّه

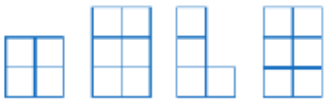
1. استخدم ورقة منقطة متساوية القياس لرسم منشور مستطيل يبلغ ارتفاعه وحدة واحدة، وطوله 5 وحدات، وعرضه 4 وحدات.

تذكر أن *الرسم المتعامد* يوضح المنظورات العلوية واليسرى والأمامية واليمنى للمجسم. يمكنك استخدام الرسم المتعامد في رسم منظور تماثل لشكل ثلاثي الأبعاد. وموضح على اليسار المنظورات العلوية والأمامية واليمنى لمكعب.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 استخدام الرسم المتعامد لرسم مجسم

استخدم ورقة منقطة متساوية القياس والرسم المتعامد لرسم مجسم.

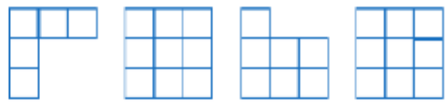


- المنظور العلوي: يوجد صفان وعمودان. وتمثل القطع المظللة أن هناك ارتفاعين مختلفين.
- المنظور الأيسر: يبلغ ارتفاع الشكل 3 وحدات على الجانب الأيسر.
- المنظور الأمامي: يبلغ طول العمود الأول 3 وحدات،بينما يبلغ طول العمود الثاني وحدة واحدة.
- المنظور الأيمن: يبلغ ارتفاع الشكل 3 وحدات على الجانب الأيمن. وتمثل القطع المظللة أن هناك فواصل في السطح.

صل النقاط على الورقة المنقطة متساوية القياس لتمثيل جوانب المجسم. وظلل الأجزاء العلوية من كل عمود.

تمرين موجّه

2.



2 استكشاف المقاطع العرضية

المقطع العرضي هو عبارة عن تقاطع مجسم ومستوٍ. ويعتمد المقطع العرضي المتكوّن من تقاطع المستوى والشكل ثلاثي الأبعاد على زاوية المستوى.

مثال 3 من الحياة اليومية تحديد المقاطع العرضية للمجسمات

الأهرامات يُمكن للعلماء استخدام الحواسيب لدراسة المقاطع العرضية للآثار والبنايات القديمة. **حدد شكل كل مقطع عرضي للهرم الموضح أدناه.**

المقطع العرضي الأفقي عبارة عن مربع. بينما المقطع العرضي الزاوي عبارة عن شبه منحرف. أما المقطع العرضي الرأسي، فهو عبارة عن مثلث.

الربط بالحياة اليومية

يبعد أكبر هرم تم إنشاؤه على الإطلاق 100 km عن مدينة مكسيكو سيتي. ويبلغ طوله 54 m، وتغطي قاعدته أرضًا تزيد مساحتها عن 18 هكتارًا.

المصدر: موسوعة جينيس للأرقام القياسية

تمرين موجّه

3. **الكعك** لدى إيمان صينية لتحضير الكعك على شكل نصف كرة، كما هو موضح على اليسار. صف شكل المقاطع العرضية للكعك الذي يتم تحضيره في هذه الصينية، وذلك إذا تم تقطيع الكعك أفقيًا ورأسيًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

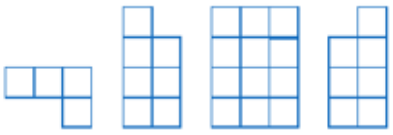
التحقق من فهمك

مثال 1 **استخدم الورق المنقط متساوي الأبعاد لرسم كل منشور.**

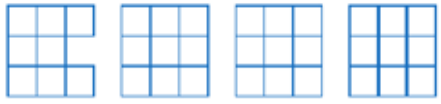
1. منشور ثلاثي ارتفاعه وحدتان، ويبلغ طولا ضلعي قاعدته 5 وحدات و 4 وحدات
2. منشور مستطيل ارتفاعه وحدتان، ويبلغ عرضه 3 وحدات، وطوله 5 وحدات

مثال 2 **استخدم ورقة منقطة متساوية القياس وكل رسم متعامد لرسم مجسم.**

3.

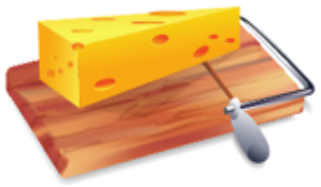


4.



مثال 3

5. **الطعام** صِف كيف يُمكن تقطيع قطعة الجبن الموضحة على اليسار إلى شرائح بحيث تكوّن كل شريحة كل شكل.



a. مستطيل

b. مثلث

c. شبه منحرف

صِف كل مقطع عرضي.

6.

7.

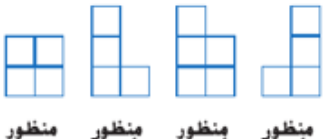
التدريب وحل المسائل

مثال 1 **استخدم ورقة منقطة متساوية القياس لرسم كل منشور.**

8. مكعب يبلغ طول كل جانب فيه 3 وحدات
9. شور ثلاثي ارتفاعه 4 وحدات، ويبلغ طولا ضلعي قاعدته وحدة واحدة و 3 وحدات
10. منشور ثلاثي ارتفاعه 4 وحدات، ويبلغ طولا ضلعي قاعدته وحدتين و 6 حدات

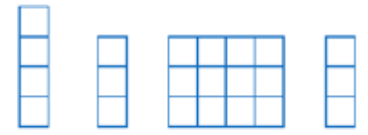
مثال 2 **أدوات** **استخدم ورقة منقطة متساوية القياس وكل رسم متعامد لرسم مجسم.**

11.



12.

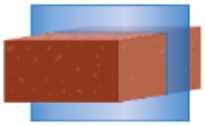
13.



14.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3



15. **فن** تم تقطيع قطعة طين على شكل منشور مستطيل إلى نصفين كما هو موضح على اليسار.

a. صِف شكل المقطع العرضي.

b. صِف كيف يتم تقطيع قطعة الطين لجعل المقطع العرضي مثلثًا.

صِف كل مقطع عرضي.

16.

17.

18.

19.

20. **الهندسة المعمارية** ارسم منظورًا علويًا ومنظورًا أماميًا ومنظورًا جانبيًا للمنزل الموضع على اليسار.

بسكويت صِف كيفية إجراء قطع عبر مجموعة من عجائن البسكويت التي على شكل إسطوانة لإنشاء كل الأشكال التالية.

21. دائرة

22. المستطيل الأطول

23. شكل بيضاوي

24. المستطيل الأقصر

أدوات ارسم مقطعًا عرضيًا من الشريحة الرأسية لكل شكل.

25.

26.

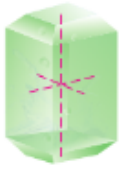
27.

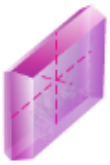
28. **علوم الأرض** تُعد البلورات مجسمات لأن ذراتها تكون مرتبة في أنماط هندسية منتظمة. ارسم مقطعًا عرضيًا لشريحة أفقية لكل بلورة. ثم صِف التماثل الدوراني حول المحور الرأسي.

a. رباعي الزوايا

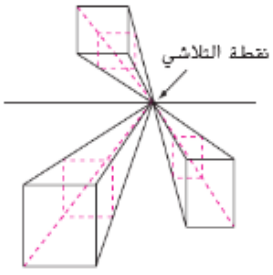
b. سداسي الزوايا

c. أحادي الميل





29. **فن** في الرسم المنظوري ، يتم استخدام نقطة تلاشٍ لجعل الرسم ثنائي الأبعاد يبدو ثلاثي الأبعاد. من خلال نقطة تلاشٍ واحدة، يُمكن رسم الأشياء عبر وجهات نظر مختلفة، كما هو موضح على اليسار.



a. ارسم مستقيمًا أفقيًا ونقطة تلاشٍ على المستقيم. ارسم مستطيلاً في مكان ما أعلى المستقيم، واستخدم نقطة التلاشي لإنشاء رسم منظوري.

b. على نفس الرسم، ارسم مستطيلاً في مكان ما أسفل المستقيم، واستخدم نقطة التلاشي لإنشاء رسم منظوري.

c. صِف المنظورات المختلفة للرسمين.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ارسم المنظورات العلوية واليسري والأمامية اليمنى لكل مجسم.

30.

31

32.

33. موضح على اليسار المنظورات العلوية والأمامية واليمنى لشكل ثلاثي الأبعاد.

a. ارسم رسمًا تصويريًا للمجسم.

b. صِف طريقتين مختلفتين يُمكن استخدمهما لإنشاء مقطع عرضي مستطيل.

c. صِل بين المنظورين الأمامي والأيمن للمجسم والمقاطع العرضية للمجسم.

منظور علوي | منظور أيسر | منظور أيمن

34. **التمثيلات المتعددة** ستستكشف في هذه المسألة الرسومات المتماثلة.

a. **هندسيًا** أنشئ رسومات متماثلة لثلاثة مجسمات مختلفة.

b. **جدوليًا** أنشئ جدولاً يتضمن عدد المكعبات اللازمة لإنشاء المجسم وعدد المربعات الظاهرة في الرسم المتماثل.

c. **لفظيًا** هل يوجد ارتباط بين عدد المكعبات اللازمة لإنشاء مجسم وعدد المربعات الظاهرة في الرسم المتماثل؟ اشرح.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

35. **التحدي** الشكل الموضح على اليسار عبارة عن مقطع عرضي لمجسم هندسي. صِف المجسم وكيف تم إنشاء المقطع العرضي.

36. **فرضيات** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. اشرح استنتاجك.

إذا كانت المنظورات المتعامدة اليسرى واليمنى والأمامية والخلفية لمجسمين هي نفسها، فإن هذين الشيئين لهما نفس الشكل.

37. **مسألة غير محددة الإجابة** استخدم ورقة منقطة متساوية القياس تتكون من 12 وحدة مكعبة. ثم قم بإنشاء رسم متعامد للمجسم.

38. **التحدي** ارسم المنظور العلوي والمنظور اليساري للشكل المجسم الموضح على اليسار.

39. **الكتابة في الرياضيات** تم تقطيع هرم سداسي الزوايا إلى شرائح عبر الرأس والقاعدة بحيث تم فصل المنشور إلى جزأين متطابقين. صِف المقطع العرضي. وهل توجد أكثر من طريقة واحدة لفصل الشكل إلى جزأين متطابقين؟ وهل سيتغير شكل المقطع العرضي؟ اشرح.

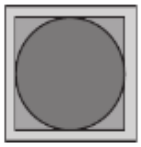
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

40. ما الشكل متعدد الوجوه الذي تمثله الشبكة الموضحة أدناه؟

A مكعب
B شكل ثماني
C منشور ثلاثي
D هرم ثلاثي

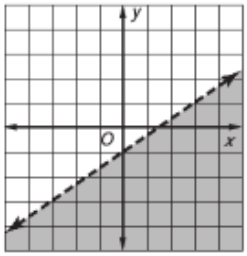
41. إجابة موسعة يريد صاحب منزل بناء أرضية من الخشب عرضها 3 m حول حمام السباحة الدائري الموضح.



a. أوجد المحيط الخارجي للأرض الخشبية مع التقريب إلى أقرب m، إذا كان محيط حمام السباحة يساوي حوالي 24.88 m.

b. ما مساحة الجزء العلوي من الأرضية الخشبية؟

42. الجبر ما المتباينة التي تصف التمثيل البياني الموضح أدناه بشكل أفضل؟



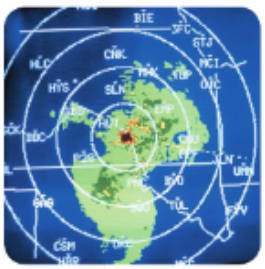
F $y < \frac{2}{3}x - 1$
G $y \leq \frac{2}{3}x - 1$
H $y > \frac{2}{3}x - 1$
J $y \geq \frac{2}{3}x - 1$

43. SAT/ACT توسّع في $(4\sqrt{5})^2$.

A 20
B $8\sqrt{5}$
C $16\sqrt{5}$
D 40
E 80

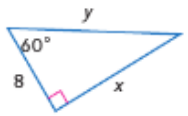
مراجعة شاملة

44. الطقس يتتبع خبراء الأرصاد الجوية العواصف الشديدة باستخدام رادار دوبلر. ويتم استخدام شبكة قطبية في قياس المسافات باعتبارها مقدار تقدم العواصف. إذا كان مركز شاشة الرادار هو نقطة الأصل وكل حلقة تبعد عن المركز بمقدار 10 km، فما معادلة الحلقة الرابعة؟



أوجد *x* و *y*.

45.



46.

استخدم مخطط فن في تحديد ما إذا كانت كل عبارة *دائمًا*، أم *أحيانًا* صحيحة، أم *غير صحيحة مطلقًا*.

47. متوازي الأضلاع هو عبارة عن مربع.

48. المربع هو عبارة عن معين.

49. المستطيل هو عبارة عن متوازي أضلاع.

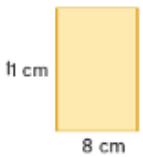
50. المعين هو عبارة عن مستطيل ولكنه لا يكون مربعًا.

51. المعين هو عبارة عن مربع.

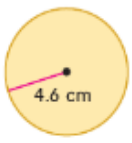
مراجعة المهارات

أوجد محيط كل شكل ومساحته. وقرّب لأقرب جزء من عشرة.

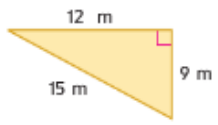
52.



53.



54.



McGraw-Hill Education مؤسسة لمالح محفوظة © حقوق الطبع والتأليف

9-2 مساحة السطح للمنشور والاسطوانة

السابق:
- لقد أوجدت مساحات المضلعات.

الحالي:
1. إيجاد المساحة الجانبية ومساحة السطح للمنشور.
2. إيجاد المساحة الجانبية ومساحة السطح للمنشور.

لماذا؟
- تُعد حديقة أسماك جورجيا في أتلانتا هي أكبر حديقة أسماك في العالم. فيوجد بها أكثر من 36 مليون لتر من المياه وأكثر من 500 نوع من الأحياء من جميع أرجاء العالم. ويوجد بها نفق تحت الماء يبلغ طوله 30 m ويضم 425 m^2 من نوافذ المشاهدة.

المفردات الجديدة

وجه جانبي	lateral face
حافة جانبية	lateral edge
حافة القاعدة	base edge
مستقيم رأسي	altitude
ارتفاع	height
مساحة جانبية	lateral area
محور	axis
مجسم مركب	composite solid

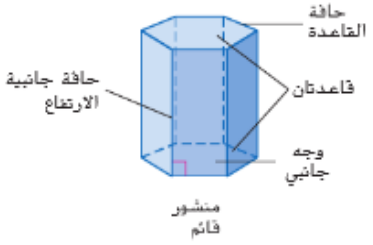
ممارسات في الرياضيات

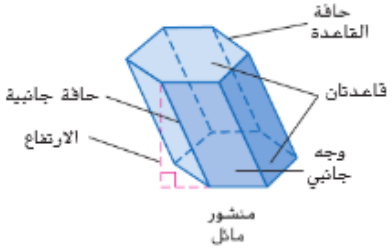
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
مراعاة الدقة.

1 المساحة الجانبية ومساحة السطح للمنشور

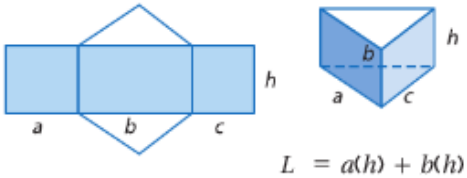
في المجسم، يُطلق على الأوجه التي ليست ضمن القاعدتين **وجوه جانبية**. وتتقاطع الوجوه الجانبية مع بعضها عند **الحواف الجانبية**، التي تُعد متوازية ومتطابقة. وتتقاطع الوجوه الجانبية مع القاعدة عند **حواف القاعدة**. ويمثل **المسقط الرأسي** القطعة المستقيمة العمودية التي تصل بين المستويات والقاعدتين. بينما **الارتفاع** هو طول المسقط الرأسي.

تذكر أن المنشور هو عبارة عن شكل متعدد الوجوه يوجد به قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان. في المنشور القائم، تمثل الحواف الجانبية المساقط الرأسية، بينما تكون الوجوه الجانبية عبارة عن مستطيلات. وفي المنشور المائل، لا تكون الحواف الجانبية عمودية على القاعدتين. ويكون هناك وجه جانبي واحد على الأقل ليس مستطيلاً.





المساحة الجانبية L لمنشور هي مجموع مساحات الوجوه الجانبية. وتوضح الشبكة الموجودة على اليسار كيفية إيجاد المساحة الجانبية للمنشور.



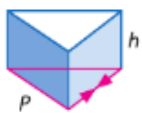
$$\begin{aligned} L &= a(h) + b(h) + c(h) && \text{مجموع مساحات الأوجه الجانبية} \\ &= (a + b + c)h && \text{خاصية التوزيع} \\ &= Ph && P = a + b + c \end{aligned}$$

المفهوم الأساسي المساحة الجانبية للمنشور

الشرح: المساحة الجانبية L لمنشور قائم تساوي $L = Ph$، حيث h هو ارتفاع المنشور، و P هو محيط القاعدة.

الرموز: $L = Ph$

النموذج:

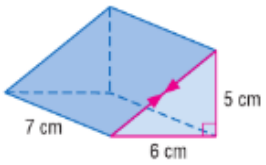


اعتبارًا من هذه النقطة، يُمكنك افتراض أن المجسمات المنصوص عليها هنا هي مجسمات قائمة. وإذا كان المجسم مائلاً، فسوف ننص على ذلك بكل وضوح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 1 المساحة الجانبية للمنشور

أوجد المساحة الجانبية للمنشور. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.



الخطوة 1 أوجد طول الضلع المجهول في القاعدة.

$c^2 = 6^2 + 5^2$ نظرية فيثاغورس

$c^2 = 61$ بسّط.

$c \approx 7.8$ أوجد الجذر التربيعي الموجب للطرفين.

الخطوة 2 أوجد المساحة الجانبية.

$L = Ph$ المساحة الجانبية للمنشور

$\approx (5 + 6 + 7.8)7$ عوّض

≈ 131.6 بسّط.

تبلغ المساحة الجانبية حوالي $131.6\ cm^2$.

انتبه!

مناشير قائمة قاعدتا المنشور القائم متطابقتان، بينما لا تكون أوجهه دائمًا متطابقة.

تمرين موجّه

1. طول كل ضلع في قاعدة المنشور ثماني الأضلاع المنتظم يساوي 6 cm، وارتفاعه يساوي 11 cm. أوجد المساحة الجانبية.

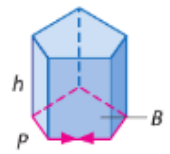
مساحة سطح المنشور تساوي مجموع المساحة الجانبية ومساحات القاعدتين.

المفهوم الأساسي مساحة سطح المنشور

الشرح مساحة السطح S للمنشور القائم تساوي $S = L + 2B$، حيث L يساوي مساحته الجانبية و B يساوي مساحة القاعدة.

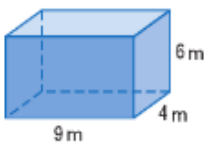
الرموز $S = Ph + 2B$ أو $S = L + 2B$

النموذج



مثال 2 مساحة سطح المنشور

أوجد مساحة سطح المنشور المستطيل.



استخدم المستطيل ذا الأبعاد 9 m في 4 m باعتباره القاعدة.

$S = Ph + 2B$ مساحة سطح المنشور

$= (2 \times 9 + 2 \times 4)(6) + 2(9 \times 4)$ عوّض

$= 228$ بسّط.

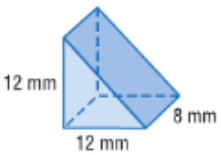
مساحة سطح المنشور تساوي $228\ m^2$.

نصيحة دراسية

المثابرة في المثال 2، يمكنك أيضًا استخدام مستطيل ذي الأبعاد 6 m في 4 m باعتباره القاعدة. واجعل الارتفاع 9 m. واختيار قاعدة مختلفة لا يؤثر على مساحة السطح، لكنه سيغير المساحة الجانبية.

تمرين موجّه

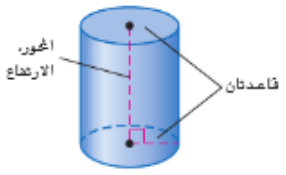
2. أوجد مساحة سطح المنشور الثلاثي قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.



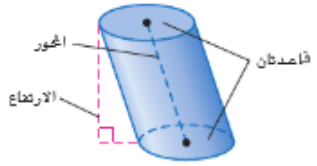
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 المساحة الجانبية ومساحة السطح للمنشور

محور الإسطوانة هو القطعة المستقيمة التي يمثل طرفاها مركزي القاعدتين الدائريتين. وإذا كان المحور يمثل المسقط الرأسي كذلك، فإن الإسطوانة تكون قائمة. وأما إذا كان المحور لا يمثل المسقط الرأسي، فإن الإسطوانة مائلة.

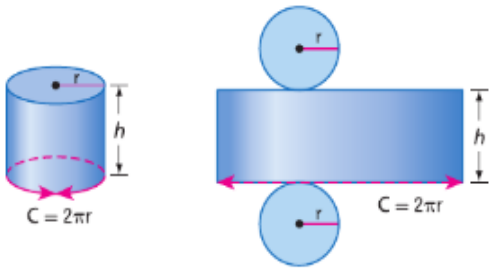


أسطوانة قائمة



أسطوانة مائلة

المساحة الجانبية للإسطوانة القائمة تساوي مساحة السطح المقوس. وكما هو الحال بالنسبة للمنشور القائم، فإن المساحة الجانبية L تساوي Ph. بما أن القاعدة عبارة عن دائرة، فإن المحيط يساوي محيط الدائرة C. إذًا، المساحة الجانبية تساوي Ch أو $2\pi rh$.



مساحة سطح الإسطوانة تساوي المساحة الجانبية زائد مساحات القاعدتين.

نصيحة دراسية

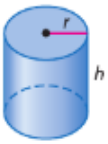
قوانين هناك قانون آخر للمساحة الجانبية للإسطوانة وهو $L = \pi dh$، حيث πd يمثل محيط الدائرة.

المفهوم الأساسي مساحة سطح الإسطوانة

الشرح المساحة الجانبية L لإسطوانة قائمة هي $L = 2\pi rh$، حيث r هو نصف القطر للقاعدة و h هو الارتفاع.

مساحة السطح S لإسطوانة قائمة هي $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$.
حيث r هو نصف قطر القاعدة و h هو الارتفاع.

النموذج



الرموز

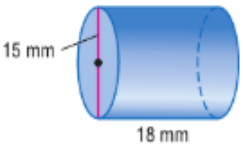
$L = 2\pi rh$

أو $S = L + 2B$

$2\pi rh + 2\pi r^2$

مثال 3 المساحة الجانبية ومساحة السطح للإسطوانة

أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح للإسطوانة. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.



$L = 2\pi rh$	المساحة الجانبية للإسطوانة
$= 2\pi(7.5)(18)$	عوّض عن r بالعدد 7.5 وعن h بالعدد 18.
≈ 848.2	استخدم آلة حاسبة.
$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$	مساحة سطح الإسطوانة
$\approx 848.2 + 2\pi(7.5)^2$	عوّض عن $2\pi rh$ بالعدد 848.2 وعن r بالعدد 7.5.
≈ 1201.6	استخدم آلة حاسبة.

المساحة الجانبية تساوي حوالي $848.2\ mm^2$، ومساحة السطح تساوي حوالي $1201.6\ mm^2$.

تمرين موجّه

3A. $r = 5\ cm,\ h = 9\ cm$

3B. $d = 6\ cm,\ h = 4.8\ cm$

نصيحة دراسية

تقدير قبل إيجاد المساحة الجانبية للإسطوانة، استخدم الرياضيات الذهنية لإنهاء عملية التقدير. وللتقدير، اضرب القطر في 3 (قرّب π) ثم اضرب القطر في ارتفاع الإسطوانة.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مثال 4 من الحياة اليومية إيجاد الأبعاد المجهولة

الحرف اليدوية استخدمت رهام قطعة المستطيل المصنوعة من اللباد الموضحة على اليسار في تغطية السطح المقوس لحامل القلم الرصاص ذي الشكل الأسطواني. ما نصف قطر حامل القلم الرصاص؟

$L = 2\pi rh$	المساحة الجانبية للإسطوانة
$63 = 2\pi r(5)$	عوّض عن L بالعدد 12.6 x 5 أو 63 وعن h بالعدد 5.
$63 = 10\pi r$	بسّط.
$2.0 \approx r$	اقسم كل طرف على 10π.

نصف قطر حامل القلم الرصاص يساوي حوالي 2 cm.

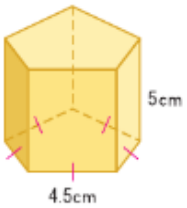
تمرين موجّه

4. أوجد قطر قاعدة الإسطوانة إذا كانت مساحة سطح الإسطوانة تساوي 464π cm^2 والارتفاع يساوي 21 cm^2.

التحقق من فهمك

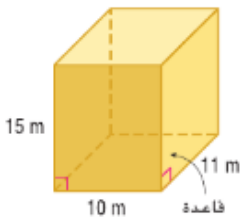
مثال 1

1. أوجد المساحة الجانبية للمنشور.

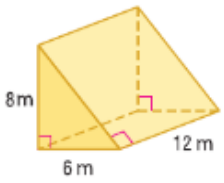


المثالان 1 و 2 **أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل منشور.**

2.



3.

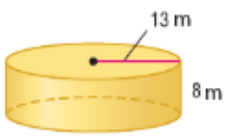


مثال 3

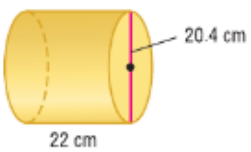
4. سيارات يشتري أسامة حواف جديدة لإطارات السيارة، ويبلغ طول قطرها 14 cm وعرضها 6 cm. حدد المساحة الجانبية لكل واحدة من الحواف. قرّب لأقرب جزء من عشرة.

أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل إسطوانة. قرّب لأقرب جزء من عشرة.

5.



6.



مثال 4

7. طعام مساحة سطح علبة الحساء الموضحة على اليسار تساوي 286.3 cm^2 مربعًا. ما ارتفاع العلبة؟ قرّب لأقرب جزء من عشرة.

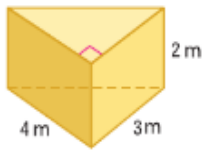
8. مساحة سطح المكعب تساوي 294 cm^2. أوجد طول الحافة الجانبية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

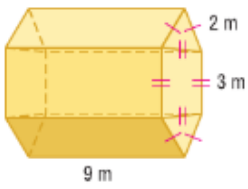
التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2 أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل منشور. قرّب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

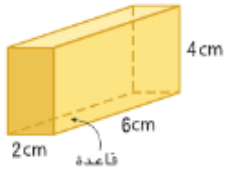
9



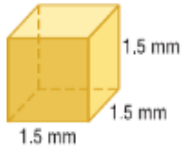
10.



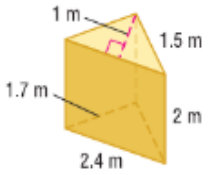
11.



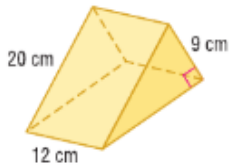
12.



13.



14.



15. المنشور المستطيل: $\ell = 25$ cm، و $w = 18$ cm، و $h = 12$ cm

16. المنشور الثلاثي: $h = 6$ cm، وقاعدة المثلث مع السيقان تساوي 9 cm و 12 cm

الأمثلة 1–3 **الحبوب** أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل عبوة حبوب. قرّب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

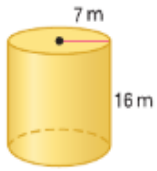
17.

18.

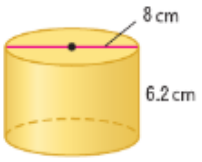
مثال 3 **الاستنتاج المنطقي** أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل إسطوانة. قرّب لأقرب جزء من عشرة.

19.

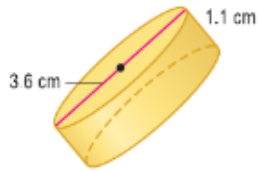
20.



21.



22.

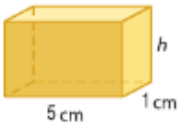


23. أرقام قياسية عالمية أكبر مشروب في العالم كان عبارة عن إسطوانة ارتفاعها 4.67 m وقطرها 2.32 m. فما كانت مساحة السطح لهذه الإسطوانة، مع التقريب لأقرب جزء من عشرة؟

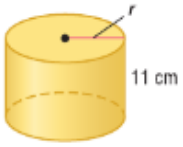
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 4 **استخدم المساحة الجانبية المعطاة والرسم التخطيطي في إيجاد القياس المجهول لكل مجسم. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

24. $L = 48\ cm^2$



25. $L \approx 635.9\ cm^2$



26. تبلغ مساحة سطح المنشور الثلاثي القائم $1020\ cm^2$، ويبلغ طوله 6 cm، وعرضه 9 cm. أوجد الارتفاع.

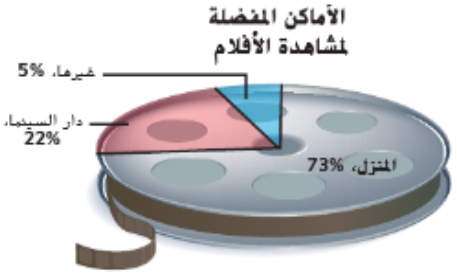
27 تبلغ مساحة سطح إسطوانة $256\pi\ mm^2$، وارتفاعها 8 mm. أوجد القطر.

28. آثار تم إنشاء معلم مونوليث في حديقة. وهو عبارة عن منشور ثلاثي أجوف، ويبلغ طوله 9 m، وعرضه 4 m، وعمقه 1 m.

a. أوجد المساحة بالقدم المربع لسطوح المبنى للجزء الموجود فوق سطح الأرض.

b. استخدم التحليل البُعدي لإيجاد المساحة بالمتر المربع.

29. ترفيه توضح الرسومات البيانية نتائج دراسة استقصائية تم فيها طرح سؤال على مجموعة يدور حول السبب وراء حبهم لمشاهدة الأفلام.

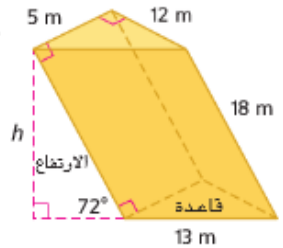


a. بفرض أن علبة الأفلام عبارة عن إسطوانة قطرها 12 cm. اشرح كيف يمكنك إيجاد مساحة السطح للجزء الذي يمثل المجموعة الذين يفضلون مشاهدة الأفلام في المنزل.

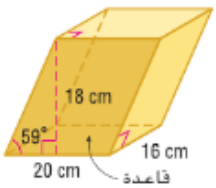
b. إذا كان طول علبة الأفلام 3 cm، فأوجد مساحة سطح الجزء الموجود في القسم a.

الاستنتاج المنطقي **أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل مجسم مائل. قرّب لأقرب جزء من عشرة.**

30.



31.



32. مصابيح يكوّن ظل المصباح إسطوانة ارتفاعها 18 cm.

ويبلغ قطرها 13.5 cm.

a. ما المساحة الجانبية للظل، مع التقريب لأقرب جزء من عشرة؟

b. ما مدى تغير المساحة الجانبية إذا قمنا بقسمة الارتفاع على 2؟

33. أوجد مساحة السطح التقريبية لمنشور سداسي قائم، إذا كان الارتفاع 9 cm، وكل حافة قاعدة تساوي 4 cm.
(إرشاد: أولاً، أوجد طول العامد للقاعدة.)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

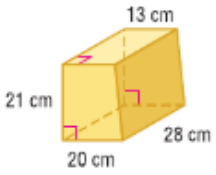
34. تصميم يريد شخص إرسال ملصق عبر البريد، ويبلغ طول هذا الملصق 38 cm، وقطر الجزء الملفوف يساوي 6 cm.

a. صمم عبوة بريدية عبارة عن منشور ثلاثي. وارسم العبوة وشبكة لها.

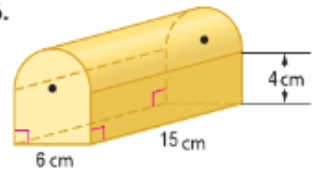
b. بفرض أنك تريد تقليل مساحة سطح العبوة لأقل قدر ممكن. فما الأبعاد المحتملة للعبوة ومساحة سطحها؟

مجسم مركب هو شكل ثلاثي الأبعاد مكوّن من أشكال أبسط. أوجد مساحة سطح كل مجسم مركب. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

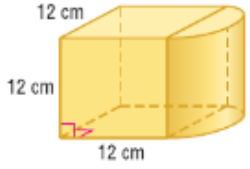
35



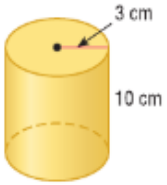
36.



37.



38. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تستكشف المساحة الجانبية ومساحات الأسطح للإسطوانة.



a. هندسي ارسم الإسطوانة A بحيث يكون نصف قطرها 3 cm وارتفاعها 5 cm، وارسم الإسطوانة B بحيث يكون نصف قطرها 6 cm وارتفاعها 5 cm، وارسم الإسطوانة C بحيث يكون نصف قطرها 3 cm وارتفاعها 10 cm.

b. جدولي أنشئ جدولاً لأنصاف أقطار الإسطوانات A و B و C وارتفاعاتها ومساحاتها الجانبية ومساحات سطوحها. اكتب المساحات بالنسبة إلى π.

c. لفظيًا إذا تمت مضاعفة نصف القطر، فما تأثير ذلك على المساحة الجانبية ومساحة السطح لإسطوانة؟ وإذا تمت مضاعفة الارتفاع، فما تأثير ذلك على المساحة الجانبية ومساحة السطح لإسطوانة؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

39. تحليل الخطأ يحاول عمر وعيسى إيجاد مساحة سطح إسطوانة يبلغ ارتفاعها 5 cm، ويبلغ طول نصف قطرها 6 cm. هل أحدهما على صواب؟ اشرح.

عمر

$$S = \pi(6)^2 + \pi(6)(5)$$
$$= 36\pi + 30\pi$$
$$= 66\pi\ cm^2$$

عيسى

$$S = 2\pi(6)^2 + 2\pi(6)(5)$$
$$= 72\pi + 60\pi$$
$$= 132\pi\ cm^2$$

40. الكتابة في الرياضيات ارسم منشورًا ثلاثيًا مائلاً، وصف الأشكال التي قد تتضمنها شبكة المنشور. اشرح مدى اختلاف هذه الشبكة عن شبكة المنشور الثلاثي القائم.

41. الدقة قارن وقابل بين إيجاد مساحة سطح منشور وإيجاد مساحة سطح إسطوانة.

42. مسألة غير محددة الإجابة اضرب مثالاً لإسطوانتين لهما نفس المساحة الجانبية، لكن مساحتي سطحيهما مختلفتان.

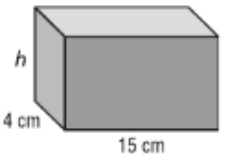
43. التحدي يبلغ ارتفاع منشور قائم h وحدة، وقاعدته عبارة عن مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ℓ وحدة. أوجد الصيغة العامة لإجمالي مساحة سطح المنشور. واشرح استنتاجك.

44. الكتابة في الرياضيات منشور قاعدته عبارة عن مربع ومنشور ثلاثي له نفس الارتفاع. وقاعدة المنشور الثلاثي عبارة عن مثلث متساوي الأضلاع، ومسقطه الرأسي يساوي طول ضلع المربع. قارن بين المساحتين الجانبيتين للمنشورين.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

45. إذا كانت مساحة سطح منشور مستطيل قائم $310\ cm^2$، فما قياس الارتفاع h للمنشور؟



A 5 cm
B $5\frac{1}{6}$ cm
C 10
D $13\frac{3}{9}$ cm

46. الإجابة القصيرة إسطوانة يبلغ محيطها 16π cm، وارتفاعها 20 cm. فما مساحة سطح الإسطوانة بالنسبة إلى π؟

47. تتقاضى شركة باركر للأرضيات ما يلي لتركيب أرضية من الخشب الصلب في مبنى. الأرضية الفرعية: AED 2.25 لكل متر مربع الأرضية الخشبية: AED 4.59 لكل متر مربع الألواح: AED 1.95 لكل متر مربع مسامير كل غرفة والمواد الأخرى: AED 25.95 لكل مهمة العمالة: AED 99 زائد AED 0.99 لكل متر مربع ما تكلفة تركيب أرضية من الخشب الصلب في غرفة أبعادها 18 في 15 m؟

F AED 2169.75
G AED 2268.75
H AED 2367.75
J AED 2765.55

SAT/ACT .48 ما قيمة $f(-2)$ إذا كان $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 3$؟

A -31
B $-\frac{9}{2}$
C 9
D 25
E 28

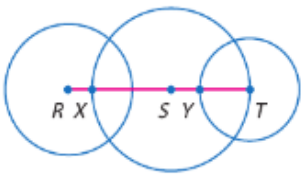
مراجعة شاملة

استخدم الورق المنقط متساوي الأبعاد لرسم كل منشور. (الدرس 1-9)

49. منشور مستطيل ارتفاعه وحدتان، ويبلغ طوله 3 وحدات، وعرضه وحدتان

50. منشور ثلاثي ارتفاعه وحدتان، وقاعدتاه عبارة عن مثلثين قائمين وله ثلاثة سيقان، ويبلغ طوله 4 وحدات

أقطار الدوائر R⊙ و S⊙ و T⊙ هي 10 cm و 14 cm و 9 cm على التوالي. أوجد كل قياس.



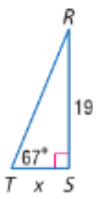
51. YX

52. SY

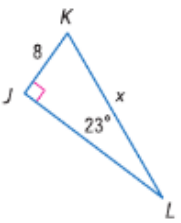
مراجعة المهارات

أوجد قيمة x. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

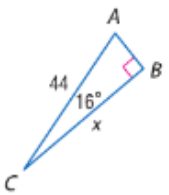
53.



54.



55.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-3 مساحة السطح للهرم والمخروط

السابق

- لقد أوجدت مساحات المضلعات المنتظمات.

الحالي

1. إيجاد المساحة الجانبية ومساحة السطح للهرم.
2. إيجاد المساحة الجانبية ومساحة السطح للمخروط

لماذا؟

- تُغطي ناطحة السحاب ترانس أمريكا بيراميد في سان فرانسيسكو حوالي تجمع سكني واحد كامل بالمدينة. ويسمح تصميمها الإبداعي للضوء والهواء بالدخول بين الشوارع والمباني، وذلك على عكس ناطحات السحاب التقليدية التي على شكل مناشير مستطيلة.

المفردات الجديدة

هرم منتظم regular pyramid
ارتفاع مائل slant height
مخروط قائم right cone
مخروط مائل oblique cone

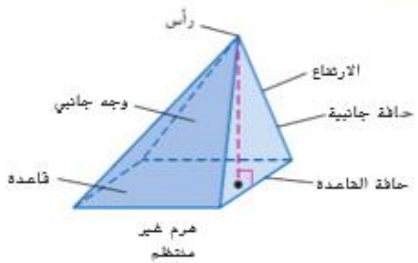
ممارسات في الرياضيات

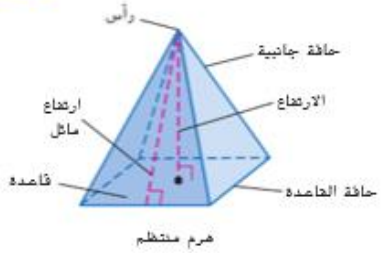
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
مراعاة الدقة.

1 المساحة الجانبية ومساحة السطح للهرم.

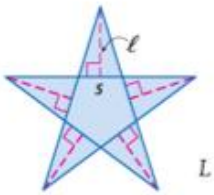
تتقاطع الوجوه الجانبية للهرم في نقطة مشتركة يُطلق عليها الرأس. ويتقاطع الوجهان الجانبيان عند الحافة الجانبية. ويتقاطع الوجه الجانبي والقاعدة عند حافة القاعدة. ويُطلق مصطلح المسقط الرأسي على القطعة المستقيمة التي تبدأ من الرأس وتسقط عموديًا على القاعدة.

يوجد **للهرم المنتظم** قاعدة على شكل مضلع منتظم، ويوجد بالمسقط الرأسي طرف عند مركز القاعدة. وجميع الحواف الجانبية تكون متطابقة، وتكون جميع الوجوه الجانبية أيضًا عبارة عن مثلثات متساوية الساقين متطابقة. ويُطلق على ارتفاع كل وجه جانبي **الارتفاع المائل** ℓ للهرم.





المساحة الجانبية L للهرم الخماسي المنتظم تساوي مجموع مساحات الوجوه الثلاثية المتطابقة للهرم كما هو موضح على اليسار في الشبكة.



$$L = \frac{1}{2}s\ell + \frac{1}{2}s\ell + \frac{1}{2}s\ell + \frac{1}{2}s\ell + \frac{1}{2}s\ell \quad \text{مجموع مساحات الوجوه الجانبية}$$

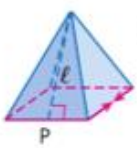
$$= \frac{1}{2}\ell(s + s + s + s + s) \quad \text{خاصية التوزيع}$$

$$= \frac{1}{2}P\ell \quad P = s + s + s + s + s$$

المفهوم الأساسي المساحة الجانبية للهرم المنتظم

الشرح المساحة الجانبية L للهرم المنتظم هي $L = \frac{1}{2}P\ell$، حيث ℓ هو الارتفاع المائل، و P هو محيط القاعدة.

النموذج

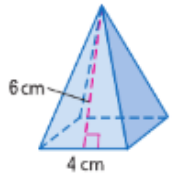


الرموز $L = \frac{1}{2}P\ell$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 1 المساحة الجانبية للهرم المنتظم

أوجد المساحة الجانبية للهرم الرباعي.



$L = \frac{1}{2} P\ell$ المساحة الجانبية للهرم المنتظم

$= \frac{1}{2}(16)(6)$ أو 48 $P = 4 \times 4$ أو 61، $\ell = 6$

تبلغ المساحة الجانبية $48\ cm^2$.

تمرين موجّه

1. أوجد المساحة الجانبية للهرم السداسي المنتظم الذي يبلغ طول حافة قاعدته 9 cm، ويبلغ ارتفاعه الجانبي 7 cm.

نصيحة دراسية

طريقة بديلة يمكنك أيضًا إيجاد المساحة الجانبية للهرم من خلال إضافة مساحات الوجوه الجانبية المتطابقة. ومساحة الوجه الواحد هي:

$\frac{1}{2}(4)(6) = 12\ cm^2$

المساحة الجانبية:

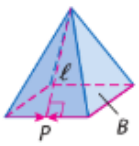
$4 \times 12 = 48\ cm^2$

مساحة سطح الهرم تساوي مجموع المساحة الجانبية ومساحة القاعدة.

المفهوم الأساسي مساحة سطح الهرم المنتظم

الشرح المساحة الجانبية S للهرم المنتظم هي $S = \frac{1}{2}P\ell + B$، حيث P هو محيط القاعدة، وℓ هو الارتفاع المائل، وB هو مساحة القاعدة.

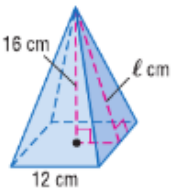
النموذج



الرموز $S = \frac{1}{2}P\ell + B$

مثال 2 مساحة سطح الهرم الرباعي

أوجد مساحة سطح الهرم الرباعي، مع تقريب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.



الخطوة 1 أوجد الارتفاع المائل.

$c^2 = a^2 + b^2$ نظرية فيثاغورس

$\ell^2 = 16^2 + 6^2$ $c = \ell$ و $b = 6$ و $a = 16$

$\ell = \sqrt{292}$ بسّط.

الخطوة 2 أوجد محيط القاعدة ومساحتها.

$P = 4 \times 12$ أو 48 cm $A = 12^2$ أو $144\ cm^2$

الخطوة 3 أوجد مساحة سطح الهرم.

$S = \frac{1}{2}P\ell + B$ مساحة سطح الهرم المنتظم

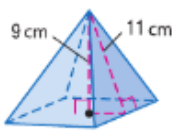
$= \frac{1}{2}(48)\sqrt{292} + 144$ $P = 48$ و $\ell = \sqrt{292}$ و $B = 144$

≈ 554.1 استخدم آلة حاسبة.

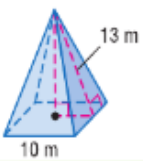
مساحة سطح الهرم تساوي حوالي $554.1\ cm^2$.

تمرين موجّه

2A.



2B.



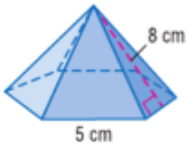
نصيحة دراسية

تكوين الروابط مساحة سطح الهرم تساوي $L + B$ وليس $L + 2B$، وذلك لأن الهرم يوجد به قاعدة واحدة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 مساحة سطح الهرم المنتظم

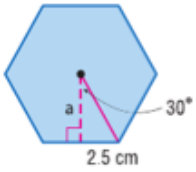
أوجد مساحة سطح الهرم المنتظم. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.



الخطوة 1 أوجد محيط القاعدة.

$P = 6 \times 5$ أو $30\ cm$

الخطوة 2 أوجد طول العامد ومساحة القاعدة.



الزاوية المركزية للشكل السداسي تساوي $\frac{360°}{6}$ أو $60°$.

إذًا قياس الزاوية التي تكوّنت في المثلث الموجود على اليسار يساوي $30°$.

$\tan 30° = \frac{2.5}{a}$ اكتب نسبة مثلثية لإيجاد العامد a.

$a = \frac{2.5}{\tan 30°}$ أوجد قيمة a.

≈ 4.3 استخدم آلة حاسبة.

$A = \frac{1}{2}Pa$ مساحة المضلع المنتظم

$\approx \frac{1}{2}(30)(4.3)$ عوّض عن P بالعدد 30 وعن a بالعدد 4.3.

≈ 64.5 اضرب.

إذًا، مساحة القاعدة B تساوي حوالي $64.5\ cm^2$.

الخطوة 3 أوجد مساحة سطح الهرم.

$S = \frac{1}{2}P\ell + 1$ مساحة سطح الهرم المنتظم

$= \frac{1}{2}(30)(8) + 64.5$ $P = 30$ و $\ell = 8$ و $B \approx 64.5$

≈ 184.5 بسّط.

مساحة سطح الهرم تساوي حوالي $184.5\ cm^2$.

مراجعة المصطلحات

النسب المثلثية

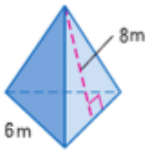
$\sin A = \frac{opp}{hyp}$

$\cos A = \frac{adj}{hyp}$

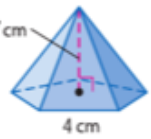
$\tan A = \frac{opp}{adj}$

تمرين موجّه

3A.

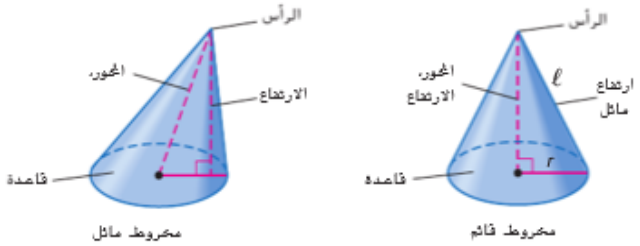


3B.



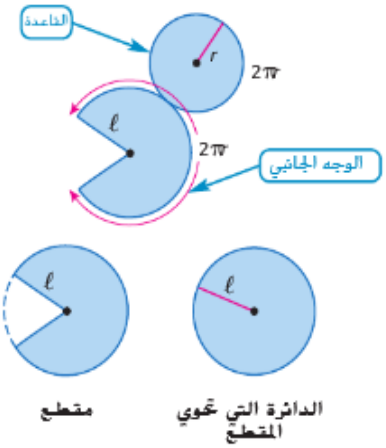
2 المساحة الجانبية ومساحة السطح للمخروط

تذكر أن المخروط يتضمن قاعدة دائرية ورأسًا. ومحور المخروط يكون عبارة عن القطعة المستقيمة التي لها طرفان، بحيث يقع أحدهما على الرأس والآخر على مركز القاعدة. وإذا كان المحور يساوي كذلك المسقط الرأسي، فإن المخروط يساوي **المخروط القائم**. أما إذا كان المحور ليس المسقط الرأسي، فإن المخروط يكون عبارة عن **مخروط مائل**.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الشكل الموجود على اليسار يوضح شبكة المخروط. وتمثل الدائرة التي نصف قطرها r قاعدة المخروط، ومحيطها يساوي $2\pi r$، ومساحتها تساوي πr^2. يمثل القطع الذي نصف قطره ℓ الوجه الجانبي للمخروط. وقياس القوس يساوي $2\pi r$. ويمكنك استخدام نسبة لإيجاد مساحته.



$$\frac{\text{قياس القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{مساحة القطع}}{\text{مساحة الدائرة}}$$

$$\frac{\text{محيط القطع}}{\pi\ell^2} = \frac{2\pi r}{2\pi\ell}$$

$$\text{مساحة القطع} = \pi\ell^2 \times \frac{2\pi r}{2\pi\ell} \text{ أو } \pi r\ell$$

الدائرة التي تحوي المقطع — مقطع

المفهوم الأساسي المساحة الجانبية ومساحة السطح لمخروط

الشرح

المساحة الجانبية L لمخروط دائري قائم هي $L = \pi r\ell$ حيث r هو نصف قطر القاعدة وℓ هو الارتفاع المائل.

مساحة السطح S لمخروط دائري قائم هي $S = \pi r\ell + \pi r^2$، حيث r هو نصف قطر القاعدة و ℓ هو الارتفاع المائل.

النموذج

الرموز $L = \pi r\ell$ $\quad S = \pi r\ell + \pi r^2$

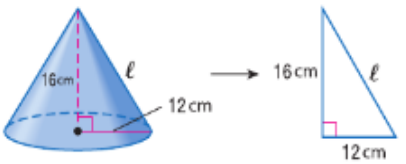
نصيحة دراسية

الاستنتاج المنطقي كما هو الحال في الهرم، المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم L يساوي $\frac{1}{2}P\ell$. نظرًا لأن القاعدة عبارة عن دائرة، فإن المحيط يساوي محيط القاعدة التي على شكل دائرة C. إذًا، المساحة الجانبية هي $\frac{1}{2}C\ell$.

$$L = \frac{1}{2}C\ell$$
$$= \frac{1}{2}(2\pi r)\ell$$
$$= \pi r\ell$$

مثال 4 من الحياة اليومية المساحة الجانبية للمخروط

الهندسة المعمارية يبلغ ارتفاع السطح المائل للمخروط الموضح على اليسار 16 m ويبلغ نصف قطره 12 m. أوجد المساحة الجانبية.



الخطوة 1 أوجد الارتفاع المائل ℓ.

نظرية فيثاغورس $\quad \ell^2 = 16^2 + 12^2$

بسّط. $\quad \ell^2 = 400$

أوجد الجذر التربيعي الموجب للطرفين. $\quad \ell = 20$

الخطوة 2 أوجد المساحة الجانبية L.

قدّر $\quad L \approx 3 \times 12 \times 20$ أو $720\ m^2$

المساحة الجانبية للمخروط $\quad L = \pi r\ell$

$r = 20$ و $\ell = 12$ $\quad = \pi(12)(20)$

استخدم آلة حاسبة. $\quad \approx 754$

المساحة الجانبية لسطح مخروط تساوي $754\ m^2$. ونجد أن الإجابة منطقية عند مقارنتها بالتقدير.

نصيحة دراسية

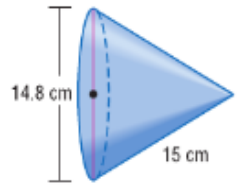
تصميم رسم تخطيطي عند حل مسألة كلامية تتضمن مجسمات، يمكنك الاستفادة كثيرًا من رسم شكل وتحديد الأجزاء المعلومة. واستخدم المجهول لتحديد ما تريد إيجاده من القياس أو القياسات.

تمرين موجّه

4. **المثلجات** يبلغ طول مخروط وافل $5\frac{1}{2}$ cm، ويبلغ قطر القاعدة $2\frac{1}{2}$ cm. أوجد المساحة الجانبية للمخروط. وقرّب لأقرب جزء من عشرة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 5 مساحة سطح المخروط



أوجد مساحة سطح المخروط الذي يبلغ طول قطره 14.8 cm، ويبلغ طول ارتفاعه المائل 15 cm.

قدّر: $S \approx 3 \times 7 \times 20 + 3 \times 50$ أو $570\ cm^2$

$S = \pi r\ell + \pi r^2$ مساحة سطح المخروط

$= \pi(7.4)(15) + \pi(7.4)^2$ $\ell = 15$ و $r = 7.4$

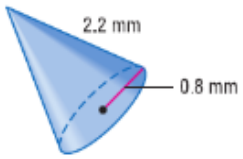
≈ 520.8 استخدم آلة حاسبة.

مساحة سطح المخروط تساوي حوالي $520.8\ cm^2$. وهذا قريب من التقدير، إذًا الإجابة معقولة.

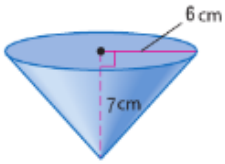
تمرين موجّه

أوجد مساحة سطح كل مخروط. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

5A.

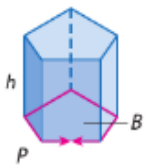
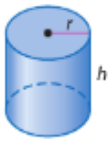
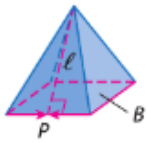
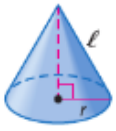


5B.



تم تلخيص صيغ المساحة الجانبية ومساحة السطح أدناه.

ملخص المفهوم المساحة الجانبية ومساحة السطح للمجسمات

المجسم	النموذج	المساحة الجانبية	مساحة السطح
المنشور		$L = Ph$	$S = L + 2B$ أو $S = Ph + 2B$
إسطوانة		$L = 2\pi rh$	$S = L + 2B$ أو $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$
هرم		$L = \frac{1}{2}P\ell$	$S = \frac{1}{2}P\ell + B$
مخروط		$L = \pi r\ell$	$S = \pi r\ell + \pi r^2$

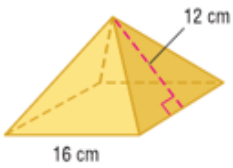
انتبه!
قواعد قواعد المنشورات القائمة والأهرامات القائمة لا تكون دائمًا مضلعات منتظمة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

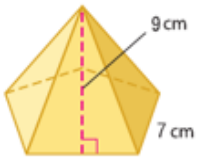
التحقق من فهمك

الأمثلة 1-3 **أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل هرم منتظم. وقرّب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

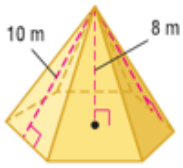
1.



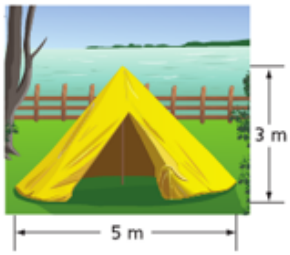
2.



3.



المثالان 4-5 4. **خيام** موضح على اليسار خيمة مخروطية الشكل. قرّب النتائج إلى أقرب جزء من عشرة.

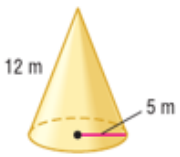


a. أوجد المساحة الجانبية للخيمة وصف ما تمثله.

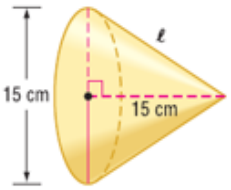
b. أوجد مساحة سطح الخيمة وصف ما تمثله.

الاستنتاج المنطقي أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل مخروط. قرّب لأقرب جزء من عشرة.

5.



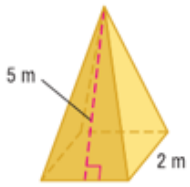
6.



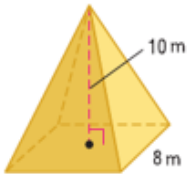
التدريب وحل المسائل

الأمثلة 1-3 **أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل هرم منتظم. وقرّب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

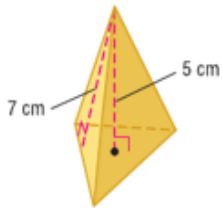
7



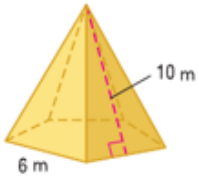
8.



9.



10.



11. هرم رباعي طول مسقطه الرأسي 12 cm، وارتفاعه المائل 18 cm

12. هرم سداسي طول حافة قاعدته 6 mm، وارتفاعه 9 mm

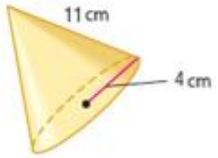
13. **الهندسة المعمارية** أوجد المساحة الجانبية لمبنى على شكل هرم يبلغ ارتفاعه المائل 210 m، وأبعاد قاعدته المربعة هي 332 m في 332 m.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

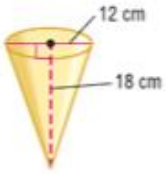
d101-08d6adc3bb02#

المثالان 5–4 أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل مخروط. قرّب لأقرب جزء من عشرة.

14.



15.



16. يبلغ طول القطر 3.4 cm، ويبلغ طول الارتفاع المائل 6.5 cm.

17. يبلغ طول المسقط الرأسي 5 m، ويبلغ طول الارتفاع المائل $9\frac{1}{2}$ m.

18. **جبال** يبلغ طول نصف قطر جبل مخروطي الشكل 1.6 km، ويبلغ ارتفاعه 0.5 km. ما المساحة الجانبية للجبل؟

19. **تاريخ** اكتشف علماء الآثار مؤخرًا هرمًا يعود في التاريخ إلى 1500 عام في مكسيكو سيتي. ويبلغ قياس هذا الهرم الرباعي 165 m لكل جانب، وسيبلغ طوله 20 m إذا انتصب قائمًا. كم كانت المساحة الجانبية الأصلية للهرم؟

20. صِف شكلين متعددي الوجوه يوجد بهما 7 أوجه.

21. ما مجموع عدد الوجوه والرؤوس والحواف للهرم الثماني؟

22. **خيمة التيبة** يوضح الجدول الموجود على اليسار أبعاد خيمتين من نوع التيبة ومصنوعتين من القماش. دون تضمين الأرض، ما مقدار القماش الإضافي المستخدم لجعل الخيمة B أكبر من الخيمة A؟

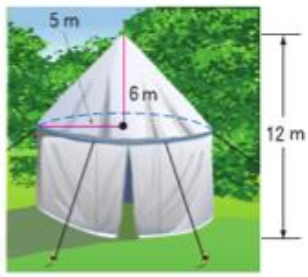
خيمة التيبة	القطر (m)	الارتفاع (m)
A	14	6
B	20	9

23. مساحة سطح الهرم الرباعي تساوي $24\ mm^2$ ومساحة القاعدة تساوي $4\ mm^2$. ما الارتفاع المائل للهرم؟

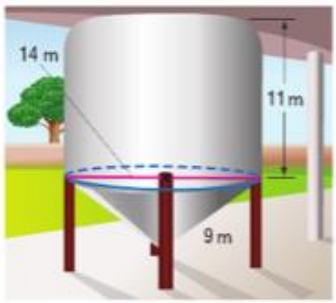
24. مساحة سطح المخروط تساوي $18\pi\ cm^2$، ويبلغ طول نصف قطر القاعدة 3 cm. ما طول الارتفاع المائل للمخروط؟

25. مساحة سطح هرم ثلاثي تساوي $532\ cm^2$، وعرض قاعدته 24 cm، وطول الوتر يساوي 25 cm. ما طول الارتفاع المائل للهرم؟

26. أوجد المساحة الجانبية للخيمة لأقرب جزء من عشرة.



27. أوجد مساحة السطح للخزان. مع التقريب



28. **تغيير الأبعاد** مخروط نصف قطره 6 cm، ويبلغ طول ارتفاعه المائل 12 cm. صِف تأثير كل تغيير على مساحة سطح المخروط.

a. مضاعفة نصف القطر والارتفاع المائل.

b. قسمة نصف القطر والارتفاع المائل على 3.

29. **أدوات** مجسم يأخذ شكل الشبكة الموضح على اليسار.

a. صِف المجسم.

b. ارسم المجسم.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

ارسم كل مجسم وشكل الشبكة الخاص به لتمثيل المجسم.

30. هرم سداسي **31. هرم مستطيل**

32. حيوانات أليفة المخروط الناقص هو جزء من الجسم الذي يتبقى بعد قطع الجزء العلوي بواسطة مستوى يوازي القاعدة. وتوضح خيمة الحيوانات الأليفة الموجودة على اليسار شكل المخروط الناقص للهرم المنتظم.

a. صِف أوجه المجسم.

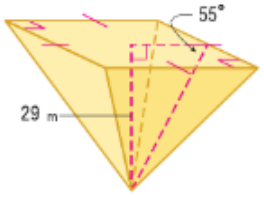
b. أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لشكل المخروط الناقص الذي تكوّن بفعل الخيمة.

c. تم إنشاء خيمة أخرى للحيوانات الأليفة من خلال قطع النصف العلوي من الهرم الذي يبلغ ارتفاعه 12 cm، ويبلغ طول ارتفاعه المائل 20 cm، ويبلغ طول ضلع قاعدته المربعة 32 cm. أوجد مساحة سطح هذا المخروط الناقص.

أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل مجسم. قرّب لأقرب جزء من عشرة.

33

34.



35. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تستكشف المساحة الجانبية ومساحة سطح الهرم الرباعي الذي يبلغ طول حافة قاعدته 3 وحدات.

a. هندسيًا ارسم الهرم على ورقة منقطة متساوية القياس.

b. جدوليّ أنشئ جدولاً يوضح المساحات الجانبية للهرم الذي يبلغ طول ارتفاعاته الجانبية وحدة واحدة، و 3 و 9 وحدات.

c. لفظيًا صِف ما يحدث للمساحة الجانبية للهرم إذا تمت مضاعفة الارتفاع المائل إلى ثلاثة أضعاف.

d. تحليليًا خمّن مدى تأثر المساحة الجانبية للهرم الرباعي عند مضاعفة الارتفاع المائل وحافة القاعدة إلى ثلاثة أضعاف. ثم تحقق من تخمينك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

36. الكتابة في الرياضيات لماذا لا يتضمن المجسم المائل ارتفاعًا مائلاً؟

37. التبرير حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحةً أحيانًا أم دائمًا أم غير صحيحة على الإطلاق. برر استنتاجك.

مساحة سطح المخروط الذي نصف قطره r وارتفاعه h تكون أقل من مساحة سطح الإسطوانة التي نصف قطرها r وارتفاعها h.

38. التبرير لدى مخروط وهرم مربع نفس مساحة السطح. إذا كان لديهما نفس مساحة القاعدة كذلك، فهل سيكون لديهما نفس الارتفاع المائل أيضًا؟ اشرح.

39. مسألة غير محددة الإجابة صِف هرمًا يبلغ إجمالي مساحة سطحه 100 وحدة مربعة.

40. فرضيات حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. اشرح استنتاجك.

يبلغ طول الارتفاع في هرم متعدد الأضلاع منتظم ومخروط h وحدة ويبلغ طول نصف قطر القاعدة فيهما P وحدة. إذًا، لهما نفس مساحة السطح.

41. الكتابة في الرياضيات صِف كيفية إيجاد مساحة سطح هرم متعدد الأضلاع منتظم يوجد بقاعدته عدد n من الأضلاع، ويبلغ ارتفاعه h وحدة، ويبلغ طول العامل فيه a وحدة.

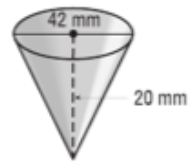
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

42. قمة مقصورة الحديقة على شكل هرم خماسي منتظم. وطول كل وجه للشكل الخماسي المنتظم يساوي 10 m. إذا كان طول الارتفاع المائل للسطح يساوي حوالي 6.9 m، فما المساحة الجانبية للسطح؟

A $34.5\ m^2$
C $172.5\ m^2$
B $50\ m^2$
D $250\ m^2$

43. إجابة قصيرة ما مساحة سطح المخروط ذي الأبعاد الموضحة، مع تقريب النتيجة لأقرب mm؟



44. الجبر يبيع متجر طارق للمنتجات الحرفية 3 مشابك يدوية الصنع مقابل AED 9.99. ما التعبير الذي يُمكن استخدامه لإيجاد إجمالي التكلفة C لعدد x من المشابك؟

F $C = \frac{9.99}{x}$
H $C = 3.33x$
G $C = 9.99x$
J $C = \frac{x}{3.33}$

45. SAT/ACT ما ميل المستقيم العمودي على المستقيم الذي معادلته $2x + 3y = 9$؟

A $-\frac{3}{2}$
D $\frac{3}{2}$
B $-\frac{2}{3}$
E $\frac{9}{2}$
C $\frac{2}{3}$

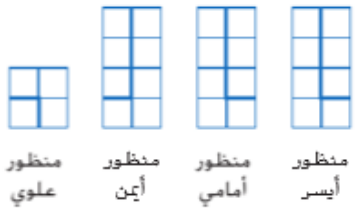
مراجعة شاملة

46. أوجد مساحة سطح الإسطوانة التي يبلغ طول قطرها 18 cm ويبلغ ارتفاعها 12 cm. (الدرس 2-9)

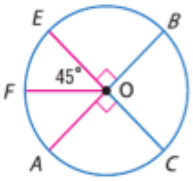
استخدم ورقة منقطة متساوية القياس وكل رسم متعامد لرسم مجسم. (الدرس 1-9)

47.

48.



$\overline{EC}$ و $\overline{AB}$ هما قطران في ⊙O. حدّد كل قوس سواء كان *قوسًا أكبر*، أم *قوسًا أصغر*، أم *نصف دائرة* بالنسبة للدائرة. ثم أوجد قياسه.

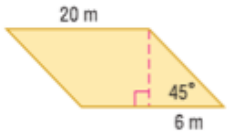


49. $m\widehat{ACB}$
50. $m\widehat{EB}$
51. $m\widehat{ACE}$

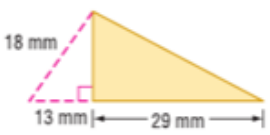
مراجعة المهارات

أوجد محيط كل متوازي أضلاع أو مثلث أو شكل مركب ومساحته. وقرّب لأقرب جزء من عشرة.

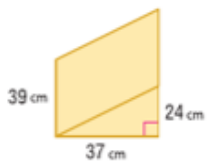
52.



53.



54.



McGraw-Hill Education مؤسسة محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

9-4 حجم المنشور والاسطوانة

السابق
- لقد أوجدت مساحات أسطح المناشير والإسطوانات.

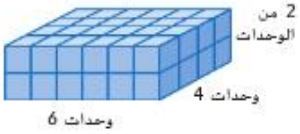
الحالي
1. إيجاد حجم المنشور.
2. إيجاد حجم الإسطوانة.

لماذا؟
- هناك أشكال وأحجام متنوعة لأحواض النباتات. ويمكنك تقريب كمية التربة التي تحتاج إليها لملء حوض نباتات من خلال إيجاد حجم الشكل ثلاثي الأبعاد الأقرب شبهًا للحوض.

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 حجم المنشور

تذكر أن حجم المجسم هو قياس كمية الفضاء المحصورة داخل المجسم. ويتم قياس الحجم بالوحدة المكعبة.



يتضمن المنشور المستطيل الموضح على اليسار 4 × 6 أو 24 وحدة مكعبة في الطبقة السفلية. ونظرًا لأن هناك طبقتين، فإن إجمالي الحجم يساوي 2 × 24 أو 48 وحدة مكعبة.

المفهوم الأساسي حجم المنشور

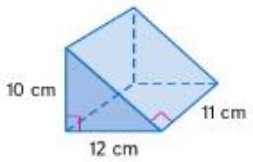
الشرح الحجم V للمنشور هو $V = Bh$، حيث B هو مساحة القاعدة و h هو ارتفاع المنشور.

النموذج

الرموز $V = Bh$

مثال 1 حجم المنشور

أوجد حجم المنشور.



الخطوة 1 أوجد مساحة القاعدة B.

مساحة المثلث $B = \frac{1}{2}bh$

$b = 12$ و $h = 10$ $= \frac{1}{2}(12)(10)$ أو 60

الخطوة 2 أوجد حجم المنشور.

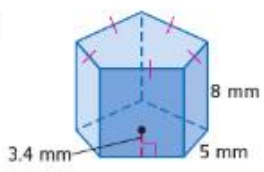
حجم المنشور $V = Bh$

$B = 60$ و $h = 11$ $= 60(11)$ أو 660

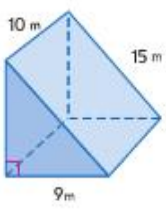
حجم المنشور يساوي $660\ cm^3$.

تمرين موجّه

1A.



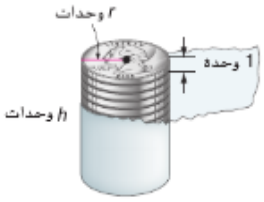
1B.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 حجم الإسطوانة

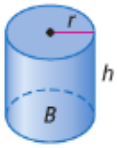
كما هو الحال بالنسبة للمنشور، فإن حجم الإسطوانة يُمكن التفكير فيها باعتبارها تتكون من طبقات. وبالنسبة للإسطوانة، تكون هذه الطبقات عبارة عن أقراص دائرية مشابهة للعملات المعدنية في مجموعة العملات الموضحة. وإذا فسرنا مساحة القاعدة على أنها حجم طبقة يبلغ ارتفاعها وحدة واحدة وكذلك إذا فسرنا ارتفاع الإسطوانة على أنه عدد الطبقات، فإن حجم الإسطوانة يساوي حجم الطبقات مضروبًا في عدد الطبقات أو مساحة القاعدة مضروبة في الارتفاع.



المفهوم الأساسي حجم الإسطوانة

الشرح الحجم V للإسطوانة هو $V = Bh$ أو $V = \pi r^2 h$، حيث يمثل B مساحة القاعدة ويمثل h ارتفاع المخروط ويمثل r نصف قطر القاعدة.

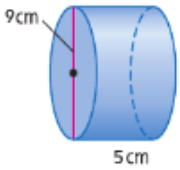
النموذج



الرموز $V = Bh$ أو $V = \pi r^2 h$

مثال 2 حجم الإسطوانة

أوجد مساحة الإسطوانة على اليسار.



قدّر قيمة: $V \approx 3 \times 5^2 \times 5$ أو 375 cm

$V = \pi r^2 h$	حجم الإسطوانة
$= \pi(4.5)^2(5)$	$r = 4.5$ و $h = 5$
≈ 318.1	استخدم آلة حاسبة.

حجم الإسطوانة يساوي حوالي $318.1\ cm^2$. وهذا قريب من التقدير، إذًا الإجابة معقولة.

تمرين موجّه

2. أوجد حجم إسطوانة نصف قطرها 3 cm وارتفاعها 8 cm. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

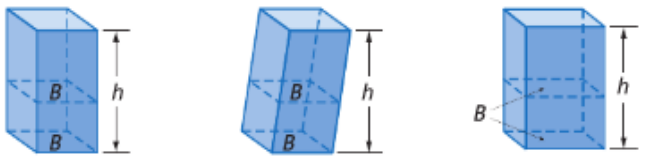
تمثل مجموعة الكتب الأولى الموجودة على اليسار منشورًا قائمًا. بينما تمثل المجموعة الثانية منشورًا مائلاً. ولدى المجموعتين نفس العدد من الكتب. إذا كانت جميع الكتب بنفس الحجم، فإن للمجموعتين نفس الحجم.

ويوضح ذلك المبدأ التالي الذي ينطبق على جميع المجسمات.

المفهوم الأساسي مبدأ كافالييري

الشرح إذا كان لمجسمين نفس الارتفاع h ونفس مساحة المقطع العرضي B في كل المستويات، فإن لهما نفس الحجم.

النماذج



حجم هذه المناشير هو Bh.

مهنة من الحياة اليومية

مهندس معماري

يطبق المهندس المعماري المهارات الفنية للهندسة لتصميم المباني وتشييدها وتشغيلها وصيانتها وتجديدها.

ويجب على المهندس المعماري أن يحصل على درجة البكالوريوس في الهندسة بالإضافة إلى دورات دراسية متخصصة. راجع التدريب 35.

انتبه!

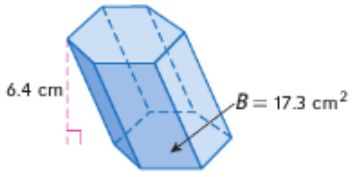
مساحة المقطع العرضي

حتى تصبح المجسمات التي لديها نفس الارتفاع في نفس الحجم أيضًا، يجب أن يكون لمقاطعها العرضية أيضًا نفس المساحة. ولا يجب على المقاطع العرضية للمجسمات المختلفة أن تكون عبارة عن مضلعات متطابقة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 3 حجم المجسم المائل

أوجد حجم منشور سداسي مائل إذا كان ارتفاعه 6.4 cm ومساحة قاعدته $17.3\ cm^2$.



$V = Bh$ حجم المنشور

$= 17.3(6.4)$ $B = 17.3$ و $h = 6.4$

$= 110.72$ بسّط.

الحجم يساوي $110.72\ cm^3$.

تمرين موجّه

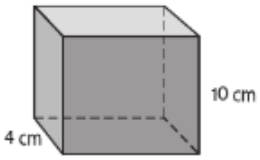
3. أوجد حجم إسطوانة مائلة نصف قطرها 5 cm وارتفاعها 3 cm. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

نصيحة **في حل المسائل**

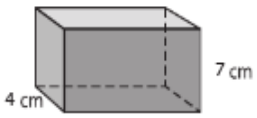
إعداد نموذج عند حل مسائل تتضمن حجم مجسمات، يُمكنك إعداد نموذج للمجسم لتخيل المسألة.

مثال 4 على الاختبار المعياري مقارنة أحجام المجسمات

يوجد لدى المنشورين A و B نفس الطول والعرض، ولكنهما مختلفان في الارتفاع. إذا كان حجم المنشور B يزيد بمقدار 150 cm عن حجم المنشور A، فما طول كل منشور؟



Prism B



Prism A

A 10 cm **B** $11\frac{1}{2}$ cm **C** 12 cm **D** $12\frac{1}{2}$ cm

قراءة فقرة الاختبار

أنت تعرف بعدين لمجسمين وأن الفرق بين حجميهما يساوي $150\ cm^3$.

حَل فقرة الاختبار

حجم منشور A − حجم منشور B = 150 اكتب معادلة.

$4\ell \times 10 - 4\ell \times 7 = 150$ استخدم $V = Bh$.

$12\ell = 150$ بسّط.

$\ell = 12\frac{1}{2}$ اقسم كل طرف على 12.

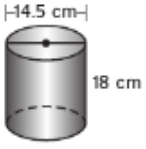
طول كل منشور يساوي $12\frac{1}{2}$ cm. الإجابة الصحيحة هي D.

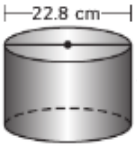
نصيحة **عند حل الاختبار**

كتابة معادلات من خلال اختيار متغير لتمثيل المجهول ووضع معادلة، فإنك تُسهّل عملية التحقق من الأخطاء أثناء حل المسألة.

تمرين موجّه

4. تمتلئ الحاويتان الموضحتان على اليسار بالغشار. بكم مرة تزيد كمية الغشار الموجود في الحاوية الكبيرة عن الغشار الموجود في الحاوية الصغيرة؟





F 1.6 مرة من كمية الغشار

G 2.5 مرة من كمية الغشار

H 3.3 مرة من كمية الغشار

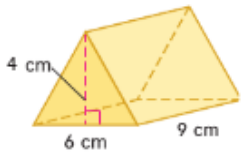
J 5.0 مرة من كمية الغشار

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

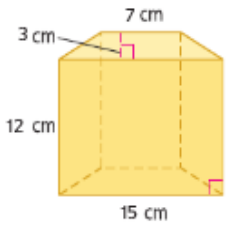
التحقق من فهمك

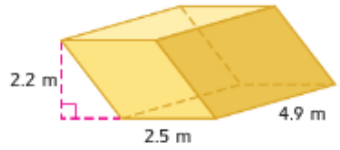
المثالان 1 و 3 **أوجد حجم كل منشور.**

1.



2.



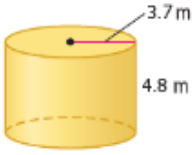


3. المنشور المستطيل المائل الموضح على اليسار

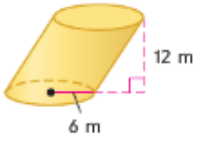
4. منشور خماسي مائل مساحة قاعدته $42\ cm^2$ وارتفاعه $5.2\ cm$

الأمثلة 2-3 **أوجد حجم كل إسطوانة. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.**

5.



6.



7. إسطوانة طول قطرها 16 cm، وارتفاعها 5.1 cm

8. إسطوانة طول نصف قطرها 4.2 cm، وارتفاعها 7.4 cm

مثال 4

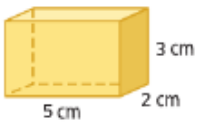
9. **الاختيار من متعدد** يبلغ طول حمام سباحة مستطيل الشكل 8 m وعرضه 4 m. إذا كنا نحتاج إلى ملئه بالمياه لعمق 1.5 m، ويوجد في كل متر مكعب 1000 L من المياه، فكم عدد لترات المياه التي سنحتاج إليها لملء حمام السباحة؟

A 4000 **B** 6400 **C** 30,000 **D** 48,000

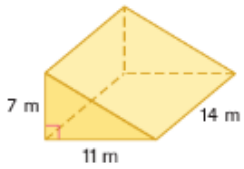
التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 3 **الاستنتاج المنطقي** أوجد حجم كل منشور.

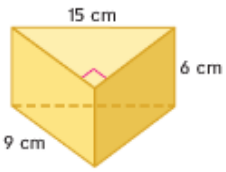
10.



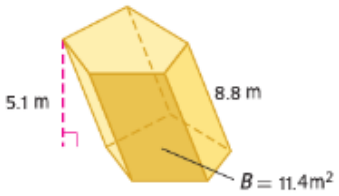
11



12.



13.



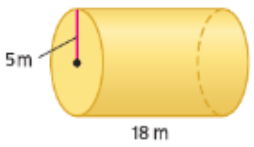
14. منشور سداسي مائل ارتفاعه 15 cm ومساحة قاعدته $136\ cm^3$

15. منشور رباعي طول حافة قاعدته 9.5 cm وارتفاعه 17 cm

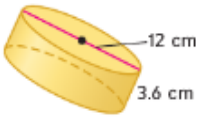
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الأمثلة 2-3 **الاستنتاج المنطقي** أوجد حجم كل إسطوانة. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

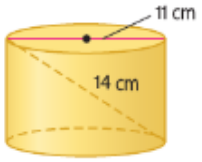
16.



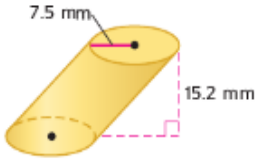
17



18.

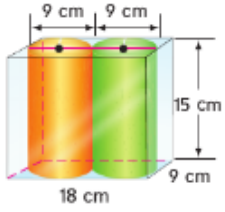


19.



مثال 4

20. **حوض نباتات** حوض نباتات على شكل منشور مستطيل طوله 18 cm، وعمقه $14\frac{1}{2}$ cm وارتفاعه 12 cm. ما حجم التربة الزراعية الموجودة في حوض النباتات إذا كان ممتلئًا حتى $1\frac{1}{2}$ cm أسفل القمة

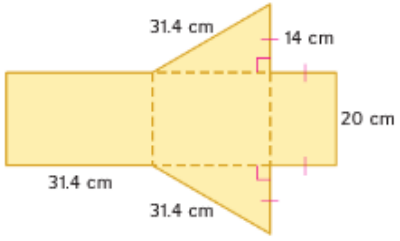


21. **الشحن** يُستخدم صندوق أبعاده 18 cm في 9 cm في 15 cm في نقل شمع إسطواني الشكل. وقطر كل شمعة 9 cm وارتفاعها 15 cm كما هو موضح على اليسار. ما حجم المساحة الفارغة في الصندوق؟

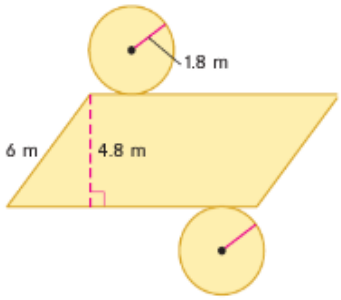
22. **قلاع الرمال** في مسابقة لبناء قلاع الرمال، يُسمح للمتسابقين باستخدام المياه والمجارف و $10\ ft^3$ من الرمال فقط. لنقل الكمية الصحيحة من الرمال، يحتاج المنظمون إلى تشييد أسطوانات طولها 2 ft لحمل كمية الرمال الكافية لمتسابق واحد. ما طول قطر الإسطوانات؟

أوجد حجم المجسم الذي تكونه كل شبكة.

23.



24.



25. **طعام** يبلغ ارتفاع علبة إسطوانية من رقائق البطاطس المقلية 27 cm. ويبلغ طول نصف قطرها 4 cm. ثم روجت الشركة المصنعة لعلبة جديدة أكبر بمقدار 30% عن العلبة الحالية. إذا كان للعلبتين نفس نصف القطر، فما ارتفاع العلبة الكبيرة؟

26. **تغيير الأبعاد** إسطوانة نصف قطرها 5 cm وارتفاعها 8 cm. صِف تأثير كل تغيير على حجم الإسطوانة.

a. مضاعفة الارتفاع.

b. مضاعفة نصف القطر لثلاثة أضعاف.

c. **مضاعفة نصف القطر والارتفاع لثلاثة أضعاف.**

d. **تبديل الأبعاد.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

27. التربة يريد علماء التربة تحديد كثافة كتلة منالتربة الزراعية لتقييم مدى كفاءة نمو نبات معين فيها. وكثافة عينة التربة تساوي نسبة وزنها إلى حجمها.

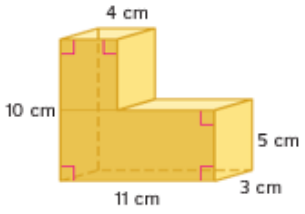
a. إذا كان وزن الحاوية التي توجد بها التربة يساوي 1.2 kg، ووزن الحاوية الفارغة يساوي 0.8 kg، فما كثافة كتلة التربة؟

b. بفرض أن جميع العوامل الأخرى مناسبة، ما مدى كفاءة نمو نبات في هذه التربة إذا كانت كثافة كتلة التربة المناسبة لنمو الجذور هي $0.045\ g/cm^3$ لكل cm^3؟ اشرح.

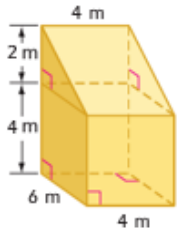
c. إذا كان هناك كيس يوجد به $0.07\ m^3$ من التربة، فما وزن هذا الكيس بالكيلوجرام؟

أوجد حجم كل مجسم مركب. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

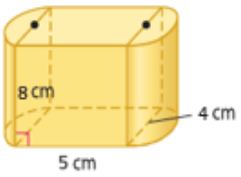
28.



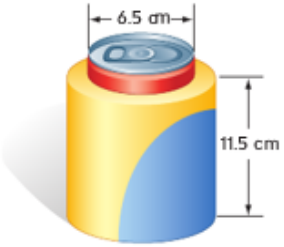
29.



30.



31. التصنيع تتوافق علبة طولها 12 cm مع حامل إسطواني مطاطي طوله 11.5 cm، بما في ذلك سمك قاعدة الحامل الذي يبلغ 1 cm. ويبلغ سمك حافة الحامل 1 cm. ما حجم المادة المطاطية التي تكوّن الحامل؟



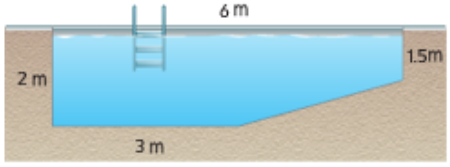
أوجد كل مقياس مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

32. علبة إسطوانية حجمها $363\ cm^3$. ويبلغ قطر العلبة 9 cm. كم يبلغ ارتفاع العلبة؟

33. إسطوانة مساحة سطحها $144\pi\ cm^2$ وارتفاعها 6 cm. كم يبلغ حجمها؟

34. منشور مستطيل مساحة سطحه $432\ cm^2$، وارتفاعه 6 cm، وعرضه 12 cm. ما حجم المنشور؟

35. الهندسة المعمارية يتم استخدام عمود إسطواني من الفولاذ المقاوم للصدأ لإخفاء نظام تهوية في مبنى جديد. ووفق المواصفات، يُمكن لقطر العمود أن يتراوح بين 30 cm و 95 cm. ويجب أن يكون الارتفاع 500 cm. ما الفرق في الحجم بين أكبر عمود ممكن وأصغر عمود ممكن؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة في السنتيمترات المكعبة.

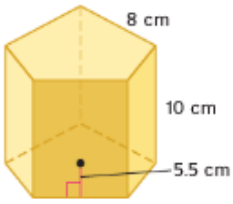


36. تمثيل النماذج تميل قاعدة حمام سباحة مستطيل الشكل بحيث يكون عمق أحد طرفي حمام السباحة 2 m والطرف الآخر 1.5 m كما هو موضح في الشكل. إذا كان العرض 5 m. فأوجد حجم المياه اللازمة لملء حمام السباحة.

37. تغيير الأبعاد تخطط شركة متخصصة في حليب الصويا للترويج لزيادة منتجها من حليب الصويا في كل علبة بمقدار 25%؟ وتريد الشركة أن تكون للعلبة الجديدة نفس القاعدة. ما ارتفاع العلب الجديدة؟

38. تصميم ارسم ثلاثة تصميمات مختلفة واكتب قياساتها (بالـ cm) لكوب قياس مكونات جافة بحيث يتسع لكوب واحد. تأكد من إدراج الأبعاد في كل تصميم. (1 كوب ≈ $237\ cm^3$)

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف



39 أوجد حجم المنشور الخماسي المنتظم الموضح على اليسار من خلال قسمته على خمسة مناشير ثلاثية متساوية. صِف مساحة القاعدة والارتفاع لكل منشور ثلاثي.

40. الباحات يخطط السيد إسماعيل لإزالة فناء قديم وتركيب فناء جديد من الخرسانة على شكل مستطيل يبلغ طوله 20 m، وعرضه 12 m، وسمكه 4 cm. وعرض مقاول العمل مقابل AED 6000 لهذا المشروع. وعرض مقاول آخر AED 500 مقابل كل m^3 لإنشاء الفناء الجديد، و AED 700 لإزالة الفناء القديم. ما الخيار الأقل تكلفة؟ اشرح.

41. التمثيلات المتعددة ستستكشف في هذه المسألة الإسطوانات.

a. هندسيًا ارسم إسطوانة قائمة وإسطوانة مائلة يبلغ بحيث يبلغ الارتفاع 10 m والقطر 6 m.

b. لفظيًا منشور مربع ارتفاعه 10 m وحافة قاعدته 6 m. هل حجمه أكبر من أم أقل من أم يساوي حجم الإسطوانة؟ اشرح.

c. تحليليًا حدد التغيير الذي يؤثر على حجم الإسطوانة بشكل أكبر: ضرب الارتفاع في x أم ضرب نصف القطر في x. اشرح.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

42. التفكير النقدي قام كلّ من حسام وحسن بحساب حجم منشور ثلاثي متساوي الأضلاع طول العامد بها 4 وحدات والارتفاع 5 وحدات. هل أحدهما صحيح؟ اشرح استنتاجك.

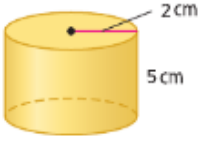
حسام

$$V = Bh$$
$$= \frac{1}{2}aP \cdot h$$
$$= \frac{1}{2}(4)(24\sqrt{3}) \cdot 5$$
$$= 240\sqrt{3} \text{ وحدات مكعبة}$$

حسان

$$V = Bh$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}s^2 \cdot h$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(4\sqrt{3})^2 \cdot 5$$
$$= 120\sqrt{3} \text{ وحدات مكعبة}$$

43. تحدٍ تُستخدم العلبة الإسطوانية الموضحة أدناه في ملء حاوية بسائل. ويتطلب الأمر ثلاث علب ممتلئة لملء الحاوية. حدد الأبعاد الممكنة للحاوية إذا كانت بالأشكال التالية.



a. منشور مستطيل

b. منشور مربع

c. منشور ثلاثي قاعدته عبارة عن مثلث قائم

44. الكتابة في الرياضيات اكتب إجابة كاملة للسؤال التالي المنشور على منتدى على الإنترنت حول العناية بالحدائق.

أنا مزارع جديد. وسوف تسلم الحضانة حمولة شاحنة من التربة تبلغ 4 m. فماذا يعنون بقولهم "4 m" من التربة؟ اشرح إجابتك.

45. مسألة غير محددة الإجابة ارسم منشورًا واكتب القياسات عليه، بحيث يبلغ حجمه $50\ cm^3$ مكعبًا.

46. التبرير حدّد إذا ما كانت العبارات التالية صحيحة أم خاطئة. اشرح.

الإسطوانتان اللتان لهما نفس الارتفاع ونفس المساحة الجانبية يكون لهما نفس الحجم.

47. الكتابة في الرياضيات ما مدى تشابه صيغتي حجم المنشور والإسطوانة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

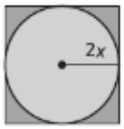
48. حجم منشور مستطيل يساوي $1380\ cm^3$. وقاعدته عبارة عن مثلث قائم يبلغ طولا الساقين فيه 8 cm و 15 cm. ما ارتفاع المنشور؟

A 34.5 cm
B 23 cm
C 17.8 cm
D 11.5 cm

49. يبلغ ارتفاع خزان إسطواني الشكل يُستخدم لتخزين التربة نصف قياس طول نصف قطره. إذا كان حجم الخزان هو $1,122,360\ cm^3$، فما نصف قطر الخزان؟

F 89.4 cm
G 178.8 cm
H 280.9 cm
J 561.8 cm

50. الإجابة القصيرة ما نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع؟



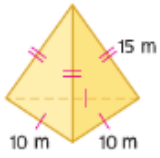
51. SAT/ACT تقترح إمارة سن قانون ضريبة جديد على الممتلكات بقيمة 0.5%. ما قيمة الضريبة الإضافية بالنسبة لفرد تبلغ قيمة ممتلكاته التي تخضع للضريبة AED 85,000؟

A AED 4.25
B AED 170
C AED 425
D AED 4250
E AED 42,500

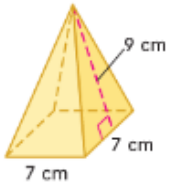
مراجعة شاملة

أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل هرم منتظم. وقرّب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. (الدرس 3-9)

52.

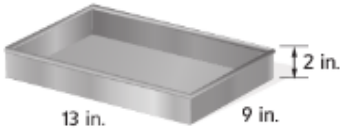


53.



54.

55. خبز تُطلى كثير من صواني الخبز من الداخل بمادة مانعة للالتصاق. وأبعاد الصينية المستطيلة هي 9 cm في 13 cm في عمق يبلغ 2 cm. ما مساحة الصينية من الداخل التي تحتاج إلى الطلاء؟ (الدرس 2-9)



أوجد القياس المحدّد وقرّبه إلى أقرب جزء من عشرة.

56. مساحة دائرة تساوي $54\ m^2$. أوجد قطرها.

57. أوجد قطر دائرة مساحتها $102\ cm^2$.

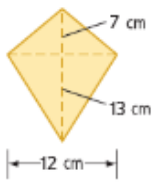
58. مساحة دائرة تساوي $191\ m^2$. أوجد نصف قطر الدائرة.

59. أوجد نصف قطر دائرة مساحتها $271\ cm^2$.

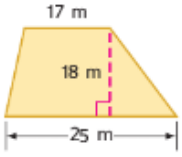
مراجعة المهارات

أوجد مساحة كل شبه منحرف، أو معين، أو شكل طائرة ورقية.

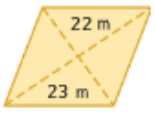
60.



61.



62.

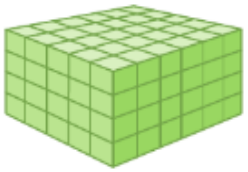


McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

اختبار منتصف الوحدة
الدروس من 9-1 إلى 9-4

9

1. صِف كيفية استخدام ورقة منقطة متساوية القياس لرسم الشكل التالي. (الدرس 9-1)

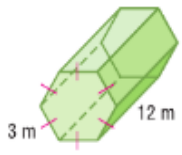


2. استخدم ورقة منقطة متساوية القياس لرسم منشور مستطيل يبلغ ارتفاعه وحدتين، وطوله 3 وحدات، وعرضه 6 وحدات. (الدرس 9-1)

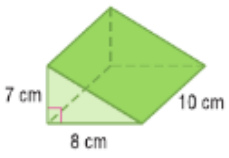
3. استخدم ورقة منقطة متساوية القياس لرسم منشور ثلاثي يبلغ ارتفاعه 5 وحدات، ويبلغ طولا ضلعي قاعدته 4 وحدات و 3 وحدات. (الدرس 9-1)

أوجد المساحة الجانبية لكل منشور. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. (الدرس 9-2)

4.



5.

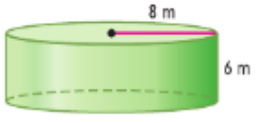


6. **الاختيار من متعدد** يَستخدم الكابل متحد المحور في نقل المكالمات الهاتفية لمسافات طويلة، ونقل برامج التلفزيون عبر الكابلات، ووسائل اتصالات أخرى. يتضمن الكابل متحد المحور 22 أنبوبًا نحاسيًا ويبلغ قطره 3 cm. ما المساحة الجانبية التقريبية للكابل متحد المحور الذي يبلغ طوله 60 m؟ (الدرس 9-2)

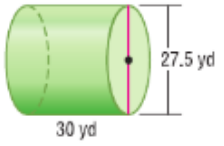
A $16.4\ m^2$
C $11.4\ m^2$
B $196.3\ m^2$
D $124.4\ m^2$

أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل إسطوانة. وقرّب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. (الدرس 9-2)

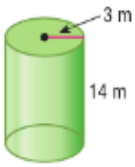
7.



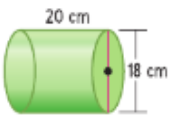
8.



9.



10.



11. **مجموعات** تجمع سمية رشاشات ملح وفلفل ذات أشكال فريدة. وقد ورثت زوجًا من الرشاشات رباعية السطوح من والدتها. (الدرس 9-3)

a. يبلغ قياس كل حافة للرشاشات 3 cm. ارسم رشاشة واحد.

b. أوجد إجمالي مساحة سطح رشاشة واحد.

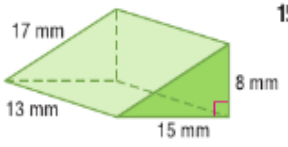
أوجد مساحة سطح كل هرم منتظم أو مخروط منتظم. وقرّب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. (الدرس 9-3)

12.

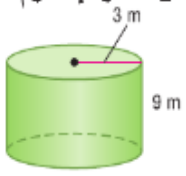
13.

أوجد حجم كل منشور أو إسطوانة. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. (الدرس 9-4)

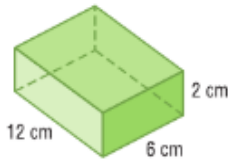
14.



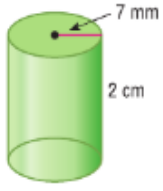
15.



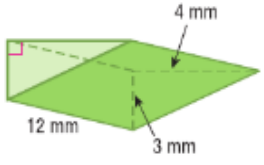
16.



17.



18.



19.

20. **الأرصاد الجوية** القمر الصناعي تيروس هو عبارة عن سلسلة من الأقمار الصناعية المخصصة للطقس التي حملت كاميرات تلفزيونية وكاميرات الأشعة تحت الحمراء وهي مغطاة بالخلايا الشمسية. إذا كان قطر جسم القمر الصناعي تيروس الذي على شكل إسطوانة يساوي 42 in، وارتفاعه 19 in، فما الحجم المتاح لحمل الأدوات والكاميرات؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 9-4)

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

9-5 حجم الأشكال الهرمية والمخروطية

السابق
- أوجدت مساحات أسطح الأشكال الهرمية والمخاريط.

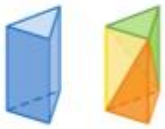
الحالي
1. إيجاد أحجام الأشكال الهرمية.
2. إيجاد أحجام الأشكال المخروطية.

لماذا؟
- تدرس عائشة البلورات التي تنمو على التكوينات الصخرية. ومن أجل أحد المشروعات، تصنع نموذجًا من الصلصال لبلورة ذات شكل مركّب من شكلين هرميين مستطيلين متطابقين. قاعدة كل هرم 1 cm في 1.5 cm. والارتفاع الإجمالي 4 cm. فما أهمية إيجاد حجم النموذج في هذه الحالة؟

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها. محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

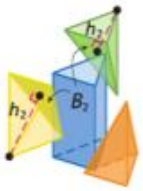
1 حجوم الأشكال الهرمية

يمكن فصل المنشور المثلث إلى ثلاثة أشكال هرمية مثلثة كما هو موضح. ونظرًا لأن جميع أوجه الهرم المثلث هي مثلثات، فيمكن اعتبار أي وجه منها قاعدة للهرم.



مساحة قاعدة الهرمين الأصفر والبرتقالي هي B_1 وارتفاعهما هو h_1. ولذلك، حسب مبدأ كفالييري، لهما الحجم ذاته. وبالمثل، مساحة قاعدة الهرمين الأصفر والأخضر هي B_2 وارتفاعهما h_2؛ إذًا لهما الحجم ذاته.

حيث إن الهرمين البرتقالي والأخضر لهما نفس حجم الهرم الأصفر، إذًا أحجام الأشكال الهرمية الثلاثة متساوية. ولذلك، حجم كل هرم هو ثلث حجم منشور له نفس القاعدة والارتفاع. وينطبق هذا على أي منشور مهما كان شكل قاعدته.

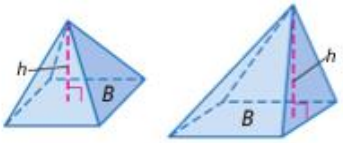


المفهوم الأساسي حجم الهرم

الشرح
حجم الهرم هو $V = \frac{1}{3}Bh$، حيث يمثل B مساحة القاعدة ويمثل h ارتفاع الهرم.

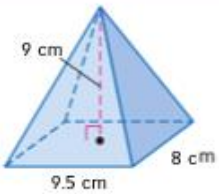
الرموز
$V = \frac{1}{3}Bh$

النماذج



مثال 1 حجم الهرم

أوجد حجم الهرم.



$V = \frac{1}{3}Bh$ حجم الهرم

$= \frac{1}{3}(9.5 \times 8)(9)$ $B = 9.5 \times 8$ و $h = 9$

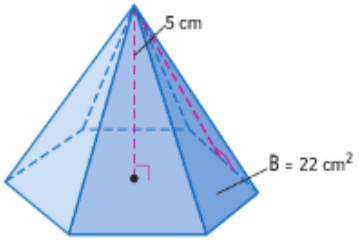
$= 228$ بسّط.

حجم الهرم $228\ cm^3$.

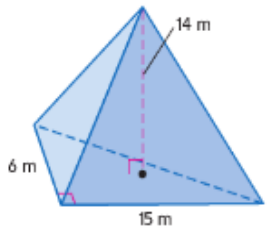
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تمرين موجّه

1A.

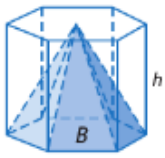


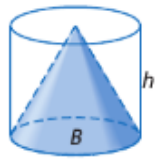
1B.



2 حجوم الأشكال المخروطيه

الهرم والمنشور الموضحان لهما نفس مساحة قاعدة B وارتفاع h للإسطوانة والمخروط. وحيث إن حجم الهرم يساوي ثلث حجم المنشور، إذًا حسب مبدأ كفالييري، فحجم المخروط يجب أن يكون ثلث حجم الإسطوانة.



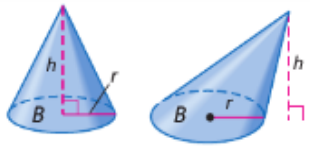


المفهوم الأساسي حجم المخروط

الشرح

حجم المخروط الدائري هو $V = \frac{1}{3}Bh$، أو $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$، حيث يمثل B مساحة القاعدة ويمثل h ارتفاع المخروط ويمثل r نصف قطر القاعدة.

النماذج



الرموز

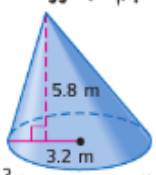
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ أو $V = \frac{1}{3}Bh$

انتبه!

أحجام المخاريط تنطبق صيغة مساحة سطح المخروط على المخاريط القائمة فقط. بينما تنطبق صيغة حجم المخروط على المخاريط المائلة والقائمة.

مثال 2 حجم المخروط

a. أوجد حجم المخروط. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

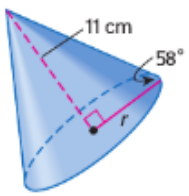


$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	حجم المخروط
$\approx \frac{1}{3}\pi(3.2)^2(5.8)$	$h = 5.8$ و $r = 3.2$
≈ 62.2	استخدم آلة حاسبة.

حجم المخروط تقريبًا $62.2\ m^3$.

b. أوجد حجم المخروط. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

الخطوة 1 استخدم حساب المثلثات لإيجاد نصف القطر.



$\tan 58° = \frac{11}{r}$	$\tan\theta = \frac{opp}{adj}$
$r = \frac{11}{\tan 58°}$	حُلّ لإيجاد قيمة r.
$r \approx 6.9$	استخدم آلة حاسبة.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف ©

الخطوة 2 أوجد الحجم.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ حجم المخروط

$\approx \frac{1}{3}\pi(6.9)^2(11)$ $h = 11$ و $r \approx 6.9$

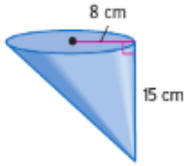
≈ 548.4 استخدم آلة حاسبة.

حجم المخروط تقريبًا $548.4\ cm^3$.

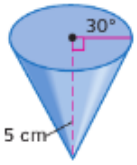
تمرين موجّه

2A.

2B.



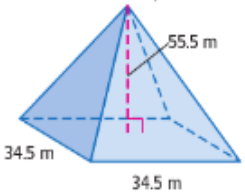
2C.



مثال 3 من الحياة اليومية إيجاد الحجم في مسائل من الحياة اليومية

الهندسة المعمارية **يبلغ ارتفاع الهرم فوق نصب واشنطن التذكاري 55.5 m وأضلاع قاعدته تقريبًا 34.5 m. فما حجم الهرم. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.**

ارسم الهرم وميّز الأجزاء.



$V = \frac{1}{3}Bh$ حجم الهرم

$= \frac{1}{3}(34.5 \times 34.5)(55.5)$ $h = 55.5$ و $B = 34.5 \times 34.5$

$\approx 22{,}019.6$ بسّط.

يبلغ حجم الهرم الصغير فوق نصب واشنطن التذكاري $22{,}019.6\ m^3$ تقريبًا.

تمرين موجّه

3. علم الآثار الهرم الصغير الذي تم اكتشافه في صقارة بمصر في 1992 قاعدته مستطيله بقياس 53 cm في 37 cm وارتفاعه 46 cm. فما حجمه؟ قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

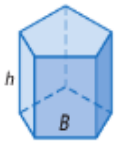
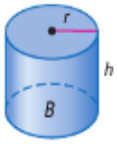
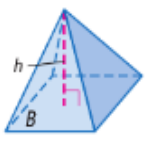
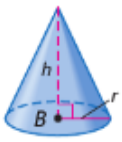
الربط بالحياة اليومية

نصب واشنطن التذكاري هو أكبر هيكل معماري في العالم ويبلغ ارتفاعه 169 m ويحتوي على هرم مربع يُسمى هريم في قمته.

المصدر: Enchanted Learning

تم تلخيص صيغ أحجام المجسمات أدناه.

ملخص المفهوم حجوم المجسمات

مجسم	منشور	إسطوانة	هرم	مخروط
النموذج				
الحجم	$V = Bh$	$V = Bh$ أو $V = \pi r^2 h$	$V = \frac{1}{3}Bh$	$V = \frac{1}{3}Bh$ أو $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

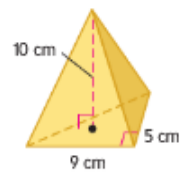
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

d101-08d6adc3bb02#

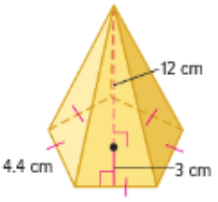
التحقق من فهمك

مثال 1 **أوجد حجم كل هرم.**

1.



2.

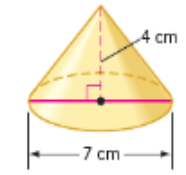


3. هرم مستطيل القاعدة ارتفاعه 5.2 m وقاعدته 8 m في 4.5 m

4. هرم مربع القاعدة ارتفاعه 14 m وطول ضلع قاعدته 8 m

مثال 2 **أوجد حجم كل مخروط. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.**

5.



6.

7. مخروط مائل ارتفاعه 10.5 mm ونصف قطره 1.6 mm

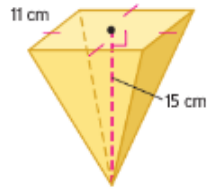
8. مخروط ارتفاعه المائل 25 m ونصف قطره 15 m

مثال 3 9. **متاحف** القبة السماوية في متحف كورفيت الوطني في بولينغ غرين بولاية كنتاكي هي مبنى مخروطي الشكل. إذا علمت أن الارتفاع 30.5 m ومساحة القاعدة $1430.7\ m^2$ فأوجد حجم الهواء الذي يجب أن تستوعبه أنظمة التدفئة والتبريد. قرّب النتيجة إلى أقرب متر مكعب.

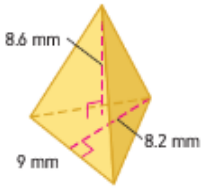
التدريب وحل المسائل

مثال 1 **الاستنتاج المنطقي** **أوجد حجم كل هرم. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

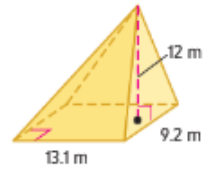
10.



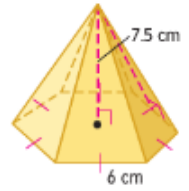
11



12.



13.



14. هرم بقاعدة خماسية مساحة قاعدته $590\ m^2$ وارتفاعه 7 m

15. هرم بقاعدة مثلثة ارتفاعه 4.8 cm وقاعدة على شكل مثلث قائم ساقه 5 cm ووتره 10.2 cm

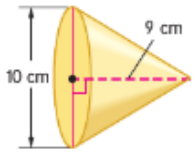
16. هرم بقاعدة على شكل مثلث قائم ساقه 8 cm ووتره 10 cm وحجم الهرم $144\ cm^3$. فما ارتفاعه.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2

أوجد حجم كل مخروط. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

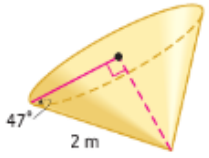
17.



18.

19.

20.



21. مخروط مائل محيطه 16 cm وارتفاعه 16 cm

22. مخروط قائم بارتفاع مائل مقداره 5.6 cm ونصف قطره 1 cm

مثال 3

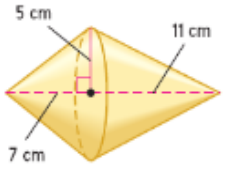
23. **الوجبات الخفيفة** تقريبًا كم عدد السنتيمترات المكعبة من المكسرات المحمصة التي تملأ بالكامل مخروطًا ورقيًا ارتفاعه 14 cm ومحيط قاعدته 8 cm؟ قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

24. **تمثيل النماذج** هرم أرينا في ممفيس بولاية تينيسي هو ثالث أكبر هرم في العالم. يبلغ ارتفاعه تقريبًا 107 m، وعرض قاعدته المربعة 107 m. أوجد حجم هذا الهرم.

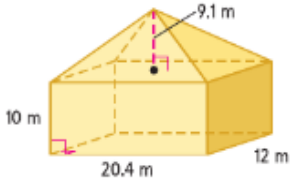
25. **العناية بالحدائق** الدفيئة الزراعية على اليسار على شكل هرم بقاعدة خماسية منتظمة وارتفاع الدفيئة 5 m وطول ضلع القاعدة 2 m. فما حجم الدفيئة؟

أوجد حجم كل مجسم. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

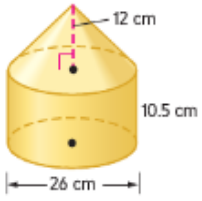
26.



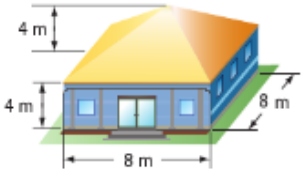
27.



28.



29. **التدفئة** تعمل أمال على بناء غرفة فندق في الفناء الخلفي لمنزلها. ومن أجل شراء وحدة تدفئة لهذه المساحة، يجب أن تحدد عدد الوحدات الحرارية البريطانية اللازمة لتدفئة البناء. للأبنية الجديدة المعزولة جيدًا، يجب توفير 70 وحدة حرارية بريطانية للمتر المكعب. فما حجم الوحدة التي يجب أن تشتريها أمال؟



30. **العلوم** في المسألة الواردة في بداية الدرس، حدد حجم النموذج. اشرح فائدة معرفة الحجم في هذه الحالة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

31. **تغيير الأبعاد** مخروط نصف قطره 4 cm وارتفاعه 9 cm. صف تأثير كل تغيير على حجمه.

a. مضاعفة الارتفاع.

b. مضاعفة نصف القطر.

c. مضاعفة نصف القطر والارتفاع.

أوجد كل قياس وقرّبه إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

32. هرم بقاعدة مربعة حجمه $862.5\ cm^3$ وارتفاعه 11.5 cm. أوجد طول ضلع القاعدة.

33. حجم مخروط $196\pi\ cm^3$ وارتفاعه 12 cm. فما محيطه؟

34. المساحة الجانبية لمخروط هي $71.6\ mm^2$ والارتفاع المائل 6 mm. فما حجم المخروط؟

35. **التمثيلات المتعددة** ستستكشف في هذه المسألة الأشكال الهرمية المستطيلة.

a. **هندسي** ارسم هرمين بقاعدتين مختلفتين بارتفاع 10 cm ومساحة قاعدة $24\ cm^2$.

b. **لفظي** ما الذي ينطبق على حجمي الهرمين المرسومين؟ اشرح.

c. **تحليلي** اشرح تأثير ضرب مساحة قاعدة و/أو ارتفاع الهرم في 5 على حجم الهرم.

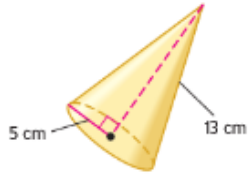
مسائل مهارات التفكير العليا

استخدام مهارات التفكير العليا

36. **الفرضيات** حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحةً دائمًا أم أحيانًا أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

حجم مخروط نصف قطره r وارتفاعه h يساوي حجم منشور ارتفاعه h.

37. **تحليل الخطأ** يعمل بلال وجمال على حساب حجم المخروط على اليسار. هل أي منهما على صواب؟ اشرح إجابتك.



بلال

$$V = \frac{1}{3}Bh$$
$$= \frac{1}{3}\pi(5^2)(13)$$
$$\approx 340.3\ cm^3$$

جمال

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$
$$V = \frac{1}{3}Bh$$
$$= \frac{1}{3}\pi(5^2 12$$
$$\approx 314.2\ cm^3$$

38. **التبرير** حجم مخروط $568\ cm^3$. فما حجم إسطوانة لها نفس نصف القطر المخروط وارتفاعه؟ اشرح استنتاجك.

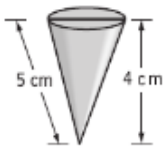
39. **مسألة غير محددة الإجابة** اذكر مثالاً لهرم ومنشور متساويين في القاعدة والحجم. اشرح استنتاجك.

40. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبيّن الفرق بين إيجاد أحجام الأشكال الهرمية والمخاريط وإيجاد أحجام المناشير والإسطوانات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

41. هناك لعبة رملية مخروطية أبعادها موضحة أدناه. كم عدد السنتيمترات المكعبة من الرمال التي يمكن أن تستوعبها في حالة ملئها للقمة؟



A 12π
B 15π
C $\frac{80}{3}\pi$
D $\frac{100}{3}\pi$

42. إجابة قصيرة تشتري هدى خيمة على شكل هرم بقاعدة مستطيلة. القاعدة 6 في 8 m. إذا علمت أن الخيمة تستوعب $88\ m^3$ من الهواء، فما ارتفاع العمود الرئيسي للخيمة؟

43. الاحتمال يحتوي قرص على أقسام ملونة بالأحمر والأزرق والبرتقالي والأخضر. يوضح الجدول أدناه نتائج دورات متعددة. ما الاحتمال التجريبي لتوقف مؤشر القرص عند القسم البرتقالي؟

Color	Frequency
red	6
blue	4
orange	5
green	10

F $\frac{1}{5}$
G $\frac{1}{4}$
H $\frac{9}{25}$
J $\frac{1}{2}$

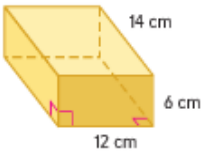
SAT/ACT.44 لجميع $x \neq -2$ أو 0. $\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 2x}$ ؟

A -8
B $x - 4$
C $\frac{-x - 4}{x}$
D $\frac{-8}{x + 2}$
E $\frac{x - 4}{x}$

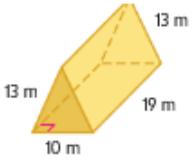
مراجعة شاملة

أوجد حجم كل منشور. (الدرس 4-9)

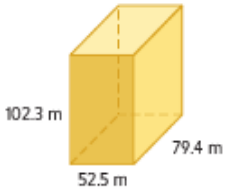
45.



46.



47.

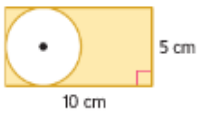


48. المزارع توضح الصورة الحاوية والمخروط التوافقي اللذان يستخدمهما المزارعون لتخزين الحبوب بعد الحصاد. يسمح المخروط في قاع الحاوية بتفريغ الحبوب بسهولة أكبر. استخدم الأبعاد الواردة في الرسم التخطيطي لإيجاد مساحة السطح الكلية للحاوية ذات القمة والقاع المخروطيين. اكتب الإجابة الدقيقة وبعد تقريبها إلى أقرب قدم مربع. (الدرس 3-9)

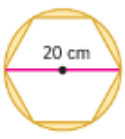
مراجعة المهارات

أوجد مساحة كل منطقة مظللة. المضلعات في التمارين 52-50 منتظمة.

49.

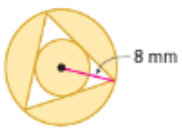


50.



51.

52.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-6 مساحة سطح الأشكال الكروية وحجمها

السابق
- أوجدت مساحات أسطح المناشير والإسطوانات.

الحالي
1 إيجاد مساحة سطح الأشكال الكروية.
2 إيجاد حجم الأشكال الكروية.

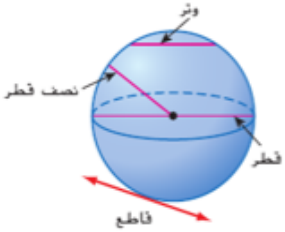
لماذا؟
- عند نفخ الفقاعات، يحيط سائل الصابون بحجم من الهواء. بسبب التوتر السطحي، يحافظ السائل على شكل يقلل مساحة السطح المحيطة بالهواء بأكبر قدر ممكن. والشكل الذي يقلل مساحة السطح بأكبر قدر ممكن لكل وحدة حجم هو الشكل الكروي.

المفردات الجديدة
- دائرة كبرى great circle
- قطب pole
- نصف شكل كروي hemisphere

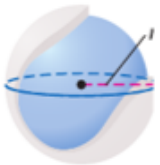
ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
مراعاة الدقة.

1 مساحة سطح الأشكال الكروية

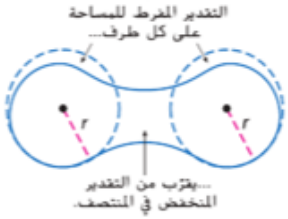
تذكر أن *الشكل الكروي* هو المحل الهندسي لجميع النقاط في الفراغ التي تقع على مسافة محددة من نقطة معينة تُسمى *مركز* الشكل الكروي.



- نصف قطر الشكل الكروي هو قطعة مستقيمة من المركز إلى نقطة على الشكل الكروي.
- وتر الشكل الكروي هو قطعة مستقيمة تربط نقطتين على الشكل الكروي.
- قطر الشكل الكروي هو وتر يمر بالمركز.
- قاطع الشكل الكروي هو مستقيمٌ يقطع الشكل الكروي في نقطةٍ واحدةٍ فقط.



لوضع صيغة لمساحة سطح الشكل الكروي، فكّر في كرة التنس. يتكون غلاف هذا الشكل الكروي من قطعتين متطابقتين على شكل الأثقال الحديدية، ويمكن تقريب كل قطعة منهما بواسطة دائرتين متطابقتين بنصفي قطر يساويان نصف قطر الشكل الكروي. إذًا، يتكون الغلاف بالكامل تقريبًا من أربع دوائر متطابقة. ومجموع هذه المساحات يساوي تقريبًا مساحة الشكل الكروي.



مجموع الدوائر بمساحة A $A = \pi r^2$

$S \approx 4A$

$\approx 4(\pi r^2) = 4\pi r^2$

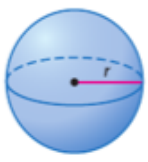
بينما يخرج اشتقاق الصيغة عن نطاق هذا المنهج، فإن الصيغة الدقيقة هي في الواقع $S = 4\pi r^2$.

المفهوم الأساسي مساحة سطح الشكل الكروي

الشرح مساحة سطح S في الشكل الكروي هي $S = 4\pi r^2$، حيث تمثل r نصف القطر.

الرموز $S = 4\pi r^2$

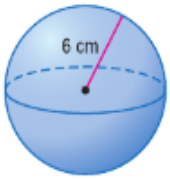
النموذج



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 1 مساحة سطح الشكل الكروي

أوجد مساحة سطح الشكل الكروي. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.



$S = 4\pi r^2$ مساحة سطح الشكل الكروي

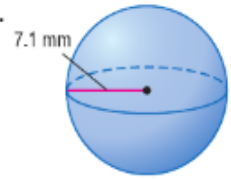
$= 4\pi(6)^2$ عوض عن r باستخدام 6.

≈ 452.4 استخدم آلة حاسبة.

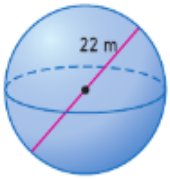
تبلغ مساحة السطح حوالي $452.4\ cm^2$.

تمرين موجّه

1A.



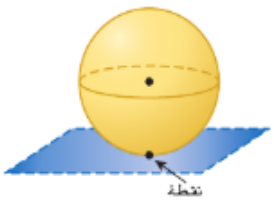
1B.

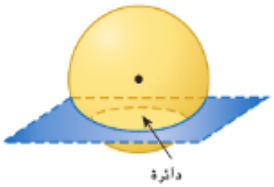


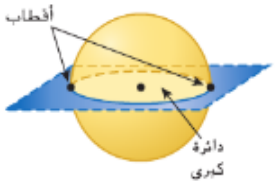
نصيحة دراسية

الدوائر الكبرى يحتوي الشكل الكروي على عدد لا نهائي من الدوائر الكبرى

يمكن للمستوى أن يقطع الشكل الكروي في نقطة أو دائرة. إذا كانت الدائرة تحتوي على مركز الشكل الكروي، فيُسمى التقاطع **الدائرة الكبرى**. وتُسمى النقاط الطرفية لقطر الدائرة الكبرى **الأقطاب**.







حيث إن الدائرة الكبرى تتحد في المركز مع الشكل الكروي وأنصاف أقطارها كذلك هي أنصاف أقطار الشكل الكروي. فيمكن رسم الدائرة الكبرى على الشكل الكروي. وتفصل الدائرة الكبرى الشكل الكروي إلى نصفين متطابقين، يُسمى كل منهما **نصف الشكل الكروي**.

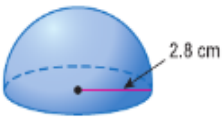
مثال 2 استخدام الدوائر الكبرى لإيجاد مساحة السطح

انتبه!

مساحة نصف الشكل الكروي عند إيجاد مساحة سطح نصف الشكل الكروي، لا تنسَ تضمين مساحة الدائرة الكبرى.

a. أوجد مساحة سطح نصف الشكل الكروي.

أوجد نصف مساحة شكل كروي نصف قطره 2.8 cm. ثم أجمع مساحة الدائرة الكبرى.



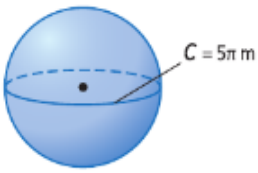
$S = \frac{1}{2}(4\pi r^2) + \pi r^2$ مساحة سطح نصف الشكل الكروي

$= \frac{1}{2}[4\pi(2.8)^2] + \pi(2.8)^2$ عوض عن r باستخدام 2.8.

$\approx 73.9\ cm^2$ استخدم الآلة الحاسبة.

b. أوجد مساحة سطح الشكل الكروي إذا كان محيط الدائرة الكبرى 5π m.

أولاً، أوجد نصف القطر. محيط الدائرة الكبرى يساوي $2\pi r$. إذًا، $2\pi r = 5\pi$ أو $r = 2.5$.



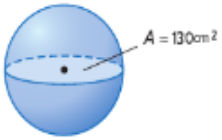
$S = 4\pi r^2$ مساحة سطح الشكل الكروي

$= 4\pi(2.5)^2$ عوض عن r باستخدام 2.5.

$\approx 78.5\ m^2$ استخدم الآلة الحاسبة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

c. أوجد مساحة سطح الشكل الكروي إذا كانت مساحة الدائرة الكبرى $130\ cm^2$.



أولاً، أوجد نصف القطر. مساحة الدائرة الكبرى تساوي πr^2 إذًا، $\pi r^2 = 130$ أو $r \approx 6.4$.

$S = 4\pi r^2$ مساحة سطح الشكل الكروي

$\approx 4\pi(6.4)^2$ أو تقريبًا $514.7\ cm^2$ عوض عن r باستخدام 6.4. استخدم الآلة الحاسبة.

تمرين موجّه

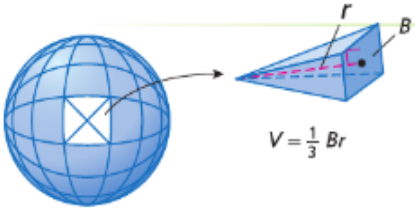
أوجد مساحة سطح كل شكل. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

2A. شكل كروي: محيط الدائرة الكبرى $= 16.2\pi\ m$

2B. نصف شكل كروي: مساحة الدائرة الكبرى $\approx 94\ mm^2$

2C. نصف شكل كروي: محيط الدائرة الكبرى $= 36\pi\ cm$

2 حجم الشكل الكروي



افترض أن أحد الأشكال الكروية نصف قطره r يحتوي على عدد لا نهائي من الأشكال الهرمية التي تقع رؤوسها عند مركز الشكل الكروي. وارتفاع كل شكل هرمي r ومساحة قاعدته B. مجموع أحجام جميع الأشكال الهرمية يساوي حجم الشكل الكروي.

$V = \frac{1}{3}B_1r_1 + \frac{1}{3}B_2r_2 + \ldots + \frac{1}{3}B_nr_n$ مجموع أحجام الأشكال الهرمية

$= \frac{1}{3}r(B_1 + B_2 + \ldots + B_n)$ خاصية التوزيع

$= \frac{1}{3}r(4\pi r^2)$ مجموع مساحات قواعد الأشكال الهرمية يساوي مساحة سطح الشكل الكروي.

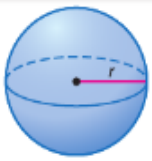
$= \frac{4}{3}\pi r^3$ بسّط.

المفهوم الأساسي حجم الشكل الكروي

الشرح: حجم V في الشكل الكروي هو $V = \frac{4}{3}\pi r^3$، حيث تمثل r نصف قطر الشكل الكروي.

الرموز: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

النموذج:



نصيحة دراسية

تصميم رسم تخطيطي

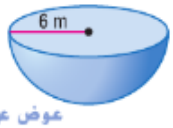
عند حل المسائل التي تتضمن أحجام المجسمات، من المفيد تصميم رسم تخطيطي وتمييزه بالمسميات إذا لم يتواجد بمعطيات المسألة.

مثال 3 حجوم الأشكال الكروية وأنصافها

أوجد حجم كل شكل كروي أو نصف شكل كروي. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

a. نصف شكل كروي نصف قطره 6 m

التقدير: $V \approx \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 3 \times 6^3$ أو $432\ m^3$



$V = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$ حجم نصف شكل كروي

$= \frac{2}{3}\pi(6)^3$ أو حوالي $452.4\ m^3$ عوض عن r باستخدام 6. استخدم الآلة الحاسبة.

حجم نصف الشكل الكروي يساوي حوالي $452.4\ m^2$. وهذا قريب من التقدير، إذًا الإجابة معقولة.

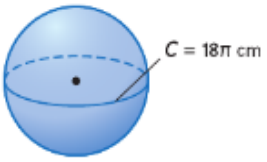
نصيحة دراسية

الدقة تذكر استخدام الوحدات المناسبة عند تقديم الإجابة. وكما هو الحال مع المجسمات الأخرى، يتم قياس مساحة سطح الشكل الكروي باستخدام الوحدات المربعة، والحجم باستخدام الوحدات المكعبة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

b. شكل كروي مع محيط دائرة كبري 18π cm

الخطوة 1 أوجد نصف قطر الشكل الكروي.



$C = 2\pi r$ محيط الدائرة

$18\pi = 2\pi r$ عوض عن C باستخدام 18π.

$r = 9$ حل لإيجاد قيمة r.

الخطوة 2 أوجد الحجم.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ حجم الشكل الكروي

$= \frac{4}{3}\pi(9)^3$ أو حوالي $3053.6\ cm^3$ عوض عن r باستخدام 9. استخدم الآلة الحاسبة.

تمرين موجّه

3A. شكل كروي: القطر $= 7.4$ cm.

3B. نصف شكل كروي: مساحة الدائرة الكبرى $\approx 249\ mm^2$

مثال 4 من الحياة اليومية حل المسائل التي تشتمل على المجسمات

كرة القدم تمت صناعة كرة القدم على اليسار لمنافسات كأس العالم لكرة القدم لعام 2006. وهي تأخذ حيزًا من الفراغ مقداره $1357\pi\ m^3$. افترض أنها شكل كروي. ما محيطها؟

الفهم أنت تعرف أن حجم الكرة $1357\pi\ m^3$.
محيط الكرة هو محيط الدائرة الكبرى.

التخطيط أولاً استخدم صيغة الحجم لإيجاد نصف القطر. ثم أوجد محيط الدائرة الكبرى.

الحل حجم الشكل الكروي $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

عوض عن V باستخدام 1357π. $1357\pi = \frac{4}{3}\pi r^3$

اقسم كل طرف على $\frac{4}{3}\pi$. $1017.75 = r^3$

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\sqrt[3]{1017.75}$.

1017.75 [2nd] [(] 1 [÷] 3 [)] [ENTER] 10.06

نصف قطر الكرة 10.06 m. إذًا، المحيط هو $2\pi r = 2\pi(10.06)$ أو تقريبًا 63.18 m.

التحقق يمكنك الحل بترتيب عكسي للتحقق من الحل.

إذا علمت أن $C \approx 63.18$، إذًا $r \approx 10.06$. إذا علمت أن $r \approx 10.06$،
إذًا $V \approx \frac{4}{3}\pi \times 10.06^3$ أو تقريبًا $1357\pi\ m^3$. الحل صحيح. ✓

تمرين موجّه

4. البالونات نفخ جاسم بالونًا كرويًا حتى أصبح محيطه 14 cm . ثم أضاف المزيد من الهواء حتى أصبح محيطه 18 cm. فما حجم الهواء المضاف للبالون

الربط بالحياة اليومية

فازت جامعة كارولينا الشمالية بأكبر عدد من البطولات الوطنية لكرة القدم النسائية منذ انطلاق أول منافسة في 1982. ومن 2018، فازوا 22 مرة.

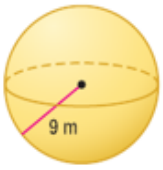
المصدر: Fact Monster

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

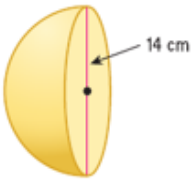
التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **أوجد مساحة سطح كل شكل كروي أو نصف شكل كروي. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.**

1.



2.



3. شكل كروي: مساحة الدائرة الكبرى $= 36\pi \text{ m}^2$

4. نصف شكل كروي: محيط الدائرة الكبرى $\approx 26 \text{ cm}$

مثال 3 **أوجد حجم كل شكل كروي أو نصف شكل كروي. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.**

5. شكل كروي: نصف القطر $= 10 \text{ m}$

6. نصف شكل كروي: القطر $= 16 \text{ cm}$

7. نصف شكل كروي: محيط الدائرة الكبرى $= 24\pi \text{ m}$

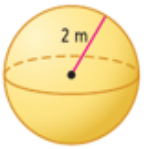
8. شكل كروي: مساحة الدائرة الكبرى $= 55\pi \text{ cm}^2$

مثال 4 9. **كرة السلة** كرات السلة المستخدمة في مباريات المحترفين يجب أن يكون محيطها $29\frac{1}{2}$ in. فما مساحة سطح كرة السلة المستخدمة في مباريات المحترفين؟

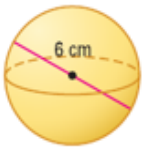
التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **أوجد مساحة سطح كل شكل كروي أو نصف شكل كروي. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.**

10.



11.



12.

13.

14. شكل كروي: محيط الدائرة الكبرى $= 2\pi \text{ cm}$

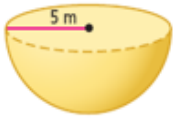
15. شكل كروي: مساحة الدائرة الكبرى $\approx 32 \text{ m}^2$

16. نصف شكل كروي: مساحة الدائرة الكبرى $\approx 40 \text{ cm}^2$

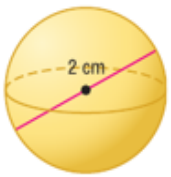
17. نصف شكل كروي: محيط الدائرة الكبرى $= 15\pi \text{ mm}$

مثال 3 **الدقة** **أوجد حجم كل شكل كروي أو نصف شكل كروي. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.**

18.



19



20. شكل كروي: نصف القطر $= 1.4 \text{ m}$

21. نصف شكل كروي: القطر $= 21.8 \text{ cm}$

22. شكل كروي: مساحة الدائرة الكبرى $= 49\pi \text{ m}^2$

23. شكل كروي: محيط الدائرة الكبرى $\approx 22 \text{ cm}$.

24. نصف شكل كروي: محيط الدائرة الكبرى $\approx 18 \text{ m}$

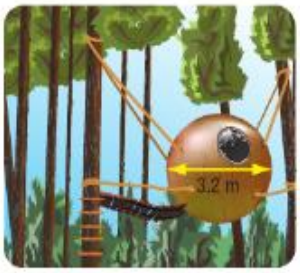
25. شكل كروي: مساحة الدائرة الكبرى $\approx 35 \text{ m}^2$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مثال 4

26. الأسماك تستطيع سمكة *النفاخ* "الانتفاخ" في حالة تعرضها لتهديد من خلال ابتلاع الماء ونفخ جسمها. سمكة النفاخ على اليسار كروية تقريبًا وقطرها 5 cm. ومساحة سطحها أثناء الانتفاخ أكبر بمقدار مرة ونصف من مساحة سطحها في الظروف المعتادة. فما مساحة سطح السمكة في حالة عدم الانتفاخ

27. الهندسة المعمارية قبة أحد المباني هي قبة كروية مساحة سطحها تقريبًا $13{,}924\pi\ m^2$. فما حجم القبة؟ قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

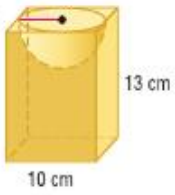


28. بيت الشجرة بيت الشجرة الكروي أو كرة *الشجرة*، الموضح على اليسار قطره 3.2 m. وحجمه أكبر من حجم كرة الشجرة الأصلية بمقدار 1.8 مرة. فما قطر كرة الشجرة الأصلية؟ قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة من المتر.

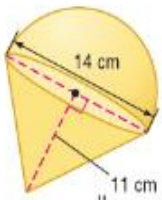
الاستنتاج المنطقي أوجد مساحة سطح كل مجسم وحجمه.
قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

29

30.



31. الألعاب القمة الدوارة على اليسار مركبة من مخروط ونصف شكل كروي.

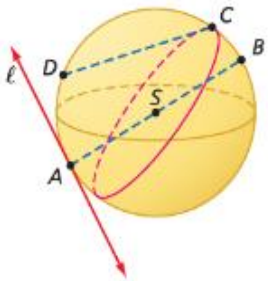


a. أوجد مساحة سطح القمة وحجمها. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

b. إذا قامت الشركة المصنعة للقمة بصناعة نموذج آخر بأبعاد تبلغ نصف أبعاد هذه القمة، فما مساحة سطحه وحجمه؟

32. البالونات بالون كروي مملوء بالهيليوم وقطره 30 cm يمكنه رفع جسم وزنه 14 g. أوجد حجم بالون يمكنه رفع شخص يزن 65 kg. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

استخدم الشكل الكروي S لتسمية كلٍ مما يلي.



33. وتر

34. نصف قطر

35. قطر

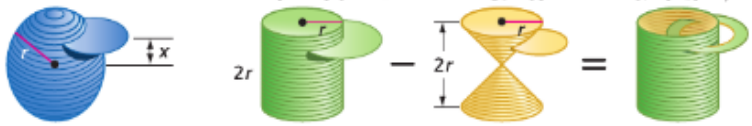
36. خط

37. دائرة كبرى

38. تحليل بُعدي أي مما يلي حجمه أكبر: شكل كروي نصف قطره 2.3 m أم إسطوانة نصف قطرها 1.5 m وارتفاعها 5 m؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

39. برهان عام يمكن النظر إلى شكل كروي نصف قطره r على أنه مكون من عدد كبير من الأقراص أو الإسطوانات الرفيعة. فكر في القرص الموضح الذي يقع فوق أو دون مركز الشكل الكروي بمقدار x وحدة. وفكر كذلك في إسطوانة نصف قطرها r وارتفاعها $2r$ تم تفريغها بواسطة مخروطين نصف قطرهما وارتفاعهما r.



a. أوجد نصف قطر القرص من الشكل الكروي بدلالة مسافته x فوق مركز الشكل الكروي. (نصيحة: استخدم مبرهنة فيثاغورس.)

b. إذا كانت سماكة القرص من الشكل الكروي y وحدة، فأوجد حجمه بدلالة x و y.

c. أثبت أن هذا الحجم يساوي حجم القرص المفرغ بسماكة y وحدة والذي يقع فوق مركز الإسطوانة والمخروط بمقدار x وحدة.

d. حيث إن التعابير هي ذاتها للأقراص ذات نفس الارتفاع، فما الذي يضمن أن الإسطوانة المفرغة والشكل الكروي بنفس الحجم؟

e. استخدم صيغ أحجام الإسطوانة والمخروط لاشتقاق صيغة حجم الإسطوانة المفرغة ومن ثم الشكل الكروي.

الأدوات **صف عدد وأنواع المستويات التي تنتج تماثل الانعكاس في كل مجسم. ثم صف زوايا الدوران التي تنتج تماثل الدوران في كل مجسم.**

40. شكل كروي

41. نصف شكل كروي

تغيير الأبعاد **شكل كروي نصف قطره 12 cm. صف تأثير كل تغيير على مساحة سطحه وحجمه.**

42. ضرب نصف القطر في 4.

43 قسمة نصف القطر على 3.

44. تصميم تستوعب علبة عصير قياسية 8 fl oz .

a. ارسم تصاميم ثلاث علب عصير مختلفة تستوعب كل منها 8 fl oz. وميّز الأبعاد بالسنتيمتر. وينبغي أن تكون علبة واحدة على الأقل على شكل إسطوانة (ارشاد: $1 \text{ fl oz} \approx 29.57353 \text{ cm}^3$)

b. لكل علبة في الجزء **a**، احسب نسبة مساحة السطح إلى الحجم (cm^2 per ml). واستخدم هذه النسب لتحديد العلبة التي يمكن تصنيعها بأقل تكلفة مواد ممكنة. وما شكل العلبة الذي يقلل هذه النسبة إلى الحد الأدنى، وهل هذه العلبة هي الأقل تكلفة عند الإنتاج؟ اشرح استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

45. التحدي مكعب حجمه 216 cm^3. أوجد حجم شكل كروي محيط بالمكعب. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

46. التبرير حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت العبارة صحيحة، فاشرح استنتاجك. وإذا كانت كانت خاطئة، فاذكر مثالاً مضادًا.

إذا كان نصف قطر شكل كروي r، فهناك مخروط نصف قطره r له نفس الحجم.

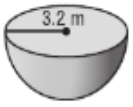
47. مسألة غير محددة الإجابة ارسم شكلاً كرويًا يوضح مثالين على الدوائر الكبرى. وارسم شكلاً كرويًا آخر يوضح مثالين على الدوائر المكونة بواسطة تقاطع المستويات مع الشكل الكروي وهي ليست من الدوائر الكبرى.

48. الكتابة في الرياضيات اكتب نسبة تقارن بين حجم شكل كروي نصف قطره r وحجم إسطوانة نصف قطرها r وارتفاعها $2r$. ثم صف معنى النسبة.

McGraw-Hill Education مؤسسة محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

49. إجابة شبكية ما حجم نصف الشكل الكروي الموضح أدناه بالـ m^3؟



50. الجبر ما مجموعة حل $3z + 4 < 6 + 7z$؟

A $\{z|z > -0.5\}$
B $\{z|z > -2\}$
C $\{z|z < -0.5\}$
D $\{z|z < -2\}$

51. إذا علمت أن مساحة دائرة كبرى لشكل كروي هي $33\ m^2$، فما مساحة سطح الشكل الكروي؟

F $42\ m^2$
G $117\ m^2$
H $132\ m^2$
J $264\ m^2$

52. SAT/ACT إذا علمت أن المستقيم ℓ منصّف متعامد على القطعة المستقيمة AB عند E، فكم عدد النقاط على المستقيم ℓ والتي تقع على نفس المسافة من النقطة A مثل النقطة B؟

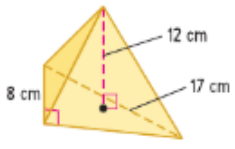
A لا يوجد
B واحدة
C اثنتان
D ثلاث
E جميع النقاط

مراجعة شاملة

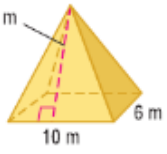
أوجد حجم كل هرم. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. (الدرس 9-5)

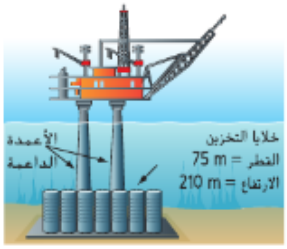
53.

54.



55.





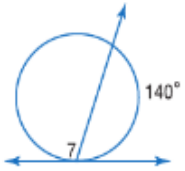
56. الهندسة تتكون قاعدة منصة حفر نفطية من 24 خلية خرسانية أسطوانية. ويتم استخدام 20 خلية منها لتخزين النفط. وترتكز الأعمدة الداعمة لسطح المنصة على الخلايا الأربع الأخرى. أوجد الحجم الإجمالي لخلايا التخزين. (الدرس 9-4)

أوجد قياس كل مما يلي.

57. $m\angle 5$

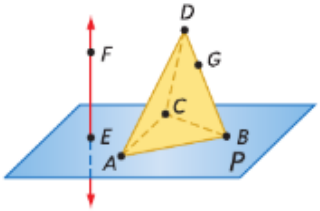
58. $m\angle 6$

59. $m\angle 7$



مراجعة المهارات

ارجع إلى الشكل.



60. كم عدد المستويات التي تظهر في هذا الشكل؟

61. عيّن ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.

62. هل تقع النقاط G, A, B, E في المستوى ذاته؟ اشرح.

63. ما النقطة التي يكون عندها $\overleftrightarrow{EF}$ و $\overleftrightarrow{AB}$ متقاطعين؟

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

الدرس 9-7 الهندسة الفراغية

السابق
- حددت الخواص الأساسية للأشكال الكروية.

الحالي
1. وصف مجموعة من النقاط على شكل كروي.
2. مقارنة وبيان الفرق بين الهندسة الإقليدية والفراغية.

لماذا؟
- نظرًا لأن سطح الأرض به انحناء وليس مسطحًا، فأقصر مسار بين نقطتين على الأرض هو الموصوف بقوس دائرة كبرى بدلاً من خط مستقيم.

المفردات الجديدة

هندسة إقليدية
Euclidean geometry

هندسة فراغية
spherical geometry

هندسة غير إقليدية
non-Euclidean geometry

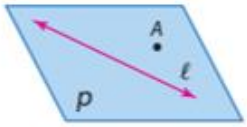
1 الهندسة على شكل كروي

في هذا الكتاب، درسنا **الهندسة الإقليدية**، سواء في مستوى أو في الفراغ. في الهندسة الإقليدية في مستوى، *المستوى* هو سطح منبسط يتكون من نقاط تمتد بلا نهاية في جميع الاتجاهات. في **الهندسة الفراغية**، أو الهندسة على شكل كروي، المستوى هو سطح شكل كروي.

يتم كذلك تعريف المستقيمات بشكل مختلف في الهندسة الفراغية.

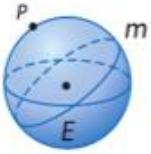
المفهوم الأساسي المستقيمات في هندسة المستويات والهندسة الفراغية

الهندسة الإقليدية في مستوى



يحتوي المستوى P على مستقيم ℓ ونقطة A ليست على المستقيم ℓ.

الهندسة الفراغية



يحتوي الشكل الكروي E على دائرة كبرى m ونقطة P ليست على m. الدائرة الكبرى m مستقيم على الشكل الكروي E.

مثال 1 وصف مجموعة من النقاط على شكل كروي

قم بتعيين كل مما يلي على الشكل الكروي F.

a. مستقيمان يشتملان على النقطة R

$\overleftrightarrow{GP}$ و $\overleftrightarrow{MQ}$ هما مستقيمان على الشكل الكروي F ويشتملان على النقطة R.

b. قطعة مستقيمة تحتوي على النقطة K

$\overline{PS}$ قطعة مستقيمة على الشكل الكروي F وتحتوي على النقطة K.

c. مثلث

$\triangle RQP$ مثلث على الشكل الكروي F.

تمرين موجّه

قم بتعيين كل مما يلي على الشكل الكروي F أعلاه.

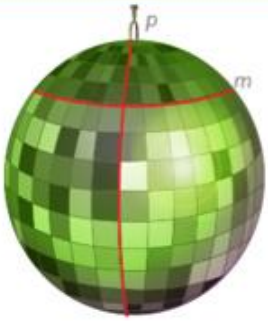
1A. مستقيمان يشتملان على النقطة P

1B. قطعة مستقيمة تحتوي على النقطة Q

1C. مثلث

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 من الحياة اليومية تحديد المستقيمات في الهندسة الفراغية



الترفيه **حدد ما إذا كان الشكل m على كرة المرايا الموضحة هو مستقيم في الهندسة الفراغية أم لا.**

لاحظ أن الشكل m لا يمر عبر قطبي الشكل الكروي. ولذلك، فالشكل m ليس دائرة كبرى وبالتالي ليس مستقيمًا في الهندسة الفراغية.

تمرين موجّه

2. حدد ما إذا كان الشكل p على كرة المرايا الموضحة هو مستقيم في الهندسة الفراغية أم لا.

نصيحة دراسية

هندسة القطوع الناقصة

الهندسة الفراغية فئة فرعية من هندسة القطوع الناقصة.

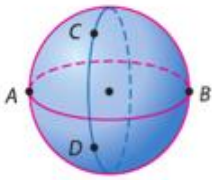
2 مقارنة بين الهندسة الإقليدية والفراغية

بينما تنطبق بعض مسلمات وخواص الهندسة الإقليدية على الهندسة الفراغية، لا ينطبق البعض الآخر وقد ينطبق في ظل ظروف معينة فقط.

مثال 3 مقارنة بين الهندسة الفراغية والإقليدية للمستويات

حدد ما إذا كانت المسلمة أو الخاصية التالية للهندسة الإقليدية للمستويات لها عبارة مناظرة في الهندسة الفراغية أم لا. وإذا كان الأمر كذلك، فاكتب العبارة المناظرة. وإلا، فاشرح استنتاجك.

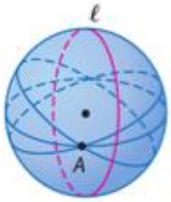
a. فيما بين أي نقطتين، يوجد خط واحد بالتحديد.



في الشكل، لاحظ وجود أكثر من دائرة كبرى (مستقيم) عبر النقطتين القطبيتين A و B. ولكن، توجد دائرة كبرى واحدة فقط عبر النقطتين غير القطبيتين C و D.

ولذلك، العبارة المناظرة هي أنه عبر أي نقطتين غير قطبيتين، توجد دائرة كبرى (مستقيم) واحدة فقط.

b. لديك مستقيم ونقطة ليست على هذا المستقيم، إذًا هناك بالضبط مستقيم واحد يمر عبر النقطة الموازية للمستقيم المعطى.



في الشكل، لاحظ أن كل دائرة كبرى (مستقيم) تحتوي على النقطة A تتقاطع مع المستقيم ℓ. إذًا، لا توجد دائرة كبرى عبر النقطة A توازي المستقيم ℓ.

تمرين موجّه

3A. القطعة المستقيمة هي أقصر مسار بين نقطتين.

3B. فيما بين أي نقطتين، توجد قطعة مستقيمة واحدة بالتحديد.

نصيحة دراسية

الهندسة النهائية

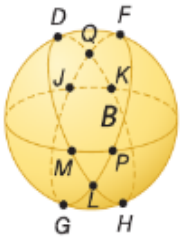
شبكات *المستويات* هي نوع آخر من الهندسة غير الإقليدية. سوف تتعرف على شبكات المستويات في توسع الدرس 10-6.

الهندسة غير الإقليدية هي هندسة لا تنطبق فيها واحدة على الأقل من مسلمات الهندسة الإقليدية. لاحظ أنه في المثال 3b، لا تنطبق مسلمة التوازي على شكل كروي. المستقيمات أو الدوائر الكبرى لا يمكن أن تتوازى في الهندسة الفراغية. ولذلك، الهندسة الفراغية هي هندسة غير إقليدية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

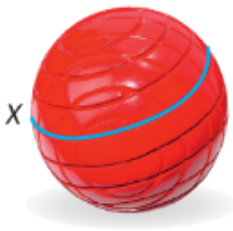
مثال 1 **قم بتعيين كل مما يلي على الشكل الكروي *B***



1. مستقيمان يحتويان على النقطة Q
2. قطعة مستقيمة تحتوي على النقطة L
3. مثلث
4. **قطعتان مستقيمتان على الدائرة الكبرى ذاتها**

مثال 2 **رياضة حدد ما إذا كان الشكل *X* على كل من الأشكال الكروية الموضحة هو مستقيم في الهندسة الفراغية أم لا.**

5.



6.

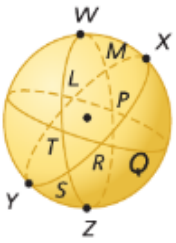
مثال 3 **التبرير حدد ما إذا كانت المسلمة أو الخاصية التالية للهندسة الإقليدية للمستويات لها عبارة مناظرة في الهندسة الفراغية أم لا. وإذا كان الأمر كذلك، فاكتب العبارة المناظرة. وإلا، فاشرح استنتاجك.**

7. يمكن وضع النقاط الموجودة على أي مستقيم أو قطعة مستقيمة داخل تطابق عنصر بعنصر باستخدام أعداد حقيقية.
8. تتقاطع المستقيمات المتعامدة عند نقطة واحدة.

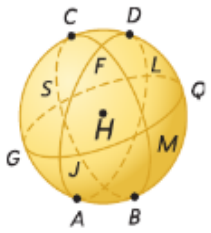
التدريب وحل المسائل

مثال 1 **قم بتعيين مستقيمين يحتويان على النقطة *M* وقطعة مستقيمة تحتوي على النقطة *S* ومثلث في كل من الأشكال الكروية التالية.**

9.



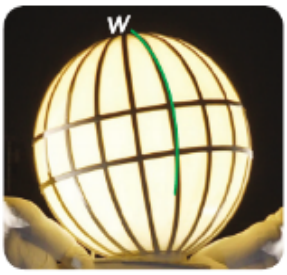
10.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

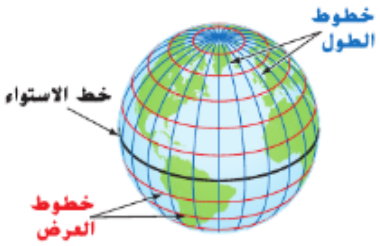
مثال 2 **الهندسة المعمارية** **حدد ما إذا كان الشكل *w* على كل من الأشكال الكروية الموضحة هو مستقيم في الهندسة الفراغية أم لا.**

11.



12.

13. **تمثيل النماذج** يتم استخدام خطوط الطول والعرض لوصف المواقع على سطح الأرض. عرفًا، تقسم خطوط الطول الأرض رأسيًا بينما تقسم خطوط العرض الأرض أفقيًا.



a. هل خطوط الطول دوائر كبرى؟ اشرح.

b. هل خطوط العرض دوائر كبرى؟ اشرح.

مثال 3 **حدد ما إذا كانت المسلمة أو الخاصية التالية للهندسة الإقليدية للمستويات لها عبارة مناظرة في الهندسة الفراغية أم لا. وإذا كان الأمر كذلك، فاكتب العبارة المناظرة. وإلا، فاشرح استنتاجك.**

14. يستمر المستقيم بلا نهاية في اتجاهين.

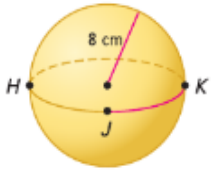
15. تصنع المستقيمات المتعامدة أربع زوايا 90°.

16. إذا وقعت ثلاث نقاط على استقامة واحدة، فهناك نقطة واحدة بين النقطتين المتبقيتين.

17. إذا كانت *M* نقطة منتصف $\overline{AB}$، إذًا $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

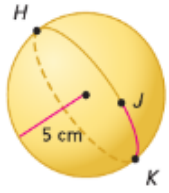
في شكل كروي، يمكن قياس مسافتين بين نقطتين. استخدم كل شكل والمعطيات لتحديد المسافة بين النقطتين *J* و *K* في كل شكل كروي. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة. برر إجابتك.

18.



$m\widehat{JK} = 100$

19.



$m\widehat{JK} = 60$

20. **الجغرافيا** موقع فينيكس، أريزونا يقع على خط الطول 112° غربًا وخط العرض 33.4° شمالاً، وموقع هيلينا، مونتانا يقع على خط الطول 112° غربًا وخط العرض 46.6° شمالاً. يشير الغرب إلى الموقع بدلالة خط الطول الرئيسي، ويشير الشمال إلى الموقع بدلالة خط الاستواء. ومتوسط نصف قطر الأرض تقريبًا 6373 كم.

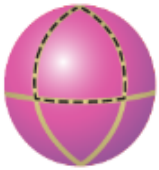
a. قدر المسافة بين فينيكس وهيلينا. اشرح استنتاجك.

b. هل هناك طريقة أخرى للتعبير عن المسافة بين المدينتين؟ اشرح.

c. هل يمكن حساب المسافة بين واشنطن العاصمة ولندن عاصمة إنجلترا، واللتان تقعان تقريبًا على خط العرض ذاته، بنفس الطريقة؟ اشرح استنتاجك.

d. كم عدد المواقع الأخرى التي تفصلها عن فينيكس، أريزونا نفس المسافة الفاصلة بين هيلينا ومونتانا؟ اشرح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

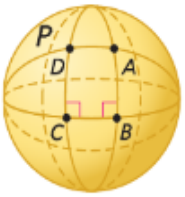


21. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تستكشف المثلثات في الهندسة الفراغية.

a. عملي استخدم الشريط اللاصق على كرة لتمييز ثلاث دوائر كبرى. ينبغي أن تمر واحدة على الأقل من الدوائر الكبرى الثلاث بأقطاب مختلفة عن تلك التي تمر بها الدائرتان المتبقيتان. سوف تصنع الدوائر الكبرى مثلثًا. استخدم المنقلة لتقدير قياس كل زاوية من زوايا المثلث.

b. جدولي ضع قياس كل زاوية من زوايا المثلث المتكون في جدول. قم بإزالة الشريط اللاصق وكرر العملية مرتين بحيث تضع في الجدول قياس زوايا ثلاثة مثلثات مختلفة. سجل مجموع زوايا كل مثلث.

c. لفظي قم بتخمين مجموع زوايا مثلث في الهندسة الفراغية.



22. الأشكال الرباعية فكر في الشكل الرباعي $ABCD$ على الشكل الكروي P. لاحظ أن له أربعة أضلاع حيث $\overline{CB} \perp \overline{DC}$، $\overline{CB} \perp \overline{AB}$ و $\overline{DC} \cong \overline{AB}$.

a. هل $\overline{DA} \perp \overline{CD}$؟ اشرح استنتاجك.

b. ما وجه المقارنة بين DA و CB؟

c. هل يمكن أن يتواجد مستطيل، حسب تعريفه في الهندسة الإقليدية، في الهندسة غير الإقليدية؟ اشرح استنتاجك.

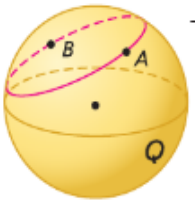
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

23. الكتابة في الرياضيات قارن وبين الفرق بين الهندسة الإقليدية والفراغية. تأكد من تضمين مناقشة حول المستويات والمستقيمات في فرعي الهندسة.

24. التحدي يمكن تعريف أنواع الهندسة على أسطح منحنية بخلاف الأشكال الكروية. نوع آخر من الهندسة غير الإقليدية هو *هندسة القطوع الزائدة*. يتم تعريف هذا النوع من الهندسة على سطح له انحناء على شكل سرج. قارن مجموع زوايا مثلث في هندسة القطوع الزائدة والهندسة الفراغية والهندسة الإقليدية.

25. مسألة غير محددة الإجابة ارسم شكلاً كرويًا بثلاث نقاط بحيث تقع نقطتان على دائرة كبرى ولا تقع نقطتان على دائرة كبرى.

26. الفرضيات تتقاطع *دائرة* صغرى لشكل كروي على الأقل مع نقطتين ولكن لا تمر عبر الأقطاب المتقابلة. تقع النقطتان A و B على دائرة صغرى للشكل الكروي Q. هل ستكون الدائرتان الصغريان *أحيانًا* أم *دائما* أم *مطلقًا* متوازيتين؟ صمم رسمًا واشرح استنتاجك.



27. الكتابة في الرياضيات هل توجد المثلثات المتماثلة أو المتطابقة في الهندسة الفراغية؟ اشرح استنتاجك.

28. التبرير هل العبارة *الهندسة الفراغية مجموعة جزئية من الهندسة الإقليدية* صحيحة أم خاطئة؟ اشرح استنتاجك.

29. التبرير يقع مستويان على مسافة واحدة من مركز شكل كروي ويتقاطعان مع الشكل الكروي. ما الذي ينطبق على الدائرتين؟ هل هما مستقيمان في الهندسة الفراغية؟ اشرح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

30. أي مسلمات أو خواص الهندسة الفراغية التالية خاطئة؟

A أقصر مسار بين نقطتين على دائرة هو قوس.

B إذا وقعت ثلاث نقاط على استقامة واحدة، فيمكن لأي نقطة أن تقع بين النقطتين المتبقيتين.

C الدائرة الكبرى بلا نهاية ولا ترجع مطلقًا إلى نقطة البداية الأصلية.

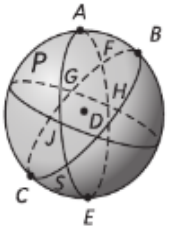
D تتقاطع الدوائر الكبرى المتعامدة عند نقطتين.

31. SAT/ACT قطعت سيارة مسافة 50 km باتجاه الشمال في ساعة وقطعت 120 km باتجاه الغرب في ساعتين؟ فما متوسط سرعة السيارة؟

F 50 km/h **H** 60 km/h

G 55 km/h **J** لا شيء مما سبق

32. إجابة قصيرة قم بتعيين مستقيم في الشكل الكروي P والذي يحتوي على النقطة D.



33. الجبر نسبة الكرات الزرقاء إلى الكرات الحمراء هي 3:5. كم عدد الكرات الحمراء في الصندوق إذا علمت أن العدد الإجمالي لهذه الكرات 32؟

A 12 **D** 51

B 20 **E** 53

C 29

مراجعة شاملة

أوجد حجم كل شكل كروي أو نصف شكل كروي. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 6-9)

34. شكل كروي: مساحة الدائرة الكبرى $= 98.5\ m^2$

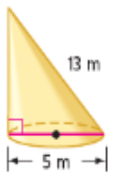
35. شكل كروي: محيط الدائرة الكبرى $\approx 23.1\ cm$.

36. نصف شكل كروي: محيط الدائرة الكبرى $\approx 50.3\ cm$

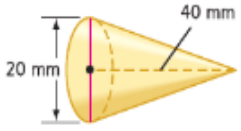
37. نصف شكل كروي: مساحة الدائرة الكبرى $\approx 3416\ m^2$

أوجد حجم كل مخروط. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 5-9)

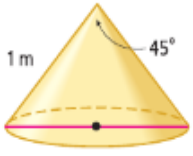
38.



39.



40.

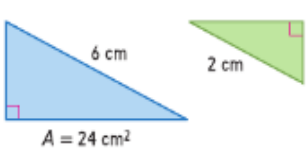


41. المذياع تُمثّل ثلاثة أبراجٍ مخصصةٍ للمذياع من خلال النقاط $A(-3, 4)$ و $B(9, 4)$ و $C(-3, -12)$. حدّد موضع برجٍ آخر متساوي البعد عن الأبراج الثلاثة جميعًا، واكتب معادلةً للدائرة التي تتقابل عندها النقاط الثلاث جميعًا.

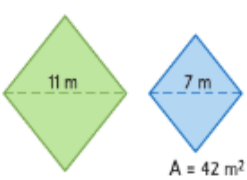
مراجعة المهارات

لكل زوج من الأشكال المتشابهة، أوجد مساحة الشكل الأخضر.

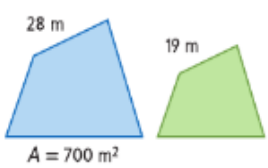
42.



43.



44.



McGraw-Hill Education مؤسسة محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

الدرس 9-8

المجسمات المتطابقة والمتشابهة

السابق..

- قارنت مساحات أسطح الأشكال الكروية وأحجامها.

الحالي..

1 تحديد المجسمات المتطابقة أو المتشابهة.

2 استخدام خواص المجسمات المتشابهة.

لماذا؟..

- تم قطع الأحجار الكريمة على اليسار بنفس الشكل تمامًا ولكن بأحجام مختلفة. أشكالها متشابهة.

المفردات الجديدة

مجسمات متشابهة similar solids

مجسمات متطابقة congruent solids

1 تحديد المجسمات المتطابقة أو المتشابهة

المجسمات المتشابهة لها نفس الشكل ولكن ليست بالضرورة بنفس الحجم. جميع الأشكال الكروية متشابهة وجميع المكعبات متشابهة.

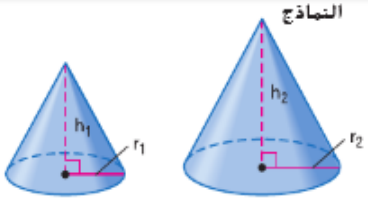
في المجسمات المتشابهة، القياسات الخطية المتناظرة، مثل الارتفاع ونصف القطر، نسبها متساوية. النسبة المشتركة تُسمى عامل المقياس. إذا كان المجسمان المتشابهان متعددي الأوجه، فيكون الوجهان المتناظران متشابهين.

المفهوم الأساسي المجسمات المتشابهة

الشرح

يكون المجسمان متشابهين إذا كان لهما الشكل ذاته مع تساوي نسب القياسات الخطية المتناظرة.

النماذج



$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

المجسمات المتطابقة لها نفس الشكل والحجم تمامًا. والمجسمات المتطابقة مجسمات متشابهة عامل مقياسها 1:1.

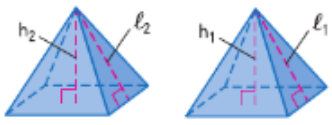
المفهوم الأساسي المجسمات المتطابقة

الشرح

يكون المجسمان متطابقين إذا كان لهما الخواص التالية.

- الزوايا المتناظرة متطابقة.
- الحواف المتناظرة متطابقة.
- الأوجه المتناظرة متطابقة.
- الأحجام متساوية.

النماذج



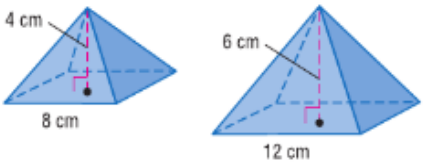
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\ell_1}{\ell_2} = 1$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 1 تحديد المجسمات المتطابقة والمتشابهة

حدد هل كل زوج من المجسمات *متشابه* أم *متطابقٌ* أم *ليس أيًا مما سبق*. إذا كانت المجسمات متشابهة، فاذكر عامل المقياس.

a. الأشكال الهرمية الرباعية

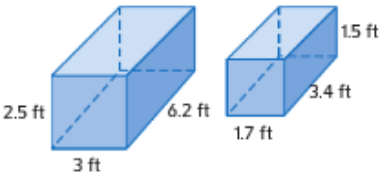


نسبة الارتفاع: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

نسبة حواف القاعدة: $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

نسب القياسات المتناظرة متساوية، إذًا الأشكال الهرمية متشابهة. عامل المقياس 2:3. حيث إن عامل المقياس ليس 1:1، فالمجسمات ليست متطابقة.

b. المناشير المستطيلة



نسبة العرض: $\frac{3}{1.7} \approx 1.76$

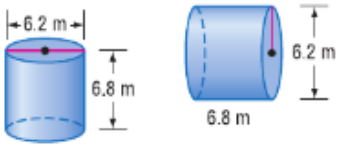
نسبة الطول: $\frac{6.2}{3.4} \approx 1.82$

نسبة الارتفاع: $\frac{2.5}{1.5} \approx 1.67$

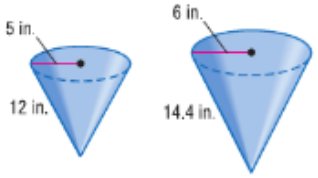
نظرًا لأن نسب القياسات المتناظرة ليست متساوية، فالمناشير ليست متطابقة ولا متشابهة.

تمرين موجّه

1A.



1B.

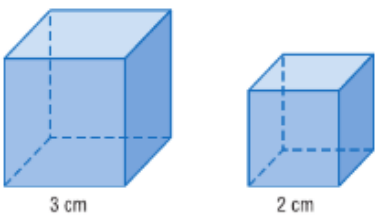


نصيحة دراسية

المجسمات المتطابقة والمتشابهة إذا كان مجسمان متشابهين، فتكون القياسات الخطية المتناظرة متناسبة. وإذا كان مجسمان متطابقين، فتكون القياسات الخطية المتناظرة متساوية.

2 المجسمات المتطابقة والمتشابهة

المكعبان على اليسار مجسمان متشابهان بعامل مقياس 3:2.



نسبة مساحة السطح: 54:24 أو 9:4

نسبة الحجم: 27:8

لاحظ أنه يمكن كتابة نسبة مساحة السطح 9:4 بالصورة $3^2:2^2$. يمكن كتابة نسبة الحجم 27:8 بالصورة $3^3:2^3$. وهذا يقترح النظرية التالية.

نصيحة دراسية

التحقق من الحلول بعد إيجاد القياسات غير المعلومة للمجسمات المتشابهة، يمكنك الحل بترتيب عكسي للتحقق من الحلول.

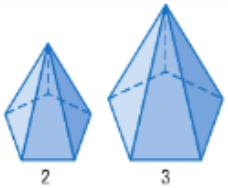
النظرية 9.1

الشرح إذا كان عامل مقياس مجسمين متشابهين هو $a:b$، فنسبة مساحة السطح هي $a^2:b^2$ ونسبة الحجم هي $a^3:b^3$.

أمثلة

عامل المقياس	2:3
نسبة مساحة السطح	4:9
نسبة الحجم	8:27

النماذج



يجب أن تكون الأشكال متشابهة حتى تنطبق عليها النظرية 9.1.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 استخدام المجسمات المتشابهة لكتابة النسب

هناك مخروطان متشابهان بنصف قطر 10 mm و 15 mm. ما نسبة مساحة سطح المخروط الصغير إلى الكبير؟

أولاً، أوجد عامل المقياس.

$$\frac{\text{نصف قطر المخروط الصغير}}{\text{نصف قطر المخروط الكبير}} = \frac{10}{15} \text{ أو } \frac{2}{3}$$ اكتب نسبة لمقارنة نصف القطر.

عامل المقياس هو $\frac{2}{3}$.

$\frac{a^2}{b^2}$ إذًا نسبة مساحة السطح هي $\frac{a}{b}$، إذا كان معامل المقياس هو.

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{2^2}{3^2} \text{ أو } \frac{4}{9}$$

إذًا نسبة مساحة السطح هي 4:9.

تمرين موجّه

2. منشوران متشابهان لهما مساحة سطح 98 cm^2 و 18 cm^2. ما نسبة ارتفاع المنشور الكبير إلى الصغير؟

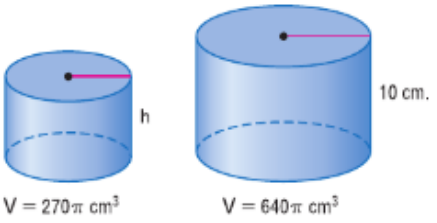
نصيحة دراسية

المجسمات المتشابهة والمساحة إذا كان مجسمان متشابهين، فتكون نسبة أي مساحات متناظرة هي $a^2 : b^2$. في المثال 2، نسبة المساحة الجانبية للمخروطين هي 4:25 ونسبة مساحة القاعدة لهما هي 4:25.

يمكن استخدام المجسمات المتشابهة لتمثيل العديد من الأجسام في الحياة اليومية.

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام المجسمات المتشابهة لإيجاد القيم المجهولة

الحاويات الحاويتان على اليسار أسطوانتان متشابهتان. أوجد ارتفاع h الحاوية الصغيرة.



الفهم أنت تعرف ارتفاع الحاوية الكبيرة وحجمي الحاويتين.

التخطيط استخدم النظرية 9.1 لكتابة نسبة تقارن بين الحجمين. ثم أوجد عامل المقياس واستخدمه لإيجاد h.

الحل

$$\frac{\text{حجم الحاوية الصغيرة}}{\text{حجم الحاوية الكبيرة}} = \frac{270\pi}{640\pi}$$ اكتب نسبة تقارن بين الحجمين.

$$= \frac{27}{64}$$ بسّط.

$$= \frac{3^3}{4^3}$$ اكتب بالصورة $\frac{a^3}{b^3}$.

عامل المقياس هو 4:3.

$$\frac{h}{10} = \frac{3}{4}$$ ← عامل المقياس ← نسبة الارتفاع

$$h \times 4 = 10 \times 3$$ أوجد نواتج الضرب التقاطعي.

$$h = 7.5$$ حل لإيجاد قيمة h.

إذًا، ارتفاع الحاوية الصغيرة هو 7.5 سم.

التحقق حيث إن $\frac{7.5}{10} = 0.75 = \frac{3}{4}$ فالحل صحيح. ✓

تمرين موجّه

3. كرة الطائرة محيط كرة الطائرة الموافقة للوائح هو 66 cm. نسبة مساحة سطح تلك الكرة إلى مساحة سطح كرة الأطفال هي 1.6:1. فما محيط كرة الأطفال؟ قرّب النتيجة إلى أقرب cm.

الربط بتاريخ الرياضيات

جورج إف. بي. ريمان

(1826-1866) تُسمى الهندسة الفرافية أحيانًا هندسة ريمان نسبة إلى جورج ريمان، وهو عالم رياضيات ألماني تُنسب إليه مسلمة ريمان، والتي تنص على أنه عبر نقطة ليست على مستقيم، لا توجد مستقيمات موازية للمستقيم المُعطى.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 استخدام المجسمات المتشابهة لكتابة النسب

هناك مخروطان متشابهان بنصف قطر 10 mm و 15 mm. ما نسبة مساحة سطح المخروط الصغير إلى الكبير؟

أولاً، أوجد عامل المقياس.

اكتب نسبة لمقارنة نصف القطر. $\frac{\text{نصف قطر المخروط الصغير}}{\text{نصف قطر المخروط الكبير}} = \frac{10}{15}$ أو $\frac{2}{3}$

عامل المقياس هو $\frac{2}{3}$.

$\frac{a^2}{b^2}$ إذًا نسبة مساحة السطح هي $\frac{a}{b}$، إذا كان معامل المقياس هو. $\frac{a^2}{b^2} = \frac{2^2}{3^2}$ أو $\frac{4}{9}$

إذًا نسبة مساحة السطح هي 4:9.

تمرين موجّه

2. منشوران متشابهان لهما مساحة سطح $98\ cm^2$ و $18\ cm^2$. ما نسبة ارتفاع المنشور الكبير إلى الصغير؟

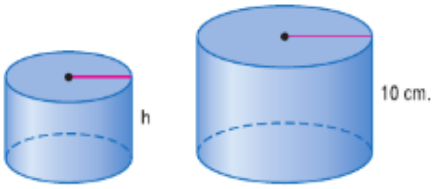
نصيحة دراسية

المجسمات المتشابهة والمساحة إذا كان مجسمان متشابهين، فتكون نسبة أي مساحات متناظرة هي $a^2 : b^2$. في المثال 2، نسبة المساحة الجانبية للمخروطين هي 4:25 ونسبة مساحة القاعدة لهما هي 4:25.

يمكن استخدام المجسمات المتشابهة لتمثيل العديد من الأجسام في الحياة اليومية.

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام المجسمات المتشابهة لإيجاد القيم المجهولة

الحاويات **الحاويتان على اليسار أسطوانتان متشابهتان. أوجد ارتفاع *h* الحاوية الصغيرة.**



الفهم أنت تعرف ارتفاع الحاوية الكبيرة وحجمي الحاويتين.

التخطيط استخدم النظرية 9.1 لكتابة نسبة تقارن بين الحجمين. ثم أوجد عامل المقياس واستخدمه لإيجاد h.

الحل

اكتب نسبة تقارن بين الحجمين. $\frac{\text{حجم الحاوية الصغيرة}}{\text{حجم الحاوية الكبيرة}} = \frac{270\pi}{640\pi}$

بسّط. $= \frac{27}{64}$

اكتب بالصورة $\frac{a^3}{b^3}$. $= \frac{3^3}{4^3}$

عامل المقياس هو 4:3.

عامل المقياس ← $\frac{h}{10} = \frac{3}{4}$ ← نسبة الارتفاع

أوجد نواتج الضرب التقاطعي. $h \times 4 = 10 \times 3$

حل لإيجاد قيمة *h*. $h = 7.5$

إذًا، ارتفاع الحاوية الصغيرة هو 7.5 سم.

التحقق حيث إن $\frac{7.5}{10} = 0.75 = \frac{3}{4}$ فالحل صحيح. ✓

تمرين موجّه

3. كرة الطائرة محيط كرة الطائرة الموافقة للوائح هو 66 cm. نسبة مساحة سطح تلك الكرة إلى مساحة سطح كرة الأطفال هي 1.6:1. فما محيط كرة الأطفال؟ قرّب النتيجة إلى أقرب cm.

الربط بتاريخ الرياضيات

جورج إف. بي. ريمان

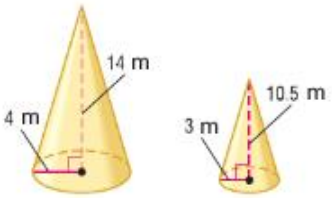
(1826-1866) تُسمى الهندسة الفراغية أحيانًا هندسة ريمان نسبة إلى جورج ريمان، وهو عالم رياضيات ألماني تُنسب إليه مسلمة ريمان، والتي تنص على أنه عبر نقطة ليست على مستقيم، لا توجد مستقيمات موازية للمستقيم المُعطى.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

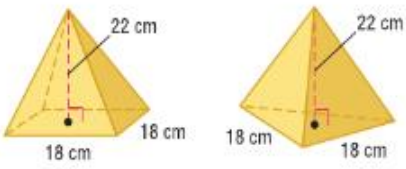
التحقق من فهمك

مثال 1 **حدد هل كل زوج من المجسمات *متشابه* أم *متطابقٌ* أم *ليس أيًا مما سبق*. إذا كانت المجسمات متشابهة، فاذكر عامل المقياس.**

1.



2.



مثال 2 3. هناك أسطوانتان متشابهتان بنصف قطر 15 cm و 6 cm. ما نسبة مساحة سطح الإسطوانة الصغيرة إلى الكبيرة؟

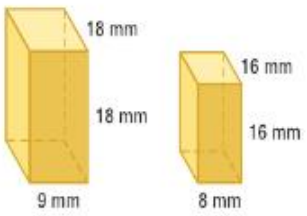
4. يوجد شكلان كرويان حجمهما $36\ cm^3$ و $288\ cm^3$. ما نسبة نصف قطر الشكل الكروي الصغير إلى الكبير؟

مثال 3 5. **كرات التمارين** تبيع شركة كرات تمارين بحجمين مختلفين. نسبة القطر هي 11:15. إذا علمتَ أن قطر الكرة الصغيرة 55 cm، فما حجم الكرة الكبيرة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

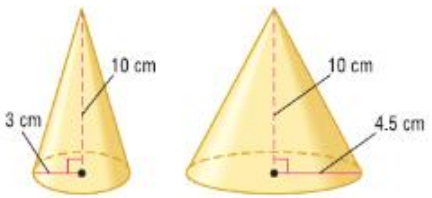
التدريب وحل المسائل

مثال 1 **التوافق** **حدد هل كل زوج من المجسمات *متشابه* أم *متطابقٌ* أم *ليس أيًا مما سبق*. إذا كانت المجسمات متشابهة، فاذكر عامل المقياس.**

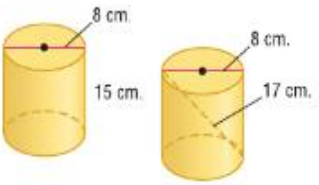
6.



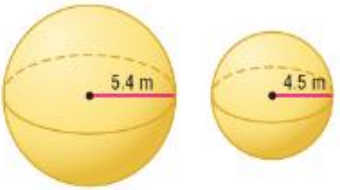
7.



8.



9.



مثال 2 10. شكلان هرميان متشابهان ارتفاعهما المائل 6 cm و 12 cm. ما نسبة مساحة سطح الهرم الصغير إلى الكبير؟

11. إسطوانتان متشابهتان ارتفاعهما 35 m و 25 m. ما نسبة حجم الإسطوانة الكبرى إلى الصغرى؟

12. يوجد شكلان كرويان مساحة سطحهما $100\pi\ cm^2$ و $16\pi\ cm^2$. ما نسبة حجم الشكل الكروي الكبير إلى الصغير؟

13. منشوران سداسيان متشابهان حجمهما $250\ m^3$ و $2\ m^3$. ما نسبة ارتفاع الإسطوانة الكبيرة إلى الصغيرة؟

14. **التحليل البُعدي** منشوران مستطيلان متشابهان ارتفاع المنشور الأول 6 m والآخر 3 m. إذا علمتَ أن حجم المنشور الأول $810\ m^3$، فما حجم المنشور الآخر؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3

15. **الأغذية** علبة تونة إسطوانية صغيرة نصف قطرها 4 cm وارتفاعها 3.8 cm. وعلبة تونة أكبر ولكن متشابهة نصف قطرها 5.2 cm.

a. ما عامل مقياس الإسطوانتين؟

b. ما حجم العلبة الأكبر؟ قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

16. **الحقائب** هناك حقيبتان على شكل منشورين مستطيلين متشابهين. طول الحقيبة الصغيرة 68 cm وعرضها 47 cm وعمقها 27 cm. وطول الحقيبة الكبيرة 85 cm.

a. ما عامل مقياس المنشورين؟

b. ما حجم الحقيبة الأكبر؟ قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

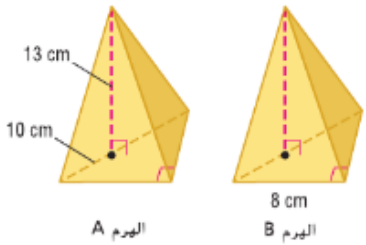
17. **النحت** النحت الموضح على اليسار هو نموذج مكبر لبوق. إذا علمتَ أن طول النحت 7.9 m وأن طول البوق القياسي 0.36 m. فما عامل مقياس النحت إلى البوق القياسي؟

18. الشكلان الهرميان الموضحان متطابقان.

a. ما محيط قاعدة الهرم A؟

b. ما مساحة قاعدة الهرم B؟

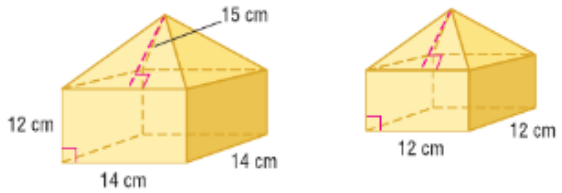
c. ما حجم الهرم B؟



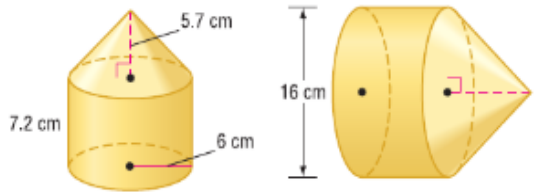
19. **التقنية** لدى رنا وريهام النوع ذاته من مشغّل MP3 ولكن بلونين مختلفين. المشغّلان على شكل منشورين مستطيلين متطابقين. حجم مشغّل رنا $4.92\ cm^3$ وعرضه 2.4 cm وعمقه 0.5 cm. فما ارتفاع مشغّل ريهام؟

الاستنتاج المنطقي **كل زوج من المجسمات أدناه متشابه.**

20. ما مساحة سطح المجسم الصغير الموضّح أدناه؟



21. ما حجم المجسم الكبير الموضّح أدناه؟



22. **التحليل البُعدي** هناك أسطوانتان متشابهتان. ارتفاع الإسطوانة الأولى 23 cm وارتفاع الإسطوانة الأخرى 8 in. إذا علمتَ أن حجم الإسطوانة الأولى $552\pi\ cm^3$. فما حجم الإسطوانة الأخرى؟ استخدم 1 in = 2.54 cm.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

23. **التحليل البُعدي** هناك شكلان كرويان متشابهان. نصف قطر الشكل الكروي الأول 10 ft. وحجم الشكل الآخر $0.9\ m^3$. استخدم $1\ in = 2.54\ cm$ لتحديد عامل المقياس من الشكل الكروي الأول إلى الثاني.

24. **الجبر** مخروطان متشابهان حجمهما $343\pi\ cm^3$ و $12\pi\ cm^3$. وارتفاع كل مخروط يساوي 3 أمثال نصف قطره. أوجد نصف قطر المخروطين وارتفاعهما.

25. **الخيام** هناك خيمتان على شكل نصف كرة بأرضية دائرية. نسبة مساحة الأرضية هي 12.25:9. إذا علمت أن قطر الخيمة الصغيرة 6 m، فما حجم الخيمة الكبيرة؟ قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

26. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف التشابه. نسبة ارتفاع إسطوانتين متشابهتين هي 2 إلى 3. والمساحة الجانبية للإسطوانة الكبيرة هي $162\pi\ cm^2$. وقطر الإسطوانة الصغيرة 8 cm.

a. **لفظي** ما ارتفاع الإسطوانة الكبيرة. اشرح طريقتك.
b. **هندسي** ارسم وميّز الإسطوانتين بالبيانات.
c. **تحليلي** بكم ضعف يفوق حجم الإسطوانة الكبيرة حجم الإسطوانة الصغيرة؟

مسائل مهارات التفكير العليا

استخدام مهارات التفكير العليا

27. **تحليل الخطأ** قطر الإسطوانة X هو 20 سم وارتفاعها 11 cm. وضعف قطر الإسطوانة Y هو 30 cm وهي مشابهة للإسطوانة X. هل نجحت شيخة أو شيماء في إيجاد ارتفاع الإسطوانة Y؟ اشرح استنتاجك.

شيخة

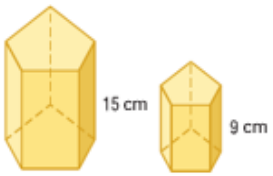
الإسطوانة X: نصف القطر 10
الارتفاع 11
الإسطوانة Y: نصف القطر 30.
الارتفاع a
$\frac{10}{30} = \frac{11}{a}$، إذًا $a = 33$.

شيماء

الإسطوانة X: القطر 20.
الارتفاع 11
الإسطوانة Y: القطر 20.
الارتفاع a
$\frac{20}{20} = \frac{11}{a}$، إذًا $a = 11$.

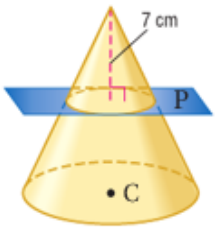
28. **التحدي** نسبة حجم الإسطوانة A إلى الإسطوانة B هي 1:5. الإسطوانة A مشابهة للإسطوانة C بعامل مقياس 1:2 والإسطوانة B مشابهة للإسطوانة D بعامل مقياس 1:3. فما نسبة حجم الإسطوانة C إلى الإسطوانة D؟ اشرح استنتاجك.

29. **الكتابة في الرياضيات** اشرح وجه الارتباط بين مساحتي سطح وحجمي المنشورين المتشابهين الموضحين على اليسار.



30. **مسألة غير محددة الإجابة** صف شكلين هرميين مثلثين غير متشابهين بقاعدتين متشابهتين.

31. **الاستنتاج المنطقي** المستوى P موازٍ لقاعدة المخروط C، وحجم المخروط فوق المستوى هو $\frac{1}{8}$ حجم المخروط C. أوجد ارتفاع المخروط C.



32. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في تشابه جميع الأشكال الكروية.

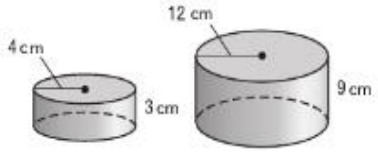
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

33. شكلان كرويان متشابهان نصف قطرهما 20π m و 6π m. ما نسبة مساحة سطح الشكل الكروي الكبير إلى الصغير؟

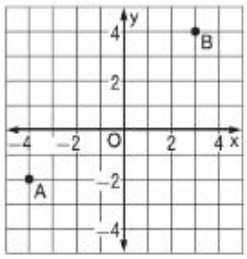
A $\frac{100}{3}$ B $\frac{100}{9}$ C $\frac{10}{3}$ D $\frac{10}{9}$

34. ما عامل مقياس الأشكال المتشابهة؟



F 0.25 H 0.5
G 0.33 J 0.75

35. إجابة قصيرة تمثل النقطة A والنقطة B موقع منزلي ليلى ومنال. إذا علمت أن كل وحدة على الخريطة تمثل km واحدًا، فكم تبلغ المسافة بين المنزلين؟



36. SAT/ACT إذا علمت أن $\frac{x+2}{3} = \frac{(x+2)^2}{15}$، فما القيمة المحتملة للرمز x؟

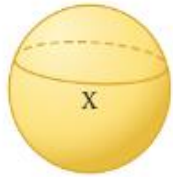
A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

مراجعة شاملة

حدد ما إذا كان الشكل X على كل من الأشكال الكروية الموضحة هو مستقيم في الهندسة الفراغية أم لا. (الدرس 7-9)

37.

38.



39.

40. الترفيه يعتقد البعض أن مركبة الفضاء على شكل كرة أرضية في إيكوت في عالم ديزني في أورلاندو بولاية فلوريدا تشبه كرة الجولف. المبنى كروي قطره 50.16 m. وقطر كرة الجولف القياسية 3.8 cm تقريبًا. (الدرس 6-9)

a. أوجد حجم المركبة الفضائية على شكل كرة أرضية وقربه إلى أقرب m^3.

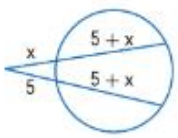
b. أوجد حجم كرة الجولف وقربه إلى أقرب جزء من عشرة.

c. ما عامل مقياس المركبة الفضائية على شكل كرة أرضية وكرة الجولف؟

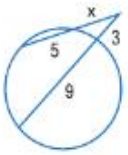
d. ما نسبة حجم المركبة الفضائية على شكل كرة أرضية إلى كرة الجولف؟

أوجد x. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماساتٌ بالفعل.

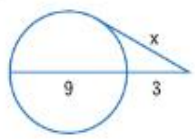
41.



42.



43.



مراجعة المهارات

اكتب كل كسر في صورة رقم عشري وقربه لأقرب جزء من مئة.

44. $\frac{8}{13}$ **45.** $\frac{17}{54}$ **46.** $\frac{11}{78}$ **47.** $\frac{43}{46}$

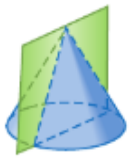
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

9-1 تمثيلات الأشكال ثلاثية الأبعاد

صف كل مقطع عرضي.

11.



12.

13. **الكعك** تم قطع قالب الكعك الموضح بالنصف رأسيًا. صف المقطع العرضي من القالب.

مثال 1

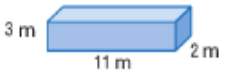
صف المقاطع العرضية الرأسية والأفقية من الأشكال الموضحة أدناه.

المقطع العرضي الرأسي مستطيل والمقطع العرضي الأفقي دائرة.

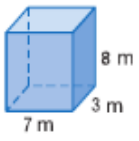
9-2 مساحة السطح للمنشور والإسطوانة

أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل منشور. قرّب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

14.

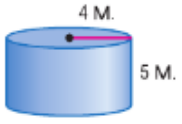


15.

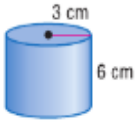


أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل إسطوانة. قرّب لأقرب جزء من عشرة.

16.

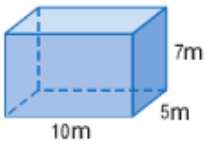


17.



مثال 2

أوجد مساحة سطح المنشور المستطيل.



استخدم المستطيل ذا الأبعاد 10 m في 54 m باعتباره القاعدة.

$S = Ph + 2B$ مساحة سطح المنشور

$= (2 \times 10 + 2 \times 5)(7) + 2(10 \times 5)$ تعويض

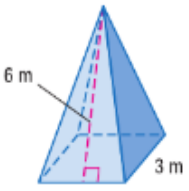
$= 310$ بسّط.

تبلغ مساحة السطح $310\ m^2$.

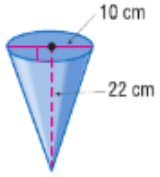
9-3 مساحة السطح للهرم والمخروط

أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل هرم منتظم. وقرّب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

18.

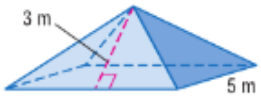


19.



مثال 3

أوجد مساحة سطح الهرم المنتظم. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.



$S = \frac{1}{2}P\ell + B$ مساحة سطح الهرم المنتظم

$= \frac{1}{2}(4 \times 5)3 + 5 \times 5$ $P = 4 \times 5$ أو 20، $\ell = 3$، $B = 4 \times 5$

$= 55$ بسّط.

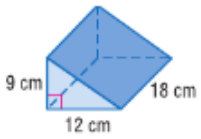
تبلغ مساحة السطح $55\ m^2$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-4 حجم المنشور والإسطوانة

20. حجم الإسطوانة هو $770\ cm^3$. وارتفاعها 5 cm. أوجد نصف قطرها.

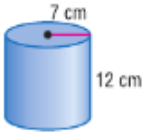
21. أوجد حجم المنشور المثلث.



22. الشاحنات الشاحنة في الأساس منشور مستطيل. الارتفاع الداخلي القياسي لهذه الشاحنات هو 108 cm. إذا علمت أن عرض الشاحنة 2 m وطولها 4 m، فما حجمها؟

مثال 4

أوجد حجم الإسطوانة.



$V = \pi r^2 h$ حجم الإسطوانة

$= \pi(7)^2(12)$ $r = 7$ و $h = 12$

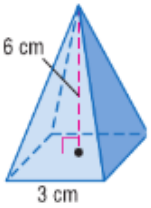
≈ 1847.5 استخدم آلة حاسبة.

الحجم تقريبًا $1847.5\ cm^3$.

9-5 حجم الأشكال الهرمية والمخروطية

23. أوجد حجم مخروط نصف قطره 1 cm وارتفاعه 3.4 cm.

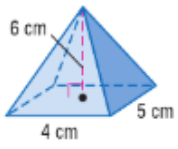
24. أوجد حجم الهرم المنتظم.



25. الهندسة المعمارية طول ضلع قاعدة الهرم الأكبر 230 m وارتفاعه 147 m. أوجد حجم الهرم.

مثال 5

أوجد حجم الهرم.



$V = \frac{1}{3}Bh$ حجم الهرم

$= \frac{1}{3}(4 \cdot 5)(6)$ $B = 4 \times 8$ و $h = 6$

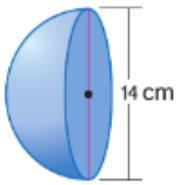
$= 40$ بسّط.

الحجم يساوي $40\ cm^3$.

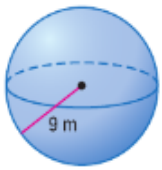
9-6 مساحة سطح الأشكال الكروية وحجمها

أوجد مساحة سطح كل شكل.

26.



27.



أوجد حجم كل شكل كروي أو نصف شكل كروي. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

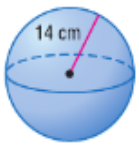
28. نصف شكل كروي: محيط الدائرة الكبرى 24π m

29. شكل كروي: مساحة الدائرة الكبرى $= 55\pi\ cm^2$

30. التشييد يتم صب الإسمنت في نصف شكل كروي عرضه 6 cm. فما حجم الإسمنت المستخدم؟

مثال 6

أوجد مساحة سطح الشكل الكروي وحجمه. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.



$S = 4\pi r^2$ مساحة سطح الشكل الكروي

$= 4\pi(14)^2$ عوّض.

≈ 2463 استخدم الآلة الحاسبة.

تبلغ مساحة السطح حوالي 2463 سم مربع.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ حجم الشكل الكروي

$= \frac{4}{3}\pi(14)^3$ عوض عن r باستخدام 9.

$\approx 11,494\ cm^3$ استخدم الآلة الحاسبة.

الحجم تقريبًا $11,494 cm^3$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-7 الهندسة الفراغية

قم بتعيين كل مما يلي على الشكل الكروي A.

31. مستقيمان يحتويان على النقطة C

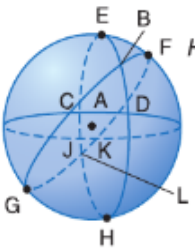
32. قطعة مستقيمة تحتوي على النقطة H

33. مثلث يحتوي على النقطة B

34. مستقيمان يحتويان على النقطة L

35. قطعة مستقيمة تحتوي على النقطة J

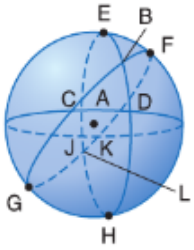
36. مثلث يحتوي على النقطة K



37. **البلي** حدد ما إذا كان الشكل y على الشكل الكروي الموضح هو مستقيم في الهندسة الفراغية أم لا.

مثال 7

قم بتعيين كل مما يلي على الشكل الكروي A.

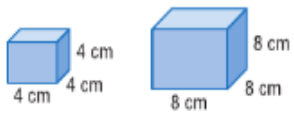


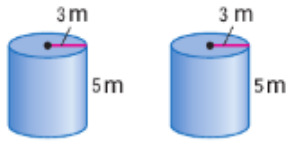
a. مستقيمان يشتملان على النقطة D
$\overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{CK}$

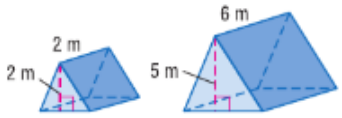
b. قطعة مستقيمة تحتوي على النقطة E
$\overline{DJ}$

9-8 المجسمات المتطابقة والمتشابهة

حدد هل كل زوج من المجسمات *متشابه* أم *متطابق* أم *ليس أيًا مما سبق*. إذا كانت المجسمات متشابهة، فاذكر عامل المقياس.

38.


39.


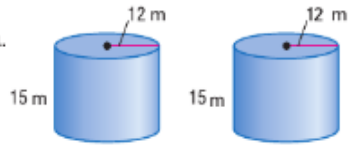
40.


41.

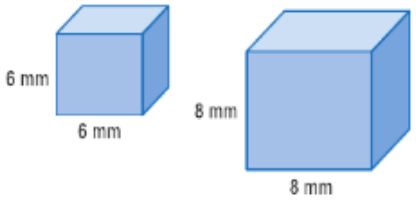
42. **النماذج** تم عمل نموذج سيارة لأحد الهواة بحيث يساوي 1 cm في النموذج 0.7 m في السيارة الحقيقية. إذا كان ارتفاع النموذج 2 cm، فما ارتفاع السيارة الحقيقية؟

مثال 8

حدد هل كل زوج من المجسمات متشابه، أم متطابقٌ، أم ليس أيًا مما سبق. إذا كانت المجسمات متشابهة، فاذكر عامل المقياس.

a.


نسب القياسات المتناظرة متساوية وعامل المقياس هو 1:1، إذًا المجسمات متطابقة.

b.


نسبة العرض: $\frac{6}{8} = 0.75$

نسبة الارتفاع: $\frac{6}{8} = 0.75$

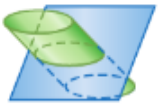
نسب القياسات المتناظرة متساوية، إذًا الأشكال الهرمية متشابهة. عامل المقياس 4:3. حيث إن عامل المقياس ليس 1:1، فالمجسمات ليست متطابقة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

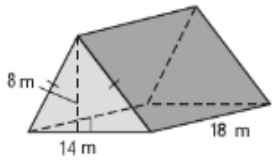
تدريب على الاختبار

1. استخدم ورقة منقطة متساوية القياس والرسوم المتعامدة لرسم مجسم.

2. صف المقطع العرضي.



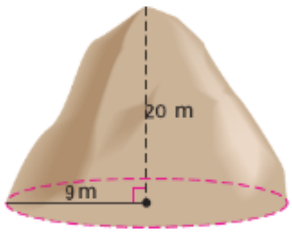
3. **إجابة قصيرة** أوجد مساحة سطح نموذج الخيمة. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



4. **الشموع** عرض شمعة على شكل عمود دائري هو 2.8 cm وطولها 6 cm. ما المساحة الجانبية للشمعة ومساحة سطحها؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

5. **الشاي** كيس شاي على شكل هرم منتظم. كل حافة قاعدة 4 cm والارتفاع المائل 5 cm. فما مساحة سطح كيس الشاي بالسنتيمتر المربع؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

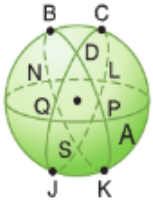
6. **خلية النحل** قدر المساحة الجانبية لفرقة خلايا النحل التركية ومساحة سطحها؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



7. أوجد حجم الشمعة في التدريب 4. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.
8. أوجد حجم كيس الشاي في التدريب 5. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

9. **الأرض** نصف قطر الأرض تقريبًا 6400 km. ما مساحة سطح الأرض وحجمها؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

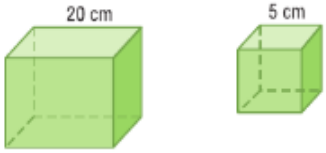
10. **السوفتبول** محيط كرة السوفتبول الموافقة للوائح 30.5 cm. فما حجمها؟



قم بتعيين كل مما يلي على الشكل الكروي A.

11. مستقيمان يشتملان على النقطة S
12. قطعة مستقيمة تحتوي على النقطة L
13. مثلث
14. مستقيمان يشتملان على النقطة D
15. قطعة مستقيمة تحتوي على النقطة P

16. هل هذان المكعبان *متشابهان* أم *متطابقان* أم لا شيء مما سبق؟ اشرح استنتاجك.



17. أسطوانتان متشابهتان ارتفاعهما 75 m و 25 m. ما نسبة حجم الإسطوانة الكبيرة إلى الصغيرة؟

18. **الخبز** قطعتان من عجين البسكويت على شكل كروي نصف قطرهما 3 cm و 5 cm على التوالي. تم دمج القطعتين لتكوين قطعة كروية أكبر من العجين. ما نصف القطر التقريبي لكرة العجين الجديدة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

19. **الجبر** منشور مستطيل طول ضلعي قاعدته x و $x + 3$ وارتفاعه $2x$. أوجد مساحة سطح المنشور وحجمه.

20. **النقل** طول مخروط حركة المرور 48 cm ونصف قطره 13 cm.

a. أوجد المساحةالجانبية.

b. أوجد مساحة السطح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 9
تدريب على الاختبارات المعيارية
تراكمي

الاختيار من متعدّد

اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. كان الارتفاع الأصلي للهرم الأكبر في الجيزة بمصر تقريبًا 148 m. وكانت قاعدة الهرم مربعة طول ضلعها 230 m. فكم كان الحجم الأصلي للهرم؟ قرّب إلى أقرب عدد كلي.

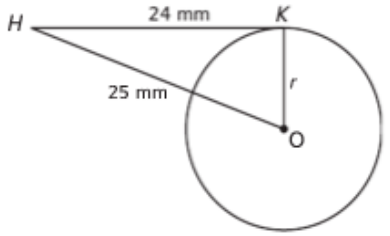
A $1{,}786{,}503\ m^3$

B $2{,}609{,}733\ m^3$

C $104{,}128{,}752\ m^3$

D $122{,}716{,}907\ m^3$

2. إذا كان $\overline{HK}$ مماس للدائرة O، فما نصف قطر الدائرة؟



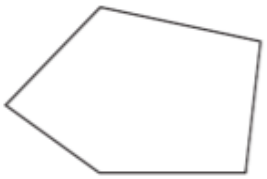
F 7 mm

G 8 mm

H 9 mm

J 10 mm

3. ما مجموع الزوايا الداخلية للشكل؟



A 450°

B 540°

C 630°

D 720°

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 1 يمكنك إقصاء بعض الإجابات غير المنطقية من خلال التقدير أولاً. الخياران C و D أكبر مما ينبغي.

4. قام عبد الرحيم بإجراء استطلاع لآراء 50 طالبًا ووجد أن 14 منهم يقضون أكثر من ساعتين كل ليلة في عمل الواجبات المنزلية. إذا كان هناك 421 طالبًا في مدرسة عبد الرحيم، فتوقع عدد الطلاب الذين يقضون أكثر من ساعتين كل ليلة في عمل الواجبات المنزلية.

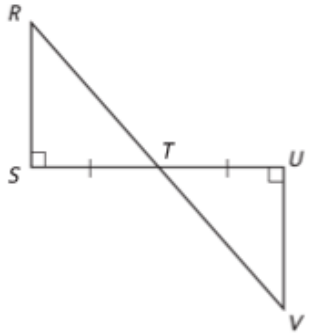
F 118

G 124

H 125

J 131

5. $\overline{RS}$ يمثل ارتفاع جبل ميتشل، أعلى نقطة في ولاية كارولينا الشمالية. إذا علمت أن $TU = 1528$ m، و $UV = 2037$ m، و $TV = 2547$ m، فاستخدم نظرية ASA لإيجاد ارتفاع جبل ميتشل.



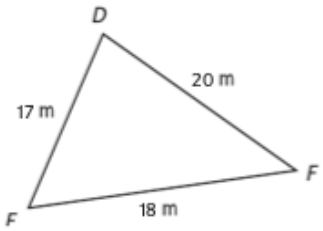
A 1528 m

B 2037 m

C 2181 m

D 2547 m

6. مثلث DEF موضح أدناه.



أي عبارة بشأن هذا المثلث صحيحة؟

F $m\angle F > m\angle D$

G $m\angle E > m\angle F$

H $m\angle D < m\angle F$

J $m\angle E < m\angle D$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10 الاحتمال والقياس

Chapter sourced from Integrated Math II Chapter 13 © 2012 McGraw-Hill Education
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

السابق

- لقد تعلمت التجارب والنتائج والأحداث. وأوجدت أيضًا الاحتمالات في الأحداث البسيطة.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - تمثيل الفضاءات العينية.
  - استخدام التباديل والتوافيق في الاحتمالات.
  - إيجاد الاحتمالات باستخدام الطول والمساحة.
  - إيجاد احتمالات الأحداث المركبة.

لماذا؟ ▲

- **الألعاب** يمكن استخدام الاحتمال في توقع مدى إمكانية وقوع نتائج مختلفة للمباريات التي نخوض.

الدرس 10-1

تمثيل الفضاءات العينية

السابق

لقد حسبت الاحتمال التجريبي.

الحالي

1 استخدام القوائم والجداول والمخططات الشجرية لتمثيل الفضاء العيني.

2 استخدام مبدأ العد الأساسي لعد النتائج.

لماذا؟

في مباراة كرة القدم، يرمي حكم المباراة قطعة معدنية عادلة لتحديد الفريق الذي يملك الكرة أولاً. وقد تقع القطعة المعدنية على الصورة أو الكتابة.

1 تمثيل فضاء عيني

لقد تعلمت ما يلي عن التجارب والنتائج والأحداث.

تعريف	مثال
التجربة هي موقف ينطوي على فرصة تؤدي إلى استنتاجات تسمى نتائج.	في الموقف المذكور أعلاه، التجربة هي رمي القطعة المعدنية.
النتيجة هي استنتاج لأداء معين أو تجريب لتجربة ما.	النتائج المحتملة هي سقوط القطعة المعدنية إما على الصورة وإما على الكتابة.
الحدث هو نتيجة واحدة أو أكثر لتجربة معينة.	ومن بين أحداث تلك التجربة سقوط القطعة المعدنية على الكتابة.

الفضاء العيني للتجربة هو مجموعة جميع النتائج المحتملة. ويمكنك تمثيل الفضاء العيني باستخدام قائمة منظمة أو جدول أو **مخطط شجري**.

مثال 1 تمثيل الفضاء العيني

تم إلقاء قطعة نقد معدنية مرتين. مثّل الفضاء العيني لهذه التجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.

مع كل رمية للقطعة المعدنية، توجد نتيجتان محتملتان: صورة «H» أو كتابة «T».

الجدول

أدرج نتائج الرمية الأولى في العمود الأيسر ونتائج الرمية الثانية في الصف العلوي.

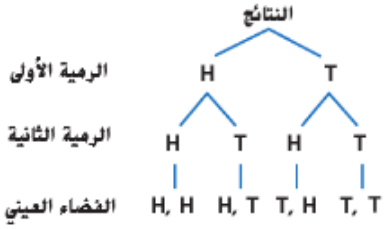
النتائج	صورة	كتابة
صورة	H, H	H, T
كتابة	T, H	T, T

القائمة المنظمة

اقرن كل نتيجة محتملة من الرمية الأولى مع كل النتائج المحتملة من الرمية الثانية.

H, H
H, T
T, H
T, T

المخطط الشجري



تمرين موجّه

1. تم إلقاء قطعة نقد معدنية مرتين، ثم تم تدوير مكعب الأعداد. مثّل الفضاء العيني لهذه التجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.

المفردات الجديدة

الفضاء العيني sample space
المخطط الشجري tree diagram
تجربة ثنائية المراحل two-stage experiment
تجربة متعددة المراحل multi-stage experiment
مبدأ العد الأساسي Fundamental Counting Principle

ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التجربة في مثال واحد مثال على **التجربة ثنائية المراحل**، وهي تجربة تُنفذ على مرحلتين أو عبر حدثين. وتُسمى التجارب التي تتم على أكثر من مرحلتين باسم **التجارب متعددة المراحل**.

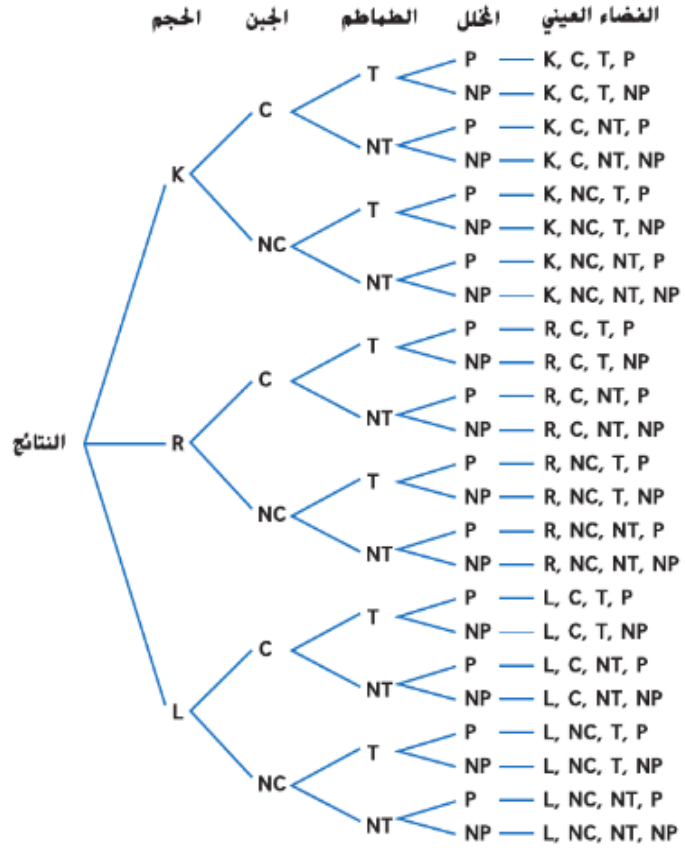
مثال 2 من الحياة اليومية المخططات الشجرية متعددة المراحل

شطائر اللحم البقري عند تسجيل طلب شطائر اللحم البقري، تسأل سهيلة كل عميل الأسئلة المذكورة في السيناريو الموضح أدناه. صمم مخططًا شجريًا لتمثيل الفضاء العيني لطلبات شطائر اللحم البقري.

الفضاء العيني نتاج أربع مراحل.

- حجم الشطيرة (K أو R أو L)
- الجبن (C أو NC)
- الطماطم (T أو NT)
- المخللات (P أو NP)

ارسم مخططًا شجريًا بالمراحل الأربع.



تمرين موجّه

2. **الموسيقى** يمكن لياسمين أن تختار مُشغل MP3 صغيرًا بقرص صلب سعته 4 أو 8 جيجابايت باللون الأسود أو الأخضر المزرق أو الرمادي الفاتح أو الأحمر. ويمكنها أيضًا أن تحصل على واصلة و/أو مشبك يمكنها من التحرك. صمم مخططًا شجريًا لتمثيل الفضاء العيني لهذا الموقف.

انتبه!

الاستنتاج المنطقي تدل كلمة *و/أو* في السؤال الثالث من المثال 2 على وجود مرحلة إضافية في عملية الطلب. عند عمل مراحل منفصلة لاختيار الطماطم أو عدم اختيارها، أو اختيار المخللات أو عدم اختيارها، فإنك تسمح بإمكانية اختيار *كل* من الطماطم والمخللات.

قراءة في الرياضيات

ترميز المخطط الشجري

اختر ترميزًا للنتائج في المخططات الشجرية للحد من الالتباس. في المثال 2، ترمز *C* إلى *الجبن*، بينما ترمز *NC* إلى *بلا جبن*. وبالمثل، فإن *NT* و*NP* ترمزان إلى *بلا طماطم* و*بلا مخللات*، على التوالي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 مبدأ العد الأساسي

في بعض التجارب ثنائية المراحل أو متعددة المراحل، لا يكون ذكر الفضاء العيني بأكمله عمليًا أو ضروريًا. لإيجاد عدد النتائج المحتملة، يمكنك استخدام **مبدأ العد الأساسي**.

نصيحة دراسية

قاعدة الضرب أحيانًا يسمى مبدأ العد الأساسي *قاعدة الضرب للعد* أو *مبدأ العد*.

المفهوم الأساسي مبدأ العد الأساسي

الشرح يمكن إيجاد عدد النتائج المحتملة في فضاء عيني معين عن طريق ضرب عدد النتائج المحتملة من كل مرحلة أو حدث.

الرموز في إحدى تجارب المرحلة k افترض أن

n_1 = عدد النتائج المحتملة للمرحلة الأولى.

n_2 = عدد النتائج المحتملة للمرحلة الثانية بعد حدوث المرحلة الأولى.

⋮

n_k = عدد النتائج المحتملة للمرحلة k بعد حدوث المراحل $k-1$ الأولى.

وبالتالي تكون النتائج الكلية المحتملة للمرحلة k من التجربة هي

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k.$$

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام نظام العد الأساسي

الربط بالحياة اليومية

أكثر من 95% من طلاب المدارس الثانوية يطلبون شكلاً تقليديًا من الخواتم، يتضمن اسم المدرسة وفصًا وسنة التخرج.

المصدر: Fort Worth *Star-Telegram*

خواتم الصف اختارت وفاء المقاس والشكل العام لخاتم الصف، ويجب أن تختار الآن من خيارات الخواتم الموضحة. كم خاتمًا مختلفًا يمكن أن تبتكر وفاء عند اختيار الشكل والمقاس؟

خيارات الخاتم	عدد الاختيارات
المعادن	10
اللمسات النهائية	2
ألوان الحجر	12
ألوان القطع	5
جانب 1 شعارات النشاط	20
جانب 2 شعارات النشاط	20
أشكال الشريط	2

استخدم نظام العد الأساسي.

النتيجة المحتملة	أشكال الشريط	جانب 2 شعارات	جانب 1 شعارات	ألوان القطع	ألوان الحجر	اللمسات النهائية	المعادن
960,000 =	2 ×	20 ×	20 ×	5 ×	12 ×	2 ×	10

إذًا، بإمكان وفاء أن تبتكر 960,000 خاتمًا مختلفًا.

تمرين موجّه

3. أوجد عدد النتائج المحتملة في كل موقف.

A. ورقة الإجابة الموضحة كاملة.

B. يُلف النرد أربع مرات.

C. **الأحذية** يتوفر زوج من الأحذية النسائية بكل المقاسات من 5 إلى 11 بألوان الأحمر أو الأزرق الفاتح أو البني أو الأسود. وقد تكون تلك الأحذية مصنوعة من الجلد أو الجلد المزأبر وتتوفر بثلاثة أعراض مختلفة.

ورقة الإجابة

1. (A) (B) (C) (D)
2. (A) (B) (C) (D)
3. (A) (B) (C) (D)
4. (A) (B) (C) (D)
5. (A) (B) (C) (D)
6. (A) (B) (C) (D)
7. (T) (F)
8. (T) (F)
9. (T) (F)
10. (T) (F)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

التحقق من فهمك

مثال 1

مثل الفضاء العيني لكل تجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.

1. يمكن للاعب مع كل ضربة بالمضرب إما أن يصل إلى قاعدة وإما أن يخرج.

2. باع مازن معظم تذاكر مهرجان الخريف السنوي في مدرسته. وكمكافأة له يختار مرتين من حقيبة بها بطاقات مكتوب عليها «عصير مجاني» أو «دفتر ملاحظات مجاني».

مثال 2

3. **حُلل الزفاف** يؤجر أيوب حلة زفاف من الكتالوج الموضح. صمم مخططًا شجريًا يمثل الفضاء العيني لهذا الموقف.

مثال 3

أوجد عدد النتائج المحتملة في كل موقف.

4. يشتري سعيد هاتفًا ويجب أن يختار خطة على فرض اختيار واحد من الخيارات التالية.

خيارات الهاتف النقال	عدد الاختيارات
شكل الهاتف	15
باقة الدقائق	5
إمكانية الوصول إلى الإنترنت	3
إرسال رسائل	4
الضمان	2

5. تبتكر هيام قائمة جديدة لمطعمها. على فرض تم طلب كل عنصر.

محتويات القائمة	عدد الاختيارات
المقبلات	8
الحساء	4
السلاطة	6
الطبق الرئيسي	12
الحلوى	9

التدريب وحل المسائل

مثال 1

التبرير **مثّل الفضاء العيني لكل تجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.**

6. هناء طالبة في السنة قبل الأخيرة وأمامها خيار للعامين القادمين إما أن تمارس لعبة كرة اليد وإما أن تمارس السلة خلال فصل الشتاء.

7. صفان مختلفان من صفوف التاريخ في مدينة نيويورك يأخذان جولة إما إلى سميثسونيان وإما إلى متحف لتاريخ الطبيعة.

8. أمام محمود فرصة للسفر للخارج باعتباره طالب تبادل أجنبيًا أثناء العامين الأخيرين من كليته. ويمكنه الاختيار بين الإكوادور وإيطاليا.

9. أنشئ نادٍ جديد، ويجب اختيار موعد للاجتماع. أوقات الاجتماع المحتملة هي الاثنين أو الخميس في الساعة 5:00 أو 6:00 مساءً.

10. اختبار بعدة نسخ له تمارين بالمثلثات. يوجد في التدريب الأول مثلث منفرج أو حاد. ويوجد في التدريب الثاني مثلث متساوي الساقين أو مثلث مختلف الأضلاع.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

11. **الرسم** يعمل الطلاب في حصة الرسم على إنجاز مشروعين ويمكنهم استخدام نوع واحد من نوعي الرسوم المختلفة في كل مشروع. مثل الفضاء العيني في هذه التجربة بعمل قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.

مثال 2

ارسم مخططًا شجريًّا لتمثيل الفضاء العيني لكل موقف.

12. **السنبوسك** على منضدة السنبوسك، يتاح للزبائن خيار وضع الحبوب أو التونة أو الدجاج مع الأرز أو بدون أرز وجبن و/أو صلصة.

13. **النقل** ينوي منصور شراء مركبة وأمامه خيارات سيارة أو شاحنة أو شاحنة صغيرة كسوتها الداخلية من الجلد أو القماش وبها مشغل CD و/أو سقف مفتوح.

14. **قطع الحلوى** ذهبت هناء وصديقاتها إلى مطعم بيع الزبادي المثلج به علامة تشبه العلامة الموضحة على اليمين. صمم مخططًا شجريًا لجميع التوافيق المحتملة من أقماع المثلجات بالفول السوداني و/أو المكسرات.

مثال 3

المثابرة في التمارين 18-15، أوجد عدد النتائج المحتملة لكل موقف.

15. يترشح في انتخابات اتحاد طلاب السنة قبل الأخيرة 3 أشخاص على منصب السكرتارية و 4 على منصب أمانة الصندوق و 5 أشخاص على منصب نائب الرئيس و 2 على منصب رئيس الصف.

16. عند التسجيل في الحصص أثناء الفصل الدراسي الأول من الدراسة بالكلية، كان أمام محمود 4 خانات يملؤها باختيار 4 صفوف للأدب وصفين للرياضيات و 6 للتاريخ و 3 للتصوير.

17. تختار هداية واحدة من بين 6 كليات و 5 تخصصات أساسية وتخصصين فرعيين و 4 أندية.

18. تمتلك هالة مطعمًا تشتمل قائمة الغداء فيه على أربعة أطباق: مقبلات، وطبق رئيسي، وحلوى، ومشروب. ويوجد 5 خيارات للمقبلات، و 4 خيارات للطبق الرئيسي، و 3 خيارات للحلوى، و 6 خيارات للمشروبات.

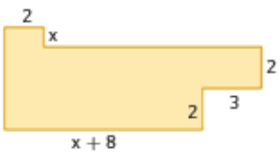
19. **الفنون** في واجب حصة الفنون، أعطى أستاذ ماجد طلابه اختيارات لشكلين رباعيين ليستخدموهما كقاعدة. ويجب أن تكون أضلاع أحدهما متساوية، بينما يجب أن يكون هناك ضلعان متوازيان على الأقل في الشكل الآخر. مثل الفضاء العيني من خلال عمل قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.

20. **الإفطار** يقدم مطعم في أحد الفنادق بيض الأومليت مع اختيار الخضراوات أو اللحم البقري أو الدجاج التي تقدم مع البطاطس المهروسة المقلية أو الفريك أو العيش المحمص.

a. كم عدد النتائج المختلفة المتوفرة من الأومليت وطبق جانبي إذا قدم طبق الأومليت مع الخضراوات وحدها؟

b. أوجد عدد النتائج المحتملة للأومليت بالخضراوات إذا كان بإمكانك الحصول على أي من الخضراوات أو كلها على أي طبق أومليت.

21. **الأشكال المركبة** يحسب فهد مساحة الشكل المركب الموجود على اليسار. بكم طريقة مختلفة يمكنه فعل ذلك؟



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

22. **النقل** اشترت نورا قفل دراجة جديد يعرض أربعة أعداد، لكل عدد منها توافيق من 0 إلى 9.
   a. كم عدد التوافيق الممكنة إن لم يكن هناك قيود على عدد المرات التي يمكن لنورا استخدام كل عدد فيها؟
   b. كم عدد التوافيق الممكنة إذا كان بإمكان نورا استخدام كل عدد مرة واحدة؟

23. **الألعاب** تلعب نهلة ونسرين لعبة لوحية يُرمى نردان فيها في كل دور.
   a. كم عدد النتائج التي تؤدي إلى مجموع عدد 8 في الدور الواحد؟
   b. كم عدد النتائج التي تؤدي إلى مجموع فردي؟

24. **التمثيلات المتعددة** ستستكشف في هذه المسألة تتابع الأحداث. في المرحلة الأولى من التجربة ثنائية المرحلة، قمت بتدوير القرص الدوار 1 الموضح أدناه. إذا كانت النتيجة أحمر، يمكنك قلب القطعة المعدنية. إذا كانت النتيجة أصفر، تقوم بتدوير النرد. إذا كانت النتيجة أخضر، يمكنك تدوير مكعب الأعداد. وإذا كانت النتيجة أزرق، يمكنك تدوير القرص الدوار 2.

القرص الدوار 1

القرص الدوار 2

   a. **الهندسي** صمم مخططًا شجريًا لتمثيل الفضاء العيني في هذه التجربة.
   a. **المنطقي** صمم مخطط فن لتمثيل النتائج المحتملة في هذه التجربة.
   c. **التحليلي** كم عدد النتائج المحتملة؟
   d. **اللفظي** هل يمكنك استخدام مبدأ العد الأساسي في تحديد عدد النتائج؟ فسّر.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

25. **التحدي** يشتمل صندوق على n من الأشياء المختلفة. إذا اخرجت ثلاثة أشياء من الصندوق، بحيث ت خرج واحدًا في كل مرة، دون أن تعيد الشيء السابق إلى الصندوق، فكم عدد النتائج المحتملة؟ فسّر استنتاجك.

26. **مسألة غير محددة الإجابة** يكون المخطط الشجري الخاص بالتجربة غير متناظر أحيانًا. صف تجربة ثنائية المرحلة المخطط الشجري فيه متناظر، وارسم المخطط الشجري. فسّر.

27. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا لا يمكن تمثيل الفضاء العيني لتجربة متعددة المراحل باستخدام جدول.

مثال 1

28. **الفرضيات** حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحةً *أحيانًا*، *أم دائمًا*، أم غير صحيحة *على الإطلاق*. فسّر استنتاجك.

عندما تخرج النتيجة عن نطاق الفضاء العيني، فهذا خطأ.

29. **التبرير** للتجربة متعددة المراحل نتائج محتملة n عند كل مرحلة. إذا تم تنفيذ التجربة بالمراحل k، فاكتب معادلة لإجمالي عدد النتائج المحتملة P. فسّر.

30. **في الرياضيات** اشرح متى يكون من الضروري عرض جميع النتائج المحتملة لتجربة ما باستخدام مخطط شجري ومتى يمكن الاكتفاء باستخدام مبدأ العد الأساسي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

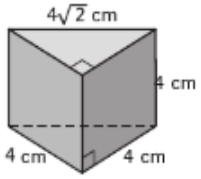
تدريب على الاختبار المعياري

31. الاحتمال يمكن أن تدعو نجلاء اثنتين من صديقاتها للذهاب لتناول الغداء معها. إذا كانت ستختار من بين أربع من صديقاتها، فكم عدد النتائج المحتملة؟

A 4 C 8

B 6 D 9

32. إجابة قصيرة ما حجم المنشور الثلاثي الموضح أدناه؟



33. يجب أن تتكون كلمة مرور فالح من خمسة أرقام، مستخدمًا الأرقام من 0 إلى 9. ويجب أن يستخدم أرقامًا متكررة. ما أقصى عدد من كلمات المرور المختلفة يمكن لفالح أن يستخدم؟

F 15,120 H 59,049

G 30,240 J 100,000

34. SAT/ACT يقدم محل بيتزا ثلاثة أنواع من البيتزا محشوة الحواف، و5 أنواع من البيتزا بالخضراوات، و4 أنواع من البيتزا باللحوم. كم نوعًا مختلفًا من البيتزا يمكن طلبه عند اختيار 1 بيتزا محشوة الحواف، و1 بيتزا بالخضراوات، و1 بيتزا باللحم؟

A 12 D 60

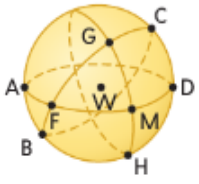
B 23 E عدد لا نهائي

C 35

مراجعة شاملة

35. الهندسة المعمارية لتشجيع إعادة التدوير، شيد سكان مدينة روما في إيطاليا نموذجًا لكاتدرائية القديس بطرس من علب العصائر الفارغة. تم تشييد النموذج حسب المقياس 1:5 وكان على شكل منشور مستطيل ارتفاعه 26 m، وعرضه 49 m وطوله 93 m. أوجد أبعاد الكاتدرائية الحقيقية.

استخدم الهندسة الفراغية في تسمية كلٍ مما يلي في الفراغ W.



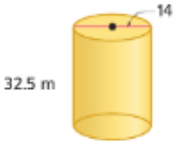
36. خطان مستقيمان يشتملان على النقطة F

37. نقطة تحتوي على قطعة G

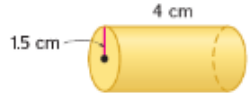
38. مثلث

أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل أسطوانة. قرّب لأقرب جزء من عشرة.

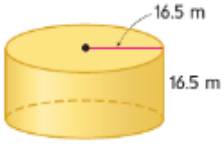
39.



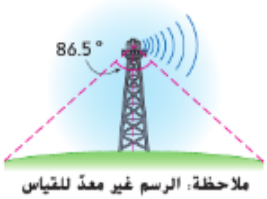
40.



41.



42. الاتصالات تسير الإشارة القادمة من برج في شكل شعاع له نقطة نهاية على البرج ومماسه على الأرض. على فرض أن البرج يقع في مستوى سطح البحر حسبما هو موضح، حدد مقياس القوس الذي يتقاطع مع المماسين.



ملاحظة: الرسم غير معدّ للقياس

مراجعة المهارات

أوجد ناتج قسمة كل مما يلي.

43. $\frac{5^2}{2}$ **44.** $\frac{3^3}{3 \cdot 2}$ **45.** $\frac{2^4 \cdot 6}{8}$ **46.** $\frac{2^3 \cdot 12}{6}$ **47.** $\frac{4^4 \cdot 3}{24}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 10-2

استخدام التباديل والتوافيق مع الاحتمالات

السابق

- لقد استخدمت نظام العد الأساسي.

الحالي

1. استخدام التباديل مع الاحتمالات.
2. استخدام التوافيق مع الاحتمالات.

لماذا؟

- يقف فارس وعيسى وعمر وعلي بجانب بعضهم لالتقاط صورة. هناك أربعة اختيارات لمن يمكنه الوقوف ناحية أقصى اليسار، و 3 اختيارات لمن يمكنه الوقوف في الموضع الثاني. أما بالنسبة للموضع الثالث، فهناك خياران فقط، وبالنسبة للموضع الأخير فهناك خيار واحد فقط متاح.

المفردات الجديدة

تباديل permutation
مضروب factorial
التباديل الدائرية circular permutation
توافيق combination

ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
استخدام نماذج الرياضيات.

1 الاحتمالات باستخدام التباديل

التباديل هي ترتيب الأشياء حسب الترتيب المهم. من تباديل الأصدقاء الأربعة المذكورين أعلاه عيسى، وعمر، وعلي، ثم فارس. وباستخدام مبدأ العد الأساسي، هناك $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ أو 24 ترتيبًا محتملاً للأصدقاء.

يمكن كتابة التعابير $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ المستخدمة في حساب عدد تباديل الأصدقاء الأربعة على طريقة $4!$، التي تُقرأ 4 مضروب.

المفهوم الأساسي المضروب

الشرح **مضروب** العدد الصحيح الموجب n يُكتب $n!$ هو ناتج ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من أو تساوي n.

الرموز $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$، حيث $0! = 1$

مثال 1 احتمالات وتباديل عدد n من الأشياء

رياضة نبيلة وميسون عضوتان في فريق لاكروس. إذا أُعطيت الفتيات العشرون أعضاء الفريق أرقامًا لقميص اللعبة من 1 إلى 20 بشكلٍ عشوائي، فما احتمال أن يكون رقم قميص نبيلة 1 وميسون 2؟

الخطوة 1 أوجد عدد النتائج المحتملة في الفضاء العيني. هذا هو عدد تباديل أسماء الفتيات العشرين أو $20!$.

الخطوة 2 أوجد عدد النتائج المرغوبة. هذا هو عدد تباديل أسماء الفتيات الأخرى بحيث يكون رقم نبيلة 1 ورقم ميسون 2: $(20-2)!$ أو $18!$.

الخطوة 3 احسب الاحتمال.

$$P(\text{نبيلة 1، ميسون 2}) = \frac{18!}{20!}$$ ← عدد النتائج المفضلة / عدد النتائج المحتملة

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{18!}}}{20 \cdot 19 \cdot \underset{1}{\cancel{18!}}}$$ وسّع $20!$ واقسم العوامل المشتركة.

$$= \frac{1}{380}$$ بسّط.

تمرين موجّه

1. **التصوير** في الفترة الافتتاحية، ما احتمال اختيار عيسى للوقوف في أقصى اليسار، واختيار عمر للوقوف في أقصى اليمين في الصورة؟

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

في الفقرة الافتتاحية، على فرض أن 6 أصدقاء كانوا متاحين، ولكن أراد المصور أن يصور 4 أشخاص فقط في الصورة. باستخدام مبدأ العد الأساسي، يصبح عدد تباديل 4 أصدقاء مأخوذين من مجموعة من 6 أصدقاء هو $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ أو 360.

وهناك طريقة أخرى لوصف هذا الموقف وهي عدد تباديل 6 اصدقاء أخذ من بينهم 4 في كل مرة، يُرمز إليه بـ ${}_6P_4$. يمكن حساب هذا العدد أيضًا باستخدام المضروبات.

$${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!}$$

وهذا يقترح القانون التالي.

المفهوم الأساسي التباديل

الرموز عدد تباديل n من الأشياء المميزة المأخوذة r في كل مرة يرمز إليه بـ ${}_nP_r$ ويتم الحصول عليه من ${}_nP_r = \frac{n!}{n-r!}$.

مثال عدد تباديل 5 أشياء مأخوذة 2 في كل مرة هو

$${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20$$

قراءة في الرياضيات

الدقة عبارة *الأشياء مميزة* تعني أن أشياء يمكن تمييزها لكونها مختلفة بطريقة ما.

مثال 2 الاحتمالات و nPr

قُسم صف إلى فرق يتكون كلٌّ منها من 15 طالبًا. وطُلب من كل فريق أن يختار أعضاء منه ليصبحوا مسؤولين. إذا كان عدنان وعبيد وعبد الله في فريق واحد، وكان يتم تحديد المناصب عشوائيًا، فما احتمال أن يتم اختيارهم كرئيس ونائب رئيس وسكرتير، على التوالي؟

الخطوة 1 بما أن اختيار المسؤولين هو طريقة لترتيب أعضاء الفريق، فالترتيب مهم في هذا الموقف. إن عدد النتائج المحتملة في الفضاء العيني هو عدد تباديل 15 شخصًا مع أخذ 3 كل مرة، ${}_{15}P_3$.

$${}_{15}P_3 = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12!} = 2730$$

الخطوة 2 عدد النتائج المفضلة هو عدد تباديل 3 طلاب في مناصب معينة. وسيكون هذا 1! أو 1.

الخطوة 3 إذًا، فاحتمال اختيار عدنان وعبيد وعبد الله لمناصب المسؤولين الثلاثة هي $\frac{1}{2730}$.

نصيحة دراسية

العشوائية عند تحديد النتائج بشكل عشوائي، تصبح احتمال حدوثها متساوية ويمكن حساب الاحتمال باستخدام التباديل والتوافيق.

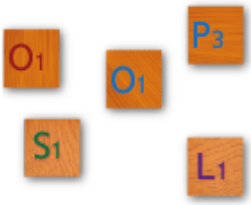
تمرين موجّه

2. تتكون بطاقة تعريف أحد الطلاب من 4 أرقام مختارة من بين 10 أرقام محتملة من 0 إلى 9. لا يمكن تكرار الأرقام.

A. كم عدد أرقام التعريف المحتملة هنا؟

B. أوجد احتمال أن يكون للبطاقة المولدة عشوائيًا العدد 4213 بالضبط.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



يجب أن تجرّب في اللعبة أن تبتكر كلمةً مستخدمًا مكعبات حروف مختارة عشوائيًا. على فرض أنك اخترت المكعبات الموضحة. إذا اعتبرت أن الحرفين O و O حرفان مميزان، فهناك !5 أو 120 تبديلاً لهذه الحروف.

فيما يلي قائمة بالترتيبات الأربعة المحتملة.

POOLS POOLS SPOOL SPOOL

لاحظ أنه لو لم تكن حروف O ملونة، فسيبدو العديد من تلك الترتيبات متشابهًا. وحيث إن هناك حرفين O يمكن ترتيبهما بطريقتين أو !2، فإن عدد تباديل الحروف O وP وO وL وS يمكن كتابتها بالشكل $\frac{5!}{2!}$.

المفهوم الأساسي التباديل بالتكرار

عدد التباديل المُميزة للأشياء n التي تتكرر فيها الأشياء r_1 مرات، يتكرر الآخر r_2 مرات، وهكذا، هو

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!}.$$

مثال 3 الاحتمالات والتباديل مع التكرار

برنامج ألعاب قدمت إليك الحروف التالية في أحد برامج الألعاب وطُلب منك أن تفككها لتكوين اسم نهر في الولايات المتحدة الأمريكية. إذا حددت تبديلاً لهذه الحروف عشوائيًا، فما احتمال أن تكون تلك الحروف الإجابة الصحيحة وهي نهر MISSISSIPPI؟

الخطوة 1 يوجد 11 حرفًا إجمالاً. يوجد حرف I فيها 4 مرات، ويوجد حرف S 4 مرات، وحرف P يوجد 2 مرة. إذًا، فعدد التباديل المميزة لهذه الحروف هو

$$\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{39,916,800}{1152} = 34,650.$$ استخدم حاسبة.

الخطوة 2 يوجد ترتيب واحد مفضل MISSISSIPPI.

الخطوة 3 احتمال نطق تباديل هذه الحروف المختارة عشوائيًا بطريقة Mississippi هي $\frac{1}{34,650}$.

تمرين موجّه

3. أرقام الهاتف ما احتمالات أن يكون رقم هاتف مكونًا من 7 أرقام هي 5 و1 و6 و5 و2 و1 و5 مرتبًا بطريقة 5210-550؟

الربط بالحياة اليومية

ابتكر برنامج لعبة *Price is Right* عام 1956 وهو البرنامج الذي استمر لأطول فترة.

المصدر: IMDB

لقد درست حتى الآن الأشياء التي تُرتب ترتيبًا خطيًا. لاحظ أنه عند ترتيب البهارات أدناه في خط مستقيم، فإن تحريك كل نوع منها حركة واحدة إلى اليمين يُنتج تبديلاً مختلفًا – الكاري هو الأول بدلاً من الملح. هناك !5 تباديل مميزة لهذه البهارات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

نصيحة دراسية

قلب الدائرة إذا بدا الشكل الدائري على نفس هيئته عند قلبه، كمثل حلقة مفاتيح مفرغة، فيجب قسمة عدد التباديل على 2.

في **التبديل الدائري**، يتم ترتيب الأشياء في دائرة أو حلقة، ويمكنك ملاحظة ترتيبات البهارات عند وضعها في مائدة دوارة. لاحظ أن تدوير المائدة الدوارة موضع واحد في اتجاه عقارب الساعة *لن* ينتج تبديلاً مختلفًا – لن يتغير ترتيب البهارات بالنسبة لبعضها البعض.

بما أن 5 لفات للمائدة الدوارة ينتج عنها التباديل نفسها، فإن عدد التباديل المميزة للمائدة الدوارة هو $\frac{1}{5}$ من إجمالي عدد الترتيبات عند وضع البهارات في خط مستقيم.

$\frac{1}{5} \cdot 5! = \frac{5 \cdot 4!}{5}$ أو $4!$ حيث $(5 - 1)!$

المفهوم الأساسي التباديل الدائرية

عدد التباديل المميزة لعدد n من الأشياء مرتبة في شكل دائرة بلا نقطة مرجعية ثابتة هو

$\frac{n!}{n}$ أو $(n - 1)!$.

إذا كانت الأشياء n مرتبة بالنسبة إلى نقطة مرجعية ثابتة، فإن الترتيبات تعامل كترتيبات خطية، مما يجعل عدد تباديل $n!$.

مثال 4 الاحتمالات والتباديل الدائرية

أوجد الاحتمالات الموضحة، واشرح استنتاجك.

a. المجوهرات إذا كانت الحلي الستة الموضحة على السوار مرتبة ترتيبًا عشوائيًا، فما احتمال أن ينتج الترتيب الموضح

نظرًا لعدم وجود نقطة مرجعية ثابتة، فهذا تبديل دائري. إذًا، فهناك $(1 - 6)!$ أو $5!$ تباديل مميزة للحلي. ومن ثم، فإن احتمال الحصول على الترتيب الموضح نفسه هي $\frac{1}{5!}$ أو $\frac{1}{120}$.

b. الغداء إذا كنت تعد المقاعد لمجموعة من أربعة أشخاص حول مائدة مستديرة. يوجد أحد المقاعد بجانب نافذة. إذا جلس من سيتناولون الطعام بترتيب عشوائي، فما احتمال جلوس الشخص الذي سيدفع الفاتورة بجانب النافذة؟

بما أن الأشخاص سيجلسون حول مستديرة ذات نقطة مرجعية ثابتة، فهذا تبديل خطي. إذًا هناك $4!$ أو 24 طريقة لجلوس الأشخاص حول المائدة. إن عدد النتائج المفضلة هو عدد التباديل للأشخاص الثلاثة الآخرين مع العلم أن الشخص الذي سيدفع الفاتورة سيجلس بجانب النافذة، $3!$ أو 6.

إذًا، فاحتمال أن يجلس الشخص دافع الفاتورة بجانب النافذة هي $\frac{6}{24}$ أو $\frac{1}{4}$.

مهنة من الحياة اليومية

علماء الإحصاء

يجمع علماء الإحصاء البيانات الإحصائية الخاصة بمختلف الموضوعات، ومن أمثلة ذلك الرياضة والألعاب. ويستخدمون برامج الحاسوب في تحليل تلك البيانات وشرحها وتلخيصها. معظم علماء الإحصاء حاصلون على درجة الماجستير.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين موجّه

4. **كرة القدم** يلتقي أعضاء فريق كرة القدم الأحد عشر معًا قبل المباراة.

A. ما احتمال أن يقف الظهير الأيمن بمين حارس المرمى إذا اجتمع أعضاء الفريق معًا بترتيب عشوائي؟ فسّر استنتاجك.

B. إذا كان الحكم واقفًا خلف التجمع مباشرةً، فما احتمال وقوفه خلف حارس المرمى مباشرةً؟ فسّر استنتاجك.

نصيحة دراسية

التباديل والتوافيق استخدم التباديل عندما يكون ترتيب الأجسام مهمًّا والتوافيق عندما لا يكون الترتيب مهمًّا.

2 الاحتمالات باستخدام التوافيق

التوافيق هي ترتيب الأشياء حيثما لا يكون الترتيب مهمًا. لنفترض أنك تريد وضع 3 من 8 أزواج من الجوارب المختلفة في حقيبة الرحلة، فإن ترتيب اختيار الجوارب ليس مهمًا. ومن ثم فإن 3! أو 6 مجموعات من الجوارب الموضحة أدناه لا يعتبر مهمًا. وبهذا يمكنك استخدام التوافيق لتحديد عدد اختيارات الجوارب المختلفة المحتملة.

توافيق عدد n من العناصر المأخوذة من المجموعة r في كل مرة، أو ${}_nC_r$، يُحسب بقسمة عدد التباديل ${}_nP_r$ على عدد الترتيبات التي تشتمل على العناصر نفسها، $r!$.

المفهوم الأساسي التوافيق

الرموز عدد توافيق n من الأشياء المختلفة عند أخذ r في كل مرة يُرمز إليه بـ ${}_nC_r$ ويتم الحصول عليه من $${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}.$$

مثال عدد توافيق 8 أشياء مأخوذة 3 في كل مرة هو $${}_8C_3 = \frac{8!}{(8-3)!\,3!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 6} = 56.$$

مثال 5 الاحتمالات و ${}_nC_r$

الدعوات **يمكن أن تدعو إيمان في حفل زفافها 6 صديقات من صديقاتها العشرين للذهاب معها إلى حديقة الملاهي. إذا اختارت أن تدعو صديقاتها عشوائيًا، فما احتمال اختيار صديقاتها أسماء وأماني وأمل وأمنة وبثينة وبدرية؟**

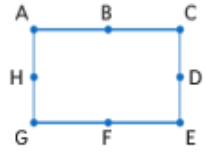
الخطوة 1 بما أن ترتيب اختيار الصديقات غير مهم، فإن عدد النتائج المحتملة في الفضاء العيني هو نفسه عدد التوافيق لعشرين شخصًا مأخوذ منهم 6 أشخاص في كل مرة، ${}_{20}C_6$.

$${}_{20}C_6 = \frac{20!}{(20-6)!\,6!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14!}{14! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 38{,}760$$

الخطوة 2 يوجد نتيجة واحدة مفضلة – أن يُختار الطلاب الستة المذكورون أعلاه. وترتيب اختيارهم ليس مهمًا.

الخطوة 1 إذًا فاحتمال اختيار هؤلاء الأصدقاء الستة هي $\frac{1}{38{,}760}$.

تمرين موجّه



5. **الهندسة** إذا كانت النقاط الثلاث المختارة بشكل عشوائي من هذه الأسماء في المستطيل الموضح، فما احتمال وقوعها جميعًا على القطعة المستقيمة نفسها؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

مثال 1

1. **الهندسة** طُلب من خمسة طلاب أن يختاروا مضلعًا عشوائيًا من المجموعة الموضحة أدناه ويعطوه اسمًا.

ما احتمال أن يختار الطالبان الأولان المثلث الشكل الرباعي، بهذا الترتيب؟

مثال 2

2. **المسرحية** يمثل طلاب مدرسة ثانوية مسرحية *A Raisin in the Sun* بمشاركة كل طالب في الصف الأول الثانوي في مادة اللغة الإنجليزية من بين 18 طالبًا. إذا اختير ثلاثة من فريق العمل عشوائيًا، فما احتمال اختيار إبراهيم للإضاءة، واختيار أحمد لإلقاء كلمات الشكر، واختيار إبراهيم لأداء دور إسماعيل؟

مثال 3

3. **القيادة** ما احتمال أن تكون لوحة الرخصة CFF3133 إذا كان فيها حروف C وF وF وأرقام 3 و 3 و 3 و 1؟

مثال 4

4. **الكيمياء** ينبغي في معمل الكيمياء أن تختبر ست عينات مرتبة عشوائيًا في حلقة دائرية.

a. ما احتمال إنتاج الترتيب الموضح على اليسار؟

b. ما مدى احتمال أن تكون أنبوبة الاختبار 2 في موضع علوي متوسط؟

مثال 5

5. اشترك خمسمئة صبي، من بينهم أسامة وأيمن، في سحب للفوز بتذكرتي مباراة كرة قدم. ما احتمال أن يفوز أسامة وأيمن بهاتين التذكرتين؟

التدريب وحل المسائل

مثال 1

6. **حفلة موسيقية** ستذهب همسة وحليمة إلى حفلة موسيقية مع النادي الرئيسي في مدرستهم الثانوية. إذا اختارت الفتاتان مقعدًا في الصف الموصف أدناه، فما احتمال أن تجلس حليمة في المقعد C11 وهمسة في المقعد C12؟

C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15	C16	C17

7. **المعرض** اشترى كل من بدر وبلال تذكرة سباق من معرض المدينة. إذا بيعت 50 تذكرة عشوائيًا، فما احتمال أن يشتري بدر التذكرة رقم 14 ويشتري بلال التذكرة رقم 23؟

مثال 2

8. **تمثيل النماذج** يبين الجدول من وصلوا إلى الدور النهائي في مسابقة تمارين الحركات الأرضية، وسيتم اختيار ترتيب مشاركتهم عشوائيًا.

المؤهلون للتصفيات النهائية في تمارين الحركات الأرضية
حمدة
حورية
خديجة
خولة
رنا
ريهام
سالي

a. ما احتمال أن تكون خديجة وخولة وحورية أول ثلاث لاعبات جمباز يؤدين العرض بأي ترتيب؟

b. ما احتمال أن تكون خديجة هي الأولى وخولة الثانية وحورية الثالثة؟

9. **وظائف** يخصص متجر لموظفيه أرقام تعريف خاصة بالعمل عشوائيًا من أجل تتبع إنتاجية كل موظف. ويتكون كل عدد من 5 أرقام من 1 إلى 9. إذا كانت الأعداد لا تتكرر، فأوجد احتمال تكوين 25938 عشوائيًا.

10. **مجموعات** اختير شخصان عشوائيًا من مجموعة تتكون من عشرة أشخاص. ما احتمال أن يُختار جاسم أولاً وجمال ثانيًا؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3

11. **المغناطيسات** اشترى حرب بعض المغناطيسات على شكل حروف ليرتبها ويكون منها كلمات على ثلاجته. إذا اختار عشوائيًا تبديل الحروف الموضح أدناه، فما احتمال أن يكون كلمة BASKETBALL؟

12. **الرموز البريدية** ما احتمال أن يكون الرمز البريدي المولد عشوائيًا من الأرقام 3 و7 و 3 و 9 و 5 و 7 و 2 و 3 هو 39372؟

مثال 4

13. **المجموعات** ترتب سمية الطاولات عشوائيًا في دوائر لاستخدامها في أنشطة المجموعة. إذا كانت هناك 7 طاولات في الدائرة، فما احتمال أن تجلس سمية في الطاولة الأقرب إلى الباب؟

14. **مدينة الملاهي** ذهبت سنديّة لمدينة الملاهي برفقة صديقاتها وركبوا لعبةً تنتظم فيها المقاعد – التي على شكل سلال – في دائرة. إذا كانت هناك 8 مقاعد، فما احتمال أن تجلس سنديّة في الكرسي الأبعد عن مدخل اللعبة؟

مثال 5

15. **التصوير** إذا كنت تضع 24 صورة بشكل عشوائي داخل ألبوم الصور وكان بإمكانك أن تضع أربع صور في الصفحة الأولى، فما احتمال اختيارك الصور على جهة اليسار؟

16. **رحلة برية** تقوم سهى برحلة برية في الولايات المتحدة وستختار 15 مدينة لتقضي فيها ليلة واحدة. إذا سحبت عشوائيًا 3 منشورات دعائية للمدن من كومة بها 15 منشورًا دعائيًا، فما احتمال أن تكون نيويورك وبوسطن وسان فرنسيسكو؟

17. **الاستنتاج المنطقي** استخدم الشكل الموضح أدناه، وعلى فرض ترتيب الكرات عشوائيًا.

a. في صف مكون من 8 كرات بلياردو، ما احتمال أن تقع الكرة الملساء 2 والكرة المخططة 11 الأول والثاني من جهة اليسار؟

b. ما احتمال أنه إذا تم خلط 8 كرات البلياردو بشكل عشوائي، نتج في النهاية الترتيب الموضح؟

c. ما احتمال أن يكون صف من كرات 7 مع صف من كرات 8، وثلاث كرات 9، وكرة واحدة 6 ؛ حيث تقع ثلاث كرات 8 على يسار كرة 6 والكرات 9 الثلاث على اليمين؟

d. إذا أعيد ترتيب الكرات بشكل عشوائي وكونت دائرة، فما احتمال أن تكون الكرة 6 مجاورة الكرة 7؟

18. كم عدد الخطوط المحددة بالنقاط العشر المختارة عشوائيًا، والتي منها رقم 3 على خط واحد؟ فسّر طريقة الحساب.

19. افترض اختيار 7 نقاط على دائرة بشكل عشوائي، كما هو موضح على اليسار.

a. باستخدام الحروف الإنجليزية من A إلى E، كم عدد الطرق التي يمكن تسمية النقاط على الدائرة بها؟

b. إذا تثبتت نقطة واحدة على الدائرة، فما عدد الترتيبات المحتملة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

20. **ألعاب الملاهي** يوجد في لعبة الدوّارة 7 أحصنة ومقعد يسع شخصين. ولا يتحرك أحد الأحصنة لأعلى أو لأسفل.

a. كم عدد الطرق التي يمكن بها ملء مقاعد الدوّارة عشوائيًا بتسعة أشخاص؟

b. إذا امتلأت الدوّارة عشوائيًا، فما احتمال جلوسك أنت وصديقك على المقعد المزدوج؟

c. إذا امتلأت الدوّارة بستة إلى تسعة أشخاص بشكل عشوائي وكانت أعمارهم دون ثمانية أعوام، فما احتمال انتهاء الحال بالشخص الأصغر من 8 سنوات على الحصان الذي لا يتحرك لأعلى أو أسفل؟

21. **التراخيص** وُضعت كاميرا أعلى إشارة المرور لتصوير السيارات التي لا تلتزم بالوقوف عندما تكون الإشارة حمراء. يمكن للضابط أن يرى في إحدى الصور غير الواضحة أن الحرف الأول في لوحة الترخيص كان Q، وكان الحرف الثاني M أو N، و كان الحرف الثالث B، أو P، أو D. وكان الرقم الأول 0. ولكن لم يكن الرقمان الآخران واضحين. كم لوحة ترخيص تناسب هذا الوصف؟

22. **التمثيلات المتعددة** ستستكشف التباديل في هذه المسألة.

a. **عددي** اختر عشوائيًا ثلاثة أعداد من 0 إلى 9. أوجد التباديل المحتملة لهذه الأعداد الصحيحة الثلاثة.

b. **جدوليّ** كرر الجزء a لأربع مجموعات إضافية مكونة من ثلاثة أعداد صحيحة. وستستخدم بعض الأعداد أكثر من مرة. انسخ الجدول الموضح أدناه وأكمله.

أعداد صحيحة	التباديل	متوسط التباديل	متوسط التباديل / 37
1, 4, 7	147, 174, 417, 471, 714, 741	444	12

c. **لفظي** خمن متوسط قيمة تباديل الأعداد الثلاثة بين 0 و 9.

d. **رمزي** إذا كانت الأعداد الثلاثة هي x و y و z فهل يمكن كتابة معادلة للحصول على متوسط A من تباديل الأعداد؟ إذا كانت الإجابة نعم، فاكتب المعادلة. وإذا كانت الإجابة لا، ففسّر لم لا يمكن ذلك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

23. **التحدي** هناك 15 فتاة عمرهن أكبر من عشرين عامًا، و 15 فتاة عمرهن أصغر من عشرين عامًا اشتركن في سحب على أربع تذاكر سينما مجانية. ما احتمال أن تفوز الفتيات الأصغر من عشرين عامًا بالتذاكر الأربع؟

24. **التحدي** ادعى طالب أن التباديل والتوافيق مرتبطة بـ $r! \cdot {}_nC_r = {}_nP_r$ استخدم الجبر لبيان صحة ذلك. ثم فسّر سبب اختلاف ${}_nP_r$ و ${}_nC_r$ حسب المعامل $n!$.

25. **مسألة غير محددة الإجابة** صف موقفًا يمكن فيه الحصول على التبديل من $\frac{1}{{}_7C_3}$

26. **الفرضيات** هل العبارة التالية صحيحة *أحيانًا*، *أم دائمًا*، أم غير صحيحة *أبدًا*؟ فسّر.

$${}_nP_r = {}_nC_r$$

27. **البرهان** برّهن أن ${}_nC_n - r = {}_nC_r$.

28. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين التباديل والتوافيق.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

29. التباديل يقف دائمًا أربعة من الفريق الموسيقي، فتاتان وصبيان، في صف أثناء العزف. ما احتمال أن تقف فتاة على طرفي الصف إذا اصطفوا عشوائيًا؟

A $\frac{1}{24}$
B $\frac{1}{12}$
C $\frac{1}{6}$
D $\frac{1}{2}$

30. إجابة قصيرة إذا اخترت تباديل الحروف الموضحة أدناه عشوائيًا، فما احتمال تكوين كلمة GEOMETRY؟

31. الجبر يبيع اتحاد الطلاب المشروبات الغازية في مباريات كرة السلة، وسعر الواحدة AED 1.50. إذا دفع الاتحاد AED 75 لتأجير طاولة البيع، فكم مشروبًا غازيًا سيبيعون لتحقيق أرباح قيمتها AED 250؟

F 116
G 117
H 167
J 217

32. SAT/ACT تساوي نسبة 12:9 نسبة $\frac{1}{3}$ إلى

A $\frac{1}{4}$
B 1
C $\frac{5}{4}$
D 2
E 4

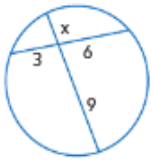
مراجعة شاملة

33. التسوق يتوفر المعطف النسائي في القياسات 4، أو 6، أو 8، أو 10 وبالألوان الأسود والبني والرمادي والكاكاوي. كم معطفًا مختلفًا يمكن اختياره؟ (الدرس 1-10)

34. يوجد منشوران متشابهان مساحة سطحيهما $256\ cm^2$ و $324\ cm^2$. ما نسبة ارتفاع المنشور الصغير إلى ارتفاع المنشور الكبير؟

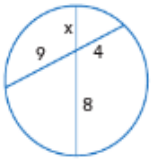
أوجد x. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

35.



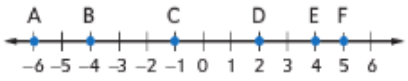
36.

37.



مراجعة المهارات

استخدم خط الأعداد في إيجاد كل قياس.



38. DF
39. AE
40. EF
41. BD
42. AC
43. CF

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الدرس 10-3

الاحتمالات الهندسية

السابق
- أوجدت احتمالات الأحداث البسيطة.

الحالي
1. إيجاد الاحتمالات باستخدام الطول.
2. إيجاد الاحتمالات باستخدام المساحة.

لماذا؟
- تهدف لعبة المهرجان الشعبي الموضحة إلى تجميع النقاط من خلال دحرجة كرة على منحدر، وعبر عدة مساحات دائرة مختلفة. وتُعين قيمة النقطة في كل مساحة بحسب احتمال قيام الشخص بإسقاط الكرة في تلك المساحة.

المفردات الجديدة
الاحتمال الهندسي
geometric probability

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

1 الاحتمال باستخدام الطول

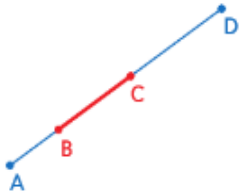
تعتمد احتمال الفوز في لعبة المهرجان على مساحة الهدف. وتسمى الاحتمال التي تنطوي على قياس هندسي، مثل الطول أو المساحة، باسم **الاحتمال الهندسي**.

المفهوم الأساسي نسبة احتمال الطول

الشرح

إذا كانت القطعة المستقيمة (1) تحتوي على قطعة أخرى (2) ونقطة على القطعة (1) يتم اختيارها بشكل عشوائي، فإن احتمال وجود النقطة على القطعة (2) هي

$$\frac{\text{طول القطعة (2)}}{\text{طول القطعة (1)}}$$

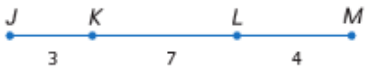


مثال

إذا كانت النقطة E الواقعة على $\overline{AD}$ قد اختيرت عشوائيًا، فإن $P(E \text{ تقع على } \overline{BC}) = \frac{BC}{AD}$.

مثال 1 استخدام الأطوال في إيجاد الاحتمالات الهندسية

النقطة X مختارة عشوائيًا على $\overline{JM}$. أوجد احتمال أن X تقع على $\overline{KL}$.



$$P(X \text{ تقع على } \overline{KL}) = \frac{KL}{JM}$$
نسبة احتمال الطول
$$= \frac{7}{14}$$
$JM = 3 + 7 + 4$ و $KL = 7$
$$= \frac{1}{2}, 0.5, = 50\%$$
بسّط.

تمرين موجّه

النقطة X مختارة عشوائيًا على $\overline{JM}$. أوجد احتمال وقوع كل حدث.

1A. $P(X \text{ تقع على } \overline{LM})$

1B. $P(X \text{ تقع على } \overline{KM})$

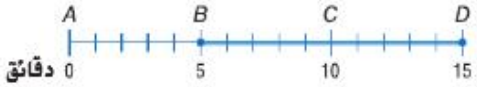
يمكن استخدام الاحتمالات الهندسية في عدة مواقف واقعية تنطوي على عدد لا نهائي من النتائج.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 من الحياة اليومية تمثيل الاحتمالات من الحياة اليومية

النقل استخدم المعلومات الموضحة على اليمين. افترض أنك وصلت إلى مدينة "أديسون" على "ريد لاين" في وقت عشوائي. فما احتمال اضطرارك لانتظار القطار لمدة 5 دقائق أو أكثر؟

يمكن استخدام خط الأعداد في تمثيل نموذج هذا الموقف. بما أن القطارات تصل كل 15 دقيقة، فإن القطار التالي سيصل خلال 15 دقيقة أو أقل. على خط الأعداد الموضح أدناه، يتم تمثيل حدث الانتظار لمدة 15 دقيقة أو أكثر بالرمز $\overline{BD}$.



أوجد احتمال هذا الحدث.

$$P(\text{الانتظار 5 دقائق أو أكثر}) = \frac{BD}{AD}$$ نسبة احتمال الطول

$$= \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$ $AD = 15$ و $BD = 10$

إذًا، فإن احتمال انتظار القطار القادم لمدة 5 دقائق أو أكثر هي $\frac{2}{3}$ أو 67% تقريبًا.

تمرين موجّه

2. الشاي يُعد الشاي المثلج في أحد المطاعم في أوعية سعة 8 لترات. وعندما يصبح مستوى الشاي أقل من 2 لتر، يصبح مذاق الشاي ضعيفًا.

A. ما احتمال أن يكون محتوى الوعاء أقل من لترين عندما يحاول أحدهم صب كوب من الشاي منه؟

B. ما احتمال أن يتراوح مقدار الشاي في الوعاء في أي وقت ما بين لترين إلى 3 لترات؟

الربط بالحياة اليومية

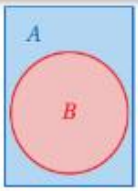
يصل قطار هيئة النقل في شيكاغو أو يغادر المحطة كل 15 دقيقة شأنه شأن قطار أديسون على "ريد لاين".

المصدر: هيئة النقل بشيكاغو

2 الاحتمال باستخدام المساحة

يمكن أن تتضمن الاحتمالات الهندسية المساحة أيضًا. وموضح فيما يلي نسبة حساب الاحتمالات الهندسية المشتملة على مساحة.

المفهوم الأساسي نسبة احتمال المساحة



الشرح إذا تضمنت المنطقة A المنطقة B وتم اختيار النقطة E في المنطقة A عشوائيًا، فإن احتمال أن النقطة E توجد في المنطقة B تساوي $\frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$.

مثال إذا اختيرت النقطة E عشوائيًا في المستطيل A، فإن $P(\text{النقطة } E \text{ توجد في دائرة } B) = \frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$.

عند تحديد الاحتمالات الهندسية بالأهداف، نفترض

- أن الجسم يسقط داخل مساحة الهدف، و
- أن احتمال سقوط الجسم في أي مكان من المنطقة متساوية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام المساحة في إيجاد الاحتمالات الهندسية

القفز بالمظلات بفرض أن لاعب القفز بالمظلات يجب أن يسقط على هدف من ثلاث دوائر متحدة المركز. إذا كان قطر الدائرة المركزية يساوي 2m، وتبعد الدوائر عن بعضها بمسافة 1m، فما احتمال أن يسقط اللاعب في الدائرة الحمراء؟

ينبغي إيجاد مساحة الدائرة الحمراء إلى مساحة الهدف بأكمله.
إن نصف قطر الدائرة الحمراء يساوي 1 m، بينما نصف قطر الهدف بأكمله يساوي 1 + 1 + 1 أو 3 m.

نسبة احتمال المساحة

$$P(\text{ينزل لاعب القفز بالمظلات في الدائرة الحمراء}) = \frac{\text{مساحة الدائرة الحمراء}}{\text{مساحة الهدف}}$$

$A = \pi r^2$

$$= \frac{\pi(1)^2}{\pi(3)^2}$$

بسّط.

$$= \frac{\pi}{9\pi} = \frac{1}{9}$$

احتمال أن ينزل لاعب القفز بالمظلات في الدائرة الحمراء هي $\frac{1}{9}$ أو حوالي 11%.

الربط بالحياة اليومية
يهبط أبطال لعبة القفز بالمظلات عادةً على بعد أقل من 5 cm من مركز الهدف.
المصدر: SkyDiving News

تمرين موجّه

3. **القفز بالمظلات** أوجد كل احتمال باستخدام المثال السابق.

A. P(ينزل لاعب القفز بالمظلات في المنطقة الزرقاء)

B. P(ينزل لاعب القفز بالمظلات في المنطقة البيضاء)

يمكنك أيضًا استخدام قياس الزاوية في إيجاد الاحتمالات الهندسية.
إن نسبة مساحة جزء من الدائرة إلى مساحة الدائرة كلها هي نفسها نسبة جزء من الدائرة المركزية إلى 360.
ستبرهن على ذلك في التدريب 27.

مثال 4 استخدام قياسات الزوايا في إيجاد الاحتمالات الهندسية

استخدم القرص الدوار في إيجاد الاحتمالات في كل مما يلي.

a. P(يتجه المؤشر إلى اللون الأصفر)

قياس الزوايا في المنطقة الصفراء هو 45.

P(المؤشر يسقط على اللون الأصفر) $= \frac{45}{360}$ أو 12.5%

b. P(يتجه المؤشر إلى اللون البنفسجي)

قياس الزوايا في المنطقة البنفسجية هو 105.

P(المؤشر يسقط على اللون البنفسجي) $= \frac{105}{360}$ أو حوالي 29%

c. P(يتجه المؤشر إلى اللون الأحمر أو الأزرق)

مجموع قياسات الزوايا في المنطقتين الحمراء والزرقاء هو 70 + 50 أو 120.

P(لم يسقط المؤشر على اللون الأحمر أو الأزرق) $= \frac{360 - 120}{360}$ أو حوالي 67%

نصيحة دراسية
استخدام التقدير في المثال 4b. مساحة الجزء البنفسجي أقل من $\frac{1}{3}$ أو 33% من القرص الدوار. ومن ثم، فإن الإجابة 29% إجابة معقولة.

تمرين موجّه

4A. P(يتوقف المؤشر على الأزرق)

4B. P(لا يتوقف المؤشر على الأخضر)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **النقطة X مختارة عشوائيًا على $\overline{AD}$ أوجد احتمال وقوع كل حدث.**

1. $P(X$ تقع على $\overline{BD})$

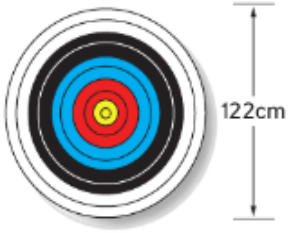
2. $P(X$ تقع على $\overline{BC})$

مثال 2

3. **أوراق اللعب** استُخدمت 43 بطاقة في لعبة أوراق اللعب، وكان من بينها ورقة الجوكر. حصل كل لاعب من أربعة لاعبين على عشر بطاقات ووضعت بقية البطاقات في كومة فوق بعضها. إذا لم يحصل حسام على بطاقة الجوكر، فما احتمال أن يحصل صديقه عليها، وما احتمال أن تكون تلك البطاقة في الكومة؟

المثالان 3 و 4

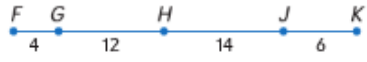
4. **الرماية** يستهدف الرامي هدفًا قطره 122 cm في 10 دوائر متحدة المركز تقل أقطارها بمقدار 12.2 cm كلما اقتربت من المركز. أوجد احتمال أن يصيب الرامي المركز.



5. **الملاحة** فقد أحد المخيمين طريقه في الغابة، ووجه بصلته في اتجاه عشوائي. أوجد احتمال أن يتوجه هذا الشخص في الاتجاه الشمالي N إلى الشمالي الشرقي NE.

التدريب وحل المسائل

مثال 1 **التبرير** **النقطة X اختيرت عشوائيًا على $\overline{FK}$. أوجد احتمال وقوع كل حدث.**



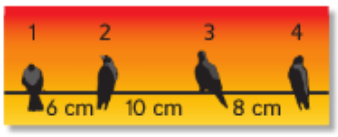
6. $P(X$ تقع على $\overline{FH})$

7. $P(X$ تقع على $\overline{GJ})$

8. $P(X$ تقع على $\overline{FH})$

9. $P(X$ تقع على $\overline{FG})$

10. **الطيور** تجلس أربعة طيور على سلك الهاتف. ما احتمال نزول طائر خامس على نقطة مختارة عشوائيًا بين الطائرين 1 و 4 واستقراره عند نقطة ما بين الطائرين 3 و 4؟

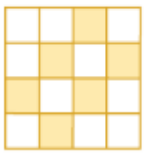


مثال 2

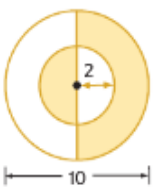
11. **التلفاز** يشاهد حسن التلفاز ورأى إعلان عن أقراص CD يعرف أن صديقه يريد الحصول عليها في عيد ميلاده. إذا أعيد عرض الإعلان في وقت عشوائي بعد فاصل مدته 3 ساعات، فما احتمال أن يرى الإعلان مجددًا أثناء مشاهدة برنامجه الكوميدي المفضل الذي مدته 30 دقيقة وسيعرض في اليوم التالي؟

مثال 3 **أوجد احتمال أن النقطة المختارة عشوائيًا تقع في المنطقة المظللة. وعلى فرض أن الأشكال التي تبدو منتظمة ومتطابقة هي فعلاً منتظمة ومتطابقة.**

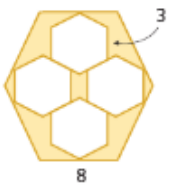
12.



13.



14.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 استخدم القرص الدوار لإيجاد كل احتمال. إذا توقف القرص الدوار عند خط، تتم إدارته مرة أخرى.

15. (يتوقف المؤشر على اللون الأصفر)P
16. (يتوقف المؤشر على اللون الأزرق)P
17. (يتوقف المؤشر على اللون الأخضر)P
18. (يتوقف المؤشر على اللون الأحمر)P
19. (لا يتوقف المؤشر على اللون الأحمر أو الأصفر)P

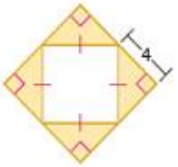
صف حدثًا به احتمال 33% لكل نموذج.

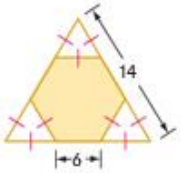
20.

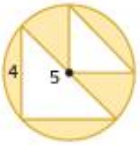
21.

22.

أوجد احتمال وقوع نقطة مختارة بشكل عشوائي داخل المنطقة المظللة.

23. 

24. 

25. 

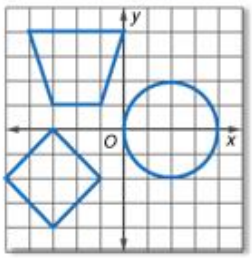
26. **الزراعة** موضح في الصورة تخطيط مزرعة ويمثل كل مربع قطعة أرض. قدّر مساحة كل حقل للإجابة عن كل سؤال.

a. ما مساحة حقلي السبانخ والذرة معًا؟

b. أوجد احتمال استخدام قطعة أرض مختارة عشوائيًا في زراعة فول الصويا.

27. **الجبر** أثبت أن احتمال أن النقطة المختارة عشوائيًا في نقطة ستقع في المنطقة المظللة تساوي $\frac{x}{360}$.

28. **الهندسة الإحداثية** إذا اختيرت نقطة بشكل عشوائي في شبكة الإحداثيات الموضحة على اليسار. فأوجد كل احتمال.



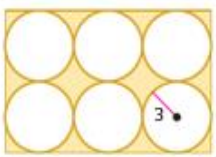
a. (النقطة داخل الدائرة)P

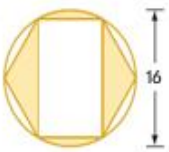
b. (نقطة داخل شبه المنحرف)P

c. (نقطة داخل شبه المنحرف أو المربع أو الدائرة)P

الاستنتاج المنطقي أوجد احتمال وقوع نقطة مختارة عشوائيًّا داخل المنطقة المظللة.

29.

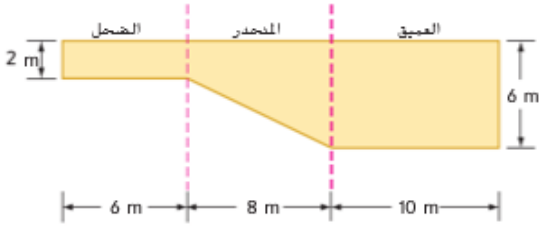
30. 

31. 

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

32. **الهندسة الإحداثية** فكّر في نظام المتباينات، $x \le y$ و $1 \le x \le 6$، و $y \ge 1$.
إذا اختيرت النقطة (x, y) عشوائيًا في النظام، فما احتمال أن $(x-1)^2 + (y-1)^2 \ge 16$؟

33. **الحجم** يعيش دب قطبي في حديقة حيوان محلية بها حوض سباحة أضلاعه موضحة في الشكل التالي. إذا كان عرض حوض السباحة 20 m، فما احتمال أن يكون الدب – الذي يحتمل بالتساوي أن يسبح في أي مكان – في المنطقة المنحدرة؟



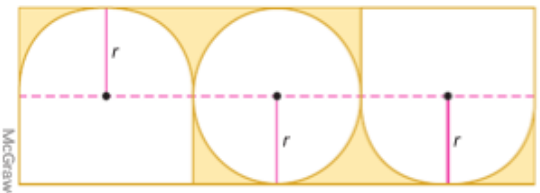
34. **صناعة القرار** تأجلت الرحلة الجوية التي كانت ستستقلها عبير وستتأخر بذلك على المسابقة العلمية الوطنية. وتخطط عبير لاستئجار سيارة من المطار، وتفضل شركة تأجير السيارات A على شركة تأجير السيارات B. تصل السيارة الصغيرة لشركة تأجير السيارات A كل 7 دقائق، بينما تصل السيارة الصغيرة لشركة تأجير السيارات B كل 12 دقيقة.

a. ما احتمال أن تضطر عبير إلى انتظار 5 دقائق أو أقل لرؤية كل سيارة؟ فسّر استنتاجك. (*تلميح*: استخدم نموذج المساحة.)

b. ما احتمال أن تضطر عبير إلى الانتظار لمدة 5 دقائق أو أقل لرؤية إحدى السيارتين؟ فسّر استنتاجك.

c. لا يمكن أن تنتظر عبير أكثر من 5 دقائق دون المخاطرة بالتأخر عن موعد المسابقة. إذا وصلت سيارة الشركة B أولاً، فهل ينبغي أن تنتظر سيارة الشركة A، أم تستقل سيارة الشركة B؟ فسّر استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا



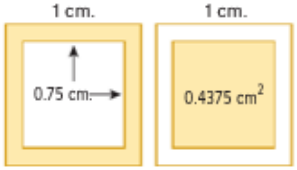
35. **التحدي** أوجد احتمال أن تقع نقطة مختارة عشوائيًا في المنطقة المظللة في الشكل. قرّب إلى أقرب عشرة من نسبة مئوية.

36. **التبرير** مثلث متساوي الساقين محيطه 32 cm. إذا كانت أطوال الأضلاع أعداد صحيحة، فما احتمال أن تكون مساحة المثلث $48\ cm^2$ بالضبط؟ فسّر.

37. **الكتابة في الرياضيات** هل يمكن اعتبار الأحداث الرياضية أحداثًا عشوائية؟ فسّر.

38. **مسألة غير محددة الإجابة** مثّل احتمال 20% لاستخدام ثلاثة أشكال هندسية مختلفة.

39. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في كون احتمال سقوط نقطة مختارة عشوائيًا في المنطقة المظللة من المربعات الموضحة هي نفسها لا تتغير.



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

40. الاحتمال تتضمن دائرة نصف قطرها 3 على مربع طول ضلعه 9. ما احتمال أن نقطة مختارة عشوائيًا داخل المربع تقع في داخل الدائرة؟

A $\frac{1}{9}$ C $\frac{\pi}{9}$

B $\frac{1}{3}$ D $\frac{9}{\pi}$

41. الجبر تساوي مساحة غرفة حمد $x^2 + 8x + 12$ مترًا مربعًا. تغطي عبوات طلاء سعة عشرة لترات مساحة قدرها $x^2 + 6x + 8$ أمتار مربعة. ما التعبير الذي يعطي عدد عبوات الطلاء سعة 10 لترات التي ينبغي أن يشتريها حمد لطلاء غرفته؟

F $\frac{x+6}{x+4}$ H $\frac{x+4}{x+6}$

G $\frac{x-4}{x-6}$ J $\frac{x-4}{x+6}$

42. إجابة موسعة ينقسم القرص الدوار إلى 8 أقسام متساوية.

a. إذا توقف السهم عند أحد الأرقام، فما احتمال توقفه عند رقم 3؟

b. إذا توقف السهم عند أحد الأرقام، فما احتمال توقفه عند رقم فردي؟

43. SAT/ACT يوجد في صندوق 7 كرات زرقاء من الرخام، و 6 كرات حمراء، وكرتين بيضاء، و 3 كرات سوداء. إذا اختيرت كرة رخام عشوائيًا، فما احتمال أن تكون الكرة المختارة حمراء اللون؟

A 0.11 D 0.39

B 0.17 E 0.67

C 0.33

مراجعة شاملة

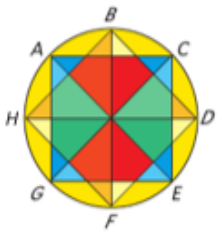
44. حفل زفاف يجلس أربعة أصدقاء على طاولة معًا في حفل زفاف. ما احتمال أن يجلس أحدهم على المقعد الأقرب إلى الباب؟ (الدرس 2-10)

مثّل الفضاء العيني لكل تجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري. (الدرس 1-10)

45. أمام حمدان خيار بأن يتلقى دروس موسيقى على مدار العامين التاليين وأن يعزف على الطبلة أو الجيتار.

46. بإمكان شيخة أن تشتري زوجًا من الأحذية إما مسطحًا وإما بكعب وباللون الأسود أو الأزرق السماوي.

الزجاج المعشق في تصميم لنافذة بالزجاج المعشق، كانت جميع الأقواس الصغيرة حول الدائرة متداخلة. على فرض أن مركز الدائرة هو النقطة O.



47. ما قياس كل من الأقواس الصغيرة؟

48. ما نوع الشكل $\triangle AOC$؟ فسّر.

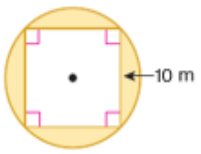
49. ما نوع الشكل متوازي الأضلاع $BDFH$؟ فسّر.

50. ما نوع الشكل متوازي الأضلاع $ACEG$؟ فسّر.

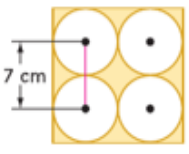
مراجعة المهارات

أوجد مساحة المنطقة المظللة. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة.

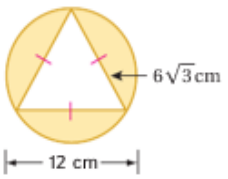
51.



52.



53.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 1-10 إلى 3-10

1. **الغداء** يقدم أحد المتاجر وجبة غداء خاصة تتكون من شطيرة وحساء وحلوى ومشروب بسعر AED 19.99. ويبين الجدول أدناه الاختيارات المتاحة. (الدرس 1-10)

الشطيرة	الحساء	الحلوى	المشروب
سلاطة الدجاج	طماطم	كعك	شاي
لحم بقري	نودلز الدجاج	فطيرة	قهوة
تونة	خضراوات		كولا
شرائح اللحم			كولا خالية من السكر
			حليب

a. كم عدد وجبات الغداء المختلفة التي يمكن تكوينها من المكونات الموضحة في الجدول؟

b. إذا أضيف طبق حساء وقطعتان من الحلوى، فكم وجبة غداء مختلفة يمكن تقديمها؟

2. **الأعلام** كم إشارة مختلفة يمكن تكوينها بخمسة أعلام من أصل 8 أعلام مختلفة الألوان؟ (الدرس 1-10)

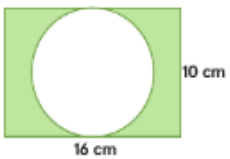
3. **الملابس** لدى غابة قمصان بستة ألوان: الأحمر والأزرق والأصفر والأخضر والنردي والبرتقالي. ويتوفر لديها قمصان من كل لون بأكمام قصيرة وأكمام طويلة. مثّل الفضاء العيني لاختيارات غابة من خلال عمل قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري. (الدرس 1-10)

4. **الهجاء** يوجد في كيس مكعب واحد لكل حرف من حروف كلمة TRAINS. إذا اخترت عشوائيًا تبديلاً من تلك الحروف، فما احتمال أن تكون تلك الحروف كلمة TRAINS؟ (الدرس 2-10)

5. **النكة** لدى خالد 3 جيوب و 4 قطع نقد معدنية مختلفة. بكم طريقة يمكنه وضع قطعة معدنية واحدة في كل جيب؟ (الدرس 2-10)

6. **العملات المعدنية** رُميت عشر عملات معًا في وقت واحد. كم عدد نتائج سقوط قطعة معدنية الثالثة ووجهها لأعلى؟ (الدرس 2-10)

7. أوجد احتمال وقوع نقطة مختارة بشكل عشوائي داخل المنطقة المظللة. (الدرس 3-10)



8. **إجابة موسعة** يُعلق حبل مشدود طوله 320 m بين عمودين. على فرض أن فرصة انقطاع الحبل عند أي مكان متساوية. (الدرس 3-10)

a. حدد احتمال حدوث القطع في الـ 50 m الأولى من الحبل.

b. حدد احتمال حدوث القطع على بعد 20 m من أحد العمودين.

النقطة A مختارة عشوائيًا على $\overline{BE}$. أوجد احتمال كل حدث. (الدرس 3-10)

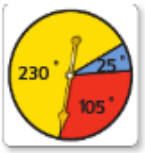
9. $P(A$ تقع على $\overline{CD})$

10. $P(A$ تقع على $\overline{BD})$

11. $P(A$ تقع على $\overline{CE})$

12. $P(A$ تقع على $\overline{DE})$

استخدم القرص الدوار لإيجاد كل احتمال. إذا توقف القرص الدوار عند خط، فسيتم تدويره مرة أخرى. (الدرس 3-10)

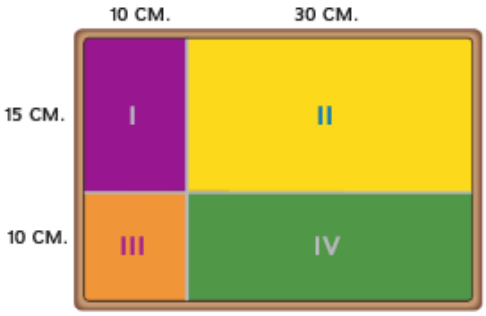


13. P(يتوقف المؤشر عند اللون الأصفر)

14. P(يتوقف المؤشر عند اللون الأزرق)

15. P(يتوقف المؤشر عند اللون الأحمر)

16. **الألعاب** كان هدف اللعبة في المهرجان أن يُرمى سهم صوب لوحة وإصابة منطقة III. (الدرس 3-10)



a. ما احتمال إصابة السهم المنطقة I؟

b. ما احتمال إصابة السهم المنطقة II؟

c. ما احتمال إصابة السهم المنطقة III؟

d. ما احتمال إصابة السهم المنطقة VI؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 10-4

المحاكاة

السابق

- إيجاد الاحتمالات باستخدام القياسات الهندسية.

الحالي

1. تصميم نموذج المحاكاة لتقدير الاحتمال.
2. تلخيص البيانات من خلال نماذج المحاكاة.

لماذا؟

- انطلاقًا من التدريب، يعرف خلف أنه نجح في تسديد 70% من الرميات الحرة، ويريد أن يستخدم هذه المعلومة في توقع عدد الرميات الحرة التي يحتمل أن يسددها في المباريات.

1 تصميم نموذج محاكاة

نموذج الاحتمال هو نموذج في الرياضيات يُستخدم في مطابقة ظاهرة عشوائية. **المحاكاة** هي استخدام نموذج الاحتمال في إعادة تمثيل الموقف مرات ومرات لتقدير احتماليات النتائج المختلفة. ويمكنك اتباع الخطوات التالية في تصميم نموذج المحاكاة.

المفهوم الأساسي تصميم نموذج محاكاة

الخطوة 1 حدد كل نتيجة محتملة واحتمالها النظري.

الخطوة 2 اذكر أي افتراضات.

الخطوة 3 صف نموذج الاحتمال المناسب للموقف.

الخطوة 4 عرّف المحاولة بالنسبة إلى الموقف واذكر عدد المحاولات المفترض إجراؤها.

نموذج الاحتمال الملائم له الاحتمال نفسها في نموذج المحاكاة الذي تحاول توقعه. وتعد الأمثلة الهندسية هي من نماذج الاحتمال العام.

مثال 1 تصميم نموذج محاكاة باستخدام نموذج هندسي

كرة السلة **سدد خلف 70% من رمياته الحرة في الموسم الأخير. صمم نموذج محاكاة يمكن استخدامه في تقدير احتمال الرميات الحرة التي سيسددها في هذا الموسم.**

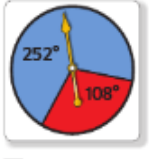
الخطوة 1

النتائج المحتملة	الاحتمال النظري
• يُسدد خلف رمية حرة.	70% ←
• يخفق خلف في تسديد رمية حرة.	30% أو (100 − 70)% →

الخطوة 2 يشتمل نموذج المحاكاة الذي نقدمه على 40 محاولة.

الخطوة 3 يمكن هنا استخدام القرص الدوار المُقسم إلى قسمين، يتكون أحدهما من 70% من مساحة القرص الدوار، ويتكون القسم الآخر من 30%. لابتكار قرص دوار مثل هذا، أوجد قياس الزاوية المركزية لكل قسم.

رمية حرة صائبة	رمية حرة ضائعة
70% من 360° = 252°	30% من 360° = 108°



الخطوة 4 يقوم شخص بتدوير القرص الدوار، وتمثل المحاولة تسديد رمية حرة واحدة. وتمثل المحاولة الناجحة رمية حرة صائبة، والمحاولة الفاشلة رمية حرة ضائعة. وتتكون المحاكاة من 40 محاولة.

المفردات الجديدة

- نموذج الاحتمال probability model
- المحاكاة simulation
- متغير عشوائي random variable
- قيمة التوقع expected value
- قانون الأعداد الكبيرة Law of Large Numbers

ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

استخدام نماذج الرياضيات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين موجّه

1. **المطاعم** يلصق أحد المطاعم أجزاء ألعاب بأكواب الشراب الكبيرة، ويقدم جائزةً للشخص الذي يجمع أجزاء اللعبة الستة جميعًا. صمم نموذج محاكاة مستخدمًا نموذجًا هندسيًا يمكن استخدامه في تقدير عدد الأكواب الكبيرة التي ينبغي أن يشتريها الشخص لتجميع أجزاء اللعبة الستة جميعًا.

نصيحة في حل المسائل

استخدام نموذج المحاكاة

توفر نماذج المحاكاة غالبًا إستراتيجية آمنة وفعالة في حل المسائل في المواقف حيث يكون استخدام الأساليب النظرية في الحل مجازفًا أو خطيرًا أو مستحيلاً. وينبغي أن تشتمل المحاكاة على بيانات يسهل الحصول عليها أكثر من البيانات الفعلية التي تستخدمها في النموذج.

بالإضافة إلى النماذج الهندسية، فإن نموذج المحاكاة يمكن إجراؤه أيضًا باستخدام النرد أو رمي القطعة المعدنية أو جداول الأعداد العشوائية، ومولدات الأعداد العشوائية، مثل المولدات المتوفرة على حاسبات التمثيل البياني.

مثال 2 تصميم نموذج محاكاة باستخدام الأعداد العشوائية

لون العيون وجدت دراسة أجريت على طلاب مدرسة الشرق الثانوية أن 40% من الطلاب عيونهم بنية، وأن 30% عيونهم عسلية، وأن 20% عيونهم زرقاء، وأن 10% عيونهم خضراء. صمم نموذج محاكاة يمكن استخدامه في تقدير احتمال لون عين أحد طلاب المدرسة إذا اختير عشوائيًا.

الخطوة 1 النتائج المحتملة ← الاحتمال النظري

العيون البنية	←	40%
العيون العسلية	←	30%
العيون الزرقاء	←	20%
العيون الخضراء	←	10%

الخطوة 2 نفترض أن لون عيون الطالب سيقع ضمن واحدة من هذه الفئات الأربع.

الخطوة 3 استخدم مولّد الأعداد العشوائية في الحاسبة، عيّن الأعداد الصحيحة من 0 إلى 9 لتمثل بيانات الاحتمال بدقة، ولا يهم الأعداد المختارة فعليًا لتمثيل النتائج.

النتائج	الممثلة بـ
العيون البنية	0, 1, 2, 3
العيون العسلية	4, 5, 6
العيون الزرقاء	7, 8
العيون الخضراء	9

الخطوة 4 تقوم التجربة على اختيار طالب عشوائيًا وتسجيل لون عينه، ويتكون نموذج المحاكاة من 20 تجربة.

نصيحة دراسية

مولد الأعداد العشوائية

لتوليد مجموعة من الأعداد الصحيحة العشوائية في حاسبة التمثيل البياني، اضغط على MATH وحدد randInt في قائمة PRB. ثم أدخل قيم العدد الصحيح لبداية ونهاية النطاق الخاص بك وعدد الأعداد الصحيحة التي تريد استخدامها في كل محاولة.

تمرين موجّه

2. **كرة القدم** سدد خليفة 18% من ركلاته الحرة في الموسم الماضي. صمم نموذج محاكاة مستخدمًا مولد الأعداد العشوائي، بحيث يمكن استخدام ذلك النموذج في تقدير احتمال تسديده للركلة الحرة التالية.

2 تلخيص بيانات المحاكاة

ستحتاج بعد تصميم نموذج المحاكاة إلى تنفيذ المحاكاة وتقرير نتائجها، وينبغي أن يتضمن ذلك تلخيصًا عدديًا وبيانيًا لبيانات المحاكاة، وكذلك تقديرًا لاحتمال النتائج المطلوبة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 تنفيذ نموذج المحاكاة وتلخيص البيانات

كرة السلة راجع المحاكاة في المثال 1. نفذ نموذج المحاكاة، ثم قدم النتائج مستعينًا بالملخصات العددية والبيانية المناسبة.

أنشئ جدول تكرار وسجل النواتج بعد تدوير القرص الدوار 40 مرة.

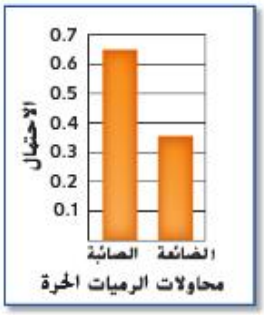
النتيجة	الإحصاء	التكرار
رمية حرة صائبة	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	26
رمية حرة ضائعة	𝍸 𝍸 |||	14
الإجمالي		40

بناءً على بيانات المحاكاة، احسب احتمال تحقيق خلف الرمية الحرة المقبلة.

$$\frac{\text{عدد الرميات الحرة المُسددة}}{\text{عدد محاولات الرميات الحرة}} = \frac{26}{40} = 0.65$$ هذه احتمال تجريبية.

تبلغ احتمال أن يسدد خلف رميته الحرة التالية 0.65 أو 65%. لاحظ أن هذه النسبة قريبة من الاحتمال النظري، وهي 70%. إذًا، الاحتمال التجريبي لإضاعته رميته الحرة التالية تساوي 0.65 − 1 أو 35%.

ارسم تمثيلاً بيانيًّا شريطيًّا لهذه النواتج.



تمرين موجّه

3. لون العيون استخدم حاسبة التمثيل البياني في تنفيذ نموذج المحاكاة في المثال 2، ثم قدم النتائج مستخدمًا الملخصات العددية والبيانية المناسبة.

الربط بالحياة اليومية

يحتفظ مارك برايس بالرقم القياسي لأعلى نسبة في الرمية الحرة للحياة المهنية في الرابطة الوطنية لكرة السلة (NBA) بنسبة 90.4%.

المصدر: الرابطة الوطنية لكرة السلة

المتغير العشوائي هو متغير يمكنه افتراض مجموعة من القيم لكل منها احتمالات ثابتة. ففي تجربة رمي حجري نرد مثلاً، يمكن أن يمثل المتغير العشوائي X مجموع النتائج المحتملة لحجر النرد. ويبين الجدول بعض قيم المتغير X المعينة لنتائج هذه التجربة.

مجموع نتائج رمي حجري النرد.	
النتيجة	القيمة x
(1, 1)	2
(1, 2)	3
(2, 1)	3
(4, 5)	9
(6, 6)	12

قيمة التوقع، المعروفة أيضًا باسم توقع الرياضيات، هي القيمة المتوسطة للمتغير العشوائي الذي يتوقعه الشخص بعد تكرار تجربة أو محاكاة لعدد لانهائي نظريًا. اتبع الخطوات التالية لإيجاد قيمة التوقع $E(X)$ للمتغير العشوائي X.

المفهوم الأساسي حساب قيمة التوقع

الخطوة 1 اضرب قيمة X في احتمال حدوثها.

الخطوة 2 كرر الخطوة 1 لجميع القيم المحتملة من X.

الخطوة 3 أوجد مجموع النواتج.

بما أنه متوسط، فليس بالضرورة أن تكون قيمة التوقع مساوية للقيمة المحتملة للمتغير العشوائي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 حساب قيمة التوقع

الأسهم افترض أنه تم إطلاق سهم إلى هدف معين. وكان نصف قطر الدائرة المركزية 1 cm ويزيد نصف قطر كل دائرة تالية له بمقدار 4 cm عن الدائرة السابقة. وتظهر في الصورة قيمة النقطة في كل منطقة.

a. على فرض أن المتغير العشوائي Y يمثل قيمة النقطة المُعينة لإحدى المناطق على لوحة الأسهم. احسب قيمة التوقع $E(Y)$ من كل ضربة.

احسب أولاً الاحتمالات الهندسية للهبوط في كل منطقة.

المنطقة 4 $= \frac{\pi(4+1)^2 - \pi(1)^2}{\pi(17)^2} = \frac{24}{289}$

المنطقة 5 $= \frac{\pi(1)^2}{\pi(1+4+4+4+4)^2} = \frac{1}{289}$

المنطقة 2 $= \frac{\pi(4+9)^2 - \pi(9)^2}{\pi(17)^2} = \frac{88}{289}$

المنطقة 3 $= \frac{\pi(4+5)^2 - \pi(5)^2}{\pi(17)^2} = \frac{56}{289}$

المنطقة 1 $= \frac{\pi(4+13)^2 - \pi(13)^2}{\pi(17)^2} = \frac{120}{289}$

$E(Y) = 1 \cdot \frac{120}{289} + 2 \cdot \frac{88}{289} + 3 \cdot \frac{56}{289} + 4 \cdot \frac{24}{289} + 5 \cdot \frac{1}{289}$ أو حوالي 1.96

قيمة التوقع لكل رمية حوالي 1.96.

b. صمّم نموذج محاكاة لتقدير متوسط القيمة، أو متوسط نتائج المحاكاة للرمي في هذه اللعبة. كيف تقارن تلك القيمة بقيمة التوقع التي أوجدتها في الجزء a؟

لتمثيل بيانات الاحتمال بدقة.

حدد الأعداد الصحيحة 0-289

منطقة 1 = الأعداد الصحيحة 1-120

منطقة 2 = الأعداد الصحيحة 121-208

منطقة 3 = الأعداد الصحيحة 209-264

منطقة 4 = الأعداد الصحيحة 265-288

منطقة 5 = العدد الصحيح 289

استخدم حاسبة التمثيل البياني لتوليد 50 محاولة لأعداد صحيحة عشوائية من 1 إلى 289. سجّل النتائج في جدول التكرار، ثم احسب متوسط قيمة النتائج.

النتيجة	التكرار
المنطقة 1	16
المنطقة 2	13
المنطقة 3	13
المنطقة 4	8
المنطقة 5	0

متوسط القيمة $= 1 \cdot \frac{16}{50} + 2 \cdot \frac{13}{50} + 3 \cdot \frac{13}{50} + 4 \cdot \frac{8}{50} + 5 \cdot \frac{0}{50} = 2.26$

متوسط القيمة 2.26 أكبر من قيمة التوقع 1.96.

تمرين موجّه

4. النرد إذا رُمي نردان، لنفرض أن المتغير العشوائي X يمثل مجموع النتائج المحتملة.

A. أوجد قيمة التوقع $E(X)$.

B. صمم نموذج محاكاة ونفذه لتقدير متوسط القيمة في هذه التجربة. ما أوجه المقارنة بين هذه القيمة وبين قيمة التوقع التي أوجدتها في الجزء A؟

نصيحة دراسية

الاحتمال الهندسي تذكر أنه عند تحديد الاحتماليات الهندسية بالنسبة للأجسام، نفترض هبوط الجسم داخل المنطقة الهدف ومن المحتمل بالقدر نفسه أيضًا هبوطه في أي مكان داخل المنطقة.

الربط بتاريخ الرياضيات

ياكوب بيرنولي

(1654–1705) كان بيرنولي عالم رياضيات سويسريًا، وكان من الواضح له أنه كلما زادت الملاحظات عن موقف معين، زادت قدرة المرء على توقع النتائج المستقبلية. ولقد أثبت بالبرهان العلمي قانون الأعداد الكبيرة في كتابه *Ars Conjectandi* (Art of Conjecturing)، المنشور سنة 1713.

الاختلاف في متوسط القيمة من نموذج المحاكاة وقيمة التوقع في مثال 4 يوضح **قانون الأعداد الكبيرة**: كلما زاد عدد المحاولات في العملية العشوائية، اقترب متوسط القيمة من قيمة التوقع.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

مثال 1–3

1. **الدرجات** حصلت فاطمة على درجة A في 80% من الاختبارات القصيرة لمادة الأحياء في الفصل الدراسي الأول. صمم نموذج محاكاة ونفذه مستخدمًا النموذج الهندسي لتقدير احتمال حصولها على الدرجة A في الاختبار القصير لمادة الأحياء في الفصل الدراسي الثاني. ثم اعرض النتائج مستخدمًا الملخصات العددية والبيانية المناسبة.

مثال 2–3

2. **اللياقة البدنية** يبين الجدول النسبة المئوية للأعضاء المشاركين في أربع حصص في نادي اللياقة البدنية. صمم نموذج محاكاة ونفذه لتقدير احتمال مشاركة عضو جديد في النادي في كل حصة. واعرض النتائج مستخدمًا الملخصات العددية والبيانية المناسبة.

الصف الدراسي	نسبة التسجيلات %
التايكوندو	45%
اليوجا	30%
السباحة	15%
الملاكمة	10%

مثال 4

3. **ألعاب المهرجانات** الهدف من اللعبة الموضحة هو جمع النقاط باستخدام سهم لفرقعة البالونات. على فرض أن كل سهم سيصيب بالونًا.
   a. احسب قيمة التوقع من كل رمية.
   b. صمّم نموذج محاكاة لتقدير متوسط القيمة لهذه اللعبة.
   c. كيف تقارن قيمة التوقع بمتوسط القيمة؟

التمرين وحل المسائل

مثال 1–3

صمم نموذج محاكاة ونفذه باستخدام نموذج احتمال هندسي. ثم قدم النواتج باستخدام ملخصات عددية وبيانية مناسبة.

4. يبيع مسرح مجتمعي صغير تذاكر مسرحية بأربعة أسعار مختلفة. يعرض الجدول أدناه الأسعار والعدد المقابل لها من التذاكر المتاحة. ما قيمة التوقع لتذكرة مختارة عشوائيًا؟

أسعار التذاكر	
السعر	العدد المتاح
AED 8	40
AED 10	30
AED 15	20
AED 20	10

5. تتكون لعبة من مجموعة بطاقات مكتوب عليها الأعداد 1، أو 2، أو 3، أو 4. يسحب اللاعب بطاقةً من المجموعة في بداية الدورة، ثم يتحرك عدد المساحات حسب العدد المكتوب على البطاقة. يبين الجدول عدد كل نوع من البطاقات في المجموعة. ما قيمة التوقع للعدد المكتوب على بطاقة سُحبت من المجموعة؟

العدد على البطاقة	العدد على البطاقات
1	20
2	15
3	10
4	5

A 1 C 3

B 2 D 4

6. يختار الفائز برنامج الألعاب التليفزيوني مظروفًا من عشرة مظاريف بها جوائز نقدية. يبين الجدول عدد المظاريف التي تشتمل على كل مبلغ نقدي. ما قيمة التوقع للجائزة النقدية؟

المبلغ النقدي	عدد المظاريف
AED 1,000	4
AED 5,000	3
AED 10,000	2
AED 25,000	1

7. يرمز طائر الفواص إلى ولاية مينسوتا. يعرض الجدول أدناه بيانات عن تعداد طائر الفواص في 700 بحيرة عام 1989. إلى أقرب جزء من عشرة، ما عدد طيور الفواص المتوقع في بحيرة مختارة عشوائيًا؟

عدد طيور الفواص	عدد البحيرات
0	365
1	80
2	131
3	41
4	38
5	17
6	14
7	14

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8. يبلغ متوسط ضربات المضرب للاعب بيسبول في ولاية أوريجون 276. إذا ظل متوسط ضربات المضرب ثابتًا، فكم تقريبًا عدد ضربات المضرب التي يتوقع أن يضربها في المرات الخمسين القادمة؟

A 14
C 284
B 22
D 36

9. سددت فتحية 3 رميات حرة من كل 7 رميات حرة في مباريات كرة السلة العشر الأخيرة التي شاركت فيها. فكم تقريبًا عدد الرميات الحرة التي يتوقع أن تسددها خلال المباريات المئة القادمة؟

A 30
C 43
B 37
D 70

10. تختار محطة الإذاعة عشوائيًا 200 متصل لتعرف نوع الموسيقى التي يفضلون. ووجدت أن 55 متصلاً من أصل 200 متصل يفضلون أغاني الروك الحديثة، ويفضل 96 متصلاً أغاني الروك الكلاسيكية، بينما لم يذكر البقية نوعًا معينًا. كم متصلاً من المتصلين الخمسين التالين يتوقع أن يفضلوا موسيقى الروك الحديثة أو موسيقى الروك الكلاسيكية؟

A 14
C 244
B 17
D 38

11. اختارت فوزية عشوائيًا 50 نباتًا في دار الحضانة لفحصها لتحديد هل هي مصابة بحشرة المنّ أم لا. واكتشفت أن 7 نباتات مصابة بهذه الحشرات. إذا كان في دار الحضانة 780 نباتًا، فما العدد المتوقع للنباتات المصابة بحشرة المنّ؟

A 109
C 350
B 111
D 430

12. بينت عينة عشوائية من 100 قميص في أحد المصانع أن هناك فجوات في الخياطة في أربعة قمصان. إذا كانت العينة 1500 قميص، فما العدد المتوقع للقمصان التي بها فجوات مشابهة؟

A 25
C 60
B 40
D 375

13. إذا بينت عينة عشوائية من 6 طائرات حدوث تأخير في 18% من 1,200 رحلة طيران، فكم رحلة طيران من الرحلات الـ 150 التالية يتوقع أن تصل في موعدها؟

A يمكن توقع أن جميع الرحلات الجوية ستصل في موعدها.
B يمكن توقع أنه لن تصل أي رحلة جوية في موعدها.
C يمكن توقع أن 27 من الرحلات الجوية ستصل في موعدها.
D يمكن توقع أن 123 من الرحلات الجوية ستصل في موعدها.

14. استُخدم مولد الأعداد العشوائية في ابتكار سلسلة من الأعداد العشوائية من 0 إلى 9. يبين الجدول التالي النتائج التي تم الحصول عليها.

العدد	التكرار
0	2
1	5
2	4
3	2
4	8
5	11
6	0
7	4
8	6
9	2

ما الاحتمال التجريبي للحصول على عدد زوجي من مولد الأعداد العشوائية؟

A $\frac{23}{44}$
C $\frac{21}{44}$
B $\frac{1}{2}$
D $\frac{5}{11}$

15. **تمثيل النماذج** استخدمت لمياء إحصائياتها من الموسم الأخير لتصمّم نموذج محاكاة باستخدام مولد أعداد عشوائية للتنبؤ بما يتوقع أن تحرزه كلما حصلت على الكرة.

قيم الأعداد الصحيحة	النقاط المحرزة	التكرار
1-14	0	31
15	1	0
16-28	2	17
29-30	3	2

a. استنادًا إلى جدول التكرار، ما الذي افترضته لمياء أن يكون الاحتمال النظري بأن تحرز نقطتين عندما تحصل على الكرة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

b. ما متوسط القيمة لحصول لمياء على الكرة؟ وما قيمة التوقع؟

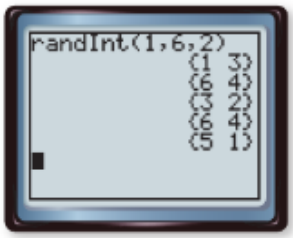
c. هل تتوقع أن تكون بيانات المحاكاة مختلفة؟ إذا كانت كذلك، فسّر ذلك. إذا لم تكن كذلك، فاشرح السبب.

16. **التمثيلات المتعددة** ستستكشف في هذه المسألة قيمة التوقع.

a. **عملي** ارمي حجري نرد 20 مرة وسجل مجموع كل رمية.

b. **عددي** استخدم برنامج توليد الأعداد العشوائي على آلة حاسبة لتوليد 20 زوجًا من الأعداد الصحيحة بين 1 و6. سجّل مجموع كل زوج ثنائي.

c. **جدولي** انسخ الجدول أدناه وأكمله باستخدام نواتجك من الجزأين a و b.



المحاولة	مجموع رمي النرد	مجموع النتائج من برنامج توليد الأعداد العشوائية
1		
2		
...		
20		

d. **بياني** استخدم تمثيلاً بيانيًا شريطيًّا لتمثيل عدد مرات حدوث كل مجموع محتمل في الدورات الخمس الأولى. كرّر العملية للدورات العشر الأولى، ثم نتائج جميع الدورات العشرين.

e. **لفظي** كيف يتغير شكل التمثيل البياني الشريطي مع كل محاولة إضافية؟

f. **تمثيل** بياني مثّل عدد مرات كل مجموع محتمل يحدث مع برنامج توليد الأعداد العشوائي بيانيًّا في صورة تمثيل بياني شريطي.

g. **لفظي** كيف تقارن التمثيلات البيانية لمحاولة النرد بمحاولة العدد العشوائي؟

h. **تحليلي** بناءً على التمثيلات البيانية، في رأيك كيف تكون قيمة التوقع في كل تجربة؟ فسّر استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

17. **الفرضيات** للتجربة ثلاث نتائج محتملة بالتساوي وهي A، و B، و C. هل يمكن استخدام القرص الدوار الموضح في المحاكاة في توقع احتمال النتيجة C؟ فسّر استنتاجك.

18. **التبرير** هل يمكن استخدام رمي القطعة المعدنية *أحيانًا*، أم *دائمًا*، أم *مطلقًا* في محاكاة تجربة لها نتيجتان محتملتان؟ فسّر.

19. **التبرير** عند تصميم نموذج محاكاة فيه تُلقى الأسهم على أهداف معينة، ما الافتراضات التي يجب اتخاذها ولماذا يجب اتخاذها؟

20. **مسألة غير محددة الإجابة** صف تجربةً لم تكن قيمة التوقع فيها نتيجة محتملة. فسّر.

21. **الكتابة في الرياضيات** كيف تختلف قيمة التوقع عن الاحتمال؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

22. الاحتمال ألقت لاميس 3 قطع نقد معدنية في وقت واحد وكررت ذلك 9 مرات أخرى. تظهر نتائجها أدناه، حيث تمثل H وجه الصورة وتمثل T وجه الكتابة. اعتمادًا على نتائج لاميس، ما احتمال أن تقع مجموعة من 3 عملات بحيث تكون ناحية الصورة لأعلى؟

H H H	T T T
H H T	H T T
T T H	T T H
T H T	H T H
H H H	H H T

A 0.1 B 0.2 C 0.3 D 0.9

23. الجبر يجمع سعيد الكتب الكوميدية، ولديه الآن 20 كتابًا في مجموعته، ويضيف إليها 3 كتب كل شهر. كم شهرًا يحتاج سعيد ليصبح عدد الكتب في مجموعته 44 كتابًا؟

F 5 G 6 H 8 J 15

24. إجابة قصيرة صمم سالم نموذج محاكاة لتحديد عدد مرات تدوير اللاعب لعدد أكبر من 4 في حجر النرد في اللعبة اللوحية التي تتكون من 5 دورات. يبين الجدول النتائج التي حصل عليها من 50 محاولة. ما احتمال أن يقوم اللاعب بتدوير عدد أكبر من 4 مرتين أم أكثر في خمس دورات؟

عدد الدورات أكبر من 4	التكرار
0	8
1	15
2	18
3	9
4	0
5	0

25. SAT/ACT إذا كان برطمان يحتوي على 150 حبة فول سوداني و 60 حبة من الكاجو، فما الاحتمال التقريبي لاختيار حبة كاجو من البرطمان عند الاختيار العشوائي؟

A 0.25 C 0.33 E 0.71

B 0.29 D 0.4

مراجعة شاملة

النقطة X مختارة عشوائيًا على $\overline{QT}$. أوجد احتمال كل حدث. (الدرس 3-10)

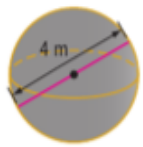
26. $P(X$ تقع على $\overline{QS})$

27. $P(X$ تقع على $\overline{RT})$

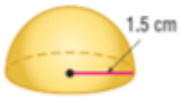
28. **الكتب** تختار منال كتبًا من بين 10 كتب في المكتبة. ما احتمال أن تختار 3 كتب معينة لتلق نظرة عليها من الكتب العشرة الأولى؟ (الدرس 2-10)

أوجد مساحة سطح كل شكل. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

29.



30.



31.

مراجعة المهارات

32. الترفيه سُئلت مجموعة مكونة من 150 طالبًا عما يريدون فعله أثناء وقت فراغهم.

a. كم طالبًا يريد الذهاب إلى السينما أو الخروج للتسوق؟

b. ما النشاط الذي ذكره 37 طالبًا؟

c. كم طالبًا *لم* يقل إنه يريد الذهاب إلى السينما؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الدرس 10-5

احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة

السابق

تمكنت من إيجاد احتمالات بسيطة

الحالي

1 إيجاد احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة.

2 إيجاد احتمالات الأحداث علمًا بوقوع أحداث أخرى.

لماذا؟

يُجري طلاب حصة الكيمياء الثمانية عشر لدى المعلمة منى سحبًا لتحديد من سيقدم عرضه أولاً. ويأمل سلطان أن يُختار أولاً ويريد صديقه صالح أن يكون الثاني.

المفردات الجديدة

الحدث المركب
compound event

الأحداث المستقلة
independent events

أحداث غير مستقلة
dependent events

احتمال مشروط
conditional probability

شجرة الاحتمال
probability tree

ممارسات في الرياضيات

التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

استخدام نماذج الرياضيات.

1 الأحداث المستقلة وغير المستقلة

يتكون **الحدث المركب** من حدثين بسيطين أو أكثر. في المثال أعلاه، يُعد اختيار سلطان وصالح لتقديم عرضهم أولاً حدثًا مركبًا، فهو يتكون من حادث اختيار سلطان وحادث اختيار صالح.

ويمكن أن تكون الأحداث المركبة مستقلة أو غير مستقلة.

- الحدثان A و B **مستقلان** إذا كانت احتمال وقوع الحدث A لا تؤثر على احتمال وقوع الحدث B.
- الحدثان A و B **غير مستقلين** إذا كانت احتمال وقوع الحدث A تغير بطريقةٍ ما احتمال وقوع الحدث B.

عند اختيار بعض العناصر من مجموعة من الأشياء، إذا استبدلت العنصر في كل مرة، فإن عملية اختيار العناصر الجديدة هي أحداث مستقلة. وإذا لم تستبدل العنصر في كل مرة، فإن اختيار العناصر الجديدة هي أحداث غير مستقلة.

مثال 1 تحديد الأحداث المستقلة وغير المستقلة

حدد ما إذا كانت الأحداث *مستقلة* أم *غير مستقلة*، ثم فسّر استنتاجك.

a. تم إلقاء قطعة نقد معدنية، ثم أُلقيت قطعة نقد معدنية أخرى.

لم تغير نتيجة إلقاء القطعة نقد المعدنية الأولى بأي شكل احتمال نتيجة إلقاء القطعة المعدنية الثانية. ومن ثم، فإن الحدثين مستقلان.

b. في مثال العرض في الصف الدراسي المذكور أعلاه، تم اختيار اسم طالب واحد ولم تتم إعادته، ثم جرى اختيار اسم طالب ثانٍ.

تتم إزالة اسم الطالب الأول بعد اختياره ولا يمكن إعادة اختياره مجددًا. ويؤثر هذا على احتمال اختيار الشخص الثاني، ومن ثم يقل الفضاء العيني باسم واحد. وهكذا، فإن الحدثين غير *مستقلين*.

تمرين موجّه

1A. أُختيرت بطاقة من مجموعة من البطاقات، ثم أُعيدت إلى مكانها مرة أخرى. وأُختيرت بعدئذٍ بطاقة ثانية.

1B. اختارت ياسمين قميصًا من خزانتها لترتديه يوم الاثنين، ثم اختارت قميصًا مختلفًا لترتديه يوم الثلاثاء.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

على فرض أنه تم رمي قطعة نقد معدنية وتدوير القرص الدوار الموضح. يكون الفضاء العيني لهذه التجربة هو

{(H, B), (H, R), (H, G), (T, B), (T, R), (T, G)}.

باستخدام الفضاء العيني، احتمال الحدث المركب لسقوط قطعة النقد المعدنية على الصورة وتوقف القرص الدوار على اللون الأخضر هو $P(\text{H and G}) = \frac{1}{6}$.

لاحظ أنه يمكن إيجاد الاحتمال ذاته عن طريق ضرب احتمالات كل حدث بسيط.

$$P(\text{H}) = \frac{1}{2} \quad P(\text{G}) = \frac{1}{3} \qquad P(\text{H و G}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

يوضح هذا المثال القاعدة الأولى من قاعدتي ضرب الاحتمالات.

المفهوم الأساسي احتمال وقوع حدثين مستقلين

الشرح احتمال وقوع كلا الحدثين المستقلين هو ناتج ضرب احتمالات كل حدث بمفرده.

الرموز إذا كان الحدثان A و B مستقلين، إذًا

$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B)$.

قراءة في الرياضيات

و حرف العطف **و** هو عنصر رئيسي في المعادلة يشير إلى ضرب الاحتمالات.

ويمكن توسيع نطاق هذه القاعدة على أي عدد من الأحداث.

مثال 2 من الحياة اليومية احتمال وقوع الأحداث المستقلة

النقل مها وصديقاتها ستذهبن إلى حفل موسيقي. كتبت الفتيات أسماءهن في أوراق صغيرة ووضعتها داخل كيس. إذا سحبت الفتاة ورقة صفراء، فستذهب إلى الحفل في سيارة كبيرة، بينما إذا سحبت ورقة زرقاء، فستذهب إلى الحفل في سيارة عادية.

على فرض أن مها سحبت ورقة ولكن لم تعجبها النتيجة، وأعادت الورقة إلى الكيس وسحبت ورقة أخرى. ما احتمال أن تكون الورقة التي ستسحبها زرقاء؟

هذان الحدثان مستقلان، حيث استبدلت مها الورقة التي أخذتها. على فرض أن B تمثل ورقة زرقاء و Y تمثل ورقة صفراء.

السحب 1 السحب 2

$P(B \text{ و } B) = P(B) \cdot P(B)$

$= \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8}$ أو $\frac{9}{64}$

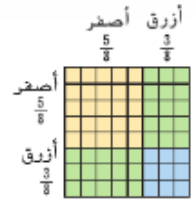
احتمال وقوع الأحداث المستقلة

$P(B) = \frac{3}{8}$

إذًا، فاحتمال أن تسحب مها ورقتين زرقاوين هي $\frac{9}{64}$ أو حوالي 14%.

نصيحة دراسية

استخدام نموذج المساحة يمكنك أيضًا استخدام نموذج المساحة الموضح أدناه لحساب احتمال أن تكون الورقتان زرقاوين. تمثل المنطقة الزرقاء احتمال سحب ورقتين زرقاوين متتاليتين. ومساحة هذه المنطقة تساوي $\frac{9}{64}$ من النموذج بأكمله.



تمرين موجّه

أوجد الاحتمال في كل مما يلي.

2A. تم رمي قطعة نقد معدنية وحجر نرد. ما احتمال أن يظهر على الوجة العلوي لقطعة النقد صورة واستقرار النرد على العدد 6؟

2B. على فرض رمي قطعة النقد أربع مرات. ما احتمال أن تظهر الكتابة على القطع الأربعة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تتناول قاعدة ضرب الاحتمالات الثانية احتمال وقوع حدثين غير مستقلين.

المفهوم الأساسي احتمال وقوع حدثين غير مستقلين

الشرح احتمال وقوع كلا الحدثين غير المستقلين هو ناتج ضرب احتمال وقوع الحدث الأول، ثم احتمال وقوع الحدث الثاني بعد وقوع الحدث الأول بالفعل.

الرموز إذا كان الحدثان A و B غير مستقلين، إذًا

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B|A)$$

انتبه!
الترميز المشروط يجب عدم تفسير الرمز "|" في الترميز $P(B|A)$ على أنه رمز قسمة.

ويمكن توسيع نطاق هذه القاعدة على أي عدد من الأحداث.

يُقرأ الترميز $P(B|A)$ كالتالي: *احتمال وقوع الحدث B علمًا بوقوع الحدث A بالفعل*. ويُسمى هذا **الاحتمال المشروط**.

مثال 3 احتمال وقوع الأحداث غير المستقلة

النقل **بالرجوع إلى المثال 2، على فرض أن مها سحبت ورقةً ولم تعدها. ثم سحبت صديقتها موزة ورقة أخرى، فما احتمال أن تسحب الصديقتان ورقة صفراء؟**

هذان الحدثان غير مستقلين، فلم تعد مها الورقة التي أخذتها.

$$P(Y \text{ and } Y) = P(Y) \cdot P(Y|Y)$$

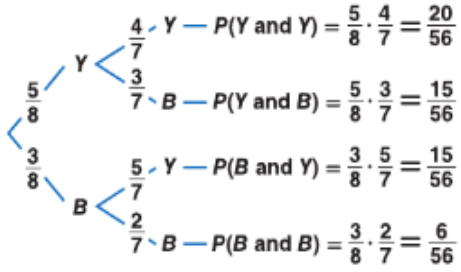
احتمال وقوع الأحداث غير المستقلة

$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \text{ أو } \frac{5}{14}$$

يتبقى بعد اختيار الورقة الصفراء 7 ورقات إجمالاً، 4 منها صفراء.

إذًا، فاحتمال أن تختار الصديقتان ورقة صفراء هي $\frac{5}{14}$ أو حوالي 36%.

التحقق يمكنك استخدام مخطط شجري للاحتمالات يُسمى **شجرة الاحتمالات** للتحقق من هذه النتيجة. احسب احتمال كل حدث بسيط في المرحلة الأولى، وكل احتمال مشروط في المرحلة الثانية. ثم اضرب كل فرع لإيجاد احتمال كل نتيجة.



يجب أن يكون مجموع الاحتمالات 1.

$$\checkmark \frac{20}{56} + \frac{15}{56} + \frac{15}{56} + \frac{6}{56} = \frac{56}{56} = 1$$

تمرين موجّه

3. اختيرت ثلاث بطاقات من مجموعة أوراق اللعب وعددها 52 بطاقة. ما احتمال أن تكون البطاقات الثلاث بشكل الماسة إذا لم يتم استبدال البطاقة الأولى والثانية؟

الربط بالحياة اليومية

توصلت دراسة حديثة إلى أنه مع وجود ثلاثة ركاب مراهقين أو أكثر في السيارة، فإن 85% من الحوادث القاتلة لسيارات يقودها مراهقون نتجت عن خطأ من السائق، ومن بينها 50% تقريبًا نتيجة السرعة الزائدة و 70% تقريبًا تضمنت الحادثة سيارة واحدة.

المصدر: المجلس الوطني للسلامة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 الاحتمال المشروط

بالإضافة إلى استخدام الاحتمال المشروط في إيجاد احتمال وقوع حدثين مستقلين أو أكثر، فيمكن استخدامه أيضًا عند معرفة معلومات إضافية عن حدث ما.

قراءة في الرياضيات
الاحتمال المشروط
$P(\text{فردي} \mid 5)$ تُقرأ كالتالي: *احتمال أن يكون العدد الظاهر 5 علمًا بأن العدد الظاهر فردي.*

على فرض أنه تم رمي حجر النرد وكان العدد فرديًا.
ما احتمال أن يكون هذا العدد هو 5؟

يوجد ثلاثة أعداد فردية يمكن ظهورها. إذًا فقد انخفض الفضاء العيني من {1, 2, 3, 4, 5, 6} إلى {1, 3, 5}. إذًا، فاحتمال أن يكون العدد هو 5 هي $P(5 \mid \text{فردي}) = \frac{1}{3}$.

مثال 4 على الاختبار المعياري الاحتمال المشروط

يعقد طلاب صف المعلمة مايسة مناظرةً. يسحب الطلاب الثمانية المشاركون في المناظرة بطاقات مرقمة بأعداد صحيحة متعاقبة من 1 إلى 8 عشوائيًا.

- **ينضم الطلاب الذين يسحبون أعدادًا فردية إلى الفريق المدافع.**
- **ينضم الطلاب الذين يسحبون أعدادًا زوجية إلى الفريق المعارض.**

إذا كان أيمن في الفريق المعارض، فما احتمال أن يسحب العدد 2؟

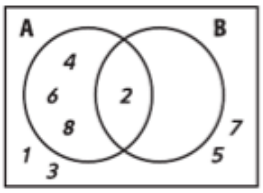
A $\frac{1}{8}$ B $\frac{1}{4}$ C $\frac{3}{8}$ D $\frac{1}{2}$

قراءة فقرة الاختبار

بما أن أيمن في فريق المعارضة، فيجب أن يسحب عددًا زوجيًا. إذًا ينبغي إيجاد احتمال أن يكون العدد المسحوب هو 2، مع العلم بأن العدد المسحوب كان زوجيًا. هذه المسألة مسألة احتمال مشروط.

حَل فقرة الاختبار

على فرض أن A هو حدث سحب عدد زوجي. وعلى فرض أن B هو حدث سحب العدد 2.



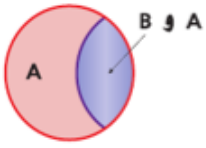
صمم مخطط فن لتمثيل هذا الموقف. يوجد أربعة أعداد زوجية فقط في الفضاء العيني، ويوجد عدد 2 واحد فقط. ومن ثم، فإن $P(B \mid A) = \frac{1}{4}$. الإجابة هي B.

نصيحة عند حل الاختبار
استخدام مخطط فن استخدم مخطط فن لمساعدتك في تصور العلاقة بين نتائج حدثين.

تمرين موجّه

4. عند رمي حجري نرد، فما احتمال أن يظهر على أحدهما العدد 4، مع العلم أن مجموع حجري النرد هو 9؟

F $\frac{1}{6}$ G $\frac{1}{4}$ H $\frac{1}{3}$ J $\frac{1}{2}$



بما أن الاحتمال المشروط يقلل الفضاء العيني، فيمكن تحويل مخطط فن في المثال 4 إلى أبسط صورة كما هو موضح، حيث يمثل تقاطع الحدثين تلك النتائج في A و B. ويدل ذلك على الصيغة التالية.

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(A)}$$

المفهوم الأساسي الاحتمال المشروط

الاحتمال المشروط لـ B مع العلم بأن A تساوي $P(B \mid A) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(A)}$ حيث $P(A) \neq 0$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

مثال 1

حدد ما إذا كانت الأحداث *مستقلة* أو *غير مستقلة*. فسّر.

1. أدى عبد الرحمن اختبار SAT يوم السبت وحصل على 1350 درجة. وأدى اختبار ACT في الأسبوع التالي وحصل على 23 درجة.

2. وصل فريق كرة السلة الذي تلعب له نبيلة إلى الدور النهائي لأربعة فرق، وإذا فازوا، فسيلعبون مباراة البطولة.

مثال 2

3. **أوراق اللعب** اختيرت بطاقة عشوائيًا من مجموعة أوراق اللعب وعددها 52 بطاقة، وتمت إعادة تلك البطاقة واختيار بطاقة أخرى. ما احتمال اختيار البطاقتين الموضحتين على اليسار؟

مثال 3

4. **النقل** يستقل عبد الرحيم الحافلة للوصول إلى منزله بعد العمل، و تتكلف رحلته AED 40. إذا كان معه في جيبه ثلاث أوراق نقدية من فئة 20 درهماً و ورقتين من فئة 5 دراهم و خمسة أوراق من فئة 10 دراهم. فأوجد احتمال أن يسحب من جيبه عشوائيا و على التوالي ورقتين نقديتين من فئة 20 درهماً، على فرض أن فرصة السحب متساوية لجميع الفئات النقدية.

مثال 4

5. **إجابة شبكية** يلعب 10 أصدقاء لعبة الكرة الخادعة كل يوم سبت في متنزه محلي. لاختيار الفرق، يسحبون عشوائيًا بطاقات مرقمة بأعداد صحيحة متعاقبة من 1 إلى 10. ينضم اللاعبون الذين يسحبون الأعداد الفردية إلى الفريق A، والذين يسحبون الأعداد الزوجية إلى الفريق B. ما احتمال أن يسحب لاعب في الفريق B البطاقة رقم 10؟

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 3–1

التبرير **حدد ما إذا كانت الأحداث *مستقلة* أم *غير مستقلة*. ثم أوجد الاحتمال.**

6. في لعبة، رمي حجر النرد على عدد زوجي، ثم لف القرص الدوار المرقم من 1 إلى 5 وتحصل على عدد فردي.

7. تُسحب بطاقة الملك من مجموعة أوراق اللعب التي تضم 52 بطاقة دون إعادتها، ثم تُسحب بعدئذٍ بطاقة ملك ثانية.

8. يوجد في حقيبة 3 كرات زجاجية خضراء و 6 كرات زجاجية زرقاء، تم سحب كرة زجاجية زرقاء ولم تُعد ثانيةً، وسُحبت بعدئذٍ كرة زجاجية زرقاء.

9. عند رمي حجري نرد والحصول على المجموع 5 في كل مرة.

10. **ألعاب** تم تدوير القرص الموضح يسارًا في إحدى الألعاب وتم رمي عملة معدنية. ما احتمال الحصول على عدد زوجي على القرص الدوار وسقوط القطعة المعدنية على الكتابة؟

11. **الهدايا** يعقد صف نجاة حفلة لتبادل الهدايا. سحبت نجاة أولاً، وسحبت صديقتها نجلاء ثانيًا. إذا شارك في السحب 18 طالبةً، فما احتمال أن تسحب نجلاء ونجاة أسماء بعضهما البعض؟

12. **الإجازة** وجد استطلاع رأي أجري في العمل أن 8 من كل 10 موظفين حصلوا على إجازة في الصيف الماضي. إذا تم اختيار أسماء 3 موظفين عشوائيًا، مع إعادة الأسماء مرة أخرى، فما احتمال أن يكون جميع الموظفين الثلاثة قد ذهبوا في إجازة الصيف الماضي؟

13. **الحملات** يبين الجدول عدد كل لون من شارات حملة اتحاد الطلاب التي يجب أن توزعها نسرين. إذا وزعت نسرين الشارات عشوائيًا، فما احتمال أن يكون لون الشارة التي وُزعت أولاً وثانيًا كلاهما أحمر؟

لون الشارة	الكمية
أزرق	20
أبيض	15
أحمر	25
أسود	10

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4

14. تم اختيار كرة زجاجية حمراء عشوائيًا من كيس به كرتان زرقاوان، و 9 كرات زجاجية حمراء ولم يتم استبدالها. ما احتمال أن تكون الكرة الزجاجية الثانية التي سيتم اختيارها خضراء؟

15. تم رمي حجر نرد، إذا كان العدد الظاهر أكبر من 2، فأوجد احتمال أن يكون 6.

16. محيط الشكل الرباعي يساوي 12، وأطوال جميع الأضلاع أعدادًا صحيحة فردية، فما احتمال أن يكون الشكل الرباعي معينًا؟

17. تم تدوير قرص دوار مرقم من 1 إلى 12. أوجد احتمال أن العدد الذي تم تدويره هو 11، علمًا بأن العدد الذي تم تدويره كان عددًا فرديًا.

18. **الصفوف الدراسية** احتمال أن يختار الطالب في مدرسة نيلة مادتي الهندسة واللغة الفرنسية هي 0.064. واحتمال أن يختار الطالب مادة اللغة الفرنسية هي 0.45. ما احتمال أن يختار الطالب مادة الهندسة إذا اختار اللغة الفرنسية؟

19. **التقنية** في مدرسة خالد الثانوية، فاز 43% من الطلاب بمُشغل أقراص CD وفاز 28% بمُشغل أقراص CD ومُشغل MP3. ما احتمال أن يفوز الطالب بمُشغل MP3 إذا كان يملك أيضًا مُشغل CD؟

20. **البرهان** استخدم صيغة لاحتمال وقوع حدثين غير مستقلين (A و B) $P(A)$ لاستخلاص قانون الاحتمال المشروط لوقوع $P(B|A)$.

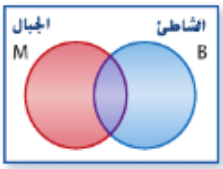
21. **التنس** يحدث الخطأ المزدوج في التنس عندما يفشل لاعب الإرسال في توجيه إرساله دون أن يدوس على خط الإرسال في محاولتين. كانت النسبة المئوية لإرسال نورا الأولى هي 40%، بينما كانت النسبة المئوية لإرسالها الثاني هي 70%.

a. صمم شجرة الاحتمال التي تبين كل نتيجة.

b. ما احتمال أن ترتكب نورا خطأً مزدوجًا؟

c. صمّم نموذج محاكاة باستخدام برنامج مولد أعداد عشوائي يمكن استخدامه لتقدير احتمال ارتكاب نورا لأخطاء مزدوجة في إرسالها التالي.

22. **الإجازة** تم إجراء استطلاع رأي عشوائي لتحديد أين تقضي العائلات إجازاتها. وبينت النتائج أن $P(B) = 0.6$، $P(B \cap M) = 0.2$، واحتمال أن العائلة لم تقض الإجازة في أي وجهة هو 0.1.



a. ما احتمال أن تقضي العائلة إجازتها وسط الجبال؟

b. ما احتمال أن تزور الجبال أيضًا العائلة التي تزور الشاطئ؟

23. **صناعة القرار** كنت تحاول أن تقرر ما إذا كنت ستتوسع في عملك التجاري أم لا. إذا لم تتوسع وظلت الحالة الاقتصادية جيدة، فإنك تتوقع تحقيق أرباح قيمتها 2 مليون AED. وإذا كانت الحالة الاقتصادية سيئة، فإنك تتوقع تحقيق 0.5 مليون AED. وكانت تكلفة التوسع هي 1 مليون AED. ولكن ستكون الأرباح المتوقعة بعد التوسع هي 4 ملايين AED في ظل الحالة الاقتصادية الجيدة و 1 مليون AED في ظل الحالة الاقتصادية السيئة. وتفترض أن فرص الحالة الاقتصادية الجيدة والسيئة هي 30% و 70%، على التوالي. استخدم شجرة الاحتمال لتفسير ما ينبغي فعله.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

24. **الفرضيات** يوجد n أشياء مختلفة في حقيبة. إن احتمال سحب العنصر A ثم العنصر B دون استبدال هي 2.4% تقريبًا. ما قيمة n؟ فسّر.

25. **التبرير** إذا كان $P(A|B)$ يماثل $P(A)$، و $P(B|A)$ يماثل $P(B)$، فماذا يمكن أن يُقال عن العلاقة بين الحدثين A و B؟

26. **مسألة غير محددة الإجابة** صف زوجًا من الأحداث المستقلة وزوجًا من الأحداث غير المستقلة. فسّر استنتاجك.

27. **الكتابة في الرياضيات** يشير تقرير طبي إلى احتمال أن يعاني الشخص من مشكلات القلب إذا كان والده أو والدته يعانيان من مشكلات في القلب. فسّر كيف يمكنك تحديد أن احتمال إصابة الشخص بمشكلات القلب وإصابة والديه بمشكلات القلب حدثان مستقلان.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

28. **الاحتمال** سيتم عشوائيًا تخصيص حصص تربية رياضية للمعلم رياض بمعدل 1 من 6 على مدار اليوم، و 1 من 3 أوقات غداء. ما احتمال أن يحصل على حصة التربية الرياضية الثانية والغداء الأول؟

A $\frac{1}{18}$ B $\frac{1}{9}$ C $\frac{1}{6}$ D $\frac{1}{2}$

29. **الجبر** قام تيمور بتنزيل مقطعي فيديو و 7 أغانٍ على مُشغل الوسائط الرقمية بسعر AED 10.91. وقام محسن بتنزيل 3 مقاطع فيديو و 4 أغانٍ بسعر AED 9.93. ما تكلفة كل فيديو؟

F AED 0.99 H AED 1.42

G AED 1.21 J AED 1.99

30. **إجابة شبكية** يشتمل كيس حلوى الجيلي على 7 قطع حمراء، و 11 قطعة صفراء، و 13 قطعة خضراء. يختار جلال قطعتي جيلي من الكيس دون أن ينظر. ما احتمال اختيار جلال لقطع خضراء ثم قطعة حمراء، مع تقريب الاحتمال كنسبة مئوية إلى أقرب عشرة؟

31. **SAT/ACT** إذا كان احتمال سقوط الأمطار يوم الثلاثاء هو $\frac{4}{13}$، إذًا فما احتمال أنها *لن* تمطر؟

A $\frac{4}{9}$ C $\frac{13}{9}$ E $\frac{13}{4}$

B $\frac{9}{13}$ D $\frac{13}{5}$

مراجعة شاملة

32. **كرة السوفتبول** أخفقت مي في ضرب 10% من ضرباتها في الموسم الماضي. صمم ونفذ نموذج محاكاة لتقدير احتمال إخفاقها في ضرباتها في هذا الموسم. (الدرس 4-10)

استخدم القرص الدوار لإيجاد كل احتمال. ويتم تدوير القرص الدوار مجددًا إذا توقف على مستقيم. (الدرس 3-10)

33. P(المؤشر يتوقف على اللون الأحمر)

34. P(المؤشر يتوقف على اللون الأزرق)

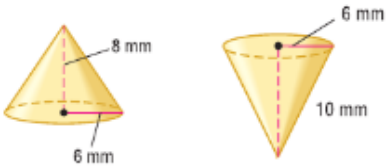
35. P(المؤشر يتوقف على اللون الأخضر)

36. P(المؤشر يتوقف على اللون الأصفر)

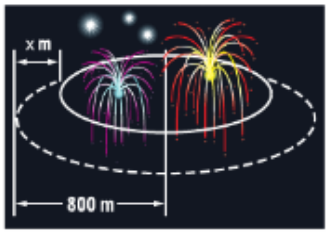
حدد هل كل زوج من المجسمات متشابه، أم متطابقٌ، أم ليس أيًا مما سبق. إذا كانت المجسمات متشابهة، فاذكر عامل المقياس.

37.

38.



39. **الألعاب النارية** أطلقت الألعاب النارية من منصة على النهر. وتوجد دائرة انفجار تنفجر داخلها جميع الألعاب النارية، بينما يجلس المشاهدون خارج دائرة أمان تبعد 800 m عن مركز عرض الألعاب النارية.



a. أوجد محيط دائرة الأمان التقريبي.

b. إذا كانت دائرة الأمان على بُعد 200 إلى 300 m من مركز دائرة الانفجار، فأوجد مدى قيم نصف قطر دائرة الانفجار.

c. أوجد أصغر محيط لدائرة الانفجار وأكبر محيط لها مقربًا إلى أقرب متر.

مراجعة المهارات

أوجد عدد النتائج المحتملة لكل موقف.

40. تختار حورية من بين 5 نكهات آيس كريم مختلفة و 3 إضافات مختلفة.

41. يختار حسن من بين 6 ألوان وتصميمين للمقاعد من أجل دراجته الجبلية الجديدة.

42. محيط المستطيل 12 وأطوال أضلاعه بأعداد صحيحة.

43. رُميت ثلاثة مكعبات أعداد في آن واحد.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 10-6 احتمالات الأحداث المنفصلة

السابق
- قمت بإيجاد احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة.

الحالي
1 إيجاد احتمالات الأحداث المنفصلة والأحداث غير المنفصلة.
2 إيجاد احتمالات المتممات.

لماذا؟
- في مدرسة الأمل الثانوية، يمكن لطلاب السنوات الأولى والثانية وقبل الأخيرة والأخيرة التنافس على رئاسة اتحاد الطلبة. يأمل أيوب في أن يفوز بالانتخابات مرشح من السنة قبل الأخيرة أو الأخيرة. في حين يأمل سعيد في أن يفوز طالب من السنة الأولى أو ذكر، ولكنه يقول: إذا كان الفائز طالب السنة الثانية يوسف، فسأسعد كثيرًا!"

المفردات الجديدة

أحداث منفصلة
mutually exclusive events

متممة
complement

ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

استخدام نماذج الرياضيات.

1 الأحداث المنفصلة

في الدرس 4-10، فحصت الاحتمالات التي تتضمن تقاطع حدثين أو أكثر. وفي هذا الدرس، ستفحص الاحتمالات التي تتضمن اتحاد حدثين أو أكثر.

$P(A \text{ or } B)$ ← أد عنصرين من عناصر ضاء العيني.

$P(A \text{ and } B)$ ← يشير إلى تقاطع عنصرين من عناصر الفضاء العيني.

لإيجاد احتمال وقوع حدث معين *أو* وقوع حدث آخر، يتعين عليك معرفة العلاقة التي تربط بين الحدثين. وإذا لم يكن من الممكن أن يقع الحدثان في الوقت ذاته، فيُقال إنهما **منفصلان**. وهذا يعني أنه لا توجد نتائج مشتركة بين الحدثين.

مثال 1 من الحياة اليومية التعرف على الأحداث المنفصلة

الانتخابات راجع التطبيق أعلاه. **حدد ما إذا كانت الأحداث *منفصلة* أو *غير منفصلة*. واشرح استنتاجك.**

a. فوز طالب في السنة قبل الأخيرة بالانتخابات أو فوز طالب في السنة الأخيرة

هذان الحدثان منفصلان. لا توجد نتائج مشتركة–لا يمكن أن يكون الطالب في السنة قبل الأخيرة والأخيرة معًا.

b. فوز طالب في السنة الأولى بالانتخابات أو فوز طالبة بالانتخابات

هذان الحدثان غير منفصلين. طالبة فتاة وتدرس في السنة الأولى هي نتيجة مشتركة بين الحدثين.

c. سحب بطاقة آس أو سباتي من مجموعة أوراق اللعب.

بما أن بطاقة آس سباتي تمثل الحدثين، فهما ليسا متنافرين.

تمرين موجّه

حدد ما إذا كانت الأحداث *منفصلة* أو *غير منفصلة*. واشرح استنتاجك.

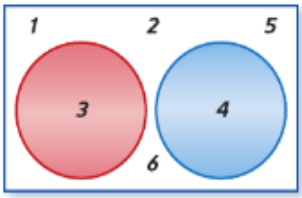
1A. اختيار عدد عشوائيًا من مجموعة أعداد صحيحة من 1 إلى 100 والحصول على عدد قابل للقسمة على 5 أو عدد قابل للقسمة على 10

1B. سحب بطاقة من مجموعة أوراق اللعب والحصول على 5 أو قلب

1C. الحصول على المجموع 6 أو 7 عند رمي حجري نرد

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يعد فحص الفضاء العيني إحدى الطرق المستخدمة في إيجاد احتمال حدثين منفصلين يقعان.



عند رمي حجر نرد، ما احتمال ظهور العدد 3 أو 4؟ من مخطط فن، يمكنك رؤية أن هناك نتيجتين تحققان هذه الحالة، 3 و 4. إذًا،

$$P(3 \text{ and } 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

لاحظ أنه يمكن إيجاد الاحتمال نفسه عن طريق جمع احتمالات كل حدث بسيط.

$$P(3) = \frac{1}{6} \quad P(4) = \frac{1}{6} \quad P(3 \text{ and } 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

يوضح هذا المثال القاعدة الأولى من قاعدتي جمع الاحتمالات.

قراءة في الرياضيات

أو حرف العطف *أو* هو عنصر رئيسي يفيد بوقوع حدث واحد على الأقل. $P(A \text{ أو } B)$ تُقرأ كالتالي *احتمال وقوع الحدث A أو وقوع الحدث B*.

المفهوم الأساسي احتمال وقوع الأحداث المنفصلة

الشرح إذا كان الحدثان A و B منفصلين، فإن احتمال وقوع A أو B هو مجموع احتمالات كل حدث بمفرده.

مثال **إذا كان الحدثان A أو B منفصلين، فإن** $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$.

وبمكن توسيع نطاق هذه القاعدة على أي عدد من الأحداث.

مثال 2 من الحياة اليومية الأحداث المنفصلة

الموسيقى **أعد ناصر قائمة تشغيل تضم مجموعة أغاني من ثلاثة ألبومات مختلفة لمطربه المفضل. إذا جعل مُشغِّل MP3 الخاص به يختار الأغاني من هذه القائمة عشوائيًا، فما احتمال أن تكون الأغنية الأولى التي يتم تشغيلها من الألبوم 1 أو الألبوم 2؟**

هذه أحداث منفصلة؛ حيث لا يمكن أن تكون الأغاني المختارة من الألبومين 1 و 2 معًا.

افترض أن الحدث A_1 يمثل اختيار أغنية من الألبوم 1.
وافترض أن الحدث A_2 يمثل اختيار أغنية من الألبوم 2.
يوجد إجمالي 13 + 12 + 10 أو 35 أغنية.

احتمال وقوع الأحداث المنفصلة

$$P(A_1 \text{ or } A_2) = P(A1) + P(A2)$$

$$P(A1) = \frac{10}{35} \text{ و } P(A2) = \frac{12}{35}$$

$$= \frac{10}{35} + \frac{12}{35}$$

اجمع.

$$= \frac{22}{35}$$

إذًا، احتمال أن تكون الأغنية الأولى التي يتم تشغيلها من الألبوم 1 أو الألبوم 2 هو $\frac{22}{35}$ أو حوالي 63%.

تمرين موجّه

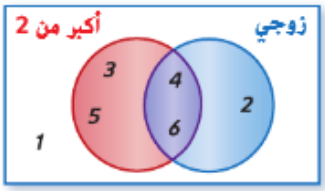
2A. عند رمي حجري نرد. فما احتمال الحصول على عددين متطابقين أو عددين مجموعهما 9؟

2B. ألعاب الكرنفال إذا ربحت لعبة رمي الحلقات في الكرنفال، فإنك تفوز بدمية محشوة. إذا تم اختيار الدمية المحشوة عشوائيًا من بين 15 مهرًا و 16 هرة صغيرة و 14 ضفدعة و 25 ثعبانًا و 10 وحيد القرن، فما احتمال أن يحصل الرابح على مهر أو هرة صغيرة أو وحيد القرن؟

الربط بتاريخ الرياضيات

ليونهارت أويلر (1707-1783) قدّم أويلر نظرية التمثيل البياني عام 1736 في بحث بعنوان "جسور كونيغسبرغ السبعة" *Seven Bridges of Konigsburg* عبارة عن مسألة رياضيات محلولة ومشهورة مستوحاة من مكان وموقف حقيقي. علاوة على ذلك، يمثل قانون أويلر المرتبط بعدد حواف متعدد الوجوه المحدب وعدد الرؤوس والأوجه أساس نظرية التمثيل البياني. راجع "التوسع 6-10".

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



عند رمي حجر نرد، فما احتمال الحصول على عدد أكبر من 2 أو عدد زوجي؟ من مخطط فن، يمكنك رؤية أن هناك 5 أعداد إما أكبر من 2 أو عدد زوجي: 2 و 3 و 4 و 5 و 6. إذًا،

$$P(\text{أكبر من 2 } or \text{ عدد زوجي}) = \frac{5}{6}$$

بما أنه من الممكن ظهور عدد أكبر من 2 وعدد زوجي، فهذه الأحداث غير منفصلة. وفكّر في احتمالات كل حدث بمفرده.

$$P(\text{فردي}) = \frac{3}{6} \qquad P(\text{أكبر من 2}) = \frac{4}{6}$$

إذا تم جمع هذه الاحتمالات، فسيتم حساب احتمال النتيجتين، 4 و 6، مرتين–مرة لكونهما عددين أكبر من 2 ومرة أخرى لكونهما عددين زوجيين. يتعين عليك طرح احتمال هذه النتائج المشتركة.

$$P(\text{أكبر من 2 } or \text{ عدد زوجي}) = P(\text{أكبر من 2}) + P(\text{عدد زوجي}) - P(\text{أكبر من 2 } and \text{ عدد زوجي})$$
$$= \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

وهذا يقودنا إلى قاعدة جمع الاحتمالات الثانية.

المفهوم الأساسي احتمال وقوع الأحداث غير المنفصلة

الشرح إذا كان الحدثان، A و B حدثين غير منفصلين، فإن احتمال وقوع A أو B هو ناتج جمع احتمالات كل منهما مطروحًا منه احتمال وقوع كل من A و B معًا.

الرموز إذا كان الحدثان A و B غير منفصلين، فإن $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$.

مثال 3 من الحياة اليومية الأحداث غير المنفصلة

الفن يوضح الجدول عدد ونوع اللوحات التي رسمتها ياسمين. إذا اختارت لوحة عشوائيًا لتقديمها في مسابقة للرسم، فما احتمال أن تختار لوحة لشخص أو لوحة زيتية؟

لوحات ياسمين			
إعلانية	طبيعة صامتة	لوحة لأشخاص	مناظر طبيعية
ألوان مائية	4	5	3
زيتية	1	3	2
أكريليك	3	2	1
باستيل	1	0	5

بما أن بعض لوحات ياسمين تتضمن كلاً من لوحات لأشخاص ولوحات زيتية، فهذه الأحداث غير منفصلة. استخدم القاعدة لحدثين غير منفصلين. إجمالي عدد اللوحات التي تختار من بينها هو 30 لوحة.

$$P(\text{لوحة لأشخاص } or \text{ زيتية}) = P(\text{لوحة لأشخاص}) + P(\text{زيتية}) - P(\text{لوحة لأشخاص } and \text{ زيتية})$$
$$= \frac{1+3+2}{30} + \frac{5+3+2+0}{30} - \frac{3}{30} \qquad \text{بالتعويض}$$
$$= \frac{6}{30} + \frac{10}{30} - \frac{3}{30} = \frac{13}{30} \qquad \text{بسّط.}$$

احتمال أن تختار ياسمين لوحة لأشخاص أو لوحة زيتية هو $\frac{13}{30}$ أو حوالي 43%.

تمرين موجّه

3. ما احتمال سحب بطاقة الملك أو ديمن من مجموعة أوراق اللعب التي تضم 52 بطاقة؟

الربط بالحياة اليومية
العروض الفنية الخاضعة للتحكيم هي عروض يُطلب فيها من الرسامين إرسال لوحاتهم الفنية وتقرر لجنة من الحكام أي لوحة سيتم عرضها. وقد ظهرت هذه العروض في العقد الأول من القرن التاسع عشر لعرض أعمال الرسامين الحاليين وتثقيف الجمهور.
المصدر: Humanities Web

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 احتمالات المتممات

تتكون **متممة** الحدث A من جميع النتائج في الفضاء العيني غير المضمنة على أنها نتائج للحدث A.

عند رمي حجر نرد، فإن احتمال الحصول على 4 هو $\frac{1}{6}$. ما احتمال عدم الحصول على 4؟ توجد 5 نتائج محتملة لهذا الحدث: 1 أو 2 أو 3 أو 5 أو 6. إذًا $P(\text{ليس } 4) = \frac{5}{6}$. لاحظ أيضًا أن هذا الاحتمال هو $1 - \frac{1}{6}$ أو $1 - P(4)$.

المفهوم الأساسي احتمال متممة الحدث

الشرح احتمال عدم وقوع حدث ما يساوي 1 ناقص احتمال وقوع الحدث.

الرموز بالنسبة للحدث A، $P(\text{ليس } A) = 1 - P(A)$.

مثال 4 الأحداث المتممة

بطاقات لاعبي كرة القدم **اشترى طارق 20 بطاقة لاعبي كرة قدم، آملاً أن يحصل على البطاقة الوحيدة التي تحتوي على لاعبه المفضل. فإذا تم بيع إجمالي 300 بطاقة ولا يوجد بهم سوى بطاقة واحدة عليها اللاعب، فما احتمال ألا يحصل طارق على هذه البطاقة؟**

افترض أن الحدث A يمثل بطاقات طارق التي تحتوي على اللاعب. ثم أوجد احتمال متممة A.

$$P(\text{ليس } A) = 1 - P(A) \quad \text{احتمال المتممة}$$
$$= 1 - \frac{20}{300} \quad \text{بالتعويض}$$
$$= \frac{280}{300} = \frac{14}{15} \quad \text{اطرح وبسّط.}$$

احتمال ألا تحتوي بطاقات طارق على اللاعب هو $\frac{14}{15}$ أو حوالي 93%.

تمرين موجّه

4. إذا كانت فرص تساقط الأمطار هي 70%، فما احتمال ألا تتساقط الأمطار؟

قراءة في الرياضيات

المتمم متمم الحدث A يمكن أن يُكتب أيضًا في صورة A^c.

ملخص المفهوم قواعد الاحتمالات

أنواع الأحداث	الشرح	قاعدة الاحتمال
أحداث مستقلة	نتيجة الحدث الأول لا تؤثر على نتيجة الحدث الثاني.	إذا كان الحدثان A و B مستقلين، فإن $P(A \text{ and } B) = P(A) \cdot P(B)$.
أحداث غير مستقلة	نتيجة الحدث الأول تؤثر على نتيجة الحدث الآخر.	إذا كان الحدثان A و B غير مستقلين، فإن $P(A \text{ and } B) = P(A) \cdot P(B\|A)$.
مشروطة	معلومات إضافية معروفة عن احتمال وقوع حدث.	الاحتمال المشروط لوقوع A علمًا بوقوع B هو $P(A\|B) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(B)}$.
أحداث منفصلة	لا توجد نتائج مشتركة بين الأحداث.	إذا كان الحدثان A أو B منفصلين، فإن $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$.
أحداث غير منفصلة	توجد نتائج مشتركة بين الأحداث.	إذا كان الحدثان A و B غير منفصلين، $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$.
أحداث متممة	تتكون نتائج حدث واحد من كل النتائج في الفضاء العيني التي لا تمثل نتائج الحدث الآخر.	بالنسبة للحدث A، $P(\text{ليس } A) = 1 - P(A)$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 5 من الحياة اليومية التعرف على قواعد الاحتمالات واستخدامها

أحزمة الأمان راجع المعلومات المبينة في الجانب الأيمن. افترض أنه تم اختيار شخصين عشوائيًا من مجموعة تضم 100 قائد سيارة وراكب أمريكي. إذا كانت هذه المجموعة تمثل عينة من السكان، فما احتمال أن يكون واحد على الأقل منهم لا يضع حزام الأمان؟

الفهم أنت تعلم أن 81% من الأمريكيين يستخدمون حزام الأمان.
عبارة واحد على الأقل تعني واحدًا أو أكثر. إذًا، تحتاج إلى إيجاد احتمال أنه إما

- الشخص الأول المختار لا يستخدم حزام الأمان أو
- الشخص الثاني المختار لا يستخدم حزام الأمان أو
- كلا الشخصين المختارين لا يستخدمان حزام الأمان.

التخطيط متممة الحدث الموصوف أعلاه تمثل حدث أن كلا الشخصين المختارين يستخدمان حزام الأمان. أوجد احتمال هذا الحدث، ثم أوجد احتمال متممته.

افترض أن الحدث A يمثل اختيار شخص يستخدم حزام الأمان.

افترض أن الحدث B يمثل اختيار شخص يستخدم حزام الأمان بعد اختيار الشخص الأول بالفعل.

هذان حدثان غير مستقلين؛ حيث إن نتيجة الحدث الأول تؤثر على احتمال نتيجة الحدث الثاني.

الحل احتمال الأحداث غير المستقلة

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

$$P(A) = \frac{0.81(100)}{100} = \frac{81}{100}$$

$$= \frac{81}{100} \cdot \frac{80}{99}$$

اضرب.

$$= \frac{6480}{9900} = \frac{36}{55}$$

احتمال المتممة

$$P[\text{ليس } (A \text{ and } B)] = 1 - P(A \text{ and } B)$$

بالتعويض

$$= 1 - \frac{36}{55}$$

اطرح.

$$= \frac{19}{55}$$

إذًا، احتمال أن راكبًا واحدًا على الأقل لا يستخدم حزام الأمان هو $\frac{19}{55}$ أو حوالي 35%.

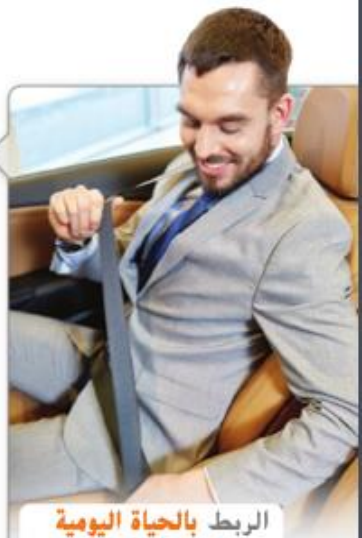
التحقق استخدم التفكير المنطقي للتحقق من صحة إجابتك.
احتمال اختيار شخص واحد من 100 لا يرتدي حزام الأمان هي 19% (81% – 100) أو 19%. ويجب أن يكون احتمال اختيار شخصين من 100 يرتدون حزام الأمان أكبر من 19%. حيث إن 19% < 35%، فالإجابة منطقية.

تمرين موجّه

5. **الهواتف الخلوية** وفقًا لاستبيان إلكتروني، فإن 35% من سائقي السيارات الأمريكيين يستخدمون بانتظام هواتفهم الخلوية أثناء القيادة. وقد تم اختيار ثلاثة أشخاص عشوائيًا من مجموعة تضم 100 قائد سيارة. فما احتمال أن

A. يستخدم على الأقل اثنان منهم هواتفهم الخلوية أثناء القيادة؟

B. يستخدم واحد على الأكثر هاتفه الخلوي أثناء القيادة؟



الربط بالحياة اليومية
ما يقرب من 81% من قادة السيارات الأمريكيين ومن يجلسون على المقعد الأيمن بجوارهم يضعون حزام الأمان.
المصدر: National Highway Traffic Safety Administration

نصيحة دراسية
الكلمات الرئيسية الدالة على الاحتمال عند تحديد نوع الاحتمال الذي تتعامل معه في موقف ما، فعليك البحث عن الكلمات الرئيسية وتفسير معانيها بالشكل الصحيح.
و ← أحداث مستقلة أو غير مستقلة
أو ← منفصلة أو غير منفصلة
ليس ← أحداث متممة
وإذا ← مشروطة
n على الأقل ← *n* أو أكثر
n على الأكثر ← *n* أو أقل

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

التحقق من فهمك

مثال 1 **حدد ما إذا كانت الأحداث *منفصلة* أو *غير منفصلة*. واشرح استنتاجك.**

1. سحب بطاقة من مجموعة أوراق اللعب والحصول على ولد أو سباتي

2. رعاية قطة أو حصان

مثال 2

3. **الوظائف** هيام هي موظفة الشهر المثالية. وجائزتها هي الاختيار عشوائيًا من بين 4 بطاقات هدايا و 6 أقداح قهوة و 7 أسطوانات DVD و 10 أسطوانات مضغوطة و 3 سلال هدايا. ما احتمال أن تحصل على بطاقة هدايا أو قدح قهوة أو أسطوانة مضغوطة؟

مثال 3

4. **النوادي** وفقًا للجدول، ما احتمال أن يكون الطالب في النادي في السنة قبل الأخيرة أو في فريق المناظرة؟

النادي	السنة الأولى	السنة قبل الأخيرة	السنة الأخيرة
التطوعي	12	14	8
المناظرة	2	6	3
الرياضيات	7	4	5
الفرنسية	11	15	13

مثال 4 **حدد احتمال وقوع كل حدث.**

5. إذا كانت فرصة إسقاط الكرات في لعبة البولينج هي 2 من 10، فما احتمال أن تفوّت الضربة؟

6. إذا كانت فرصة الإقامة في مهجع بعينه هي 75%، فما احتمال الإقامة في مهجع آخر؟

مثال 5

7. **حفل التخرج** في صف خالد للطلاب في السنة الأخيرة الذي يضم 100 طالب، حضر 91 طالبًا حفل تخرج الدفعة. إذا تم اختيار طالبين عشوائيًا من الصف بأكمله، فما احتمال عدم حضور واحد على الأقل منهم حفل التخرج؟

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-3 **حدد إذا ما كانت الأحداث *منفصلة* أم *غير منفصلة*. ثم أوجد الاحتمال. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة في المئة، إذا لزم الأمر.**

8. سحب بطاقة من مجموعة أوراق اللعب والحصول على ولد أو ستة

9. رمي حجري نرد والحصول على عددين متطابقين أو ما مجموعه 8

10. اختيار عدد عشوائيًا من مجموعة أعداد صحيحة من 1 إلى 20 والحصول على عدد زوجي أو عدد قابل للقسمة على 3

11. إلقاء قطعة نقد معدنية والحصول على صورة أو كتابة

12. سحب بطاقة آس أو قلب من مجموعة أوراق اللعب التي تضم 52 بطاقة

13. رمي حجري نرد والحصول على ما مجموعه 6 أو 10

14. **الرياضة** يحتوي الجدول على كل البرامج المتاحة في المجمع الرياضي وعدد المشاركين الذين تتراوح أعمارهم بين 16-14. فما احتمال أن يكون سن اللاعب 14 عامًا أو يلعب كرة السلة؟

مجمع جريس لاند الرياضي			
العمر	كرة القدم	كرة القاعدة	كرة السلة
14	28	36	42
15	30	26	33
16	35	41	29

15. **تمثيل النماذج** حان وقت عودة طالبة تبادل إلى إيطاليا، وترغب زميلاتها في الصف في تقديم هدية وداع لها. وقد أجرت المعلمة استطلاعًا للرأي في الصف المكون من 32 طالبة ووجدت أن 10 طالبات اخترن بطاقة و 12 طالبة اخترن قميصًا و 6 اخترن فيديو و 4 اخترن سوارًا. إذا اختارت المعلمة الهدية عشوائيًا، فما احتمال حصول طالبة التبادل على بطاقة أو سوار؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 **حدد احتمال وقوع كل حدث.**

16. رمي حجري نرد وعدم الحصول على 3

17. سحب بطاقة من مجموعة أوراق لعب وعدم الحصول على بطاقة ديمن (ماسة)

18. إلقاء قطعة نقد معدنية وعدم سقوطها على الصورة

19. تدوير قرص دوار مرقم من 1 إلى 8 وعدم توقفه على العدد 5

20. اشترى منصور 20 كتابًا. إذا تم بيع إجمالي 500 كتاب، فما احتمال أن يحصل منصور على كتاب تالف؟

21. **الوظائف** من بين الموظفين الشباب الذين تتراوح أعمارهم بين 18 و 25 عامًا، يتقاضى 71% أجرهم بالساعة. إذا تم اختيار اثنين عشوائيًا من مجموعة تضم 100 موظف شاب، فما احتمال أن يتقاضى واحد بالتحديد أجره بالساعة؟

مثال 5

22. **إعادة التدوير** افترض أن 31% من الأمريكيين يعيدون تدوير المواد. إذا تم اختيار شخصين عشوائيًا من مجموعة تضم 50 أمريكيًا، فما احتمال أن واحدًا منهم على الأكثر يعيد تدوير المواد؟

البطاقات افترض أنك سحبت بطاقة من مجموعة أوراق اللعب التي تضم 52 بطاقة. أوجد احتمال وقوع كل حدث.

23. البطاقة هي العدد 4.

24. البطاقة حمراء اللون.

25. البطاقة هي بطاقة عليها صورة.

26. البطاقة ليست بطاقة عليها صورة.

27. **الموسيقى** أجرت إحدى المدارس استطلاعًا للرأي على 265 طالبًا لمعرفة أنواع الموسيقى التي يرغبون سماعها في حفل المدرسة الراقص. تظهر النتائج في مخطط فن. أوجد كل احتمال.

a. P(الكانتري *or* آر أند بي)

b. P(الروك والكانتري *or* آر أند بي والروك)

c. P (آر أند بي ولكن ليس الروك)

d. P (كل الأنواع الثلاثة)

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

28. **التفكير النقدي** تريد هناء وهدى تحديد احتمال اختيار كرة زجاجية حمراء من كيس يحتوي على 4 كرات زجاجية حمراء و7 زرقاء وكرتين زجاجيتين أرجوانيتين. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

هناء	هدى
$P(R) = \frac{4}{17}$	$P(R) = 1 - \frac{4}{18}$

29. **التحدي** إذا رُميت 3 أحجار نرد، فما احتمال أن تكون نتيجة حجري نرد على الأقل 1 أقل من أو يساوي 4؟ اشرح استنتاجك.

التبرير **حدد ما إذا كانت الأحداث التالية منفصلة. فسّر ذلك.**

30. اختيار رباعي أضلاع في شكل مربع وآخر في شكل مستطيل

31. اختيار مثلث في شكل متساوي أضلاع وآخر في شكل متساوي الزوايا

32. اختيار عدد مركب واختيار عدد طبيعي

33. **مسألة غير محددة الإجابة** صِف حدثين منفصلين وحدثين غير منفصلين.

34. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا لا يكون مجموع احتمالات حدثين منفصلين 1 دائمًا.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

35. الاحتمال يمكن أن يفوز الزبائن في صالون جديد بجوائز في يوم الافتتاح. يعرض الجدول نوع الجوائز وعددها. ما احتمال أن تفوز الزبونة الأولى بجلسة مانيكير أو تدليك؟

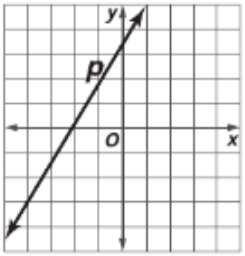
الجائزة	العدد
مانيكير	10
باديكير	6
تدليك	3
جُميل للوجه	1

A 0.075
B 0.35
C 0.5
D 0.65

36. إجابة قصيرة يظهر مكعب مرقم من 1 إلى 6.

إذا تمت رمي المكعب مرة، فما احتمال أن يظهر عدد أقل من 3 أو عدد فردي على الوجه العلوي للمكعب؟

37. الجبر ماذا سيحدث لميل الخط p إذا تم تغييره بحيث يظل التقاطع مع المحور الرأسي y كما هو ويقترب التقاطع مع المحور الأفقي x من نقطة الأصل؟



F سيصبح الميل سالبًا.
G سيصبح الميل صفرًا.
H سيقل الميل.
J سيزيد الميل.

38. SAT/ACT احتمال اختيار حلوى النعناع من كيس حلوى هو 0.25 واحتمال اختيار شوكولاتة هو 0.3. يحتوي الكيس على 60 قطعة حلوى، مع العلم أن أنواع الحلوى الوحيدة الموجودة في الكيس هي النعناع والشوكولاتة والسكر البني مع الزبدة. كم عدد حلوى السكر البني مع الزبدة في الكيس؟

A 25
B 27
C 30
D 33
E 45

مراجعة شاملة

حدد ما إذا كانت الأحداث *مستقلة* أم *غير مستقلة*. ثم أوجد الاحتمال. (الدرس 5-10)

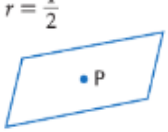
39. تُسحب بطاقة ملك، دون إعادتها، من مجموعة أوراق اللعب التي تضم 52 بطاقة. وبعد ذلك، تُسحب بطاقة ملك ثانية.

40. رُمي نردًا وتحصل على العدد 2. ورُمي نردًا آخر وتحصل على العدد 3.

41. الرياضة توصل استطلاع للرأي في مدرسة ثانوية أن 15% من الرياضيين بالمدرسة يلعبون الكرة الطائرة فقط، و 20% يلعبون كرة القدم الأمريكية فقط، و 30% يلعبون كرة السلة فقط، و 35% يلعبون كرة القدم فقط. صمّم نموذج المحاكاة الذي يمكن استخدامه لتقدير احتمال ممارسة الرياضي كل واحدة من تلك الرياضات. (الدرس 4-10)

انسخ الشكل إضافةً إلى النقطة P. ثم استخدم مسطرةً لرسم صورة الشكل الذي مركزه P بعد تغيير الأبعاد وفق معامل القياس المحدّد r.

42. $r = \frac{1}{2}$



43. $r = 3$

44. $r = \frac{1}{5}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

10-1 تمثيل الفضاءات العينية

11. **الفشار** تبيع دار سينما فشار بالحجم الصغير (S) والوسط (M) والكبير (L) بخيار عدم إضافة زبد (NB) أو بإضافة زبد (B) أو بإضافة الكثير من الزبد (EB). مثّل الفضاء العيني لطلبات الفشار بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.

12. **الأحذية** يتوفر زوج من الأحذية الرجالية بكل المقاسات من 5 إلى 13 بالألوان الكحلي والبني والأسود. كم عدد أزواج الأحذية المختلفة التي يمكن اختيارها؟

مثال 1

تم إلقاء قطعة نقد معدنية ثلاث مرات. مثّل الفضاء العيني لهذه التجربة بعمل قائمة منظمة.

اقرن كل نتيجة محتملة من الرمية الأولى مع النتائج المحتملة من الرمية الثانية والثالثة.

HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT

10-2 الاحتمالات باستخدام التباديل والتوافيق

13. **العشاء** خرجت أسرة مكونة من ثلاث من الفتيات وثلاثة من الصبية لتناول الطعام في الخارج. ولا يحتوي المطعم إلا على الموائد المستديرة. لا يرغب زايد في جلوس أي من الأخوات إلى جواره كما لا ترغب عبير في جلوس أي من إخوانها إلى جوارها. كم عدد الترتيبات الممكنة؟

14. **الحفل** تتكون لجنة الحفل من 10 طلاب. وستختار اللجنة ثلاثة أعضاء بشكل عشوائي. ما احتمال أن يتم اختيار ماجد وفهد وفالح؟

15. **مسابقة** سيتم بشكل عشوائي اختيار 4 طلاب من بين 32 طالبًا لتكوين فريق للدخول في تحدٍ دراسي. فبكم طريقةٍ يمكن القيام بذلك؟

مثال 2

تحتاج هالة إلى وضع مقاعد لأربعة أشخاص حول مائدة مستديرة لإقامة مأدبة طعام بالمشاركة. كم عدد التوافيق الممكنة؟

بما أنه لا توجد نقطة مرجعية ثابتة، فإن هذه تباديل دائرية.

قانون التباديل الدائرية $P_n = (n-1)!$

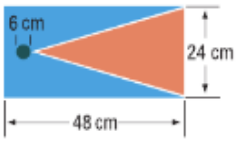
$n = 4$ $P_4 = (4-1)!$

بسّط. $= 3! = 6$

إذًا فهناك 6 طرق لنورا لوضع مقاعد لأربعة أشخاص حول المائدة المستديرة.

10-3 الاحتمالات الهندسية

16. **ألعاب** موضح في الشكل قياسات للعبة أكياس الفول. ما احتمال وقوع كل حدث؟



a. P (فتحة)

b. P (بدون فتحة)

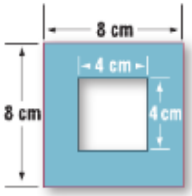
17. **حوض السباحة** يجلس فارس وعيسى وعمر وعلي على جانب حوض السباحة بهذا الترتيب. يبعد فارس عن عيسى بمترين. ويبعد عيسى عن عمر 4 m. ويبعد عمر عن علي 3 m. وانضم إليهم عدنان

a. أوجد مدى احتمال أن يجلس عدنان بين فارس وعيسى.

b. أوجد مدى احتمال أن يجلس عدنان بين عيسى وعلي.

مثال 3

موضح في الشكل لعبة كرنفال.



a. إذا ألقت نسرين 10 أكياس على اللوح، فما مدى احتمال أن يدخل الكيس في الفتحة؟

مساحة الفتحة $= 4 \cdot 4 = 16$

مساحة اللوح $= 48 = 64 - 16 = (8 \cdot 8) - 16$

P (فتحة) $= \frac{16}{64}$ أو حوالي 25%

b. ما احتمال ألا يدخل الكيس في الفتحة؟

P (بدون فتحة) $= \frac{48}{64}$ أو حوالي 75%

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-4 نماذج المحاكاة

صفّ كيف يمكنك استخدام نموذج الاحتمال الهندسي لتصميم نماذج محاكاة لكل مما يلي.

18. **كرة الماء** يسجل عبيد 35% من الأهداف التي يسجلها فريقه في كل مباراة لكرة الماء.

19. **كُتب** طبقًا لاستطلاع رأي، يشتري 30% من الأشخاص كتبهم خلال شهر أكتوبر ونوفمبر وديسمبر، و 22% منهم خلال شهر يناير وفبراير ومارس، و 23% منهم خلال شهر أبريل ومايو ويونيه، و 25% منهم خلال شهر يوليو وأغسطس وسبتمبر.

20. **نفط** تستهلك الولايات المتحدة 17.3 مليون برميل من النفط يوميًا. يتم استخدام 63% منه للنقل، و 4.9% لتوليد الكهرباء، و 7.8% للتدفئة والطهي، و 24.3% للعمليات الصناعية.

مثال 4

سدد عبد الله 75% من تصويبات الأهداف الموسم الماضي. صمم نموذج محاكاة يمكن استخدامه في تقدير احتمال تصويبات الأهداف التي سيسددها في هذا الموسم.

استخدم القرص الدوار المقسم إلى جزأين. اجعل جزءًا منه أحمر اللون ويحتوي على 75% من مساحة القرص والآخر أزرق اللون ويحتوي على 25% من مساحة القرص.

أدر القرص 50 مرة. تمثل كل دورة تصويب هدف. تتمثل المحاولة الناجحة في تصويب هدف والمحاولة الفاشلة في إضاعة هدف.

10-5 احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة

21. **البلي** يحتوي صندوق على 3 من البلي الأبيض، و 4 من الأسود. ما احتمال سحب 2 من البلي الأسود و 1 من البلي الأبيض من صف دون إعادة أي منها؟

22. **أوراق اللعب** تم اختيار ورقتين بشكل عشوائي من مجموعة أوراق اللعب مع إعادتهما. ما احتمال النجاح في سحب ورقة الرقم ثلاثة ثم ورقة ملكة بالترتيب؟

23. **بيتزا** أوضح استطلاع للرأي أُجري على مستوى الولايات المتحدة أن 72% من الأشخاص في البلد يحبون البيتزا. إذا تم اختيار 3 أشخاص بشكل عشوائي، فما احتمال أن يكون الثلاثة من محبي البيتزا؟

مثال 5

تحتوي حقيبة على 3 من البلي الأحمر و 2 من الأبيض و 6 من الأزرق. ما احتمال سحب 2 من البلي الأحمر و 1 من الأزرق بالترتيب دون إعادتهم؟

بما أنه لم تتم إعادة البلي، فإن الأحداث هي أحداث غير مستقلة.

$$P(\text{أحمر، أحمر، أزرق}) = P(\text{أحمر}) \cdot P(\text{أحمر}) \cdot P(\text{أزرق})$$

$$= \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{6}{9}$$

$$= \frac{2}{55} \text{ تقريبًا } = 3.6\%$$

10-6 احتمالات الأحداث المنفصلة

24. **رمي حجر النرد** عند رمي حجر نرد. فما احتمال الحصول على مجموع العددين 7 أو 11؟

25. **أوراق اللعب** تم سحب ورقة من مجموعة أوراق اللعب. أوجد احتمال سحب ورقة الرقم 10 أو ورقة ديمن.

26. **سباق** حقيبة تحتوي على 40 تذكرة سباق مرقمة من 1 إلى 40.

a. ما احتمال أن تكون التذكرة المختارة عشوائيًا عددًا زوجيًا أو أقل من 5؟

b. ما احتمال أن تكون التذكرة المختارة عشوائيًا أكبر من 30 أو أقل من 10؟

مثال 6

عند رمي حجري نرد. ما احتمال أن يكون المجموع 5 أو الحصول على عددين متطابقين؟

هذه أحداث منفصلة لأن مجموع العددين المتطابقين يستحيل أن يساوي 5.

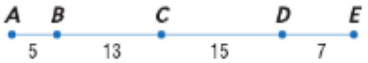
$$P(\text{عددان متطابقان}) + P(\text{المجموع 5}) = P(\text{عددان متطابقان or المجموع 5})$$

$$= \frac{4}{36} + \frac{6}{36}$$

$$\frac{5}{18} \text{ تقريبًا } = 5/18 = 278\%$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

النقطة X مختارة عشوائيًا على $\overline{AE}$. أوجد احتمال كل حدث.



1. $P(X$ تقع على $\overline{AC})$
2. $P(X$ تقع على $\overline{CD})$

3. **بيسبول** يلعب 9 لاعبون في فريق البيسبول. كم عدد ترتيب ضربات الكرة التي يمكن للاعبين التسعة تسديدها؟

4. **سفر** تحتاج موظفة مبيعات مسافرة إلى زيارة أربع مدن في منطقتها. كم عدد المسارات المميزة الموجودة لزيارة كل مدينة لمرة واحدة؟

مثّل الفضاء العيني لكل تجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.

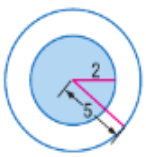
5. صندوق به 1 كرة حمراء و 1 كرة خضراء و 1 كرة زرقاء. تم سحب كرتين من الصندوق واحدة تلو الأخرى دون إعادتهما.

6. يريد عبد الكريم اقتناء حيوان أليف وذهب إلى جمعية الرفق بالحيوان للحصول على هامستر أو قطة. وبينما هو هناك، قرر اقتناء حيوانين أليفين.

7. **هندسة** يعمل مهندس على تحليل ثلاثة عوامل تؤثر على جودة الموصلات الجزئية: من حيث درجة الحرارة والرطوبة وانتقاء المواد. هناك 6 إعدادات ممكنة لدرجة الحرارة، و 4 إعدادات ممكنة للرطوبة، و 6 اختيارات للمواد. كم عدد توافيق الإعدادات الموجودة؟

8. **هجاء** كم عدد الطرق المميزة لترتيب الحروف في كلمة "bubble"؟

9. **كرة الطلاء** يُطلق عبد الله كرات الطلاء بالبندقية على الهدف. ما احتمال إصابة المنطقة المظللة؟



10. **إجابة مختصرة** رقم هاتف يحتوي على الأعداد 6, 2, 2, 2, 7, 7, 7. فما احتمال أن يكون الرقم هو 622-2777؟

11. **بطاقة** دخل خمسة عشر شخصًا السحب المبين إلى اليسار. ما احتمال أن يفوز عبد العزيز وعبد الرحيم وعبد الرحمن جميعهم بالبطاقات؟

حدد ما إذا كانت الأحداث *مستقلة* أم *غير مستقلة*. ثم أوجد الاحتمال.

12. مجموعة أوراق لعب بها 5 أوراق صفراء و 5 أوراق وردية و 5 أوراق برتقالية. تم اختيار ورقتين من المجموعة ثم إعادتهما. أوجد P (الورقة الأولى وردية والثانية وردية).

13. يوجد في قبعة 6 من البلي الأخضر و 2 من الأحمر و 2 من البني و 4 من الكحلي و 2 من الأرجواني. اختار عدنان 2 كرة من القبعة دون إعادتهما. ما احتمال أن تكون البلية الأولى بنية والثانية ليست أرجوانية؟

استخدم القرص الدوار لإيجاد كل احتمال. إذا توقف القرص الدوار عند خط، تتم إدارته مرة أخرى.

14. (يتوقف المؤشر على اللون الأرجواني) P
15. (يتوقف المؤشر على اللون الأحمر) P
16. (يتوقف المؤشر على اللون الأصفر) P

17. **كرة القدم** وفقًا لمعدل النجاح لفريق كرة القدم الأمريكية في الخطة الدفاعية، يجب على الفريق إسقاط الكرة وركلها 40% من الوقت، والتصويب في اتجاه المرمى 30% من الوقت وفقد الاستحواذ على الكرة 5% من الوقت، وتسجيل أهداف 25% من الوقت. صمّم نموذج محاكاة باستخدام برنامج مولد أعداد عشوائي. ثم اعرض النتائج مستخدمًا الملخصات العددية والبيانية المناسبة.

حدد ما إذا كانت الأحداث *منفصلة* أو *غير منفصلة*. اشرح استنتاجك.

18. شخص يملك سيارة وشاحنة

19. إلقاء زوج من النرد والحصول على مجموع 7 و 6 على وجه نرد واحد

20. ورقة لعب تكون البستوني والإسباتي

21. **الصفوف الدراسية** حصل عامر في هذا الربع على درجة A في صفوفه الدراسية 45% من المرات. صمم نموذج محاكاة ونفذه باستخدام نموذج احتمال هندسي. ثم قدم النواتج باستخدام ملخصات عددية وبيانية مناسبة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

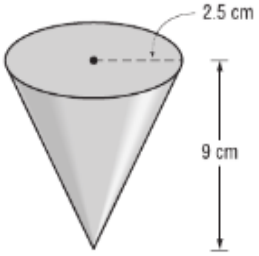
10 تدريب على الاختبارات المعيارية

تراكمي

الاختيار من متعدّد

اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. ما مقدار الورق اللازم لصناعة كوب الشرب الموضح أدناه؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.



F $73.4\ cm^2$

G $70.7\ cm^2$

H $67.9\ cm^2$

J $58.8\ cm^2$

2. أي من الخصائص التالية للأعداد الحقيقية تبرر العبارة أدناه؟

إذا كان $3x - 2 = 7x + 12$، فإن $3x - 2 + 2 = 7x + 12 + 2$.

A خاصية الجمع في المعادلة

B خاصية الانعكاس في المعادلة

C خاصية الطرح في المعادلة

D خاصية التماثل في المعادلة

3. ما عدد المرات المتوقع حصول فوزية فيها على عددين متطابقين عند إلقاء حجري نرد في 90 محاولة؟ (يحدث العددان المتطابقان عندما يظهر نفس العدد على حجري النرد عند إلقائهما في محاولة.)

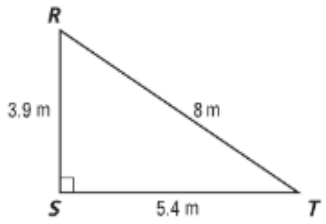
F 6

G 9

H 10

J 15

4. أي مما يلي يوضح بشكل صحيح العلاقة بين قياسات الزوايا للمثلث RST؟



F $m\angle S < m\angle R < m\angle T$

G $m\angle T < m\angle S < m\angle R$

H $m\angle R < m\angle S < m\angle T$

J $m\angle T < m\angle R < m\angle S$

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 3 ما مدى احتمال الحصول على عددين متطابقين عند إلقاء حجري نرد؟ اضرب الاحتمال في عدد المحاولات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education