الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

عام زايد
YEAR OF ZAYED

الرياضيات

10

McGraw-Hill Education

الرياضيات المتكاملة

نسخة الإمارات العربية المتحدة

Mc Graw Hill Education

الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

McGraw-Hill Education

الرياضيات المتكاملة

نسخة الإمارات العربية المتحدة

للصف 10 مجلد 3

Mc Graw Hill Education

Project: McGraw-Hill Education United Arab Emirates Edition Grade 10 Integrated Math Vol.3
FM, Integrated Math II © 2012
9. Right Triangles and Trigonometry, from Integrated Math II Chapter 10 © 2012
10. Extending Surface Area and Volume, from Integrated Math II Chapter 12 © 2012
11. Probability and Measurement, from Integrated Math II Chapter 13 © 2012

صورة الغلاف: hunthomas/Shutterstock.com

mheducation.com/prek-12

جميع الحقوق محفوظة © للعام 2018 لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جميع الحقوق محفوظة. لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا المنشور أو توزيعه في أي صورة أو بأي وسيلة كانت أو تخزينه في قاعدة بيانات أو نظام استرداد من دون موافقة خطية مسبقة من McGraw-Hill Education، بما في ذلك، على سبيل المثال لا الحصر، التخزين على الشبكة أو الإرسال عبرها أو البث لأغراض التعليم عن بُعد.

الحقوق الحصرية للتصنيع والتصدير عائدة لمؤسسة McGraw-Hill Education. لا يمكن إعادة تصدير هذا الكتاب من البلد الذي باعته له McGraw-Hill Education. هذه النسخة الإقليمية غير متاحة خارج أوروبا والشرق الأوسط وإفريقيا.

طُبع في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 978-1-52-682517-9 **(نسخة الطالب)**
MHID: 1-52-682517-1 **(نسخة الطالب)**
رقم النشر الدولي: 978-1-52-683232-0 **(نسخة المعلم)**
MHID: 1-52-683232-1 **(نسخة المعلم)**

النسخة الإلكترونية

رقم النشر الدولي: 978-1-52-682808-8 **(نسخة الطالب)**
MHID: 1-52-682808-1 **(نسخة الطالب)**
رقم النشر الدولي: 978-1-52-683487-4 **(نسخة المعلم)**
MHID: 1-52-683487-1 **(نسخة المعلم)**

1 2 3 4 5 6 7 8 9 XXX 22 21 20 19 18 17

صاحب السّمو الشّيخ خليفة بن زايد آل نهيان
رئيس دولة الإمارات العربيّة المتّحدة، حفظه اللّه

"يجب التزوُّد بالعلوم الحديثة والمعارفِ الواسعة، والإقبال عليها
بروح عالية ورغبة صادقة؛ حتى تتمكّن دولة الإمارات خلال
الألفيّة الثّالثة من تحقيق نقلة حضاريّة واسعة."

من أقوال صاحب السّمو الشّيخ خليفة بن زايد آل نهيان

ملخص المحتويات

الوحدة 1 الدوال والمعادلات التربيعية

الوحدة 2 الدوال والعلاقات التربيعية

الوحدة 3 الدوال والعلاقات الأسيّة واللوغاريتمية

الوحدة 4 التبرير والبرهان

الوحدة 5 المثلثات المتطابقة

الوحدة 6 علاقات المثلثات

الوحدة 7 الأشكال الرباعية

الوحدة 8 التناسب والتشابه

الوحدة 9 المثلثات قائمة الزاوية وحساب المثلثات

الوحدة 10 التوسع في مساحة السطح والحجم

الوحدة 11 الاحتمال والقياس

كتيب الطالب

Chapter Sourced From: (FM, Integrated Math II © 2012) McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

المؤلفون

يضمن المؤلفون الرئيسون أن برامج الرياضيات الصادرة من شركة McGraw-Hill Education مخططة بشكل رأسي حقيقي. ويتم ذلك بوضعهم الهدف النهائي، وهو نجاح كل طالب في هذه المادة، في كل خطوات التأليف منذ البدء. كما تجدر الإشارة ان تصميم هذا البرنامج يستخدم طريقة التخطيط العكسي مما يجعل كل برامجنا للرياضيات واضحة ومحددة من حيث نطاقها وتسلسلها

المؤلفون الرئيسون

دكتور جون إيه كارتر

المدير
مدرسة أدلاي إي ستيفنسون الثانوية
لينكولنشاير، إلينوي

مجالات الخبرة: استخدام التكنولوجيا والوسائل التعليمية اليدوية لتصوير المفاهيم. تحقيق فهم الرياضيات لدى المتعلمين باللغة الإنجليزية

جلبرت ج. كوفاس، حاصل على درجة الدكتوراه

أستاذ في تعليم الرياضيات
جامعة ولاية تكساس – سان ماركوس
سان ماركوس، تكساس

مجالات الخبرة: تطبيق المفاهيم والمهارات في سياقات رياضية ثرية. عمليات التمثيل الرياضية

روجر داي، حاصل على درجة الدكتوراه وشهادة المجلس الوطني

رئيس قسم الرياضيات
مدرسة بونتياك تاون شيب الثانوية
بونتياك، إلينوي

مجالات الخبرة: فهم الإحصاء والاحتمالات وتطبيقهما. تعليم معلمي الرياضيات

كارول مالوي، حاصلة على درجة الدكتوراه

أستاذ مساعد
جامعة نورث كارولينا في تشابيل هيل
تشابيل هيل، نورث كارولينا

مجالات الخبرة: عمليات التمثيل والتفكير النقدي. رعاية نجاح الطلاب في الجبر 1

مؤلفو البرنامج

روث كاسي

مستشار رياضيات
مساعدة معلم إقليمية
جامعة كنتاكي
ليكسينغتون، كنتاكي

مجالات الخبرة: تقنية التمثيل البياني والرياضيات

جيري كومينز

مستشار رياضيات
الرئيس السابق للمجلس الوطني لمشرفي الرياضيات
ويسترن سبرينغ، إلينوي

مجالات الخبرة: تقنية التمثيل البياني والرياضيات

د. بيرتشي هوليداي، حاصلة على درجة الدكتوراه

مستشار قومي للرياضيات
سيلفر سبرينج، ماريلاند

مجالات الخبرة: استخدام الرياضيات لصياغة بيانات الحياة اليومية وفهمها. أثر التمثيلات البيانية على فهم الرياضيات

بياتريس مور لوتشين

مستشار رياضيات
هيوستن، تكساس

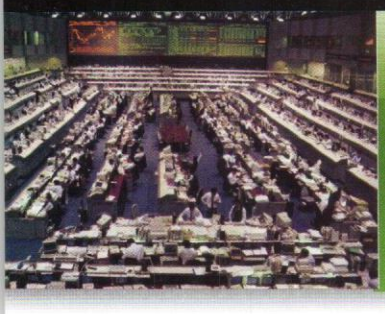
مجالات الخبرة: المعرفة بالرياضيات. التعاون مع متعلمي اللغة الإنجليزية

مؤلف مشارك

دينا زايك المطويات

مستشار تعليمي
مؤسسة Dinah-Might Activities, Inc.
سان أنطونيو، تكساس

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



الوحدة 1 الدوال والمعادلات التربيعية

الاستعداد للوحدة 1 3

1-1 **تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا** 5

التوسع: مختبر الجبر معدل تغير الدالة التربيعية 16

1-2 **حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني** 17

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني المتباينات التربيعية 23

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني مجموعة الدوال التربيعية 24

1-3 **تحويلات الدوال التربيعية** 26

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني أنظمة المعادلات الخطية والتربيعية 34

1-4 **حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع** 36

التوسع: مختبر الجبر أوجد القيمة العظمى أو الصغرى 42

■ **اختبار نصف الوحدة** 44

1-5 **حل المعادلات التربيعية باستخدام القانون العام** 45

1-6 **تحليل الدوال باستخدام الفروق المتتالية** 52

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني ملاءمة المنحنيات 58

1-7 **الدوال الخاصة** 60

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني الدوال الخطية المتقطعة 68

تقويم

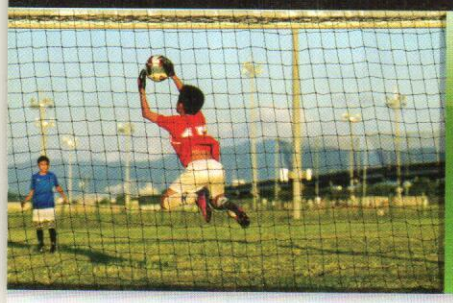
■ **دليل الدراسة والمراجعة** 69

■ **تدريب على الاختبار** 73

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** 74

■ **تدريب على الاختبار المعياري ، الوحدة 1** 76

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



الوحدة 2 الدوال والعلاقات التربيعية

الاستعداد للوحدة 2 79

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني تمثيل بيانات من الحياة اليومية 81

2-1 **حل المعادلات التربيعية بطريقة التحليل إلى العوامل** 82

2-2 **الأعداد المركبة** 90

التوسع: مختبر الجبر المستوى المركب 97

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات التربيعية 99

■ **اختبار نصف الوحدة** 100

2-3 **القانون العام والمميّز** 101

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني مجموعة القطوع المكافئة 110

2-4 **تحويلات التمثيلات البيانية التربيعية** 112

التوسع: مختبر الجبر الدوال التربيعية ومعدل التغير 118

2-5 **المتباينات التربيعية** 119

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني المزيد من المتباينات التربيعية 126

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني تمثيل الحركة 127

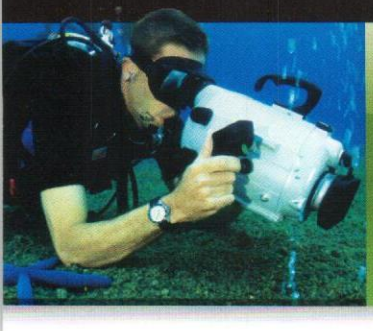
تقويم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 128

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** 132

■ **تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات من 1 إلى 2** 134

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



الوحدة 3 الدوال والعلاقات الأسيّة واللوغاريتمية

الاستعداد للوحدة 3 137

3-1 تمثيل الدوال الأسيّة بيانيًا 139

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات والمتباينات الأسية 147

3-2 حل المعادلات والمتباينات الأسيّة 149

التوسع: مختبر الجبر تحويل التعابير الأسية 156

3-3 تبسيط التعابير الجذرية 157

التوسع: مختبر الجبر الأعداد النسبية وغير النسبية 163

3-4 العمليات على التعابير الجذرية 164

التوسع: مختبر الجبر تبسيط تعابير الجذور النونية 169

3-5 المعادلات الجذرية 171

تقويم

- **دليل الدراسة والمراجعة** 176
- **تدريب على الاختبار** 179
- **التحضير للاختبارات المعيارية** 180
- **تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات من 1 إلى 3** 182

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 4 التبرير والبرهان

الاستعداد للوحدة 4 185

الاستكشاف: مختبر الهندسة الشروط الضرورية والكافية 187

4-1 **المسلَّمات والبراهين الحرة** 188

4-2 **البرهان الجبري** 196

4-3 **إثبات العلاقات بين القطع المستقيمة** 204

4-4 **إثبات العلاقات بين الزوايا** 211

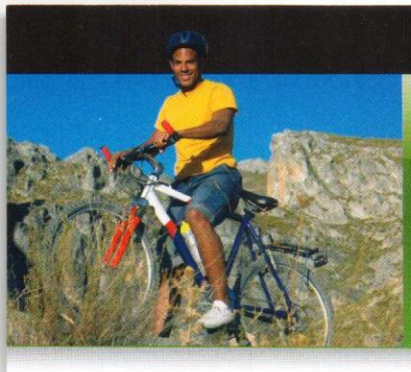
4-5 **الزوايا والمستقيمات المتوازية** 220

4-6 **إثبات توازي مستقيمين** 227

تقويم

- **دليل الدراسة والمراجعة** 235
- **تدريب على الاختبار** 239
- **التحضير للاختبارات المعيارية** 240
- **تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات من 1 إلى 4** 242

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



الوحدة 5 المثلثات المتطابقة

الاستعداد للوحدة 5 245

الاستكشاف: مختبر الهندسة زوايا المثلثات 247

5-1 **زوايا المثلثات** 248

5-2 **المثلثات المتطابقة** 257

5-3 **إثبات تطابق المثلثات—تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS)، تساوي ضلعين وزاوية (SAS)** 266

التوسع: مختبر الهندسة برهنة الإنشاءات 275

■ **اختبار نصف الوحدة** 276

5-4 **إثبات تطابق المثلثات—بتساوي زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA)، تساوي زاويتين وضلع (AAS)** 277

التوسع: مختبر الهندسة التطابق في المثلثات قائمة الزاوية 285

5-5 **المثلثات متساوية الساقين ومتساوية الأضلاع** 287

5-6 **المثلثات والبرهان الإحداثي** 296

تقويم

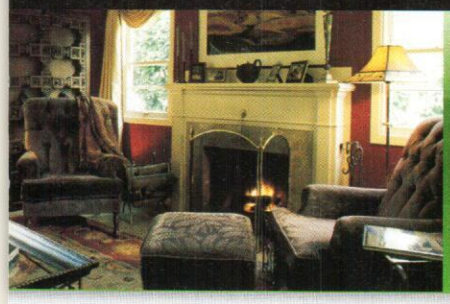
■ **دليل الدراسة والمراجعة** 303

■ **تدريب على الاختبار** 307

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** 308

■ **تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات من 1 إلى 5** 310

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



الوحدة 6 علاقات المثلثات

الاستعداد للوحدة 6 313

الاستكشاف: مختبر الهندسة إنشاء منصفات الزوايا 315

6-1 **منصفات المثلثات** 316

الاستكشاف: مختبر الهندسة إنشاء الوسيطات والارتفاعات 326

6-2 **متوسطات المثلثات وارتفاعاتها** 327

6-3 **المتباينات في مثلث واحد** 336

■ **اختبار نصف الوحدة** 344

الاستكشاف: مختبر الهندسة منطق المصفوفا 345

6-4 **البرهان غير المباشر** 347

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني متباينة المثلث 355

6-5 **متباينة المثلث** 356

6-6 **المتباينات في مثلثين** 363

تقويم

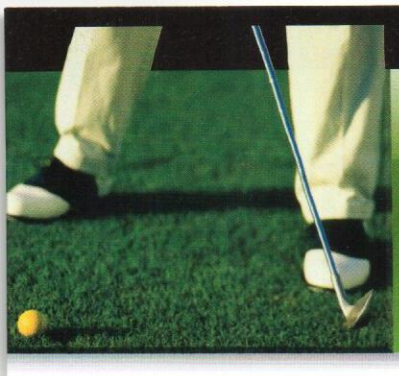
■ **دليل الدراسة والمراجعة** 373

■ **تدريب على الاختبار** 377

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** 378

■ **تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات 6-1** 380

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



الوحدة 7 الاشكال الرباعية

الاستعداد للوحدة 7 383

7-1 **زوايا المضلعات** 385

التوسع: مختبر أوراق البيانات زوايا المضلعات 394

7-2 **متوازي الأضلاع** 395

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني متوازيات الأضلاع 404

7-3 **اختبارات متوازي الأضلاع** 405

■ **اختبار نصف الوحدة** 414

7-4 **المستطيل** 415

7-5 **المعين والمربع** 422

7-6 **شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية** 431

تقويم

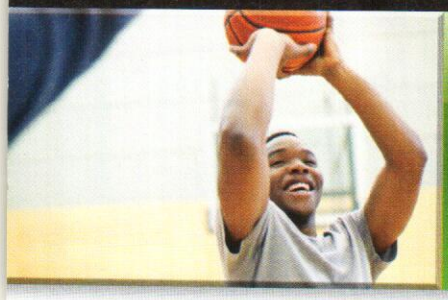
■ **دليل الدراسة والمراجعة** 441

■ **تدريب على الاختبار** 445

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** 446

■ **تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات 7-1** 448

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



الوحدة 8 التناسب والتشابه

الاستعداد للوحدة 8 451

8-1 **النسب والتناسبات** 453

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني متتالية فيبوناتشي والنسب 460

8-2 **المضلّعات المتشابهة** 461

8-3 **المثلثات المتشابهة** 470

التوسع: مختبر الهندسة براهين المستقيمات المتعامدة والمتوازية 480

8-4 **المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة** 482

■ **اختبار نصف الوحدة** 492

8-5 **أجزاء المثلثات المتشابهة** 493

التوسع: مختبر الهندسة الأنماط الهندسية المتكررة 501

8-6 **تحويلات التشابه** 503

8-7 **الرسومات والنماذج المقياسية** 510

تقويم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 516

■ **تدريب على الاختبار** 521

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** 522

■ **تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات 8-1** 524

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 9 المثلثات قائمة الزاوية وحساب المثلثات

الاستعداد للوحدة 9 528

9-1 **الوسط الهندسي** 531

الاستكشاف: مختبر الهندسة الإثباتات غير الكلامية 540

9-2 **نظرية فيثاغورس وعكسها** 541

التوسع: مختبر الهندسة الإحداثيات في الفضاء 550

9-3 **المثلثات القائمة الخاصة** 552

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني حساب المثلثات 561

9-4 **حساب المثلثات** 562

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني القاطع وقاطع التمام وظل التمام 572

■ **اختبار نصف الوحدة** 573

9-5 **زوايا الارتفاع والانخفاض** 574

9-6 **قانون الـ Sine وقانون الـ Cosine** 582

التوسع: مختبر الهندسة الحالة المبهمة 592

9-7 **المتجهات** 593

التوسع: مختبر الهندسة جمع المتجهات 603

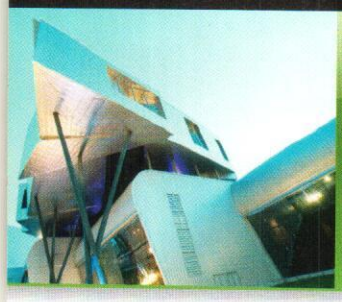
■ **دليل الدراسة والمراجعة** 604

■ **تدريب على الاختبار** 609

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** 610

■ **تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات 1–9** 612

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



الوحدة 10 التوسع في مساحة السطح والحجم

الاستعداد للوحدة 10 614

الاستكشاف: مختبر الهندسة المجسمات المشكّلة بالإزاحة 617

10-1 **تمثيلات الأشكال ثلاثية الأبعاد** 619

التوسع: مختبر الهندسة خرائط التضاريس 625

10-2 **مساحة السطح للمنشور والأسطوانة** 626

10-3 **مساحة السطح للهرم والمخروط** 634

10-4 **حجم المنشور والأسطوانة** 643

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني تغيير الأبعاد (التمدد) 651

■ **اختبار نصف الوحدة** 652

10-5 **حجم الأشكال الهرمية والمخروطية** 653

10-6 **مساحة سطح الأشكال الكروية وحجمها** 660

التوسع: مختبر الهندسة المحل الهندسي والأشكال الكروية 668

10-7 **الهندسة الفراغية** 669

التوسع: مختبر الهندسة الإحداثيات الملاحية 675

10-8 **المجسمات المتطابقة والمتشابهة** 676

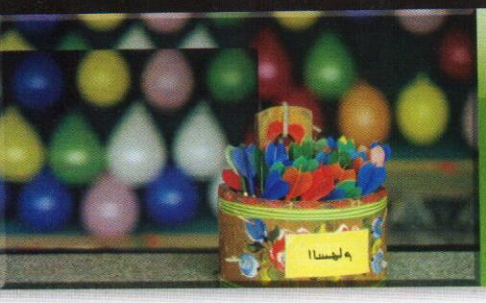
■ **دليل الدراسة والمراجعة** 683

■ **تدريب على الاختبار** 687

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** 688

■ **تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات 1 إلى 10** 690

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



الوحدة 11 الاحتمال والقياس

الاستعداد للوحدة 11 692

11-1 **تمثيل الفضاءات العينية** 695

11-2 **استخدام التباديل والتوافيق مع الاحتمالات** 702

11-3 **الاحتمالات الهندسية** 711

■ **اختبار نصف الوحدة** 718

11-4 **المحاكاة** 720

11-5 **احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة** 727

التوسع: مختبر الهندسة جداول التكرار ذات المدخلين 734

11-6 **احتمالات الأحداث المنفصلة** 736

التوسع: مختبر الهندسة نظرية التمثيل البياني 744

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 746

■ **تدريب على الاختبار** 749

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** 750

■ **تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات 1 إلى 11** 752

كتيب الطالب

مرجع

مسرد المصطلحات G-1

الدوال والمتطابقات والصيغ والرموز المثلثية TF-1

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9 المثلثات قائمة الزاوية وحساب المثلثات

السابق

- قمت بحل التناسبات.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - استخدام نظرية فيثاغورس.
  - استخدام خصائص المثلثات الخاصة قائمة الزاوية.
  - استخدام حساب المثلثات لإيجاد مقاييس المثلثات المفقودة.

لماذا؟ ▲

- يمكن استخدام خصائص المثلثات في التخطيط والتحضير لفعاليات خاصة، بما في ذلك تحديد ارتفاع الديكورات.

Chapter 10 Opener Integrated Math II Chapter 10 © 2012 McGraw-Hill Education
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الاستعداد للوحدة

1 خيار الكتاب المدرسي أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية.
يُرجى الرجوع إلى الجزء "مراجعة سريعة" للحصول على المساعدة.

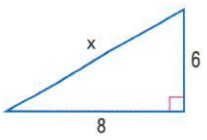
تدريب سريع

بسّط.

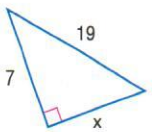
1. $\sqrt{112}$
2. $\frac{\sqrt{24}}{2\sqrt{3}}$
3. $\sqrt{15 \cdot 20}$
4. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}$
5. $\sqrt{\frac{45}{80}}$
6. $\frac{8\sqrt{2}}{6-3\sqrt{8}}$

أوجد x.

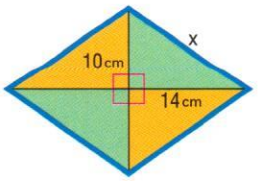
7.



8.



9. **الأعلام** تريد فاطمة تصميم عَلَمٍ من 4 مثلثات متطابقة كما هو موضح أدناه. فما مقدار القِطَع الزرقاء التي ستحتاجها لكل جانب؟



وضح بيانيًا القطعة المستقيمة باستخدام نقاط النهاية المعطاة.

10. $G(3, -4)$ و $H(3, 4)$.
11. $E(-3, 5)$ و $F(4, -3)$
12. **الجامعة** يزور كمال إحدى الجامعات. لاحظ من خريطته أن العديد من المباني ذات الأهمية تقع حول منطقة عشبية يسميها الطلاب "المنطقة رباعية الأضلاع". إذا تم تمثيل المكتبة على الخريطة بواسطة $L(6, 8)$ والكافيتريا بواسطة $C(0, 0)$، فمثّل القطعة المستقيمة التي تمثّل المسار الأقصر بين المبنيين بيانيًا.

مراجعة سريعة

مثال 1

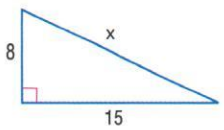
بسّط. $\frac{6}{\sqrt{3}}$.

اضرب في $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$. $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

بسّط. $= \frac{6\sqrt{3}}{3}$ او $2\sqrt{3}$

مثال 2

أوجد x.



نظرية فيثاغورس $a^2 + b^2 = c^2$

$b = 15$ و $a = 8$ $8^2 + 15^2 = x^2$

بسّط. $289 = x^2$

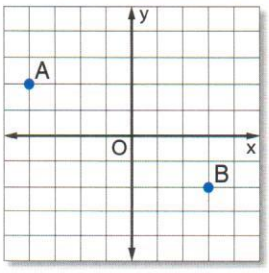
خُذ الجذر التربيعي الموجب من كل طرف. $\sqrt{289} = \sqrt{x^2}$

بسّط. $17 = x$

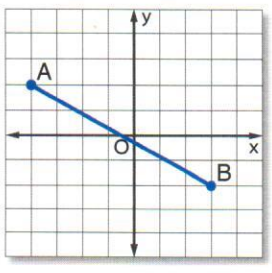
مثال 3

مثّل بيانيًا القطعة المستقيمة باستخدام نقاط النهاية $A(-4, 2)$ و $B(3, -2)$.

مَثّل النقطتين A و B.



قم بتوصيل النقطتين.



McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

البدء في هذه الوحدة

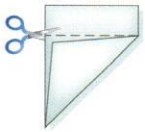
سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة خلال دراستك الوحدة 9. للاستعداد، حدد المصطلحات المهمة ونظّم مواردك.

المطويات منظّم الدراسة

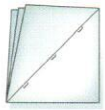
الزوايا القائمة وحساب المثلثات اصنع هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك على الوحدة 9 حول الزوايا القائمة وحساب المثلثات. ابدأ بثلاث صفحات من ورق الدفتر وصفحة واحدة من ورق سميك.

1 **ضع** ورقة الدفتر على الورقة السميكة.

2 **اطوِ** الورقة قُطريًا لتشكيل مثلث، ثم اقطع الزيادات.



3 **افتح** الورقة ودبّس الطية الداخلية لتشكيل كتيب.



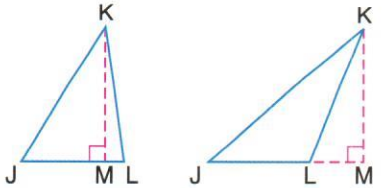
4 **قم** بتسمية كل صفحة برقم وعنوان درس.

المفردات الجديدة

geometric mean	الوسط الهندسي
Pythagorean triple	ثلاثية فيثاغورس
trigonometry	حساب المثلثات
trigonometric ratio	النسبة المثلثية
sine	جيب الزاوية
cosine	جيب التمام
tangent	ظل الزاوية
angle of elevation	زاوية الارتفاع
angle of depression	زاوية الانخفاض
Law of Sines	قانون الجيب
Law of Cosines	قانون جيب التمام
vector	متجه
magnitude	مقدار
resultant	ناتج
component form	صورة مركبة

مراجعة المفردات

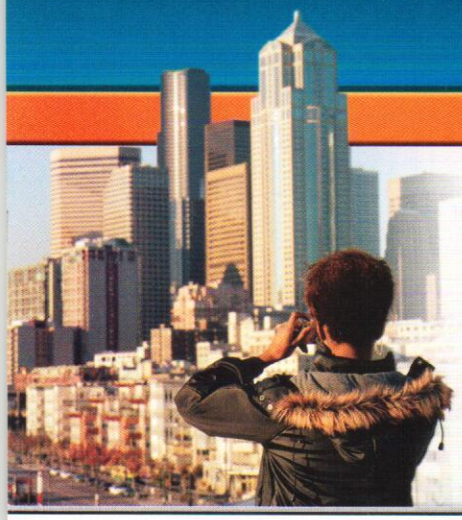
نظرية فيثاغورس إذا كان a و b هما قياسي ساقي مثلث قائم الزاوية وكانت c قياس الوتر. فإن $a^2 + b^2 = c^2$.



$\overline{KM}$ هو ارتفاع $\triangle JKL$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-1 الوسط الهندسي



السابق
- استخدام علاقات التناسب بين منصفات الزوايا المتناظرة وارتفاعات ووسائط المثلثات المتشابهة.

الحالي
1. إيجاد الوسط الهندسي بين عددين.
2. حلّ مسائل تتضمن علاقات بين أجزاء مثلث قائم الزاوية وبين الارتفاع المنشأ من وتره.

لماذا؟
- تصوير العناصر الطويلة أو العريضة للغاية يمكن أن يمثل تحديًا. فمن الممكن أن يكون تضمين عنصر بالكامل في لقطة واحدة دون تشويه الصورة أمرًا صعبًا. إذا تم ضبط الكاميرا لزاوية عرض رأسية بمقدار 90° وكنت تعرف ارتفاع العنصر المراد تصويره، فبإمكانك استخدام وسط هندسي للمسافة من قمة العنصر إلى مستوى الكاميرا والمسافة من أسفل العنصر إلى مستوى الكاميرا.

مفردات جديدة

وسط هندسي
geometric mean

ممارسات في الرياضيات
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 الوسط الهندسي

الوسط الهندسي عندما تكون أوساط التناسب هي العدد ذاته، فإن هذا العدد يسمى الوسط الهندسي للطرفين. **الوسط الهندسي** بين عددين هو الجذر التربيعي الموجب لناتج ضربهما.

$$\frac{\text{طرف} \rightarrow a}{\text{وسط} \rightarrow x} = \frac{\text{وسط} \leftarrow x}{\text{طرف} \leftarrow b}$$

المفهوم الأساسي الوسط الهندسي

الشرح الوسط الهندسي لعددين موجبين a هو العدد x مثل $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$.
إذًا، $x^2 = ba$ و $x = \sqrt{ab}$.

مثال الوسط الهندسي لكل من $a = 4, b = 9$ هو 6. لأن $6 = \sqrt{9 \times 4}$

مثال 1 الوسط الهندسي

أوجد الوسط الهندسي بين 8 و 10.

$x = \sqrt{ab}$	تحديد الوسط الهندسي
$= \sqrt{8 \cdot 10}$	$a = 8 = 10$
$= \sqrt{(4 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 5)}$	حلل إلى العوامل.
$= \sqrt{16 \cdot 5}$	خاصية التجميع
$= 4\sqrt{5}$	بسّط.

الوسط الهندسي بين 8 و 10 هو $4\sqrt{5}$ أو حوالي 9.8.

تمرين موجّه

أوجد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد.

1A. 5 و45 **1B.** 12 و15

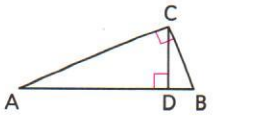
2 الأوساط الهندسية في المثلثات قائمة الزاوية

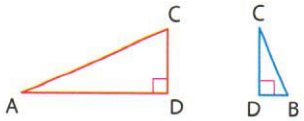
في المثلث قائم الزاوية، ستجد أن الارتفاع المرسوم من رأس الزاوية القائمة إلى الوتر يشكّل مثلثين إضافيين قائمي الزاوية. وتتشارك هذه المثلثات الثلاثة قائمة الزاوية في علاقة خاصة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

النظرية 9.1

إذا رسمنا ارتفاعًا يمتدّ إلى وتر مثلث قائم الزاوية، فسيكون المثلثان المتشكلان مشابهين للمثلث الأصلي ولبعضهما البعض.





المثال إذا كان $\overline{CD}$ هو الارتفاع إلى الوتر $\overline{AB}$ الخاص بالمثلث قائم الزاوية $\triangle ABC$، فإن $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ و $\triangle CBD \sim \triangle ABC$ و $\triangle ACD \sim \triangle CBD$.

مراجعة المفردات

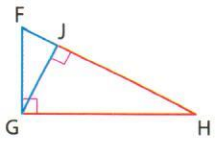
الارتفاع (للمثلث)

قطعة مستقيمة ممتدة من أحد الرؤوس إلى المستقيم المحتوي على الضلع المقابل. كما أنها عمودية على المستقيم المحتوي على هذا الضلع

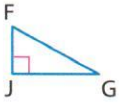
سوف تثبت النظرية 9.1 في التمرين 39.

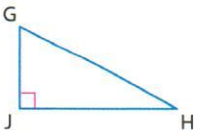
مثال 2 تحديد المثلثات قائمة الزاوية المتشابهة

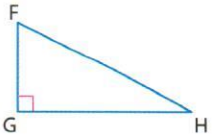
اكتب عبارة تَمَاثُل لتوضيح المثلثات الثلاثة قائمة الزاوية المتماثلة في الشكل.



اقسم المثلث إلى مثلثين بطول الارتفاع. بعد ذلك، ارسم المثلثات الثلاثة مع تعديل المثلثين الأصغر بحيث تكون زواياها وأضلاعها المتناظرة في الأوضاع ذاتها مثل المثلث الأصلي.







إذًا، وفقًا للنظرية 9.1، فإن $\triangle FJG \sim \triangle GJH \sim \triangle FGH$.

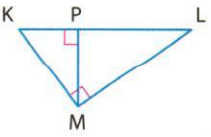
نصيحة دراسية

تعديل المثلثات

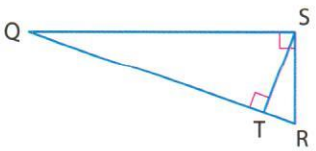
لتعديل المثلثات قائمة الزاوية في المثال 2، قم أولاً بمطابقة الزوايا اليمنى. ثم طابق الأضلاع الأقصر.

تمرين موجّه

2A.

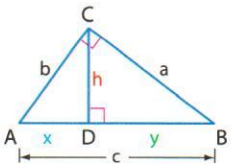


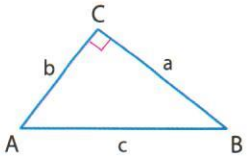
2B.

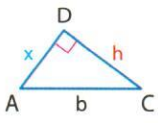


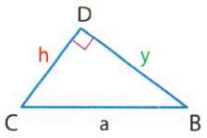
من النظرية 9.1، علمت أن ارتفاع $\overline{CD}$ المرسوم إلى وتر المثلث قائم الزاوية ABC يشكل ثلاثة مثلثات متشابهة: $\triangle ACB \sim \triangle ADC \sim \triangle CDB$.

من خلال تحديد المضلعات المتشابهة، يمكنك كتابة التناسبات التالية لمقارنة أطوال أضلاع هذه المثلثات.







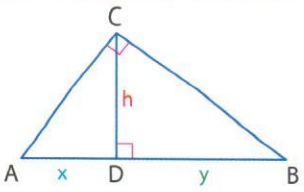


$$\frac{\text{الضلع الأقصر}}{\text{الساق الأطول}} = \frac{b}{a} = \left(\frac{x}{h} = \frac{h}{y}\right) \qquad \frac{\text{وتر المثلث}}{\text{الساق الأقصر}} = \left(\frac{c}{b} = \frac{b}{x}\right) = \frac{a}{h} \qquad \frac{\text{وتر المثلث}}{\text{الساق الأطول}} = \boxed{\frac{c}{a} = \frac{b}{h} = \frac{a}{y}}$$

لاحظ أن العلاقات المحاطة بدائرة تتضمن أوساطًا هندسية. وهذا يوصلنا إلى النظريات الموجودة أعلى الصفحة التالية.

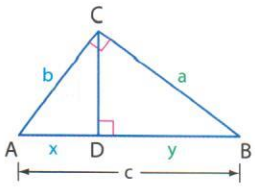
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

النظريات نظريات الوسط الهندسي للمثلثات قائمة الزاوية



9.2 نظرية الوسط الهندسي (الارتفاع) يَفصل الارتفاعُ الممتد إلى وتر المثلث قائم الزاوية الوتر إلى قطعتين مستقيمتين. ويساوي طول هذا الارتفاع الوسط الهندسي بين أطوال هذين الجزأين.

المثال إذا كان $\overline{CD}$ يمثل الارتفاع للوتر $\overline{AB}$ بالمثلث قائم الزاوية $\triangle ABC$، فإن $h = \sqrt{xy}$ او $\frac{x}{h} = \frac{h}{y}$.

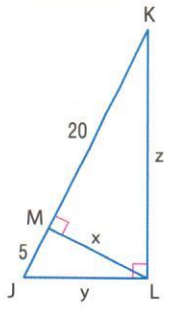


9.3 نظرية الوسط الهندسي (الساق) يَفصل الارتفاع الممتد إلى وتر المثلث قائم الزاوية الوتر إلى قطعتين مستقيمتين. وطول أحد ساقي هذا المثلث يُمثل الوسط الهندسي بين طول الوتر والقطعة المستقيمة الموجودة على الوتر المجاور لتلك الساق.

المثال إذا كان $\overline{CD}$ هو الارتفاع للوتر $\overline{AB}$ بالمثلث قائم الزاوية $\triangle ABC$ فإن $\frac{c}{a} = \frac{a}{y}$ $b = \sqrt{xc}$ أو $\frac{c}{b} = \frac{b}{x}$ $a = \sqrt{yc}$

سوف تقوم بإثبات نظريتي 9.2 و9.3 من خلال التمرينين 40 و 41 على الترتيب.

مثال 3 استخدام الأوساط الهندسية في المثلثات قائمة الزاوية



أوجد x و y و z.

بما أن x هو مقدار الارتفاع الممتد إلى وتر المثلث قائم الزاوية $\triangle JKL$، فإن x سيكون الوسط الهندسي لأطوال القطعتين التي يتألف منهما الوتر، $\overline{JM}$.

$x = \sqrt{JM \times MK}$ نظرية الوسط الهندسي (الارتفاع)

$= \sqrt{5 \times 20}$ التعويض

$= \sqrt{100} = 10$ بسّط.

بما أن y يساوي طول الساق $\overline{JL}$، فإن y يعتبر الوسط الهندسي لـ $\overline{JM}$، وهما طول القطعة المجاورة لهذه الساق وطول الوتر JK.

$y = \sqrt{JM \cdot JK}$ نظرية الوسط الهندسي (الساق)

$= \sqrt{5 \cdot (20 + 5)}$ التعويض

$= \sqrt{125}$ أو حوالي 11.2 استخدم الآلة الحاسبة للتبسّيط.

بما أن z يساوي طول الساق $\overline{KL}$، فإن z هي الوسط الهندسي لـ $\overline{MK}$، وهما طول القطعة المجاورة لـ $\overline{KL}$ وطول الوتر JK.

$z = \sqrt{MK \cdot JK}$ نظرية الوسط الهندسي (الساق)

$= \sqrt{20 \cdot (20 + 5)}$ التعويض

$= \sqrt{500}$ أو حوالي 22.4 استخدم الآلة الحاسبة للتبسّيط

نصيحة دراسية

استخدام التناسب

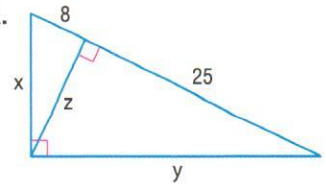
في المثال 3، يمكن أيضًا إيجاد قيمة x بإيجاد حل للتناسب $\frac{5}{x} = \frac{x}{20}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

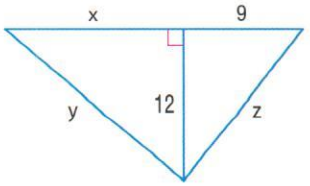
تمرين موجّه

أوجد x و y و z.

3A.



3B.

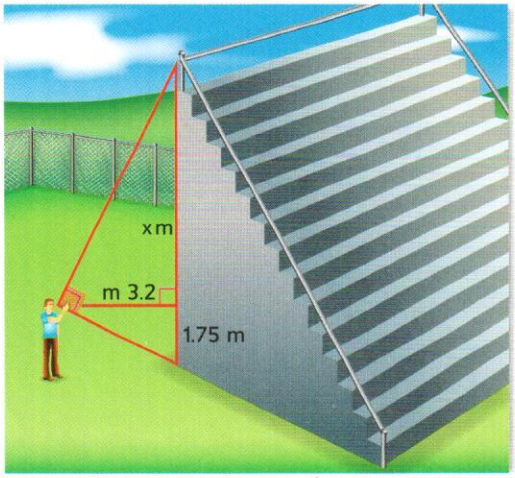


يمكنك استخدام الوسط الهندسي لقياس الارتفاع مباشرة.

مثال 4 من الحياة اليومية القياس غير المباشر

الدعاية والإعلان يريد خالد لوحة إعلانية لتعليقها أعلى جانب مدرج المشاهدين في ملعب البيسبول للمدرسة الثانوية وتصل إلى الأرض.

لمعرفة ارتفاعها، استخدمَ قطعة مربعة من الورق المقوى لمحاذاة أعلى المُدَرّج وأسفله. ثم قام بقياس مسافتها من المُدَرّج ومن الأرض إلى مستوى عينيه. أوجد ارتفاع المُدَرّج مقربًا إلى أقرب متر.



ملاحظة: غير مرسوم وفقًا لمقياس رسم.

المسافة من خالد إلى المُدَرّج هي مسافة الارتفاع إلى وتر المثلث قائم الزاوية. ويساوي طول هذا الارتفاع الوسط الهندسي لهاتين القطعتين اللتين يتألف منهما الوتر. يبلغ قياس القطعة الأقصر 1.75 متر. لنفترض أن القياس المجهول هو x بالمترات.

$3.2 = \sqrt{1.75 \cdot x}$ نظرية الوسط الهندسي (الارتفاع)

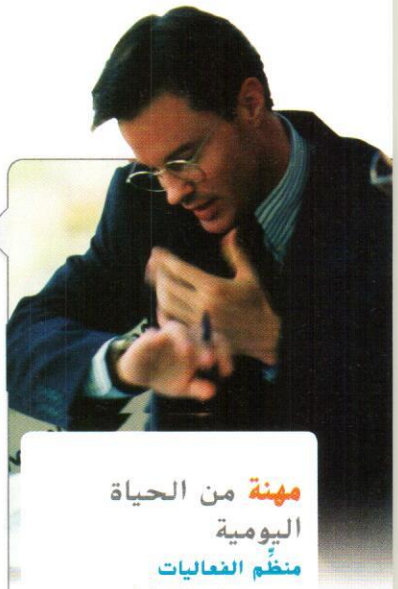
$10.24 = 1.75x$ قم بتربيع كل طرف.

$5.85 \approx x$ اقسم كل طرف على 1.75.

ارتفاع المُدَرّج هو إجمالي طول الوتر، 1.75 + 5.85، أو حوالي 7.6 متراً.

تمرين موجّه

4. الرياضة يحتاج نادٍ ترفيهي اجتماعي تقدير تكلفة تركيب جدار تسلق صخور من خلال تقدير ارتفاع الجدار. لذا، حملتْ خديجة كتابًا أمام عينيها بحيث يتحاذى الجزآن العلوي والسفلي من الجدار مع الحافة السفلية وجزء التجليد بالغلاف. فإذا كان مستوى عينيها على ارتفاع 1.5 أمتار أعلى الأرض وكانت تقف على بُعد 3.4 أمتار من الجدار، فما مقدار ارتفاع الجدار؟ ارسم رسمًا تخطيطيًا واشرح استنتاجك.



مهنة من الحياة اليومية

منظّم الفعاليات

يقوم منظمو الفعاليات باختيار موقع محدد وتحضير الأطعمة ووضع خطة للعروض الترفيهية. ويقومون أيضًا بتنسيق خدمات مثل النقل والتصوير.

ومعظم المهارات المطلوبة لتنظيم الفعاليات غالبًا ما يتم اكتسابها من الخبرة العملية.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

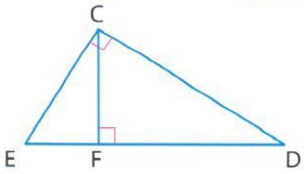
مثال 1

أوجد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد.

1. 5 و20
2. 4 و 36
3. 40 و15

مثال 2

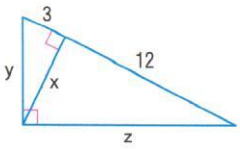
4. اكتب عبارة تَمَاثُل لتوضيح المثلثات الثلاثة المتماثلة في الشكل.



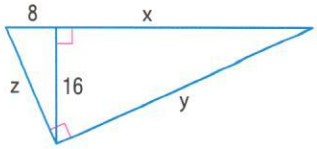
مثال 3

أوجد *x* و *y* و *z*.

5.

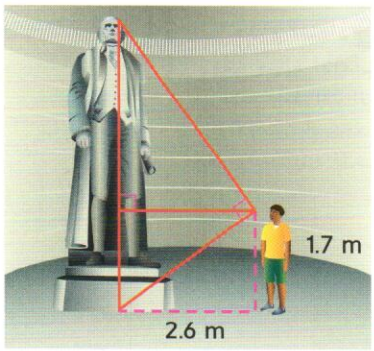


6.



مثال 4

7. استخدام النماذج يزور وليد نُصب جيفرسون التذكاري مع أسرته. ويريد تقدير ارتفاع تمثال توماس جيفرسون. لذا وقف وليد بحيث يكون خط رؤيته لأعلى التمثال وأسفله مشكلاً زاوية قائمة كما هو موضح في الرسم التخطيطي. فما مقدار طول التمثال تقريبًا؟



ملاحظة: غير مرسوم وفقاً لمقياس رسم.

التمرين وحل المسائل

مثال 1

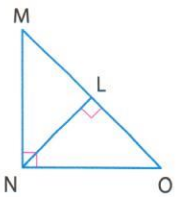
أوجد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد.

8. 4 و 81
9. 16 و 25
10. 20 و 25
11. 24 و 36
12. 2.4 و 12
13. 1.5 و 18

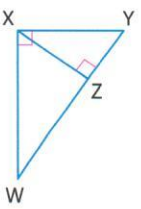
مثال 2

اكتب عبارة تَمَاثُل لتوضيح المثلثات الثلاثة المتماثلة في الشكل.

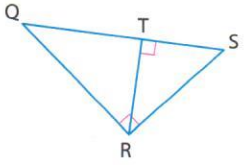
14.



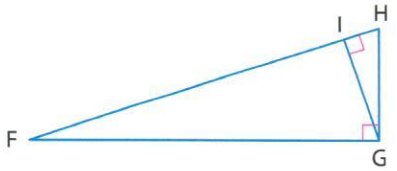
15.



16.



17.

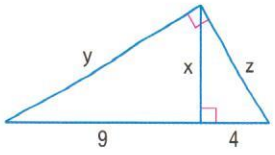


McGraw-Hill Education مؤسسة محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

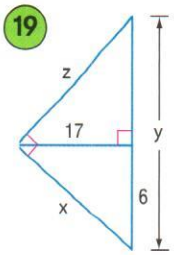
مثال 3

أوجد x و y و z.

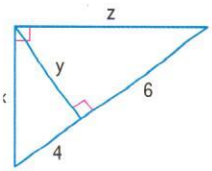
18.



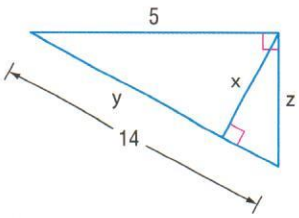
19



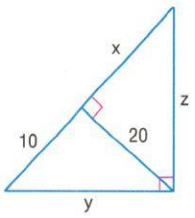
20.



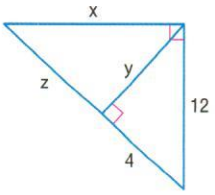
21.



22.

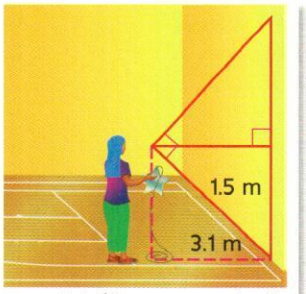


23.



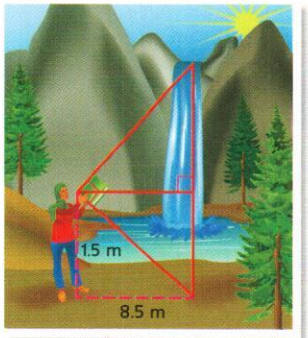
مثال 4

24. استخدام النماذج تعلّق خديجة نجومًا فضية في سقف صالة الألعاب الرياضية استعدادًا للاحتفال. وأرادت أن تكون أطراف الخيوط المربوط بها النجوم بارتفاع 2.2 أمتار من الأرض. استخدِم الرسم التخطيطي لتحديد مقدار الطول اللازم تحديده للخيوط.



ملاحظة: غير مرسوم وفقًا لمقياس رسم.

25. استخدام النماذج تَستخدم أماني كتابًا لملاحظة مدى ارتفاع الشلال. ومستوى بصرها على ارتفاع 1.5 أمتار من الأرض وأن المسافة الأفقية هي 8.5 أمتار من الشلال. لذا أوجد ارتفاع الشلال إلى أقرب جزء من عشرة من القدم.



ملاحظة: غير مرسوم وفقًا لمقياس رسم.

B أوجد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد.

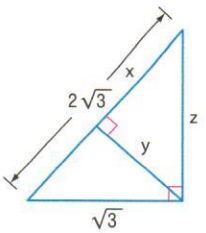
26. $\frac{1}{5}$ و 60

27. $\frac{3\sqrt{2}}{7}$ و $\frac{5\sqrt{2}}{7}$

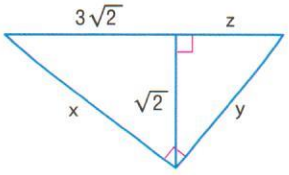
28. $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ و $\frac{5\sqrt{5}}{4}$

أوجد x و y و z.

29.



30.

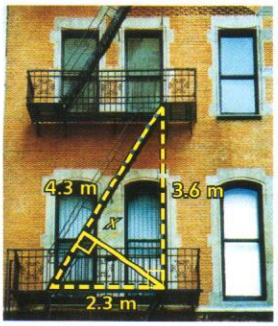


31. الجبر الوسط الهندسي لعدد ما وأربعة أضعاف العدد هو 22. فما العدد؟

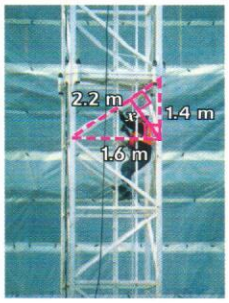
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

استخدم المثلثات المتشابهة لإيجاد قيمة x.

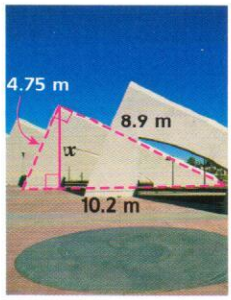
32.



33.

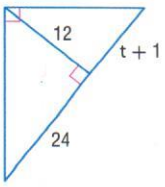


34.

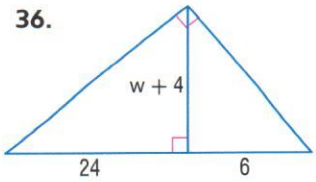


الجبر أوجد قيمة المتغير.

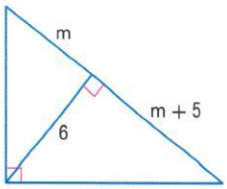
35.



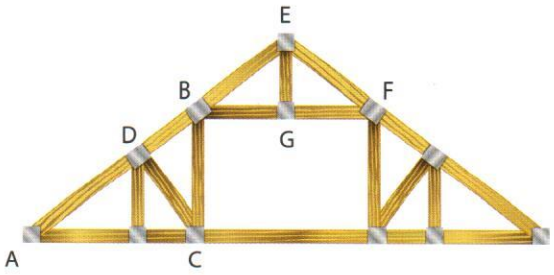
36.



37.



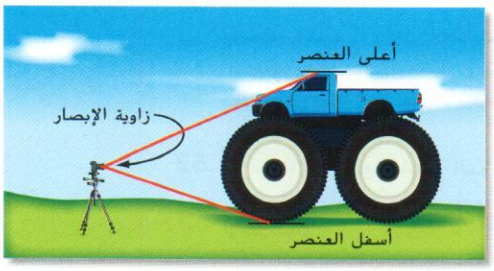
38. أعمال البناء جمالون الغرفة العلوية عبارة عن تصميم دعامي يوفر الدعم لهذه الغرفة ويوفر مساحة خالية يمكن استخدامها كمنطقة معيشة. في الرسم التخطيطي، يمثّل $\triangle BCA$ و$\triangle EGB$ مثلثين بزاوية قائمة، والمثلث $\triangle BEF$ متساوي الساقين، ويمثل $\overline{CD}$ الارتفاع في $\triangle ABC$، ويُمثل $\overline{EG}$ مقدار الارتفاع في $\triangle BEF$. إذا كان طول $DB = 1.5$ أمتار، $= 1.9$ أمتار، $= 3.3$ أمتار، $= 1.4$ أمتار AE؟



بناء فرضيات اكتب إثباتًا لكل نظرية.

39. النظرية 9.1 **40.** النظرية 9.2 **41.** النظرية 9.3

42. الشاحنات في الصورة الفوتوغرافية، الزاوية المشكّلة بواسطة قمة العنصر والكاميرا وأسفل العنصر تسمى زاوية الإبصار كما هو موضح على اليسار. تلتقط أمل صورة لشاحنة عملاقة يبلغ طولها 4.7 أمتار و 1.5 أمتار. لذا وضعت كاميرتها على الحامل الذي يرتفع 5 أقدام عن مستوى سطح الأرض، وقامت بضبط زاوية العرض الرأسية للكاميرا على زاوية مقدارها $90°$.



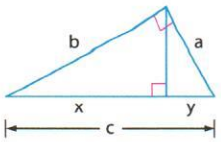
a. ارسم رسمًا تخطيطيًّا لهذه الحالة.

b. ما مقدار البُعد عن الشاحنة الواجب على أمل اتخاذه لتتمكن من احتواء ارتفاع الشاحنة بالكامل في لقطتها؟

43. التمويل يُمثل متوسطُ معدل العائد على استثمار ما على مدى عامين الوسط الهندسي للعائد السنوي لعامين. إذا بلغت عائدات الاستثمار 12% في سنة واحدة و7% في السنة التالية، فما نسبة متوسط معدل العائد على هذا الاستثمار على مدى فترة العامين؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

44. البرهان اشتق نظرية فيثاغورس باستخدام الشكل الموضح على اليسار ونظرية الوسط الهندسي (الساق).



حدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة *دائمًا* أم *أحيانًا* أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

45. الوسط الهندسي لأعداد صحيحة موجبة ومتتالية هو وسط العددين.

46. الوسط الهندسي لمربعين كاملين هو عدد صحيح موجب.

47. الوسط الهندسي لعددين صحيحين موجبين هو عدد صحيح آخر.

48. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تستكشف الوسط الهندسي.

x	y	$\sqrt{xy}$
		8
		8
		8
		8
		8

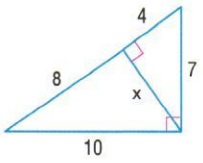
a. جدوليًا انسخ وأكمل الجدول المحتوي على خمسة أزواج مرتبة (x, y) مثل $\sqrt{xy} = 8$

b. بيانيًا مَثّل بيانيًا الأزواج المرتبة من الجدول في مخطط انتشار.

c. لفظيًا خمّن نوع التمثيل البياني الذي سيتم تشكيله في حالة توصيل النقاط من مخطط الانتشار. هل تعتقد أن التمثيل البياني لأي مجموعة أزواج مرتبة ناتجة في الوسط الهندسي ذاته سيكون له الشكل العام ذاته؟ اشرح استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

49. تحليل الخطأ يحاول كل من إياد وعائشة إيجاد قيمة x



في المثلث الموضح. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

إياد

$\frac{4}{x} = \frac{x}{7}$

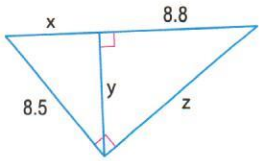
$x \approx 5.3$

عائشة

$\frac{4}{x} = \frac{x}{10}$

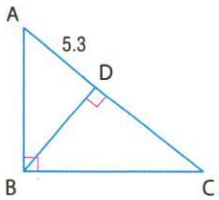
$x \approx 6.3$

50. تحدٍ راجع الشكل الموجود على اليمين. أوجِد x و y و z.



51. مسألة غير محددة الإجابة أوجد زوجين من أعداد كلية بوسط هندسي يكون أيضًا عددًا كليًا. ما الحالة الواجب استيفاؤها للحصول على وسط هندسي يتألف من عدد كلي ناتج عن زوج من الأعداد؟

52. الاستنتاج راجع الشكل الموجود على اليمين. يقع ملتقى ارتفاعات △ABC على بُعد 6.4 وحدات من النقطة D. أوجد BC.



53. الكتابة في الرياضيات قارن وبيّن الفرق بين كل من الوسط الحسابي والهندسي لعددين. متى سيتساوى الوسطان؟ علل استنتاجك.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

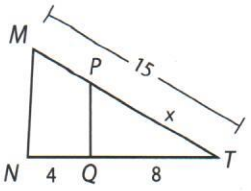
تمرين على الاختبار المعياري

54. ما الوسط الهندسي للعددين 8 و22 في أبسط صورة؟

A $4\sqrt{11}$ C $16\sqrt{11}$

B 15 D 176

55. إجابة مختصرة إذا كان $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$ فاستخدم التناسب لإيجاد قيمة x. اكتب الحل هنا.



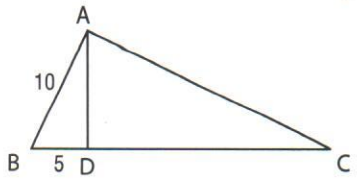
56. الجبر ما حلول المعادلة التربيعية $x^2 - 20 = 8x$?

F 2, 10 H −1, 20

G 20, 1 J −2, 10

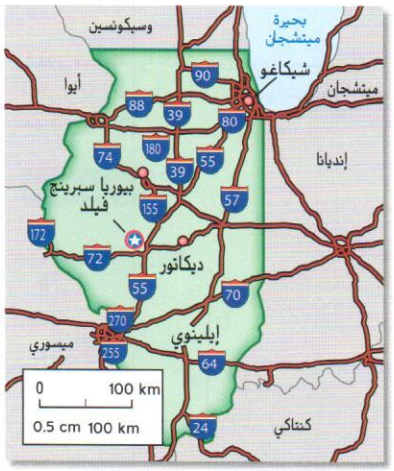
57. SAT/ACT في الشكل، تكون $\overline{AD}$ عمودية على $\overline{BC}$ وتكون $\overline{AB}$ عمودية على $\overline{AC}$. فما هو CB؟

A $5\sqrt{2}$
B $5\sqrt{3}$
C 20
D 25
E 75



مراجعة شاملة

58. الخرائط استخدم الخريطة لتقدير المدة التي سيتم استغراقها للقيادة من شيكاغو إلى سبرينج فيلد إذا كان متوسط سرعة القيادة 65 كيلومتراً لكل ساعة.



ارسم الشكل الأصلي والصورة المغيرة الأبعاد. ثم تحقق من أن تغيير الأبعاد هو تحويل تشابه

59. A(−1 ,3), B(7 ,9), C(3, −2); D(−1 ,1), E(3 ,3), F(0 ,1)

60. G(−4, −4), H(−2 ,1), J(2, −1); K(−3, −2), L(0 ,1)

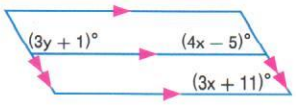
61. M(7, −4), N(5, −4), P(7, −1); Q(2, −8), R(6, −8), S(2, −2)

تعلمُ قياس الزاوية الداخلية لمضلع منتظم. حدد شكل المضلع.

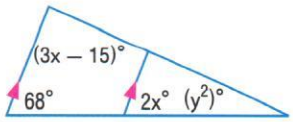
62. 108 **63.** 135

أوجد x و y في كل شكل.

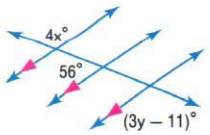
64.



65.

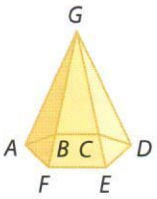


66.



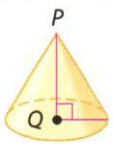
حدّد كل مجسّم. وسَمِّ القواعد والأوجه والحواف والرؤوس.

67.



68.

69.



مراجعة المهارات

حوّل كل تعبير إلى أبسط صورة بإنطاق المقام.

70. $\frac{2}{\sqrt{2}}$ **71.** $\frac{16}{\sqrt{3}}$ **72.** $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}}$ **73.** $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$ **74.** $\frac{21}{\sqrt{3}}$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

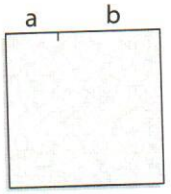
9-2 مختبر الهندسة
الإثباتات غير الكلامية

تعلّمتَ أن نظرية فيثاغورس تربط بين مقاييس الساقين والوتر في مثلث قائم الزاوية. يمكنك إثبات نظرية فيثاغورس باستخدام الرسوم التخطيطية ودون استخدام كلمات.

النشاط

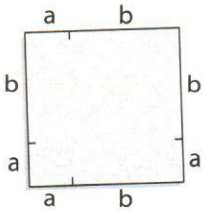
أثبت نظرية فيثاغورس باستخدام الورق والعمليات الجبرية.

الخطوة 1



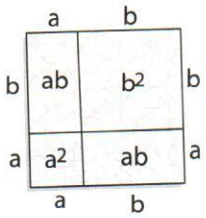
على قطعة واحدة من ورق استشفاف، اكتب a وb على أحد الجوانب كما هو موضح أعلاه.

الخطوة 2



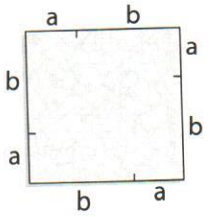
انسخ هذه القياسات على كل من الجوانب الأخرى.

الخطوة 3



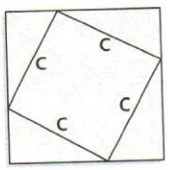
اطوِ الورقة إلى أربعة أقسام مع تسمية المنطقة الخاصة بكل جزء.

الخطوة 4



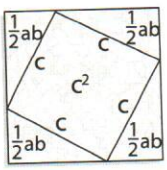
على قطعة أخرى من ورق الاستشفاف، اكتب a وb على كل جانب كما هو موضح أعلاه.

الخطوة 5



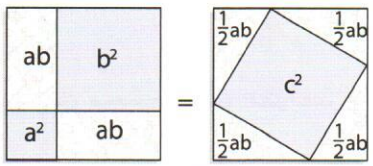
وصّل العلامات باستخدام مسطرة. افترض أن c يُمثل طول كل وتر من الأوتار.

الخطوة 6



اكتب على مساحة كل مثلث $\frac{1}{2}ab$، وعلى مساحة كل مربع اكتب c^2.

الخطوة 7 ضع المربعات بجانب بعضها البعض مع تلوين المناطق المتناظرة التي لها المساحة ذاتها. على سبيل المثال، $\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab = ab$. توضحُ الأجزاء غير المظللة أن $a^2 + b^2 = c^2$.

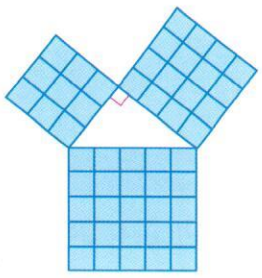


تحليل النتائج

1. استخدم مسطرة لقياس a وb وc. هل هذه المقاييس تؤكد على أن $a^2 + b^2 = c^2$؟

2. كرر النشاط بقيم a وb مختلفة. ما الذي تلاحظه؟

3. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا يعتبر الرسم التخطيطي الموجود على اليمين توضيحًا لنظرية فيثاغورس.



4. **تحدٍ** ارسم رسمًا تخطيطيًا لتوضيح أنه لأي عددين موجبين a وb، فإن $a + b > \sqrt{a^2 + b^2}$. اشرح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 9-2 نظرية فيثاغورس وعكسها

السابق:
- استخدمنا نظرية فيثاغورس لإعداد قانون المسافة.

الحالي:
1. استخدام نظرية فيثاغورس.
2. استخدام عكس نظرية فيثاغورس.

لماذا؟
- تُستخدم الأحبال الشريطية لتثبيت رجل الثلج القابل للنفخ. افترض أنك تعرف مقدار ارتفاع الأحبال الشريطية الذي سيتم عنده ربط رجل الثلج ومقدار البُعد الذي تحتاج إليه لتثبيت الأحبال في الأرض. يمكنك استخدام عكس نظرية فيثاغورس لضبط أطوال الأحبال للحفاظ على بقاء رجل الثلج في وضع عمودي على الأرض.

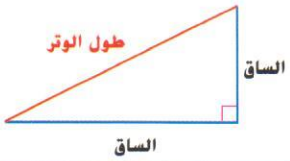
مفردات جديدة

ثلاثية فيثاغورس
Pythagorean triple

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
استخدام نماذج الرياضيات.

1 نظرية فيثاغورس

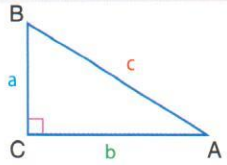
من المرجح أن نظرية فيثاغورس أحد أكثر النظريات شهرة في الرياضيات. فهي متعلقة بأطوال الوتر (الضلع المقابل للزاوية القائمة) وساقي المثلث (الضلعين المجاورين للزاوية القائمة) في المثلث قائم الزاوية.



النظرية 9.4 نظرية فيثاغورس

الشرح في مثلث قائم الزاوية، يكون مجموع مربعات أطوال ساقي المثلث مساويًا لمربع طول الوتر.

الرموز إذا كان $\triangle ABC$ مثلثًا قائم الزاوية والزاوية القائمة به هي C. فإن $a^2 + b^2 = c^2$.



يمكن استخدام الأوساط الهندسية لإثبات نظرية فيثاغورس.

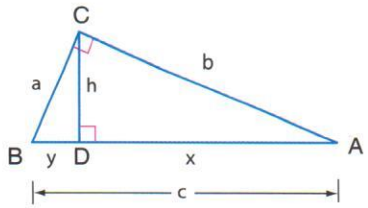
البرهان نظرية فيثاغورس

المعطيات: $\triangle ABC$ به الزاوية القائمة C

المطلوب: $a^2 + b^2 = c^2$

البرهان:

ارسم مثلثًا قائم الزاوية ABC بحيث تكون C هي الزاوية القائمة. ثم ارسم الارتفاع من C إلى $\overline{AB}$ فلنفترض أن $AB = c$ و $BC = a,\ CD = h$ و $AD = x,\ AC = b$.
لدينا الآن وسطان هندسيان.



$\frac{c}{b} = \frac{b}{x}$ و $\frac{c}{a} = \frac{a}{y}$	نظرية الوسط الهندسي (ساق المثلث)
$a^2 = cy$ $\quad b^2 = cx$	الضرب التبادلي
$a^2 + b^2 = cy + cx$	اجمع المعادلات.
$a^2 + b^2 = c(y + x)$	تحليل إلى العوامل.
$a^2 + b^2 = c \times c$	نظرًا لأن $c = y + x$. فقم بتعويض c مقابل $(y + x)$.
$a^2 + b^2 = c^2$	بسّط.

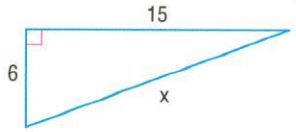
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك استخدام نظرية فيثاغورس لإيجاد طول أي ضلع من أضلاع مثلث قائم الزاوية مع العلم بطول الضلعين الآخرين.

مثال 1 إيجاد القياسات المفقودة باستخدام نظرية فيثاغورس

أوجد x.

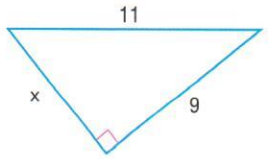
a.



الضلع المقابل للزاوية القائمة هو الوتر، إذًا $c = x$.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$6^2 + 15^2 = x^2$	$a = 6$ ، $= 15$
$261 = x^2$	بسّط.
$\sqrt{261} = x$	خُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين.
$3\sqrt{29} = x$	بسّط.

b.

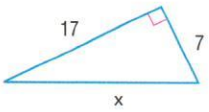


الوتر هو 11. إذًا $c = 11$.

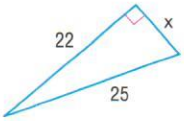
$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$x^2 + 9^2 = 11^2$	$a = x$ ، $= 9$
$x^2 + 81 = 121$	بسّط.
$x^2 = 40$	اطرح 18 من كل طرف.
$x = \sqrt{40}$ أو $2\sqrt{10}$	خُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين وبسّط.

تمرين موجّه

1A.



1B.

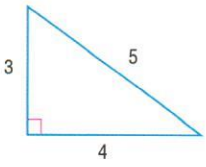


نصيحة دراسية

الجذر التربيعي الموجب

عند إيجاد طول أحد الأضلاع باستخدام نظرية فيثاغورس، لا تَستخدم سوى الجذر التربيعي الموجب وليس السالب، لأن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا.

ثلاثية فيثاغورس هي مجموعة مكوّنة من ثلاثة أعداد كاملة غير صفرية a, b, c. بحيث $a^2 + b^2 = c^2$. إحدى أشهر ثلاثيات فيثاغورس هي 3، 4، 5. ويقصد منها أن أضلاع المثلث قائم الزاوية هي بنسب 3:4:5. وموضح أدناه في الصف الأول أكثر ثلاثيات فيثاغورس شيوعًا. والثلاثيات الموجودة أدنى هذه الثلاثية يتم إيجادها من خلال ضرب كل عدد من الثلاثية في العامل ذاته.



المفهوم الأساسي ثلاثيات فيثاغورس الشائعة

3, 4, 5	5, 12, 13	8, 15, 17	7, 24, 25
6, 8, 10	10, 24, 26	16, 30, 34	*14, 48, 50*
9, 12, 15	15, 36, 39	24, 45, 51	*21, 72, 75*
3x, 4x, 5x	5x, 12x, 13x	8x, 15x, 17x	*7x, 24x, 25x*

العدد الأكبر في كل ثلاثية هو طول الوتر.

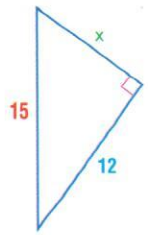
نصيحة دراسية

ثلاثيات فيثاغورس إذا كانت أطوال أضلاع أي مثلث قائم الزاوية *ليست* أعدادًا كلية، فإن الأطوال لا تمثّل ثلاثية فيثاغورس.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

مثال 2 استخدام ثلاثية فيثاغورس

استخدم ثلاثية فيثاغورس لإيجاد قيمة x. اشرح استنتاجك.

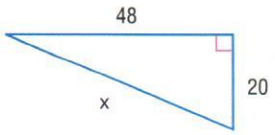


لاحظ أن 15 و 12 كلاهما مضاعف للعدد 3، لأن $5 \times 3 = 15$ و $4 \times 3 = 12$. بما أن "3، 4، 5" هي إحدى ثلاثيات فيثاغورس، فإن طول الساق المفقود x يكون 3×3 أو 9.

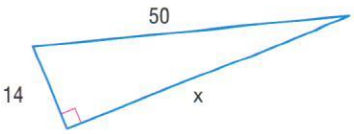
نظرية فيثاغورس	$12^2 + 9^2 \stackrel{?}{=} 15^2$ تحقق
بسّط.	$225 = 225$ ✓

تمرين موجّه

2A.



2B.



قراءة في الرياضيات

3-4-5 يطلق على المثلث قائم الزاوية بأضلاع أطوالها 3 و 4 و 5 اسم مثلث قائم الزاوية *3-4-5*.

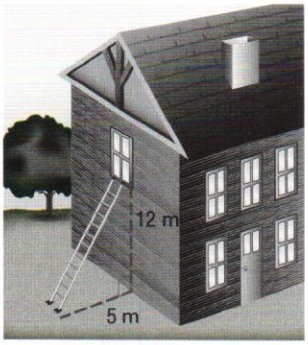
يمكن استخدام نظرية فيثاغورس لحل العديد من مسائل الحياة اليومية.

مثال 3 على الاختبار المعياري استخدام نظرية فيثاغورس

لا يُمكِن لأيمن دخول شقته. والنافذة الوحيدة المفتوحة في الطابق الثاني الذي يرتفع 12 متراً عن سطح الأرض. لذا فهو يحتاج إلى اقتراض سلّم من جاره. إذا وجب عليه وضع السلّم على بعد 5 أمتار من منزله لتجنّب بعض الشجيرات، فما طول السلّم الذي يحتاج إليه أيمن؟

A 7 أمتاراً **C** 13 أمتاراً

B 11 أمتاراً **D** 17 أمتاراً



ملاحظة: ليس مرسومًا وفقًا لمقياس رسم.

قراءة فقرة الاختبار

إن كلاً من مقدار بُعد السلّم عن المنزل، والارتفاع الذي بلغه السلّم، وطول السلّم ذاته تُمثِّل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية. سيلزمك إيجاد طول السلّم، والذي يمثل الوتر.

حَل فقرة الاختبار

الطريقة 1 استخدم ثلاثية فيثاغورس.

طول ساقيّ المثلث هو 5 و 12. تُمثل 5 و 12 و 13 ثلاثية فيثاغورس، إذًا طول السلّم هو 13 قدمًا.

الطريقة 2 استخدم نظرية فيثاغورس.

افترض أن x يمثل طول السلّم.

نظرية فيثاغورس	$5^2 + 12^2 = x^2$
بسّط.	$169 = x^2$
خُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين.	$\sqrt{169} = x$
بسّط.	$13 = x$

إذًا، الإجابة هي الخيار C.

نصيحة عند حل الاختبار

التفكير المنطقي بما أن وتر المثلث قائم الزاوية دائمًا ما يكون الضلع الأطول، فإن طول السلّم في المثال 3 يجب أن يكون أكبر من 5 أو 12 متراً. بما أن 7 و 11 متراً كلاهما أقل من 12 متراً، إذًا الاختياران A و B يمكن استبعادهما.

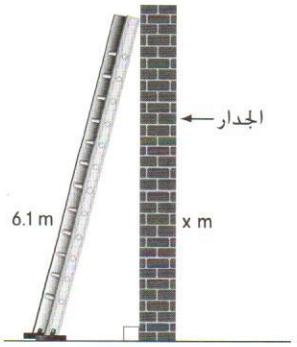
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين موجّه

3. وفقًا للوائح السلامة الخاصة بالشركة، فإن المسافة من قاعدة السلّم إلى الجدار الذي تستند إليه يجب ألا تزيد عن ربع ارتفاع السلّم إجمالاً. وقد تم إعطاؤك سلّم ارتفاعه 6.1 متراً لوضعه مقابل أحد الجدران في موقع العمل. في حالة اتباع لوائح السلامة الخاصة بالشركة، فما الحد الأقصى للارتفاع x الذي سيصله السلّم على الجدار مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة؟

F 3.7 متراً　　**H** 6.3 متراً

G 5.9 متراً　　**J** 9.3 قدمًا

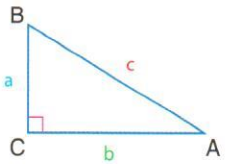


ملاحظة: ليس مرسومًا وفقًا لمقياس رسم.

2 عكس نظرية فيثاغورس

عكس نظرية فيثاغورس ينطبق أيضًا. يمكنك استخدام هذه النظرية لتحديد ما إذا كان المثلثُ قائمَ الزاوية من خلال معرفة قياسات جميع أضلاعه الثلاثة.

النظرية 9.5 عكس نظرية فيثاغورس



الشرح إذا كان مجموع مربعات أطوال الضلعين الأقصر لأحد المثلثات مساويًا لمربع طول الضلع الأطول، فإن المثلث يكون قائم الزاوية.

الرموز إذا كان $a^2 + b^2 = c^2$، فإن $\triangle ABC$ مثلث قائم الزاوية.

سوف تثبتُ النظرية 9.5 في التمرين 35.

يمكنك أيضًا استخدام الأطوال الطرفية لتصنيف مثلث على أنه حاد أو منفرج.

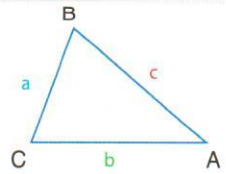
نصيحة دراسية

تحديد الضلع الأطول إذا تم التعبير عن مقاييس أي ضلع من أضلاع المثلث بصورة جذر، فربما ترغب في استخدام الآلة الحاسبة لتحديد الضلع الأطول.

نظريات نظريات متباينات فيثاغورس

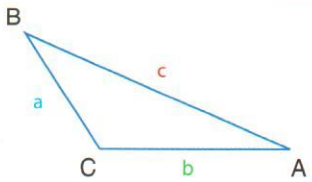
9.6 إذا كان مربع طول الضلع الأطول في أحد المثلثات أقل من مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين، فإن المثلث يكون حاد الزاوية.

الرموز إذا كانت $c^2 < a^2 + b^2$، فإن $\triangle ABC$ يكون حاد الزاوية.



9.7 إذا كان مربع طول الضلع الأطول في أحد المثلثات أكبر من مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين، فإن المثلث يكون منفرج الزاوية.

الرموز إذا كان $c^2 > a^2 + b^2$، فإن $\triangle ABC$ منفرج الزاوية.



سوف تثبتُ نظريتي 9.6 و 9.7 من خلال التمرينين 36 و 37 على الترتيب.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 تصنيف المثلثات

حدد ما إذا كانت أي مجموعة أعداد من المجموعات التالية يمكن أن تكون قياسات لأضلاع مثلث. إذا كان الأمر كذلك، فقم بتصنيف المثلث على أنه حاد أو قائم أو منفرج الزاوية. علل إجابتك.

a. 7, 14, 16

الخطوة 1 حدد ما إذا كانت القياسات يمكن أن تشكل مثلثًا باستخدام نظرية متباينة المثلث أم لا.

$7 + 16 > 14$ ✓ $\quad 14 + 16 > 7$ ✓ $\quad 7 + 14 > 16$ ✓

أطوال الأضلاع 7 و 14 و 16 يمكن أن تشكل مثلثًا.

الخطوة 2 صنّف المثلث بواسطة مقارنة مربع الضلع الأطول مع مجموع مربعي الضلعين الآخرين.

قارن c^2 ، $a^2 + b^2$. $\quad c^2 \stackrel{?}{=} a^2 + b^2$

التعويض $\quad 16^2 \stackrel{?}{=} 7^2 + 14^2$

بسّط وقارن. $\quad 256 > 245$

بما أن $c^2 > a^2 + b^2$، إذًا المثلث منفرج الزاوية.

b. 9, 40, 41

الخطوة 1 حدد ما إذا كانت القياسات يمكن أن تشكّل مثلثًا أم لا.

$9 + 41 > 40$ ✓ $\quad 40 + 41 > 9$ ✓ $\quad 9 + 40 > 41$ ✓

أطوال الأضلاع 9 و 40 و 41 يمكن أن تشكل مثلثًا.

الخطوة 2 صنّف المثلث.

قارن c^2 ، $a^2 + b^2$. $\quad c^2 \stackrel{?}{=} a^2 + b^2$

التعويض $\quad 41^2 \stackrel{?}{=} 9^2 + 40^2$

بسّط وقارن. $\quad 1681 = 1681$

بما أن $c^2 = a^2 + b^2$، إذًا المثلث قائم الزاوية.

تمرين موجّه

4A. 11, 60, 61 **4B.** $2\sqrt{3}, 4\sqrt{2}, 3\sqrt{5}$ **4C.** 6.2, 13.8, 20

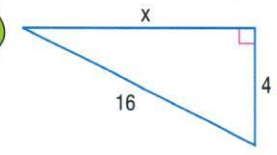
مراجعة المفردات

نظرية متباينة المثلث يجب أن يكون مجموع أطوال أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

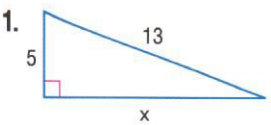
التحقق من فهمك

مثال 1 **أوجد x.**

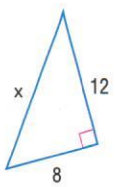
3



1.

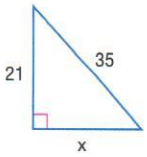


2.



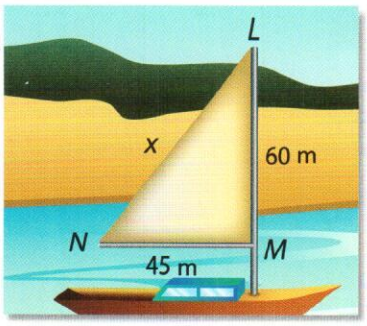
مثال 2

4. استخدم ثلاثية فيثاغورس لإيجاد قيمة x. اشرح استنتاجك.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3



5. الاختيار من متعدد يوضح الشكل التالي الشراع الرئيسي لقارب لعبة. ما طول $\overline{LN}$ بالبوصة؟

A 52.5 C 72.5

B 65 D 75

مثال 4

حدد ما إذا كانت أي مجموعة أعداد من المجموعات التالية يمكن أن تكون قياسات لأضلاع مثلث. إذا كان الأمر كذلك، فصنّف المثلث على أنه حاد أو منفرج أو قائم الزاوية. علل إجابتك.

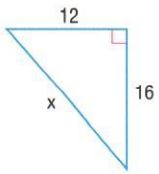
6. 15, 36, 39 **7.** 16, 18, 26 **8.** 15, 20, 24

التمرين وحل المسائل

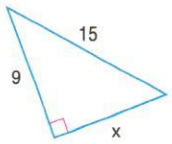
مثال 1

أوجد x.

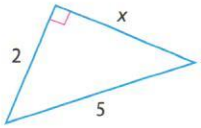
9.



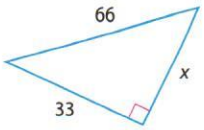
10.



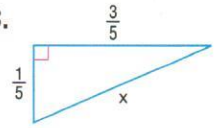
11.



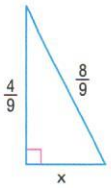
12.



13.



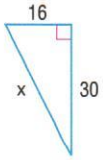
14.



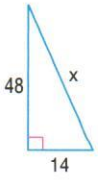
مثال 2

المثابرة استخدم ثلاثية فيثاغورس لإيجاد قيمة x.

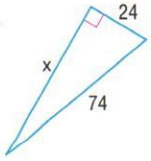
15



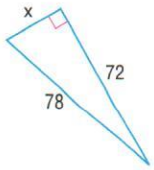
16.



17.

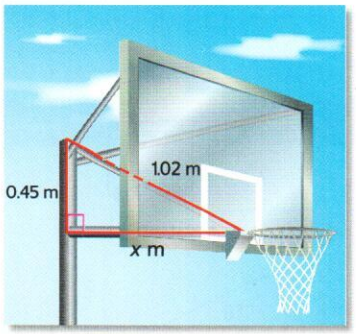


18.

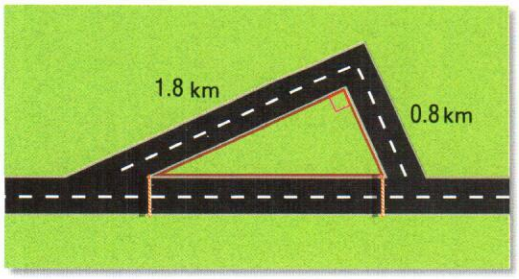


مثال 3

19. كرة السلة الجزء الذي يدعم مرمى كرة السلة يشكّل زاوية قائمة كما هو موضّح. فما طول x من الطرف الأفقي من ذلك الجزء الداعم؟



20. قيادة المَركبات الشارع الذي تسلكه خديجة عادة للذهاب إلى المدرسة قيد الإنشاء. لذا، اتخذت تحويلة الطريق الموضحة. إذا بدأت منطقة الإنشاءات عند نقطة مغادرة خديجة للطريق الاعتيادي وانتهت عند نقطة دخولها مجددًا في هذا الطريق، فما مقدار المسافة الممتدة للطريق قيد الإنشاء؟



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مثال 4

حدد ما إذا كانت أي مجموعة أعداد من المجموعات التالية يمكن أن تكون قياسات لأضلاع مثلث. إذا كان الأمر كذلك، فصنّف المثلث على أنه حاد أو منفرج أو قائم الزاوية. علل إجابتك.

21. 7, 15, 21

22. 10, 12, 23

23. 4.5, 20, 20.5

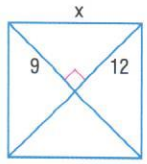
24. 44, 46, 91

25. 4.2, 6.4, 7.6

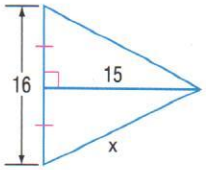
26. 4, 12, 14

أوجد x.

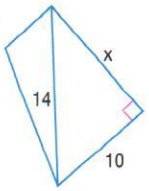
27.



28.



29.



الهندسة الإحداثية *حدد ما إذا كان $\triangle XYZ$ هو مثلث حاد أم قائم أم منفرج الزاوية بالنسبة للرؤوس المعطاة. اشرح.*

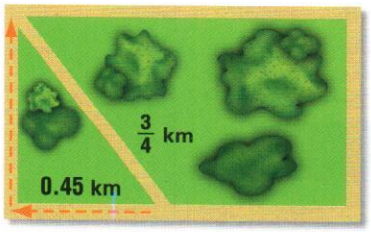
30. $X(-3, -2), Y(-1, 0), Z(0, -1)$

31. $X(-7, -3), Y(-2, -5), Z(-4, -1)$

32. $X(1, 2), Y(4, 6), Z(6, 6)$

33. $X(3, 1), Y(3, 7), Z(11, 1)$

34. العَدْو يركض ماجد في المتنزه ثلاث مرات أسبوعيًا. وعادة، يسلك ممر $\frac{3}{4}$ كيلومتراً يمر عبر المتنزه. واليوم، تم إغلاق الممر، إذًا سيسلك الطريق المظلل بالسهم البرتقالي. فما مقدار بُعد المسافة التي سيركضها على الطريق البديل عوضًا عما إذا سلك طريقه المعتاد؟



35. البرهان اكتب فقرة إثبات للنظرية 9.5.

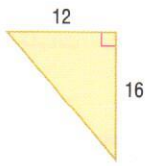
البرهان اكتب فقرة إثبات من عمودين لكل نظرية.

36. النظرية 9.6

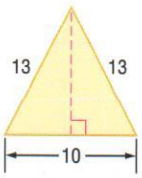
37. النظرية 9.7

التبرير المنطقي أوجد محيط ومساحة كل شكل.

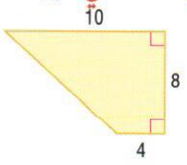
38.



39.



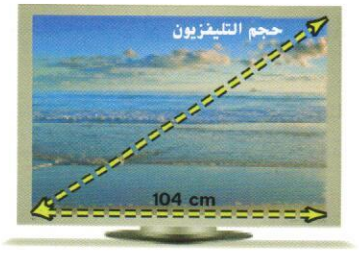
40.



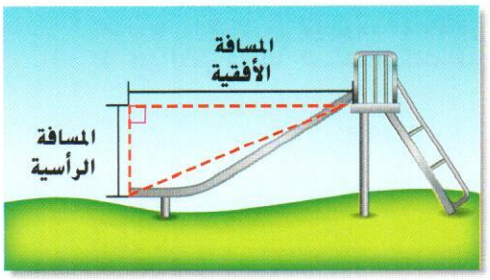
41. الجبر يبلغ أطوال أضلاع مثلث x و 5 و 25. فإذا كان طول الضلع الأطول 25، فما قيمة x التي تجعل المثلث قائم الزاوية؟

42. الجبر يبلغ أطوال أضلاع مثلث $2x$ و 8 و 12. إذا كان طول الضلع الأطول $2x$، فما قيمة x التي تجعل المثلث حاد الزاوية؟

43. التليفزيون نسبة العرض إلى الارتفاع لشاشة التليفزيون عالي الوضوح (HDTV) هي 16:9. ويوضَّح حجم التليفزيون بواسطة المسافة القُطرية عبر الشاشة. إذا كان تليفزيون HDTV عرضه 104 سنتيمتراً، فما مقدار حجم شاشته؟



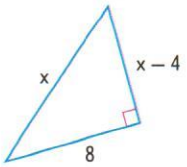
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.



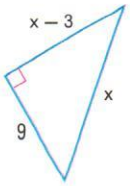
44. ساحات الألعاب وفقًا لكتيب السلامة في ساحات الألعاب العامة، فإن نسبة المسافة الرأسية إلى المسافة الأفقية المغطاة بواسطة الزحليقة ينبغي ألا تزيد عن 4 إلى 7. إذا كانت المسافة الأفقية المخصصة في تصميم الزحليقة بمقدار 4.3 متراً، فما مقدار الطول المفترض للزحليقة كحد أقصى؟

أوجد x.

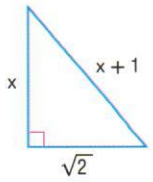
45



46.



47.



48. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستستكشف مثلثات خاصة قائمة الزاوية.

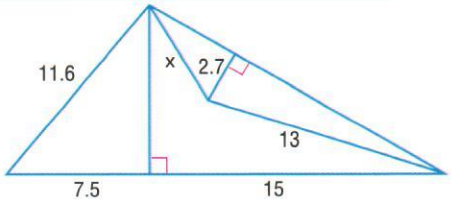
a. هندسيًا ارسم ثلاثة مثلثات قائمة الزاوية متساوية الساقين تكون أطوال أضلاعها أعدادًا كلية. قم بتسمية المثلثات *ABC*، بحيث تكون الزاوية القائمة في الرأس *A* على الترتيب. حدد طول الساق لكل ضلع، ثم أوجد طول الوتر بالضبط.

b. جدوليًا انسخ الجدول التالي وأكمله.

المثلث	الطول				النسبة	
ABC	*BC*		*AB*		$\frac{BC}{AB}$	
MNP	*NP*		*MN*		$\frac{NP}{MN}$	
XYZ	*YZ*		*XY*		$\frac{YZ}{XY}$	

c. بالكلمات خمّن نسبة الوتر إلى الساق لزاوية قائمة في مثلث متساوي الساقين.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا



49. تحدٍ أوجد قيمة x في الشكل الموجود على اليمين.

50. الفرضيات *صواب* أم *خطأ*؟ أي مثلثين قائمي الزاوية يشتركان في الوتر ذاته يكون لهما المساحة ذاتها. اشرح استنتاجك.

51. مسألة غير محددة الإجابة ارسم مثلثًا قائم الزاوية بأطوال أضلاع تشكّل ثلاثية فيثاغورس. إذا ضاعفتَ طول كل ضلع، فهل ستكون النتيجة مثلثًا حاد أم قائم أم منفرج الزاوية إذا كنت تعلمُ طول كل ضلع؟ اشرح.

52. الكتابة في الرياضيات ابحث في المقادير غير القابلة للقياس، ثم أوضح مدى ارتباط هذه العبارة باستخدام الأعداد غير النسبية في الهندسة. واذكر مثالاً للأعداد غير النسبية المستخدمة في الهندسة.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

تمرين على الاختبار المعياري

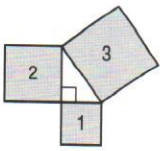
53. أي مجموعة أعداد من المجموعات التالية لا يمكن أن تكون قياسات لأضلاع مثلث؟

A 10, 11, 20
B 14, 16, 28
C 35, 45, 75
D 41, 55, 98

54. متنزه على شكل مربع به ممر مشي مائل (قُطري) من أحد الأركان إلى الآخر. إذا كان طول الممر 120 مترًا. فما المقدار التقريبي لكل ضلع في المتنزه؟

F 60 m
G 85 m
H 170 m
J 240 m

55. إجابة مختصرة إذا كان محيط المربع 2 هو 200 وحدة ومحيط المربع 1 هو 150 وحدة. فما محيط المربع 3؟



56. SAT/ACT في $\triangle ABC$، تُعد $\angle B$ زاوية قائمة و $\angle A$ أكبر بمقدار $20°$ عن $\angle C$. ما قياس $\angle C$؟

A 30
B 35
C 40
D 45
E 70

مراجعة شاملة

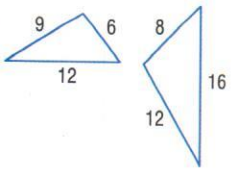
أوجد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد. (الدرس 1-9)

57. 4 و 9
58. 5 و 45
59. 12 و 15
60. 36 و 48

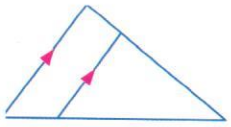
61. رسومات بمقياسات نسبية يعمل بلال على تصميم نموذج بمقياسات نسبية لمنحدر تزلج على ورقة تمثيل بياني مقاس 25.4 في 20.3 سنتيمترًا. إذا افترض أن المنحدر الفعلي سيكون 3.7 سنتيمترًا في 2.4 متر. فأوجد المقياس النسبي الملائم للرسم وحدد أبعاد المنحدر.

بيّن ما إذا كان المثلثان متشابهين أم لا. إن كانا متشابهين، فاكتب عبارة تشابه. وإن لم يكونا متشابهين، فما الشروط التي تكفي لإثبات تشابه المثلثين؟ اشرح استنتاجك.

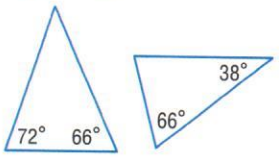
62.



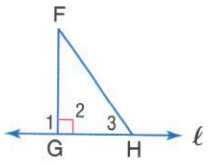
63.



64.



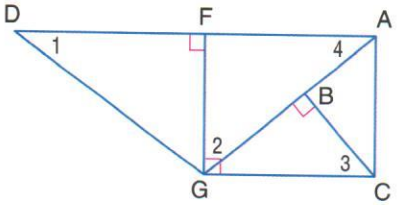
65. البرهان اكتب برهانًا من عمودين.



المعطيات $\overline{FG} \perp \ell$
$\overline{FH}$ هو أي قطعة غير عمودية من F إلى ℓ.

المطلوب: $FH > FG$

أوجد كل قياس إذا كان $m\angle AGC = 40$ $m\angle DGF = 53$.



66. $m\angle 1$
67. $m\angle 2$
68. $m\angle 3$
69. $m\angle 4$

أوجد المسافة بين كل زوج من الخطوط المتوازية بمراعاة المعادلات المعطاة.

70. $y = 4x$
$y = 4x - 17$

71. $y = 2x - 3$
$2x - y = -4$

72. $y = -0.75x - 1$
$3x + 4y = 20$

مراجعة المهارات

أوجد قيمة x.

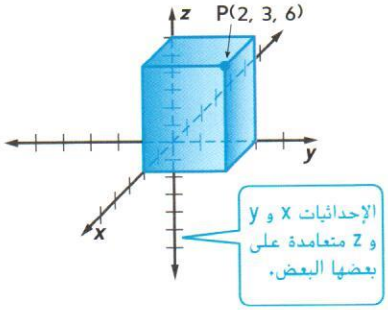
73. $18 = 3x\sqrt{3}$
74. $24 = 2x\sqrt{2}$
75. $9\sqrt{2} \cdot x = 18\sqrt{2}$
76. $2 = x \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-2 مختبر الهندسة
الإحداثيات في الفضاء

استخدام الأزواج المرتبة لإحداثيين لوصف موقع نقطة ما على المستوى الإحداثي. بما أن الفضاء له ثلاثة أبعاد، فسوف تتطلب النقطة ثلاثة أعداد أو إحداثيات لوصف موقعها في الفضاء.

وتُمثَّل النقطة في الفضاء **بمجموعة ثلاثية مرتبة** من الأعداد الحقيقية (x و y و z). في الشكل الموضح على اليمين، تُحدِّد الثلاثي المُرتب (2 , 3 , 6) النقطةَ P.
لاحظ أنه تم استخدام منشور مستطيلي لعرض المنظور.



النشاط 1 التمثيل البياني لمجسم مستطيل الشكل

مثّل بيانيًا مجسمًا مستطيل الشكل له رأسان، $L(4, -5, 2)$، ونقطة الأصل. عين إحداثيات كل رأس.

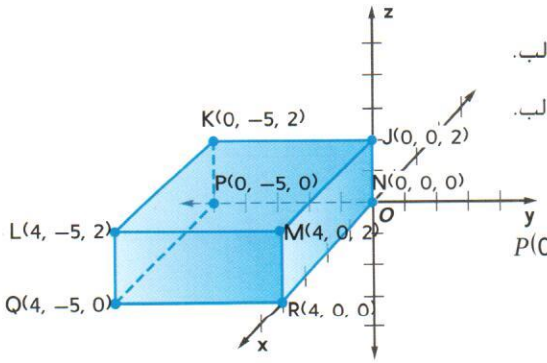
الخطوة 1 عيّن الإحداثي x أولاً. ارسم قطعة من الوحدات الـ 4 لنقطة الأصل في الاتجاه الموجب.

الخطوة 2 لتعيين الإحداثي y. ارسم الوحدات الخمس لقطعة في الاتجاه السالب.

الخطوة 3 بعد ذلك، لتعيين الإحداثي z، ارسم طول وحدتي قطعة في الاتجاه السالب.

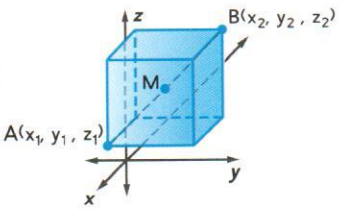
الخطوة 4 سمِّ الإحداثي بالحرف L.

الخطوة 5 ارسم منشورًا مستطيلاً وسمِّ كل رأس من رؤوسه: $L(4, -5, 2)$ و $K(0, -5, 2)$ و $J(0, 0, 2)$ و $M(4, 0, 2)$ $Q(4, -5, 0)$ و $P(0, -5, 0)$ و $N(0, 0, 0)$ و $R(4, 0, 0)$.



يعد إيجاد المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء مماثلاً لإيجاد المسافة ونقطة المنتصف في المستوى الإحداثي.

المفهوم الأساسي قانونا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء



إذا كان A له الإحداثيات $A(x_1, y_1, z_1)$ وB له الإحداثيات $B(x_2, y_2, z_2)$، فإن

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

نقطة منتصف M للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ تكون لها الإحداثيات

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

النشاط 2 قانونا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

إذا كان $J(2, 4, 9)$ و$K(-4, -5, 11)$.

a. أوجد JK.

$$JK = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$ قانون المسافة في الفضاء

$$= \sqrt{(-4 - 2)^2 + (-5 - 4)^2 + (11 - 9)^2}$$ التعويض

$$= \sqrt{121}$$ بسّط.

$$= 11$$ استخدم الحاسبة.

b. حدد إحداثيات نقطة منتصف M لـ $\overline{JK}$.

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$ قانون نقطة المنتصف في الفضاء

$$= \left(\frac{2 + (-4)}{2}, \frac{4 + (-5)}{2}, \frac{9 + 11}{2}\right)$$ التعويض

$$= \left(-1, -\frac{1}{2}, 10\right)$$ بسّط.

تمارين

مثّل بيانيًا مجسمًا مستطيل الشكل يحتوي على النقطة المعطاة ونقطة الأصل في صورة رأسين. حدد إحداثيات كل رأس.

1. $A(2, 1, 5)$
2. $P(-1, 4, 2)$
3. $C(-2, 2, 2)$
4. $R(3, -4, 1)$
5. $P(4, 6, -3)$
6. $G(4, 1, -3)$
7. $K(-2, -4, -4)$
8. $W(-1, -3, -6)$
9. $W(3, 3, 4)$

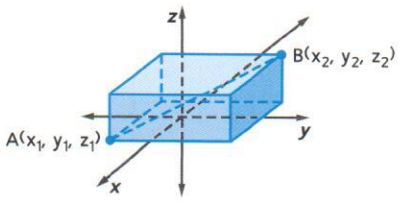
حدد المسافة بين كل زوجين من النقاط. بعد ذلك، حدد إحداثيات نقطة المنتصف M للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين.

10. $D(0, 0, 0)$ و $E(1, 5, 7)$
11. $G(-3, -4, 6)$ و $H(5, -3, -5)$
12. $K(2, 2, 0)$ و $L(-2, -2, 0)$
13. $P(-2, -5, 8)$ و $Q(3, -2, -1)$
14. $A(4, 7, 9)$ و $B(-3, 8, -8)$
15. $W(-12, 8, 10)$ و $Z(-4\text{v } 1, -2)$
16. $F\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$ و $G(0, 3, 0)$
17. $G(1, -1, 6)$ و $H\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 2\right)$
18. $B(\sqrt{3}, 2, 2\sqrt{2})$ و $C(-2\sqrt{3}, 4, 4\sqrt{2})$
19. $S(6\sqrt{3}, 4, 4\sqrt{2})$ و $T(4\sqrt{3}, 5, \sqrt{2})$

20. **البرهان** اكتب إثباتًا إحداثيًا لقانون المسافة في الفضاء.

المعطيات: A له الإحداثيات $A(x_1, y_1, z_1)$، وB له الإحداثيات $B(x_2, y_2, z_2)$.

المطلوب: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$



21. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبيّن الفرق بين قانون المسافة ونقطة المنتصف على المستوى الإحداثي وفي فضاء إحداثي ثلاثي الإبعاد.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-3 المثلثات القائمة الخاصة

السابق:
- استخدام خصائص المثلثات متساوية الساقين ومتساوية الأضلاع.

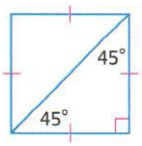
الحالي:
1 استخدام خصائص المثلثات بزوايا 45° و45° و90°.
2 استخدام خصائص المثلثات بزوايا 30° و60° و90°.

لماذا:
- ضمن مجموعة أدوات أُعدت للطلاب الحاضرين اجتماع اتحاد الطلاب الإقليمي، طلبت حصة أقلام تظليل مثلثة الشكل. وأرادت شراء صناديق مستطيلة لأقلام التظليل وغيرها من الأدوات. لكنها قلقة بشأن احتمالية عدم استيعاب الصندوق الذي اشترته لأقلام التظليل. فإذا كانت تعلمُ أطوال ضلع في شكل قلم التظليل، فسيكون بإمكانها استخدام خصائص المثلثات الخاصة قائمة الزاوية لتحديد ما إذا كان الصندوق سيستوعب أقلام التظليل أم لا.

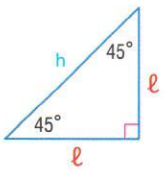
ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 خصائص المثلثات بزوايا 45° و45° و90°

يشكل قُطر مربع مثلثين قائمي الزاوية متطابقين ومتساويي الأضلاع. بما أن زوايا القاعدة في مثلث متساوي الأضلاع متطابقة، فإن قياس كل زاوية حادة هو 2 ÷ 90 أو 45. وهذا المثلث يُسمى أيضًا بمثلث بزوايا 45° و45° و90°.



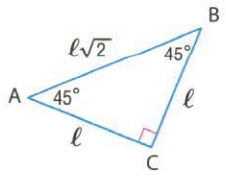
يمكنك استخدام نظرية فيثاغورس لإيجاد العلاقة بين أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية بزوايا 45° و45° و90°.



نظرية فيثاغورس	$\ell^2 + \ell^2 = h^2$
بسّط.	$2\ell^2 = h^2$
خُذ الجذر التربيعي للطرفين.	$\sqrt{2\ell^2} = \sqrt{h^2}$
بسّط.	$\ell\sqrt{2} = h$

هذا البرهان الجبري يبرهن على تطبيق النظرية التالية.

نظرية 9.8 نظرية المثلثات بزوايا قياساتها 45° و45° و90°



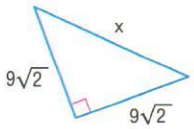
في مثلث بزوايا قياساتها 45° و45° و90°. يكون الساقان ℓ متطابقين وطول الوتر h يساوي $\sqrt{2}$ ضعف طول أحد الساقين.

الرموز في المثلث بزوايا قياساتها 45° و45° و90°. يكون $\ell = \ell$ و $h = \ell\sqrt{2}$.

مثال 1 إيجاد طول الوتر في مثلث بزوايا قياساتها 45° و45° و90°

أوجد x.

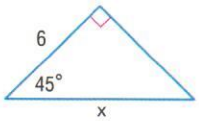
b.



الزاويتان الحادتان في مثلث قائم الزاوية متتامتان، إذًا قياس الزاوية الثالثة هو 45 - 90 أو 45. نظرًا لأن هذا مثلث بزوايا 45° و45° و90°. فاستخدم النظرية 9.8.

النظرية 9.8	$h = \ell\sqrt{2}$
التعويض	$x = 9\sqrt{2} \times \sqrt{2}$
	$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$
	$x = 9 \times 2$ أو 18

a.



قياس ساقي هذا المثلث قائم الزاوية متماثل، إذا فهو مثلث متساوي الساقين. نظرًا لأن هذا مثلث بزوايا 45° و45° و90°. فاستخدم النظرية 9.8.

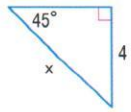
النظرية 9.8	$h = \ell\sqrt{2}$
التعويض	$x = 6\sqrt{2}$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف ©

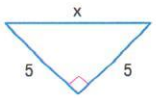
تمرين موجّه

أوجد x.

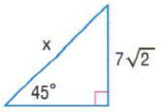
1A.



1B.



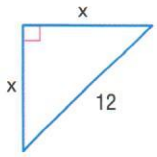
1C.



يمكنك أيضًا الحل بترتيب عكسي مستخدمًا النظرية 9.8 لإيجاد أطوال سيقان مثلث بزوايا 45° و45° و90° مع معرفة طول وتره.

مثال 2 إيجاد أطوال الساقين في مثلث بزوايا 45° و45° و90°

أوجد x.



ساقا المثلث قائم الزاوية لهما القياس ذاته، x.
إذًا يحتوي المثلث على زوايا 45° و45° و90°.
استخدم النظرية 9.8 لإيجاد x.

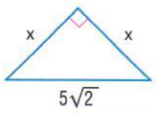
$h = \ell\sqrt{2}$	نظرية المثلث بزوايا 45° و 45° و 90°
$12 = x\sqrt{2}$	التعويض
$\frac{12}{\sqrt{2}} = x$	اقسم كل طرف على $\sqrt{2}$.
$\frac{12}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = x$	طبّق إنطاق المقام.
$\frac{12\sqrt{2}}{2} = x$	اضرب.
$6\sqrt{2} = x$	بسّط

مراجعة المفردات

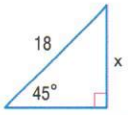
إنطاق المقام إحدى الطرق المستخدمة للتخلص من الجذور من مقام الكسر

تمرين موجّه

2A.



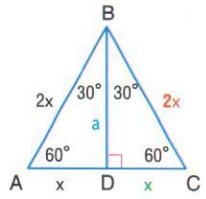
2B.



2 خصائص المثلثات بزوايا 30° و60° و90°

المثلث بزوايا 30° و60° و90° هو مثلث آخر خاص قائم الزاوية أو مثلث قائم الزاوية بأطوال أضلاع تتشارك في علاقة خاصة. يمكنك استخدام مثلث متساوي الأضلاع لإيجاد هذه العلاقة. عندما يمتد ارتفاع من أي رأس مثلث متساوي الأضلاع، فسيتكوّن منه مثلثان متطابقان بزوايا 30° و60° و90°. في الشكل الموضح، $\triangle ABD \cong \triangle CBD$.

إذًا $\overline{AD} \cong \overline{CD}$. إذا كان $AD = x$، فإن $CD = x$ و $AC = 2x$.
بما أن $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع، إذًا $AB = 2x$ و $BC = 2x$.



استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد a – طول ارتفاع $\overline{BD}$ والذي يعتبر الساق الأطول في $\triangle BDC$.

$a^2 + x^2 = (2x)^2$	نظرية فيثاغورس
$a^2 + x^2 = 4x^2$	بسّط.
$a^2 = 3x^2$	اطرح x^2 من كل طرف.
$a = \sqrt{3x^2}$	خُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين.
$a = x\sqrt{3}$	بسّط.

نصيحة دراسية

ارتفاع المثلثات متساوية الساقين لاحظ أن ارتفاع مثلث متساوي الساقين هو أيضًا متوسط المثلث. في الشكل الموجود على اليمين، إن $\overline{BD}$ ينصف $\overline{AC}$.

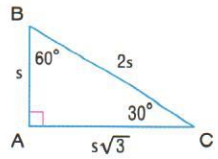
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

هذا البرهان الجبري يبرهن على تطبيق النظرية التالية.

نصيحة دراسية

استخدام النِّسب أطوال أضلاع مثلث بزوايا °30 و°60 و°90 موضحة بنسبة 1 إلى $\sqrt{3}$ إلى 2 أو $1 : \sqrt{3} : 2$.

نظرية 9.9 نظرية المثلثات بزوايا قياساتها °30 و°60 و°90



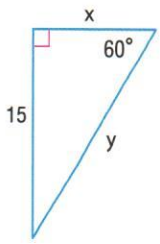
في مثلث بزوايا قياساتها °30 و°60 و°90، طول الوتر h يساوي ضعفي طول الساق الأقصر s، وطول الساق الأطول ℓ يساوي $\sqrt{3}$ ضعف طول الساق الأقصر.

الرموز في مثلث بزوايا قياساتها °30 و°60 و°90، فإن $h = 2s$ و $\ell = s\sqrt{3}$.

تذكّر أن الضلع الأقصر في المثلث هو الضلع المقابل للزاوية الأصغر. إذًا الساق الأقصر في مثلث بزوايا قياساتها °30 و°60 و°90 هو الضلع المقابل للزاوية °30، والساق الأطول مقابلة للزاوية °60.

مثال 3 إيجاد أطوال أضلاع مثلث بزوايا قياساتها °45 و°60 و°90

أوجد x و y.



الزوايتان الحادتان لمثلث قائم الزاوية متتامتان، إذًا قياس الزاوية الثالثة في هذا المثلث هو 90 − 60 أو 30. هذا مثلث زواياه هي °30 و°60 و°90.

استخدم نظرية 9.9 لإيجاد x، طول الضلع الأقصر.

$\ell = s\sqrt{3}$ النظرية 9.9

$15 = x\sqrt{3}$ التعويض

$\frac{15}{\sqrt{3}} = x$ اقسم كل طرف على $\sqrt{3}$.

$\frac{15}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = x$ طبّق إنطاق المقام.

$\frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = x$ اضرب.

$\frac{15\sqrt{3}}{3} = x$ $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$

$5\sqrt{3} = x$ بسّط.

استخدم الآن نظرية 9.9 لإيجاد y، طول الوتر.

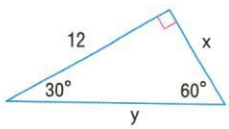
$h = 2s$ النظرية 9.9

$y = 2(5\sqrt{3})$ أو $10\sqrt{3}$ التعويض

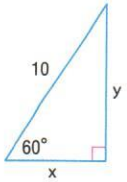
تمرين موجّه

أوجد x و y.

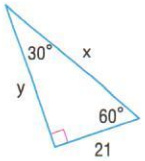
3A.



3B.



3C.



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

يمكنك استخدام خصائص المثلثات بزوايا 30° و60° و90° والمثلثات بزوايا 45° و 45° و 90° لحل مسائل من الحياة اليومية.

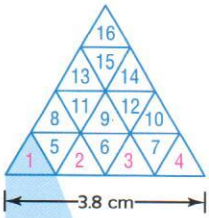
مثال 4 من الحياة اليومية استخدام خصائص المثلثات الخاصة قائمة الزاوية

الاختراعات **قامت إحدى الشركات بتصنيع أقلام تلوين "مقاومة للدحرجة" من خلال إعدادها بشكل مثلثي بقواعد متساوية الأضلاع. ويتناسب حجم ستة عشرة قلمًا من أقلام التلوين هذه مع حجم صندوق له شكل منشور ثلاثي يبلغ عرضه 3.8 سنتيمترات. ترتكز أقلام التلوين على نهاية الصندوق، كما أن قاعدة الصندوق متساوية الأضلاع. ما أبعاد كل قلم من أقلام التلوين؟**

الفهم تعلم أن 16 قلم تلوين لها قواعد بشكل مثلث متساوي الأضلاع تتناسب داخل الشكل المنشوري. لذا، يلزم إيجاد طول القاعدة وارتفاعها لكل قلم تلوين.

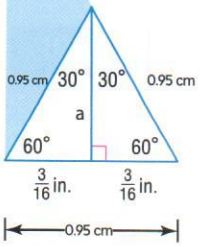
التخطيط خمّن وتحقق لتحديد الترتيب اللازم لوضع 16 قلم تلوين من أجل تعبئة الصندوق. أوجد عرض قلم تلوين واحد واستخدم نظرية المثلث بزوايا 30° و60° و90° لإيجاد ارتفاعه.

الحل خمّن أن 4 أقلام تلوين متساوية الأضلاع سيتم استيعابها في قاعدة الصندوق. يُظهر الرسم أن إجمالي عدد أقلام التلوين اللازمة لتعبئة الصندوق بوضع 4 أقلام على القاعدة هو 16 قلمًا. ✓



عرض الصندوق هو 3.8 سنتيمتراً، إذًا عرض قلم واحد هو 3.8 ÷ 4 أو 0.95 سنتيمترات.

ارسم مثلثًا متساوي الأضلاع يمثل قلم تلوين واحدًا. هل الارتفاع يشكّل الساق الأطول لمثلثين بزوايا 30° و60° و90°. استخدم نظرية 9.9 لإيجاد الطول التقريبي لارتفاع a.



$$\text{طول الساق الأطول} = \text{طول الساق الأقصر} \times \sqrt{3}$$

$$a = \frac{3}{16} \times \sqrt{3} \text{ أو حوالي } 0.3$$

مقاس كل قلم تلوين هو 0.95 أو حوالي 1.02 سنتيمتراً في حوالي 0.76 سنتيمترات.

التحقق أوجد ارتفاع الصندوق باستخدام نظرية المثلث بزوايا 30° و60° و90°. ثم اقسم على أربعة، بما أن الصندوق يساوي ارتفاع أربعة أقلام تلوين. النتيجة هي أن ارتفاع قلم التلوين هو حوالي 0.76 سنتيمتراً. ✓

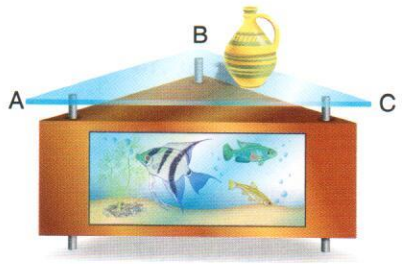
نصيحة في حل المسائل

خمّن وتحقق عند استخدام إستراتيجية التخمين والتحقق، ربما يكون من المفيد الاحتفاظ بقائمة تضم تلك التخمينات التي اجتهدتَ بالفعل للحصول عليها وعرفت بأنها لا تجدي نفعًا. في المثال 4، افترض أن التخمين الأول هو أن الصندوق بعرض 5 أقلام تلوين.

يوضح الرسم الخاص بهذه الاحتمالية أن هذا يؤدي إلى وضع 25 قلم تلوين وليس 16 قلمًا.

تمرين موجّه

4. الأثاث يُمثل الجزء العلوي من طاولة القهوة المحتوية على حوض أسماك شكل مثلث قائم الزاوية متساوي الساقين. مقاس الضلع الأطول في الطاولة، $\overline{AC}$، يبلغ 107 سنتيمتر. ما المسافة من الرأس B إلى الضلع $\overline{AC}$؟ ما طول الضلعين الآخرين؟

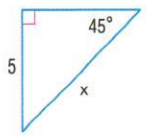


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

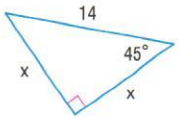
التحقق من فهمك

مثالان 1 و 2 أوجد x.

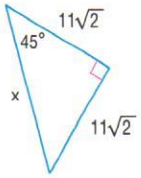
1.



2.

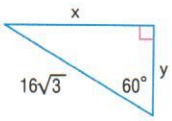


3.

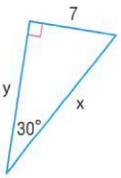


مثال 3 أوجد قيمة x وy.

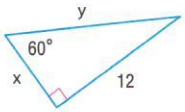
4.



5.



6.

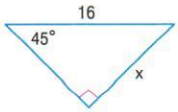


7. **الفن** يرسل جاسم بالبريد لوحة تقدير ارتفاعها $3\frac{1}{4}$ سنتيمترات إلى الفائز في الشطرنج. كان لديه طرد بريدي على شكل منشور مثلثي بقاعدة مثلث متساوي الأضلاع مقاسه 4 سنتيمتراً كما هو موضح في الرسم ا لتخطيطي. فهل ستتسع فتحة الطرد لدخول اللوحة؟ اشرح.

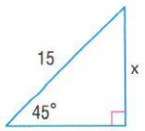
التمرين وحل المسائل

مثالان 1 و 2 **التفكير المنطقي** أوجد x.

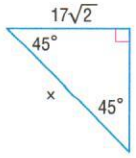
8.



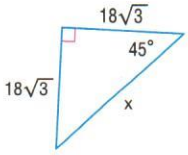
9.



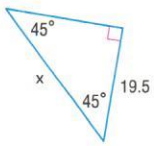
10.



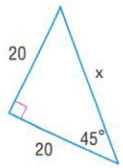
11.



12.



13.



14. إذا كان مثلث بزوايا 45° و45° و90° به وتر بطول 9. فأوجد طول الساق.

15. حدد طول ساق مثلث بزوايا 45° و45° و90° طول وتره 11.

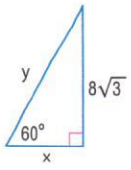
16. ما طول الوتر لمثلث بزوايا 45° و45° و90° إذا كان طول الساق 6 سنتيمترات؟

17. أوجد طول الوتر لمثلث بزوايا 45° و45° و90° يبلغ طول الساق به 8 سنتيمترات.

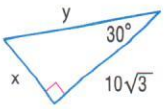
McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

مثال 3 **أوجد قيمة x و y.**

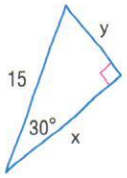
18.



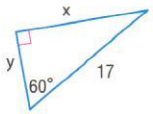
19.



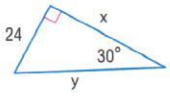
20.



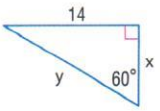
21.



22.



23.

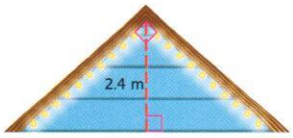


24. مثلث متساوي الأضلاع طول ارتفاعه 18 متراً. حدد طول أحد أضلاع المثلث.

25. أوجد طول ضلع مثلث متساوي الأضلاع طول ارتفاعه 24 متراً .

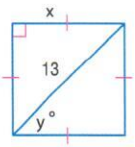
مثال 4 **26.** **استخدام النماذج** راجع بداية الدرس.
كل قلم تظليل هو عبارة عن مثلث متساوي الأضلاع بأضلاع يبلغ طولها 9 سنتيمتر. فهل سيتم استيعاب قلم التظليل في صندوق أبعاده 10 سنتيمتر في 7 سنتيمتر؟ اشرح.

27. **تنظم الفعاليات** ستقيم فاطمة حفلة.
وتريد تزيين الجزء العلوي من المنزل كما هو موضح. الجزء العلوي عبارة عن مثلث قائم الزاوية ومتساوي الأضلاع، وهي تعلمُ أن ارتفاع الجزء العلوي يبلغ 2.4 أمتار. فما طول الأنوار التي ستحتاجها لتغطية الجزء العلوي أدنى مستوى السقف؟



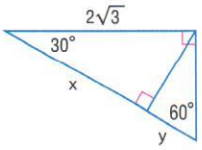
أوجد قيمة x و y.

28.

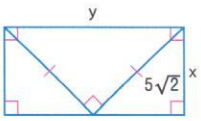


29

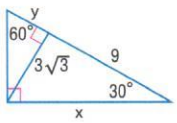
30.



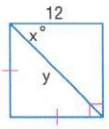
31.



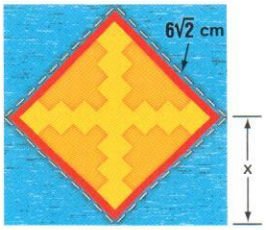
32.



33.

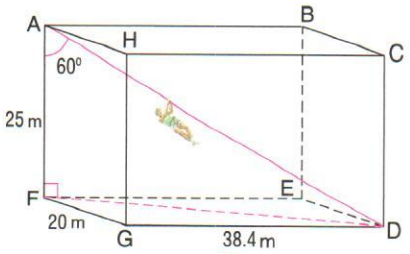


34. **الألحنة** قطعة اللحاف الموضحة مصنوعة من قطعة بشكل مربع وأربعة قطع بشكل مثلثات قائمة الزاوية ومتساوية الساقين. فما قيمة x؟ ما طول ضلع قطعة اللحاف بالكامل؟

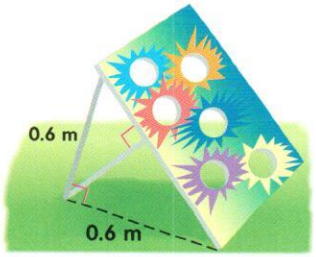


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

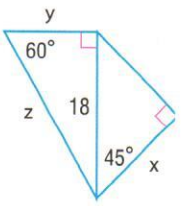
35. حبل الانزلاق افترض أن حبل انزلاق مرتكز على أحد أركان مسار على شكل منشور مستطيلي. بينما يرتكز الطرف الآخر على الركن المقابل كما هو موضح. إذا كان حبل الانزلاق يشكل زاوية 60° مع العمود $\overline{AF}$ فأوجد طول حبل الانزلاق AD.



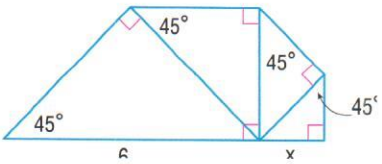
36. الألعاب يُصمم وليد لعبة التصويب لاحتفالية المدرسة. حيث استخدم دعامتين خلفيتين ارتفاعهما 0.6 متراً في وضع عمودي على الأرض على بعد 0.6 متراً من مقدمة اللوحة. كما أراد استخدام وسيلة دعم عمودية على اللوحة كما هو موضح في الرسم التخطيطي. ما مقدار الطول الذي يجب إعداده للدعم؟



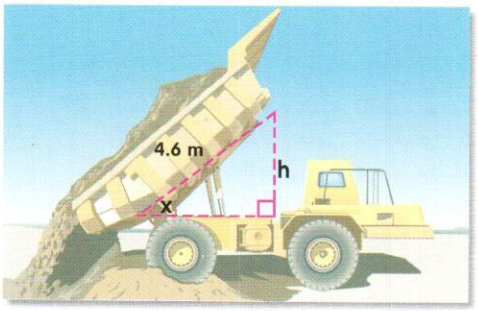
37. أوجد x وy وz.



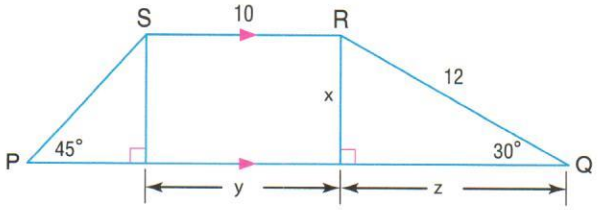
38. كل مثلث في الشكل هو مثلث بزوايا 45° و45° و90°. أوجد x.



39. إعداد نموذج يبلغ طول السيارة القلابة الموضحة 4.6 متراً. فما ارتفاع الحاوية h عندما تكون الزاوية x مقدارها 30°؟ 45°؟ 60° ؟



40. أوجد x وy وz ومحيط شبه المنحرف $PQRS$.

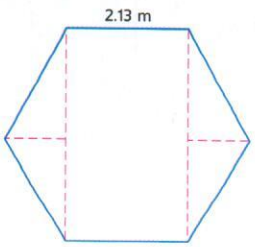


41. الهندسة الإحداثية $\triangle XYZ$ هو مثلث بزوايا 45° و45° و90° بزاوية قائمة Z. أوجد إحداثيات X في الربع الأول لكل من Y(-1, 2) و Z(6, 2).

42. الهندسة الإحداثية $\triangle EFG$ هو مثلث بزوايا 30° و60° و90° وفيه $m\angle F = 90$.
أوجد إحداثيات E في الربع الثالث لصالح F(-3, -4) و $\overline{FG}$. G(−3, 2) هي الساق الأطول.

43. الهندسة الإحداثية $\triangle JKL$ هو مثلث بزوايا 45° و45° و90° بزاوية قائمة K. أوجد إحداثيات L في الربع الرابع لصالح J(−3, 5) و K(−3, −2).

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف



44. تنظيم الفعاليات حجزتْ هند مقصورة في حديقة عامة لإقامة حفلة. وتريد التأكد من توفر مساحة كافية لعدد 12 ضيفًا داخل الشرفة في الوقت ذاته. حيث ترغب في توفير مساحة 0.74 متر مربع لكل ضيف. فإذا كانت أرضية الغرفة على شكل سداسي منتظم وكانت مساحة كل شكل منهما 2.13 أمتار، فهل ستتوفر مساحة كافية لهند وصديقاتها؟ اشرح. (*إرشاد:* استخدم نظرية مجموع زوايا المضلع الداخلية وخصائص المثلثات الخاصة قائمة الزاوية.)

45. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستستكشف النِّسب في مثلثات قائمة الزاوية.

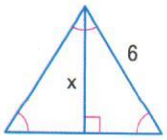
a. هندسيًا ارسم ثلاثة مثلثات قائمة الزاوية ومتشابهة تتضمن زاوية مقدارها 50°. سمِّ أحد المثلثات بالأحرف ABC بحيث تكون الزاوية A هي الزاوية القائمة وتكون الزاوية B بقياس 50°. وسمّ المثلث الثاني بالأحرف MNP بحيث تكون الزاوية M هي الزاوية القائمة وتكون الزاوية N بقياس 50°. وسمّ المثلث الثالث بالأحرف XYZ بحيث تكون الزاوية X هي الزاوية القائمة وتكون الزاوية Y بقياس 50°.

b. جدوليًا انسخ الجدول التالي وأكمله.

المثلث	الطول				النسبة	
ABC	AC		BC		$\frac{AC}{BC}$	
MNP	MP		NP		$\frac{MP}{NP}$	
XYZ	XZ		YZ		$\frac{XZ}{YZ}$	

c. بالكلمات خمّن نسبة الساق المقابلة للزاوية 50° إلى الوتر في أي مثلث قائم الزاوية به زاوية بقياس 50°.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا



46. التفكير النقدي تريد مها ومروة إيجاد x في المثلث الموضح. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح.

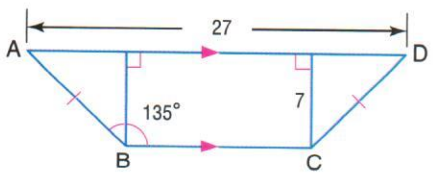
مها

$$x = \frac{6\sqrt{3}}{2}$$
$$x = 3\sqrt{3}$$

مروة

$$x = \frac{6\sqrt{2}}{2}$$
$$x = 3\sqrt{2}$$

47. مسألة غير محددة الإجابة ارسم مستطيلاً له قطر يبلغ طوله ضعف عرضه. ثم اكتب معادلة لإيجاد طول المستطيل.



48. تحدٍ أوجد قطر الشكل رباعي الأضلاع $ABCD$.

49. التبرير النسبة بين قياسات الزوايا في مثلث هي 3:2:1. وطول الضلع الأقصر هو 8. فما محيط المثلث؟

50. الكتابة في الرياضيات لماذا تُعتبر بعض المثلثات قائمة الزاوية مثلثات خاصة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين على الاختبار المعياري

51. إذا كان طول الساق الأطول في مثلث بزوايا °30 و°60 و°90 هو $5\sqrt{3}$. فما طول الساق الأقصر؟

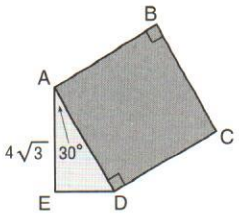
A 3
B 5
C $5\sqrt{2}$
D 10

52. الجبر أوجد حل $\sqrt{5-4x}-6=7$.

F -44
G -41
H 41
J 44

53. إجابة مختصرة الشكل $\triangle XYZ$ هو مثلث بزوايا قياساتها °45 و°45 و°90 به زاوية قائمة متمثلة في Y. أوجد إحداثيات X في الربع الثالث لكل من $Y(-3, -3)$ و $Z(-3, 7)$.

54. SAT/ACT في الشكل، أدناه، المربع $ABCD$ متصل بالشكل $\triangle ADE$ كما هو موضح. إذا كان قياس $m\angle EAD$ هو °30 وكانت AE تساوي $4\sqrt{3}$. فما مساحة المربع $ABCD$؟



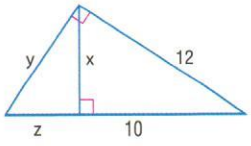
A $8\sqrt{3}$
B 16
C 64
D 72
E $64\sqrt{2}$

مراجعة شاملة

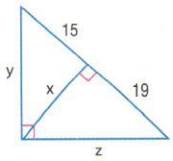
55. الرياضة قام أحمد بإعداد منحدر للقفز بالدراجة. وجزء تدعيم المنحدر يُشكّل زاوية قائمة. ويبلغ طول القاعدة 3.6 متراً، وارتفاعها 2.7 أمتار. فما طول الخشب الرقائقي الذي سيحتاجه أحمد لإعداد المنحدر؟ (الدرس 2-9)

أوجد x و y و z. (الدرس 1-9)

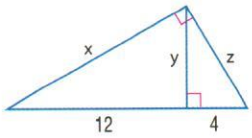
56.



57.



58.



أوجد قياسات زوايا كل مثلث.

59. نسبة قياسات الزوايا في مثلث هي 3:5:2.

60. نسبة قياسات الزوايا في مثلث هي 10:9:6.

61. نسبة قياسات الزوايا في مثلث هي 8:7:5.

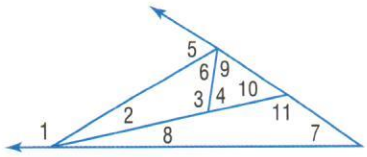
استخدم نظرية متباينة الزاوية الخارجية لإدراج جميع الزوايا المتوافقة للشرط المذكور.

62. قياسها أقل من $m\angle 5$

63. قياسها أكبر من $m\angle 6$

64 قياسها أكبر من $m\angle 10$

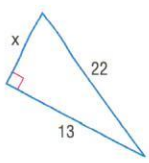
65. قياسها أقل من $m\angle 11$



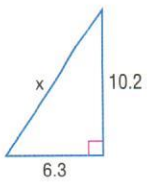
مراجعة المهارات

أوجد x.

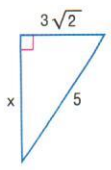
66.



67.



68.



McGraw-Hill Education مؤسسة لحالج والتأليف © محفوظة لحالج حقوق الطبع والتأليف

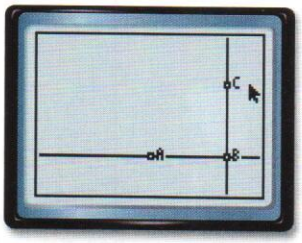
9-4 مختبر تقنية التمثيل البياني
حساب المثلثات

استكشفتَ أنماطًا محددة في قياسات مثلثات خاصة قائمة الزاوية.
حساب المثلثات هو دراسة الأنماط الموجودة في جميع المثلثات قائمة الزاوية. يمكنك استخدام تطبيق Cabri™ Jr. على حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف هذه الأنماط.

النشاط استكشاف النّسب المثلثية

الخطوة 1 استخدم أداة الخط المستقيم على قائمة F2 لرسم خط مستقيم أفقي. حدد النقاط على الخط المستقيم *A* و *B*.

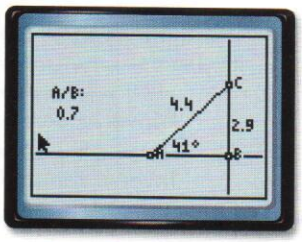
الخطوة 2 اضغط على F2 ثم اختر أداة **Perpendicular (التعامد)** لإنشاء خط مستقيم متعامد من خلال النقطة *B*. ارسم النقطة *C* وحددها على المستقيم المتعامد.



الخطوتان 1 و 2

الخطوة 3 استخدم أداة **Segment (القطعة المستقيمة)** من القائمة F2 لرسم $\overline{AC}$.

الخطوة 4 أوجد قياس $\overline{BC}$ و $\overline{AC}$ وحددهما على أداة **Distance (المسافة)** و **Length (الطول)** ضمن **قياس** في القائمة **F5**. استخدم الأداة **Angle (الزاوية)** لإيجاد قياس $\angle A$.



الخطوات من 3 إلى 5

الخطوة 5 احسب وأوضح نسبة $\frac{BC}{AC}$ باستخدام الأداة **Calculate (احتساب)** من القائمة **F5**. اكتب النسبة بصيغة *A/B*.

الخطوة 6 اضغط على CLEAR. ثم استخدم مفتاحي الأسهم لتحريك المؤشر بالقرب من النقطة *B*. وعندما يصبح السهم واضحًا، اضغط مع الاستمرار على المفتاح ALPHA. اسحب *B* ولاحظ النسبة.

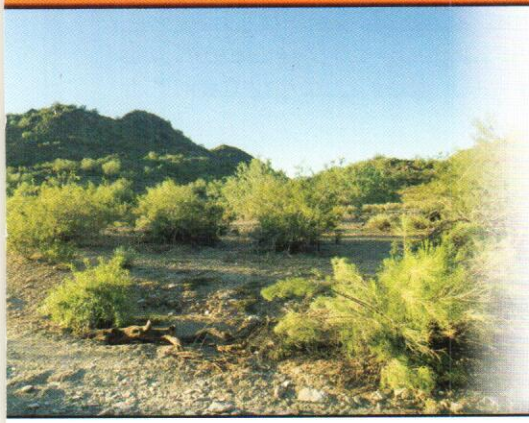
تحليل النتائج

1. ناقش التأثير الحاصل على $\frac{BC}{AC}$ من خلال سحب النقطة *B* على $\overline{BC}$ و $\overline{AC}$ و $\angle A$.
2. استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد نسب $\frac{AB}{AC}$ و $\frac{BC}{AB}$. ثم اسحب *B* ولاحظ النسب.
3. **التخمين** دوال *sine* و *cosine* و *tangent* *الزاوية* هي دوال مثلثية مستندة إلى قياسات الزاوية. دوّن $m\angle A$. اخرج من التطبيق واستخدم SIN و COS و TAN على الحاسبة لإيجاد *sine* و *cosine* و *tangent* *الزاوية* لـ $m\angle A$. قارن النتائج بالنّسب التي وجدتها في النشاط. ثم خمّن تعريفات *sine* و *cosine* و *tangent* الزاوية.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

الدرس 9-4 حساب المثلثات

السابق	الحالي	لماذا؟
• لقد استخدمتَ نظرية فيثاغورس لإيجاد الأطوال المفقودة في المثلثات القائمة.	1 إيجاد النسب المثلثية باستخدام مثلثات قائمة الزاوية. 2 استخدام النسب المثلثية لإيجاد قياسات زاويا في مثلثات قائمة الزاوية.	• يتم التعبير عن انحدار مسار رياضة المشي باسم *النسبة المئوية لدرجة الانحدار*. يبلغ انحدار الجزء الأكثر انحدارًا من مسار برايت أنجيل في متنزه جراند كانيون الوطني 15.7%. وهذا يعني أن مسار المشي يرتفع أو يهبط بمقدار 4.8 متراً عبر مسافة أفقية مقدارها 30.5 متراً. يمكنك استخدام نسب مثلثية لتحديد أن هذا الانحدار مكافئ لزاوية بقياس 9° تقريبًا.



مفردات جديدة

حساب المثلثات trigonometry
النسبة المثلثية trigonometric ratio
جيب الزاوية sine
جيب التمام cosine
ظل الزاوية tangent
معكوس الجيب inverse sine
معكوس جيب التمام inverse cosine
معكوس ظل الزاوية inverse tangent

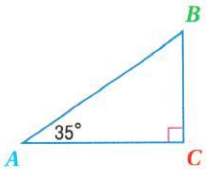
ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

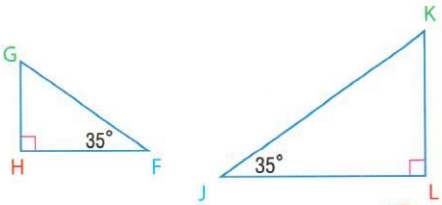
1 النسب المثلثية

كلمة **حساب المثلثات** مشتقة من مصطلحين إغريقيين هما *trigon* ومعناها مثلث، وكلمة *metron* ومعناها قياس. تتضمن دراسة حساب المثلثات قياس المثلثات.

النسبة المثلثية هي نسبة أطوال ضلعين من مثلث قائم الزاوية. فنسبة مثلث واحد $\triangle ABC$ هي $\frac{AC}{AB}$.



استنادًا إلى تماثل AA، فإن المثلث قائم الزاوية بقياس زاوية حادة معيّنة يتشابه مع كل مثلث آخر قائم له قياس الزاوية الحادة ذاتها. إذًا، تُعد النسب المثلثية ثابتة لقياس زاوية معينة.

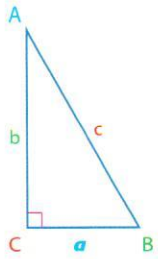


$\triangle ABC \sim \triangle FGH \sim \triangle JKL$, so $\frac{AC}{AB} = \frac{FH}{FG} = \frac{JL}{JK}$

أسماء أكثر النسب المثلثية شيوعًا موضحة أدناه.

المفهوم الأساسي النسب المثلثية

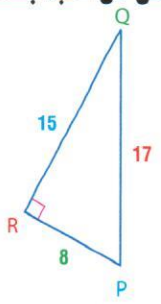
الشرح	الرموز
إذا كان $\triangle ABC$ مثلثًا قائم الزاوية وكانت الزاوية $\angle A$ حادة، إذًا **sine الزاوية** $\angle A$ (يكتب $\sin A$) يُمثل نسبة طول الساق المقابل $\angle A$ (opp) لطول الوتر (hyp).	$\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$ أو $\frac{a}{c}$ $\sin B = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$ أو $\frac{b}{c}$
إذا كان $\triangle ABC$ مثلثًا قائم الزاوية وكانت الزاوية $\angle A$ حادة، إذًا **cosine** $\angle A$ (يكتب $\cos A$) يُمثل نسبة طول الساق المشترك $\angle A$ (adj) لطول الوتر (hyp).	$\cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$ أو $\frac{b}{c}$ $\cos B = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$ أو $\frac{a}{c}$
إذا كان $\triangle ABC$ مثلثًا قائم الزاوية وكانت الزاوية $\angle A$ حادة، إذًا **tan** $\angle A$ (يُكتب $\tan A$) يُمثل نسبة طول الساق المقابل $\angle A$ (opp) لطول الساق المجاور $\angle A$ (adj).	$\tan A = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$ أو $\frac{a}{b}$ $\tan B = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$ أو $\frac{b}{a}$



McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

مثال 1 إيجاد النسب الخاصة sine و Cosine و tan

عَبِّر عن كل نسبة بكسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.



a. $\sin P$

$$\sin P = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

$$= \frac{15}{17} \text{ أو حوالي } 0.88$$

b. $\cos P$

$$\cos P = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$= \frac{8}{17} \text{ أو حوالي } 0.47$$

c. $\tan P$

$$\tan P = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

$$= \frac{15}{8} \text{ أو حوالي } 1.88$$

d. $\sin Q$

$$\sin Q = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

$$= \frac{8}{17} \text{ أو حوالي } 0.47$$

e. $\cos Q$

$$\cos Q = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$= \frac{15}{15} \text{ أو حوالي } 0.88$$

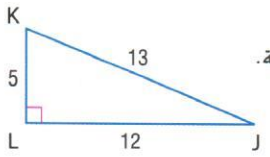
f. $\tan Q$

$$\tan Q = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

$$= \frac{8}{17} \text{ أو حوالي } 0.53$$

تمرين موجّه

1. أوجد $\sin J$ و $\cos J$ و $\tan J$ و $\sin K$ و $\cos K$ و $\tan K$.
عَبِّر عن كل نسبة بكسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.



نصيحة دراسية

تذكّر النسب المثلثية

SOH-CAH-TOA هي أداة مساعدة لمعرفة نسب sine و cosine و tan باستخدام الحرف الأول من كل كلمة في النّسب.

$$\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

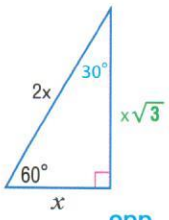
$$\cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\tan A = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

يمكن استخدام مثلثات خاصة قائمة الزاوية لتحديد sine و cosine و tan لزوايا 30° و60° و45°.

مثال 2 استخدام مثلثات خاصة قائمة الزاوية لإيجاد نسب مثلثية

استخدم مثلثًا قائم الزاوية للتعبير عن $\tan 30°$ بصيغة كسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.



ارسم أطوال الأضلاع لمثلث قائم الزاوية به الزوايا 30° و60° و90° واكتب بيانات الأضلاع على المثلث. مع اعتبار أن x هو طول الساق الأقصر.

الضلع المقابل للزاوية 30° يساوي قياس x.

الضلع المجاور للزاوية 30° يساوي قياس $x\sqrt{3}$.

$$\tan 30° = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$ تحديد نسبة الـ tan

$$= \frac{x}{x\sqrt{3}}$$ التعويض

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$ بسّط لإنطاق المقام.

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ أو حوالي } 0.58$$ بسّط واستخدم الآلة الحاسبة.

تمرين موجّه

2. استخدم مثلثًا قائم الزاوية للتعبير عن $\cos 45°$ بصيغة كسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.

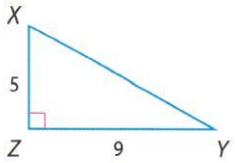
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

عند استخدام القياسات المعطاة لإيجاد الزاوية المجهولة وقياسات الأضلاع للزاوية القائمة، فإن هذا يُعرف باسم *حل المثلث القائم الزاوية*. لحل مثلث قائم، يلزم معرفة

- أطوال ضلعين أو
- طول ضلع واحد وقياس زاوية واحدة حادة.

مثال 5 حل مثلث قائم الزاوية

حُـلّ المثلث قائم الزاوية. قرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب عدد عشري وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



الخطوة 1 أوجد $m\angle X$ باستخدام نسبة الظل.

$\tan X = \frac{9}{5}$ $\tan X = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$

$\tan^{-1}\frac{9}{5} = m\angle X$ تحديد $\tan^{-1}$

$60.9453959 \approx m\angle X$ استخدم آلة حاسبة.

إذًا، $m\angle X \approx 61$.

الخطوة 2 أوجد $m\angle Y$ باستخدام اللازمة **4.1**، والتي تثبت أن الزوايا الحادة للمثلث قائم الزاوية هي زوايا متتامة.

$m\angle X + m\angle Y = 90$ النتيجة 4.1

$61 + m\angle Y \approx 90$ $m\angle X \approx 61$

$m\angle Y \approx 29$ اطرح 61 من كل طرف.

إذًا، $m\angle Y \approx 29$.

الخطوة 3 أوجد XY باستخدام نظرية فيثاغورس.

$(XZ)^2 + (ZY)^2 = (XY)^2$ نظرية فيثاغورس

$5^2 + 9^2 = (XY)^2$ التعويض

$106 = (XY)^2$ بسّط.

$\sqrt{106} = XY$ خذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين.

$10.3 \approx XY$ استخدم آلة حاسبة.

إذًا $XY \approx 10.3$.

نصيحة دراسية

وسائل بديلة يمكن حل الزوايا القائمة غالبًا بعدة وسائل مختلفة. في المثال 5، يمكن إيجاد $m\angle Y$ باستخدام نسبة الظل. كما يمكن استخدام $m\angle X$ ونسبة جيب زاوية لإيجاد XY.

انتبه!

التقريب في حالة استخدام المقاييس المحسوبة لإيجاد مقاييس أخرى في مثلث قائم، فاحرص على عدم تقريب القيم وتأجيلها إلى الخطوة الأخيرة. إذًا، في المعادلة التالية، استخدم $\tan^{-1}\frac{9}{5}$ بدلاً من قيمته التقريبية، 61°.

$XY = \frac{9}{\sin X}$

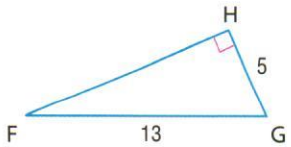
$= \frac{9}{\sin\left(\tan^{-1}\frac{9}{5}\right)}$

≈ 10.3

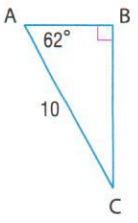
تمرين موجّه

حل كل مثلث قائم الزاوية. قرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

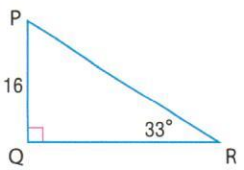
5A.



5B.



5C.

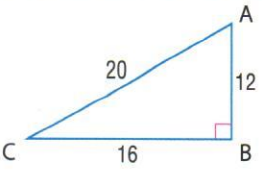


McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

مثال 1 **عَبِّر عن كل نسبة بكسر أو جزء من عشرة وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.**

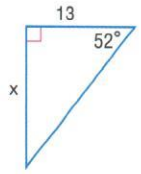
1. $\sin A$
2. $\tan C$
3. $\cos A$
4. $\tan A$
5. $\cos C$
6. $\sin C$



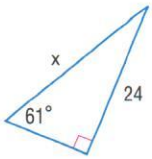
مثال 2 **7.** استخدم مثلثًا قائم الزاوية للتعبير عن $\sin 60°$ بصيغة كسر وكسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.

مثال 3 **أوجد x. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.**

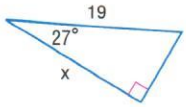
8.



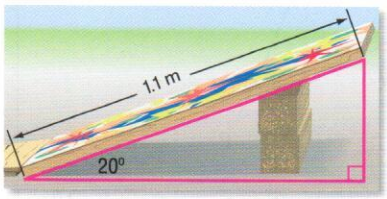
9.



10.

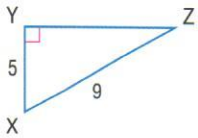


11. **الألعاب الرياضية** يقوم خالد ببناء مجرى منحدر للدراجات. ويريد أن تكون الزاوية التي يحدثها المجرى المنحدر مع الأرض بقياس $20°$. إذا كان طول اللوحة التي يريد استخدامها لإعداد مجرى المنحدر 1.1 متر. فكم سيبلغ الارتفاع اللازم لمجرى المنحدر عند أعلى نقطة؟

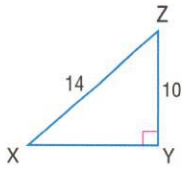


مثال 4 **الأدوات** **استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قياس $\angle Z$ إلى أقرب جزء من عشرة.**

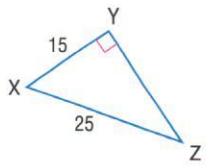
12.



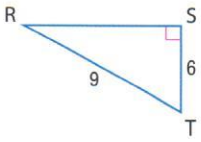
13.



14.



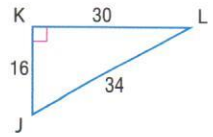
مثال 5 **15.** حل مثلث قائم الزاوية. قرّب قياسات الأضلاع إلى جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.



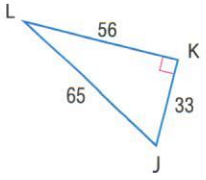
التمرين وحل المسائل

مثال 1 **أوجد $\sin J$ و $\cos J$ و $\tan J$ و $\sin L$ و $\cos L$ و $\tan L$. عبّر عن كل نسبة بكسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.**

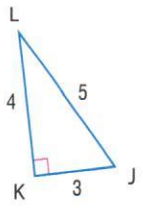
16.



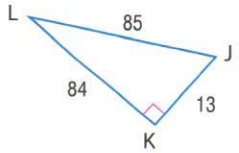
17.



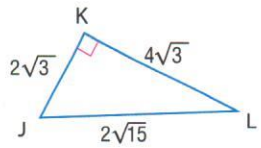
18.



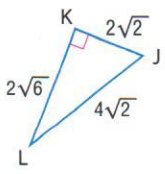
19.



20.



21.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 **استخدم مثلثًا قائم الزاوية للتعبير عن كل نسبة مثلثية بكسر أو كسر عشري وقرّبه لأقرب جزء من مئة.**

22. tan 60°

23. cos 30°

24. sin 45°

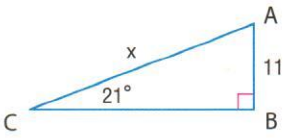
25. sin 30°

26. tan 45°

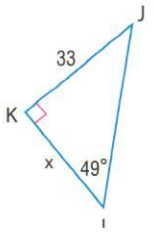
27. cos 60°

مثال 3 **أوجد x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.**

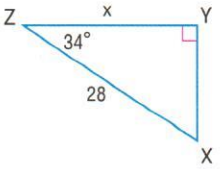
28.



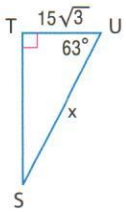
29.



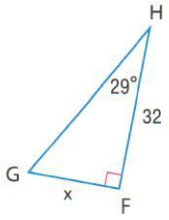
30.



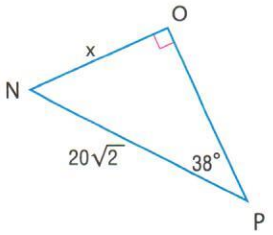
31.

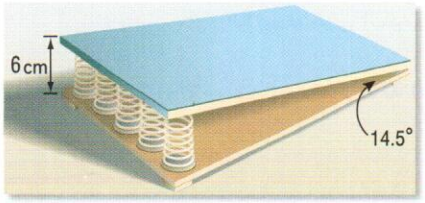


32.

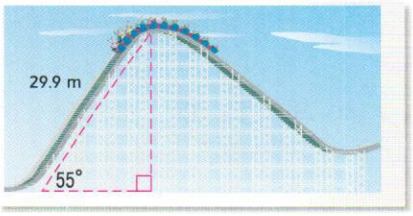


33.





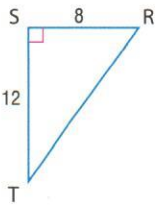
34. الجمباز منصة الوثب التي يستخدمها وليد في صف التدريب على الجمباز تتضمن ملفات طولها 6 متر وتشكل زاوية مقدارها 14.5° مع القاعدة. فما مقدار طول منصة الوثب؟



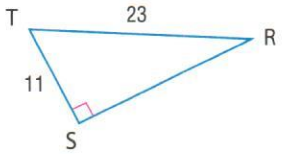
35. قطارات الملاهي تبلغ زاوية صعود أول مرتفَع لقطار الملاهي 55°. إذا كان طول المسار من بداية المرتفع إلى أعلى نقطة هو 98 متراً. فما ارتفاع قطار الملاهي عندما يصل إلى قمة أول مرتفع؟

مثال 4 **الأدوات** **استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قياس $\angle T$ إلى أقرب جزء من عشرة.**

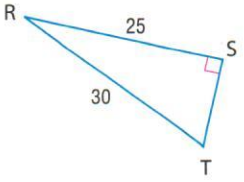
36.



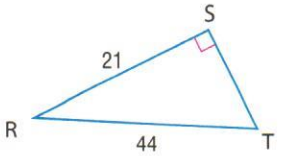
37.



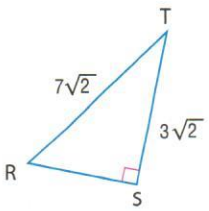
38.



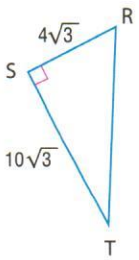
39.



40.



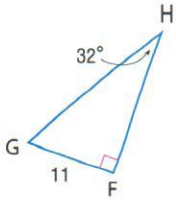
41.



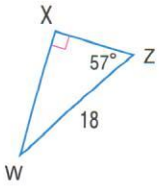
McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

مثال 5 **حل كل مثلث قائم الزاوية. قرّب قياسات الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.**

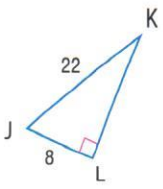
42.



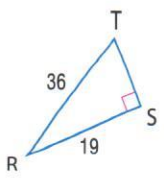
43.

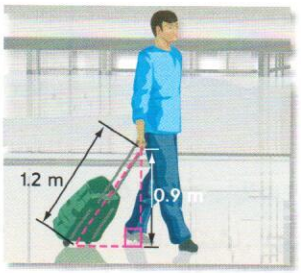


44.



45.





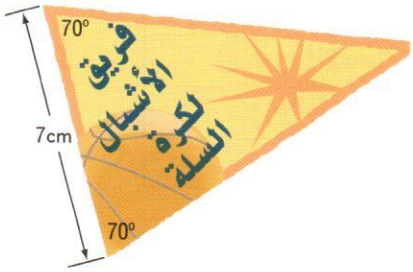
46. حقائب الظهر لدى سلطان حقيبة ظهر ذات عجلات يبلغ طولها 1.2 متر عند تمديد يد الحقيبة. عند سحب حقيبة الظهر، فإن يد سلطان تكون مرتفعة بمقدار 3 أقدام من الأرض. ما الزاوية التي تحدثها حقيبته مع الأرض؟ قرّب إلى أقرب درجة.

الهندسة الإحداثية أوجد قياس كل زاوية إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجة باستخدام قانون المسافة ومعكوس النسب المثلثية.

47. $\angle K$ في المثلث قائم الزاوية JKL بالرؤوس $L(-2, 4)$ و $K(-7, -3)$ و $J(-2, -3)$

48. $\angle Y$ في المثلث قائم الزاوية XYZ بالرؤوس $Z(-2, 7)$ و $Y(-6, 3)$ و $X(4, 1)$

49. $\angle A$ في المثلث قائم الزاوية ABC بالرؤوس $C(8, -3)$ و $B(3, -3)$ و $A(3, 1)$



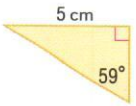
50. روح الدعم بالمدارس تقوم هنا بإعداد عَلَم مثلث لكل فتاة من 18 فتاة في فريق كرة السلة لديها. ستَستخدم شريطًا مقاس $\frac{1}{2}$ سنتيمتراً لإضفاء اللمسات النهائية لحواف العلم المثلث.

a. فما طول الشريط اللازم للمسات النهائية للعلم المثلث إجمالاً؟

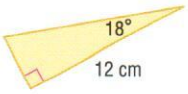
b. إذا كان الشريط يُباع في مجموعات طولها 2.7 متر بسعر AED 6.57. فكم ستبلغ التكلفة؟

الاستنتاج المنطقي أوجد محيط ومساحة كل مثلث. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

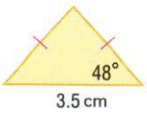
51.



52.

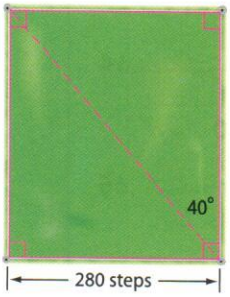


53.



54. أوجد **tan** الزاوية الحادة الأكبر في مثلث أطوال أضلاعه 3 و 4 و 5 سنتيمترات.

55. أوجد **cosine** الزاوية الحادة الأصغر في مثلث أطوال أضلاعه 10 و 24 و 26 سنتيمترات.

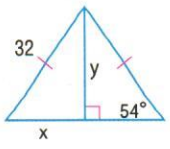


56. التقدير يريد وليد وطارق تقدير منطقة الملعب الذي سيستخدمه فريقهما للتدريب على كرة القدم. ويعلمان بأن الملعب مستطيل الشكل، وقاسا عرض الملعب بالقدم كما هو موضح. حيث استخدما أعمدة سياج عند أركان الملعب لتقدير أن الزاوية الواقعة بين طول الملعب وبين الخط القُطري تبلغ حوالي 40°. إذا قاما بافتراض أن كل خطوة من خطواتهما تبلغ حوالي 45.7 سنتيمترات، فما مساحة ملعب التدريب بالقدم المربعة؟ قرّب إلى أقرب جزء من المتر المربعة.

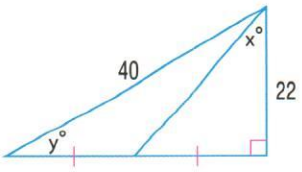
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

أوجد قيمة x و y. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

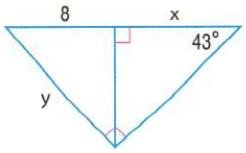
57



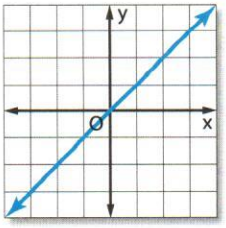
58.



59.



60. الهندسة الإحداثية وضّح أن ميل أحد الخطوط عند 225° من المحور x مساويًا لظل الزاوية 225°.



61. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سنبحث في العلاقة الجبرية بين نسب **sine** و**cosine**.

a. التمثيل الهندسي ارسم ثلاثة مثلثات قائمة لا يشبه أحدها الآخر. قم بتسمية المثلثات ABC و MNP و XYZ، بحيث تكون الزوايا القائمة في الرأس B و N و Y على الترتيب. قم بقياس وتسمية كل ضلع من المثلثات الثلاثة.

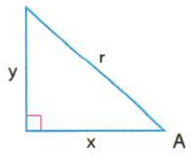
b. التمثيل الجدولي انسخ الجدول التالي وأكمله.

المثلث	النسب المثلثية				مجموع النسب المربعة	
ABC	$\cos A$		$\sin A$		$(\cos A)^2 + (\sin A)^2 =$	
	$\cos C$		$\sin C$		$(\cos C)^2 + (\sin C)^2 =$	
MNP	$\cos M$		$\sin M$		$(\cos M)^2 + (\sin M)^2 =$	
	$\cos P$		$\sin P$		$(\cos P)^2 + (\sin P)^2 =$	
XYZ	$\cos X$		$\sin X$		$(\cos X)^2 + (\sin X)^2 =$	
	$\cos Z$		$\sin Z$		$(\cos Z)^2 + (\sin Z)^2 =$	

c. التمثيل اللفظي خمّن فرضية عن مجموع مربع **sine** و **cosine** لزاوية حادة بمثلث قائم الزاوية.

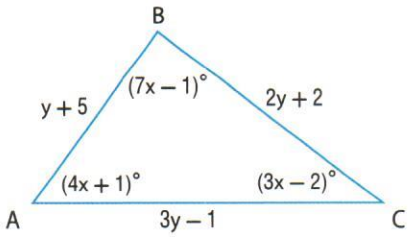
d. التمثيل الجبري عبّر عن تخمينك للزاوية X جبريًا.

e. التمثيل التحليلي وضّح أن التخمين صالح للزاوية A في الشكل الموضّح على اليمين باستخدام دوال مثلثية ونظرية فيثاغورس.



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

62. تحدٍ حُـلّ $\triangle ABC$. قرّب إلى أقرب عدد كلي.



63. التبرير هل قِيم **sine** و **cosine** لزاوية حادة من مثلث قائم الزاوية تكون دائمًا أقل من 1؟ اشرح.

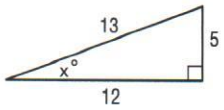
64. التفكير المنطقي ما العلاقة بين **sine** و **cosine** للزوايا المتتامة؟ اشرح استنتاجك واستخدم العلاقة لإيجاد $\cos 50$ إذا كان $\sin 40 \approx 0.64$.

65. الكتابة في الرياضيات اشرح كيف يمكنك استخدام نسب أطوال الأضلاع لإيجاد قياسات الزاوية الخاصة بزوايا حادة لمثلث قائم الزاوية.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تمرين على الاختبار المعياري

66. ما قيمة $\tan x$؟



A $\tan x = \frac{13}{5}$

B $\tan x = \frac{12}{5}$

C $\tan x = \frac{5}{13}$

D $\tan x = \frac{5}{12}$

67. الجبر أيًا مما يلي له القيمة ذاتها مثل $2^3 \times 2^{-12}$؟

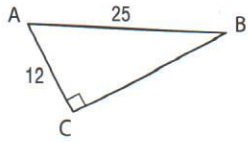
F 2^{-36}

G 4^{-9}

H 2^{-9}

J 2^{-4}

68. إجابة شبكية إذا كان $AC = 12$ و $AB = 25$، فما قياس $\angle B$ مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة؟



69. SAT/ACT تبلغ مساحة مثلث قائم الزاوية 240 بوصة مربعة. إذا كان طول القاعدة 30 بوصة، فما مقدار طول الوتر بالبوصة؟

A 5

B 8

C 16

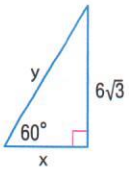
D $2\sqrt{241}$

E 34

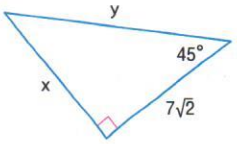
مراجعة شاملة

أوجد x و y. (الدرس 3-9)

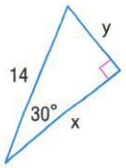
70.



71.



72.



حدد ما إذا كانت أي مجموعة أعداد من المجموعات التالية يمكن أن تكون قياسات لأضلاع مثلث. إذا كان الأمر كذلك، فصنّف المثلث على أنه *حاد* أو *منفرج* أو *قائم* الزاوية. علل إجابتك. (الدرس 2-9)

73. 8, 15, 17

74. 11, 12, 24

75. 13, 30, 35

76. 18, 24, 30

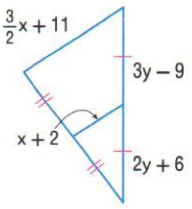
77. 3.2, 5.3, 8.6

78. $6\sqrt{3}$, 14, 17

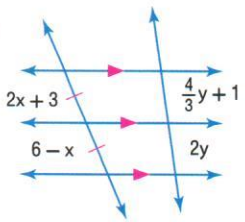
79. الخرائط يُقدّر القياس على خريطة نيو مكسيكو بأن كل 2 سنتيمتر = 160 كيلومتر. يبلغ عرض نيو مكسيكو عبر ألبوكيرك على الخريطة 4.1 سنتيمترات. فما المدة اللازمة لاجتياز نيو مكسيكو إذا كنت تقود بسرعة 60 كيلومتراً في الساعة؟

الجبر أوجد قيمة x و y.

80.



81.



مراجعة المهارات

حل كلاً من التناسبات التالية. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.

82. $2.14 = \frac{x}{12}$

83. $0.05x = 13$

84. $0.37 = \frac{32}{x}$

85. $0.74 = \frac{14}{x}$

86. $1.66 = \frac{x}{23}$

87. $0.21 = \frac{33}{x}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

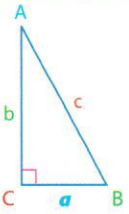
التوسع 9-4

مختبر تقنية التمثيل البياني
القاطع وقاطع التمام وظل التمام

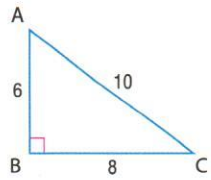
في الدرس السابق، استخدمنا Sine و Cosine و tan للدوال المثلثية لإيجاد العلاقات بين الزوايا في الزوايا في الزوايا القائمة. في هذا النشاط، سنستخدم المعكوسات الضربية لهذه الدوال Secant و Cosecant و Cotangent لاستكشاف الزوايا وعلاقات الأضلع في الزوايا القائمة.

المفهوم الأساسي نسب معكوسات الضرب المثلثية

الشرح	الرموز
$\angle A$ **Cosecant** (تُكتب بصيغة $\csc A$) هو المعكوس الضربي لـ $\sin A$.	$\csc A = \frac{1}{\sin A}$ أو $\frac{c}{a}$
$\angle A$ **Secant** (يُكتب بصيغة $\sec A$) هو المعكوس الضربي لـ $\cos A$.	$\sec A = \frac{1}{\cos A}$ أو $\frac{c}{b}$
$\angle A$ **Cotangent** (يُكتب بالصيغة $\cot A$) هو المعكوس الضربي لـ $\tan A$.	$\cot A = \frac{1}{\tan A}$ أو $\frac{b}{a}$



إيجاد القيم المثلثية المجهولة



الخطوة 1 ارسم وحدد زاوية قائمة بالأبعاد الموضحة على اليمين.

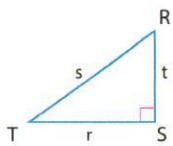
الخطوة 2 استخدم حاسبة التمثيل البياني لإيجاد قيم $\sin A$ و $\cos A$ و $\tan A$.

الخطوة 3 بعد ذلك، أوجد قِيَمة A بقسمة 1 على A SIN.
كرر الخطوة رقم 3 لإيجاد قيمة $\sec A$ و $\cot A$.

الخطوة 4 انسخ الجدول أدناه وسجل نتائجك. بعد ذلك، أوجد قِيَم كل دالة مثلثة للزاوية C.

الزاوية	sin	cos	tan	csc	sec	cot
A						
C						

تمارين



1. جِد قِيَم الست دوال المثلثية لزاوية 45° في مثلث زواياه 90°-45°-45°، وساقاه 4 cm.
2. في $\triangle FGH$, $\tan F = \frac{5}{12}$. أوجد قيمة $\cot F$ و $\sin F_9$ إذا كانت $\angle G$ زاوية قائمة.
3. أوجد قِيَم الدوال المثلثية الست للزاوية T في $\triangle RST$ إذا كانت $m\angle R = 36°$. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح والتأليف © محفوظة لصالح حقوق الطبع

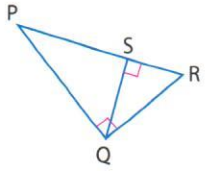
اختبار نصف الوحدة
الدروس من 1-9 إلى 4-9

أوجد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد. (الدرس 1-9)

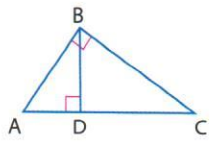
1. 3 و 12
2. 7 و 63
3. 20 و 45
4. 10 و 50

اكتب عبارة تَمَاثُل لتوضيح المثلثات الثلاثة المتماثلة في كل شكل. (الدرس 1-9)

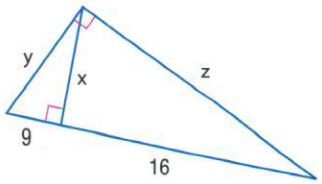
5.



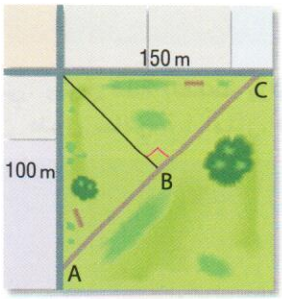
6.



7. أوجد x و y و z. (الدرس 1-9)

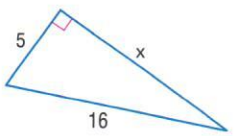


8. **ساحات الانتظار** هناك ساحة انتظار صغيرة عند زاوية شارعين متقاطعين. أبعاد ساحة الانتظار 100 m في 150 m بمسار مائل (قُطري) كما هو مُوضح أدناه. ما طول المسار $\overline{AC}$؟ (الدرس 2-9)

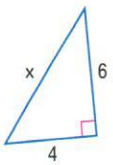


أوجد x. قرّب إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 2-9)

9.



10.

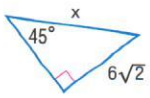


11. **الاختيار من متعدد** أيٌّ من مجموعات الأعداد التالية لا يتوافق مع ثلاثية فيثاغورس؟ (الدرس 2-9)

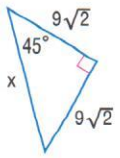
A 9, 12, 15
C 15, 36, 39
B 21, 72, 75
D 8, 13, 15

أوجد x. (الدرس 3-9)

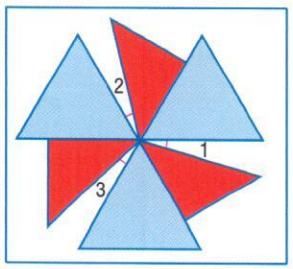
12.



13.



14. **تصميمات** صممتْ سهى مروحة لوضعها في حديقتها. المثلثات الزرقاء في المروحة متساوية الأضلاع ومتطابقة وارتفاع كل منها 4 سنتيمترات. المثلثات الحمراء مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة بزوايا قائمة. وتر المثلث الأحمر متطابق مع أحد أضلاع المثلث الأزرق. (الدرس 3-9)

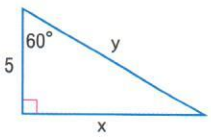


a. إذا كانت الزوايا 1 و 2 و 3 متطابقة، فأوجد قياس كل زاوية.

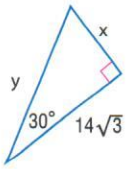
b. أوجد محيط المروحة.

أوجد x و y. (الدرس 3-9)

15.

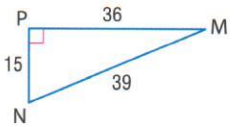


16.

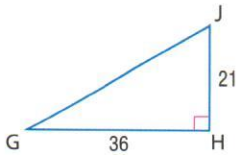


عَبِّر عن كل نسبة بكسر وكسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة. (الدرس 4-9)

17. $\tan M$
18. $\cos M$
19. $\cos N$
20. $\sin N$



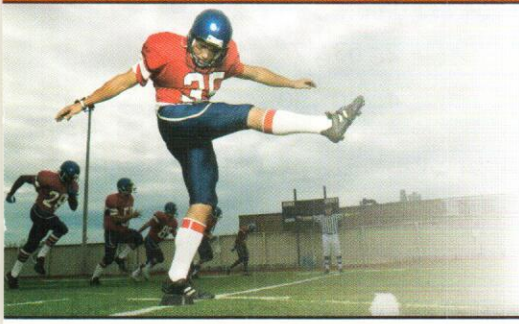
21. حُـلّ المثلث قائم الزاوية. قَرِّب قياسات الزاويا لأقرب درجة وأطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة. (الدرس 4-9)



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-5 زوايا الارتفاع والانخفاض

السابق	الحالي	لماذا
• استخدمت مثلثات متماثلة لقياس المسافات بطريقة غير مباشرة.	1 حل المسائل التي تتضمن زوايا ارتفاع وانخفاض. 2 استخدام زوايا الارتفاع والانخفاض لإيجاد المسافة بين جسمين.	• لتسجيل هدف في المرمى، لا بد أن يركل اللاعب الكرة بقوة كافية وزاوية ارتفاع مناسبة للتأكد من أن الكرة ستصل لعارضة المرمى بمستوى مرتفع بما يكفي حتى تمر فوق العارضة الأفقية ويتم تسجيل الهدف. لا بد من أن تتغير هذه الزاوية اعتمادًا على الوضع المبدئي للكرة من حيث بعدها عن قاعدة العارضة.



مفردات جديدة

زاوية الارتفاع
angle of elevation
زاوية الانخفاض
angle of depression

ممارسات في الرياضيات

استخدام نماذج الرياضيات.
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 زوايا الارتفاع والانخفاض

زاوية الارتفاع هي الزاوية التي تتكون من خط أفقي وخط (مسار) الرؤية للمُراقب تجاه هدف فوق الخط الأفقي.

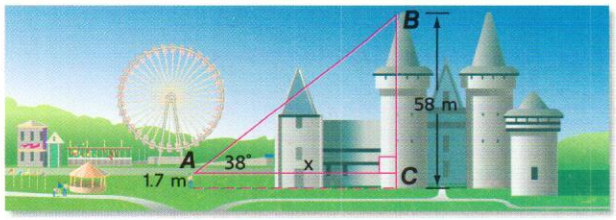
زاوية الانخفاض هي زاوية تتكون من خط أفقي وخط رؤية المراقب تجاه هدف أدنى من الخط الأفقي.

الخطوط الأفقية متوازية، لذا فإن زاويتي الارتفاع والانخفاض في الرسم التخطيطي ستكونان متطابقتين بنظرية الزوايا الداخلية المتبادلة.

مثال 1 زاوية الارتفاع

العطلة **تريد سالي رؤية القلعة في مدينة الملاهي. وترى قمة القلعة بزاوية ارتفاع تبلغ 38°. وتعلمُ أن القلعة ارتفاعها 58 متراً. فإذا كان طول سالي 1.7 أمتار، فكم تبعد عن القلعة لأقرب متر؟**

ارسم رسمًا تصوريًّا لهذه الحالة.



نظرًا لأن طول سالي 1.7 أمتار. فإن $BC = 57 - 1.7$ أو 55.3 متراً. افترض أن x تمثل المسافة بين سالي والقلعة AC.

$$\tan A = \frac{BC}{AC} \qquad \tan = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$$

$$\tan 38° = \frac{55.3}{x} \qquad m\angle A = 38,\ BC = 184.5,\ AC = x$$

$$x = \frac{55.3}{\tan 38°} \qquad \text{أوجد قيمة } x$$

$$x \approx 72 \qquad \text{استخدم الحاسبة}$$

تبعد سالى بحوالي 72 متراً عن القلعة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

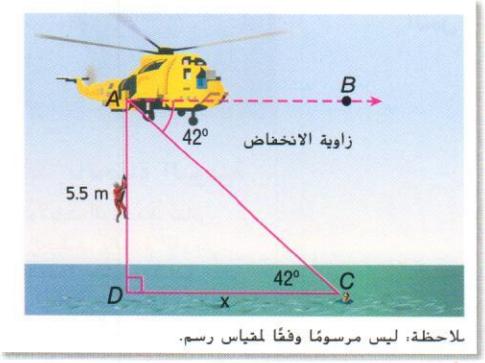
تمرين موجّه

1. **كرة القدم** العارضة الأفقية للمرمى ارتفاعها 3 أمتار. إذا تمت محاولة التهديف من مسافة 22.9 أمتار من قاعدة عارضة المرمى وأخطأت الهدف بمسافة قدم واحد. فما أصغر زاوية ارتفاع كان يمكن أن تُركل منها الكرة لأقرب درجة؟

مثال 2 زاوية الانخفاض

الطوارئ **ينتشل فريق البحث والإنقاذ بالطائرة أشخاصًا من موقع حادثة قارب عند ملاحظة شخص آخر في حاجة للمساعدة. إذا كانت زاوية انخفاض ذلك الشخص الآخر هي 42° والطائرة على ارتفاع 5.5 متراً فوق سطح الماء، فما المسافة الأفقية بدءًا من فريق الإنقاذ حتى هذا الشخص لأقرب متر؟**

ارسم رسمًا تصوريًّا لهذه الحالة.



ملاحظة: ليس مرسومًا وفقًا لمقياس رسم.

نظرًا لأن $\overrightarrow{AB}$ و $\overline{DC}$ متوازيان، فإن $m\angle BAC = m\angle ACD$ حسب نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة.

افترض أن x تُمثل المسافة الأفقية من فريق الإنقاذ إلى الشخص DC.

$$\tan C = \frac{AD}{DC} \qquad \tan = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$$

$$\tan 42° = \frac{5.5}{x} \qquad C = 42 \text{ و } AD = 5.5 \text{ و } DC = x$$

$$x \tan 42° = 5.5 \qquad \text{اضرب كل ضلع في } x$$

$$x = \frac{5.5}{\tan 38°} \qquad \text{اقسم كل من الطرفين على } \tan 42°$$

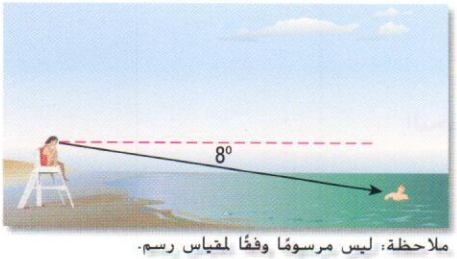
$$x \approx 6.1 \qquad \text{استخدم الحاسبة}$$

إذًا، فالمسافة الأفقية بين الشخص والطائرة تبلغ حوالي 6 متراً.

انتبه!
زوايا الارتفاع والانخفاض لتفادي الخطأ، تذكر أن زوايا الارتفاع والانخفاض تتشكل دائمًا بخط أفقي وليس رأسي على الإطلاق.

تمرين موجّه

2. **الإنقاذ** يراقب أحد المنقذين الشاطئ من مسار رؤية بمسافة 1.8 أمتار فوق سطح الأرض. ويرى أحد الأشخاص يسبح في الماء بزاوية انخفاض قدرها 8°. فكم يبعد ذلك الشخص من برج المراقبة؟



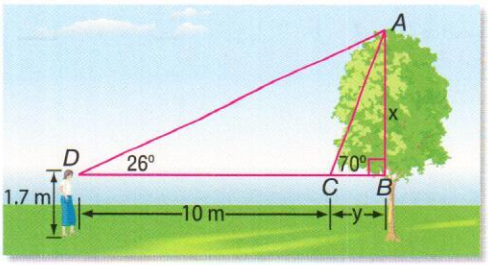
ملاحظة: ليس مرسومًا وفقًا لمقياس رسم.

الربط بتاريخ الرياضيات
إراتوستينس (194–276ق.م)
كان إراتوستينس عالم رياضيات وفلك، وولد في قوريني وهي الآن ليبيا. استخدمَ زاوية ارتفاع الشمس في وقت الظهر في مدينتي الإسكندرية وأسوان (في مصر) لقياس محيط الأرض.
المصدر: موسوعة بريتانيكا

2 زاويتا الارتفاع والانخفاض يمكن استخدام زوايا الارتفاع أو الانخفاض لجسمين مختلفين لتحديد المسافة بين هذين الجسمين. وبالمثل، يمكن استخدام الزوايا من موقعين مختلفين لملاحظة نفس الجسم لتحديد ارتفاع الشيء.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 استخدام زاويتي ارتفاع أو انخفاض



اقتلاع الأشجار لكي تُحدد سهى ارتفاع شجرة تريد اقتلاعها، ترى أن قمة الشجرة بزاوية ارتفاع 70°. ثم تراجعت 10 أمتار للخلف ورأت القمة بزاوية 26°. إذا كان خط رؤية سهى يرتفع عن الأرض بمقدار 1.7 متر، فما طول الشجرة لأقرب متر؟

الفهم $\triangle ABC$ و$\triangle ABD$ مثلثان بزاوية قائمة. ارتفاع الشجرة هو مجموع طول سهى و AB.

التخطيط نظرًا لأن المسافة المبدئية بينها وبين الشجرة غير معروفة، فاكتب وحل نظام معادلات باستخدام كلا المثلثين. افترض أن $AB = x$ و$CB = y$.
لذا $DB = y + 10$ وارتفاع الشجرة $x + 1.7$.

الحل استخدم $\triangle ABC$.

$$\tan 70° = \frac{x}{y} \qquad \tan = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}};\ m\angle ACB = 70$$

$$y \tan 70° = x \qquad \text{اضرب كل طرف في } y$$

استخدم $\triangle ABD$.

$$\tan 26° = \frac{x}{y + 10} \qquad \tan = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}};\ m\angle D = 26$$

$$(y + 10) \tan 26° = x \qquad \text{اضرب كل ضلع في } y + 10$$

عوّض عن قيمة x من $\triangle ABD$ في المعادلة لـ $\triangle ABC$ وحل لإيجاد قيمة y.

$$y \tan = x$$

$$y \tan 70° = (y + 10) \tan 26°$$

$$y \tan 70° = y \tan 26° + 10 \tan 26°$$

$$y \tan 70° - y \tan 26° = 10 \tan 26°$$

$$y(\tan 70° - \tan 26°) = 10 \tan 26°$$

$$y = \frac{10 \tan 26°}{\tan 70° - \tan 26°}$$

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد أن $y \approx 2.16$. باستخدام المعادلة من $\triangle ABC$، فإن $x = 2.16 \tan 70°$ أو حوالي 5.9.

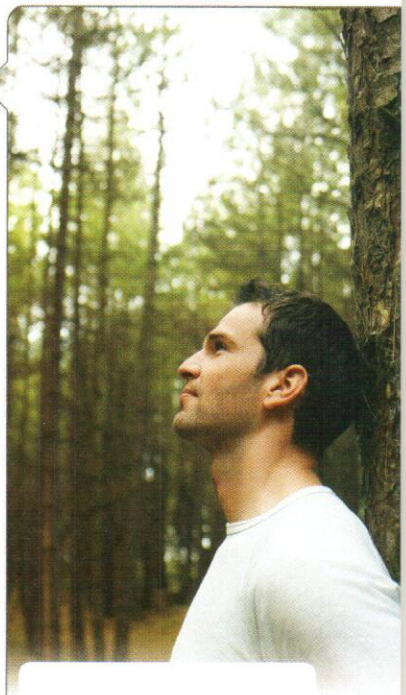
ارتفاع الشجرة يساوي 5.9 + 1.7 أو 7.6، أي حوالي 8 أمتار.

التحقق عوّض قيمة y في المعادلة من $\triangle ABD$.

$x = (2.16 + 10) \tan 26°$ أو حوالي 5.9. هذه هي نفس القيمة الناتجة عن استخدام المعادلة من $\triangle ABC$. ✓

تمرين موجّه

3. **ناطحات السحاب** مبنيان مرئيان من أعلى ناطحة سحاب ارتفاعها 200 متر. المبنى "أ" يُرى من زاوية انخفاض 35° والمبنى "ب" يُرى من زاوية انخفاض 36°. فكم يبعد المبنيان عن بعضهما لأقرب متر؟



الربط بالحياة اليومية

في الولايات المتحدة، تُقاس كمية الخشب بالقدم اللوحي، وهي قطعة خشب تشتمل على قياس 2360 سنتيمترا مكعبة. غالبًا ما يُقدّر أصحاب مزارع أشجار الخشب كمية خشب الأشجار لديهم لتحديد الكمية التي يريدون قطعها وبيعها.

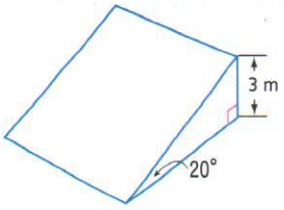
المصدر: كلية الموارد الطبيعية بجامعة ولاية أوهايو

نصيحة دراسية

القياس غير المباشر عند استخدام زوايا الانخفاض لجسمين مختلفين لحساب المسافة بينهما، من المهم أن تتذكر أن الجسمين يجب أن يكونا على نفس المستوى الأفقي. بمعنى آخر، لا يجوز أن يكون أحدهما أعلى أو أسفل الآخر.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

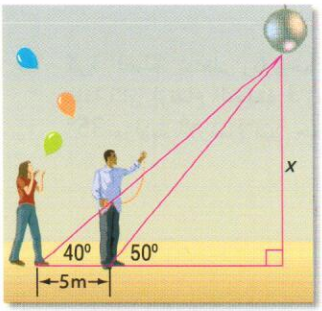


مثال 1

1. **ركوب الدراجات** تريد شيماء أن تبني منحدر الدراجات الموضح هنا. أوجِد طول قاعدة المنحدر.

مثال 2

2. **كرة القاعدة** يجلس مُشَجِّع في المنصة العلوية من الاستاد على بعد 61 متر من القاعدة الرئيسية. إذا كانت زاوية الانخفاض للملعب هي 62°. فما ارتفاع مكان المُشجع؟



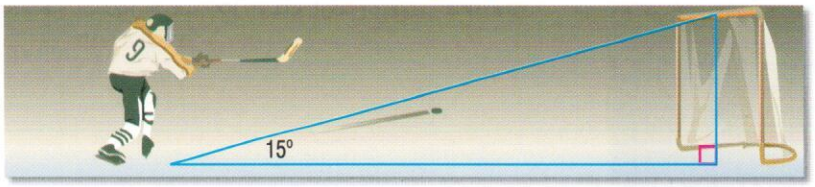
مثال 3

3. **استخدام النماذج** تعمل رنا وزوجها أحمد على تعليق الزينة للحفل المدرسي. ويقف أحمد على بعد 5 أمتار أمام رنا وتحت كرة الزينة مباشرة. فإذا كانت زاوية الارتفاع من رنا للكرة 40° ومن أحمد للكرة 50° فما ارتفاع كرة الزينة؟

التمرين وحل المسائل

مثال 1

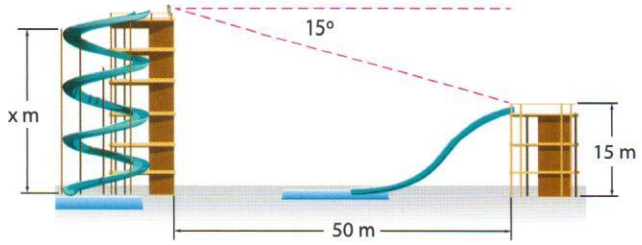
4. **الهوكي** يضرب لاعب هوكي القرص من على بُعد 6 متراً باتجاه مرمى بارتفاع 1.5 متراً. إذا تم ضرب القرص بزاوية ارتفاع 15° باتجاه منتصف المرمى، فهل سيسجل اللاعب هدفًا؟



5. **الجبال** أوجِد زاوية ارتفاع قمة جبل يراها المشاهد من بعد 155 متراً من الجبل إذا كان المشاهد يقف على ارتفاع 1.5 متر من الأرض علمًا بأن ارتفاع الجبل هو 350 مترًا. 66°

مثال 2

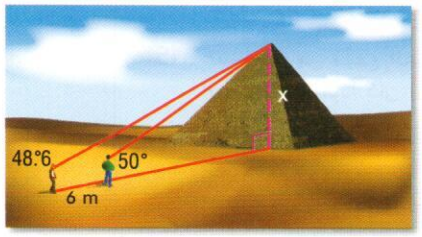
6. **الملاهي المائية** **منحدرا تزحلق** مائيتان يبعدان عن بعضهما 50 متراً على مستوى الأرض. من قمة منحدر التزحلق الأعلى، تستطيع رؤية قمة منحدر التزحلق الأقل ارتفاعًا بزاوية انخفاض 15°. إذا علمتَ أن ارتفاع منحدر التزلق الأخرى حوالى 15 مترًا من سطح الأرض فما ارتفاعك تقريبًا من سطح الأرض؟ قرِّب إلى أقرب عُشْر متر.



7. **الطيران** بسبب عاصفة، يطير طيَّار على ارتفاع 528 متراً ولا بد من أن يهبط بالطائرة. إذا كان ما زالت لديه مسافة أفقية 2000 متراً حتى الهبوط، فبأي زاوية انخفاض يجب أن يهبط؟

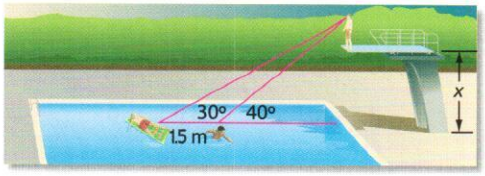
مثال 3

8. **الأهرامات** يزور كل من أحمد وعلي الهرم الأكبر في مصر. بدءًا من مكان أحمد، تبلغ زاوية الارتفاع لقمة الهرم 48.6°. ومن مكان علي، تبلغ زاوية الارتفاع 50°. فإذا كانا يقفان على بعد 6 متراً من بعضهما، وكلاهما طوله 1.7 أمتار، فما ارتفاع الهرم؟

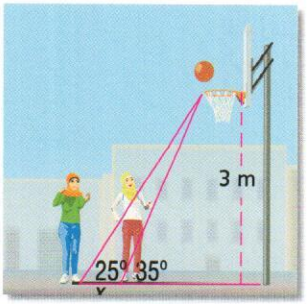


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

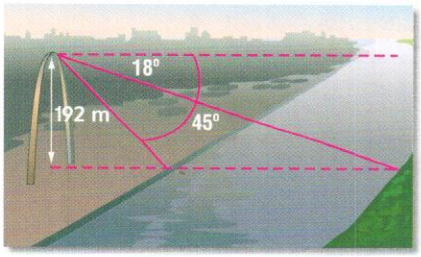
9. **رياضة الغوص** يقف محمد على لوح القفز الأعلى في حمام السباحة المحلي. وفي الماء، يوجد اثنان من أصدقائه كما هو مُوَضَّح. فإذا كانت زاوية الانخفاض لأحد أصدقائه هي 40° وللآخر 30° الذي يبعد عن الأول بمسافة 1.5 أمتار للوراء، فما ارتفاع لوح القفز؟



10. **كرة السلة** تنتظر رنا وحصة ارتدادًا في مباراة كرة سلة. فإذا كان ارتفاع الحلقة 3 أمتار وزاوية الارتفاع بين رنا والمرمى 35° وزاوية الارتفاع بين حصة والمرمى 25°، فما المسافة بينهما؟

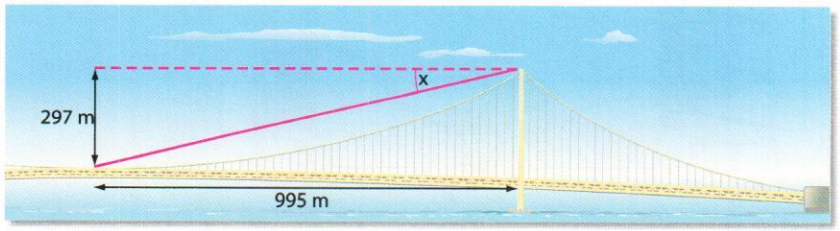


11. **الأنهار** يقف محمد على قمة قوس سانت لويس وينظر للأسفل على نهر المسيسيبي. وتبلغ زاوية الانخفاض تجاه ضفة النهر الأقرب 45° وزاوية انخفاض الضفة الأبعد 18°. ويبلغ ارتفاع القوس 192 مترًا. قَدِّر عرض النهر في تلك النقطة.



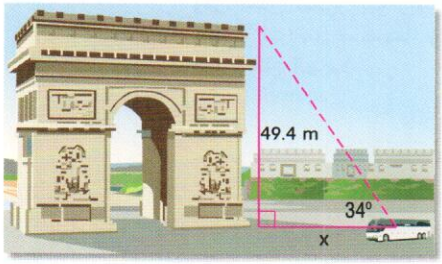
12. **استخدام النماذج** يشتمل بركان أونزن باليابان على حوض حمم على بعد 15 كيلو مترًا أسفل خليج تشيجيوا الذي يقع شرق البركان. وترتفع قناة الحمم التي تصل بين البركان وحوض الحمم بزاوية ارتفاع 40° باتجاه البركان. فما طول قناة الحمم تحت مستوى سطح البحر؟

13. **الجسور** افترض أنك تقف في منتصف منصة جسر أكاشي كايكو الذي يُعد أطول جسر مُعلّق في العالم. فإذا كان الارتفاع من قمة المنصة الحاملة لكابلات التعليق هو 297 مترًا، والمسافة من المنصة إلى منتصف الجسر 995 مترًا، فما زاوية الانخفاض من منتصف الجسر إلى المنصة؟

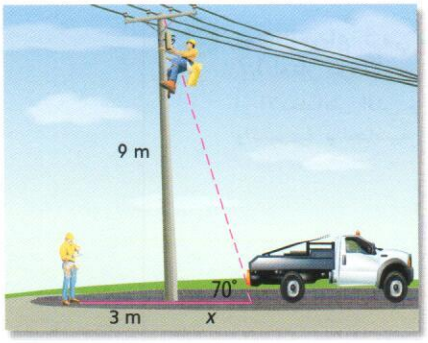


14. **الفنارات** يشع ضوء فنارة جزيرة النورس الصغيرة من ارتفاع 192 مترًا بزاوية انخفاض 6°. ويشع ضوء فنارة جزيرة بِلُومْ من على بُعد 548.6 مترًا من ارتفاع 34 قدمًا وبزاوية انخفاض 2°. أيُّ ضوء فنارة سيصل للمركب الراسي بالدقة ما بين فنارة جزيرة النورس الصغيرة وفنارة جزيرة بلوم؟

15. **السياحة** من موقع الحافلة على الطريق، تبلغ زاوية ارتفاع قوس النصر 34°. فإذا كان ارتفاع القوس 49.4 مترًا، فكم تبعد الحافلة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.



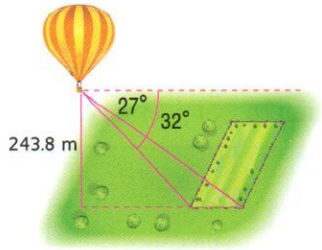
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



16. **الصيانة** وصَلَ عاملا إصلاح خطوط هواتف إلى أحد المواقع لاستعادة خط الاتصال بعد انقطاعه. تسلق أحدهما عمود خطوط الهواتف، بينما وقف الآخر على مسافة 3 أمتار من العمود. إذا كان صندوق التحكم يرتفع 9 مترًا عن الأرض على العمود بزاوية ارتفاع من الشاحنة لعامل الإصلاح تبلغ 70°، فكم يبعد العامل الواقف على الأرض عن الشاحنة؟

17. **التصوير الفوتوغرافي** تتميز كاميرا رقمية مزودة بانورامية بإمكانية عرض بزاوية ارتفاع 38°. إذا كانت الكاميرا محمولة على حامل ثلاثي موجَّه مباشرة لمبنى أثري ارتفاعه 37.8 مترًا، فما المسافة من المبنى التي يجب أن تضع الحامل عندها لترى المبنى كله في الصورة؟

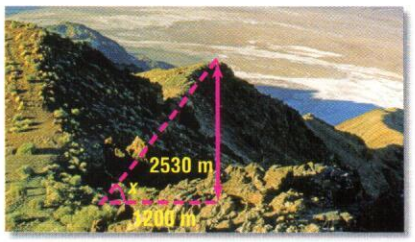
18. **استخدام النماذج** ضمن دراسات وحدة الطقس، رَكِب صف سالم الدراسي منطادًا يعمل بالهواء الساخن. وأثناء طيرانهم فوق حقل مسيَّج، كانت زاوية انخفاض الجزء الأقرب من السياج هي 32° وزاوية انخفاض الجزء الأبعد 27°. إذا كان ارتفاع المنطاد 243.8 متر، فقدّر عرض الحقل؟

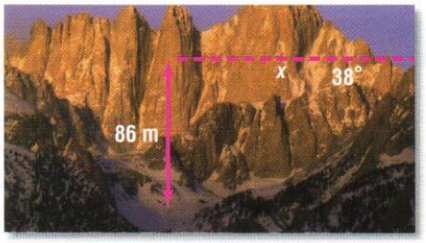


19. **سباقات الماراثون** سباق بادووتر هو سباق يبدأ عند أدنى نقطة في ولاية كاليفورنيا – "وادي الموت" – وينتهي عند أعلى نقطة في الولاية – "جبل ويتني". يبدأ السباق عند عُمق 86 مترًا تحت مستوى سطح البحر وينتهي عند ارتفاع 2530 مترًا فوق مستوى سطح البحر.

a. حدد زاوية الارتفاع لجبل ويتني من القاعدة للقمة 1200 متر

b. إذا كانت زاوية الانخفاض لوادي الموت 38°. فما المسافة الأفقية البحر إذا كانت المسافة الأفقية من مستوى سطح؟

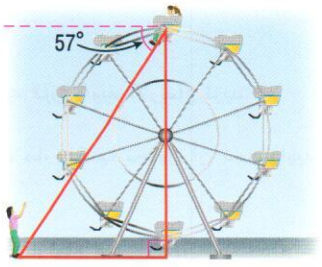


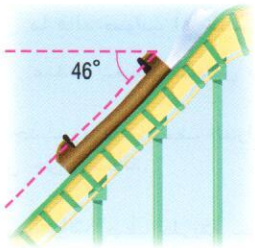


20. **مدن الملاهي** ذهب رنا وريهام وسهى لمدينة الملاهي أثناء زيارتهم لليابان. وركب محمد وهالة عجلة دوارة قطرها 100 متر وركبت هناء لعبة التزحلق تنزلق من ارتفاع 80 مترًا.

a. عندما يكون ريهام وسهى على أقصى ارتفاع للعجلة كما هو مُوضح، فما

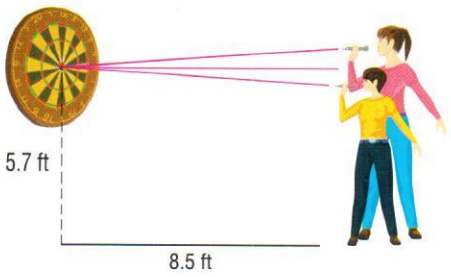
b. إذا كانت زاوية انخفاض الزحلوقة 46°، فما طول الزحلوقة؟ مسافة بعدهما عن رنا؟





حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

21 رميُ السهام ترمي شيماء وحصة السهام من مسافة 2.6 أمتار. يرتفع مركز نقطة الهدف على اللوحة بمقدار 1.7 أمتار من الأرض. رمت حصة السهم من ارتفاع 1.8 أمتار ورمت شيماء السهم من ارتفاع 1.5 أمتار. ما زوايا الارتفاع أو الانخفاض التي يجب أن ترمي عندها كل منهما ليصيب نقطة الهدف؟ تجاهَل العوامل الأخرى، مثل مقاومة الهواء والسرعة والجاذبية الأرضية.



22. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سنبحث في العلاقات بين أضلاع وزوايا المثلثات.

a. هندسيًا ارسم رسمًا هندسيًا لثلاثة مثلثات. ارسم أحدها حاد الزاوية وآخر منفرج الزاوية والثالث بزاوية قائمة. سمِّ أحدها ABC والثاني MNP والثالث XYZ. أوجِدْ أطوال الأضلاع وقياسات الزاوية لكل مثلث.

b. جدوليًا انسخ الجدول التالي وأكمله.

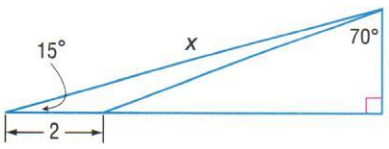
المثلث	النِسب		
ABC	$\frac{\sin A}{BC} =$	$\frac{\sin B}{CA} =$	$\frac{\sin C}{AB} =$
MNP	$\frac{\sin M}{NP} =$	$\frac{\sin N}{PM} =$	$\frac{\sin P}{MN} =$
XYZ	$\frac{\sin X}{YZ} =$	$\frac{\sin Y}{ZX} =$	$\frac{\sin Z}{XY} =$

c. الكلمات خمّن نسبة الـ sin زاوية لطول الضلع المقابل لتلك الزاوية بأحد المثلثات.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

23. تحليل الخطأ يحاول محمد ومحمود تحديد العلاقة بين زوايا الارتفاع والانخفاض. يقول محمد إنك إذا كنت تنظر لأعلى لشخص بزاوية ارتفاع تبلغ °35، إذًا فهو ينظر إليك بزاوية انخفاض °55، وهي الزاوية المتممة للزاوية °35. لا يوافق محمود ويقول أن الشخص الآخر ينظر بزاوية انخفاض مساوية لزاوية ارتفاعك أو °35. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح.

24. تحدٍ أوجد قيمة x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.



25. الاستنتاج هل ما قاله صواب أم خطأ. اشرح.

عندما يتحرك شخص باتجاه شيء وينظر إليه فإن زاوية الارتفاع تزيد.

26. اكتب سؤالاً وجدتْ زميلة بالصف الدراسي زاوية ارتفاع شيء ما، ولكنها تحاول أن تجد زاوية الانخفاض. اكتب سؤالاً لتساعدها على حل المسألة.

27. الكتابة في الرياضيات صِف طريقة يمكنك من خلالها تحديد ارتفاع الشيء دون استخدام حساب المثلثات عن طريق اختيار زاوية ارتفاعك. اشرح استنتاجك.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تمرين على الاختبار المعياري

28. يريد محمد أن يعرف ارتفاع برج إرسال إشارة شبكة الهاتف النقّال بجوار منزله. مشى محمد 24.4 مترًا من قاعدة البرج وقاس زاوية الارتفاع لأعلى البرج بزاوية 54°. إذا كان طول محمد 1.5 أمتار، فما ارتفاع البرج؟

A 15.8 m
B 19.2 m
C 33.5 m
D 35 m

29. إجابة قصيرة يبعد ضوء كشاف عن محطة الطقس بمسافة 1981.2 متر. إذا كانت زاوية الارتفاع إلى موقع الضوء على السُحُب أعلى المحطة هي 45°. فما أقصى ارتفاع للسُحب؟

30. الجبر ما حل نظام المعادلات؟

$$2x - 4y = -12$$
$$-x + 4y = 8$$

F (4, 4)
G (−4, 1)
H (−4, −4)
J (1, −4)

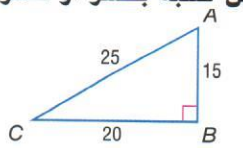
31. SAT/ACT مُثلث تتمثل أضلاعه بنِسَب 5:12:13. فما قياس الزاوية الصغرى للمثلث؟

A 13.34
B 22.62
C 34.14
D 42.71
E 67.83

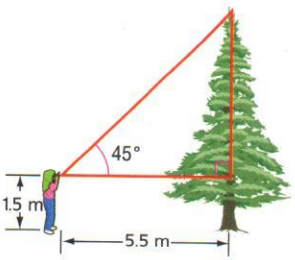
مراجعة شاملة

عَبِّر عن كل نسبة بكسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة. (الدروس 4-9)

32. sin C
33. tan A
34. cos C
35. tan C
36. cos A
37. sin A

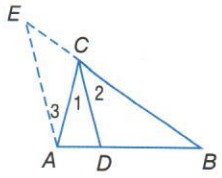


38. المناظر الطبيعية تريد إيمان قياس ارتفاع شجرة. وأمسكتْ مثلث تخطيط بزاوية 45° بحيث تكون إحدى ساقيه أفقية. ولاحظتْ قمة الشجرة بمحاذاة وتر المثلث كما هو مُوضَّح على اليمين. إذا كانت تبعد 5.5 أمتار من الشجرة وعيناها على ارتفاع 1.5 أمتار من الأرض، فأوجِدْ ارتفاع الشجرة. (الدروس 3-9)

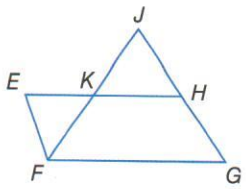


البرهان اكتب برهانًا من عمودين.

39. المعطيات: $\overline{CD}$ bisects $\angle ACB$.
حسب معطيات الشكل، فإن $\overline{CD} \parallel \overline{AE}$.
المطلوب: $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$



40. المعطيات: $\overline{JF}$ تُنصِّف $\angle EFG$.
$\overline{EH} \parallel \overline{FG}$, $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$
المطلوب: $\frac{EK}{KF} = \frac{GJ}{JF}$



الهندسة الإحداثية حدّد إحداثيات النقطة المركزية لكل مثلث.

41. $A(2, 2)$, $B(7, 8)$, $C(12, 2)$
42. $X(-3, -2)$, $Y(1, -12)$, $Z(-7, -7)$
43. $A(-1, 11)$, $B(3, 1)$, $C(9, 6)$
44. $X(4, 0)$, $Y(-2, 4)$, $Z(0, 6)$

مراجعة المهارات

حل كلاً من التناسبات التالية.

45. $\frac{1}{5} = \frac{x}{10}$
46. $\frac{2x}{11} = \frac{3}{8}$
47. $\frac{4x}{16} = \frac{62}{118}$
48. $\frac{12}{21} = \frac{45}{10x}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

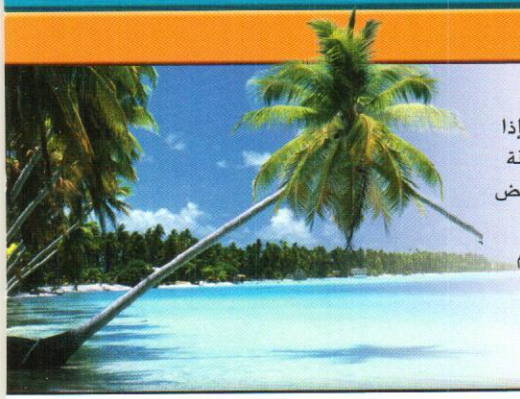
الدرس 9-6

قانون الـ Sine وقانون الـ Cosine

السابق:
- استخدمت نِسب حساب المثلثات لحل المثلثات قائمة الزاوية.

الحالي:
1. استخدام قانون الـ sine لحل مسائل المثلثات.
2. استخدام قانون الـ cosine لحل المثلثات.

لماذا؟
- لقد تعلمت أن ارتفاع أو طول شجرة يمكن قياسه باستخدام *حساب مثلث قائم الزاوية* إذا كنت تعلم زاوية الارتفاع لقمة الشجرة ومسافة بُعدك عن الشجرة. بالرغم من ذلك، فإن بعض الأشجار تنمو بزاوية أو بميل بفعل الطقس. لحساب طول شجرة كهذه، لابد أن تَستخدم أشكالاً أخرى من حساب المثلثات.



مفردات جديدة
- **قانون الجيب** Law of Sines
- **قانون جيب التمام** Law of Cosines

ممارسات في الرياضيات
استخدام نماذج الرياضيات.
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

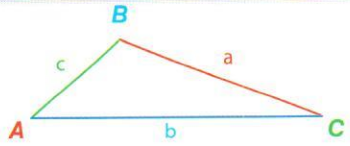
1 قانون الـ sine

في الدرس 4-9، استخدمنا نسب حساب المثلثات لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا حادة للمثلثات ذات الزاوية القائمة. ولتحديد قياسات المثلث غير ذي الزاوية القائمة، يمكن توسعة تعريفات الـ sine و cosine للزوايا المنفرجة.

يمكن استخدام **قانون الـ sine** لتحديد أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا لأي مثلث.

النظرية 9.10 قانون الـ sine

في $\triangle ABC$، إذا كان أطوال أضلاعه a وb وc تُمثل أطوال الأضلاع المقابلة للزوايا A وB وC، فإن $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.



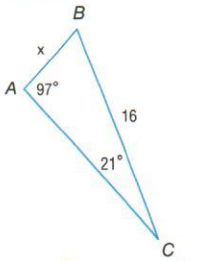
ستثبت إحدى المعادلات للنظرية 9.10 في التمرين 45.

يمكنك استخدام قانون الـ **sine** لحل مثلث إذا كنت تعرف قياس زاويتين وأي ضلع (AAS أو ASA).

مثال 1 قانون الـ sine (AAS)

أوجد x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

لدينا قياسا زاويتين وضلع غير بيني، إذًا استخدم قانون الـ sine لكتابة عبارة تناسب.



$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$ — قانون الـ sine

$\frac{\sin 97°}{16} = \frac{\sin 21°}{x}$ — $m\angle A = 97,\ a = 16,\ m\angle C = 21,\ c = x$

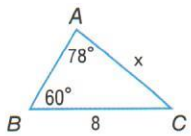
$x \sin 97° = 16 \sin 21°$ — خاصية الضرب التبادلي

$x = \frac{16 \sin 21°}{\sin 97°}$ — اقسم كل طرف على $\sin 97°$

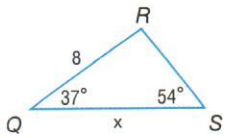
$x \approx 5.8$ — استخدم الحاسبة

تمرين موجّه

1A.



1B.



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف ©

إذا كانت لديك قياسات ASA. فاستخدم نظرية مجموع زوايا المثلث لتجد قياس الزاوية الثالثة.

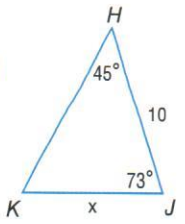
نصيحة دراسية

حالة مُبهمة يمكنك أحيانًا استخدام قانون الsine لحل مثلث إذا كنت تعرف طول ضلعين وزاوية غير التي بينهما (SSA). ولكن هذه القياسات الثلاثة لا توفر دائمًا الحل الدقيق للمثلث. ستتعلم المزيد عن هذه *الحالة المبهمة* في تمارين التوسع 6-8.

مثال 2 قانون الـ sine (ASA)

أوجد x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

باستخدام نظرية مجموع زوايا المثلث، فإن $m\angle K = 180 - (45 + 73)$ أو 62.



$\frac{\sin H}{h} = \frac{\sin K}{k}$ قانون الـ sine

$\frac{\sin 45°}{x} = \frac{\sin 62°}{10}$ $m\angle H = 45,\ h = x,\ m\angle K = 62,\ k = 10$

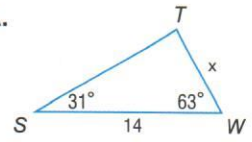
$10 \sin 45° = x \sin 62°$ خاصية الضرب التبادلي

$\frac{10 \sin 45°}{\sin 62°} = x$ اقسم كل طرف على $\sin 62°$

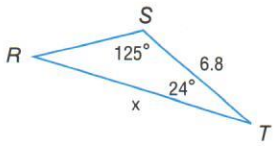
$x \approx 8.0$ استخدم الحاسبة

تمرين موجّه

2A.



2B.



2 قانون الـ cosine

إذا كان استخدام قانون الـ sine لا يساعد في حل المثلث، يمكن استخدام قانون الـ cosine.

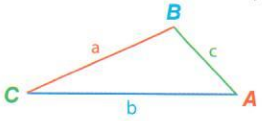
النظرية 9.11 قانون الـ cosine

في $\triangle ABC$، إذا كان أطوال أضلاعه a وb وc تُمثل أطوال الأضلاع المقابلة للزوايا A وB وC، فإن

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$



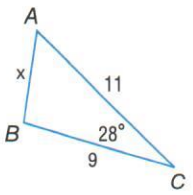
ستثبت إحدى المعادلات للنظرية 9.11 في التمرين 46.

يمكنك استخدام **قانون الـ cosine** لحل مثلث إذا كنت تعرف طول الضلعين والزاوية البينية (SAS).

مثال 3 قانون الـ Cosine (SAS)

أوجد x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

لدينا قياس ضلعين وزاويتهم البينية، إذًا استخدم قانون cosine.



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ قانون Cosine

$x^2 = 9^2 + 11^2 - 2(9)(11) \cos 28°$ التعويض

$x^2 = 202 - 198 \cos 28°$ بسّط

$x = \sqrt{202 - 198 \cos 28°}$ خُذ الجذر التربيعي للطرفين

$x \approx 5.2$ استخدم الحاسبة

انتبه!

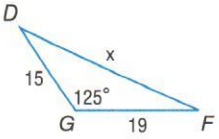
تسلسل العمليات تذكر أن تَتَبَّع تسلسل العمليات عند تحويل التعابير لأبسط صورة. يجب إجراء الضرب أو القسمة قبل الجمع أو الطرح. إذًا، فإن $202 - 198 \cos 28°$ لا يمكن تحويلها لأبسط صورة لتكون $4 \cos 28°$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

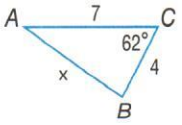
تمرين موجّه

أوجد x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

3A.



3B.



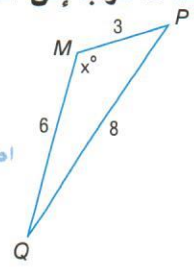
نصيحة دراسية

الزوايا المُنفرجة هناك أيضًا قِيَم لكل من sin A و cos A و tan A عندما تكون $A \geq 90°$. ويمكن إيجاد قِيَم نسب هذه الزوايا باستخدام الدالات المثلثية في حاسبتك.

يمكنك أيضًا استخدام قانون الـ cosine إذا كنت تعرف أطوال الأضلاع الثلاثة (SSS).

مثال 4 قانون الـ Cosine (SSS)

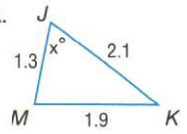
أوجد x. قرّب إلى أقرب درجة.



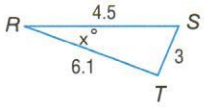
$m^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos M$	قانون Cosine
$8^2 = 6^2 + 3^2 - 2(6)(3) \cos x°$	بالتعويض
$64 = 45 - 36 \cos x°$	بسّط
$19 = -36 \cos x°$	اطرح 45 من كل طرف من طرفي المعادلة
$\frac{19}{-36} = \cos x°$	اقسم كل طرف على -36
$x = \cos^{-1}\left(-\frac{19}{36}\right)$	استخدم نسبة معكوس الـ Cosine
$x \approx 122$	استخدم الحاسبة

تمرين موجّه

4A.



4B.

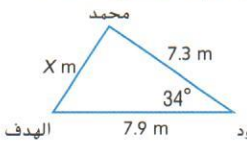


يمكنك استخدام قانون الـ sine وقانون الـ cosine لحل مسائل القياس المباشر وغير المباشر.

مثال 5 من الحياة اليومية القياس المباشر

كرة السلة يلعب محمد ومحمود كرة السلة. رمى محمد الكرة لمحمود وهو على بعد 7.9 مترًا من المرمى وعلى بعد 7.3 مترًا من محمود. كم يبعد محمود من المرمى إذا كانت الزاوية من المرمى لمحمد ومن ثمّ لمحمود 43°؟

صمم رسمًا تخطيطيًا. بما أننا نعرف طوليّ ضلعين من المثلث وقياس الزاوية البينية، فسوف نستخدم قانون cosine.



$x^2 = 7.3^2 + 7.9^2 - 2(7.3)(7.9) \cos 34°$	قانون Cosine
$x = \sqrt{115.7 - 115.34 \cos 34°}$	بسّط وخُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين
$x \approx 4.6$	استخدم الحاسبة

يبعد محمود عن المرمى بمسافة 4.6 مترًا عند التسديد.

الربط بالحياة اليومية

لُعِبت أول مباراة كرة سلة على ملعب YMCA في سبرنجفيلد بولاية ماساتشوستس في الأول من ديسمبر عام 1891. اخترع جايمس نايسمث، معلم التربية البدنية، هذه الرياضة باستخدام كرة قدم ونصف سلتي خوخ، وهذا هو سبب تسمية الرياضة باسم كرة *السلة*.

المصدر: موسوعة بريتانيكا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين موجّه

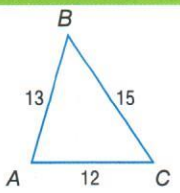
5. المناظر الطبيعية عند مسافة 3 أمتار من قاعدة شجرة، تبلغ الزاوية بين قمة الشجرة والأرض 61°. إذا كانت الشجرة تنمو بزاوية 78° من الأرض، فكم يبلغ طولها لأقرب متر؟

عند حل المثلثات ذات الزاوية القائمة، يمكنك استخدام الـ sine أو cosine أو الـ tan للزاوية. عند حل بعض المثلثات الأخرى، يمكنك استخدام قانون الـ sine أو قانون cosine حسب المُعطيات.

قراءة في الرياضيات

حل المثلث تذكر أن حل المثلث يعني أن تستنتج جميع أطوال الأضلاع و/أو قياسات الزوايا.

مثال 6 حل مثلث



حِل المثلث ABC. قرّب إلى أقرب درجة.

نظرًا لأن $15^2 \neq 12^2 + 13^2$، فهذا ليس بمثلث قائم الزاوية.
بما أن لدينا أطوال الأضلاع الثلاثة (SSS) كلها، فابدأ باستخدام قانون cosine لإيجاد $m\angle A$.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	قانون Cosine
$15^2 = 12^2 + 13^2 - 2(12)(13) \cos A$	$a = 15$ و $b = 12$ و $c = 13$
$225 = 313 - 312 \cos A$	بسّط
$-88 = -9312 \cos A$	اطرح 313 من كل طرف
$\frac{-88}{-312} = \cos A$	اقسم كل طرف على -312
$m\angle A = \cos^{-1} \frac{88}{312}$	استخدم نسبة معكوس الـ Cosine
$m\angle A \approx 74$	استخدم الحاسبة

طبّق قانون الsine لإيجاد قيمة $m\angle B$.

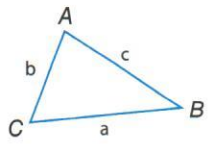
$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$	قانون الـ sine
$\frac{\sin 74°}{15} \approx \frac{\sin B}{12}$	$m\angle A \approx 74$ و $a = 15$ و $b = 12$
$12 \sin 74° = 15 \sin B$	خاصية الضرب التبادلي
$\frac{12 \sin 74°}{15} = \sin B$	اقسم كل طرف على 15
$m\angle B = \sin^{-1} \frac{12 \sin 74°}{15}$	استخدم نسبة معكوس الـ sine
$m\angle B \approx 50$	استخدم الحاسبة

انتبه

التقريب عند تقريب حل عددي واستخدامه في حسابات أخرى، يمكن أن تكون إجابتك غير دقيقة. انتظر حتى تُكمل حل كل العمليات الحسابية ثم قم بالتقريب.

باستخدام نظرية مجموع زوايا المثلث، فإن $m\angle C \approx 180 - (74 + 50)$ أو 56.
لذلك، $m\angle A \approx 74$، $m\angle B \approx 50$، و$m\angle C \approx 56$.

تمرين موجّه



حل المثلث ABC باستخدام المُعطيات. قَرّب قياسات الزوايا لأقرب درجة وأطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة.

6A. $b = 10.2$, $c = 9.3$, $m\angle A = 26$

6B. $a = 6.4$, $m\angle B = 81$, $m\angle C = 46$

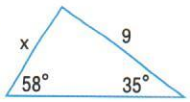
ملخص المفهوم حل المثلث

لحل . . .	المعطيات	ابدأ باستخدام . . .
مثلث قائم الزاوية	ساق-ساق (LL) وتر-ساق (HL) زاوية حادة-وتر (AH) زاوية حادة-ساق (AL)	نسبة tan الزاوية نسبة sine أو cosine الزاوية نسبة sine أو cosine الزاوية نسب sine أو cosine أو tan الزاوية
أي مثلث	زاوية-زاوية-ضلع (AAS) زاوية-ضلع-زاوية (ASA) ضلع-زاوية-ضلع (SAS) ضلع-ضلع-ضلع (SSS)	قانون الsine قانون الsine قانون cosine قانون cosine

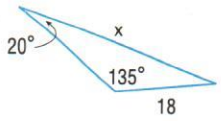
التحقق من فهمك

المثالان 1 و2 **أوجد x. قَرِّب قياسات الزوايا لأقرب درجة وأطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة.**

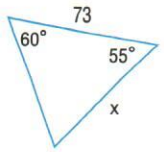
1.



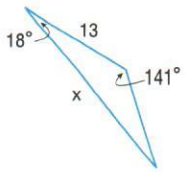
2.



3

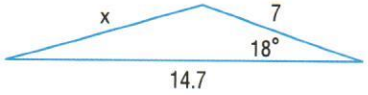


4.

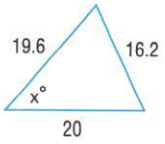


المثالان 3 و4

5.

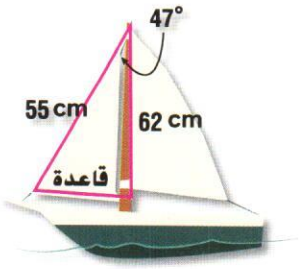


6.



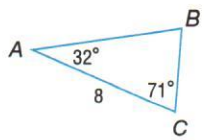
مثال 5

7. **الإبحار** حدد طول الحافة السُفلية أو قاعدة الشراع اللعبة.

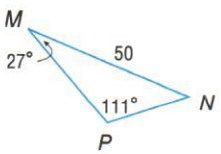


مثال 6 **البنية حُـلّ كل مثلث. قَرِّب قياسات الزوايا لأقرب درجة وأطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة.**

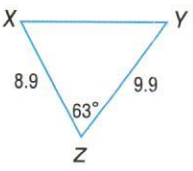
8.



9.



10.



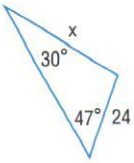
11. حل $\triangle DEF$ إذا كانت $DE = 16$, $EF = 21.6$, $FD = 20$.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

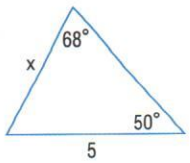
التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و2 **أوجد x. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.**

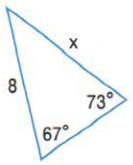
12.



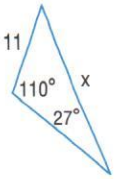
13.



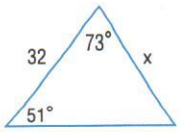
14.



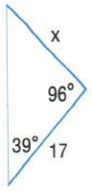
15.



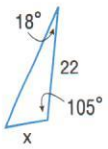
16.



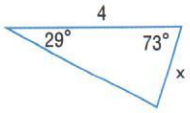
17.



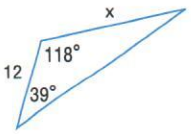
18.

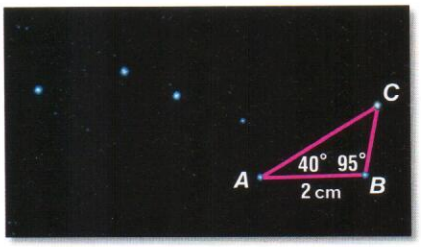


19.



20.

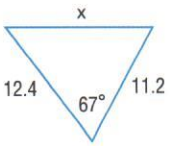




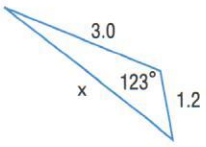
21. **استخدام النماذج** تنظر هالة لمجموعة الدب الأكبر من التلسكوب. ويظهر لها أن مجموعة النجوم تُشكّل مثلثًا بقياسات مُوضَّحة في الرسم التخطيطي على اليسار. استخدم قانون الـ sine لإيجاد المسافة بين A وC.

المثالان 3 و4 **أوجد x. قَرِّب قياسات الزوايا لأقرب درجة وأطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة.**

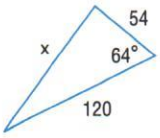
22.



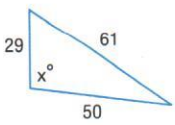
23



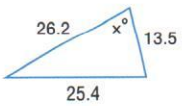
24.



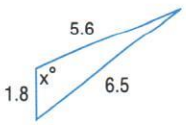
25.

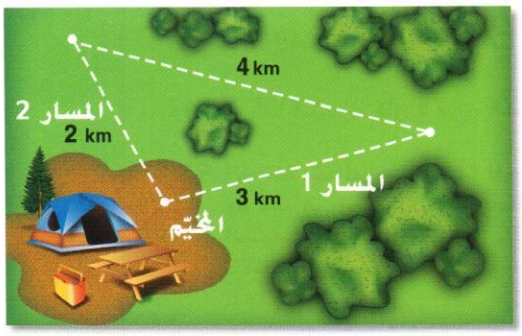


26.



27.



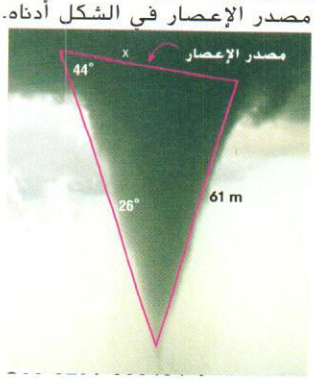


28. **التجوّل سيرًا على الأقدام** يقرر مجموعة من الأصدقاء المشاركين في رحلة تخييم أن يخرجوا للتجول سيرًا على الأقدام. طبقًا للخريطة المُوضحة على اليمين، فما قياس الزاوية بين المسار 1 والمسار 2؟

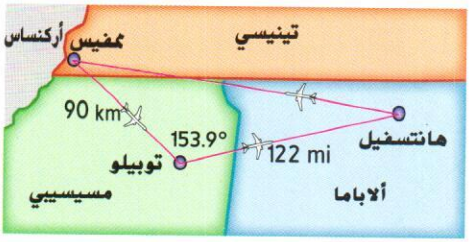
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 5

29. **الأعاصير** استنتج مساحة عرض مصدر الإعصار في الشكل أدناه.



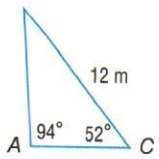
30. **السفر** يقود طيار الطائرة بسرعة 90 كيلومترًا من ممفيس بولاية تينيسي مرورًا بتوبيلو بولاية مسيسيبي ثم هانتسفيل بولاية ألاباما وأخيرًا يعود إلى ممفيس. كم تبعد ممفيس عن هانتسفيل؟



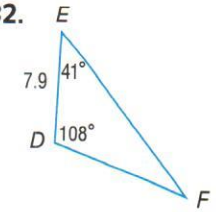
مثال 6

البنية حِل كل مثلث. قَرِّب قياسات الزوايا لأقرب درجة وأطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة.

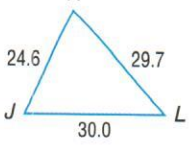
31.



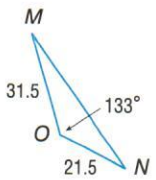
32.



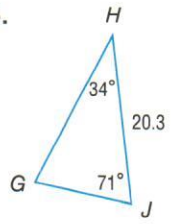
33.



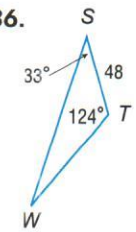
34.



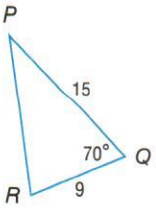
35.



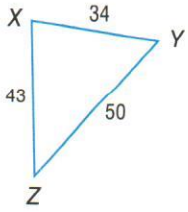
36.



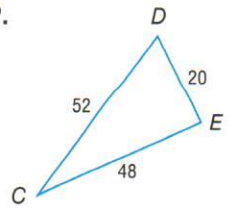
37.



38.



39.

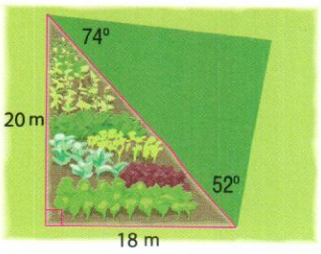


40. حل $\triangle JKL$ إذا كان $JK = 33,\ KL = 56,\ LJ = 65$.

41. حل $\triangle ABC$ إذا كان $m\angle B = 119,\ m\angle C = 26,\ CA = 15$.

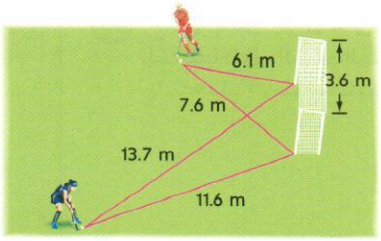
42. حل $\triangle XYZ$ إذا كان $XY = 190,\ YZ = 184,\ ZX = 75$.

43. **البستنة** تمتلك هناء بستانًا للخضراوات العضوية. وترغب في إضافة جزء آخر مثلثي الشكل لزراعة الطماطم. فإذا كان البستان والأرض المجاورة بالأبعاد الموضحة، فاستنتج محيط البستان الجديد لأقرب متر.



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

44. الهوكي الأرضي يلعب علي وسالم الهوكي الأرضي. يقف علي على بعد 6.1 مترًا من أحد قائِمَيّ المرمى و 7.6 مترًا من القائم المقابل. ويقف سالم على بعد 13.7 مترًا من أحد قائمي المرمى و 11.6 مترًا من القائم الآخر. فإذا كان المرمى عرضه 3.6 مترًا، فأي اللاعبين لديه فرصة أكبر للتسديد؟ ما قياس زاوية اللاعب؟

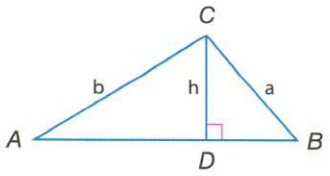


45. برهان علل كل نتيجة باستنتاجات قانون ال sine.

المعطيات: $\overline{CD}$ هو ارتفاع $\triangle ABC$.

المطلوب: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

البرهان:



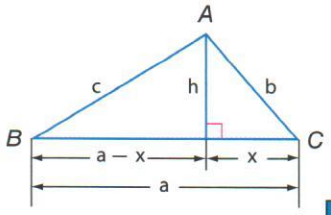
العبارات	المبررات
$\overline{CD}$ هو ارتفاع $\triangle ABC$	المعطيات
$\triangle ACD$ و $\triangle CBD$ قائمة	تحديد الارتفاع
a. $\sin A = \frac{h}{b}, \sin B = \frac{h}{a}$	a. ?
b. $b \sin A = h,\ a \sin B = h$	b. ?
c. $b \sin A = a \sin B$	c. ?
d. $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$	d. ?

46. برهان علل كل نتيجة باستنتاجات قانون cosine.

المعطيات: — h هو ارتفاع $\triangle ABC$.

المطلوب: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

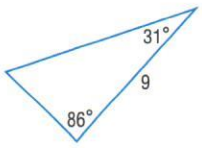
البرهان:



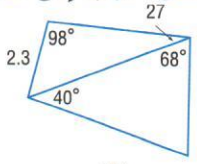
العبارات	المبررات
h هو ارتفاع $\triangle ABC$.	المعطيات
الارتفاع h يفصل $\triangle ABC$ إلى مثلثين قائمي الزاوية	تحديد الارتفاع
a. $c^2 = (a - x)^2 + h^2$	a. ?
b. $c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + h^2$	b. ?
c. $x^2 + h^2 = b^2$	c. ?
d. $c^2 = a^2 - bax + x\,2 + h^2$	d. ?
e. $\cos C = \frac{x}{b}$	e. ?
f. $b \cos C = x$	f. ?
g. $c^2 = a^2 - 2a(b \cos C) + b^2$	g. ?
h. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	h. ?

التفكير المنطقي استنتج محيط كل شكل. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

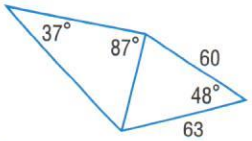
47.



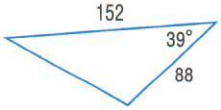
48.



49

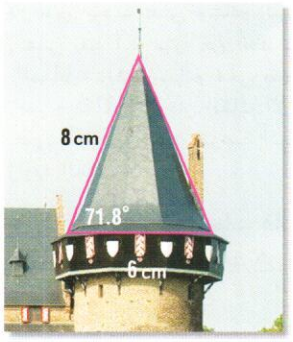


50.



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

51. **نماذج** يعمل جمال على نموذج لقلعة. استنتج طول الضلع المفقود (بالمتر) باستخدام الرسم تخطيطي على اليمين.



52. **الهندسة الإحداثية** استنتج قياس أكبر زاوية في $\triangle ABC$ بإحداثيات $A(-3, 6)$, $B(4, 2)$ و$C(-5, 1)$. اشرح استنتاجك.

53. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف نَستخدم حساب المثلثات لاستنتاج مساحة المثلث.

a. **هندسيًا** ارسم مثلثًا بزاوية حادة ومختلف الأضلاع $\triangle ABC$، بحيث يكون به ارتفاع بطول h يبدأ عند القمة A.

b. **جبريًا** استخدم حساب المثلثات لتمثيل h بدلالة $m\angle B$.

c. **جبريًا** اكتب معادلة لاستنتاج مساحة $\triangle ABC$ باستخدام حساب المثلثات.

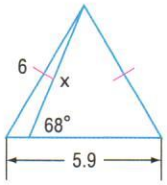
d. **عدديًا** إذا كان $m\angle B$ يساوي 47 و$AB = 11.1$ و$BC = 14.1$ و$CA = 10.4$، فاستنتج مساحة $\triangle ABC$. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

e. **تحليليًا** اكتب معادلة لاستنتاج مساحة $\triangle ABC$ باستخدام حساب المثلثات بخصوص قياسات الزوايا المختلفة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

54. **التفكير النقدي** يُخطط كل من صالح وطارق لتنظيم حفل تخرج يريد صالح أن يصمم زينة على شكل مثلثات وتحتاج أن تعرف محيط قطعة زينة واحدة لشراء زخارف كافية. والمثلثات متساوية الساقين بزاوية قياسها 64° عند القاعدة، وطول الأضلاع 5 سنتيمترات. ويعتقد صالح أن المحيط يبلغ 15.7 سنتيمتر. ويعتقد طارق أنه 15 سنتيمتر. فهل أيّ منهما على صواب؟

55. **تحدٍ** أوجد قيمة x في الشكل الموجود على اليمين.



56. **الاستنتاج** اشرح لماذا تمثل نظرية فيثاغورس حالة خاصة من قانون cosine.

57. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم وسمّ مثلثًا يُمكن حله:

a. باستخدام قانون الـ sine فقط.

b. باستخدام قانون cosine فقط.

58. **الكتابة في الرياضيات** ما الطرق التي يمكن استخدامها لحل مثلث؟

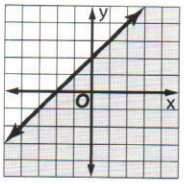
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تمرين على الاختبار المعياري

59. بالنسبة إلى $\triangle ABC$، إذا كان $m\angle A = 42$ و$m\angle B = 74$ و$a = 3$، فما قيمة b؟

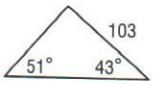
A 4.3
B 3.8
C 2.1
D 1.5

60. الجبر أيُّ المتباينات تصف بأفضل طريقة التمثيل البياني الموضح أدناه؟

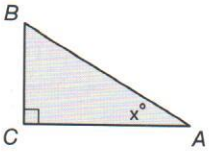


F $y \geq -x + 2$
G $y \leq x + 2$
H $y \geq -3x + 2$
J $y \leq 3x + 2$

61. إجابة قصيرة ما محيط المثلّث الموضّح أدناه؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.



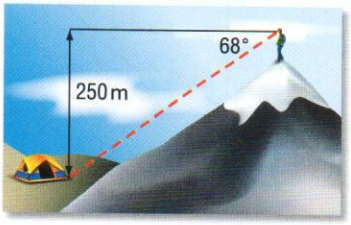
62. SAT/ACT إذا كان $\sin x = 0.6$ و$AB = 12$، فما مساحة $\triangle ABC$؟



A 9.6 وحدات^2
B 28.8 وحدة^2
C 31.2 وحدة^2
D 34.6 وحدة^2
E 42.3 وحدة^2

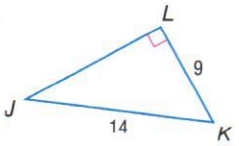
مراجعة شاملة

63. التجول سيرًا على الأقدام يقف أحد هواة التجول سيرًا على الأقدام على قمة جبل بارتفاع 250 مترًا عن مستوى سطح البحر بزاوية انخفاض قدرها 68°. ويمكنه رؤية مخيمه من مكانه. فكم يبعد المخيم من قمة الجبل؟

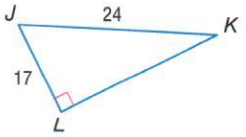


استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قياس ∠J إلى أقرب درجة.

64.



65.



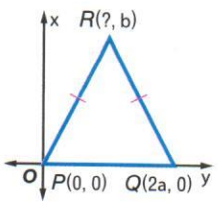
حدّد ما إذا كانت المضلعات التالية متماثلة *دائمًا* أم *أحيانًا* أم *غير متماثلة مطلقًا*. اشرح استنتاجك. (الدرس 2-9)

66. مثلث قائم الزاوية ومثلث متساوي الساقين

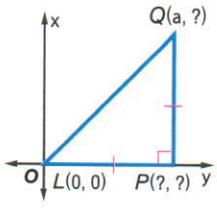
67. مثلث متساوي الأضلاع ومثلث مختلف الأضلاع

عيّن الإحداثيات المفقودة لكل مثلث.

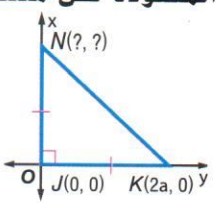
68.



69.



70.



مراجعة المهارات

أوجِد المسافة بين كل زوج من النقاط. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

71. $A(5, 1)$ و$C(-3, -3)$

72. $J(7, 11)$ و$K(-1, 5)$

73. $W(2, 0)$ و$X(8, 6)$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

التوسع 9-6
مختبر الهندسة
الحالة المبهمة

من خلال دراستك للمثلثات المتطابقة، تعلم أنه توجد ثلاثة قياسات تحدد مثلثًا فريدًا عندما تكون هذه القياسات تُمثل

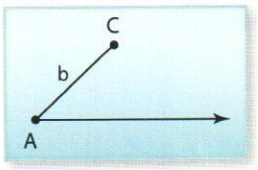
- ثلاثة أضلاع (SSS) أو
- ضلعين وزاوية محصورة (SAS) أو
- زاويتين وضلع محصور (ASA) أو
- زاويتين وضلع غير محصور (AAS)

ليس من الضروري تحديد مثلث فريد من خلال زوايا ثلاث (AAA) أو ضلعين وزاوية غير محصورة. في هذا النشاط المعملي، ستستكشف عدد المثلثات التي تحددها الحالة الأخيرة هذه (SSA)، والتي تُسمى **الحالة المبهمة**.

النشاط 1 الحالة المبهمة (SSA): ∠A زاوية حادة

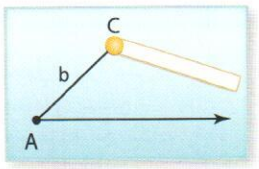
الخطوة 1

على بطاقة ملاحظات مقاس "8 × "5، ارسم الضلع $\overline{AC}$ وشعاعًا يمتد من A لتكوين زاوية حادة. سمِّ الضلع $\overline{AC}$ بالحرف b.



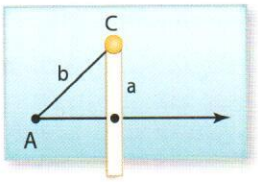
الخطوة 2

باستخدام أحد المشابك النحاسية، ثبّت شريطًا من بطاقة بقياس نصف بوصة ببطاقة الملاحظات عند النقطة C. يجب أن يكون الشريط أطول من b. يمثل هذا الضلع a.



الخطوة 3

اضبط موضع الضلع a بحيث يكون عموديًا على الشعاع. ضع علامة سوداء على الشريط عند نقطة ملامسته للشعاع.



تمثيل النماذج والتحليل

1. إذا كان طول a هو الطول المعطى، فكم عدد المثلثات التي يمكن تكوينها؟ (إرشاد: قم بتدوير الشريط لرؤية ما إذا كان من الممكن أن تتقاطع العلامة مع الشعاع في أي موقع آخر لتكوّن مثلث مختلف.)
2. وضّح أنه إذا كان الضلع a عموديًا على الضلع الثالث للمثلث، إذًا $a = b \sin A$.

حدد عدد المثلثات التي يُمكن تكوينها مع تطبيق كل من التعديلات على a في النشاط 1.

3. $a < b \sin A$ (إرشاد: ضع علامة خضراء فوق العلامة السوداء على الشريط، وحاول أن تكوّن مثلثًا (مثلثات) باستخدام هذا الطول الجديد لـ a.)
4. $a = b$ (إرشاد: قم بتدوير الشريط بحيث يكون في قمة $\overline{AC}$ وحدد هذا الطول باللون الأحمر. ثم قم بتدوير الشريط وحاول أن تكوّن مثلثًا (مثلثات) باستخدام هذا الطول الجديد لـ a.)
5. $a < b$ and $a > b \sin A$ (إرشاد: اجعل العلامة الزرقاء بين كل من العلامتين السوداء والحمراء. ثم قم بتدوير الشريط وحاول أن تكوّن مثلثًا (مثلثات) باستخدام هذا الطول الجديد لـ a.)
6. $a > b$ (إرشاد: قم بتدوير الشريط وحاول أن تكوّن مثلثًا (مثلثات) باستخدام الطول الكامل للشريط ليكون مثل طول a.)

استخدم نتائجك في التمارين 6-1 لتحديد ما إذا كانت القياسات المعطاة تحدد *0* و*1* و*2* أم عددًا *لا نهائي* من المثلثات الحادة. برر إجاباتك.

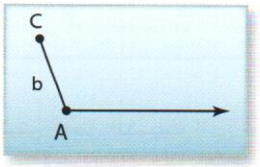
7. $a = 14, b = 16, m\angle A = 55$
8. $a = 7, b = 11, m\angle A = 68$
9. $a = 22, b = 25, m\angle A = 39$
10. $a = 13, b = 12, m\angle A = 81$
11. $a = 10, b = 10, m\angle A = 45$
12. $a = 6, b = 9, m\angle A = 24$

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

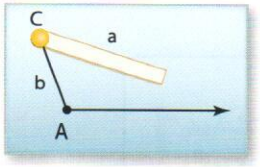
في النشاط التالي، ستستكشف عدد المثلثات المحددة للحالة المبهمة عندما تكون الزاوية المعطاة منفرجة.

النشاط 2 الحالة المبهمة (SSA): ∠A زاوية منفرجة

الخطوة 1 على بطاقة ملاحظات مقاس "8 × "5، ارسم الضلع $\overline{AC}$ وشعاعًا يمتد من A لتكوين زاوية منفرجة. سمِّ الضلع $\overline{AC}$ بالحرف b.



الخطوة 2 باستخدام أحد المشابك النحاسية، ثبّت شريطًا من بطاقة بقياس نصف بوصة ببطاقة الملاحظات عند النقطة C. يجب أن يكون الشريط أطول من b. هذا يمثل الضلع a.



تمثيل النماذج والتحليل

13. كم عدد المثلثات التي يُمكن تكوينها إذا كان $a = b$؟ وإذا كان $a < b$؟ وإذا كان $a > b$؟

استخدم نتائجك في التمرين 13 لتحديد ما إذا كانت القياسات المعطاة تحدد *0* و*1* و*2*، أم *عددًا لا نهائي* من الزوايا المنفرجة. برر إجاباتك.

14. $a = 10, b = 8, m\angle A = 95$

15. $a = 13, b = 17, m\angle A = 100$

16. $a = 15, b = 15, m\angle A = 125$

17. اشرح لماذا لا يُمكن تحديد مثلث فريد من خلال قياسات ثلاث زوايا. كم عدد المثلثات التي تحددها قياسات الزوايا الثلاث؟

حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة تحدد *0* و*1* و*2* أم *عددًا لا نهائي* من المثلثات. برر إجاباتك.

18. $a = 25, b = 21, m\angle A = 39$

19. $m\angle A = 41, m\angle B = 68, m\angle C = 71$

20. $a = 17, b = 15, m\angle A = 128$

21. $a = 13, b = 17, m\angle A = 52$

22. $a = 5, b = 9, c = 6$

23. $a = 10, b = 15, m\angle A = 33$

24. مسألة غير محددة الإجابة احسب قياسات كل من a و b والزاوية الحادة $\angle A$ التي تحدد

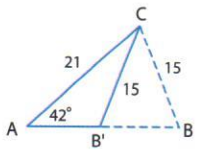
a. 0 مثلثات.

b. مثلثًا واحدًا بالضبط.

c. مثلثين.

25. تحدٍ أوجد الحل للمثلث $\triangle ABC$ إذا كان $a = 15$ و $b = 21$ و $m\angle A = 42$. قَرِّب قياسات الزوايا لأقرب درجة وأطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة.

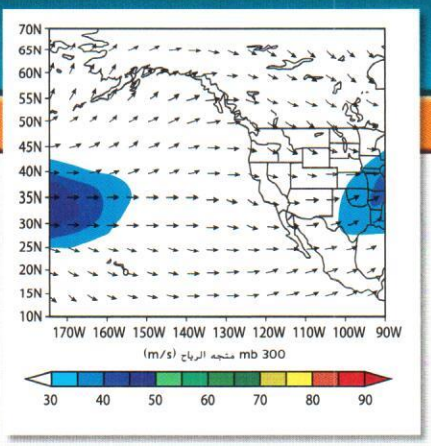
- بالنسبة إلى الحل 1، افترض أن $\angle B$ زاوية حادة، واستخدم قانون الـ sine لإيجاد $m\angle B$. ثم أوجد $m\angle C$. وأخيرًا، استخدم قانون الـ sine مرة أخرى لإيجاد c.
- بالنسبة إلى الحل 2، افترض أن $\angle B$ زاوية منفرجة. افترض أن هذه الزاوية المنفرجة تساوي $\angle B'$. استخدم $m\angle B$ الذي وجدته في الحل 1 والرسم التخطيطي الموضّح لإيجاد $m\angle B'$. ثم أوجد $m\angle C$. وأخيرًا، استخدم قانون الـ sine لإيجاد c.



McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

الدرس 9-7

المتجهات



السابق	الحالي	لماذا؟
• استخدمنا حساب المثلثات لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زاويا المثلثات القائمة.	1 إجراء عمليات هندسية على المتجهات. 2 إجراء عمليات على المتجه على المستوى الإحداثي.	• يَستخدم خبراء الأرصاد المتجهات لتمثيل أنماط الطقس. على سبيل المثال، تُستخدم متجهات الرياح للإشارة إلى اتجاه الرياح وسرعتها.

مفردات جديدة

متجه vector
مقدار magnitude
اتجاه direction
ناتج resultant
طريقة متوازي الأضلاع parallelogram method
طريقة المثلث triangle method
الوضع القياسي standard position
صورة مركبة component form

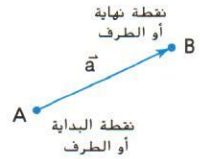
ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

استخدام نماذج الرياضيات.

1 عمليات المتجهات الهندسية

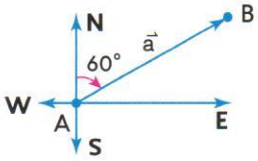
يصف العدد الحقيقي بعض الكميات التي تُعرف بالكمية العددية. والتي تصف مقدار الكمية أو حجمها. يتم وصف الكميات الأخرى من خلال **متجه**. والذي يصف كلاً من مقدار الكمية واتجاهها. على سبيل المثال، تُعد سرعة 5 كيلومترات في الساعة كمية عددية. بينما تكون سرعة 5 كيلومترات في الساعة باتجاه الشمال متجهًا.



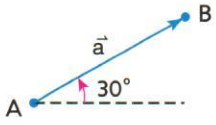
يُمكن تمثيل المتجه من خلال قطعة مستقيمة لها نقطة بداية ونقطة نهاية. يُمكن تسمية المتجه الموضح، الذي له نقطة البداية A ونقطة النهاية B.

بـ $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$ أو **a**.

إن **مقدار** $\overrightarrow{AB}$، والذي يُرمز إليه بـ $|\overrightarrow{AB}|$، هو طول المتجه من نقطة بدايته إلى نقطة نهايته. يُمكن التعبير عن **اتجاه** المتجه في صورة زاوية يتم تكوينها مع المركّبة الأفقية أو في صورة قياس بين 0° و90° شرق أو غرب المستقيم الشمالي الجنوبي.



اتجاه $\vec{a}$ هو 60° شمالي شرقي.

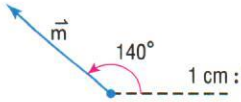


اتجاه $\vec{a}$ هو 30° بالنسبة للمركّبة الأفقية.

مثال 1 تمثيل المتجهات هندسيًا

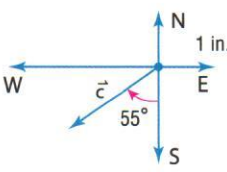
استخدم مسطرة ومنقلة لرسم كل متجه. أرفق قياسًا مع كل رسم تخطيطي.

a. $\vec{m} = 15$ كيلومترًا في الساعة بزاوية 140° إلى المركّبة الأفقية



باستخدام قياس 1 cm: 5 km/h، ارسم سهمًا وحدد بياناته، بحيث يكون بطول 5 ÷ 15 أو 3 سنتيمتر بزاوية 140° مع المركّبة الأفقية.

b. $\vec{c} = 55$ كيلوجرامات من القوة بزاوية 55° باتجاه الغرب الجنوبي



باستخدام قياس 1 in: 25 kgs، ارسم سهمًا وحدد بياناته، بحيث يكون بطول 25 ÷ 55 أو 2.2 بوصة بزاوية 55° غرب المستقيم الشمالي الجنوبي على الضلع الجنوبي.

تمرين موجّه

1A. $\vec{b} = 40$ مترًا في الثانية بزاوية 35° مع المركّبة الأفقية

1B. $\vec{t} = 12$ كيلومترًا في الساعة بزاوية 85° باتجاه الشرق الشمالي

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مجموع متجهين أو أكثر هو متجه مفرد يُسمى **الناتج**.

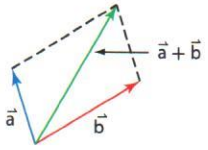
المفهوم الأساسي جمع المتجهات

لإيجاد ناتج $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، استخدم إحدى الطرق التالية.

طريقة متوازي الأضلاع

الخطوة 1 قم بإزاحة $\vec{b}$ بحيث يلامس ذيل $\vec{b}$ ذيل $\vec{a}$.

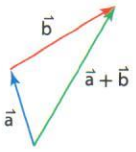
الخطوة 2 أكمل متوازي الأضلاع. الناتج هو قُطر متوازي الأضلاع المبيّن.



طريقة المثلث

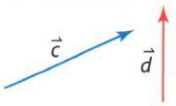
الخطوة 1 قم بإزاحة $\vec{b}$ بحيث يلامس ذيل $\vec{b}$ طرف $\vec{a}$.

الخطوة 2 ارسم متجهًا ناتجًا من ذيل $\vec{a}$ إلى طرف $\vec{b}$.



مثال 2 إيجاد ناتج متجهين

انسخ المتجهات. ثم أوجد $\vec{c} - \vec{d}$.

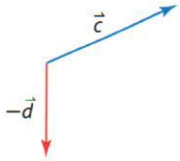


طرح متجه يكافئ جمع المتجه المقابل له.

طريقة متوازي الأضلاع

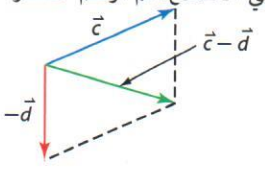
الخطوة 1

انسخ $\vec{c}$ و $\vec{d}$. ارسم $-\vec{d}$، وقم بإزاحته بحيث يلامس ذيله ذيل $\vec{c}$.



الخطوة 2

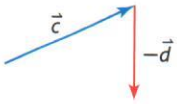
أكمل متوازي الأضلاع. ثم ارسم القُطر.



طريقة المثلث

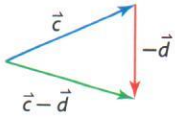
الخطوة 1

انسخ $\vec{c}$ و $\vec{d}$. ارسم $-\vec{d}$ ، وقم بإزاحته بحيث يلامس ذيله طرف $\vec{c}$.



الخطوة 2

ارسم المتجه الناتج من ذيل $\vec{c}$ إلى طرف $-\vec{d}$.



نحصل من الطريقتين على المتجه الناتج ذاته $\vec{c} - \vec{d}$. يمكنك استخدام مسطرة ومنقلة لقياس مقدار كل متجه واتجاهه للتحقق من نتائجك.

تمرين موجّه

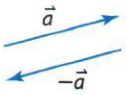
2A. أوجد $\vec{c} + \vec{d}$.

2B. أوجد $\vec{d} - \vec{c}$.

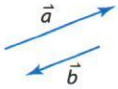
نصيحة دراسية

أنواع المتجهات

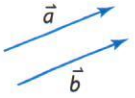
المتجهات الموازية يكون لها الاتجاه ذاته أو اتجاه مقابل، ولكن ليس بالضرورة المقدار ذاته.



المتجهات المقابلة لها المقدار ذاته ولكن في اتجاه مقابل.

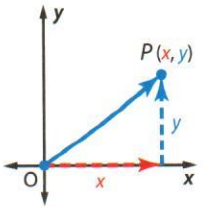


المتجهات المتكافئة لها نفس المقدار والاتجاه.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 المتجهات على المستوى الإحداثي يُمكن أيضًا تمثيل المتجهات على المستوى الإحداثي.

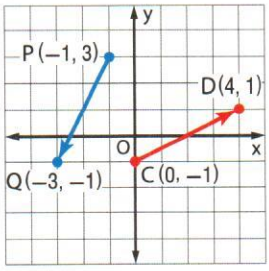


يكون المتجه في **وضع قياسي** إذا كانت نقطة بدايته عند نقطة الأصل. في هذا الموضع، يُمكن وصف المتجه بطريقة فريدة من خلال نقطة نهايته $P(x, y)$.

لوصف متجه من أي نقطة بداية، يمكنك استخدام **الصورة المركّبة** $\langle x, y \rangle$ التي تصف المتجه من حيث مركّبه الأفقي x ومركبه الرأسي y.

لكتابة الصورة المركّبة لمتجه من نقطة البداية (x_1, y_1) ونقطة النهاية (x_2, y_2)، أوجد $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$.

مثال 3 كتابة متجه في صورة مركّبة



اكتب الصورة المركّبة لـ $\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{CD} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$ الصورة المركّبة للمتجه

$= \langle 4 - 0, 1 - (-1) \rangle$ $(x_1, y_1) = (0, -1)$ و $(x_2, y_2) = (4, 1)$

$= \langle 4, 2 \rangle$ بسّط.

تمرين موجّه

3. اكتب الصورة المركّبة لـ $\overrightarrow{PQ}$.

يُمكن إيجاد مقدار متجه على المستوى الإحداثي باستخدام قانون المسافة. كما يُمكن إيجاد الاتجاه باستخدام النسب المثلثية.

مثال 4 إيجاد مقدار المتجه واتجاهه

أوجد مقدار واتجاه $\vec{r} = \langle -4, -5 \rangle$.

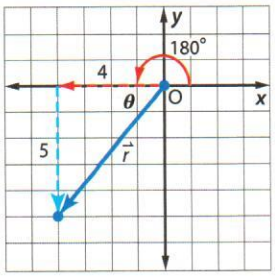
الخطوة 1 استخدم قانون المسافة لإيجاد المقدار.

$|\vec{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ قانون المسافة

$= \sqrt{(-4 - 0)^2 + (-5 - 0)^2}$ $(x_1, y_1) = (0, 0)$ و $(x_2, y_2) = (-4, -5)$

$= \sqrt{41}$ أو تقريباً 6.4 بسّط.

الخطوة 2 استخدم حساب المثلثات لإيجاد الاتجاه.



مثّل بيانيًا $\vec{r}$ ومكونه الأفقي ومركبه الرأسي. ثم استخدم دالة معكوس ظل الزاوية لإيجاد θ.

$\tan \theta = \frac{5}{4}$ $\tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$

$\theta = \tan^{-1} \frac{5}{4}$ حدد معكوس الـ tan الزاوية

$\theta \approx 51.3°$ استخدم حاسبة.

إن اتجاه $\vec{r}$ هو الزاوية التي يكوّنها مع محور x الموجب، وهي حوالي $51.3°$ أو $180° + 51.3°$ أو $231.3°$.

إذًا، مقدار $\vec{r}$ هو حوالي 6.4 وحدات والاتجاه يكون عند زاوية تبلغ حوالي $231.3°$ من المركّبة الأفقية.

تمرين موجّه

4. أوجد مقدار واتجاه $\vec{p} = \langle -1, 4 \rangle$.

نصيحة دراسية

زوايا الاتجاه

تحتوي المتجهات في الوضع القياسي والتي تقع في الأرباع الثالثة أو الرابعة على زوايا اتجاه أكبر من $180°$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يمكنك استخدام خواص الأعداد الحقيقية في جمع المتجهات وطرحها وضربها في الكميات العددية.

المفهوم الأساسي العمليات على المتجهات

إذا كان $\langle a, b\rangle$ و $\langle c, d\rangle$ متجهين، و k هي كمية عددية، إذًا تكون العبارات التالية صحيحة.

جمع المتجهات $\langle a, b\rangle + \langle c, d\rangle = \langle a + c, b + d\rangle$

طرح المتجهات $\langle a, b\rangle - \langle c, d\rangle = \langle a - c, b - d\rangle$

ضرب الكمية العددية $k\langle a, b\rangle = \langle ka, kb\rangle$

مثال 5 العمليات على المتجهات

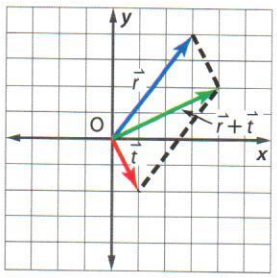
أوجد كلاً مما يلي لـ $\vec{r} = \langle 3, 4\rangle$ و $\vec{s} = \langle 5, -1\rangle$ و $\vec{t} = \langle 1, -2\rangle$. راجع إجاباتك بيانيًا.

a. $\vec{r} + \vec{t}$

الحل جبريًا

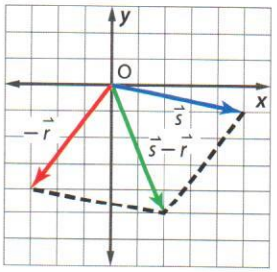
$$\begin{aligned}\vec{r} + \vec{t} &= \langle 3, 4\rangle + \langle 1, -2\rangle \\ &= \langle 3 + 1, 4 + (-2)\rangle \\ &= \langle 4, 2\rangle\end{aligned}$$

التحقق بيانيًا



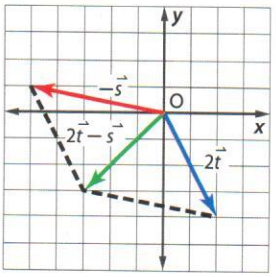
b. $\vec{s} - \vec{r}$

$$\begin{aligned}\vec{s} - \vec{r} &= \vec{s} + (-\vec{r}) \\ &= \langle 5, -1\rangle + \langle -3, -4\rangle \\ &= \langle 5 + (-3), -1 + (-4)\rangle \\ &= \langle 2, -5\rangle\end{aligned}$$



c. $2\vec{t} - \vec{s}$

$$\begin{aligned}2\vec{t} - \vec{s} &= 2\vec{t} + (-\vec{s}) \\ &= 2\langle 1, -2\rangle + \langle -5, 1\rangle \\ &= \langle 2, -4\rangle + \langle -5, 1\rangle \\ &= \langle 2 + (-5), -4 + 1\rangle \\ &= \langle -3, -3\rangle\end{aligned}$$



تمرين موجّه

5A. $\vec{t} - \vec{r}$ **5B.** $\vec{s} + 2\vec{t}$ **5C.** $\vec{s} - \vec{t}$

نصيحة دراسية

طرح المتجهات لتمثيل طرح المتجه بيانيًا، ارسم مقابل المتجه الذي يتم طرحه. فعلى سبيل المثال، في المثال 5b. مقابل $\vec{r} = \langle 3, 4\rangle$ هو $-\vec{r} = \langle -3, -4\rangle$.

نصيحة دراسية

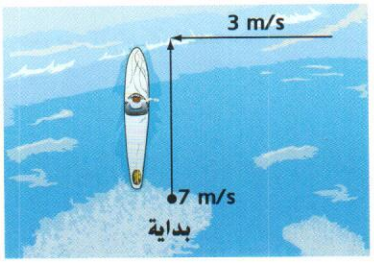
ضرب الكمية العددية التمثيل البياني للمتجه $k\langle a, b\rangle$ هو تغيير أبعاد المتجه $\langle a, b\rangle$ بمعامل القياس k. على سبيل المثال، في المثال 5c. إن $2\vec{t} = \langle 2, -4\rangle$ هو تغيير أبعاد لـ $\vec{t} = \langle 1, -2\rangle$ بمعامل القياس 2.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

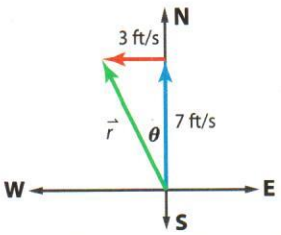
يمكنك استخدام المتجهات لحل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 6 من الحياة اليومية تطبيقات المتجه

التجديف **يجدّف محمد باتجاه الشمال في زورق جلدي بسرعة 7 أمتار في الثانية. ويتحرك النهر بسرعة 3 أمتار في الثانية باتجاه الغرب. ما مقدار السرعة الناتجة واتجاه الزورق الجلدي بالنسبة إلى شخص يشاهده على الشاطئ؟**



الخطوة 1 صمم رسمًا تخطيطيًا. افترض أن $\vec{r}$ يمثّل المتجه الناتج.



الصورة المركّبة للمتجه التي تمثل سرعة التجديف هي $\langle 7, 0 \rangle$.
والصورة المركّبة للمتجه التي تمثل سرعة النهر هي $\langle -3, 0 \rangle$.

المتجه الناتج هو $\langle -3, 0 \rangle + \langle 7, 0 \rangle$ أو $\langle -3, 7 \rangle$. يمثل هذا المتجه الناتج سرعة الزورق، ويمثل مقداره السرعة الناتجة.

الخطوة 2 استخدم قانون المسافة لإيجاد السرعة الناتجة.

$|\vec{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ قانون المسافة

$= \sqrt{(-3 - 0)^2 + (7 - 0)^2}$ $(x_1, y_1) = (0, 0)$ و $(x_2, y_2) = (-3, 7)$

$= \sqrt{58}$ أو تقريباً 7.6 بسّط.

الخطوة 3 استخدام حساب المثلثات لإيجاد الاتجاه الناتج.

$\tan \theta = \frac{3}{7}$ $\tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$

$\theta = \tan^{-1} \frac{3}{7}$ حدد معكوس الـ tan الزاوية

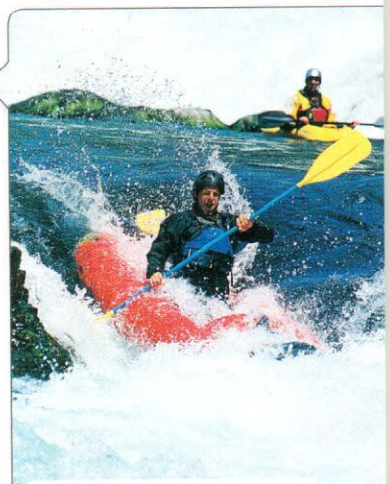
$\theta \approx 23.2°$ استخدم حاسبة.

اتجاه $\vec{r}$ هو $23.2°$ تقريبًا باتجاه الغرب الشمالي.

إذًا، السرعة الناتجة للزورق هي حوالي 7.6 أمتار في الثانية بزاوية $23.2°$ تقريبًا باتجاه الغرب الشمالي.

تمرين موجّه

6. التجديف افترض أن محمدًا يجدف باتجاه الجنوب بسرعة 8 أمتار في الثانية. إذا كان النهر يتدفق بسرعة مترين في الثانية باتجاه الغرب، فما السرعة الناتجة للزورق واتجاهه؟



الربط بالحياة اليومية

يشارك ما يقرب من 47% من راكبي الزوارق في هذه الرياضة مرة واحدة إلى ثلاث مرات في العام.

المصدر: Outdoor Industry Association

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

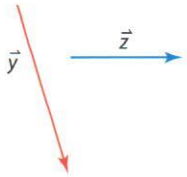
التحقق من فهمك

مثال 1 **استخدم مسطرة ومنقلة لرسم كل متجه. أرفق قياسًا مع كل رسم تخطيطي.**

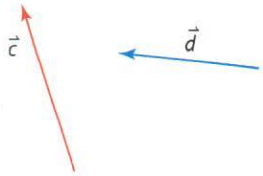
1. $\vec{w} = 75$ كيلومترًا في الساعة بزاوية 40° باتجاه الشرق الجنوبي
2. $\vec{h} = 46$ مترًا في الثانية بزاوية 170° إلى المركّبة الأفقية

مثال 2 **انسخ المتجهات. ثم أوجد كل مجموع أو فرق.**

3. $\vec{c} + \vec{d}$

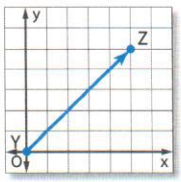


4. $\vec{y} - \vec{z}$

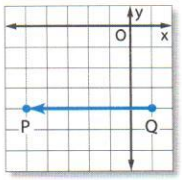


مثال 3 **اكتب الصورة المركّبة لكل متجه.**

5



6.



مثال 4 **أوجد مقدار كل متجه واتجاهه.**

7. $\vec{t} = \langle 2, -4 \rangle$

8. $\vec{f} = \langle -6, -5 \rangle$

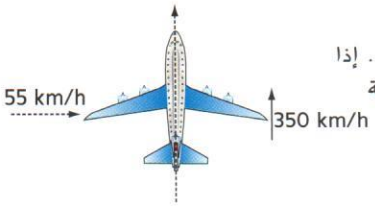
مثال 5 **أوجد كلاً مما يلي لـ** $\vec{a} = \langle -4, 1 \rangle$ **و** $\vec{b} = \langle -1, -3 \rangle$ **و** $\vec{c} = \langle 3, 5 \rangle$**. راجع إجاباتك بيانيًا.**

9. $\vec{c} + \vec{a}$

10. $2\vec{b} - \vec{a}$

مثال 6

11. **استخدام النماذج** تطير طائرة باتجاه الشمال بسرعة 350 كيلومترًا في الساعة. إذا كانت الرياح تهب من الغرب بسرعة 55 كيلومترًا في الساعة، فما السرعة الناتجة والاتجاه الذي تطير فيه الطائرة؟



التمرين وحل المسائل

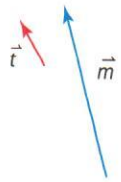
مثال 1 **استخدم مسطرة ومنقلة لرسم كل متجه. أرفق قياسًا مع كل رسم تخطيطي.**

12. $\vec{g} = 60$ سنتيمتر بزاوية 145° إلى المركّبة الأفقية
13. $\vec{n} = 8$ أمتار عند زاوية 24° باتجاه الغرب الجنوبي
14. $\vec{a} = 32$ مترًا في الدقيقة عند زاوية 78° إلى المركّبة الأفقية
15. $\vec{k} = 95$ كيلومترًا في الساعة عند الزاوية 65° باتجاه الشرق الشمالي

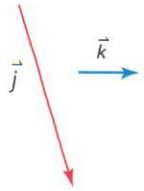
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 **انسخ المتجهات. ثم أوجد كل مجموع أو فرق.**

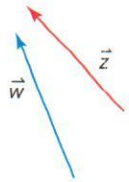
16. $\vec{t} - \vec{m}$



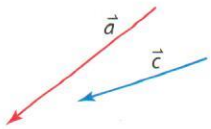
17. $\vec{j} - \vec{k}$



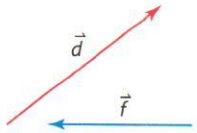
18. $\vec{w} + \vec{z}$



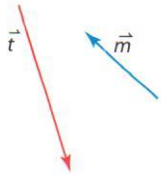
19. $\vec{c} + \vec{a}$



20. $\vec{d} - \vec{f}$

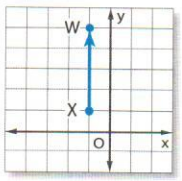


21. $\vec{t} - \vec{m}$

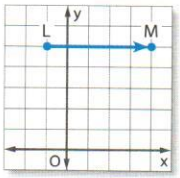


مثال 3 **اكتب الصورة المركّبة لكل متجه.**

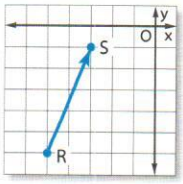
22.



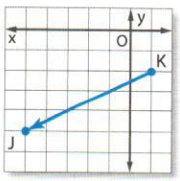
23.



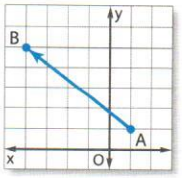
24.



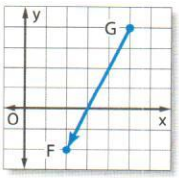
25.



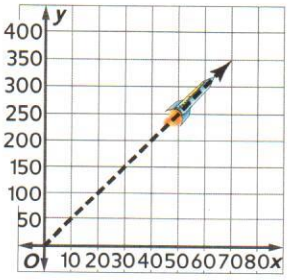
26.



27.



28. **الألعاب النارية** يُمكن تمثيل صعود قذيفة من الألعاب النارية باستخدام متجه. اكتب متجهًا في الصورة المركّبة بحيث يُمكن استخدامها في وصف مسار الألعاب النارية المبيّن.



مثال 4 **التبرير المنطقي** أوجد مقدار كل متجه واتجاهه.

29. $\vec{c} = \langle 5, 3 \rangle$

30. $\vec{m} = \langle 2, 9 \rangle$

31. $\vec{z} = \langle -7, 1 \rangle$

32. $\vec{d} = \langle 4, -8 \rangle$

33. $\vec{k} = \langle -3, -6 \rangle$

34. $\vec{q} = \langle -9, -4 \rangle$

مثال 5 **أوجد كلاً مما يلي لـ** $\vec{b} = \langle 2, 4 \rangle$ ، $\vec{a} = \langle -3, -5 \rangle$ و $\vec{c} = \langle 3, -1 \rangle$. **راجع إجاباتك بيانيًا.**

35. $\vec{b} + \vec{c}$

36. $\vec{c} + \vec{a}$

37. $\vec{b} - \vec{c}$

38. $\vec{a} - \vec{c}$

39. $2\vec{c} - \vec{a}$

40. $2\vec{b} + \vec{c}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

41. التجول سيرًا على الأقدام سارت آمنة باتجاه الشرق لمسافة 2 كيلومترًا ثم سارت باتجاه الجنوب لمسافة 3 كيلومترات.

a. صمم رسمًا تخطيطيًا لتمثيل الحالة، بحيث يكون $\vec{r}$ هو المتجه الناتج.

b. كم تبعد آمنة وفي أي اتجاه تقف من موضع البداية؟

42. تمرين تبلغ سرعة أحد العدائين 6 كيلومترات في الساعة. ومع هبوب الرياح تبلغ سرعته 2 كيلومترًا في الساعة باتجاه الشمال.

a. صمم رسمًا تخطيطيًا لتمثيل الحالة، بحيث يكون $\vec{r}$ هو المتجه الناتج.

b. ما ناتج سرعة العدّاء؟ 6.3 km/h بزاوية 71.6° باتجاه الشرق الشمالي

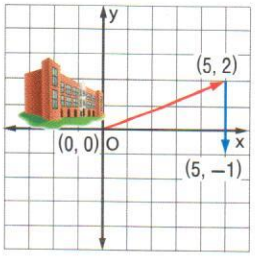
أوجد كلاً مما يلي لـ $\vec{f} = \langle -4, -2 \rangle$ **و** $\vec{g} = \langle 6, 1 \rangle$ **و** $\vec{h} = \langle 2, -3 \rangle$.

43. $\vec{f} + \vec{g} + \vec{h}$

44. $\vec{h} - 2\vec{f} + \vec{g}$

45. $2\vec{g} - 3\vec{f} + \vec{h}$

46. حفل التخرج تشارك نورا في إحدى اللجان للمساعدة في إعداد مدرستها لاستعراض حفل التخرج. يبدأ الاستعراض في المدرسة الثانوية ويستمر كما هو مبيّن.



a. أوجد مقدار المتجه واتجاهه الذي تكوّن مع نقطة البداية عند المدرسة ونقطة النهاية عند نهاية الاستعراض.

b. أوجد طول الاستعراض إذا كانت الوحدة = 0.25 كيلومترًا.

47. السباحة يسبح جمال من الضفة الشرقية إلى الضفة الغربية في مجرى مائي بسرعة 3.3 أمتار في الثانية. ويتسع المجرى المائي حتى 80 مترًا ويتدفق باتجاه الجنوب. إذا عبر جمال المجرى في 20 ثانية، فما سرعة التيار؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

48. تحدٍ أوجد إحداثيات النقطة P على $\overrightarrow{AB}$ التي تقسّم القطعة المستقيمة إلى النسبة المعينة AP إلى PB.

a. $A(0, 0), B(0, 6)$, 2 to 1

b. $A(0, 0), B(-15, 0)$, 2 to 3

49. الدقة هل المتجهات الموازية تكون متجهات مقابلة *أحيانًا* أم *دائمًا* أم *لا* تكون *مطلقًا*؟ اشرح.

برهان أثبت كل خاصية متجهات. افترض أن $\vec{a} = \langle x_1, y_1 \rangle$ **و** $\vec{b} = \langle x_2, y_2 \rangle$.

50. التبديل: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

51. ضرب الكمية العددية: $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ ، حيث إن k هي الكمية العددية

52. مسألة غير محددة الإجابة ارسم مجموعة من المتجهات الموازية.

a. أوجد مجموع المتجهين. ما صحة اتجاه المتجه الذي يمثل المجموع؟

b. أوجد الاختلاف بين المتجهين. ما صحة اتجاه المتجه الذي يمثل الفرق؟

53. الكتابة في الرياضيات قارن وبيّن الفرق بين كل من طريقتي متوازي الأضلاع والمثلث في جمع المتجهات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

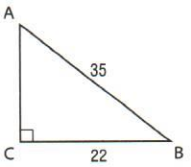
تمرين على الاختبار المعياري

54. إجابة موسعة أوقَفت عالية سيارتها، وسارت على قدميها بطول مسارين يصفهما المتجهان (2, 3) و (5, −1).

a. ما المتجه الذي يمثل سيرها بطول المسارين؟

b. عند وصولها لنهاية المسار الثاني، كم تبعد عن سيارتها إذا كانت الأعداد تمثل الكيلومترات؟

55. في المثلث قائم الزاوية ABC الظاهر أدناه، ما قياس $\angle A$ مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من الدرجة؟

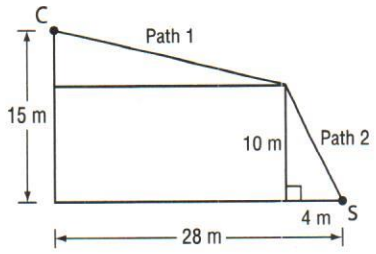


A 32.2
B 38.9
C 51.1
D 57.8

56. الاحتمالات تمت دحرجة حجر نرد. أوجد احتمال ظهور عدد أكبر من 4 على النرد.

F 0.17 *G* 0.33 *H* 0.5 *J* 0.67

57. SAT/ACT يسير مصطفى في المسارين المبينين أدناه للذهاب إلى منزله C من متجر S. ما إجمالي مسافة المسارين، بالأمتار، من C إلى S؟

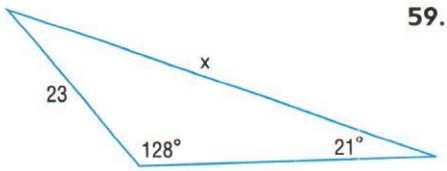


A 10.8 m
B 24.5 m
C 31.8 m
D 35.3 m
E 38.4 m

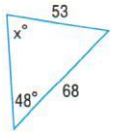
مراجعة شاملة

أوجد x. قَرِّب قياسات الزاويا لأقرب درجة وأطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة. (الدرس 6-9)

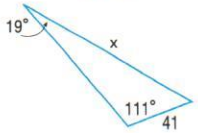
58.



59.

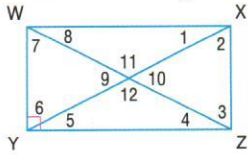


60.



61. كرة القدم يجلس عادل في استاد كرة قدم على ارتفاع 24.4 مترًا أعلى من الملعب. وتبلغ زاوية الانخفاض إلى الملعب °12. ما المسافة الأفقية بين عادل وملعب كرة القدم؟ (الدرس 5-9)

الشكل الرباعي WXYZ عبارة عن مستطيل. أوجد جميع القياسات إذا كان $m\angle 1 = 30$.

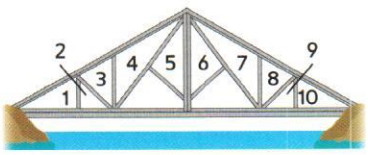


62. $m\angle 2$
63. $m\angle 8$
64. $m\angle 12$
65. $m\angle 5$
66. $m\angle 6$
67. $m\angle 3$

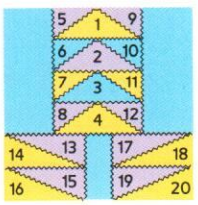
مراجعة المهارات

افترض أن القطع المستقيمة والزوايا التي تبدو متطابقة في كل شكل متطابقة. أوضح أي المثلثات متطابقة.

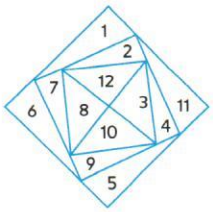
68.



69.



70.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مختبر الهندسة
جمع المتجهات

يمكنك استخدام الرسومات ذات القياسات النسبية لتمثيل المتجهات وحل المسائل.

النشاط

تحلق طائرة صغيرة باتجاه الجنوب بمتوسط سرعة 175 كيلومترًا في الساعة. تهب الرياح بزاوية 30° باتجاه الجنوب الغربي بسرعة 25 كيلومترًا في الساعة. فما مقدار السرعة والاتّجاه الناتجان للطائرة؟

الخطوة 1 **اختيار الرسم بقياسات نسبية.**

بما أنه من غير المعقول تمثيل المتجهات بأحجامها الفعلية، فيمكنك استخدام رسم بقياسات نسبية. في هذا النشاط، افترض أن 2 سنتيمترًا تمثلان 100 كيلومتر.

الخطوة 2 **تصميم رسم بقياسات نسبية.**

استخدم مسطرة ومنقلة لعمل رسم بقياسات نسبية للمتجهين.

الخطوة 3 **إيجاد الناتج.**

أوجد ناتج المتجهين باستخدام إما طريقة المثلّث أو متوازي الأضلاع.

الخطوة 4 **قياس الناتج.**

قم بقياس طول الناتج وزاويته.

طول الناتج هو $3\frac{3}{4}$ سنتيمترًا، ويكوّن زاوية 7° مع المتجه وهو ما يمثل سرعة الطائرة.

الخطوة 5 **إيجاد مقدار الناتج واتجاهه.**

استخدم رسم القياس النسبي مع الطول الذي قِسته في الخطوة 4 لحساب مقدار السرعة الناتجة للطائرة.

$$3\frac{3}{4}\ \text{cm} \times \frac{100\ \text{mph}}{2\ \text{cm}} = 187.5\ \text{mph}$$

السرعة الناتجة للطائرة هي 187.5 كيلومترًا في الساعة بزاوية 7° باتجاه الغرب الجنوبي.

تمارين

ارسم رسمًا بقياسات نسبية لحل كل مسألة.

1. **ركوب الدراجات** يقود علي دراجته باتجاه الغرب بسرعة 10 كيلومترات في الساعة. وتهب الرياح بسرعة 5 كيلومترات في الساعة بزاوية 20° باتجاه الشمال الشرقي. ما السرعة والاتجاه الناتجان لعلي؟

2. **التجديف** يسافر خالد باتجاه الشمال عبر نهر في زورق بسرعة تيار تصل إلى 3 كيلومترات في الساعة باتجاه الغرب. إذا استطاع خالد التجديف بسرعة 7 كيلومترات في الساعة، فما سرعته واتجاهه الناتجان؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 9

9 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

أوساط هندسية (الدرس 9-1)

- بالنسبة إلى العددين الموجبين a وb، الوسط الهندسي هو العدد الموجب x حيث $a : x = x : b$ صواب.

نظرية فيثاغورس (الدرس 9-2)

- افترض أن $\triangle ABC$ مثلثًا قائم الزاوية زاويته القائمة هي C. إذًا $a^2 + b^2 = c^2$.

مثلثات خاصة قائمة الزاوية (الدرس 9-3)

- قياسات أضلاع مثلث زواياه 90° و 45° و 45° هي x و x و $x\sqrt{2}$.
- قياسات أضلاع مثلث زواياه 90° و 60° و 30° هي x و $2x$ و $x\sqrt{3}$.

حساب المثلثات (الدرس 9-4)

- $\sin A = \frac{\text{الساق المقابلة}}{\text{الوتر}}$
- $\cos A = \frac{\text{الساق المجاورة}}{\text{الوتر}}$
- $\tan A = \frac{\text{الساق المقابلة}}{\text{الساق المجاورة}}$

زوايا الارتفاع والانخفاض (الدرس 9-5)

- زاوية الارتفاع هي زاوية تتكون من مستقيم أفقي مع خط الرؤية تجاه هدف في مستوى أعلى.
- زاوية الانخفاض هي زاوية تتكون من مستقيم أفقي مع خط الرؤية تجاه هدف في مستوى أدنى.

قانونا الجيب وجيب التمام (الدرس 9-6)

افترض أن $\triangle ABC$ تُمثل مثلثًا ما.

- قانون الجيب: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
- قانون جيب التمام: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$، $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$، $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

المتجهات (الدرس 9-7)

- المتجه هو كمية تحتوي على كل من مقدار واتجاه.

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

angle of depression زاوية الانخفاض	Law of Sines قانون الجيب
angle of elevation زاوية الارتفاع	magnitude مقدار
component form صورة مركبة	Pythagorean triple ثلاثية فيثاغورس
cosine جيب التمام	resultant ناتج
direction اتجاه	sine جيب الزاوية
geometric mean وسط هندسي	standard position الوضع القياسي
inverse cosine معكوس جيب التمام	tangent ظل الزاوية
inverse sine معكوس الجيب	trigonometric ratio النسبة المثلثية
inverse tangent معكوس ظل الزاوية	trigonometry حساب المثلثات
Law of Cosines قانون جيب التمام	vector متجه

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل عبارة *صحيحة* أم *خاطئة*. فإذا كانت *خاطئة*، فاستبدل الكلمة أو العبارة التي تحتها خط لصياغة جملة صحيحة.

1. الوسط الحسابي لعددين هو الجذر التربيعي الموجب لناتج ضرب العددين.
2. النسب الموسّعة يُمكن استخدامها للمقارنة بين ثلاث كميات أو أكثر.
3. لإيجاد طول وتر مثلث قائم الزاوية، احذف الجذر التربيعي لفارق تربيع الساقين.
4. زاوية الارتفاع هي زاوية تتكون من مستقيم أفقي مع خط رؤية المراقب تجاه هدف أدنى من الأفق.
5. مجموع المتجهين هو الناتج.
6. المقدار هو الزاوية التي تتكون من متجه مع المحور x.
7. يكون المتجه في وضع قياسي عندما تكون نقطة البداية عند نقطة الأصل.
8. تصف الصورة المركبة للمتجه المتجة من حيث التغيير في x والتغيير في y.
9. يُمكن استخدام قانون الـ sine لإيجاد قياس زاوية عند معرفة أطوال الأضلاع الثلاثة.
10. النسبة المثلثية هي نسبة أطوال ضلعين من مثلث قائم الزاوية.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مراجعة درس بدرس

9-1 وسيط هندسي

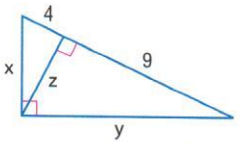
أوجد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد.

11. 9 و 4

12. $\sqrt{20}$ و $\sqrt{80}$

13. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ و $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

14. أوجد x و y و z.



15. الاحتفالات يعلّق راشد سلسلة من الأضواء فوق جزء من حديقته لتجهيز منطقة للاحتفال. باستخدام كتاب لرؤية أعلى وأسفل جزء الحديقة، يمكنه رؤية أنه على بُعد 4.6 مترًا من ذلك الجزء. فإذا كان مستوى ارتفاع عينيه 1.5 مترًا عن الأرض، فما ارتفاع جزء الاحتفال؟

مثال 1

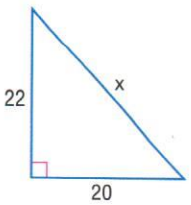
أوجد الوسط الهندسي بين 10 و 15.

$x = \sqrt{ab}$	تحديد الوسط الهندسي
$= \sqrt{10 \times 15}$	$b = 15$ و $a = 10$
$= \sqrt{(5 \times 2) \times (3 \times 5)}$	حلل إلى العوامل.
$= \sqrt{25 \times 6}$	خاصية التجميع
$= 5\sqrt{6}$	بسّط

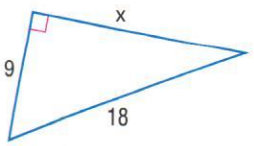
9-2 نظرية فيثاغورس وعكسها

أوجد x.

16.



17.



حدد هل من الممكن أن تكون أي مجموعة من الأعداد قياسات لأضلاع مثلث. إذا كان الأمر كذلك، فصنّف المثلث على أنه *حاد* أو *منفرج* أو *قائم*. علل إجابتك.

18. 7, 24, 25

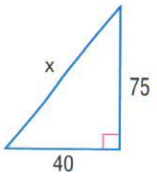
19. 13, 15, 16

20. 65, 72, 88

21. السباحة تسير نهى 27 مترًا باتجاه الجنوب و 38 مترًا باتجاه الشرق للدوران حول البحيرة. وتسبح أختها مباشرة عبر البحيرة. كم عدد الأمتار بالتقريب لأقرب جزء من عشرة التي وفّرتها أخت نهى من خلال السباحة؟

مثال 2

أوجد x.



الضلع المقابل للزاوية القائمة هو الوتر. إذًا $c = x$.

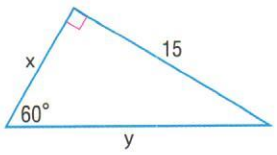
$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$40^2 + 75^2 = x^2$	$b = 75$ و $a = 40$
$7225 = x^2$	بسّط.
$\sqrt{7225} = x$	خُذ الجذر التربيعي الموجب للطرفين.
$85 = x$	بسّط.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

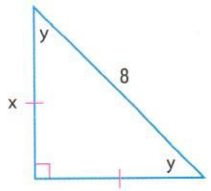
9-3 مثلثات خاصة قائمة الزاوية

أوجد x و y.

22.



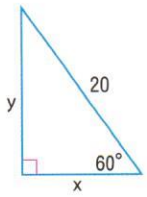
23.



24. **التسلق** يضيف جاسم جدارًا للتسلق إلى مجموعة ألعاب التأرجح لأخيه الصغير. إذا بدأ ببناء 1.5 أمتار من الهيكل الحالي، ويرغب في الحصول على زاوية 60°، فما الطول الذي يجب أن يكون عليه الجدار؟

مثال 3

أوجد x و y.



قياس الزاوية الثالثة في هذا المثلث هو 60 - 90 أو 30. هذا مثلث زواياه هي 30° و60° و90°.

$h = 2s$ نظرية المثلث بزوايا 30° و 60° و 90°

$20 = 2x$ استخدم التعويض.

$10 = x$ أوجد ناتج القسمة.

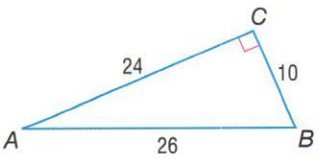
أوجد الآن y، طول الساق الأطول.

$\ell = s\sqrt{3}$ نظرية المثلث بزوايا 30° و 60° و 90°

$y = 10\sqrt{3}$ استخدم التعويض.

9-4 حساب المثلثات

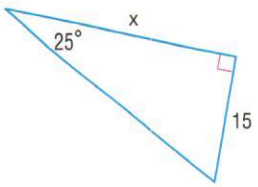
عَبِّر عن كل نسبة بكسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.



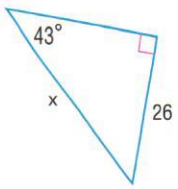
25. $\sin A$
26. $\tan B$
27. $\sin B$
28. $\cos A$
29. $\tan A$
30. $\cos B$

أوجد x.

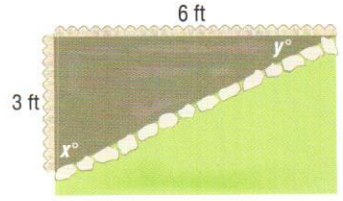
31.



32.

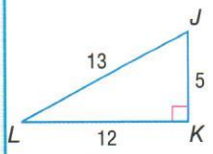


33. **تجهيز الحدائق** تريد فاطمة وضع حوض للزهور في زاوية حديقة منزلها من خلال وضع حد حجري يبدأ من مسافة 3 أمتار من زاوية سياج بالحديقة وينتهي على مسافة 6 أمتار من زاوية السياج الآخر. أوجد مقياس الزاويتين، x و y، اللتين يكونهما السياج مع الحد.



مثال 4

عَبِّر عن كل نسبة بكسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.



a. $\sin L$

$\sin L = \frac{5}{13}$ أو حوالي 0.38 $\sin L = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

b. $\cos L$

$\cos L = \frac{12}{13}$ أو حوالي 0.92 $\cos L = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$

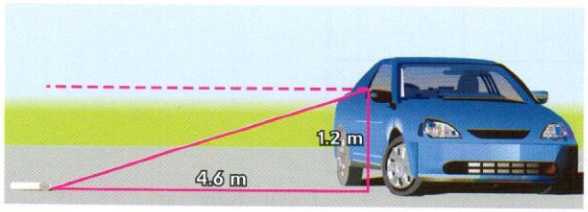
c. $\tan L$

$\tan L = \frac{5}{12}$ أو 0.42 $\tan L = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

9-5 زوايا الارتفاع والانخفاض

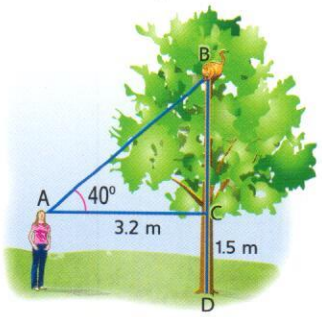
34. الوظائف يسلّم إبراهيم أوراقًا عند مروره بطريق ريفي من سيارته. إذا كان يقذف الأوراق من ارتفاع 1.2 أمتار، وتسقط على بُعد 4.6 مترًا من سيارته، فما زاوية الانخفاض التي قُذف من خلالها الورق إلى أقرب درجة؟



35. أبراج الهاتف الخلوي يوجد برج هاتف خلوي في الحقل المقابل لبيت مايسة. إذا سارت مايسة 15.2 مترًا من البرج، ووجدت أن زاوية الارتفاع من موضعها إلى أعلى البرج هي 60°. فما ارتفاع البرج؟

مثال 5

تسلقت قطة نجاة شجرة. إذا نظرت إلى قطتها بزاوية ارتفاع 40°، وترتفع عيناها 5 أقدام عن الأرض، فكم يبلغ ارتفاع قطتها عن الأرض؟



لإيجاد قياس ارتفاع القطة عن الأرض، أوجد CB.

$\tan = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$\tan 40 = \frac{CB}{1.5}$

اضرب كل طرف في 1.5.

$1.5(\tan 40) = CB$

بسّط.

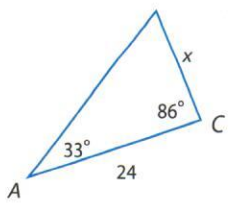
$8.4 = CB$

نظرًا لأن عيني نجاة ترتفع 1.5 أمتار عن الأرض، فاجمع 1.5 إلى 8.4. قطة نجاة على ارتفاع 4.1 مترًا.

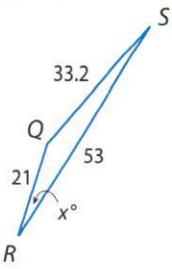
9-6 قانون الـ sine وقانون الـ cosine

أوجد x. قرّب قياسات الزوايا لأقرب درجة وأطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة.

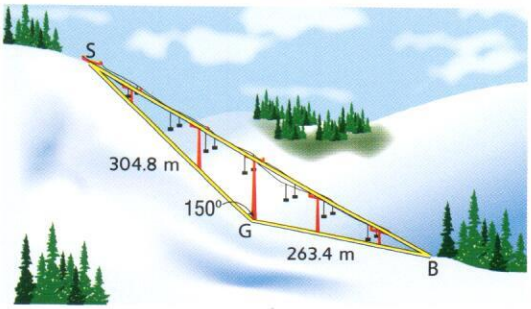
36.



37.

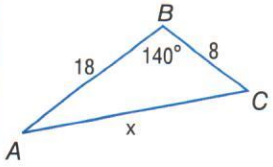


38. التزلج في ساحة للتزلج، يرغب ياسر في وضع مصعد تزلج آخر ليصعد عليه المتزلجون من القاعدة وحتى قمة الجبل. يُمكن تمثيل مسار مصعد التزلج من خلال الشكل أدناه. طول المصعد يمثله SB. إذا احتاج ياسر إلى كابلات بطول يبلغ ضعف طول $\overline{SB}$، فما مقدار الكابلات التي يحتاجها؟



مثال 6

أوجد x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.



لدينا قياس ضلعين وزاويتهم البينية، إذًا استخدم قانون جيب التمام.

قانون الـ cosine

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

التعويض

$x^2 = 8^2 + 18^2 - 2(8)(18) \cos 140°$

بسّط.

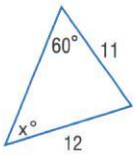
$x^2 = 388 - 288 \cos 140°$

خُذ الجذر التربيعي للطرفين.

$x = \sqrt{388 - 288 \cos 140°} \approx 24.7$

مثال 7

أوجد x. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.



قانون الـ sine

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$

التعويض

$\frac{\sin 60}{12} = \frac{\sin x}{11}$

خاصية الضرب التقاطعي

$11 \sin 60° = 12 \sin x$

اقسم كل طرف على 12.

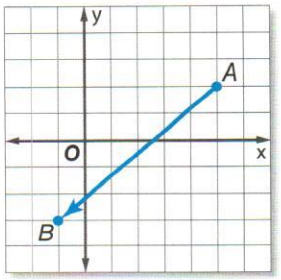
$\frac{11 \sin 60}{12} = \sin x$

$x = \sin^{-1} \frac{11 \sin 60}{12}$ أو حوالي 52.5°

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

9-7 المتجهات

39. اكتب الصورة المركّبة للمتجه المبيّن أدناه.

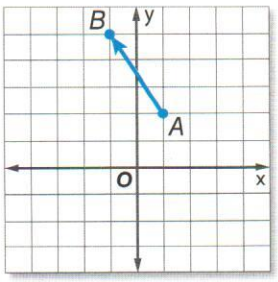


40. انسخ المتجهات $\vec{a}$ و $\vec{b}$ لإيجاد $\vec{a} + \vec{b}$.

41. بفرض أن $\vec{s}$ يساوي $\langle 2, -6 \rangle$ و $\vec{t}$ يساوي $\langle -10, 7 \rangle$. فأوجد الصورة المركّبة لـ $\vec{s} + \vec{t}$.

مثال 8

أوجد مقدار واتجاه $\overrightarrow{AB}$ لكل من $A(1, 2)$ و $B(-1, 5)$.



استخدم قانون المسافة لإيجاد المقدار.

$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ قانون المسافة

$= \sqrt{(-1 - 1)^2 + (5 - 2)^2}$ استخدم التعويض.

$= \sqrt{13}$ أو حوالي 3.6 بسّط.

ارسم مثلثًا قائم الزاوية به الوتر $\overrightarrow{AB}$ والزاوية الحادة A.

$\tan A = \left|\frac{5 - 2}{-1 - 1}\right|$ $\frac{3}{2}$ لا يمكن أن يكون $\tan = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$؛ الطول سالبًا.

$m\angle A = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)$ تحديد معكوس الـtan الزاوية

≈ -56.3 استخدم الحاسبة.

اتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو $180 - 56.3$ أو $123.7°$.

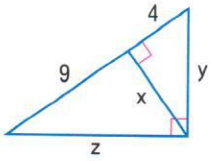
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9 تدريب على الاختبار

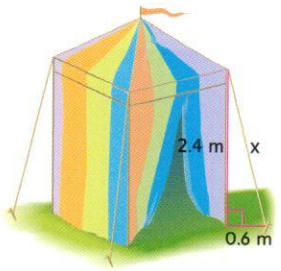
أوجد الوسط الهندسي بين كل زوج من الأعداد.

1. 7 و 11
2. 12 و 9
3. 14 و 21
4. $4\sqrt{3}$ و $10\sqrt{3}$

5. أوجد x و y و z.

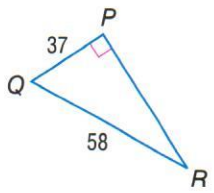


6. **المَعَارض** يجهّز بلال خيمته في معرض النهضة. إذا كان طول الخيمة هو 2.4 أمتار، ولا يُمكن تثبيت الحبل لمسافة أكثر 0.6 متر عن الخيمة، فما الطول الذي يجب أن يكون عليه الحبل؟

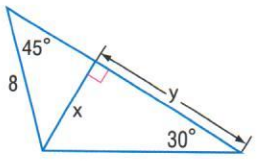


استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قياس $\angle R$ مقربًا لأقرب جزء من عشرة.

7.

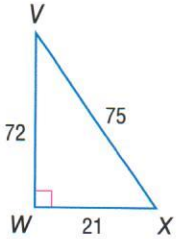
8. 

9. أوجد x و y.



عَبِّر عن كل نسبة بكسر أو كسر عشري وقَرِّبه لأقرب جزء من مئة.

10. $\cos X$
11. $\tan X$
12. $\tan V$
13. $\sin V$

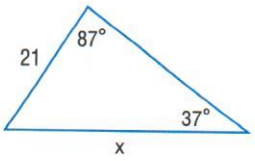


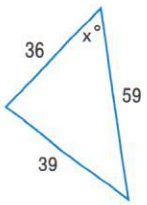
أوجد مقدار كل متجه واتجاهه.

14. $\overrightarrow{JK}$: $J(-6, -4)$ و $K(-10, -4)$
15. $\overrightarrow{RS}$: $R(1, 0)$ و $S(-2, 3)$

16. **الفضاء** تشاهد إيمان إطلاق مكوك فضائي على بعد 6 كيلومترات من الفجيرة في الإمارات العربية المتحدة. إذا كانت زاوية الارتفاع من نقطة رؤيتها إلى المكوك 80°، فكم يبلغ ارتفاع المكوك إذا تم إطلاقه بشكل مستقيم لأعلى؟

أوجد x. قَرِّب قياسات الزوايا لأقرب درجة وأطوال الأضلاع لأقرب جزء من عشرة.

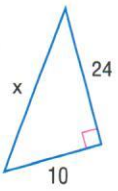
17. 

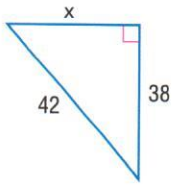
18. 

19. **الاختيار من متعدد** أي مما يلي هو طول ساق المثلث الذي زواياه 45° و 45° و 90° وله وتر بقياس 20؟

A 10
C 20
B $10\sqrt{2}$
D $20\sqrt{2}$

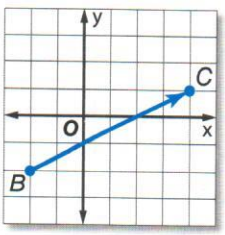
أوجد x.

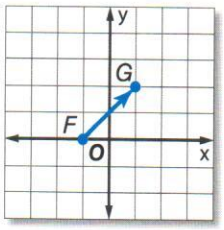
20. 

26. 

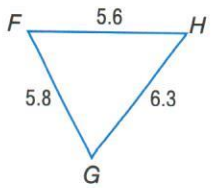
22. **جولات مشاهدة الحيتان** خلال جولة لمشاهدة الحيتان، كان ينظر أسامة من نظارته المعظّمة عندما لاحظ ثعلب الماء في الأفق البعيد. إذا كان أسامة على ارتفاع 6.1 مترًا فوق مستوى سطح البحر في القارب، وكانت زاوية الانخفاض 30°، فما مقدار بُعد ثعلب الماء عن أقرب قدم للقارب؟

اكتب الصورة المركبة لكل متجه.

23. 

24. 

25. حل $\triangle FGH$. قرّب إلى أقرب درجة.



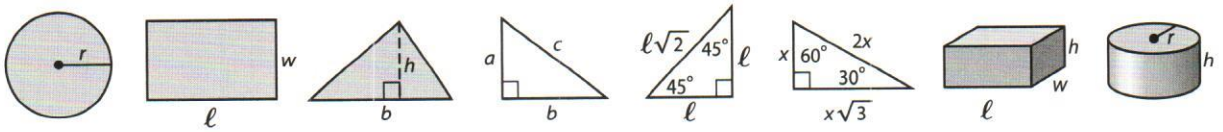
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9 التحضير للاختبارات المعيارية

استخدام قانون

في بعض الأحيان، يكون استخدام قانون ما لحل المسائل أمرًا ضروريًا في الاختبارات المعيارية.
وفي بعض الحالات، قد يتم إعطاؤك ورقة بها القوانين التي يسمح لك بمراجعتها أثناء حل الاختبار.

القوانين



$C = 2\pi r$
$A = \pi r^2$

$A = \ell w$

$A = \frac{1}{2}bh$

$a^2 + b^2 = c^2$

مثلثات خاصة قائمة الزاوية

$V = \ell wh$

$V = \pi r^2 h$

توجد 360 درجة في دائرة.
يبلغ مجموع قياسات زوايا المثلث 180 درجة.

إستراتيجيات استخدام القوانين

الخطوة 1

اقرأ المسألة بعناية.

اسأل نفسك:

- ما المطلوب مني حله؟
- ما معطيات المسألة؟
- هل هناك أي قوانين يمكنني استخدامها لتساعدني في حل المسألة؟

الخطوة 2

حل المسألة.

- عوّض عن الكميات المعروفة والمذكورة في نص المسألة في القانون.
- بسّط الحل بإيجاد القيم المجهولة في القانون.

الخطوة 3

تحقق من حلك.

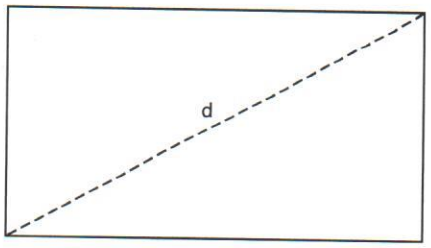
- حدد المدى المعقول لقيم الإجابة.
- تحقق لتتأكد من أن الإجابة منطقية.
- إذا سمح الوقت، فتحقق من الإجابة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم معطيات المسألة لحلها.

نسبة العرض إلى الارتفاع للتليفزيون عالي الوضوح هي 16:9. وهذا يسمى أيضًا نسبة أبعاد التليفزيون. يتم تحديد حجم التليفزيون من حيث المسافة القطرية عبر عرض الشاشة. إذا كان عرض تليفزيون عالي الوضوح هو 64.8 متر، فما مقدار حجم شاشته؟



A 122 سنتيمترًا

B 127 سنتيمترًا

C 129.5 سنتيمترًا

D 132 سنتيمترًا

اقرأ المسألة بعناية. تعلمُ ارتفاع الشاشة ونسبة العرض إلى الارتفاع. ويُطلب منك إيجاد المسافة القطرية للشاشة. يمكنك استخدام **نظرية فيثاغورس** لحل المسألة.

أوجد عرض الشاشة. حدد وحل تناسبًا باستخدام نسبة العرض إلى الارتفاع 16:9.

$\frac{16}{9} = \frac{w}{64.8}$ ← عرض الشاشة / ← ارتفاع الشاشة

$9w = 1036.8$ خاصية الضرب التبادلي

$w = 115.2$ اقسم كل طرف على 9.

إذًا، عرض الشاشة هو 115.2 سنتيمترًا. استخدم نظرية فيثاغورس لحل المسافة القطرية.

$c^2 = a^2 + b^2$ نظرية فيثاغورس

$c^2 = (64.8)^2 + (115.2)^2$ عوّض عن a و b.

$c \approx 132.1$ بسّط. وخُذ الجذر التربيعي للطرفين لحل c.

تبلغ المسافة القطرية للشاشة 132 سنتيمترًا تقريبًا. إذًا، الإجابة هي الخيار D.

تمارين

اقرأ كل مسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم معطيات المسألة لحلها.

1. تُطيّر صفاء طائرة ورقية مربوطة بحبل مشدود. تُحلق الطائرة الورقية على ارتفاع 53.4 مترًا فوق الأرض، وتبلغ المسافة الأفقية من المكان الذي تقف فيه صفاء 39.6 مترًا. فما طول حبل الطائرة الذي حررته صفاء للطائرة؟ قرّب إلى أقرب متر.

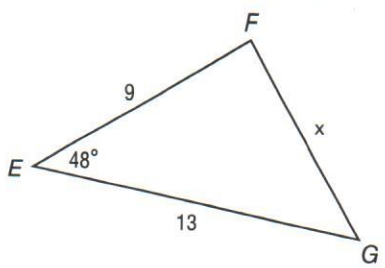
A 62 m

B 66 m

C 68 m

D 72 m

2. ما قيمة x أدناه بالتقريب إلى أقرب جزء من عشرة؟



F 9.7

G 10.2

H 10.5

J 11.1

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

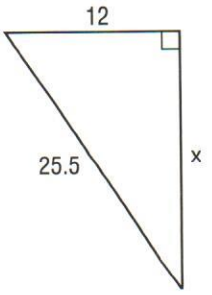
تدريب على الاختبار المعياري

تراكمي، الوحدات من 1 إلى 9

اختيار من متعدّد

اقرأ كُل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. ما قيمة x في الشكل أدناه؟



A 22.5

B 23

C 23.5

D 24

2. ملعب البيسبول عبارة عن مربع تبلغ مساحة أضلاعه 27.4 متراً ما طول المسافة من القاعدة الثالثة إلى القاعدة الأولى؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

F 47.5 m

G 43.2 m

H 38.8 m

J 36 m

3. يبلغ القياس النسبي للخريطة 1 كيلومترات = 4.5 كيلومترات. كم تبلغ المسافة بين مدينتين تبعدان 2.4 كيلومترات على الخريطة؟

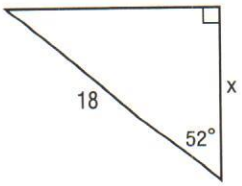
A 10.8 كيلومترات

B 11.1 كيلو مترًا

C 11.4 كيلو مترًا

D 11.5 كيلو مترًا

4. ما قيمة x في الشكل أدناه؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.



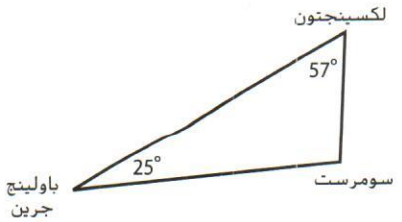
F 10.5

G 11.1

H 13.6

J 14.2

5. ما نوع المثلث الذي يتكوّن من مواقع مدن لكسينجتون وسومرست وباولينج جرين؟



A حاد الزاوية

B متساوي الزوايا

C منفرج الزاوية

D قائم الزاوية

6. يُطيّر حمد طائرة ورقية مثبتة في طرف خيط يمتد لمسافة 106.7 مترًا. تبلغ زاوية الارتفاع بين حمد والطائرة الورقية 74°. كم يبلغ ارتفاع الطائرة الورقية عن الأرض؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.

F 102.5 m

G 90.1 m

H 43 m

J 29.4 m

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 1 تحتاج بعض فقرات الاختبار إلى استخدام قانون محدد لحلها. استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد قيمة x.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

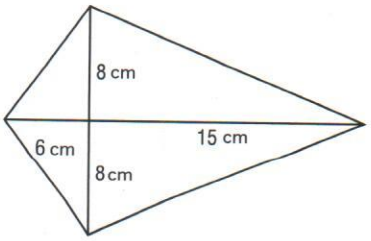
الإجابة المختصرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

7. إجابة شبكية أوجد قيمة x في الشكل أدناه. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.

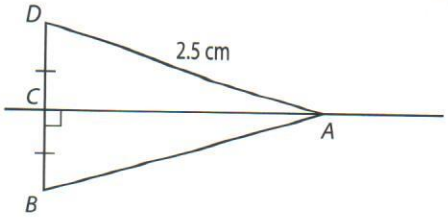
8. تُجدّف آمنة بقاربها عبر البحيرة بسرعة 10 كيلومترات في الثانية متجهة ناحية الشمال. تهب الرياح بزاوية 40° من الناحية الشمالية الشرقية وبسرعة 2.8 كيلومترًا في الثانية. ما السرعة الناتجة عن تجديف آمنة؟ عبر عن إجابتك في صورة مُتّجه. اكتب الحل هنا.

9. تَستخدم جميلة عمود تثبيت طوله 16 سنتيمترًا وعمود تثبيت آخر طوله 21 سنتيمتر لتصميم هيكل كما هو موضح أدناه. ما محيط الهيكل الخاص بها؟



10. إجابة شبكية يقلع نموذج طائرة بزاوية ارتفاع 30°. كم سيبلغ ارتفاع الطائرة بعد قطع مسافة 100 مترًا أفقيًا؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. اكتب الحل هنا.

11. وفقًا لنظرية المنصف العمودي، ما طول القطعة المستقيمة AB أدناه؟



12. أوجد ميل المستقيم الذي يحتوي على النقاط (7, 2) و (3, 4).

13. إذا كان $EG = 15$ مترًا، فما طول القطعة المستقيمة FG؟

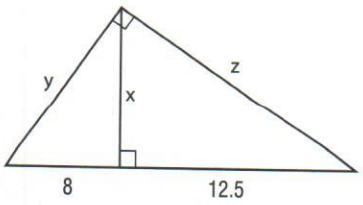
14. ما المعاكس الإيجابي للعبارة أدناه؟

إذا كان الشكل الرباعي مستطيل، فإنه متوازي الأضلاع.

الإجابة الموسعة

اكتب إجاباتك على ورقة.
اكتب الحل هنا.

15. ارجع إلى المثلث المبيّن أدناه.



a. أوجد قيمة x مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة.

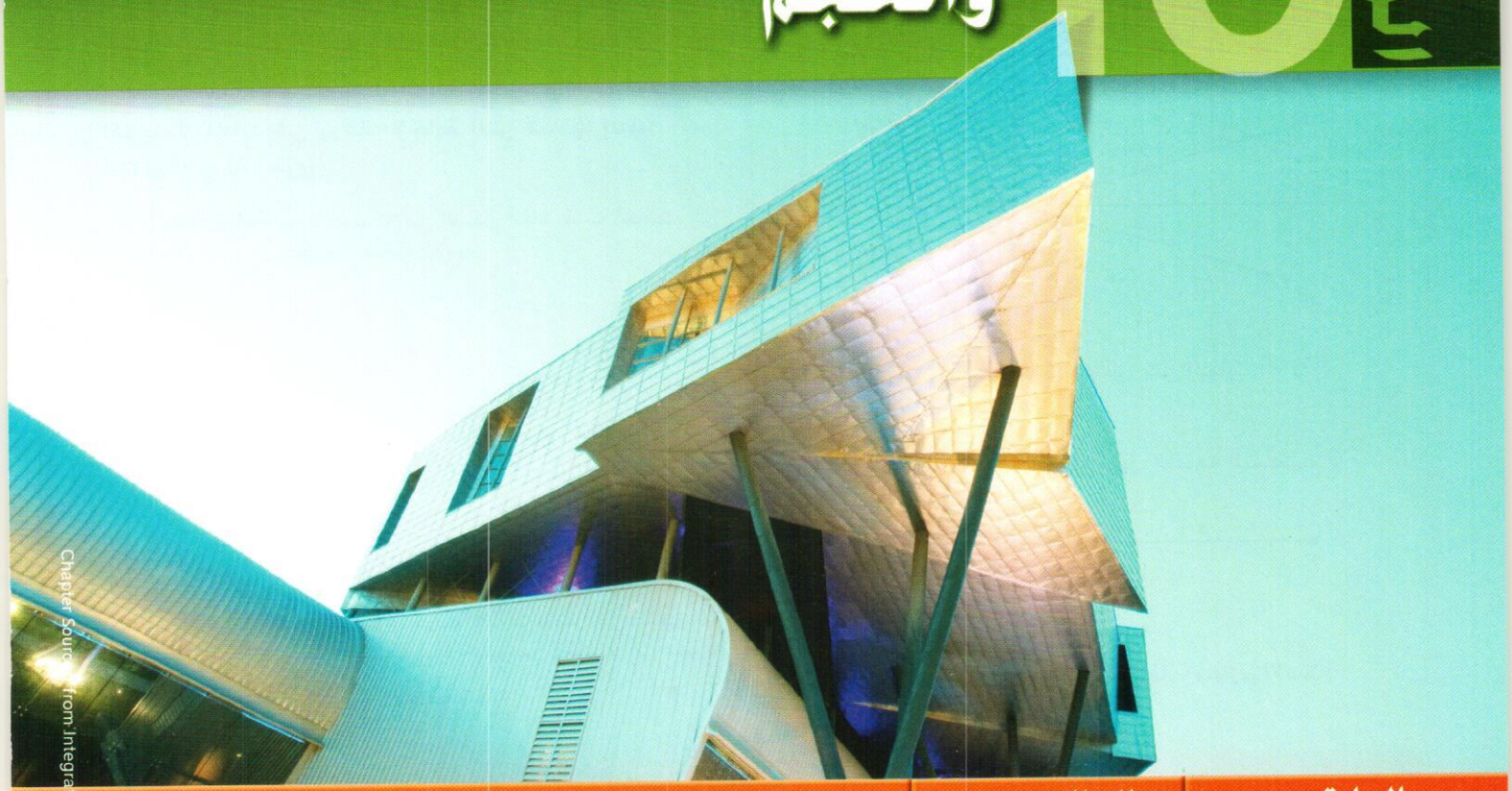
b. أوجد قيمة y مع التقريب إلى أقرب جزء من عشرة.

c. أوجد قيمة z مع التقريب لأقرب جزء من عشرة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 10

التوسع في مساحة السطح والحجم



السابق

- لقد حددت الأشكال ثلاثية الأبعاد وكذلك أسمائها. وقمت بحساب مساحة السطح والحجم لبعض المجسمات الشائعة.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - إيجاد المساحات الجانبية، ومساحات السطوح، والأحجام لمجسمات متنوعة.
  - استكشاف الهندسة الإقليدية والهندسة الدائرية.
  - استخدام خواص المجسمات المتشابهة.

لماذا؟ ▲

- **الهندسة المعمارية** يستخدم المهندسون المعماريون أنواعًا مختلفة من المجسمات لإنشاء تصميمات مثيرة للإعجاب وتؤدي مع وظيفتها في الوقت ذاته.

Chapter Source from Integrated Math II Chapter 12 © 2012 McGraw-Hill Education

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الاستعداد للوحدة

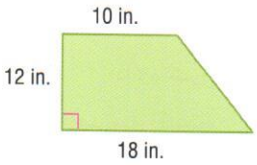
1 الكتاب الدراسي الاختياري قم بالتدريب السريع أدناه وعد إلى المراجعة السريعة للمساعدة.

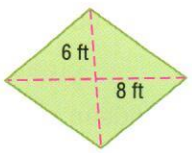
تدريب سريع

حدد ما إذا كانت كل عبارة تتناول الشكل في المثال 1 صحيحة، أم خاطئة، أم لا يُمكن التحديد.

1. $\square ABCD$ يقع في المستوى M.
2. $\square CDHG$ يقع في المستوى N.
3. $\overline{AB}$ يقع في المستوى M.
4. $\overline{HG}$ يقع في المستوى N.
5. $\overline{AE}$ ⊥ على المستوى M.
6. المستقيم $\ell \parallel \overline{DC}$.

أوجد مساحة كل شكل. وقرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

7. 

8. 

9. الحرف اليدوية

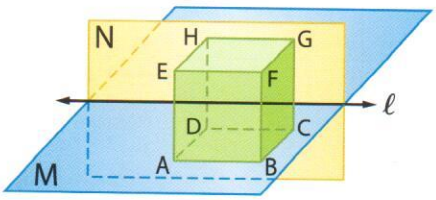
أوجد قيمة المتغير في كل معادلة.

10. $a^2 + 40^2 = 41^2$
11. $8^2 + b^2 = 17^2$
12. $a^2 + 6^2 = (7\sqrt{3})^2$

مراجعة سريعة

مثال 1

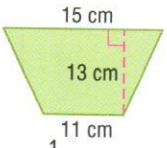
في الشكل، $\ell \perp \overline{AD}$ والشكل $ABCDEFGH$ عبارة عن مكعب. حدد ما إذا كان المستوى $M \perp$ المستوى N أم لا.



المستوى $M \perp$ المستوى N لا يُمكن التحديد باستخدام المعلومات المتوفرة.

مثال 2

أوجد مساحة الشكل. وقرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ مساحة شبه المنحرف

$= \frac{1}{2}(13)(15 + 11)$ عوّض

$= \frac{1}{2}(13)(26)$ بسّط.

$= 169$ اضرب.

مساحة شبه المنحرف تساوي $169\ cm^2$.

مثال 3

أوجد قيمة المتغير في $8^2 + 7^2 = c^2$.

$c^2 = 8^2 + 7^2$ المعادلة الأصلية

$c^2 = 64 + 49$ أوجد قيمة الأسس.

$c^2 = 113$ بسّط.

$c = \pm\sqrt{113}$ أوجد الجذر التربيعي للطرفين.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدةٍ أثناء دراستك للوحدة 10. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك.

المطويات منظّم الدراسة

مساحة السطح والحجم شكّل المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظاتك الخاصة بالوحدة 10 عن مساحة السطح والحجم. وابدأ بأربع صفحات من الدفتر.

1 **اطوِ** الورقة إلى نصفين.

2 **اطوِ** الورقة مرة أخرى، بمقدار 5 سنتيمترات من الأعلى.

3 **افرد** الورقة.

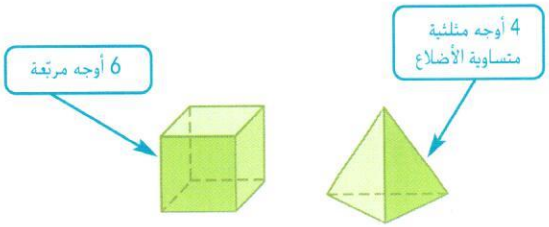
4 **اكتب** أسماءً على الطيات كما هو موضح.

المفردات الجديدة

right solid	مجسم قائم
oblique solid	مجسم مائل
isometric view	منظور متماثل
cross section	مقطع عرضي
lateral face	وجه جانبي
lateral edge	حافة جانبية
altitude	ارتفاع
lateral area	مساحة جانبية
axis	محور
regular pyramid	هرم منتظم
slant height	ارتفاع مائل
right cone	مخروط قائم
oblique cone	مخروط مائل
great circle	دائرة كبرى
Euclidean geometry	هندسة إقليدية
spherical geometry	هندسة دائرية
similar solids	مجسمات متشابهة
congruent solids	مجسمات متطابقة

مراجعة المفردات

الشكل متعدد الوجوه المنتظم مجسم متعدد الأضلاع تكون جميع أوجهه عبارة عن مضلعات منتظمة متطابقة



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مختبر الهندسة
المجسمات المشكّلة بالإزاحة

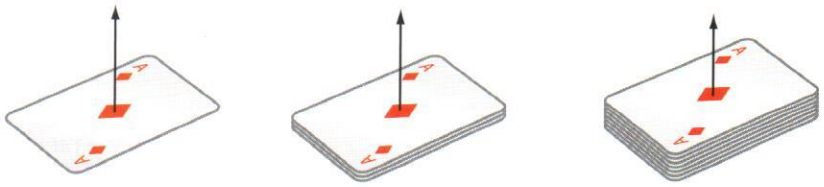
يُمكننا ربط بعض المجسمات ثلاثية الأبعاد بأشكال ثنائية الأبعاد مألوفة بالنسبة لنا. ويُمكن تشكيل بعض المجسمات ثلاثية الأبعاد من خلال إزاحة شكل ثنائي الأبعاد بطول متجه.

يوجد لدى **المجسم القائم** قاعدة (قاعدتان) عمودية على الحواف التي تربطها بمتجه المجسم. وتتشكل بعض المجسمات القائمة من خلال إزاحة شكل ثنائي الأبعاد بطول متجه عمودي على المستوى الذي يوجد به الشكل.

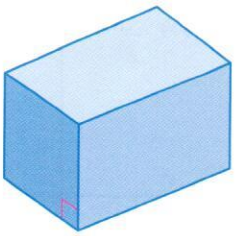
النشاط 1

حدد المجسم الذي تكوّن من خلال الإزاحة الرأسية لمستطيل أفقي وارسمه.

للمساعدة في تخيل المجسم المتكوّن، افترض أن بطاقة لعب تمثل المستطيل، وضعها على طاولة بحيث تكون أفقية. ولتوضيح الإزاحة الرأسية للمستطيل، ضع بطاقات أخرى بعناية، واحدة تلو الأخرى، على وجه البطاقة الأولى.



لاحظ أن المجسم الذي تكون عبارة عن منشور مستطيل قائم يوجد به قاعدة مستطيلة، ونسخة مُزاحة للجانب المقابل الموازي للقاعدة، وأربع حواف متطابقة. تكون الحواف موازية لبعضها وعمودية في الوقت نفسه على القاعدتين. وموضح أعلاه رسم توضيحي للشكل.



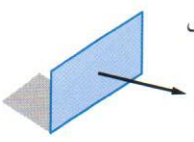
النموذج والتحليل

1. استخدم قطع لغز القطع المجزّأة الثلاثية المتطابقة لتحديد المجسم الذي تكوّن من خلال الإزاحة الرأسية لمثلث أفقي ورسمه.

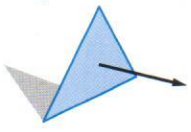
2. استخدم قطعًا نقدية من مجموعة قطع نقدية لتحديد المجسم الذي تكوّن من خلال الإزاحة الرأسية لدائرة أفقية ورسمها.

حدد المجسم الذي تكوّن من خلال الإزاحة الأفقية لشكل ثنائي الأبعاد رأسي وارسمه.

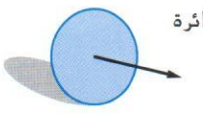
3. مستطيل



4. مثلث



5. دائرة



6. **التبرير** هل المجسمات المتكونّة في التمارين 3 و 4 و 5 هي مجسمات قائمة؟ اشرح استنتاجك.

(يُتبع في الصفحة التالية)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

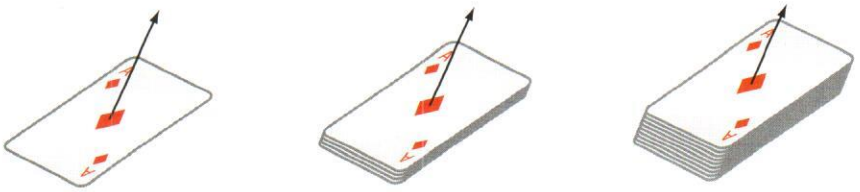
المجسمات المشكّلة بالإزاحة تابع

يوجد **للمجسم المائل** قاعدة (قاعدتان) ليست عمودية على الحواف التي تربط القاعدتين أو الرأس. ويُمكن تكوين مجسم مائل من خلال إزاحة شكل ثنائي الأبعاد بطول متجه مائل لا يوازي المستوى الذي يوجد به الشكل ثنائي الأبعاد وليس عموديًا عليه كذلك.

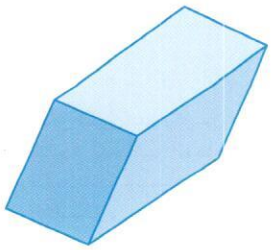
النشاط 2

حدد المجسم الذي تكوّن من خلال إزاحة مستطيل أفقي بطول متجه مائل وارسمه.

افترض أن بطاقة لعب تمثل المستطيل، وضعها على طاولة بحيث تكون أفقية. ولتوضيح إزاحة المستطيل بطول مستقيم مائل، ضع بطاقات أخرى بعناية، واحدة تلو الأخرى، على وجه البطاقة الأولى بحيث تكون كل بطاقة مُزاحة عن مركز البطاقة التي تسبقها، مع مراعاة استخدام نفس مقدار الإزاحة في كل مرة.



المجسم الذي تكوّن هو عبارة عن منشور مستطيل مائل يوجد به قاعدة مستطيلة، ونسخة مُزاحة لهذا الجانب المقابل الموازي للقاعدة، وأربع حواف متطابقة تربط المستطيلين المتطابقين. وتكون هذه الحواف موازية لبعضها وعمودية في الوقت نفسه على القاعدتين. وموضح أعلاه رسم توضيحي للشكل.



النموذج والتحليل

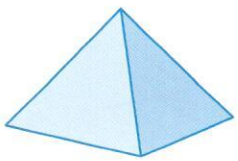
حدد المجسم الذي تكوّن من خلال إزاحة كل شكل ثنائي الأبعاد رأسي بطول متجه مائل وارسمه. استخدم نماذج مادية، إذا لزم الأمر.

7. مثلث

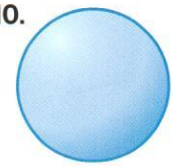
8. دائرة

حدد ما إذا كان كل مجسم *قائمًا*، أم *مائلاً*، أم *ليس قائمًا ولا مائلاً*.

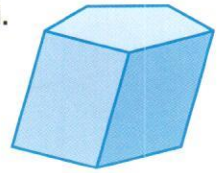
9.



10.



11.



12. **التبرير** هل يُمكن تكوين هرم قاعدته على شكل مربع من خلال إزاحة القاعدة رأسيًا؟ اشرح استنتاجك.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

الدرس 10-1

تمثيلات الأشكال ثلاثية الأبعاد

السابق

- لقد حددت المستويات المتوازية والمستويات المتقاطعة في الأشكال ثلاثية الأبعاد.

الحالي

1. رسم منظورات متماثلة للأشكال ثلاثية الأبعاد.
2. استكشاف المقاطع العرضية للأشكال ثلاثية الأبعاد.

لماذا؟

- يستخدم مبرمجو الفيديو التكنولوجيا لإنشاء بيئات الألعاب ثلاثية الأبعاد. وكما يلاحظ اللاعبون في عوالم الفيديو، تبدو الأشياء منظورات مختلفة في العالم الواقعي.

المفردات الجديدة

منظور متماثل isometric view

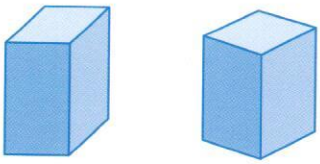
مقطع عرضي cross section

ممارسات في الرياضيات

استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 رسم منظورات متماثلة في ألعاب الفيديو، يتم تمثيل الألعاب ثلاثية الأبعاد على شاشة ثنائية الأبعاد. ويُمكنك استخدام ورقة منقطة متساوية القياس لرسم **منظورات متماثلة**. أو منظورات زاوية لمجسمات هندسية ثلاثية الأبعاد على ورقة ثنائية الأبعاد.



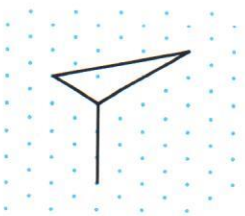
منظور متماثل — أمامي

مثال 1 استخدام أبعاد مجسم لرسم مجسم

استخدم ورقة منقطة متساوية القياس لرسم منشور ثلاثي يبلغ ارتفاعه 3 وحدات، ويبلغ طولا ضلعي قاعدته وحدتين و 4 وحدات.

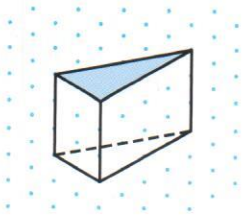
الخطوة 1

ضع علامة على زاوية المجسم. وارسم 3 وحدات للأسفل، ووحدتين لليسار، و 4 وحدات إلى اليمين. ثم ارسم مثلثًا على قمة المجسم.



الخطوة 2

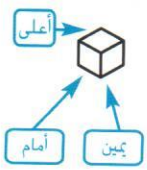
ارسم قطعًا مستقيمة بطول 3 وحدات من كل رأس لتمثيل الجوانب الرأسية. صِل الرؤوس المناسبة باستخدام مستقيم منقط لتمثيل الجوانب غير المرئية.



تمرين موجّه

1. استخدم ورقة منقطة متساوية القياس لرسم منشور مستطيل يبلغ ارتفاعه وحدة واحدة، وطوله 5 وحدات، وعرضه 4 وحدات.

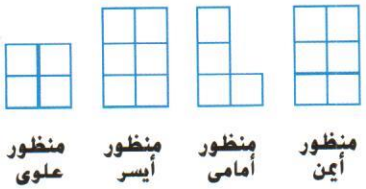
تذكر أن *الرسم المتعامد* يوضح المنظورات العلوية واليسرى والأمامية واليمنى للمجسم. يُمكنك استخدام الرسم المتعامد في رسم منظور تماثل لشكل ثلاثي الأبعاد. وموضح على اليسار المنظورات العلوية والأمامية واليمنى لمكعب.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 استخدام الرسم المتعامد لرسم مجسم

استخدم ورقة منقطة متساوية القياس والرسم المتعامد لرسم مجسم.

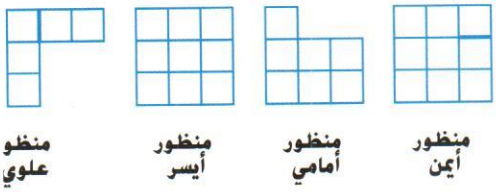


- المنظور العلوي: يوجد صفان وعمودان. وتمثل القطع المظللة أن هناك ارتفاعين مختلفين.
- المنظور الأيسر: يبلغ ارتفاع الشكل 3 وحدات على الجانب الأيسر.
- المنظور الأمامي: يبلغ طول العمود الأول 3 وحدات، بينما يبلغ طول العمود الثاني وحدة واحدة.
- المنظور الأيمن: يبلغ ارتفاع الشكل 3 وحدات على الجانب الأيمن. وتمثل القطع المظللة أن هناك فواصل في السطح.

صِل النقاط على الورقة المنقطة متساوية القياس لتمثيل جوانب المجسم. وظلل الأجزاء العلوية من كل عمود.

تمرين موجّه

2.

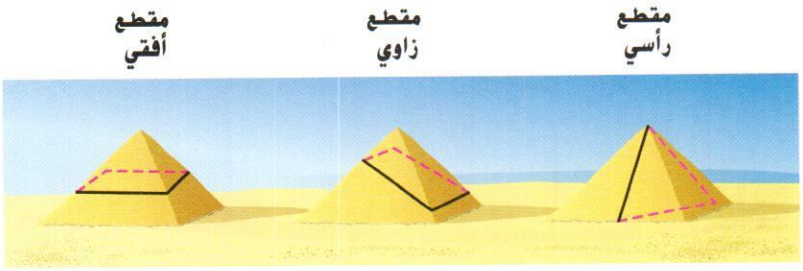


2 استكشاف المقاطع العرضية

المقطع العرضي هو عبارة عن تقاطع مجسم ومستوٍ. ويعتمد المقطع العرضي المتكوّن من تقاطع المستوى والشكل ثلاثي الأبعاد على زاوية المستوى.

مثال 3 من الحياة اليومية تحديد المقاطع العرضية للمجسمات

الأهرامات يُمكن للعلماء استخدام الحواسيب لدراسة المقاطع العرضية للآثار والبنايات القديمة. حدد شكل كل مقطع عرضي للهرم الموضح أدناه.



المقطع العرضي الأفقي عبارة عن مربع. بينما المقطع العرضي الزاوي عبارة عن شبه منحرف. أما المقطع العرضي الرأسي، فهو عبارة عن مثلث.

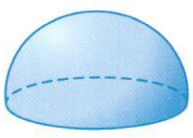
الربط بالحياة اليومية

يبعد أكبر هرم تم إنشاؤه على الإطلاق 100 كيلومتر عن مدينة مكسيكو سيتي. ويبلغ طوله 54 مترًا. وتغطي قاعدته أرضًا تزيد مساحتها عن 18 هكتارًا.

المصدر: موسوعة جينيس للأرقام القياسية

تمرين موجّه

3. **الكعك** لدى إيمان صينية لتحضير الكعك على شكل نصف كرة. كما هو موضح على اليسار. صِف شكل المقاطع العرضية للكعك الذي يتم تحضيره في هذه الصينية. وذلك إذا تم تقطيع الكعك أفقيًا ورأسيًا.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

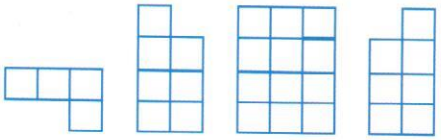
التحقق من فهمك

مثال 1 **استخدم الورق المنقط متساوي الأبعاد لرسم كل منشور.**

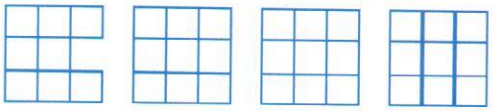
1. منشور ثلاثي ارتفاعه وحدتان، ويبلغ طولا ضلعي قاعدته 5 وحدات و 4 وحدات
2. منشور مستطيل ارتفاعه وحدتان، ويبلغ عرضه 3 وحدات، وطوله 5 وحدات

مثال 2 **استخدم ورقة منقطة متساوية القياس وكل رسم متعامد لرسم مجسم.**

3.

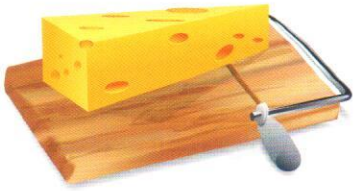


4.



مثال 3

5. **الطعام** صِف كيف يُمكن تقطيع قطعة الجبن الموضحة على اليسار إلى شرائح بحيث تكوّن كل شريحة كل شكل.



a. مستطيل

b. مثلث

c. شبه منحرف

صِف كل مقطع عرضي.

6.

7.

التدريب وحل المسائل

مثال 1 **استخدم ورقة منقطة متساوية القياس لرسم كل منشور.**

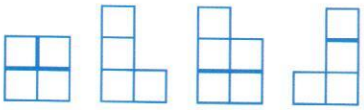
8. مكعب يبلغ طول كل جانب فيه 3 وحدات

9. شور ثلاثي ارتفاعه 4 وحدات، ويبلغ طولا ضلعي قاعدته وحدة واحدة و 3 وحدات

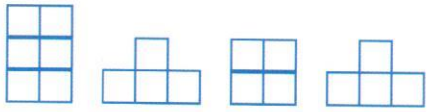
10. منشور ثلاثي ارتفاعه 4 وحدات، ويبلغ طولا ضلعي قاعدته وحدتين و 6 حدات

مثال 2 **أدوات** **استخدم ورقة منقطة متساوية القياس وكل رسم متعامد لرسم مجسم.**

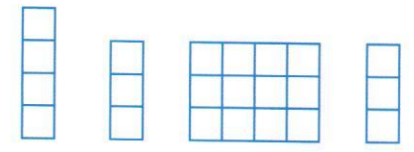
11.



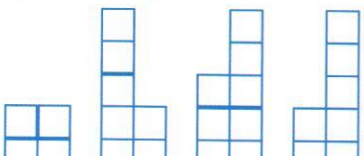
12.



13.



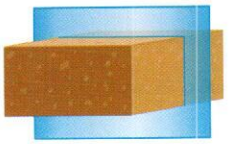
14.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3

15 **فن** تم تقطيع قطعة طين على شكل منشور مستطيل إلى نصفين كما هو موضح على اليسار.



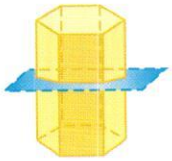
a. صِف شكل المقطع العرضي.

b. صِف كيف يتم تقطيع قطعة الطين لجعل المقطع العرضي مثلثًا.

صِف كل مقطع عرضي.

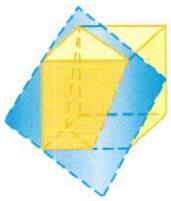
16.

17.

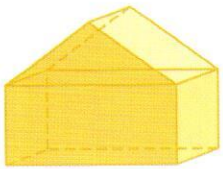


18.

19.



20. **الهندسة المعمارية** ارسم منظورًا علويًا ومنظورًا أماميًا ومنظورًا جانبيًا للمنزل الموضع على اليسار.



بسكويت **صِف كيفية إجراء قطع عبر مجموعة من عجائن البسكويت التي على شكل إسطوانة لإنشاء كل الأشكال التالية.**

21. دائرة

22. المستطيل الأطول

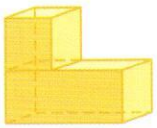
23. شكل بيضاوي

24. المستطيل الأقصر

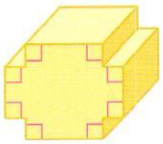
أدوات **ارسم مقطعًا عرضيًا من الشريحة الرأسية لكل شكل.**

25.

26.

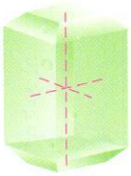


27.



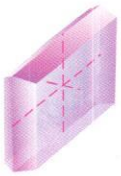
28. **علوم الأرض** تُعد البلورات مجسمات لأن ذراتها تكون مرتبة في أنماط هندسية منتظمة. ارسم مقطعًا عرضيًا لشريحة أفقية لكل بلورة. ثم صِف التماثل الدوراني حول المحور الرأسي.

a. رباعي الزوايا

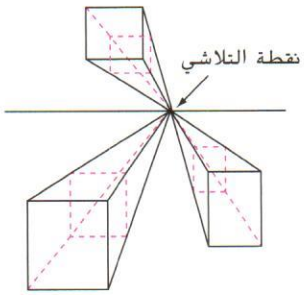


b. سداسي الزوايا

c. أحادي الميل



29. **فن** في الرسم المنظوري ، يتم استخدام نقطة تلاشٍ لجعل الرسم ثنائي الأبعاد يبدو ثلاثي الأبعاد. من خلال نقطة تلاشٍ واحدة، يُمكن رسم الأشياء عبر وجهات نظر مختلفة. كما هو موضح على اليسار.



a. ارسم مستقيمًا أفقيًا ونقطة تلاشٍ على المستقيم. ارسم مستطيلاً في مكان ما أعلى المستقيم، واستخدم نقطة التلاشي لإنشاء رسم منظوري.

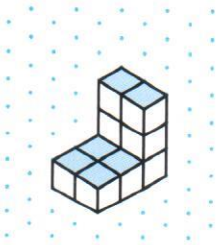
b. على نفس الرسم، ارسم مستطيلاً في مكان ما أسفل المستقيم، واستخدم نقطة التلاشي لإنشاء رسم منظوري.

c. صِف المنظورات المختلفة للرسمين.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

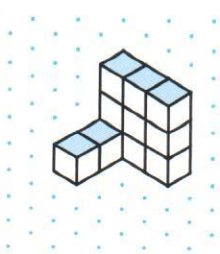
ارسم المنظورات العلوية واليسرى والأمامية اليمنى لكل مجسم.

30.

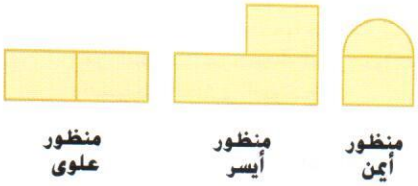


31

32.



33. موضح على اليسار المنظورات العلوية والأمامية واليمنى لشكل ثلاثي الأبعاد.



a. ارسم رسمًا تصويريًا للمجسم.

b. صِف طريقتين مختلفتين يُمكن استخدمهما لإنشاء مقطع عرضي مستطيل.

c. صِل بين المنظورين الأمامي والأيمن للمجسم والمقاطع العرضية للمجسم.

34. **التمثيلات المتعددة** ستستكشف في هذه المسألة الرسومات المتماثلة.

a. **هندسيًا** أنشئ رسومات متماثلة لثلاثة مجسمات مختلفة.

b. **جدوليًا** أنشئ جدولاً يتضمن عدد المكعبات اللازمة لإنشاء المجسم وعدد المربعات الظاهرة في الرسم المتماثل.

c. **لفظيًا** هل يوجد ارتباط بين عدد المكعبات اللازمة لإنشاء مجسم وعدد المربعات الظاهرة في الرسم المتماثل؟ اشرح.

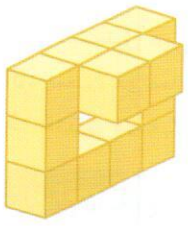
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

35. **التحدي** الشكل الموضح على اليسار عبارة عن مقطع عرضي لمجسم هندسي. صِف المجسم وكيف تم إنشاء المقطع العرضي.

36. **فرضيات** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. اشرح استنتاجك.

إذا كانت المنظورات المتعامدة اليسرى واليمنى والأمامية والخلفية لجسمين هي نفسها، فإن هذين الشيئين لهما نفس الشكل.

37. **مسألة غير محددة الإجابة** استخدم ورقة منقطة متساوية القياس تتكون من 12 وحدة مكعبة. ثم قم بإنشاء رسم متعامد للمجسم.



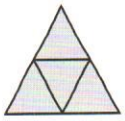
38. **التحدي** ارسم المنظور العلوي والمنظور اليساري للشكل المجسم الموضح على اليسار.

39. **الكتابة في الرياضيات** تم تقطيع هرم سداسي الزوايا إلى شرائح عبر الرأس والقاعدة بحيث تم فصل المنشور إلى جزأين متطابقين. صِف المقطع العرضي. وهل توجد أكثر من طريقة واحدة لفصل الشكل إلى جزأين متطابقين؟ وهل سيتغير شكل المقطع العرضي؟ اشرح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

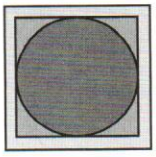
تدريب على الاختبار المعياري

40. ما الشكل متعدد الوجوه الذي تمثله الشبكة الموضحة أدناه؟



A مكعب
B شكل ثماني
C منشور ثلاثي
D هرم ثلاثي

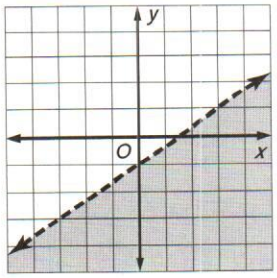
41. إجابة موسعة يريد صاحب منزل بناء أرضية من الخشب عرضها 3 أمتار حول حمام السباحة الدائري الموضح.



a. أوجد المحيط الخارجي للأرض الخشبية مع التقريب إلى أقرب متر. إذا كان محيط حمام السباحة يساوي حوالي 24.88 مترًا.

b. ما مساحة الجزء العلوي من الأرضية الخشبية؟

42. الجبر ما المتباينة التي تصف التمثيل البياني الموضح أدناه بشكل أفضل؟



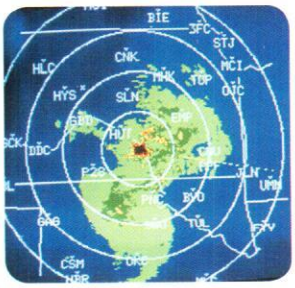
F $y < \frac{2}{3}x - 1$
G $y \leq \frac{2}{3}x - 1$
H $y > \frac{2}{3}x - 1$
J $y \geq \frac{2}{3}x - 1$

43. SAT/ACT توسّع في $(4\sqrt{5})^2$.

A 20
B $8\sqrt{5}$
C $16\sqrt{5}$
D 40
E 80

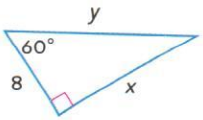
مراجعة شاملة

44. الطقس يتتبع خبراء الأرصاد الجوية العواصف الشديدة باستخدام رادار دوبلر. ويتم استخدام شبكة قطبية في قياس المسافات باعتبارها مقدار تقدم العواصف. إذا كان مركز شاشة الرادار هو نقطة الأصل وكل حلقة تبعد عن المركز بمقدار 10 كيلومترات، فما معادلة الحلقة الرابعة؟

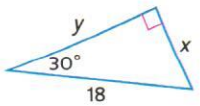


أوجد *x* و *y*.

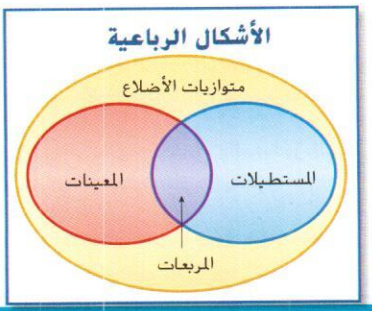
45.



46.



استخدم مخطط فن في تحديد ما إذا كانت كل عبارة *دائمًا*، أم *أحيانًا صحيحة*، أم *غير صحيحة مطلقًا*.



47. متوازي الأضلاع هو عبارة عن مربع.

48. المربع هو عبارة عن معين.

49. المستطيل هو عبارة عن متوازي أضلاع.

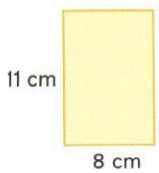
50. المعين هو عبارة عن مستطيل ولكنه لا يكون مربعًا. غير صحيحة

51. المعين هو عبارة عن مربع.

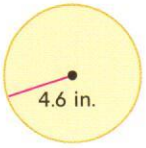
مراجعة المهارات

أوجد محيط كل شكل ومساحته. وقرّب لأقرب جزء من عشرة.

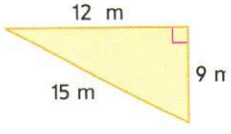
52.



53.

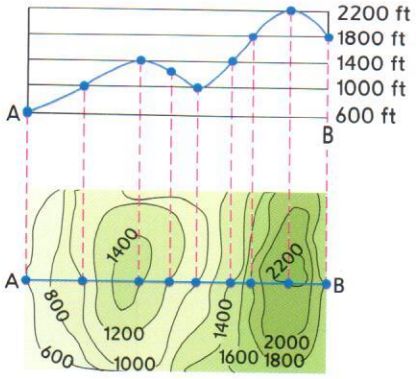


54.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مختبر الهندسة
خرائط التضاريس



الخراط هي عبارة عن رسومات تمثل الأرض أو أجزاء منها. وتُعد **خرائط التضاريس** تمثيلات لسطح الأرض ثلاثي الأبعاد على ورقة ثنائية الأبعاد. في خريطة التضاريس، يتم توضيح *التضاريس*، أو سطح الأرض، من خلال استخدام *المخططات*، وهي خطوط وهمية تربط بين المواقع التي تقع على نفس الارتفاع.

تظهر بعض خرائط التضاريس أمورًا أكثر من المخططات. وقد تتضمن هذه الخرائط رموزًا تمثل الأماكن الزراعية، والأنهار، والتضاريس الأخرى، بالإضافة إلى الشوارع والمباني.

تتبع الخطوات التالية لقراءة خريطة التضاريس.

- تمثل الخطوط الرفيعة هنا المخططات. ولأن كل مخطط هو عبارة عن خط لارتفاع متماثل، فإنه كلما كانت المخططات قريبة من بعضها، كان المنحدر أشد انحدارًا.
- تكوّن خطوط المخططات الشكل V عند الوديان أو مجاري الأنهار. ولذلك تشير أشكال V إلى أعلى.
- غالبًا، تشير الحلقات المغلقة إلى أن الأسطح تنحدر لأعلى من الداخل وتنحدر إلى أسفل من الخارج. وتُعد الحلقات المغلقة هي المنطقة الأعلى.
- احرص على مراعاة الألوان. يمثل اللون الأزرق الماء، ويمثل اللون الأخضر الأماكن الزراعية، بينما يمثل اللون الأحمر المناطق الحضرية، في حين يمثل اللون الأسود الطرقات والمسارات والسكك الحديدية.
- يشير مقياس الخريطة 1:24,000 إلى أن كل 1 سنتيمتر يساوي 240 مترًا.

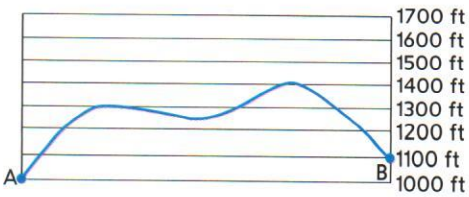
استكشف النموذج

استخدم خريطة التضاريس أعلاه لإجابة الأسئلة التالية.

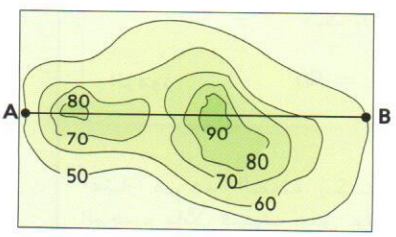
1. وفق المقياس، ما المسافة الرأسية بين كل خط في المخطط؟
2. ما الفرق في الارتفاع بين النقطتين الأدنى والأعلى؟
3. ماذا تلاحظ عن الخطوط الموجودة في المخططات التي تمثل قمم التلال؟
4. صِف منحنى شديد الانحدار على خريطة التضاريس. كيف تعرف أنه منحدر؟
5. اشرح كيف يُمكنك رسم خريطة تضاريس بمعرفة المنظور الجانبي لبعض التلال.

النموذج والتحليل

6. ارسم خريطة تضاريس تشبه الخريطة أدناه للمنظور الجانبي للتلال من النقطة *A* إلى النقطة *B*.



7. ارسم منظورًا جانبيًا ممكنًا للخريطة أدناه من النقطة *A* إلى النقطة *B* للتلال في خريطة التضاريس. يُرجى مراعاة أن القياسات بالمتر.



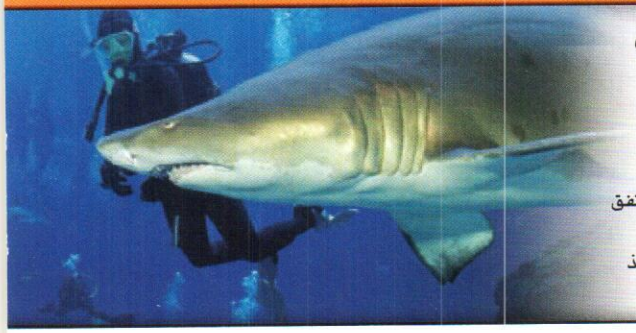
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-2 مساحة السطح للمنشور والاسطوانة

السابق
- لقد أوجدت مساحات المضلعات.

الحالي
1. إيجاد المساحة الجانبية ومساحة السطح للمنشور.
2. إيجاد المساحة الجانبية ومساحة السطح للمنشور.

لماذا؟
- تُعد حديقة أسماك جورجيا في أتلانتا هي أكبر حديقة أسماك في العالم. فيوجد بها أكثر من 36 مليون لتر من المياه وأكثر من 500 نوع من الأحياء من جميع أرجاء العالم. ويوجد بها نفق تحت الماء يبلغ طوله 30 مترًا ويضم 425 مترًا مربعًا من نوافذ المشاهدة.



المفردات الجديدة

- وجه جانبي lateral face
- حافة جانبية lateral edge
- حافة القاعدة base edge
- مسقط رأسي altitude
- ارتفاع height
- مساحة جانبية lateral area
- محور axis
- مجسم مركب composite solid

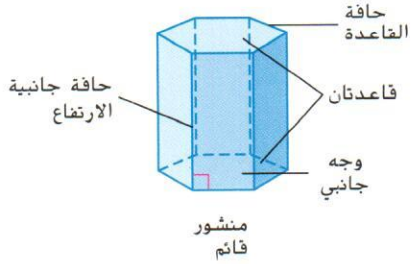
ممارسات في الرياضيات

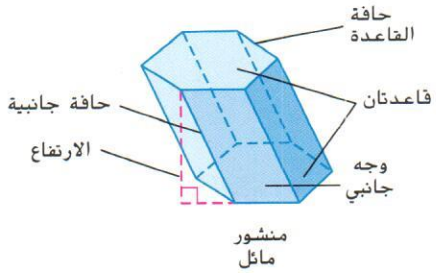
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
مراعاة الدقة.

1 المساحة الجانبية ومساحة السطح للمنشور

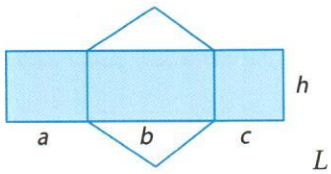
في المجسم، يُطلق على الأوجه التي ليست ضمن القاعدتين **وجوه جانبية**. وتتقاطع الوجوه الجانبية مع بعضها عند **الحواف الجانبية**، التي تُعد متوازية ومتطابقة. وتتقاطع الوجوه الجانبية مع القاعدة عند **حواف القاعدة**. ويمثل **المسقط الرأسي** القطعة المستقيمة العمودية التي تصل بين المستويات والقاعدتين. بينما **الارتفاع** هو طول المسقط الرأسي.

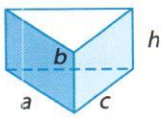
تذكر أن المنشور هو عبارة عن شكل متعدد الوجوه يوجد به قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان. في المنشور القائم، تمثل الحواف الجانبية المساقط الرأسية، بينما تكون الوجوه الجانبية عبارة عن مستطيلات. وفي المنشور المائل، لا تكون الحواف الجانبية عمودية على القاعدتين. ويكون هناك وجه جانبي واحد على الأقل ليس مستطيلاً.





المساحة الجانبية L لمنشور هي مجموع مساحات الوجوه الجانبية. وتوضح الشبكة الموجودة على اليسار كيفية إيجاد المساحة الجانبية للمنشور.





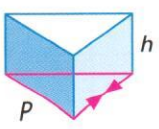
$$\begin{aligned} L &= a(h) + b(h) + c(h) && \text{مجموع مساحات الأوجه الجانبية} \\ &= (a + b + c)h && \text{خاصية التوزيع} \\ &= Ph && P = a + b + c \end{aligned}$$

المفهوم الأساسي المساحة الجانبية للمنشور

الشرح المساحة الجانبية L لمنشور قائم تساوي $L = Ph$، حيث h هو ارتفاع المنشور، و P هو محيط القاعدة.

الرموز $L = Ph$

النموذج

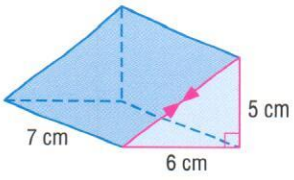


اعتبارًا من هذه النقطة، يُمكنك افتراض أن المجسمات المنصوص عليها هنا هي مجسمات قائمة. وإذا كان المجسم مائلاً، فسوف ننص على ذلك بكل وضوح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 1 المساحة الجانبية للمنشور

أوجد المساحة الجانبية للمنشور. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.



الخطوة 1 أوجد طول الضلع المجهول في القاعدة.

$c^2 = 6^2 + 5^2$ نظرية فيثاغورس

$c^2 = 61$ بسّط.

$c \approx 7.8$ أوجد الجذر التربيعي الموجب للطرفين.

الخطوة 2 أوجد المساحة الجانبية.

$L = Ph$ المساحة الجانبية للمنشور

$\approx (5 + 6 + 7.8)7$ عوّض

≈ 131.6 بسّط.

تبلغ المساحة الجانبية حوالي 131.6 سنتيمترًا مربعًا.

تمرين موجّه

1. طول كل ضلع في قاعدة المنشور ثماني الأضلاع المنتظم يساوي 6 سنتيمترات، وارتفاعه يساوي 11 سنتيمترًا. أوجد المساحة الجانبية.

انتبه!

مناشير قائمة قاعدتا المنشور القائم متطابقتان، بينما لا تكون أوجهه دائمًا متطابقة.

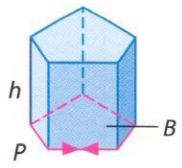
مساحة سطح المنشور تساوي مجموع المساحة الجانبية ومساحات القاعدتين.

المفهوم الأساسي مساحة سطح المنشور

الشرح مساحة السطح S للمنشور القائم تساوي $S = L + 2B$، حيث L يساوي مساحته الجانبية و B يساوي مساحة القاعدة.

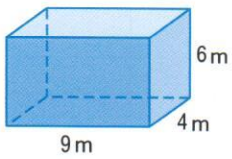
الرموز $S = L + 2B$ أو $S = Ph + 2B$

النموذج



مثال 2 مساحة سطح المنشور

أوجد مساحة سطح المنشور المستطيل.



استخدم المستطيل ذا الأبعاد 9 أمتار في 4 أمتار باعتباره القاعدة.

$S = Ph + 2B$ مساحة سطح المنشور

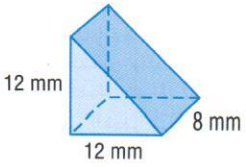
$= (2 \cdot 9 + 2 \cdot 4)(6) + 2(9 \cdot 4)$ عوّض

$= 228$ بسّط.

مساحة سطح المنشور تساوي 228 مترًا مربعًا.

تمرين موجّه

2. أوجد مساحة سطح المنشور الثلاثي فرّب إلى أقرب جزء من عشرة.



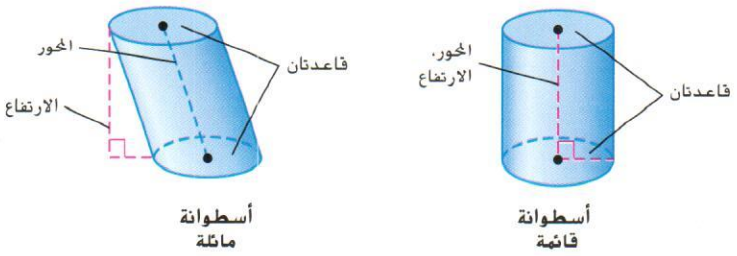
نصيحة دراسية

المثابرة في المثال 2، يُمكنك أيضًا استخدام مستطيل ذي الأبعاد 6 أمتار في 4 أمتار باعتباره القاعدة. واجعل الارتفاع 9 أمتار. واختيار قاعدة مختلفة لا يؤثر على مساحة السطح، لكنه سيغير المساحة الجانبية.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

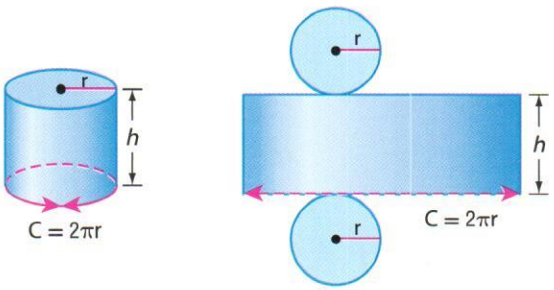
2 المساحة الجانبية ومساحة السطح للمنشور

محور الإسطوانة هو القطعة المستقيمة التي يمثل طرفاها مركزي القاعدتين الدائريتين. وإذا كان المحور يمثل المسقط الرأسي كذلك، فإن الإسطوانة تكون قائمة. وأما إذا كان المحور لا يمثل المسقط الرأسي، فإن الإسطوانة مائلة.



أسطوانة مائلة — أسطوانة قائمة

المساحة الجانبية للإسطوانة القائمة تساوي مساحة السطح المقوس. وكما هو الحال بالنسبة للمنشور القائم، فإن المساحة الجانبية L تساوي Ph. بما أن القاعدة عبارة عن دائرة، فإن المحيط يساوي محيط الدائرة C. إذًا، المساحة الجانبية تساوي Ch أو $2\pi rh$.



مساحة سطح الإسطوانة تساوي المساحة الجانبية زائد مساحات القاعدتين.

نصيحة دراسية

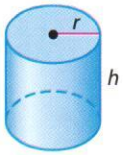
قوانين هناك قانون آخر للمساحة الجانبية للإسطوانة وهو $L = \pi dh$، حيث πd يمثل محيط الدائرة.

المفهوم الأساسي مساحة سطح الإسطوانة

الشرح المساحة الجانبية L لإسطوانة قائمة هي $L = 2\pi rh$، حيث r هو نصف القطر للقاعدة و h هو الارتفاع.

مساحة السطح S لإسطوانة قائمة هي $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$.
حيث r هو نصف قطر القاعدة و h هو الارتفاع.

النموذج



الرموز

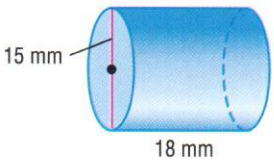
$L = 2\pi rh$

أو $S = L + 2B$

$2\pi rh + 2\pi r^2$

مثال 3 المساحة الجانبية ومساحة السطح للإسطوانة

أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح للإسطوانة. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.



$L = 2\pi rh$	المساحة الجانبية للإسطوانة
$= 2\pi(7.5)(18)$	عوّض عن r بالعدد 7.5 وعن h بالعدد 18.
≈ 848.2	استخدم آلة حاسبة.
$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$	مساحة سطح الإسطوانة
$\approx 848.2 + 2\pi(7.5)^2$	عوّض عن $hr\pi 2$ بالعدد 848.2 وعن r بالعدد 7.5.
≈ 1201.6	استخدم آلة حاسبة.

المساحة الجانبية تساوي حوالي 848.2 مليمترًا مربعًا، ومساحة السطح تساوي حوالي 1201.6 مليمتر مربع.

نصيحة دراسية

تقدير قبل إيجاد المساحة الجانبية للإسطوانة، استخدم الرياضيات الذهنية لإنهاء عملية التقدير. وللتقدير، اضرب القطر في 3 (قرّب π) ثم اضرب القطر في ارتفاع الإسطوانة.

تمرين موجّه

3A. $r = 5\ cm,\ h = 9\ cm$

3B. $d = 6\ cm,\ h = 4.8\ cm$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 4 من الحياة اليومية إيجاد الأبعاد المجهولة

الحرف اليدوية استخدمت رهام قطعة المستطيل المصنوعة من اللباد الموضحة على اليسار في تغطية السطح المتوس لحامل القلم الرصاص ذي الشكل الأسطواني. ما نصف قطر حامل القلم الرصاص؟

$L = 2\pi rh$ المساحة الجانبية للإسطوانة

$63 = 2\pi r(5)$ عوّض عن L بالعدد 12.6 • 5 أو 63 وعن h بالعدد 5.

$63 = 10\pi r$ بسّط.

$2.0 \approx r$ اقسم كل طرف على 10π.

نصف قطر القلم الرصاص يساوي حوالي سنتيمترين.

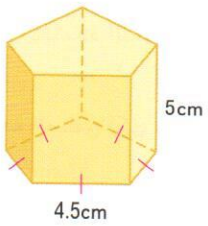
تمرين موجّه

4. أوجد قطر قاعدة الإسطوانة إذا كانت مساحة سطح الإسطوانة تساوي 464π سنتيمترًا مربعًا والارتفاع يساوي 21 سنتيمترًا مربعًا.

التحقق من فهمك

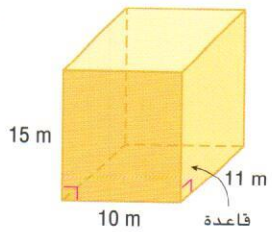
مثال 1

1. أوجد المساحة الجانبية للمنشور.

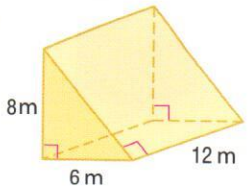


المثالان 1 و 2 **أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل منشور.**

2.



3.

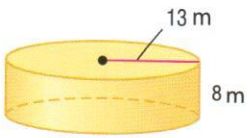


مثال 3

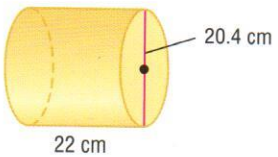
4. سيارات يشتري أسامة حواف جديدة لإطارات السيارة. ويبلغ طول قطرها 14 سنتيمترًا وعرضها 6 سنتيمترات. حدد المساحة الجانبية لكل واحدة من الحواف. قرّب لأقرب جزء من عشرة.

أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل إسطوانة. قرّب لأقرب جزء من عشرة.

5.



6.



مثال 4

7. طعام مساحة سطح علبة الحساء الموضحة على اليسار تساوي 286.3 سنتيمترًا مربعًا. ما ارتفاع العلبة؟ قرّب لأقرب جزء من عشرة.

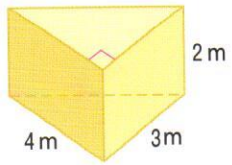
8. مساحة سطح المكعب تساوي 294 سنتيمترًا مربعًا. أوجد طول الحافة الجانبية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

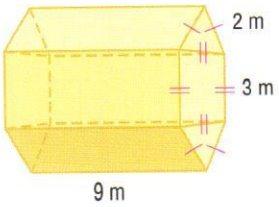
التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل منشور. قرّب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

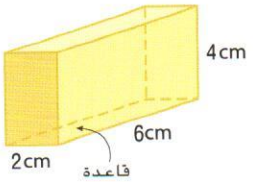
9



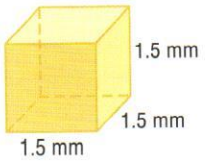
10.



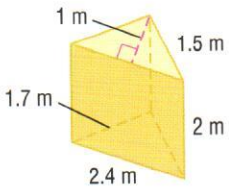
11.



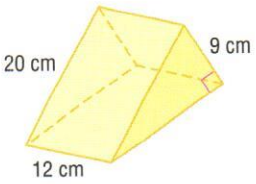
12.



13.



14.



15. المنشور المستطيل: $\ell = 25$ سنتيمترًا، و $w = 18$ سنتيمترًا، و $h = 12$ سنتيمترات

16. المنشور الثلاثي: $h = 6$ سنتيمترات، وقاعدة المثلث مع السيقان تساوي 9 سنتيمترات و 12 سنتيمترًا

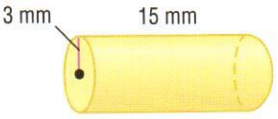
الأمثلة 1-3 **الحبوب** **أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل عبوة حبوب. قرّب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

17.

18.

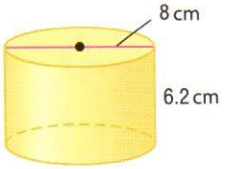
مثال 3 **الاستنتاج المنطقي** **أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل إسطوانة. قرّب لأقرب جزء من عشرة.**

19.



20.

21.



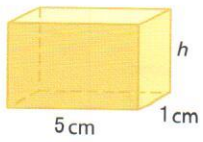
22.

23. أرقام قياسية عالمية أكبر مشروب في العالم كان عبارة عن إسطوانة ارتفاعها 4.67 أمتار وقطرها 2.32 متر. فما كانت مساحة السطح لهذه الإسطوانة، مع التقريب لأقرب جزء من عشرة؟

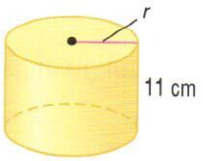
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 **استخدم المساحة الجانبية المعطاة والرسم التخطيطي في إيجاد القياس المجهول لكل مجسم. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

24. $L = 48\ cm^2$



25. $L \approx 635.9\ cm^2$



26. تبلغ مساحة سطح المنشور الثلاثي القائم 1020 سنتيمترًا مربعًا، ويبلغ طوله 6 سنتيمترات، وعرضه 9 سنتيمترات. أوجد الارتفاع.

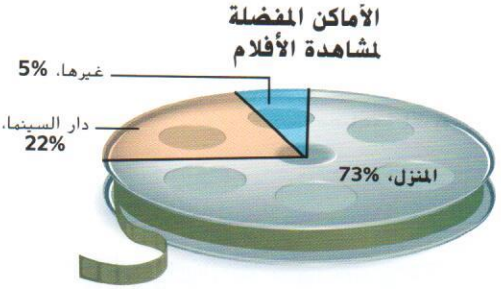
27 تبلغ مساحة سطح إسطوانة 256π مليمترًا مربعًا، وارتفاعها 8 مليمترات. أوجد القطر.

28. آثار تم إنشاء معلم مونوليث في حديقة. وهو عبارة عن منشور ثلاثي أجوف، ويبلغ طوله 9 أمتار، وعرضه 4 أمتار، وعمقه متر واحد.

a. أوجد المساحة بالقدم المربع لسطوح المبنى للجزء الموجود فوق سطح الأرض.

b. استخدم التحليل البُعدي لإيجاد المساحة بالمتر المربع.

29. ترفيه توضح الرسومات البيانية نتائج دراسة استقصائية تم فيها طرح سؤال على مجموعة يدور حول السبب وراء حبهم لمشاهدة الأفلام.

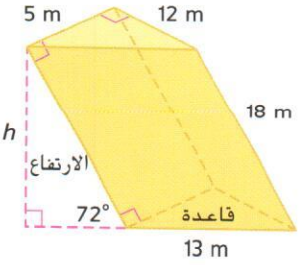


a. بفرض أن علبة الأفلام عبارة عن إسطوانة قطرها 12 سنتيمترًا. اشرح كيف يُمكنك إيجاد مساحة السطح للجزء الذي يمثل المجموعة الذين يفضلون مشاهدة الأفلام في المنزل.

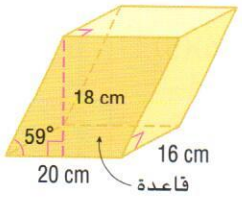
b. إذا كان طول علبة الأفلام 3 سنتيمترات، فأوجد مساحة سطح الجزء الموجود في القسم a.

الاستنتاج المنطقي أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل مجسم مائل. قرّب لأقرب جزء من عشرة.

30.



31.



32. مصابيح يكوّن ظل المصباح إسطوانة ارتفاعها 18 سنتيمترًا، ويبلغ قطرها 13.5 سنتيمترًا.

a. ما المساحة الجانبية للظل، مع التقريب لأقرب جزء من عشرة؟

b. ما مدى تغير المساحة الجانبية إذا قمنا بقسمة الارتفاع على 2؟

33. أوجد مساحة السطح التقريبية لمنشور سداسي قائم، إذا كان الارتفاع 9 سنتيمترات، وكل حافة قاعدة تساوي 4 سنتيمترات. (إرشاد: أولاً، أوجد طول العامد للقاعدة.)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

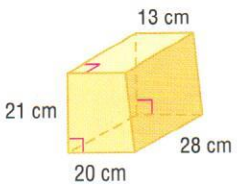
34. تصميم يريد شخص إرسال ملصق عبر البريد، ويبلغ طول هذا الملصق 38 سنتيمترًا، وقطر الجزء الملفوف يساوي 6 سنتيمترات.

a. صمم عبوة بريدية عبارة عن منشور ثلاثي. وارسم العبوة وشبكة لها.

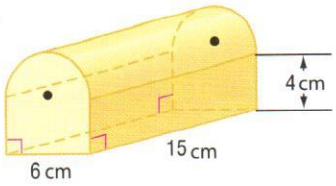
b. بفرض أنك تريد تقليل مساحة سطح العبوة لأقل قدر ممكن. فما الأبعاد المحتملة للعبوة ومساحة سطحها؟

مجسم مركب هو شكل ثلاثي الأبعاد مكوّن من أشكال أبسط. أوجد مساحة سطح كل مجسم مركب. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

35

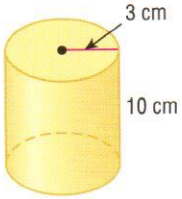


36.



37.

38. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تستكشف المساحة الجانبية ومساحات الأسطح للإسطوانة.



a. هندسي ارسم الإسطوانة A بحيث يكون نصف قطرها 3 سنتيمترات وارتفاعها 5 سنتيمترات، وارسم الإسطوانة B بحيث يكون نصف قطرها 6 سنتيمترات وارتفاعها 5 سنتيمترات، وارسم الإسطوانة C بحيث يكون نصف قطرها 3 سنتيمترات وارتفاعها 10 سنتيمترات.

b. جدولي أنشئ جدولاً لأنصاف أقطار الإسطوانات A و B و C وارتفاعاتها ومساحاتها الجانبية ومساحات سطوحها. اكتب المساحات بالنسبة إلى π.

c. لفظيًا إذا تمت مضاعفة نصف القطر، فما تأثير ذلك على المساحة الجانبية ومساحة السطح لإسطوانة؟ وإذا تمت مضاعفة الارتفاع، فما تأثير ذلك على المساحة الجانبية ومساحة السطح لإسطوانة؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

39. تحليل الخطأ يحاول عمر وعيسى إيجاد مساحة سطح إسطوانة يبلغ ارتفاعها 5 سنتيمترات، ويبلغ طول نصف قطرها 6 سنتيمترات. هل أحدهما على صواب؟ اشرح.

عمر

$$S = \pi(6)^2 + \pi(6)(5)$$
$$= 36\pi + 30\pi$$
$$= 66\pi\ cm^2$$

عيسى

$$S = 2\pi(6)^2 + 2\pi(6)(5)$$
$$= 72\pi + 60\pi$$
$$= 132\pi\ cm^2$$

40. الكتابة في الرياضيات ارسم منشورًا ثلاثيًا مائلاً. وصِف الأشكال التي قد تتضمنها شبكة المنشور. اشرح مدى اختلاف هذه الشبكة عن شبكة المنشور الثلاثي القائم.

41. الدقة قارن وقابل بين إيجاد مساحة سطح منشور وإيجاد مساحة سطح إسطوانة.

42. مسألة غير محددة الإجابة اضرب مثالاً لإسطوانتين لهما نفس المساحة الجانبية، لكن مساحتي سطحيهما مختلفتان.

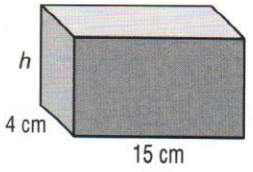
43. التحدي يبلغ ارتفاع منشور قائم h وحدة، وقاعدته عبارة عن مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ℓ وحدة. أوجد الصيغة العامة لإجمالي مساحة سطح المنشور. واشرح استنتاجك.

44. الكتابة في الرياضيات منشور قاعدته عبارة عن مربع ومنشور ثلاثي له نفس الارتفاع. وقاعدة المنشور الثلاثي عبارة عن مثلث متساوي الأضلاع، ومسقطه الرأسي يساوي طول ضلع المربع. قارن بين المساحتين الجانبيتين للمنشورين.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

45. إذا كانت مساحة سطح منشور مستطيل قائم 310 سنتيمترات مربعة. فما قياس الارتفاع h للمنشور؟



A 5 cm
B $5\frac{1}{6}$ cm
C 10
D $13\frac{3}{9}$ cm

46. الإجابة القصيرة إسطوانة يبلغ محيطها 16π سنتيمترًا، وارتفاعها 20 سنتيمترًا. فما مساحة سطح الإسطوانة بالنسبة إلى π؟

47. تتقاضى شركة باركر للأرضيات ما يلي لتركيب أرضية من الخشب الصلب في مبنى. الأرضية الفرعية: AED 2.25 لكل متر مربع الأرضية الخشبية: AED 4.59 لكل متر مربع الألواح: AED 1.95 لكل متر مربع مسامير كل غرفة والمواد الأخرى: AED 25.95 لكل مهمة العمالة: AED 99 زائد AED 0.99 لكل متر مربع ما تكلفة تركيب أرضية من الخشب الصلب في غرفة أبعادها 18 في 15 مترًا؟

F AED 2169.75 **H** AED 2367.75
G AED 2268.75 **J** AED 2765.55

48. SAT/ACT ما قيمة $f(-2)$ إذا كان $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 3$؟

A -31
B $-\frac{9}{2}$
C 9
D 25
E 28

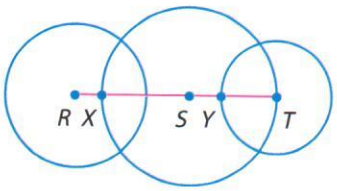
مراجعة شاملة

استخدم الورق المنقط متساوي الأبعاد لرسم كل منشور. (الدرس 1-10)

49. منشور مستطيل ارتفاعه وحدتان، ويبلغ طوله 3 وحدات، وعرضه وحدتان

50. منشور ثلاثي ارتفاعه وحدتان، وقاعدتاه عبارة عن مثلثين قائمين وله ثلاثة سيقان، ويبلغ طوله 4 وحدات

أقطار الدوائر R⊙ و S⊙ و T⊙ هي 10 سنتيمترات و 14 سنتيمترًا و 9 سنتيمترات على التوالي. أوجد كل قياس.



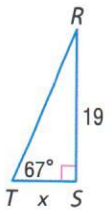
51. YX

52. SY

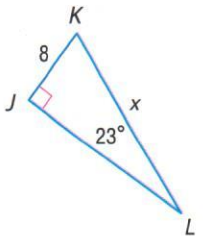
مراجعة المهارات

أوجد قيمة x. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

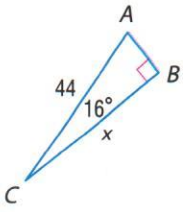
53.



54.

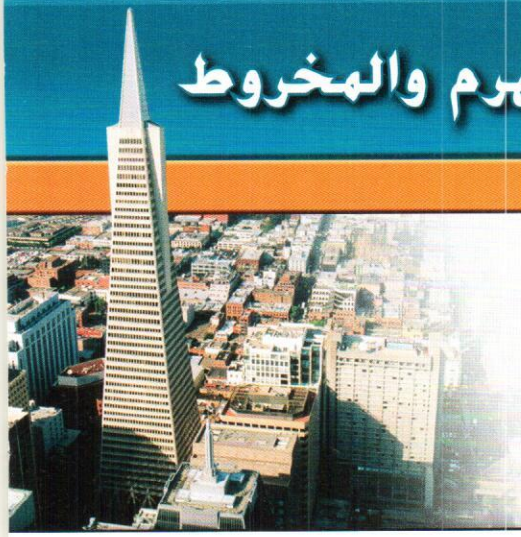


55.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

10-3 مساحة السطح للهرم والمخروط



السابق
- لقد أوجدت مساحات المضلعات المنتظمات.

الحالي
1. إيجاد المساحة الجانبية ومساحة السطح للهرم.
2. إيجاد المساحة الجانبية ومساحة السطح للمخروط

لماذا؟
- تُغطي ناطحة السحاب ترانس أمريكا بيراميد في سان فرانسيسكو حوالي تجمع سكني واحد كامل بالمدينة. ويسمح تصميمها الإبداعي للضوء والهواء بالدخول بين الشوارع والمباني، وذلك على عكس ناطحات السحاب التقليدية التي على شكل مناشير مستطيلة.

المفردات الجديدة

هرم منتظم **regular pyramid**
ارتفاع مائل **slant height**
مخروط قائم **right cone**
مخروط مائل **oblique cone**

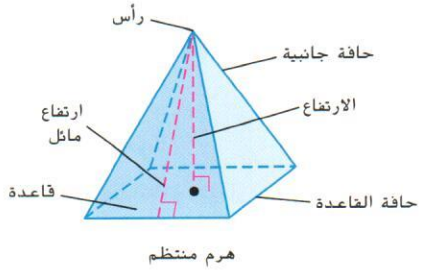
ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
مراعاة الدقة.

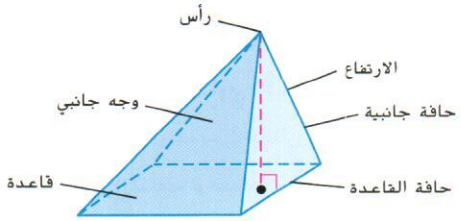
1 المساحة الجانبية ومساحة السطح للهرم.

تتقاطع الوجوه الجانبية للهرم في نقطة مشتركة يُطلق عليها الرأس. ويتقاطع الوجهان الجانبيان عند الحافة الجانبية. ويتقاطع الوجه الجانبي والقاعدة عند حافة القاعدة. ويُطلق مصطلح المسقط الرأسي على القطعة المستقيمة التي تبدأ من الرأس وتسقط عموديًا على القاعدة.

يوجد **للهرم المنتظم** قاعدة على شكل مضلع منتظم، ويوجد بالمسقط الرأسي طرف عند مركز القاعدة. وجميع الحواف الجانبية تكون متطابقة، وتكون جميع الوجوه الجانبية أيضًا عبارة عن مثلثات متساوية الساقين متطابقة. ويُطلق على ارتفاع كل وجه جانبي **الارتفاع المائل** ℓ للهرم.

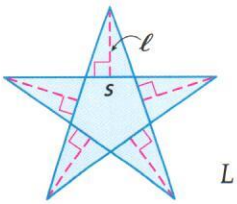


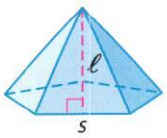
هرم منتظم



هرم غير منتظم

المساحة الجانبية L للهرم الخماسي المنتظم تساوي مجموع مساحات الوجوه الثلاثية المتطابقة للهرم كما هو موضح على اليسار في الشبكة.





$$L = \frac{1}{2}s\ell + \frac{1}{2}s\ell + \frac{1}{2}s\ell + \frac{1}{2}s\ell + \frac{1}{2}s\ell \quad \text{مجموع مساحات الوجوه الجانبية}$$

$$= \frac{1}{2}\ell(s + s + s + s + s) \quad \text{خاصية التوزيع}$$

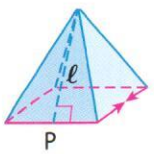
$$= \frac{1}{2}P\ell \quad P = s + s + s + s + s$$

المفهوم الأساسي المساحة الجانبية للهرم المنتظم

الشرح المساحة الجانبية L للهرم المنتظم هي $L = \frac{1}{2}P\ell$، حيث ℓ هو الارتفاع المائل، و P هو محيط القاعدة.

الرموز $L = \frac{1}{2}P\ell$

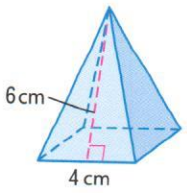
النموذج



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مثال 1 المساحة الجانبية للهرم المنتظم

أوجد المساحة الجانبية للهرم الرباعي.



المساحة الجانبية للهرم المنتظم $L = \frac{1}{2}P\ell$

$P = 4 \cdot 4$ أو 61، $\ell = 6$ $= \frac{1}{2}(16)(6)$ أو 48

تبلغ المساحة الجانبية 48 سنتيمترًا مربعًا.

تمرين موجّه

1. أوجد المساحة الجانبية للهرم السداسي المنتظم الذي يبلغ طول حافة قاعدته 9 سنتيمترات، ويبلغ ارتفاعه الجانبي 7 سنتيمترات.

نصيحة دراسية

طريقة بديلة يُمكنك أيضًا إيجاد المساحة الجانبية للهرم من خلال إضافة مساحات الوجوه الجانبية المتطابقة. ومساحة الوجه الواحد هي:

$\frac{1}{2}(4)(6) = 12\ cm^2$

المساحة الجانبية:

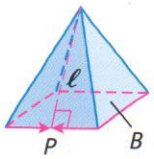
$4 \cdot 12 = 48\ cm^2$

مساحة سطح الهرم تساوي مجموع المساحة الجانبية ومساحة القاعدة.

المفهوم الأساسي مساحة سطح الهرم المنتظم

الشرح المساحة الجانبية S للهرم المنتظم هي $S = \frac{1}{2}P\ell + B$، حيث P هو محيط القاعدة، وℓ هو الارتفاع المائل، وB هو مساحة القاعدة.

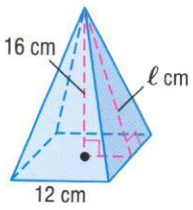
النموذج



الرموز $S = \frac{1}{2}P\ell + B$

مثال 2 مساحة سطح الهرم الرباعي

أوجد مساحة سطح الهرم الرباعي، مع تقريب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.



الخطوة 1 أوجد الارتفاع المائل.

نظرية فيثاغورس $c^2 = a^2 + b^2$

$c = \ell$ و $b = 6$ و $a = 16$ $\ell^2 = 16^2 + 6^2$

بسّط. $\ell = \sqrt{292}$

الخطوة 2 أوجد محيط القاعدة ومساحتها.

$P = 4 \cdot 12$ أو 48 cm

$A = 12^2$ أو $144\ cm^2$

الخطوة 3 أوجد مساحة سطح الهرم.

مساحة سطح الهرم المنتظم $S = \frac{1}{2}P\ell + B$

$P = 48$ و $\ell = \sqrt{292}$ و $B = 144$ $= \frac{1}{2}(48)\sqrt{292} + 144$

استخدم آلة حاسبة. ≈ 554.1

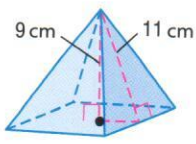
مساحة سطح الهرم تساوي حوالي 554.1 سنتيمترًا مربعًا.

نصيحة دراسية

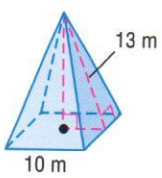
تكوين الروابط مساحة سطح الهرم تساوي $L + B$، وليس $L + 2B$، وذلك لأن الهرم يوجد به قاعدة واحدة.

تمرين موجّه

2A.



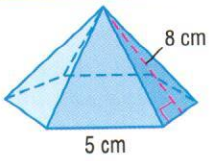
2B.



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مثال 3 مساحة سطح الهرم المنتظم

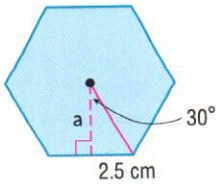
أوجد مساحة سطح الهرم المنتظم. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.



الخطوة 1 أوجد محيط القاعدة.

$P = 6 \cdot 5$ أو $30\ cm$

الخطوة 2 أوجد طول العامد ومساحة القاعدة.



الزاوية المركزية للشكل السداسي تساوي $\frac{360°}{6}$ أو $60°$.

إذًا قياس الزاوية التي تكوّنت في المثلث الموجود على اليسار يساوي $30°$.

$\tan 30° = \frac{2.5}{a}$ اكتب نسبة مثلثية لإيجاد العامد a.

$a = \frac{2.5}{\tan 30°}$ أوجد قيمة a.

≈ 4.3 استخدم آلة حاسبة.

$A = \frac{1}{2}Pa$ مساحة المضلع المنتظم

$\approx \frac{1}{2}(30)(4.3)$ عوّض عن P بالعدد 30 وعن a بالعدد 4.3.

≈ 64.5 اضرب.

إذًا، مساحة القاعدة B تساوي حوالي 64.5 سنتيمترًا مربعًا.

الخطوة 3 أوجد مساحة سطح الهرم.

$S = \frac{1}{2}P\ell + 1$ مساحة سطح الهرم المنتظم

$= \frac{1}{2}(30)(8) + 64.5$ $P = 30$ و $\ell = 8$ و $B \approx 64.5$

≈ 184.5 بسّط.

مساحة سطح الهرم تساوي حوالي 184.5 سنتيمترًا مربعًا.

مراجعة المفردات

النسب المثلثية

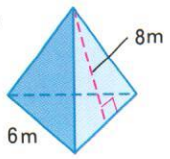
$\sin A = \frac{opp}{hyp}$

$\cos A = \frac{adj}{hyp}$

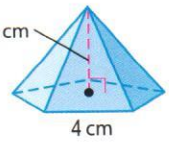
$\tan A = \frac{opp}{adj}$

تمرين موجّه

3A.

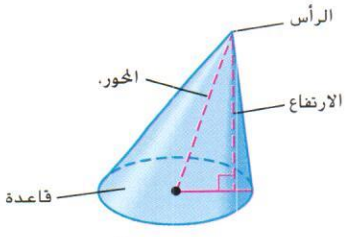


3B.

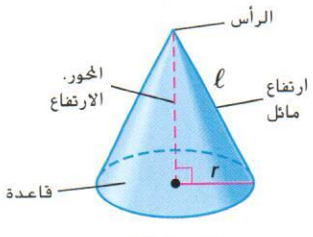


2 المساحة الجانبية ومساحة السطح للمخروط

تذكر أن المخروط يتضمن قاعدة دائرية ورأسًا. ومحور المخروط يكون عبارة عن القطعة المستقيمة التي لها طرفان، بحيث يقع أحدهما على الرأس والآخر على مركز القاعدة. وإذا كان المحور يساوي كذلك المسقط الرأسي، فإن المخروط يساوي **المخروط القائم**. أما إذا كان المحور ليس المسقط الرأسي، فإن المخروط يكون عبارة عن **مخروط مائل**.



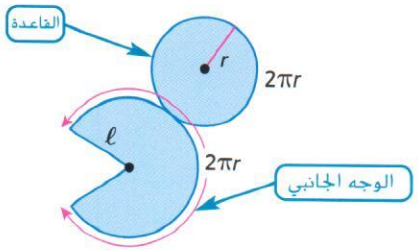
مخروط مائل



مخروط قائم

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

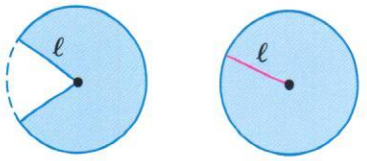
الشكل الموجود على اليسار يوضح شبكة المخروط. وتمثل الدائرة التي نصف قطرها r قاعدة المخروط، ومحيطها يساوي $2\pi r$، ومساحتها تساوي πr^2. يمثل المقطع الذي نصف قطره ℓ الوجه الجانبي للمخروط. وقياس القوس يساوي $2\pi r$. ويُمكنك استخدام نسبة لإيجاد مساحته.



$$\frac{\text{قياس القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{مساحة المقطع}}{\text{مساحة الدائرة}}$$

$$\frac{\text{محيط المقطع}}{\pi\ell^2} = \frac{2\pi r}{2\pi\ell}$$

$$\text{مساحة المقطع} = \pi r\ell \text{ أو } \pi\ell^2 \cdot \frac{2\pi r}{2\pi\ell}$$



الدائرة التي تحوي المقطع — مقطع

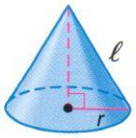
المفهوم الأساسي المساحة الجانبية ومساحة السطح لمخروط

الشرح

المساحة الجانبية L لمخروط دائري قائم هي $L = \pi r\ell$، حيث r هو نصف قطر القاعدة وℓ هو الارتفاع المائل.

مساحة السطح S لمخروط دائري قائم هي $S = \pi r\ell + \pi r^2$، حيث r هو نصف قطر القاعدة و ℓ هو الارتفاع المائل.

النموذج



الرموز $S = \pi r\ell + \pi r^2$ $\quad L = \pi r\ell$

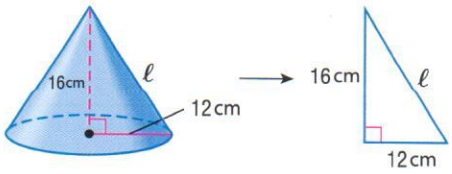
نصيحة دراسية

الاستنتاج المنطقي كما هو الحال في الهرم، المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم L يساوي $\frac{1}{2}P\ell$. نظرًا لأن القاعدة عبارة عن دائرة، فإن المحيط يساوي محيط القاعدة التي على شكل دائرة C. إذًا، المساحة الجانبية هي $\frac{1}{2}C\ell$.

$$L = \frac{1}{2}C\ell$$
$$= \frac{1}{2}(2\pi r)$$
$$= \pi r\ell$$

مثال 4 من الحياة اليومية المساحة الجانبية للمخروط

الهندسة المعمارية **يبلغ ارتفاع السطح المائل للمخروط الموضح على اليسار 16 مترًا ويبلغ نصف قطره 12 مترًا. أوجد المساحة الجانبية.**



الخطوة 1 أوجد الارتفاع المائل ℓ.

نظرية فيثاغورس $\quad \ell^2 = 16^2 + 12^2$

بسّط. $\quad \ell^2 = 400$

أوجد الجذر التربيعي الموجب للطرفين. $\quad \ell = 20$

الخطوة 2 أوجد المساحة الجانبية L.

قدّر $L \approx 3 \cdot 12 \cdot 20$ أو $720\ m^2$

المساحة الجانبية للمخروط

$r = 20$ و $\ell = 12$

$$L = \pi r\ell$$
$$= \pi(12)(20)$$
$$\approx 754$$

استخدم آلة حاسبة.

المساحة الجانبية لسطح مخروط تساوي 754 مترًا مربعًا. ونجد أن الإجابة منطقية عند مقارنتها بالتقدير.

نصيحة دراسية

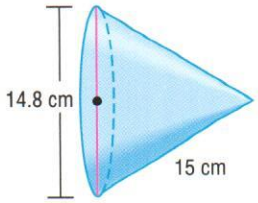
تصميم رسم تخطيطي عند حل مسألة كلامية تتضمن مجسمات، يُمكنك الاستفادة كثيرًا من رسم شكل وتحديد الأجزاء المعلومة. واستخدم المجهول لتحديد ما تريد إيجاده من القياس أو القياسات.

تمرين موجّه

4. المثلجات يبلغ طول مخروط وافل $5\frac{1}{2}$ سنتيمترات، ويبلغ قطر القاعدة $2\frac{1}{2}$ سنتيمتر. أوجد المساحة الجانبية للمخروط. وقرّب لأقرب جزء من عشرة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 5 مساحة سطح المخروط



أوجد مساحة سطح المخروط الذي يبلغ طول قطره 14.8 سنتيمترًا، ويبلغ طول ارتفاعه المائل 15 سنتيمترًا.

قدّر: $S \approx 3 \cdot 7 \cdot 20 + 3 \cdot 50$ أو $570\ cm^2$

$S = \pi r\ell + \pi r^2$ مساحة سطح المخروط

$= \pi(7.4)(15) + \pi(7.4)^2$ $\ell = 15$ و $r = 7.4$

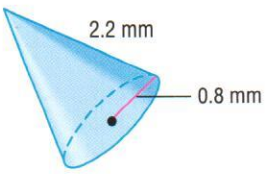
≈ 520.8 استخدم آلة حاسبة.

مساحة سطح المخروط تساوي حوالي 520.8 سنتيمترًا مربعًا. وهذا قريب من التقدير. إذًا الإجابة معقولة.

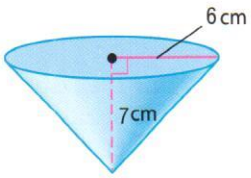
تمرين موجّه

أوجد مساحة سطح كل مخروط. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

5A.

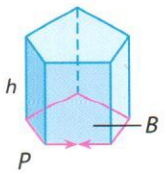
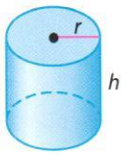
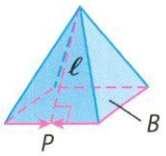
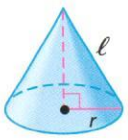


5B.



تم تلخيص صيغ المساحة الجانبية ومساحة السطح أدناه.

ملخص المفهوم المساحة الجانبية ومساحة السطح للمجسمات

المجسم	النموذج	المساحة الجانبية	مساحة السطح
المنشور		$L = Ph$	$S = L + 2B$ أو $S = Ph + 2B$
إسطوانة		$L = 2\pi rh$	$S = L + 2B$ أو $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$
هرم		$L = \frac{1}{2}P\ell$	$S = \frac{1}{2}P\ell + B$
مخروط		$L = \pi r\ell$	$S = \pi r\ell + \pi r^2$

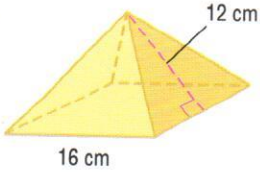
انتبه!
قواعد قواعد المنشورات القائمة والأهرامات القائمة لا تكون دائمًا مضلعات منتظمة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

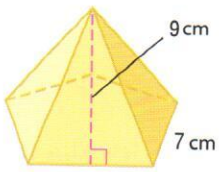
التحقق من فهمك

الأمثلة 1-3 **أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل هرم منتظم. وقرّب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

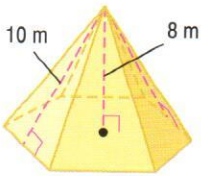
1.



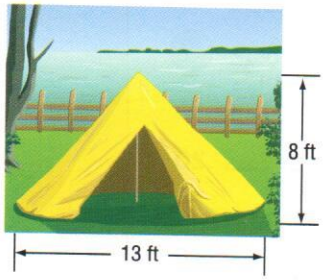
2.



3.



المثالان 4-5 4. **خيام** موضح على اليسار خيمة مخروطية الشكل. قرّب النتائج إلى أقرب جزء من عشرة.

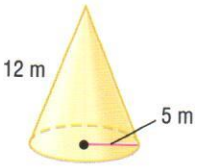


a. أوجد المساحة الجانبية للخيمة وصِف ما تمثله.

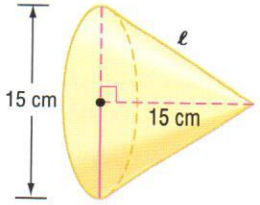
b. أوجد مساحة سطح الخيمة وصِف ما تمثله.

الاستنتاج المنطقي أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل مخروط. قرّب لأقرب جزء من عشرة.

5.



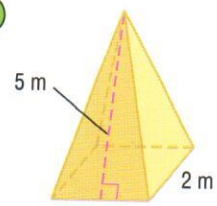
6.



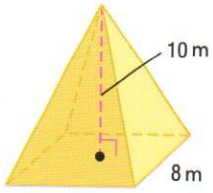
التدريب وحل المسائل

الأمثلة 1-3 **أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل هرم منتظم. وقرّب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

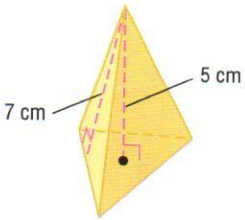
7



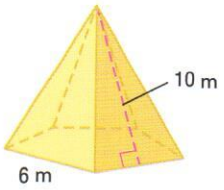
8.



9.



10.



11. هرم رباعي طول مسقطه الرأسي 12 سنتيمترًا، وارتفاعه المائل 18 سنتيمترًا

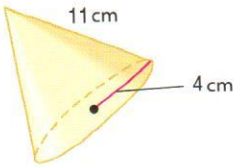
12. هرم سداسي طول حافة قاعدته 6 مليمترات، وارتفاعه 9 مليمترات

13. **الهندسة المعمارية** أوجد المساحة الجانبية لمبنى على شكل هرم يبلغ ارتفاعه المائل 210 أمتار، وأبعاد قاعدته المربعة هي 332 مترًا في 332 مترًا.

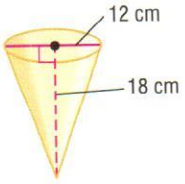
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

المثالان 5-4 **أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل مخروط. قرّب لأقرب جزء من عشرة.**

14.



15.



16. يبلغ طول القطر 3.4 سنتيمترات، ويبلغ طول الارتفاع المائل 6.5 سنتيمترات.

17. يبلغ طول المسقط الرأسي 5 أمتار، ويبلغ طول الارتفاع المائل $9\frac{1}{2}$ أمتار.

18. **جبال** يبلغ طول نصف قطر جبل مخروطي الشكل **1.6** كيلومتر، ويبلغ ارتفاعه **0.5** كيلومتر. ما المساحة الجانبية للجبل؟

19 **تاريخ** اكتشف علماء الآثار مؤخرًا هرمًا يعود في التاريخ إلى 1500 عام في مكسيكو سيتي. ويبلغ قياس هذا الهرم الرباعي 165 مترًا لكل جانب، وسيبلغ طوله 20 مترًا إذا انتصب قائمًا. كم كانت المساحة الجانبية الأصلية للهرم؟

20. صِف شكلين متعددي الوجوه يوجد بهما 7 أوجه.

21. ما مجموع عدد الوجوه والرؤوس والحواف للهرم الثماني؟

22. **خيمة التيبة** يوضح الجدول الموجود على اليسار أبعاد خيمتين من نوع التيبة ومصنوعتين من القماش. دون تضمين الأرض، ما مقدار القماش الإضافي المستخدم لجعل الخيمة B أكبر من الخيمة A؟

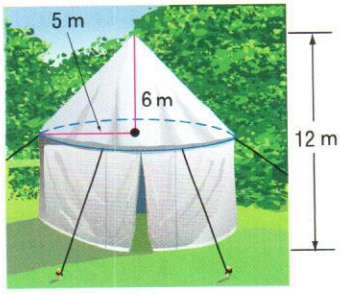
خيمة التيبة	القطر (m)	الارتفاع (m)
A	14	6
B	20	9

23. مساحة سطح الهرم الرباعي تساوي 24 مليمترًا مربعًا ومساحة القاعدة تساوي 4 مليمترات مربعة. ما الارتفاع المائل للهرم؟

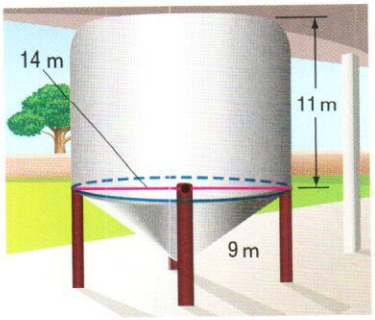
24. مساحة سطح المخروط تساوي 18π سنتيمترًا مربعًا، ويبلغ طول نصف قطر القاعدة 3 سنتيمترات. ما طول الارتفاع المائل للمخروط؟

25. مساحة سطح هرم ثلاثي تساوي 532 سنتيمترًا مربعًا، وعرض قاعدته 24 سنتيمترًا، وطول الوتر يساوي 25 سنتيمترًا. ما طول الارتفاع المائل للهرم؟

26. أوجد المساحة الجانبية للخيمة لأقرب جزء من عشرة.



27. أوجد مساحة السطح للخزان. مع التقريب

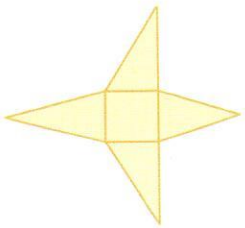


28. **تغيير الأبعاد** مخروط نصف قطره 6 سنتيمترات، ويبلغ طول ارتفاعه المائل 12 سنتيمترًا. صِف تأثير كل تغيير على مساحة سطح المخروط.

a. مضاعفة نصف القطر والارتفاع المائل.

b. قسمة نصف القطر والارتفاع المائل على 3.

29. **أدوات** مجسم يأخذ شكل الشبكة الموضح على اليسار.



a. صِف المجسم.

b. ارسم المجسم.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

ارسم كل مجسم وشكل الشبكة الخاص به لتمثيل المجسم.

30. هرم سداسي

31. هرم مستطيل

32. حيوانات أليفة المخروط الناقص هو جزء من الجسم الذي يتبقى بعد قطع الجزء العلوي بواسطة مستوى يوازي القاعدة. وتوضح خيمة الحيوانات الأليفة الموجودة على اليسار شكل المخروط الناقص للهرم المنتظم.

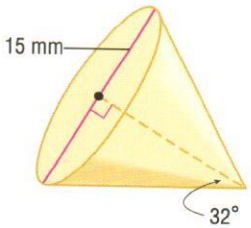
a. صِف أوجه المجسم.

b. أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لشكل المخروط الناقص الذي تكوّن بفعل الخيمة.

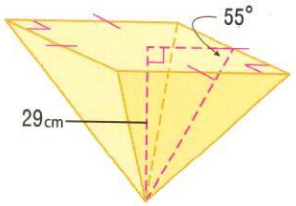
c. تم إنشاء خيمة أخرى للحيوانات الأليفة من خلال قطع النصف العلوي من الهرم الذي يبلغ ارتفاعه 12 سنتيمترًا، ويبلغ طول ارتفاعه المائل 20 سنتيمترًا، ويبلغ طول ضلع قاعدته المربعة 32 سنتيمترًا. أوجد مساحة سطح هذا المخروط الناقص.

أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل مجسم. قرّب لأقرب جزء من عشرة.

33



34.



35. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تستكشف المساحة الجانبية ومساحة سطح الهرم الرباعي الذي يبلغ طول حافة قاعدته 3 وحدات.

a. هندسيًا ارسم الهرم على ورقة منقطة متساوية القياس.

b. جدوليّ أنشئ جدولاً يوضح المساحات الجانبية للهرم الذي يبلغ طول ارتفاعاته الجانبية وحدة واحدة، و 3 و 9 وحدات.

c. لفظيًا صِف ما يحدث للمساحة الجانبية للهرم إذا تمت مضاعفة الارتفاع المائل إلى ثلاثة أضعاف.

d. تحليليًا خمّن مدى تأثر المساحة الجانبية للهرم الرباعي عند مضاعفة الارتفاع المائل وحافة القاعدة إلى ثلاثة أضعاف. ثم تحقق من تخمينك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

36. الكتابة في الرياضيات لماذا لا يتضمن المجسم المائل ارتفاعًا مائلاً؟

37. التبرير حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحةً أحيانًا أم دائمًا أم غير صحيحة على الإطلاق. برر استنتاجك.

مساحة سطح المخروط الذي نصف قطره r وارتفاعه h تكون أقل من مساحة سطح الإسطوانة التي نصف قطرها r وارتفاعها h.

38. التبرير لدى مخروط وهرم مربع نفس مساحة السطح. إذا كان لديهما نفس مساحة القاعدة كذلك، فهل سيكون لديهما نفس الارتفاع المائل أيضًا؟ اشرح.

39. مسألة غير محددة الإجابة صِف هرمًا يبلغ إجمالي مساحة سطحه 100 وحدة مربعة.

40. فرضيات حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. اشرح استنتاجك.

يبلغ طول الارتفاع في هرم متعدد الأضلاع منتظم ومخروط h وحدة ويبلغ طول نصف قطر القاعدة فيهما P وحدة. إذًا، لهما نفس مساحة السطح.

41. الكتابة في الرياضيات صِف كيفية إيجاد مساحة سطح هرم متعدد الأضلاع منتظم يوجد بقاعدته عدد n من الأضلاع، ويبلغ ارتفاعه h وحدة، ويبلغ طول العامد فيه a وحدة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

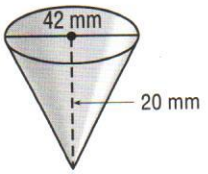
تدريب على الاختبار المعياري

42. قمة مقصورة الحديقة على شكل هرم خماسي منتظم. وطول كل وجه للشكل الخماسي المنتظم يساوي 10 أمتار. إذا كان طول الارتفاع المائل للسطح يساوي حوالي 6.9 أمتار، فما المساحة الجانبية للسطح؟

A $34.5\ m^2$ C $172.5\ m^2$

B $50\ m^2$ D $250\ m^2$

43. إجابة قصيرة ما مساحة سطح المخروط ذي الأبعاد الموضحة، مع تقريب النتيجة لأقرب مليمتر؟



44. الجبر يبيع متجر طارق للمنتجات الحرفية 3 مشابك يدوية الصنع مقابل AED 9.99. ما التعبير الذي يُمكن استخدامه لإيجاد إجمالي التكلفة C لعدد x من المشابك؟

F $C = \frac{9.99}{x}$ H $C = 3.33x$

G $C = 9.99x$ J $C = \frac{x}{3.33}$

45. SAT/ACT ما ميل المستقيم العمودي على المستقيم الذي معادلته $2x + 3y = 9$؟

A $-\frac{3}{2}$ D $\frac{3}{2}$

B $-\frac{2}{3}$ E $\frac{9}{2}$

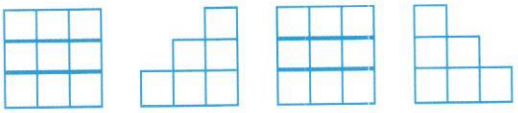
C $\frac{2}{3}$

مراجعة شاملة

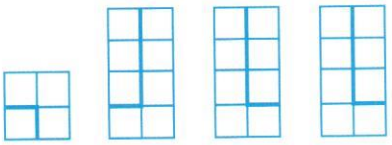
46. أوجد مساحة سطح الإسطوانة التي يبلغ طول قطرها 18 cm ويبلغ ارتفاعها 12 cm. (الدرس 2-10)

استخدم ورقة منقطة متساوية القياس وكل رسم متعامد لرسم مجسم. (الدرس 1-10)

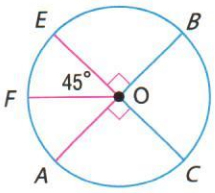
47.



48.



$\overline{EC}$ و $\overline{AB}$ هما قطران في ⊙O. حدّد كل قوس سواء كان *قوسًا أكبر*، أم *قوسًا أصغر*، أم *نص دائرة* بالنسبة للدائرة. ثم أوجد قياسه.

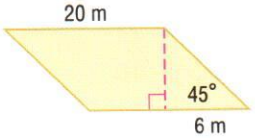


49. $m\widehat{ACB}$ **50.** $m\widehat{EB}$ **51.** $m\widehat{ACE}$

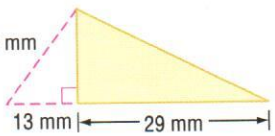
مراجعة المهارات

أوجد محيط كل متوازي أضلاع أو مثلث أو شكل مركب ومساحته. وقرّب لأقرب جزء من عشرة.

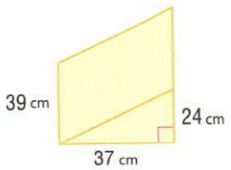
52.



53.



54.



McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح والتأليف © محفوظة لصالح حقوق الطبع

الدرس 10-4 حجم المنشور والاسطوانة

السابق
- لقد أوجدت مساحات أسطح المناشير والإسطوانات.

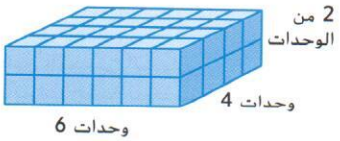
الحالي
1. إيجاد حجم المنشور.
2. إيجاد حجم الإسطوانة.

لماذا؟
- هناك أشكال وأحجام متنوعة لأحواض النباتات. ويُمكنك تقريب كمية التربة التي تحتاج إليها لملء حوض نباتات من خلال إيجاد حجم الشكل ثلاثي الأبعاد الأقرب شبهًا للحوض.

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها. محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 حجم المنشور

تذكر أن حجم المجسم هو قياس كمية الفضاء المحصورة داخل المجسم. ويتم قياس الحجم بالوحدة المكعبة.

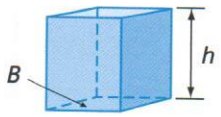


يتضمن المنشور المستطيل الموضح على اليسار 4 × 6 أو 24 وحدة مكعبة في الطبقة السفلية. ونظرًا لأن هناك طبقتين، فإن إجمالي الحجم يساوي 2 × 24 أو 48 وحدة مكعبة.

المفهوم الأساسي حجم المنشور

الشرح الحجم V للمنشور هو $V = Bh$. حيث B هو مساحة القاعدة و h هو ارتفاع المنشور.

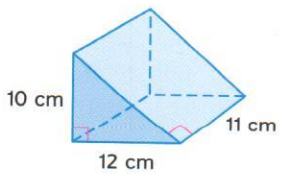
النموذج



الرموز $V = Bh$

مثال 1 حجم المنشور

أوجد حجم المنشور.



الخطوة 1 أوجد مساحة القاعدة B.

مساحة المثلث $B = \frac{1}{2}bh$

$b = 12$ و $h = 10$ $= \frac{1}{2}(12)(10)$ أو 60

الخطوة 2 أوجد حجم المنشور.

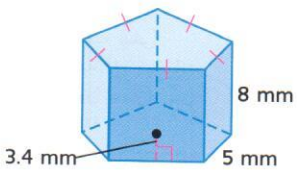
حجم المنشور $V = Bh$

$B = 60$ و $h = 11$ $= 60(11)$ أو 660

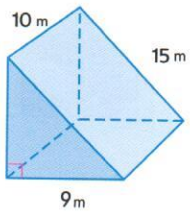
حجم المنشور يساوي 660 سنتيمترًا مكعبًا.

تمرين موجّه

1A.

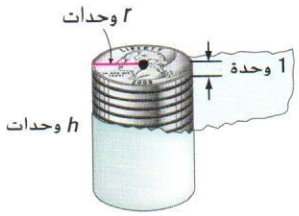


1B.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 حجم الإسطوانة

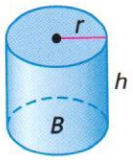


كما هو الحال بالنسبة للمنشور، فإن حجم الإسطوانة يُمكن التفكير فيها باعتبارها تتكون من طبقات. وبالنسبة للإسطوانة، تكون هذه الطبقات عبارة عن أقراص دائرية مشابهة للعملات المعدنية في مجموعة العملات الموضحة. وإذا فسرنا مساحة القاعدة على أنها حجم طبقة يبلغ ارتفاعها وحدة واحدة وكذلك إذا فسرنا ارتفاع الإسطوانة على أنه عدد الطبقات، فإن حجم الإسطوانة يساوي حجم الطبقات مضروبًا في عدد الطبقات أو مساحة القاعدة مضروبة في الارتفاع.

المفهوم الأساسي حجم الإسطوانة

الشرح الحجم V للإسطوانة هو $V = Bh$ أو $V = \pi r^2 h$. حيث يمثل B مساحة القاعدة ويمثل h ارتفاع المخروط ويمثل r نصف قطر القاعدة.

النموذج



الرموز $V = Bh$ أو $V = \pi r^2 h$

مهنة من الحياة اليومية

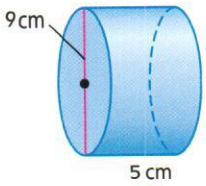
مهندس معماري

يطبق المهندس المعماري المهارات الفنية للهندسة لتصميم المباني وتشييدها وتشغيلها وصيانتها وتجديدها.

ويجب على المهندس المعماري أن يحصل على درجة البكالوريوس في الهندسة بالإضافة إلى دورات دراسية متخصصة. راجع التدريب 35.

مثال 2 حجم الإسطوانة

أوجد مساحة الإسطوانة على اليسار.



قدّر قيمة: $V \approx 3 \cdot 5^2 \cdot 5$ أو 375 cm

$V = \pi r^2 h$	حجم الإسطوانة
$= \pi(4.5)^2(5)$	$r = 4.5$ و $h = 5$
≈ 318.1	استخدم آلة حاسبة.

حجم الإسطوانة يساوي حوالي 318.1 سنتيمترًا مربعًا. وهذا قريب من التقدير، إذًا الإجابة معقولة.

تمرين موجّه

2. أوجد حجم إسطوانة نصف قطرها 3 سنتيمترات وارتفاعها 8 سنتيمترات. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

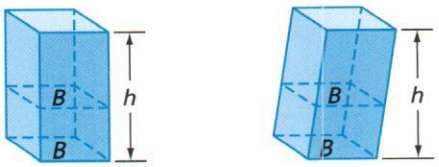
تمثل مجموعة الكتب الأولى الموجودة على اليسار منشورًا قائمًا. بينما تمثل المجموعة الثانية منشورًا مائلاً. ولدى المجموعتين نفس العدد من الكتب. إذا كانت جميع الكتب بنفس الحجم، فإن للمجموعتين نفس الحجم.

ويوضح ذلك المبدأ التالي الذي ينطبق على جميع المجسمات.

المفهوم الأساسي مبدأ كافالييري

الشرح إذا كان لمجسمين نفس الارتفاع h ونفس مساحة المقطع العرضي B في كل المستويات، فإن لهما نفس الحجم.

النماذج



حجم هذه المناشير هو Bh.

انتبه!

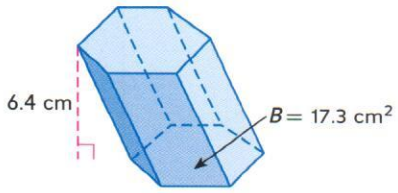
مساحة المقطع العرضي

حتى تصبح المجسمات التي لديها نفس الارتفاع في نفس الحجم أيضًا، يجب أن يكون لمقاطعها العرضية أيضًا نفس المساحة. ولا يجب على المقاطع العرضية للمجسمات المختلفة أن تكون عبارة عن مضلعات متطابقة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 حجم المجسم المائل

أوجد حجم منشور سداسي مائل إذا كان ارتفاعه 6.4 سنتيمترات ومساحة قاعدته 17.3 سنتيمترًا مربعًا.



$V = Bh$ حجم المنشور

$= 17.3(6.4)$ $B = 17.3$ و $h = 6.4$

$= 110.72$ بسّط.

الحجم يساوي 110.72 سنتيمتر مكعب.

تمرين موجّه

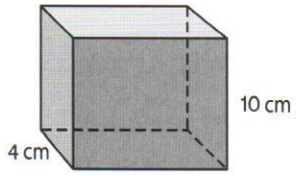
3. أوجد حجم إسطوانة مائلة نصف قطرها 5 سنتيمترات وارتفاعها 3 سنتيمترات. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

نصيحة في حل المسائل

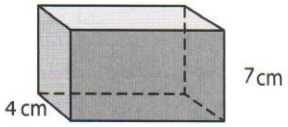
إعداد نموذج عند حل مسائل تتضمن حجم مجسمات، يُمكنك إعداد نموذج للمجسم لتخيل المسألة.

مثال 4 على الاختبار المعياري مقارنة أحجام المجسمات

يوجد لدى المنشورين A و B نفس الطول والعرض، ولكنهما مختلفان في الارتفاع. إذا كان حجم المنشور B يزيد بمقدار 150 سنتيمترًا مكعبًا عن حجم المنشور A، فما طول كل منشور؟



Prism B



Prism A

A 10 cm. **B** $11\frac{1}{2}$ cm. **C** 12 cm. **D** $12\frac{1}{2}$ cm.

قراءة فقرة الاختبار

أنت تعرف بعدين لمجسمين وأن الفرق بين حجميهما يساوي 150 سنتيمترًا مكعبًا.

حَل فقرة الاختبار

$150 = A$ حجم منشور $- B$ حجم المنشور اكتب معادلة.

$4\ell \cdot 10 - 4\ell \cdot 7 = 150$ استخدم $V = Bh$.

$12\ell = 150$ بسّط.

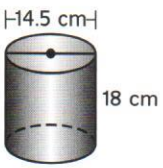
$\ell = 12\frac{1}{2}$ اقسم كل طرف على 12.

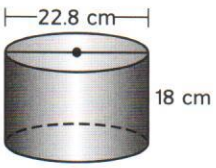
طول كل منشور يساوي $12\frac{1}{2}$ سنتيمترًا. الإجابة الصحيحة هي D.

نصيحة عند حل الاختبار

كتابة معادلات من خلال اختيار متغير لتمثيل المجهول ووضع معادلة، فإنك تُسهّل عملية التحقق من الأخطاء أثناء حل المسألة.

تمرين موجّه





4. تمتلئ الحاويتان الموضحتان على اليسار بالفشار. بكم مرة تزيد كمية الفشار الموجود في الحاوية الكبيرة عن الفشار الموجود في الحاوية الصغيرة؟

F 1.6 مرة من كمية الفشار

G 2.5 مرة من كمية الفشار

H 3.3 مرة من كمية الفشار

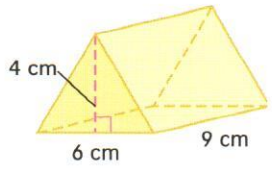
J 5.0 مرة من كمية الفشار

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

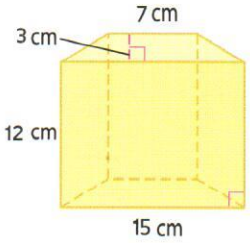
التحقق من فهمك

المثالان 1 و 3 **أوجد حجم كل منشور**

1.



2.

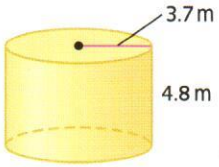


3. المنشور المستطيل المائل الموضح على اليسار

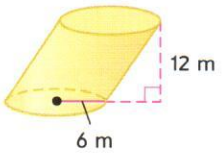
4. منشور خماسي مائل مساحة قاعدته 42 سنتيمترًا مربعًا وارتفاعه 5.2 سنتيمترات

الأمثلة 2-3 **أوجد حجم كل إسطوانة. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.**

5.



6.



7. إسطوانة طول قطرها 16 سنتيمترًا، وارتفاعها 5.1 سنتيمترات

8. إسطوانة طول نصف قطرها 4.2 سنتيمترات، وارتفاعها 7.4 سنتيمترات

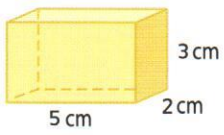
مثال 4 **9. الاختيار من متعدد** يبلغ طول حمام سباحة مستطيل الشكل 8 أمتار وعرضه 4 أمتار. إذا كنا نحتاج إلى ملئه بالمياه لعمق 1.5 متر، ويوجد في كل متر مكعب 1000 لتر من المياه، فكم عدد لترات المياه التي سنحتاج إليها لملء حمام السباحة؟

A 4000 **B** 6400 **C** 30,000 **D** 48,000

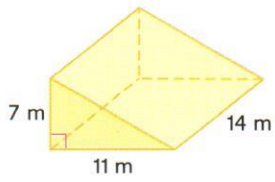
التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 3 **الاستنتاج المنطقي** أوجد حجم كل منشور.

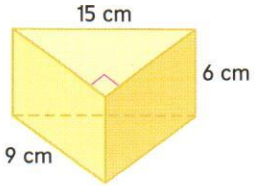
10.



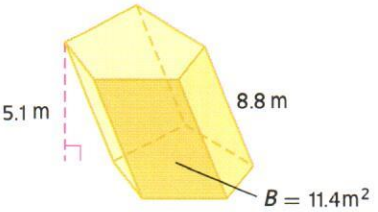
11



12.



13.



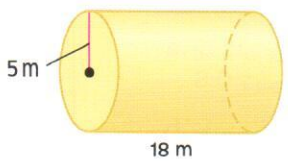
14. منشور سداسي مائل ارتفاعه 15 سنتيمترات ومساحة قاعدته 136 سنتيمترًا مربعًا

15. منشور رباعي طول حافة قاعدته 9.5 سنتيمترات وارتفاعه 17 سنتيمترًا

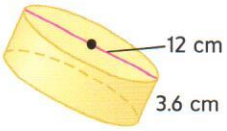
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

الأمثلة 2-3 **الاستنتاج المنطقي** أوجد حجم كل إسطوانة. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

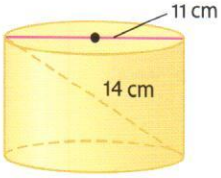
16.



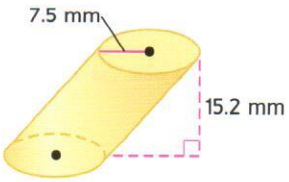
17



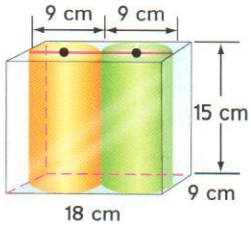
18.



19.



مثال 4 20. **حوض نباتات** حوض نباتات على شكل منشور مستطيل طوله 18 cm. وعمقه $14\frac{1}{2}$ cm وارتفاعه 12 cm. ما حجم التربة الزراعية الموجودة في حوض النباتات إذا كان ممتلئًا حتى $1\frac{1}{2}$ cm أسفل القمة

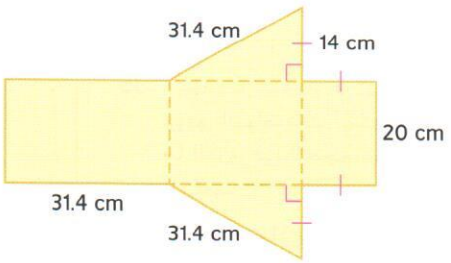


21. **الشحن** يُستخدم صندوق أبعاده 18 سنتيمترًا في 9 سنتيمترات في 15 سنتيمترًا في نقل شمع إسطواني الشكل. وقطر كل شمعة 9 سنتيمترات وارتفاعها 15 سنتيمترًا كما هو موضح على اليسار. ما حجم المساحة الفارغة في الصندوق؟

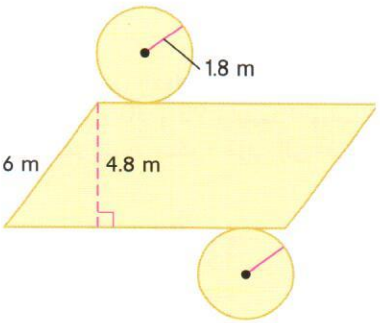
22. **قلاع الرمال** في مسابقة لبناء قلاع الرمال، يُسمح للمتسابقين باستخدام المياه والمجارف و 300 سنتيمتر مكعب من الرمال فقط. لنقل الكمية الصحيحة من الرمال، يحتاج المنظمون إلى تشييد أسطوانات طولها 0.5 متر لحمل كمية الرمال الكافية لمتسابق واحد. ما طول قطر الإسطوانات؟

أوجد حجم المجسم الذي تكونه كل شبكة.

23.



24.



25. **طعام** يبلغ ارتفاع علبة إسطوانية من رقائق البطاطس المقلية 27 سنتيمترًا، ويبلغ طول نصف قطرها 4 سنتيمترات. ثم روجت الشركة المصنعة لعلبة جديدة أكبر بمقدار 30% عن العلبة الحالية. إذا كان للعلبتين نفس نصف القطر، فما ارتفاع العلبة الكبيرة؟

26. **تغيير الأبعاد** إسطوانة نصف قطرها 5 سنتيمترات وارتفاعها 8 سنتيمترات. صِف تأثير كل تغيير على حجم الإسطوانة.

a. مضاعفة الارتفاع.

b. مضاعفة نصف القطر لثلاثة أضعاف.

c. مضاعفة نصف القطر والارتفاع لثلاثة أضعاف.

d. تبديل الأبعاد.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

27. التربة يريد علماء التربة تحديد كثافة كتلة منالتربة الزراعية لتقييم مدى كفاءة نمو نبات معين فيها. وكثافة عينة التربة تساوي نسبة وزنها إلى حجمها.

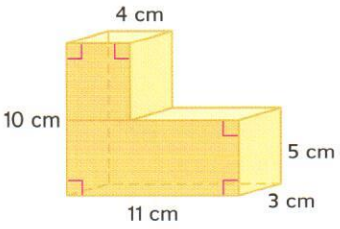
a. إذا كان وزن الحاوية التي توجد بها التربة يساوي 1.2 كيلوجرام، ووزن الحاوية الفارغة يساوي 0.8 كيلوجرام، فما كثافة كتلة التربة؟

b. بفرض أن جميع العوامل الأخرى مناسبة، ما مدى كفاءة نمو نبات في هذه التربة إذا كانت كثافة كتلة التربة المناسبة لنمو الجذور هي 0.045 جرام لكل سنتيمتر مكعب؟ اشرح.

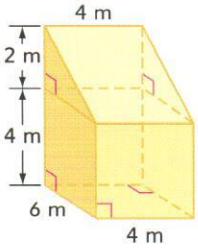
c. إذا كان هناك كيس يوجد به 0.07 متر مكعب من التربة، فما وزن هذا الكيس بالكيلوجرام؟

أوجد حجم كل مجسم مركب. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

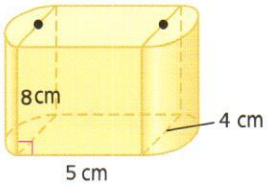
28.



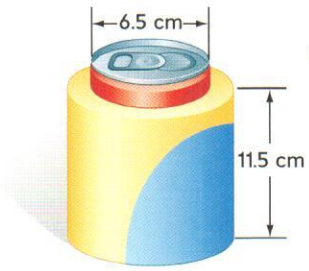
29.



30.



31. التصنيع تتوافق علبة طولها 12 سنتيمترًا مع حامل إسطواني مطاطي طوله 11.5 سنتيمترًا، بما في ذلك سمك قاعدة الحامل الذي يبلغ 1 سنتيمتر. ويبلغ سمك حافة الحامل 1 سنتيمتر. ما حجم المادة المطاطية التي تكوّن الحامل؟



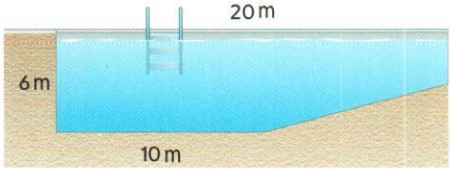
أوجد كل مقياس مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة.

32. علبة إسطوانية حجمها 363 سنتيمترًا مكعبًا. ويبلغ قطر العلبة 9 سنتيمترات. كم يبلغ ارتفاع العلبة؟

33. إسطوانة مساحة سطحها 144π سنتيمترًا مربعًا وارتفاعها 6 سنتيمترات. كم يبلغ حجمها؟

34. منشور مستطيل مساحة سطحه 432 سنتيمترًا مربعًا، وارتفاعه 6 سنتيمترات، وعرضه 12 سنتيمترًا. ما حجم المنشور؟

35. الهندسة المعمارية يتم استخدام عمود إسطواني من الفولاذ المقاوم للصدأ لإخفاء نظام تهوية في مبنى جديد. ووفق المواصفات، يُمكن لقطر العمود أن يتراوح بين 30 و 95 سنتيمترًا. ويجب أن يكون الارتفاع 500 سنتيمتر. ما الفرق في الحجم بين أكبر عمود ممكن وأصغر عمود ممكن؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة في السنتيمترات المكعبة.

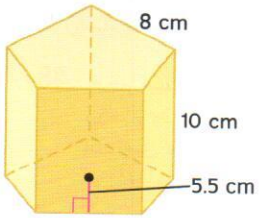


36. تمثيل النماذج تميل قاعدة حمام سباحة مستطيل الشكل بحيث يكون عمق أحد طرفي حمام السباحة مترين والطرف الآخر 1.5 متر كما هو موضح في الشكل. إذا كان العرض 5 أمتار، فأوجد حجم المياه اللازمة لملء حمام السباحة.

37. تغيير الأبعاد تخطط شركة متخصصة في حليب الصويا للترويج لزيادة منتجها من حليب الصويا في كل علبة بمقدار 25%؟ وتريد الشركة أن تكون للعلبة الجديدة نفس القاعدة. ما ارتفاع العلب الجديدة؟

38. تصميم ارسم ثلاثة تصميمات مختلفة واكتب قياساتها (بالسنتيمتر) لكوب قياس مكونات جافة بحيث يتسع لكوب واحد. تأكد من إدراج الأبعاد في كل تصميم. (1 كوب $\approx 237\ cm^3$)

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف



39 أوجد حجم المنشور الخماسي المنتظم الموضح على اليسار من خلال قسمته على خمسة مناشير ثلاثية متساوية. صِف مساحة القاعدة والارتفاع لكل منشور ثلاثي.

40. الباحات يخطط السيد إسماعيل لإزالة فناء قديم وتركيب فناء جديد من الخرسانة على شكل مستطيل يبلغ طوله 20 مترًا، وعرضه 12 مترًا، وسمكه 4 سنتيمترات. وعرض مقاول العمل مقابل AED 2225 لهذا المشروع. وعرض مقاول آخر AED 500 مقابل كل متر مكعب لإنشاء الفناء الجديد، و AED 700 لإزالة الفناء القديم. ما الخيار الأقل تكلفة؟ اشرح.

41. التمثيلات المتعددة ستستكشف في هذه المسألة الإسطوانات.

a. هندسيًا ارسم إسطوانة قائمة وإسطوانة مائلة يبلغ بحيث يبلغ الارتفاع 10 أمتار والقطر 6 أمتار.

b. لفظيًا منشور مربع ارتفاعه 10 أمتار وحافة قاعدته 6 أمتار. هل حجمه أكبر من أم أقل من أم يساوي حجم الإسطوانة؟ اشرح.

c. تحليليًا حدد التغيير الذي يؤثر على حجم الإسطوانة بشكل أكبر: ضرب الارتفاع في x أم ضرب نصف القطر في x. اشرح.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

42. التفكير النقدي قام كلٌ من حسام وحسن بحساب حجم منشور ثلاثي متساوي الأضلاع طول العامد بها 4 وحدات والارتفاع 5 وحدات. هل أحدهما صحيح؟ اشرح استنتاجك.

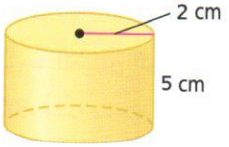
حسام

$$V = Bh$$
$$= \frac{1}{2}aP \cdot h$$
$$= \frac{1}{2}(4)(24\sqrt{3}) \cdot 5$$
$$= 240\sqrt{3} \text{ وحدات مكعبة}$$

حسان

$$V = Bh$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}s^2 \cdot h$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(4\sqrt{3})^2 \cdot 5$$
$$= 120\sqrt{3} \text{ وحدات مكعبة}$$

43. تحدٍ تُستخدم العلبة الإسطوانية الموضحة أدناه في ملء حاوية بسائل. ويتطلب الأمر ثلاث علب ممتلئة لملء الحاوية. حدد الأبعاد الممكنة للحاوية إذا كانت بالأشكال التالية.



a. منشور مستطيل

b. منشور مربع

c. منشور ثلاثي قاعدته عبارة عن مثلث قائم

44. الكتابة في الرياضيات اكتب إجابة كاملة للسؤال التالي المنشور على منتدى على الإنترنت حول العناية بالحدائق.

أنا مزارع جديد. وسوف تسلم الحضانة حمولة شاحنة من التربة تبلغ 4 أمتار. فماذا يعنون بقولهم "4 أمتار" من التربة؟ اشرح إجابتك.

45. مسألة غير محددة الإجابة ارسم منشورًا واكتب القياسات عليه، بحيث يبلغ حجمه 50 سنتيمترًا مكعبًا.

46. التبرير حدِّد إذا ما كانت العبارات التالية صحيحة أم خاطئة. اشرح.

الإسطوانتان اللتان لهما نفس الارتفاع ونفس المساحة الجانبية يكون لهما نفس الحجم.

47. الكتابة في الرياضيات ما مدى تشابه صيغتي حجم المنشور والإسطوانة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

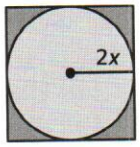
48. حجم منشور مستطيل يساوي 1380 سنتيمترًا مكعبًا. وقاعدته عبارة عن مثلث قائم يبلغ طولا الساقين فيه 8 سنتيمترات و 15 سنتيمترًا. ما ارتفاع المنشور؟

A 34.5 cm
B 23 cm
C 17.8 cm
D 11.5 cm

49. يبلغ ارتفاع خزان إسطواني الشكل يُستخدم لتخزين التربة نصف قياس طول نصف قطره. إذا كان حجم الخزان هو $1,122,360\ cm^3$، فما نصف قطر الخزان؟

F 89.4 cm
G 178.8 cm
H 280.9 cm
J 561.8 cm

50. الإجابة القصيرة ما نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع؟



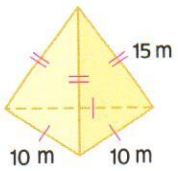
51. SAT/ACT تقترح إمارة سن قانون ضريبة جديد على الممتلكات بقيمة 0.5%. ما قيمة الضريبة الإضافية بالنسبة لفرد تبلغ قيمة ممتلكاته التي تخضع للضريبة AED 85,000؟

A AED 4.25
B AED 170
C AED 425
D AED 4250
E AED 42,500

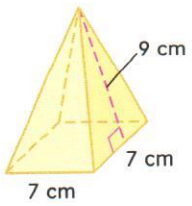
مراجعة شاملة

أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل هرم منتظم. وقرّب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. (الدرس 3-10)

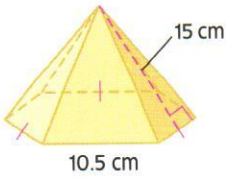
52.



53.



54.



55. خبز تُطلى كثير من صواني الخبز من الداخل بمادة مانعة للالتصاق. وأبعاد الصينية المستطيلة هي 9 سنتيمترات في 13 سنتيمترًا في عمق يبلغ سنتيمترين. ما مساحة الصينية من الداخل التي تحتاج إلى الطلاء؟ (الدرس 2-10)

أوجد القياس المحدّد وقرّبه إلى أقرب جزء من عشرة.

56. مساحة دائرة تساوي 54 مترًا مربعًا. أوجد قطرها.

57. أوجد قطر دائرة مساحتها 102 سنتيمتر مربع.

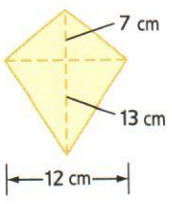
58. مساحة دائرة تساوي 191 مترًا مربعًا. أوجد نصف قطر الدائرة.

59. أوجد نصف قطر دائرة مساحتها 271 سنتيمترًا مربعًا.

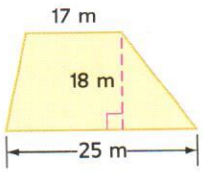
مراجعة المهارات

أوجد مساحة كل شبه منحرف، أو معين، أو شكل طائرة ورقية.

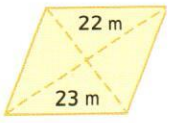
60.



61.



62.



McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © والتأليف الطبع حقوق

مختبر تقنية التمثيل البياني
تغيير الأبعاد (التمدد)

10-4 الدرس

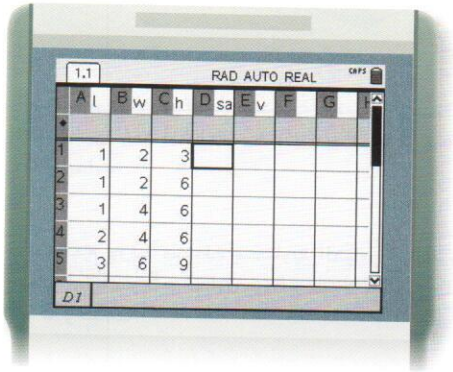
يُمكنك استخدام تقنية TI-Nspire لاستكشاف مدى تأثير التغيير في الأبعاد على مساحة سطح المنشور المستطيل وحجمه.

النشاط

الخطوة 1 افتح صفحة جديدة في Lists & Spreadsheet (قوائم وورقة البيانات).

الخطوة 2 حرك المؤشر إلى المساحة المقابلة للحرف في كل عمود واكتب اسم العمود ℓ للتعبير عن الطول، و w للتعبير عن العرض، و h للتعبير عن الارتفاع، و sa للتعبير عن مساحة السطح، و v للتعبير عن الحجم.

الخطوة 3 أدرج قيم الطول والعرض والارتفاع الموضحة في الجدول.

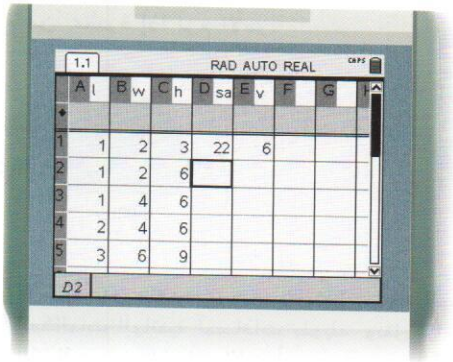


الخطوة 4 أدخل قانون مساحة السطح بالنسبة للخلايا A1 و B1 و C1 في الخلية D1.

الخطوة 5 أدخل قانون الحجم بالنسبة للخلايا A1 و B1 و C1 في الخلية E1.

الخطوة 6 ظلل الخلية D1 وحدد Fill Down **(تعبئة للأسفل)** من قائمة Data **(بيانات)**. ومرر إلى الأسفل لتعبئة المناطق الخاصة بالمناشير الأخرى. كرر نفس العملية مع الحجم.

الخطوة 7 أضف قيمًا أخرى وراقب التأثير الذي يحدث لمساحة السطح والحجم عند تغيير أحد الأبعاد أو أكثر من بُعد واحد.



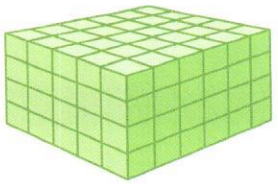
تحليل النتائج

1. ما مدى التغيير الذي سيحدث لمساحة السطح عند زيادة أحد الأبعاد إلى الضعف؟ وماذا سيحدث لها عند زيادة بعدين إلى الضعف؟ وماذا سيحدث لها عند زيادة الأبعاد الثلاثة إلى الضعف؟
2. ما مدى التغيير الذي سيحدث للحجم عند زيادة أحد الأبعاد إلى الضعف؟ وماذا سيحدث له عند زيادة بعدين إلى الضعف؟ وماذا سيحدث له عند زيادة الأبعاد الثلاثة إلى الضعف؟
3. ما مدى التغير في مساحة السطح عند زيادة الأبعاد الثلاثة جميعًا إلى ثلاثة أضعاف؟
4. ما مدى تغير الحجم عند زيادة الأبعاد الثلاثة جميعًا إلى ثلاثة أضعاف؟
5. **التخمين** إذا تم ضرب جميع أبعاد المنشور في عامل للعدد 5، فماذا تظن أنه سيحدث لنسبة مساحة السطح الجديد إلى مساحة السطح الأصلي؟ وماذا سيحدث لنسبة الحجم الجديد إلى الحجم الأصلي؟ اشرح.
6. **تحدٍ** اكتب معادلة لنسبة مساحات الأسطح ونسبة الأحجام، إذا تمت زيادة الأبعاد الثلاثة جميعًا لمنشور بمعامل المقياس k. اشرح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اختبار نصف الوحدة
الدروس من 10-1 إلى 10-4

1. صِف كيفية استخدام ورقة منقطة متساوية القياس لرسم الشكل التالي. (الدرس 10-1)

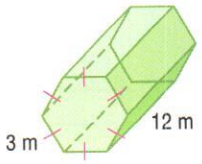


2. استخدم ورقة منقطة متساوية القياس لرسم منشور مستطيل يبلغ ارتفاعه وحدتين، وطوله 3 وحدات، وعرضه 6 وحدات. (الدرس 10-1)

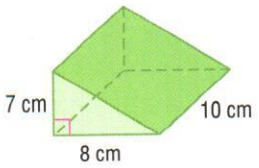
3. استخدم ورقة منقطة متساوية القياس لرسم منشور ثلاثي يبلغ ارتفاعه 5 وحدات، ويبلغ طولا ضلعي قاعدته 4 وحدات و 3 وحدات. (الدرس 10-1)

أوجد المساحة الجانبية لكل منشور. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. (الدرس 10-2)

4.



5.



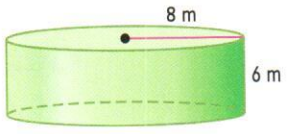
6. الاختيار من متعدد يُستخدم الكابل متحد المحور في نقل المكالمات الهاتفية لمسافات طويلة، ونقل برامج التلفزيون عبر الكابلات، ووسائل اتصالات أخرى. يتضمن الكابل متحد المحور 22 أنبوبًا نحاسيًا ويبلغ قطره 3 سنتيمترات. ما المساحة الجانبية التقريبية للكابل متحد المحور الذي يبلغ طوله 5 أمتار؟ (الدرس 10-2)

A $16.4\ m^2$ C $11.4\ m^2$

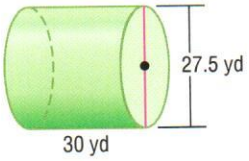
B $196.3\ m^2$ D $5.7\ m^2$

أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل إسطوانة. وقرّب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. (الدرس 10-2)

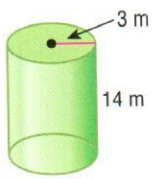
7.



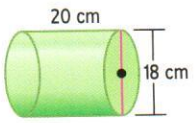
8.



9.



10.



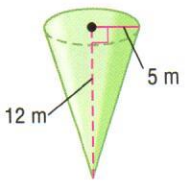
11. مجموعات تجمع سمية رشاشات ملح وفلفل ذات أشكال فريدة. وقد ورثت زوجًا من الرشاشات رباعية السطوح من والدتها. (الدرس 10-3)

a. يبلغ قياس كل حافة للرشاشات 3 سنتيمترات. ارسم رشاشة واحد.

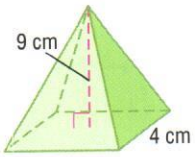
b. أوجد إجمالي مساحة سطح رشاشة واحد.

أوجد مساحة سطح كل هرم منتظم أو مخروط منتظم. وقرّب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. (الدرس 10-3)

12.

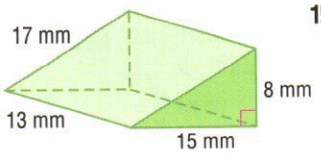


13.

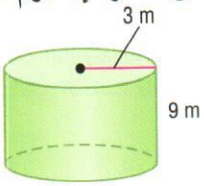


أوجد حجم كل منشور أو إسطوانة. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. (الدرس 10-4)

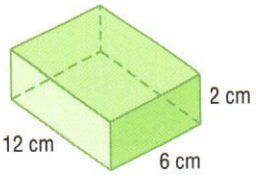
14.



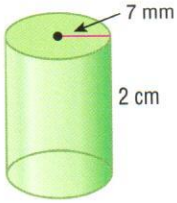
15.



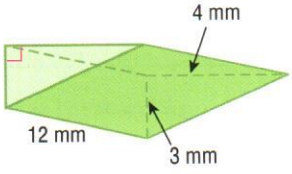
16.



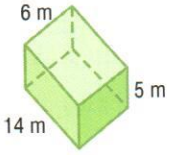
17.



18.



19.



20. الأرصاد الجوية القمر الصناعي تيروس هو عبارة عن سلسلة من الأقمار الصناعية المخصصة للطقس التي حملت كاميرات تلفزيونية وكاميرات الأشعة تحت الحمراء وهي مغطاة بالخلايا الشمسية. إذا كان قطر جسم القمر الصناعي تيروس الذي على شكل إسطوانة يساوي 42 سنتيمترًا، وارتفاعه 19 سنتيمترًا، فما الحجم المتاح لحمل الأدوات والكاميرات؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 10-4)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 10-5 حجم الأشكال الهرمية والمخروطية

السابق:
- أوجدت مساحات أسطح الأشكال الهرمية والمخاريط.

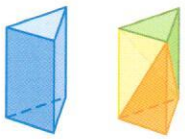
الحالي:
1. إيجاد أحجام الأشكال الهرمية.
2. إيجاد أحجام الأشكال المخروطية.

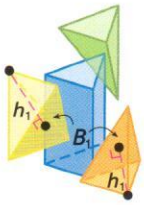
لماذا؟
- تدرس عائشة البلورات التي تنمو على التكوينات الصخرية. ومن أجل أحد المشروعات، تصنع نموذجًا من الصلصال لبلورة ذات شكل مركّب من شكلين هرميين مستطيلين متطابقين. قاعدة كل هرم 1 سم في 1.5 سم، والارتفاع الإجمالي 4 سم. فما أهمية إيجاد حجم النموذج في هذه الحالة؟

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها. محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

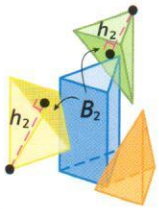
1 حجوم الأشكال الهرمية

يمكن فصل المنشور المثلث إلى ثلاثة أشكال هرمية مثلثة كما هو موضح. ونظرًا لأن جميع أوجه الهرم المثلث هي مثلثات، فيمكن اعتبار أي وجه منها قاعدة للهرم.





مساحة قاعدة الهرمين الأصفر والبرتقالي هي B_1 وارتفاعهما هو h_1. ولذلك، حسب مبدأ كفالييري، لهما الحجم ذاته. وبالمثل، مساحة قاعدة الهرمين الأصفر والأخضر هي B_2 وارتفاعهما h_2؛ إذًا لهما الحجم ذاته.



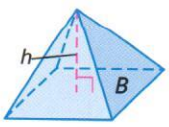
حيث إن الهرمين البرتقالي والأخضر لهما نفس حجم الهرم الأصفر، إذًا أحجام الأشكال الهرمية الثلاثة متساوية. ولذلك، حجم كل هرم هو ثلث حجم منشور له نفس القاعدة والارتفاع. وينطبق هذا على أي منشور مهما كان شكل قاعدته.

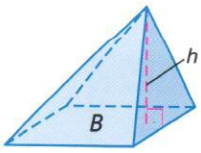
المفهوم الأساسي حجم الهرم

الشرح: حجم الهرم هو $V = \frac{1}{3}Bh$.
حيث يمثل B مساحة القاعدة
ويمثل h ارتفاع الهرم.

الرموز: $V = \frac{1}{3}Bh$

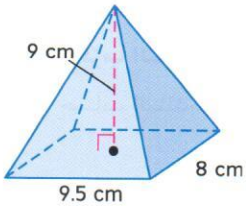
النماذج:





مثال 1 حجم الهرم

أوجد حجم الهرم.



$V = \frac{1}{3}Bh$ حجم الهرم

$= \frac{1}{3}(9.5 \cdot 8)(9)$ $B = 9.5 \times 8$ و $9 =$

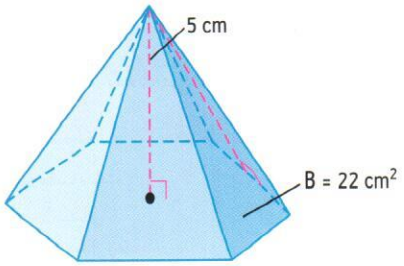
$= 228$ بسّط.

حجم الهرم 228 سنتيمترًا مكعبًا.

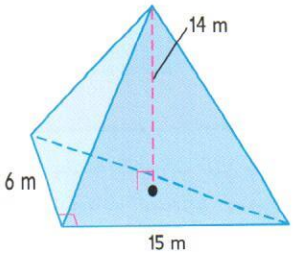
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين موجّه

1A.

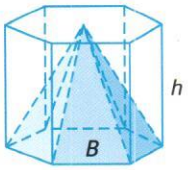


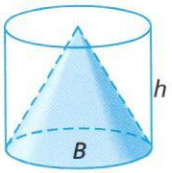
1B.



2 حجوم الأشكال المخروطيه

الهرم والمنشور الموضحان لهما نفس مساحة قاعدة B وارتفاع h للإسطوانة والمخروط. وحيث إن حجم الهرم يساوي ثلث حجم المنشور، إذًا حسب مبدأ كفالييري، فحجم المخروط يجب أن يكون ثلث حجم الإسطوانة.





المفهوم الأساسي حجم المخروط

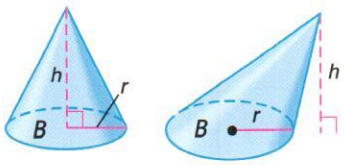
الشرح

حجم المخروط الدائري هو $V = \frac{1}{3}Bh$، أو $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$، حيث يمثل B مساحة القاعدة ويمثل h ارتفاع المخروط ويمثل r نصف قطر القاعدة.

الرموز

$V = \frac{1}{3}Bh$ أو $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

النماذج

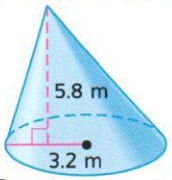


انتبه!

أحجام المخاريط تنطبق صيغة مساحة سطح المخروط على المخاريط القائمة فقط، بينما تنطبق صيغة حجم المخروط على المخاريط المائلة والقائمة.

مثال 2 حجم المخروط

a. أوجد حجم المخروط. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ حجم المخروط

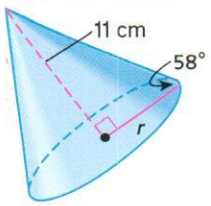
$\approx \frac{1}{3}\pi(3.2)^2(5.8)$ $h = 5.8$ و $r = 3.2$

≈ 62.2 استخدم آلة حاسبة.

حجم المخروط تقريبًا 62.2 مترًا مكعبًا.

b. أوجد حجم المخروط. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

الخطوة 1 استخدم حساب المثلثات لإيجاد نصف القطر.



$\tan 58° = \frac{11}{r}$ $\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$

$r = \frac{11}{\tan 58°}$ حُلّ لإيجاد قيمة r.

$r \approx 6.9$ استخدم آلة حاسبة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الخطوة 2 أوجد الحجم.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ حجم المخروط

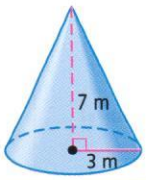
$\approx \frac{1}{3}\pi(6.9)^2(11)$ $h = 11$ و $r \approx 6.9$

≈ 548.4 استخدم آلة حاسبة.

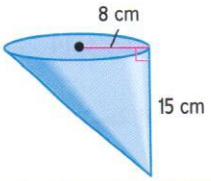
حجم المخروط تقريبًا 548.4 سنتيمترًا مكعبًا.

تمرين موجّه

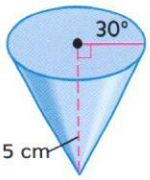
2A.



2B.



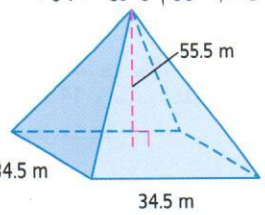
2C.



مثال 3 من الحياة اليومية إيجاد الحجم في مسائل من الحياة اليومية

الهندسة المعمارية **يبلغ ارتفاع هذا الهرم 55.5 م وأضلاع قاعدته تقريبًا 34.5 م. فما حجم الهرم. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.**

ارسم الهرم وميّز الأجزاء.



$V = \frac{1}{3}Bh$ حجم الهرم

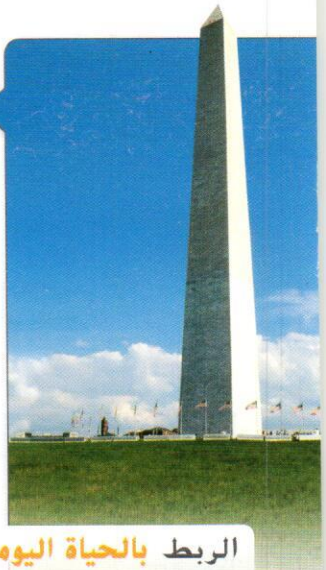
$= \frac{1}{3}(34.5 \cdot 34.5)(55.5)$ $B = 34.5 \cdot 34.5$ و $h = 55.5$

$\approx 22{,}019.6$ بسّط.

يبلغ حجم الهرم الصغير فوق نصب واشنطن التذكاري 22,019.6 مترًا مكعبًا تقريبًا.

تمرين موجّه

3. علم الآثار الهرم الصغير الذي تم اكتشافه في صقارة بمصر في 1992 قاعدته مستطيله بقياس 53 في 37 سم وارتفاعه 46 سم. فما حجمه؟ قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.



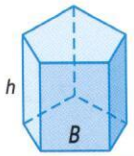
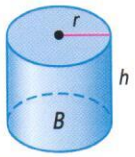
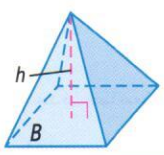
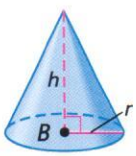
الربط بالحياة اليومية

نصب واشنطن التذكاري هو أكبر هيكل معماري في العالم ويبلغ ارتفاعه 169 م ويحتوي على هرم مربع يُسمى هريم في قمته.

المصدر: Enchanted Learning

تم تلخيص صيغ أحجام المجسمات أدناه.

ملخص المفهوم حجوم المجسمات

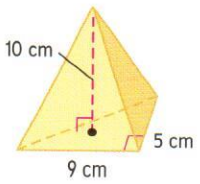
مجسم	منشور	إسطوانة	هرم	مخروط
النموذج				
الحجم	$V = Bh$	$V = Bh$ أو $V = \pi r^2 h$	$V = \frac{1}{3}Bh$	$V = \frac{1}{3}Bh$ أو $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

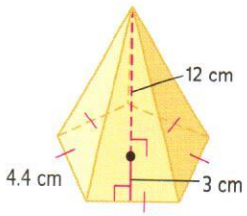
التحقق من فهمك

مثال 1 **أوجد حجم كل هرم.**

1.



2.

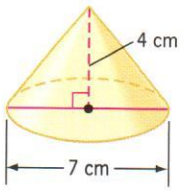


3. هرم مستطيل القاعدة ارتفاعه 5.2 م وقاعدته 8 في 4.5 م

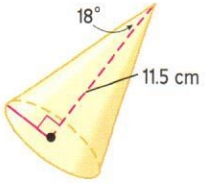
4. هرم مربع القاعدة ارتفاعه 14 م وطول ضلع قاعدته 8 م

مثال 2 **أوجد حجم كل مخروط. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.**

5.



6.



7. مخروط مائل ارتفاعه 10.5 ملّيمترات ونصف قطره 1.6 ملّيمتر

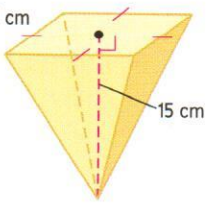
8. مخروط ارتفاعه المائل 25 م ونصف قطره 15 م

مثال 3 9. **متاحف** القبة السماوية في متحف كورفيت الوطني في بولينغ غرين بولاية كنتاكي هي مبنى مخروطي الشكل. إذا علمتَ أن الارتفاع 30.5 م ومساحة القاعدة 1430.7 م مربع. فأوجد حجم الهواء الذي يجب أن تستوعبه أنظمة التدفئة والتبريد. قرّب النتيجة إلى أقرب متر مكعب.

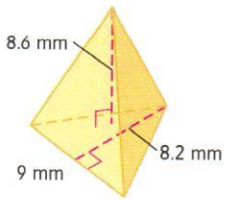
التدريب وحل المسائل

مثال 1 **الاستنتاج المنطقي** **أوجد حجم كل هرم. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

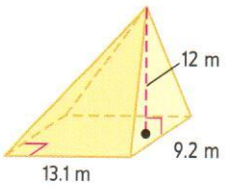
10.



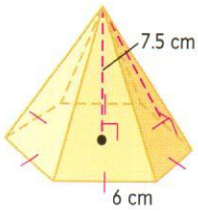
11



12.



13.



14. هرم بقاعدة خماسية مساحة قاعدته 590 م مربع وارتفاعه 7 م

15. هرم بقاعدة مثلثة ارتفاعه 4.8 سم وقاعدة على شكل مثلث قائم ساقه 5 سم ووتره 10.2 سم

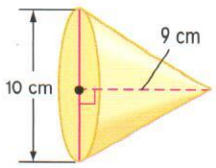
16. هرم بقاعدة على شكل مثلث قائم ساقه 8 سم ووتره 10 سم وحجم الهرم 144 سم مكعب. فما ارتفاعه.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

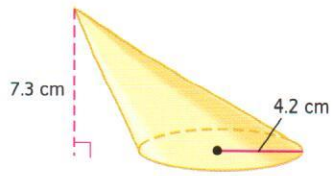
مثال 2

أوجد حجم كل مخروط. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

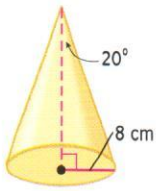
17.



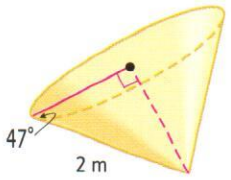
18.



19.



20.



21. مخروط مائل محيطه 16 سم وارتفاعه 16 سم

22. مخروط قائم بارتفاع مائل مقداره 5.6 سم ونصف قطره 1 سم

مثال 3

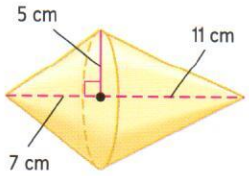
23. الوجبات الخفيفة تقريبًا كم عدد السنتيمترات المكعبة من المكسرات المحمصة التي تملأ بالكامل مخروطًا ورقيًا ارتفاعه 14 سم ومحيط قاعدته 8 سم؟ قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

24. تمثيل النماذج هرم أرينا في ممفيس بولاية تينيسي هو ثالث أكبر هرم في العالم. يبلغ ارتفاعه تقريبًا 107 م، وعرض قاعدته المربعة 107 م. أوجد حجم هذا الهرم.

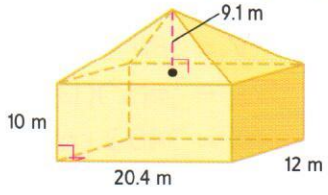
25. العناية بالحدائق الدفيئة الزراعية على اليسار على شكل هرم بقاعدة خماسية منتظمة وارتفاع الدفيئة 5 م وطول ضلع القاعدة مترين. فما حجم الدفيئة؟

أوجد حجم كل مجسم. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

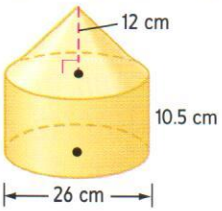
26.



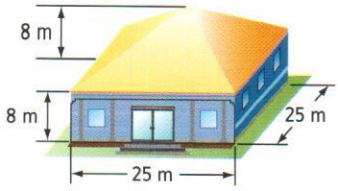
27.



28.



29. التدفئة تعمل أمال على بناء غرفة فنون في الفناء الخلفي لمنزلها. ومن أجل شراء وحدة تدفئة لهذه المساحة، يجب أن تحدد عدد الوحدات الحرارية البريطانية اللازمة لتدفئة البناء. للأبنية الجديدة المعزولة جيدًا، يجب توفير 70 وحدة حرارية بريطانية للمتر المكعب. فما حجم الوحدة التي يجب أن تشتريها أمال؟



30. العلوم ارجع إلى الصفحة 825. **حدد حجم النموذج. اشرح فائدة معرفة الحجم في هذه الحالة.**

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © حقوق الطبع والتأليف

31. تغيير الأبعاد مخروط نصف قطره 4 سم وارتفاعه 9 سم. صف تأثير كل تغيير على حجمه.

a. مضاعفة الارتفاع.

b. مضاعفة نصف القطر.

c. مضاعفة نصف القطر والارتفاع.

أوجد كل قياس وقرّبه إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

32. هرم بقاعدة مربعة حجمه 862.5 سم مكعب وارتفاعه 11.5 سم. أوجد طول ضلع القاعدة.

33 حجم مخروط 196π سم مكعب وارتفاعه 12 سم. فما محيطه؟

34. المساحة الجانبية لمخروط هي 71.6 ملّيمترًا مربعًا والارتفاع المائل 6 ملّيمترات. فما حجم المخروط؟

35. التمثيلات المتعددة ستستكشف في هذه المسألة الأشكال الهرمية المستطيلة.

a. هندسي ارسم هرمين بقاعدتين مختلفتين بارتفاع 10 سم ومساحة قاعدة 24 سم مربع.

b. لفظي ما الذي ينطبق على حجمي الهرمين المرسومين؟ اشرح.

c. تحليلي اشرح تأثير ضرب مساحة قاعدة و/أو ارتفاع الهرم في 5 على حجم الهرم.

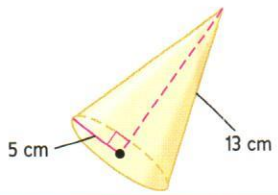
مسائل مهارات التفكير العليا

استخدام مهارات التفكير العليا

36. الفرضيات حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحةً دائمًا أم أحيانًا أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

حجم مخروط نصف قطره r وارتفاعه h يساوي حجم منشور ارتفاعه h.

37. تحليل الخطأ يعمل بلال وجمال على حساب حجم المخروط على اليسار. هل أي منهما على صواب؟ اشرح إجابتك.



جمال

$5^2 + 12^2 = 13^2$

$V = \frac{1}{3}Bh$

$= \frac{1}{3}\pi(5^2 12$

$\approx 314.2 \text{ cm}^3$

بلال

$V = \frac{1}{3}Bh$

$= \frac{1}{3}\pi(5^2)(13)$

$\approx 340.3 \text{ cm}^3$

38. التبرير حجم مخروط 568 سم مكعب. فما حجم إسطوانة لها نفس نصف القطر المخروط وارتفاعه؟ اشرح استنتاجك.

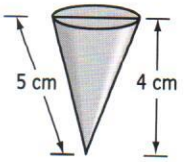
39. مسألة غير محددة الإجابة اذكر مثالاً لهرم ومنشور متساويين في القاعدة والحجم. اشرح استنتاجك.

40. الكتابة في الرياضيات قارن وبيّن الفرق بين إيجاد أحجام الأشكال الهرمية والمخاريط وإيجاد أحجام المناشير والإسطوانات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

41. هناك لعبة رملية مخروطية أبعادها موضحة أدناه. كم عدد السنتيمترات المكعبة من الرمال التي يمكن أن تستوعبها في حالة ملئها للقمة؟



A 12π

B 15π

C $\frac{80}{3}\pi$

D $\frac{100}{3}\pi$

42. إجابة قصيرة تشتري هدى خيمة على شكل هرم بقاعدة مستطيلة. القاعدة 6 في 8 أمتار. إذا علمت أن الخيمة تستوعب 88 مترًا مكعبًا من الهواء، فما ارتفاع العمود الرئيسي للخيمة؟

43. الاحتمال يحتوي قرص على أقسام ملونة بالأحمر والأزرق والبرتقالي والأخضر. يوضح الجدول أدناه نتائج دورات متعددة. ما الاحتمال التجريبي لتوقف مؤشر القرص عند القسم البرتقالي؟

F $\frac{1}{5}$

G $\frac{1}{4}$

H $\frac{9}{25}$

J $\frac{1}{2}$

SAT/ACT.44 لجميع $x \neq -2$ أو 0. $\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 2x}$؟

A -8

B $x - 4$

C $\frac{-x - 4}{x}$

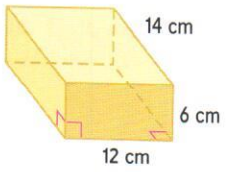
D $\frac{-8}{x + 2}$

E $\frac{x - 4}{x}$

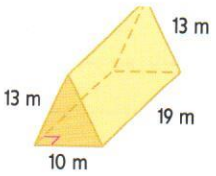
مراجعة شاملة

أوجد حجم كل منشور. (الدرس 4-10)

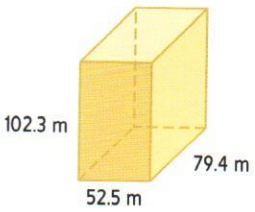
45.



46.



47.

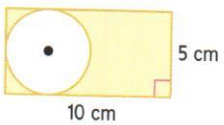


48. المزارع توضح الصورة الحاوية والمخروط التوافقي اللذان يستخدمهما المزارعون لتخزين الحبوب بعد الحصاد. يسمح المخروط في قاع الحاوية بتفريغ الحبوب بسهولة أكبر. استخدم الأبعاد الواردة في الرسم التخطيطي لإيجاد مساحة السطح الكلية للحاوية ذات القمة والقاع المخروطيين. اكتب الإجابة الدقيقة وبعد تقريبها إلى أقرب متر مربع. (الدرس 3-10)

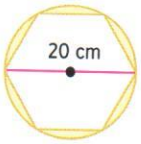
مراجعة المهارات

أوجد مساحة كل منطقة مظللة. المضلعات في التمارين 52-50 منتظمة.

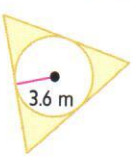
49.



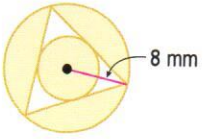
50.



51.



52.



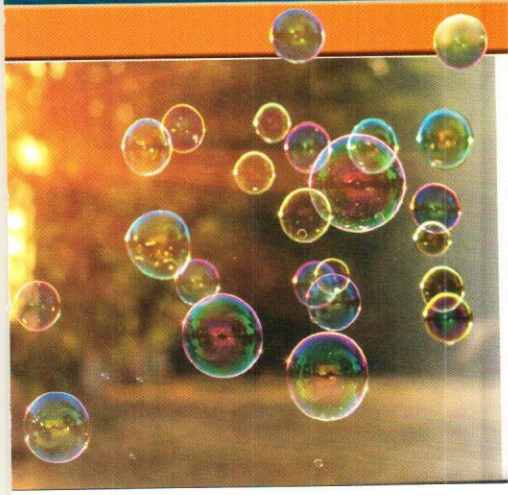
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 10-6 مساحة سطح الأشكال الكروية وحجمها

السابق:
- أوجدت مساحات أسطح المناشير والإسطوانات.

الحالي:
1. إيجاد مساحة سطح الأشكال الكروية.
2. إيجاد حجم الأشكال الكروية.

لماذا؟:
- عند نفخ الفقاعات، يحيط سائل الصابون بحجم من الهواء. بسبب التوتر السطحي، يحافظ السائل على شكل يقلل مساحة السطح المحيطة بالهواء بأكبر قدر ممكن. والشكل الذي يقلل مساحة السطح بأكبر قدر ممكن لكل وحدة حجم هو الشكل الكروي.

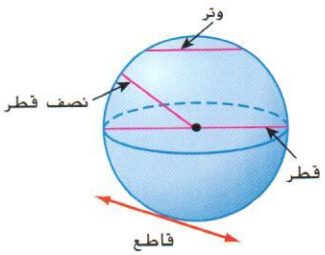


المفردات الجديدة
- **دائرة كبرى** great circle
- **قطب** pole
- **نصف شكل كروي** hemisphere

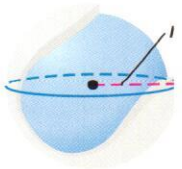
ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
مراعاة الدقة.

1 مساحة سطح الأشكال الكروية

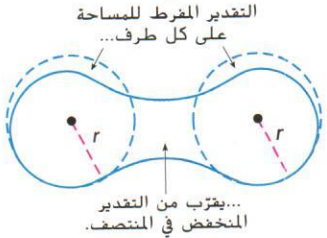
تذكر أن *الشكل الكروي* هو المحل الهندسي لجميع النقاط في الفراغ التي تقع على مسافة محددة من نقطة معينة تُسمى مركز الشكل الكروي.



- نصف قطر الشكل الكروي هو قطعة مستقيمة من المركز إلى نقطة على الشكل الكروي.
- وتر الشكل الكروي هو قطعة مستقيمة تربط نقطتين على الشكل الكروي.
- قطر الشكل الكروي هو وتر يمر بالمركز.
- *قاطع* الشكل الكروي هو مستقيمٌ يقطع الشكل الكروي في نقطةٍ واحدةٍ فقط.



لوضع صيغة لمساحة سطح الشكل الكروي، فكّر في كرة التنس. يتكون غلاف هذا الشكل الكروي من قطعتين متطابقتين على شكل الأثقال الحديدية. ويمكن تقريب كل قطعة منهما بواسطة دائرتين متطابقتين بنصفي قطر يساويان نصف قطر الشكل الكروي. إذًا، يتكون الغلاف بالكامل تقريبًا من أربع دوائر متطابقة. ومجموع هذه المساحات يساوي تقريبًا مساحة الشكل الكروي.



$S \approx 4A$ مجموع الدوائر بمساحة A

$\approx 4(\pi r^2) = 4\pi r^2$ $A = \pi r^2$

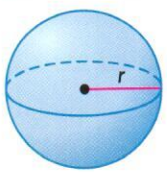
بينما يخرج اشتقاق الصيغة عن نطاق هذا المنهج، فإن الصيغة الدقيقة هي في الواقع $S = 4\pi r^2$.

المفهوم الأساسي مساحة سطح الشكل الكروي

الشرح: مساحة سطح S في الشكل الكروي هي $S = 4\pi r^2$. حيث تمثل r نصف القطر.

الرموز: $S = 4\pi r^2$

النموذج:



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 1 مساحة سطح الشكل الكروي

أوجد مساحة سطح الشكل الكروي. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

$S = 4\pi r^2$ مساحة سطح الشكل الكروي

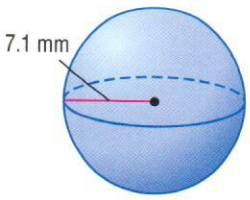
$= 4\pi(6)^2$ عوض عن r باستخدام 6.

≈ 452.4 استخدم آلة حاسبة.

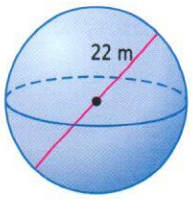
تبلغ مساحة السطح حوالي 452.4 سم مربع.

تمرين موجّه

1A.



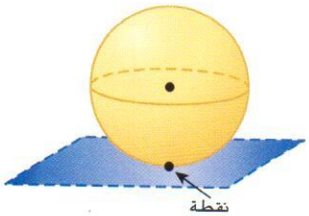
1B.

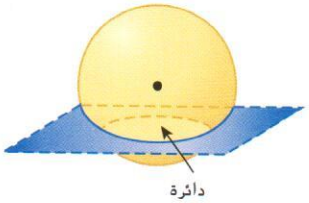


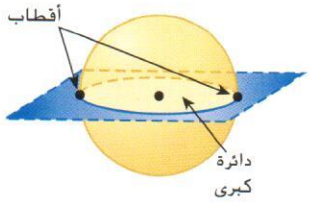
نصيحة دراسية

الدوائر الكبرى يحتوي الشكل الكروي على عدد لا نهائي من الدوائر الكبرى

يمكن للمستوى أن يقطع الشكل الكروي في نقطة أو دائرة. إذا كانت الدائرة تحتوي على مركز الشكل الكروي، فيُسمى التقاطع **الدائرة الكبرى**. وتُسمى النقاط الطرفية لقطر الدائرة الكبرى **الأقطاب**.







حيث إن الدائرة الكبرى تتحد في المركز مع الشكل الكروي وأنصاف أقطارها كذلك هي أنصاف أقطار الشكل الكروي، فيمكن رسم الدائرة الكبرى على الشكل الكروي. وتفصل الدائرة الكبرى الشكل الكروي إلى نصفين متطابقين، يُسمى كل منهما **نصف الشكل الكروي**.

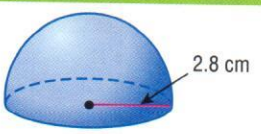
مثال 2 استخدام الدوائر الكبرى لإيجاد مساحة السطح

انتبه!

مساحة نصف الشكل الكروي عند إيجاد مساحة سطح نصف الشكل الكروي، لا تنسَ تضمين مساحة الدائرة الكبرى.

a. أوجد مساحة سطح نصف الشكل الكروي.

أوجد نصف مساحة شكل كروي نصف قطره 2.8 سم. ثم اجمع مساحة الدائرة الكبرى.



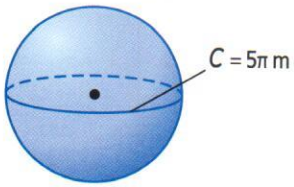
$S = \frac{1}{2}(4\pi r^2) + \pi r^2$ مساحة سطح نصف الشكل الكروي

$= \frac{1}{2}[4\pi(2.8)^2] + \pi(2.8)^2$ عوض عن r باستخدام 2.8.

$\approx 73.9 \text{ cm}^2$ استخدم الآلة الحاسبة.

b. أوجد مساحة سطح الشكل الكروي إذا كان محيط الدائرة الكبرى 5π أمتار.

أولاً، أوجد نصف القطر. محيط الدائرة الكبرى يساوي $2\pi r$. إذًا، $2\pi r = 5\pi$ أو $r = 2.5$.



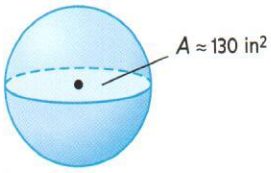
$S = 4\pi r^2$ مساحة سطح الشكل الكروي

$= 4\pi(2.5)^2$ عوض عن r باستخدام 2.5.

$\approx 78.5 \text{ m}^2$ استخدم الآلة الحاسبة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

c. أوجد مساحة سطح الشكل الكروي إذا كانت مساحة الدائرة الكبرى 130 سم مربع.



أولاً، أوجد نصف القطر. مساحة الدائرة الكبرى تساوي πr^2 إذًا، $\pi r^2 = 130$ أو $r \approx 6.4$.

$S = 4\pi r^2$ مساحة سطح الشكل الكروي

$\approx 4\pi(6.4)^2$ أو تقريبًا $514.7\ cm^2$ عوض عن r باستخدام 6.4. استخدم الآلة الحاسبة.

تمرين موجّه

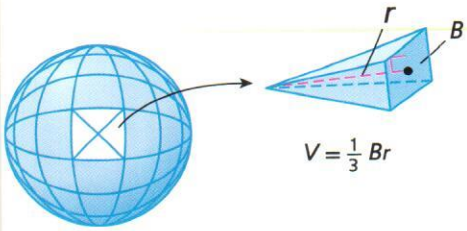
أوجد مساحة سطح كل شكل. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

2A. شكل كروي: محيط الدائرة الكبرى $= 16.2\pi$ m

2B. نصف شكل كروي: مساحة الدائرة الكبرى $\approx 94\ mm^2$

2C. نصف شكل كروي: محيط الدائرة الكبرى $= 36\pi$ cm

2 حجم الشكل الكروي



افترض أن أحد الأشكال الكروية نصف قطره r يحتوي على عدد لا نهائي من الأشكال الهرمية التي تقع رؤوسها عند مركز الشكل الكروي. وارتفاع كل شكل هرمي r ومساحة قاعدته B. مجموع أحجام جميع الأشكال الهرمية يساوي حجم الشكل الكروي.

$V = \frac{1}{3}B_1r_1 + \frac{1}{3}B_2r_2 + \ldots + \frac{1}{3}B_nr_n$ مجموع أحجام الأشكال الهرمية

$= \frac{1}{3}r(B_1 + B_2 + \ldots + B_n)$ خاصية التوزيع

$= \frac{1}{3}r(4\pi r^2)$ مجموع مساحات قواعد الأشكال الهرمية يساوي مساحة سطح الشكل الكروي.

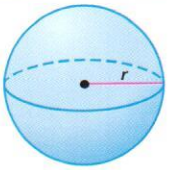
$= \frac{4}{3}\pi r^3$ بسّط.

المفهوم الأساسي حجم الشكل الكروي

الشرح حجم V في الشكل الكروي هو $V = \frac{4}{3}\pi r^3$، حيث تمثل r نصف قطر الشكل الكروي.

الرموز $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

النموذج



نصيحة دراسية

تصميم رسم تخطيطي

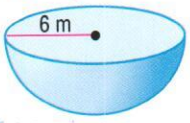
عند حل المسائل التي تتضمن أحجام المجسمات، من المفيد تصميم رسم تخطيطي وتمييزه بالمسميات إذا لم يتواجد بمعطيات المسألة.

مثال 3 حجوم الأشكال الكروية وأنصافها

أوجد حجم كل شكل كروي أو نصف شكل كروي. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

a. نصف شكل كروي نصف قطره 6 أمتار

التقدير: $V \approx \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times 3 \times 6^3$ أو $432\ m^3$



$V = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$ حجم نصف شكل كروي

$= \frac{2}{3}\pi(6)^3$ أو حوالي $452.4\ m^3$ عوض عن r باستخدام 6. استخدم الآلة الحاسبة.

حجم نصف الشكل الكروي يساوي حوالي 452.4 مترًا مربعًا. وهذا قريب من التقدير، إذًا الإجابة معقولة.

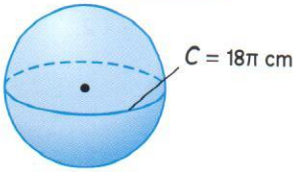
نصيحة دراسية

الدقة تذكر استخدام الوحدات المناسبة عند تقديم الإجابة. وكما هو الحال مع المجسمات الأخرى، يتم قياس مساحة سطح الشكل الكروي باستخدام الوحدات المربعة، والحجم باستخدام الوحدات المكعبة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

b. شكل كروي مع محيط دائرة كبرى 18π سم

الخطوة 1 أوجد نصف قطر الشكل الكروي.



$C = 2\pi r$ محيط الدائرة

$18\pi = 2\pi r$ عوض عن C باستخدام 18π.

$r = 9$ حل لإيجاد قيمة r.

الخطوة 2 أوجد الحجم.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ حجم الشكل الكروي

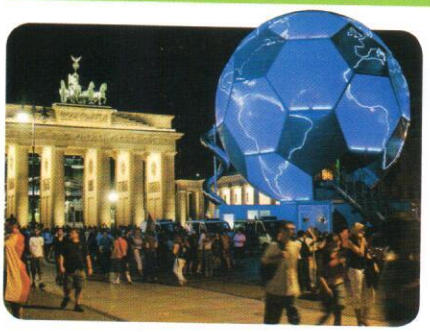
$= \frac{4}{3}\pi(9)^3$ أو حوالي $3053.6\ \text{cm}^3$ عوض عن r باستخدام 9. استخدم الآلة الحاسبة.

تمرين موجّه

3A. شكل كروي: القطر $= 7.4$ cm.

3B. نصف شكل كروي: مساحة الدائرة الكبرى $\approx 249\ \text{mm}^2$

مثال 4 من الحياة اليومية حل المسائل التي تشتمل على المجسمات



كرة القدم تمت صناعة كرة القدم على اليسار لمنافسات كأس العالم لكرة القدم لعام 2006. وهي تأخذ حيزًا من الفراغ مقداره 1357π مترًا مكعبًا. افترض أنها شكل كروي. ما محيطها؟

الفهم أنت تعرف أن حجم الكرة 1357π مترًا مكعبًا. محيط الكرة هو محيط الدائرة الكبرى.

التخطيط أولاً استخدم صيغة الحجم لإيجاد نصف القطر. ثم أوجد محيط الدائرة الكبرى.

الحل

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ حجم الشكل الكروي

$1357\pi = \frac{4}{3}\pi r^3$ عوض عن V باستخدام 1357π.

$1017.75 = r^3$ اقسم كل طرف على $\frac{4}{3}\pi$

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\sqrt[3]{1017.75}$.

1017.75 [^] [(] 1 [÷] 3 [)] [ENTER] 10.06

نصف قطر الكرة 10.06 أمتار. إذًا، المحيط هو $2\pi r = 2\pi(10.06)$ أو تقريبًا 63.18 أمتار.

التحقق يمكنك الحل بترتيب عكسي للتحقق من الحل.

إذا علمتَ أن $C \approx 63.18$، إذًا $r \approx 10.06$. إذا علمتَ أن $r \approx 10.06$،

إذًا $V \approx \frac{4}{3}\pi \cdot 10.06^3$ أو تقريبًا 1357π مترًا مكعبًا. الحل صحيح. ✓

تمرين موجّه

4. البالونات نفخ جاسم بالونًا كرويًا حتى أصبح محيطه 14 سم. ثم أضاف المزيد من الهواء حتى أصبح محيطه 18 سم. فما حجم الهواء المضاف للبالون

الربط بالحياة اليومية

فازت جامعة كارولينا الشمالية بأكبر عدد من البطولات الوطنية لكرة القدم النسائية منذ انطلاق أول منافسة في 1982. ومن 2009. فازوا 18 مرة.

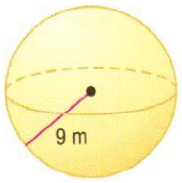
المصدر: Fact Monster

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

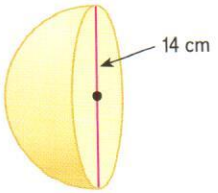
التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **أوجد مساحة سطح كل شكل كروي أو نصف شكل كروي. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.**

1.



2.



3. شكل كروي: مساحة الدائرة الكبرى $= 36\pi \text{ m}^2$

4. نصف شكل كروي: محيط الدائرة الكبرى $\approx 26 \text{ cm}$

مثال 3 **أوجد حجم كل شكل كروي أو نصف شكل كروي. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.**

5. شكل كروي: نصف القطر $= 10 \text{ m}$

6. نصف شكل كروي: القطر $= 16 \text{ cm}$

7. نصف شكل كروي: محيط الدائرة الكبرى $= 24\pi \text{ m}$

8. شكل كروي: مساحة الدائرة الكبرى $= 55\pi \text{ cm}^2$

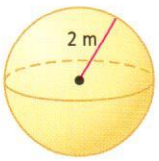
مثال 4

9. **كرة السلة** كرات السلة المستخدمة في مباريات المحترفين يجب أن يكون محيطها $29\frac{1}{2}$ سم. فما مساحة سطح كرة السلة المستخدمة في مباريات المحترفين؟

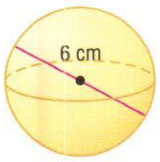
التدريب وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **أوجد مساحة سطح كل شكل كروي أو نصف شكل كروي. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.**

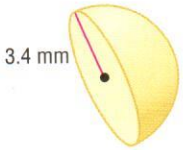
10.



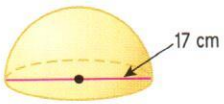
11.



12.



13.



14. شكل كروي: محيط الدائرة الكبرى $= 2\pi \text{ cm}$

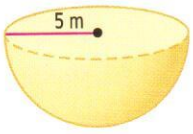
15. شكل كروي: مساحة الدائرة الكبرى $\approx 32 \text{ m}^2$

16. نصف شكل كروي: مساحة الدائرة الكبرى $\approx 40 \text{ cm}^2$

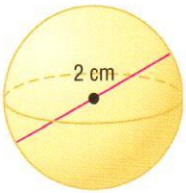
17. نصف شكل كروي: محيط الدائرة الكبرى $= 15\pi \text{ mm}$

مثال 3 **الدقة** **أوجد حجم كل شكل كروي أو نصف شكل كروي. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.**

18.



19



20. شكل كروي: نصف القطر $= 1.4 \text{ m}$

21. نصف شكل كروي: القطر $= 21.8 \text{ cm}$

22. شكل كروي: مساحة الدائرة الكبرى $= 49\pi \text{ m}^2$

23. شكل كروي: محيط الدائرة الكبرى $\approx 22 \text{ cm}$.

24. نصف شكل كروي: محيط الدائرة الكبرى $\approx 18 \text{ m}$

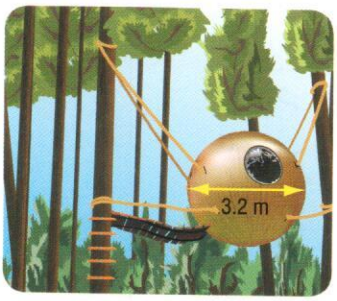
25. شكل كروي: مساحة الدائرة الكبرى $\approx 35 \text{ m}^2$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 4

26. الأسماك تستطيع سمكة *النفاخ* "الانتفاخ" في حالة تعرضها لتهديد من خلال ابتلاع الماء ونفخ جسمها. سمكة النفاخ على اليسار كروية تقريبًا وقطرها 5 سم. ومساحة سطحها أثناء الانتفاخ أكبر بمقدار مرة ونصف من مساحة سطحها في الظروف المعتادة. فما مساحة سطح السمكة في حالة عدم الانتفاخ

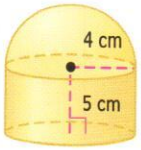
27. الهندسة المعمارية قمة أحد المباني هي قبة كروية مساحة سطحها تقريبًا $13{,}924\pi$ مترًا مربعًا. فما حجم القبة؟ قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.



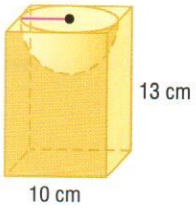
28. بيت الشجرة بيت الشجرة الكروي أو كرة *الشجرة*، الموضح على اليسار قطره 3.2 أمتار. وحجمه أكبر من حجم كرة الشجرة الأصلية بمقدار 1.8 مرة. فما قطر كرة الشجرة الأصلية؟ قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة من المتر.

الاستنتاج المنطقي أوجد مساحة سطح كل مجسم وحجمه. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

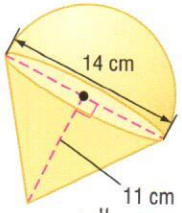
29



30.



31. الألعاب القمة الدوارة على اليسار مركبة من مخروط ونصف شكل كروي.

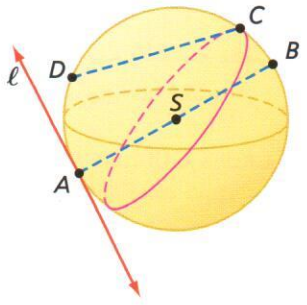


a. أوجد مساحة سطح القمة وحجمها. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

b. إذا قامت الشركة المصنعة للقمة بصناعة نموذج آخر بأبعاد تبلغ نصف أبعاد هذه القمة، فما مساحة سطحه وحجمه؟

32. البالونات بالون كروي مملوء بالهيليوم وقطره 30 سم يمكنه رفع جسم وزنه 14 جم. أوجد حجم بالون يمكنه رفع شخص يزن 65 كجم. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

استخدم الشكل الكروي S لتسمية كلٍ مما يلي.



33. وتر

34. نصف قطر

35. قطر

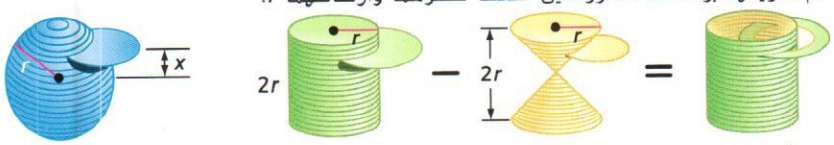
36. خط

37. دائرة كبرى

38. تحليل بُعدي أي مما يلي حجمه أكبر: شكل كروي نصف قطره 2.3 متر أم إسطوانة نصف قطرها 1.5 متر وارتفاعها 5 أمتار؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

39. برهان عام يمكن النظر إلى شكل كروي نصف قطره r على أنه مكون من عدد كبير من الأقراص أو الإسطوانات الرفيعة. فكر في القرص الموضح الذي يقع فوق أو دون مركز الشكل الكروي بمقدار x وحدة. وفكر كذلك في إسطوانة نصف قطرها r وارتفاعها $2r$ تم تفريغها بواسطة مخروطين نصف قطرهما وارتفاعهما r.



a. أوجد نصف قطر القرص من الشكل الكروي بدلالة مسافته x فوق مركز الشكل الكروي. (نصيحة: استخدم مبرهنة فيثاغورس.)

b. إذا كانت سماكة القرص من الشكل الكروي y وحدة. فأوجد حجمه بدلالة x و y.

c. أثبت أن هذا الحجم يساوي حجم القرص المفرغ بسماكة y وحدة والذي يقع فوق مركز الإسطوانة والمخروط بمقدار x وحدة.

d. حيث إن التعابير هي ذاتها للأقراص ذات نفس الارتفاع، فما الذي يضمن أن الإسطوانة المفرغة والشكل الكروي بنفس الحجم؟

e. استخدم صيغ أحجام الإسطوانة والمخروط لاشتقاق صيغة حجم الإسطوانة المفرغة ومن ثم الشكل الكروي.

الأدوات **صف عدد وأنواع المستويات التي تنتج تماثل الانعكاس في كل مجسم. ثم صف زوايا الدوران التي تنتج تماثل الدوران في كل مجسم.**

40. شكل كروي

41. نصف شكل كروي

تغيير الأبعاد **شكل كروي نصف قطره 12 سم. صف تأثير كل تغيير على مساحة سطحه وحجمه.**

42. ضرب نصف القطر في 4.

43 قسمة نصف القطر على 3.

44. تصميم تستوعب علبة عصير قياسية 8 أونصات سائلة.

a. ارسم تصاميم ثلاث علب عصير مختلفة تستوعب كل منها 250 ملّيلترًا. وميّز الأبعاد بالسنتيمتر. وينبغي أن تكون علبة واحدة على الأقل على شكل إسطوانة.

b. لكل علبة في الجزء **a**، احسب نسبة مساحة السطح إلى الحجم (cm^2 per ml). واستخدم هذه النسب لتحديد العلبة التي يمكن تصنيعها بأقل تكلفة مواد ممكنة. وما شكل العلبة الذي يقلل هذه النسبة إلى الحد الأدنى، وهل هذه العلبة هي الأقل تكلفة عند الإنتاج؟ اشرح استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

45. التحدي مكعب حجمه 216 سم مكعب. أوجد حجم شكل كروي محيط بالمكعب. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

46. التبرير حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت العبارة صحيحة، فاشرح استنتاجك. وإذا كانت كانت خاطئة، فاذكر مثالاً مضادًا.

إذا كان نصف قطر شكل كروي r، فهناك مخروط نصف قطره r له نفس الحجم.

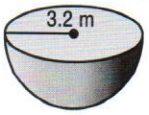
47. مسألة غير محددة الإجابة ارسم شكلاً كرويًا يوضح مثالين على الدوائر الكبرى. وارسم شكلاً كرويًا آخر يوضح مثالين على الدوائر المكونة بواسطة تقاطع المستويات مع الشكل الكروي وهي ليست من الدوائر الكبرى.

48. الكتابة في الرياضيات اكتب نسبة تقارن بين حجم شكل كروي نصف قطره r وحجم إسطوانة نصف قطرها r وارتفاعها $2r$. ثم صف معنى النسبة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

49. إجابة شبكية ما حجم نصف الشكل الكروي الموضح أدناه بالمتر المكعب؟



50. الجبر ما مجموعة حل $3z + 4 < 6 + 7z$؟

A $\{z|z > -0.5\}$
B $\{z|z > -2\}$
C $\{z|z < -0.5\}$
D $\{z|z < -2\}$

51. إذا علمتَ أن مساحة دائرة كبرى لشكل كروي هي $33\ m^2$. فما مساحة سطح الشكل الكروي؟

F $42\ m^2$
G $117\ m^2$
H $132\ m^2$
J $264\ m^2$

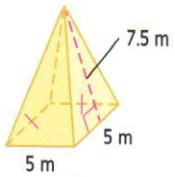
52. SAT/ACT إذا علمتَ أن المستقيم ℓ منصّف متعامد على القطعة المستقيمة AB عند E. فكم عدد النقاط على المستقيم ℓ والتي تقع على نفس المسافة من النقطة A مثل النقطة B؟

A لا يوجد
B واحدة
C اثنتان
D ثلاث
E جميع النقاط

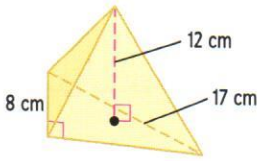
مراجعة شاملة

أوجد حجم كل هرم. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. (الدرس 5-10)

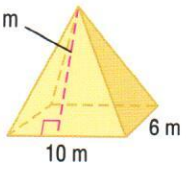
53.



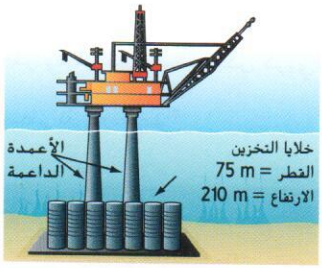
54.



55.

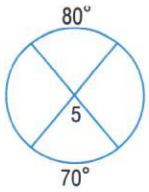


56. الهندسة تتكون قاعدة منصة حفر نفطية من 24 خلية خرسانية أسطوانية. ويتم استخدام 20 خلية منها لتخزين النفط. وترتكز الأعمدة الداعمة لسطح المنصة على الخلايا الأربع الأخرى. أوجد الحجم الإجمالي لخلايا التخزين. (الدرس 4-10)

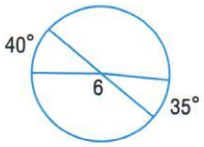


أوجد قياس كل مما يلي.

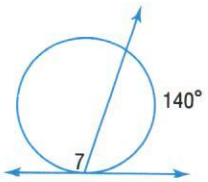
57. $m\angle 5$



58. $m\angle 6$

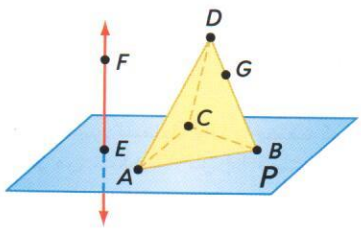


59. $m\angle 7$



مراجعة المهارات

ارجع إلى الشكل.



60. كم عدد المستويات التي تظهر في هذا الشكل؟

61. عيّن ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.

62. هل تقع النقاط G, A, B, E في المستوى ذاته؟ اشرح.

63. ما النقطة التي يكون عندها $\overleftrightarrow{EF}$ و $\overleftrightarrow{AB}$ متقاطعين؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مختبر الهندسة
المحل الهندسي والأشكال الكروية

10-6 التوسع

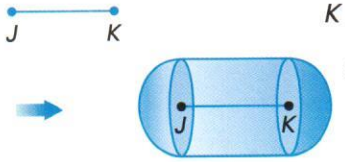
يتم تعريف الأشكال الكروية بدلالة محل هندسي للنقاط في الفراغ. وتعريف الشكل الكروي هو مجموعة جميع النقاط في الفراغ التي تقع على مسافة محددة من نقطة معينة.

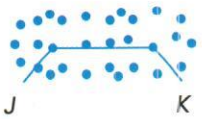
النشاط 1 المحل الهندسي لنقاط تقع على مسافة محددة من نقطتين طرفيتين

أوجد المحل الهندسي لجميع النقاط التي تقع على مسافة واحدة من قطعة مستقيمة.

جمع البيانات

- ارسم قطعة مستقيمة بنقطتين طرفيتين J و K
- قم بتعيين مجموعة من النقاط التي تقع على مسافة متساوية من القطعة المستقيمة.





التحليل

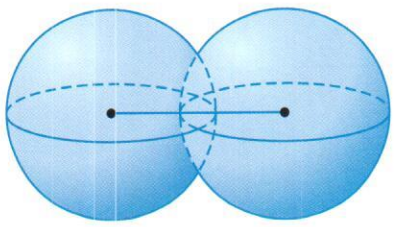
1. ارسم شكلاً وصف المحل الهندسي للنقاط في الفراغ والتي تقع على مسافة 8 وحدات من قطعة مستقيمة طولها 30 وحدة.
2. ما الأشكال ثلاثية الأبعاد التي تكوّن الشكل؟
3. ما نصف قطر وقطر كل نصف شكل كروي؟
4. ما قطر الإسطوانة وارتفاعها؟

النشاط 2 الأشكال الكروية المتقاطعة

أوجد المحل الهندسي لجميع النقاط التي تقع على مسافة واحدة من مركزي شكلين كرويين متقاطعين ومتساويين في نصف القطر.

جمع البيانات

- ارسم قطعة مستقيمة.
- ارسم شكلين كرويين متطابقين ومتداخلين بحيث يكون مركزيهما عند النقطتين الطرفيتين للقطعة المستقيمة.

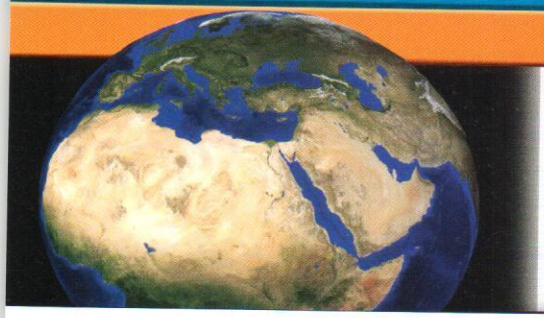


التحليل

5. ما شكل التقاطع للنصفين العلويين من الشكلين الكرويين؟
6. هل يمكن وصف هذا على أنه محل هندسي للنقاط في الفراغ أو على مستوى؟ اشرح.
7. صف هذا التقاطع كمحل هندسي.
8. **الألعاب النارية** ما المحل الهندسي للنقاط والذي يصف كيفية انتشار الجزيئات نتيجة انفجار ألعاب نارية على ارتفاع 400 متر من سطح الأرض إذا كانت المسافة المتوقعة لحركة الجزيء هي 200 متر؟

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

الدرس 10-7 الهندسة الفراغية



السابق
- حددت الخواص الأساسية للأشكال الكروية.

الحالي
1. وصف مجموعة من النقاط على شكل كروي.
2. مقارنة وبيان الفرق بين الهندسة الإقليدية والفراغية.

لماذا؟
- نظرًا لأن سطح الأرض به انحناء وليس مسطحًا، فأقصر مسار بين نقطتين على الأرض هو الموصوف بقوس دائرة كبرى بدلاً من خط مستقيم.

المفردات الجديدة

هندسة إقليدية
Euclidean geometry
هندسة فراغية
spherical geometry
هندسة غير إقليدية
non-Euclidean geometry

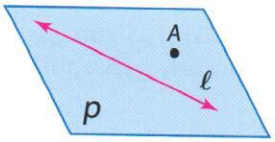
1 الهندسة على شكل كروي

في هذا الكتاب، درسنا **الهندسة الإقليدية**. سواء في مستوى أو في الفراغ. في الهندسة الإقليدية في مستوى، *المستوى* هو سطح منبسط يتكون من نقاط تمتد بلا نهاية في جميع الاتجاهات. في **الهندسة الفراغية**. أو الهندسة على شكل كروي، المستوى هو سطح شكل كروي.

يتم كذلك تعريف المستقيمات بشكل مختلف في الهندسة الفراغية.

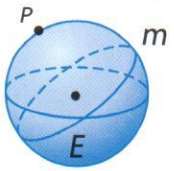
المفهوم الأساسي المستقيمات في هندسة المستويات والهندسة الفراغية

الهندسة الإقليدية في مستوى



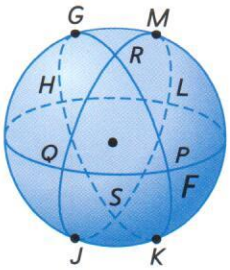
يحتوي المستوى P على مستقيم ℓ ونقطة A ليست على المستقيم ℓ.

الهندسة الفراغية



يحتوي الشكل الكروي E على دائرة كبرى m ونقطة P ليست على m. الدائرة الكبرى m مستقيم على الشكل الكروي E.

مثال 1 وصف مجموعة من النقاط على شكل كروي



قم بتعيين كل مما يلي على الشكل الكروي F.

a. مستقيمان يشتملان على النقطة R

$\overleftrightarrow{GP}$ و $\overleftrightarrow{MQ}$ هما مستقيمان على الشكل الكروي F ويشتملان على النقطة R.

b. قطعة مستقيمة تحتوي على النقطة K

$\overline{PS}$ قطعة مستقيمة على الشكل الكروي F وتحتوي على النقطة K.

c. مثلث

$\triangle RQP$ مثلث على الشكل الكروي F.

تمرين موجّه

قم بتعيين كل مما يلي على الشكل الكروي F أعلاه.

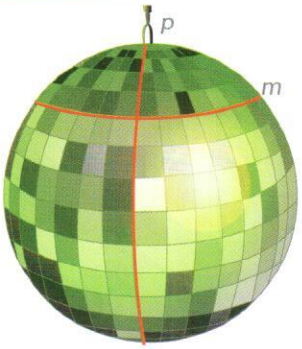
1A. مستقيمان يشتملان على النقطة P

1B. قطعة مستقيمة تحتوي على النقطة Q

1C. مثلث

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 من الحياة اليومية تحديد المستقيمات في الهندسة الفراغية



الترفيه حدد ما إذا كان الشكل m على كرة المرايا الموضحة هو مستقيم في الهندسة الفراغية أم لا.

لاحظ أن الشكل m لا يمر عبر قطبي الشكل الكروي. ولذلك، فالشكل m ليس دائرة كبرى وبالتالي ليس مستقيمًا في الهندسة الفراغية.

تمرين موجّه

2. حدد ما إذا كان الشكل p على كرة المرايا الموضحة هو مستقيم في الهندسة الفراغية أم لا.

نصيحة دراسية

هندسة القطوع الناقصة *الهندسة الفراغية* فئة فرعية من هندسة القطوع الناقصة.

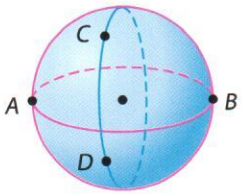
2 مقارنة بين الهندسة الإقليدية والفراغية

بينما تنطبق بعض مسلمات وخواص الهندسة الإقليدية على الهندسة الفراغية، لا ينطبق البعض الآخر وقد ينطبق في ظل ظروف معينة فقط.

مثال 3 مقارنة بين الهندسة الفراغية والإقليدية للمستويات

حدد ما إذا كانت المسلمة أو الخاصية التالية للهندسة الإقليدية للمستويات لها عبارة مناظرة في الهندسة الفراغية أم لا. وإذا كان الأمر كذلك، فاكتب العبارة المناظرة. وإلا، فاشرح استنتاجك.

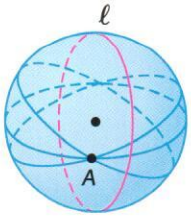
a. فيما بين أي نقطتين، يوجد خط واحد بالتحديد.



في الشكل، لاحظ وجود أكثر من دائرة كبرى (مستقيم) عبر النقطتين القطبيتين A و B. ولكن، توجد دائرة كبرى واحدة فقط عبر النقطتين غير القطبيتين C و D.

ولذلك، العبارة المناظرة هي أنه عبر أي نقطتين غير قطبيتين، توجد دائرة كبرى (مستقيم) واحدة فقط.

b. لديك مستقيم ونقطة ليست على هذا المستقيم، إذًا هناك بالضبط مستقيم واحد يمر عبر النقطة الموازية للمستقيم المعطى.



في الشكل، لاحظ أن كل دائرة كبرى (مستقيم) تحتوي على النقطة A تتقاطع مع المستقيم ℓ. إذًا، لا توجد دائرة كبرى عبر النقطة A توازي المستقيم ℓ.

تمرين موجّه

3A. القطعة المستقيمة هي أقصر مسار بين نقطتين.

3B. فيما بين أي نقطتين، توجد قطعة مستقيمة واحدة بالتحديد.

نصيحة دراسية

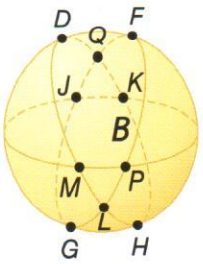
الهندسة النهائية شبكات *المستويات* هي نوع آخر من الهندسة غير الإقليدية. سوف تتعرف على شبكات المستويات في توسع الدرس 11-6.

الهندسة غير الإقليدية هي هندسة لا تنطبق فيها واحدة على الأقل من مسلمات الهندسة الإقليدية. لاحظ أنه في المثال 3b، لا تنطبق مسلمة التوازي على شكل كروي. المستقيمات أو الدوائر الكبرى لا يمكن أن تتوازى في الهندسة الفراغية. ولذلك، الهندسة الفراغية هي هندسة غير إقليدية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **قم بتعيين كل مما يلي على الشكل الكروي *B*.**



1. مستقيمان يحتويان على النقطة Q
2. قطعة مستقيمة تحتوي على النقطة L
3. مثلث
4. **قطعتان مستقيمتان على الدائرة الكبرى ذاتها**

مثال 2 **رياضة حدد ما إذا كان الشكل *X* على كل من الأشكال الكروية الموضحة هو مستقيم في الهندسة الفراغية أم لا.**

5

6.

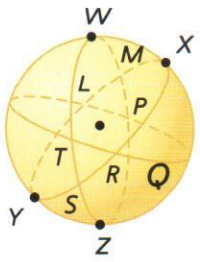
مثال 3 **التبرير حدد ما إذا كانت المسلمة أو الخاصية التالية للهندسة الإقليدية للمستويات لها عبارة مناظرة في الهندسة الفراغية أم لا. وإذا كان الأمر كذلك، فاكتب العبارة المناظرة. وإلا، فاشرح استنتاجك.**

7. يمكن وضع النقاط الموجودة على أي مستقيم أو قطعة مستقيمة داخل تطابق عنصر بعنصر باستخدام أعداد حقيقية.
8. تتقاطع المستقيمات المتعامدة عند نقطة واحدة.

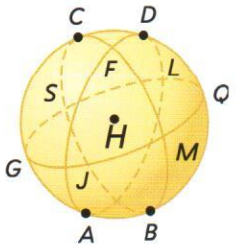
التدريب وحل المسائل

مثال 1 **قم بتعيين مستقيمين يحتويان على النقطة *M* وقطعة مستقيمة تحتوي على النقطة *S* ومثلث في كل من الأشكال الكروية التالية.**

9.



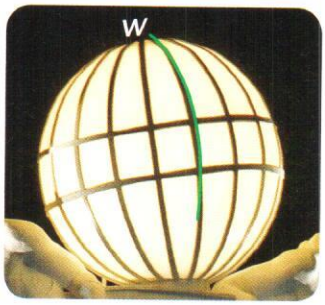
10.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

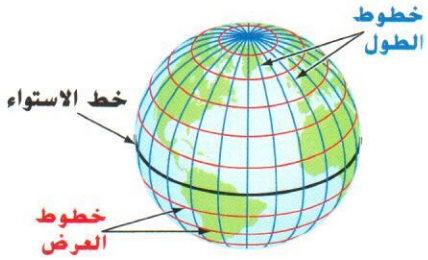
مثال 2 **الهندسة المعمارية** **حدد ما إذا كان الشكل *w* على كل من الأشكال الكروية الموضحة هو مستقيم في الهندسة الفراغية أم لا.**

11.



12.

13. **تمثيل النماذج** يتم استخدام خطوط الطول والعرض لوصف المواقع على سطح الأرض. عرفًا، تقسم خطوط الطول الأرض رأسيًا بينما تقسم خطوط العرض الأرض أفقيًا.



a. هل خطوط الطول دوائر كبرى؟ اشرح.

b. هل خطوط العرض دوائر كبرى؟ اشرح.

مثال 3 **حدد ما إذا كانت المسلمة أو الخاصية التالية للهندسة الإقليدية للمستويات لها عبارة مناظرة في الهندسة الفراغية أم لا. وإذا كان الأمر كذلك، فاكتب العبارة المناظرة. وإلا، فاشرح استنتاجك.**

14. يستمر المستقيم بلا نهاية في اتجاهين.

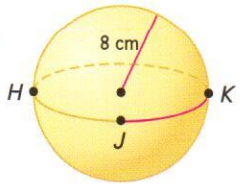
15. تصنع المستقيمات المتعامدة أربع زوايا °90.

16. إذا وقعت ثلاث نقاط على استقامة واحدة، فهناك نقطة واحدة بين النقطتين المتبقيتين.

17. إذا كانت *M* نقطة منتصف $\overline{AB}$، إذًا $\overline{MB} \cong \overline{AM}$.

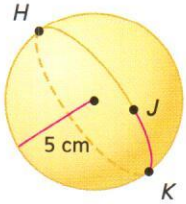
في شكل كروي، يمكن قياس مسافتين بين نقطتين. استخدم كل شكل والمعطيات لتحديد المسافة بين النقطتين *J* و *K* في كل شكل كروي. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة. برر إجابتك.

18.



$m\widehat{JK} = 100$

19.



$m\widehat{JK} = 60$

20. **الجغرافيا** موقع فينيكس، أريزونا يقع على خط الطول °112 غربًا وخط العرض °33.4 شمالاً. وموقع هيلينا، مونتانا يقع على خط الطول °112 غربًا وخط العرض °46.6 شمالاً. يشير الغرب إلى الموقع بدلالة خط الطول الرئيسي، ويشير الشمال إلى الموقع بدلالة خط الاستواء. ومتوسط نصف قطر الأرض تقريبًا 6373 كم.

a. قدر المسافة بين فينيكس وهيلينا. اشرح استنتاجك.

b. هل هناك طريقة أخرى للتعبير عن المسافة بين المدينتين؟ اشرح.

c. هل يمكن حساب المسافة بين واشنطن العاصمة ولندن عاصمة إنجلترا، واللتان تقعان تقريبًا على خط العرض ذاته، بنفس الطريقة؟ اشرح استنتاجك.

d. كم عدد المواقع الأخرى التي تفصلها عن فينيكس، أريزونا نفس المسافة الفاصلة بين هيلينا ومونتانا؟ اشرح.

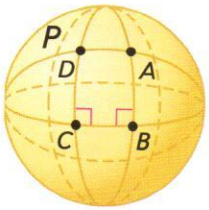
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

21. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تستكشف المثلثات في الهندسة الفراغية.

a. عملي استخدم الشريط اللاصق على كرة لتمييز ثلاث دوائر كبرى. ينبغي أن تمر واحدة على الأقل من الدوائر الكبرى الثلاث بأقطاب مختلفة عن تلك التي تمر بها الدائرتان المتبقيتان. سوف تصنع الدوائر الكبرى مثلثًا. استخدم المنقلة لتقدير قياس كل زاوية من زوايا المثلث.

b. جدولي ضع قياس كل زاوية من زوايا المثلث المتكون في جدول. قم بإزالة الشريط اللاصق وكرر العملية مرتين بحيث تضع في الجدول قياس زوايا ثلاثة مثلثات مختلفة. سجل مجموع زوايا كل مثلث.

c. لفظي قم بتخمين مجموع زوايا مثلث في الهندسة الفراغية.



22. الأشكال الرباعية فكر في الشكل الرباعي $ABCD$ على الشكل الكروي P. لاحظ أن له أربعة أضلاع حيث $\overline{CB} \perp \overline{DC}$، $\overline{AB} \perp \overline{CB}$ و $\overline{AB} \cong \overline{DC}$.

a. هل $\overline{DA} \perp \overline{CD}$؟ اشرح استنتاجك

b. ما وجه المقارنة بين DA و CB؟

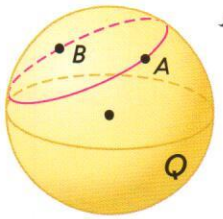
c. هل يمكن أن يتواجد مستطيل، حسب تعريفه في الهندسة الإقليدية، في الهندسة غير الإقليدية؟ اشرح استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

23. الكتابة في الرياضيات قارن وبين الفرق بين الهندسة الإقليدية والفراغية. تأكد من تضمين مناقشة حول المستويات والمستقيمات في فرعي الهندسة.

24. التحدي يمكن تعريف أنواع الهندسة على أسطح منحنية بخلاف الأشكال الكروية. نوع آخر من الهندسة غير الإقليدية هو *هندسة القطوع الزائدة*. يتم تعريف هذا النوع من الهندسة على سطح له انحناء على شكل سرج. قارن مجموع زوايا مثلث في هندسة القطوع الزائدة والهندسة الفراغية والهندسة الإقليدية.

25. مسألة غير محددة الإجابة ارسم شكلاً كرويًا بثلاث نقاط بحيث تقع نقطتان على دائرة كبرى ولا تقع نقطتان على دائرة كبرى.



26. الفرضيات تتقاطع دائرة صغرى لشكل كروي على الأقل مع نقطتين ولكن لا تمر عبر الأقطاب المتقابلة. تقع النقطتان A و B على دائرة صغرى للشكل الكروي Q. هل ستكون الدائرتان الصغريان *أحيانًا* أم *دائمًا* أم *مطلقًا* متوازيتين؟ صمم رسمًا واشرح استنتاجك.

27. الكتابة في الرياضيات هل توجد المثلثات المتماثلة أو المتطابقة في الهندسة الفراغية؟ اشرح استنتاجك.

28. التبرير هل العبارة *الهندسة الفراغية مجموعة جزئية من الهندسة الإقليدية* صحيحة أم خاطئة؟ اشرح استنتاجك.

29. التبرير يقع مستويان على مسافة واحدة من مركز شكل كروي ويتقاطعان مع الشكل الكروي. ما الذي ينطبق على الدائرتين؟ هل هما مستقيمان في الهندسة الفراغية؟ اشرح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

30. أي مسلمات أو خواص الهندسة الفراغية التالية خاطئة؟

A أقصر مسار بين نقطتين على دائرة هو قوس.

B إذا وقعت ثلاث نقاط على استقامة واحدة، فيمكن لأي نقطة أن تقع بين النقطتين المتبقيتين.

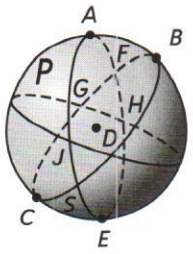
C الدائرة الكبرى بلا نهاية ولا ترجع مطلقًا إلى نقطة البداية الأصلية.

D تتقاطع الدوائر الكبرى المتعامدة عند نقطتين.

31. SAT/ACT قطعت سيارة مسافة 50 كم باتجاه الشمال في ساعة وقطعت 120 كم باتجاه الغرب في ساعتين؟ فما متوسط سرعة السيارة؟

F 50 km/h
G 55 km/h
H 60 km/h
J لا شيء مما سبق

32. إجابة قصيرة قم بتعيين مستقيم في الشكل الكروي P والذي يحتوي على النقطة D.



33. الجبر نسبة الكرات الزرقاء إلى الكرات الحمراء هي 3:5. كم عدد الكرات الحمراء في الصندوق إذا علمت أن العدد الإجمالي لهذه الكرات 32؟

A 12
B 20
C 29
D 51
E 53

مراجعة شاملة

أوجد حجم كل شكل كروي أو نصف شكل كروي. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 6-10)

34. شكل كروي: مساحة الدائرة الكبرى $= 98.5\ m^2$

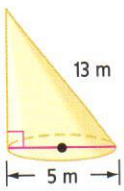
35. شكل كروي: محيط الدائرة الكبرى $\approx 23.1\ cm$.

36. نصف شكل كروي: محيط الدائرة الكبرى $\approx 50.3\ cm$

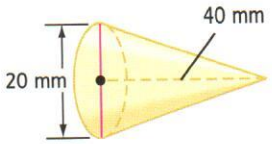
37. نصف شكل كروي: مساحة الدائرة الكبرى $\approx 3416\ m^2$

أوجد حجم كل مخروط. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 5-10)

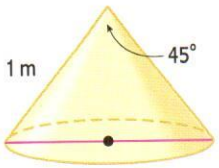
38.



39.



40.

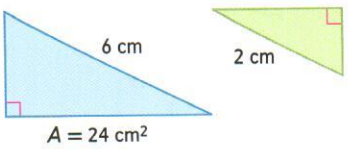


41. المذياع تُمثّل ثلاثة أبراجٍ مخصصةٍ للمذياع من خلال النقاط $A(-3, 4)$ و $B(9, 4)$ و $C(-3, -12)$. حدّد موضع برجٍ آخر متساوي البعد عن الأبراج الثلاثة جميعًا. واكتب معادلةً للدائرة التي تتقابل عندها النقاط الثلاث جميعًا.

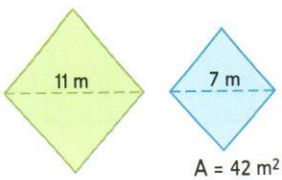
مراجعة المهارات

لكل زوج من الأشكال المتشابهة، أوجد مساحة الشكل الأخضر.

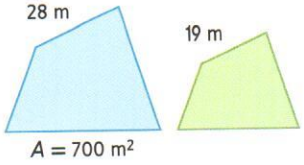
42.



43.



44.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مختبر الهندسة
الإحداثيات الملاحية

الهدف استخدام قياس الطول والعرض لتحديد نصف الكرة الذي يوجد به الموقع وتقدير موقع مدينة باستخدام كرة أرضية أو خريطة.

يتم استخدام نظام شبكات من الخطوط التخيلية على الأرض لتحديد مواقع الأماكن والملاحة. الخطوط الرأسية التخيلية المرسومة حول الأرض عبر القطبين الشمالي والجنوبي تُسمى **خطوط الطول** وتحدد قياس **الطول**. والخطوط الأفقية التخيلية الموازية لخط الاستواء تُسمى **الموازيات** وتحدد قياس **العرض**.

الوحدات الأساسية للقياس هي الدرجات والدقائق والثواني. الدرجة (°) = 60 دقيقة (′) و 60 دقيقة = 60 ثانية (″).

	موقع 0°	الاتجاه	الدرجات القصوى
خط العرض (موازيات)	خط الاستواء	في نصف الكرة الشمالي، الجميع درجات شمالاً. وفي نصف الكرة الجنوبي، الجميع درجات جنوبًا.	180° عند خط التاريخ الدولي
خط الطول (خطوط الطول)	خط الطول الرئيسي عبر جرينتش، إنجلترا	في نصف الكرة الشرقي، الجميع درجات شرقًا. وفي نصف الكرة الغربي، الجميع درجات غربًا.	90° عند كل قطب

النشاط استكشاف خطوط الطول والعرض

يعرض الجدول خطوط الطول والعرض لثلاث مدن.

المدينة	خط العرض	خط الطول
A	37°59′N	84°28′W
B	34°55′S	138°36′E
C	64°4′N	21°58′W

1. في أي نصف من الكرة الأرضية تقع كل مدينة؟
2. استخدم كرة أرضية أو خريطة لتعيين كل مدينة.
3. الأرض على شكل كرة تقريبًا نصف قطرها 6373 كم. خط الاستواء وجميع خطوط الطول من الدوائر الكبرى. محيط الدائرة الكبرى يساوي طول خط الاستواء أو أي خط طول. أوجد طول دائرة كبرى على الأرض بالكيلومتر.
4. لاحظ أن المسافة بين كل خط عرض متساوية تقريبًا. المسافة من خط الاستواء إلى القطب الشمالي هي $\frac{1}{4}$ من محيط الأرض وكل درجة عرض $\frac{1}{90}$ من تلك المسافة. قدر المسافة بين زوج من خطوط العرض بالكيلومتر.

التحليل

يعرض الجدول خطوط الطول والعرض لثلاث مدن.

المدينة	خط العرض	خط الطول
F	1°28′S	48°29′W
G	13°45′N	100°30′E
H	41°17′S	174°47′E

كلكتا، الهند	22°34′N	88°24′E
هونج كونج، الصين	22°20′N	114°11′E

5. قم بتعيين نصف الكرة الذي تقع فيه كل مدينة.
6. استخدم كرة أرضية أو خريطة لتعيين كل مدينة.
7. أوجد المسافة التقريبية بين خطوط الطول عند خط العرض 22° N تقريبًا. المسافة المباشرة بين المدينتين على اليسار هي 2649 كم.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 10-8

المجسمات المتطابقة والمتشابهة

السابق
- قارنت مساحات أسطح الأشكال الكروية وأحجامها.

الحالي
1. تحديد المجسمات المتطابقة أو المتشابهة.
2. استخدام خواص المجسمات المتشابهة.

لماذا؟
- تم قطع الأحجار الكريمة على اليسار بنفس الشكل تمامًا ولكن بأحجام مختلفة. أشكالها *متشابهة*.

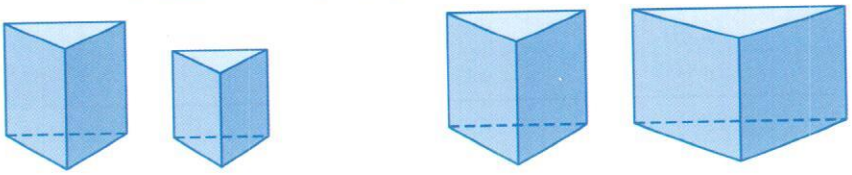
المفردات الجديدة

مجسمات متشابهة
similar solids

مجسمات متطابقة
congruent solids

1 تحديد المجسمات المتطابقة أو المتشابهة

المجسمات المتشابهة لها نفس الشكل ولكن ليست بالضرورة بنفس الحجم. جميع الأشكال الكروية متشابهة وجميع المكعبات متشابهة.

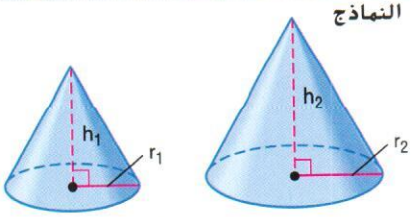


في المجسمات المتشابهة، القياسات الخطية المتناظرة، مثل الارتفاع ونصف القطر، نسبها متساوية. النسبة المشتركة تُسمى عامل المقياس. إذا كان المجسمان المتشابهان متعددي الأوجه، فيكون الوجهان المتناظران متشابهين.

المفهوم الأساسي المجسمات المتشابهة

الشرح يكون المجسمان متشابهين إذا كان لهما الشكل ذاته مع تساوي نسب القياسات الخطية المتناظرة.

النماذج



$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

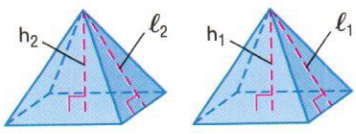
المجسمات المتطابقة لها نفس الشكل والحجم تمامًا. والمجسمات المتطابقة مجسمات متشابهة عامل مقياسها 1:1.

المفهوم الأساسي المجسمات المتطابقة

الشرح يكون المجسمان متطابقين إذا كان لهما الخواص التالية.

- الزوايا المتناظرة متطابقة.
- الحواف المتناظرة متطابقة.
- الأوجه المتناظرة متطابقة.
- الأحجام متساوية.

النماذج



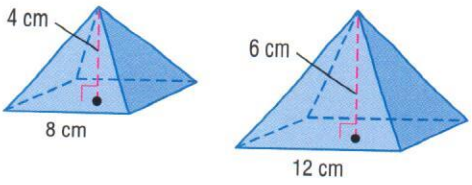
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\ell_1}{\ell_2} = 1$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 1 تحديد المجسمات المتطابقة والمتشابهة

حدد هل كل زوج من المجسمات *متشابه* أم *متطابقٌ* أم *ليس أيًا مما سبق*. إذا كانت المجسمات متشابهة، فاذكر عامل المقياس.

a. الأشكال الهرمية الرباعية

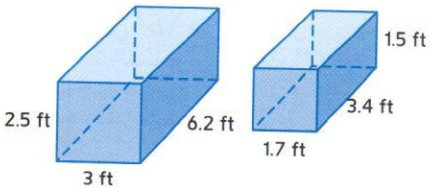


نسبة الارتفاع: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

نسبة حواف القاعدة: $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

نسب القياسات المتناظرة متساوية، إذًا الأشكال الهرمية متشابهة. عامل المقياس 2:3. حيث إن عامل المقياس ليس 1:1. فالمجسمات ليست متطابقة.

b. المناشير المستطيلة



نسبة العرض: $\frac{3}{1.7} \approx 1.76$

نسبة الطول: $\frac{6.2}{3.4} \approx 1.82$

نسبة الارتفاع: $\frac{2.5}{1.5} \approx 1.67$

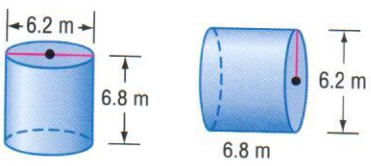
نظرًا لأن نسب القياسات المتناظرة ليست متساوية، فالمناشير ليست متطابقة ولا متشابهة.

نصيحة دراسية

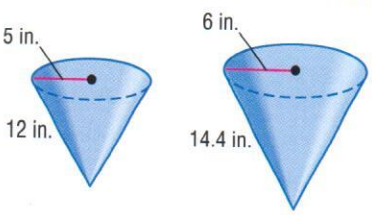
المجسمات المتطابقة والمتشابهة إذا كان مجسمان متشابهين، فتكون القياسات الخطية المتناظرة متناسبة. وإذا كان مجسمان متطابقين، فتكون القياسات الخطية المتناظرة متساوية.

تمرين موجّه

1A.

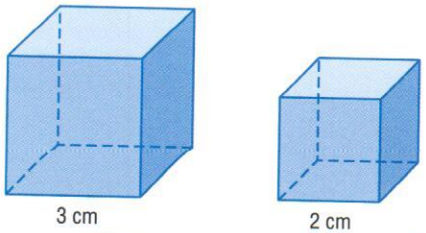


1B.



2 المجسمات المتطابقة والمتشابهة

المكعبان على اليسار مجسمان متشابهان بعامل مقياس 2:3.



نسبة مساحة السطح: 54:24 أو 9:4

نسبة الحجم: 27:8

لاحظ أنه يمكن كتابة نسبة مساحة السطح 9:4 بالصورة $3^2:2^2$. يمكن كتابة نسبة الحجم 27:8 بالصورة $3^3:2^3$. وهذا يقترح النظرية التالية.

نصيحة دراسية

التحقق من الحلول بعد إيجاد القياسات غير المعلومة للمجسمات المتشابهة، يمكنك الحل بترتيب عكسي للتحقق من الحلول.

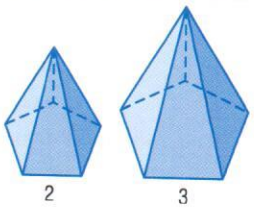
النظرية 10.1

الشرح إذا كان عامل مقياس مجسمين متشابهين هو $a:b$، فنسبة مساحة السطح هي $a^2:b^2$ ونسبة الحجم هي $a^3:b^3$.

أمثلة

عامل المقياس	2:3
نسبة مساحة السطح	4:9
نسبة الحجم	8:27

النماذج



يجب أن تكون الأشكال متشابهة حتى تنطبق عليها النظرية 10.1.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 استخدام المجسمات المتشابهة لكتابة النسب

هناك مخروطان متشابهان بنصف قطر 10 و 15 ملّيمترًا. ما نسبة مساحة سطح المخروط الصغير إلى الكبير؟

أولاً، أوجد عامل المقياس.

$\frac{\text{نصف قطر المخروط الصغير}}{\text{نصف قطر المخروط الكبير}} = \frac{10}{15}$ أو $\frac{2}{3}$ اكتب نسبة لمقارنة نصف القطر.

معامل المقياس هو $\frac{2}{3}$.

$\frac{a^2}{b^2} = \frac{2^2}{3^2}$ أو $\frac{4}{9}$ إذا نسبة مساحة السطح هي $\frac{a^2}{b^2}$ إذا كان معامل المقياس هو $\frac{a}{b}$.

إذًا نسبة مساحة السطح هي 4:9.

تمرين موجّه

2. منشوران متشابهان لهما مساحة سطح 98 و 18 سم مربع. ما نسبة ارتفاع المنشور الكبير إلى الصغير؟

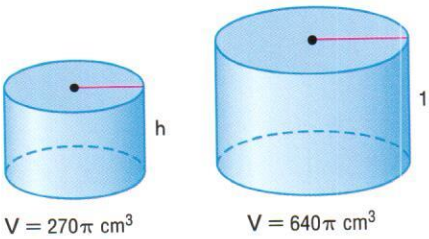
نصيحة دراسية

المجسمات المتشابهة والمساحة إذا كان مجسمان متشابهين، فتكون نسبة أي مساحات متناظرة هي $a^2 : b^2$. في المثال 2، نسبة المساحة الجانبية للمخروطين هي 4:25 ونسبة مساحة القاعدة لهما هي 4:25.

يمكن استخدام المجسمات المتشابهة لتمثيل العديد من الأجسام في الحياة اليومية.

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام المجسمات المتشابهة لإيجاد القيم المجهولة

الحاويات الحاويتان على اليسار أسطوانتان متشابهتان. أوجد ارتفاع h الحاوية الصغيرة.



الفهم أنت تعرف ارتفاع الحاوية الكبيرة وحجمي الحاويتين.

التخطيط استخدم النظرية 10.1 لكتابة نسبة تقارن بين الحجمين. ثم أوجد عامل المقياس واستخدمه لإيجاد h.

الحل

$\frac{\text{حجم الحاوية الصغيرة}}{\text{حجم الحاوية الكبيرة}} = \frac{270\pi}{640\pi}$ اكتب نسبة تقارن بين الحجمين.

$= \frac{27}{64}$ بسّط.

$= \frac{3^3}{4^3}$ اكتب بالصورة $\frac{a^3}{b^3}$.

عامل المقياس هو 4:3.

$\frac{h}{10} = \frac{3}{4}$ ← عامل المقياس → نسبة الارتفاع

$h \cdot 4 = 10 \cdot 3$ أوجد نواتج الضرب التقاطعي.

$h = 7.5$ حل لإيجاد قيمة h.

إذًا، ارتفاع الحاوية الصغيرة هو 7.5 سم.

التحقق حيث إن $\frac{7.5}{10} = 0.75 = \frac{3}{4}$، فالحل صحيح. ✓

تمرين موجّه

3. كرة الطائرة محيط كرة الطائرة الموافقة للوائح هو 66 سم. نسبة مساحة سطح تلك الكرة إلى مساحة سطح كرة الأطفال هي 1.6:1. فما محيط كرة الأطفال؟ قرّب النتيجة إلى أقرب سنتيمتر.

الربط بتاريخ الرياضيات

جورج إف. بي. ريمان

(1826-1866) تُسمى الهندسة الفراغية أحيانًا هندسة *ريمان* نسبة إلى جورج ريمان، وهو عالم رياضيات ألماني تُنسب إليه مسلمة ريمان، والتي تنص على أنه عبر نقطة ليست على مستقيم، لا توجد مستقيمات موازية للمستقيم المُعطى.

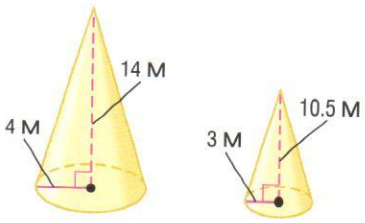
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

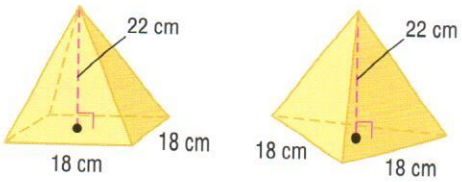
مثال 1

حدد هل كل زوج من المجسمات *متشابه* أم *متطابقٌ* أم *ليس أيًا مما سبق*. إذا كانت المجسمات متشابهة، فاذكر عامل المقياس.

1.



2.



مثال 2

3. هناك أسطوانتان متشابهتان بنصف قطر 15 و 6 سم. ما نسبة مساحة سطح الإسطوانة الصغيرة إلى الكبيرة؟

4. يوجد شكلان كرويان حجمهما 36π سم مكعب و288π سم مكعب. ما نسبة نصف قطر الشكل الكروي الصغير إلى الكبير؟

مثال 3

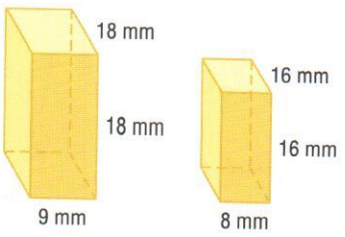
5. **كرات التمارين** تبيع شركة كرات تمارين بحجمين مختلفين. نسبة القطر هي 11 : 15. إذا علمتَ أن قطر الكرة الصغيرة 55 سم، فما حجم الكرة الكبيرة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

التدريب وحل المسائل

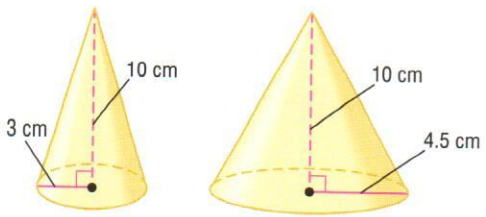
مثال 1

التوافق **حدد هل كل زوج من المجسمات *متشابه* أم *متطابقٌ* أم *ليس أيًا مما سبق*. إذا كانت المجسمات متشابهة، فاذكر عامل المقياس.**

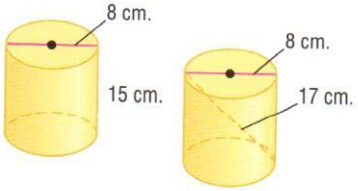
6.



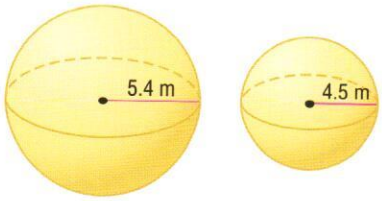
7.



8.



9.



مثال 2

10. شكلان هرميان متشابهان ارتفاعهما المائل 6 و 12 سم. ما نسبة مساحة سطح الهرم الصغير إلى الكبير؟

11. إسطوانتان متشابهتان ارتفاعهما 35 و 25 مترًا. ما نسبة حجم الإسطوانة الكبرى إلى الصغرى؟

12. يوجد شكلان كرويان مساحة سطحهما 100π سم مربع و 16π سم مربع. ما نسبة حجم الشكل الكروي الكبير إلى الصغير؟

13. منشوران سداسيان متشابهان حجمهما 250 و 2 مترًا مكعب. ما نسبة ارتفاع الإسطوانة الكبيرة إلى الصغيرة؟

14. **التحليل البُعدي** منشوران مستطيلان متشابهان ارتفاع المنشور الأول 6 أمتار والآخر 3 أمتار. إذا علمتَ أن حجم المنشور الأول 810 أمتار مكعبة، فما حجم المنشور الآخر؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3

15. **الأغذية** علبة تونة إسطوانية صغيرة نصف قطرها 4 سم وارتفاعها 3.8 سم. وعلبة تونة أكبر ولكن متشابهة نصف قطرها 5.2 سم.

a. ما عامل مقياس الإسطوانتين؟

b. ما حجم العلبة الأكبر؟ قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

16. **الحقائب** هناك حقيبتان على شكل منشورين مستطيلين متشابهين. طول الحقيبة الصغيرة 68 سم وعرضها 47 سم وعمقها 27 سم. وطول الحقيبة الكبيرة 85 سم.

a. ما عامل مقياس المنشورين؟

b. ما حجم الحقيبة الأكبر؟ قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

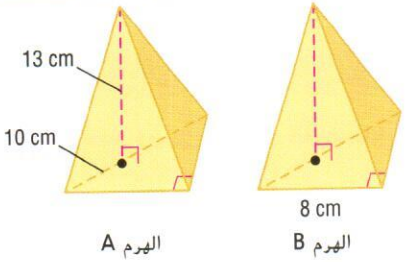
17 **النحت** النحت الموضح على اليسار هو نموذج مكبر لبوق. إذا علمتَ أن طول النحت 7.9 أمتار وأن طول البوق القياسي 0.36 أمتار. فما عامل مقياس النحت إلى البوق القياسي؟

18. الشكلان الهرميان الموضحان متطابقان.

a. ما محيط قاعدة الهرم A؟

b. ما مساحة قاعدة الهرم B؟

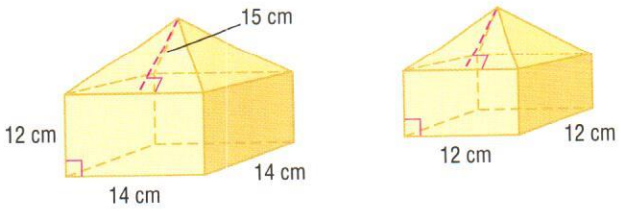
c. ما حجم الهرم B؟



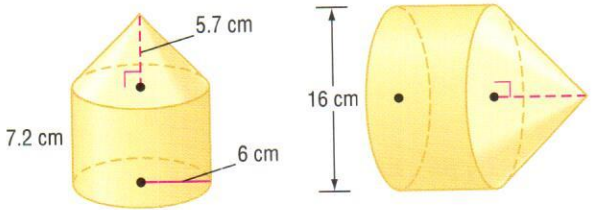
19. **التقنية** لدى رنا وريهام النوع ذاته من مشغّل MP3 ولكن بلونين مختلفين. المشغّلان على شكل منشورين مستطيلين متطابقين. حجم مشغّل رنا 4.92 سم مكعب وعرضه 2.4 سم وعمقه 0.5 سم. فما ارتفاع مشغّل ريهام؟

الاستنتاج المنطقي **كل زوج من المجسمات أدناه متشابه.**

20. ما مساحة سطح المجسم الصغير الموضّح أدناه؟



21. ما حجم المجسم الكبير الموضّح أدناه؟



22. **التحليل البُعدي** هناك أسطوانتان متشابهتان. ارتفاع الإسطوانة الأولى 23 cm وارتفاع الإسطوانة الأخرى 8 cm. إذا علمتَ أن حجم الإسطوانة الأولى $552\pi\ cm^3$. فما حجم المنشور الآخر؟ استخدم 1 cm = 2.54 cm.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

23. **التحليل البُعدي** هناك شكلان كرويان متشابهان. نصف قطر الشكل الكروي الأول 10 أمتار. وحجم الشكل الآخر 0.9 متر مكعب. استخدم 1 in = 2.54 cm لتحديد عامل المقياس من الشكل الكروي الأول إلى الثاني.

24. **الجبر** مخروطان متشابهان حجمهما 343π سم مكعب و 12π سم مكعب. وارتفاع كل مخروط يساوي 3 أضعاف نصف قطره. أوجد نصف قطر المخروطين وارتفاعهما.

25. **الخيام** هناك خيمتان على شكل نصف كرة بأرضية دائرية. نسبة مساحة الأرضية هي 12.25 : 9. إذا علمتَ أن قطر الخيمة الصغيرة 6 متر، فما حجم الخيمة الكبيرة؟ قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

26. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف التشابه. نسبة ارتفاع إسطوانتين متشابهتين هي 2 إلى 3. والمساحة الجانبية للإسطوانة الكبيرة هي 162π سم مربع. وقطر الإسطوانة الصغيرة 8 سم.

a. **لفظي** ما ارتفاع الإسطوانة الكبيرة. اشرح طريقتك.
b. **هندسي** ارسم وميّز الإسطوانتين بالبيانات.
c. **تحليلي** بكم ضعف يفوق حجم الإسطوانة الكبيرة حجم الإسطوانة الصغيرة؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

27. **تحليل الخطأ** قطر الإسطوانة X هو 20 سم وارتفاعها 11 سم. ونصف قطر الإسطوانة Y هو 30 سم وهي مشابهة للإسطوانة X. هل نجحت شيخة أو شيماء في إيجاد ارتفاع الإسطوانة Y؟ اشرح استنتاجك.

شيخة

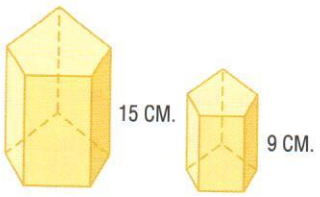
الإسطوانة X: نصف القطر 10، الارتفاع 11
الإسطوانة Y: نصف القطر 30، الارتفاع a
$\frac{10}{30} = \frac{11}{a}$، إذًا $a = 33$.

شيماء

الإسطوانة X: القطر 20، الارتفاع 11
الإسطوانة Y: القطر 20، الارتفاع a
$\frac{20}{20} = \frac{11}{a}$، إذًا $a = 11$.

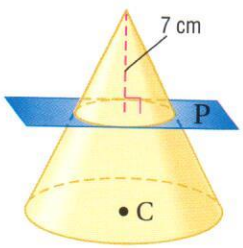
28. **التحدي** نسبة حجم الإسطوانة A إلى الإسطوانة B هي 1:5. الإسطوانة A مشابهة للإسطوانة C بعامل مقياس 1:2 والإسطوانة B مشابهة للإسطوانة D بعامل مقياس 1:3. فما نسبة حجم الإسطوانة C إلى الإسطوانة D؟ اشرح استنتاجك.

29. **الكتابة في الرياضيات** اشرح وجه الارتباط بين مساحتي سطح وحجمي المنشورين المتشابهين الموضحين على اليسار.



30. **مسألة غير محددة الإجابة** صف شكلين هرميين مثلثين غير متشابهين بقاعدتين متشابهتين.

31. **الاستنتاج المنطقي** المستوى P موازي لقاعدة المخروط C. وحجم المخروط فوق المستوى هو $\frac{1}{8}$ حجم المخروط C. أوجد ارتفاع المخروط C.



32. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في تشابه جميع الأشكال الكروية.

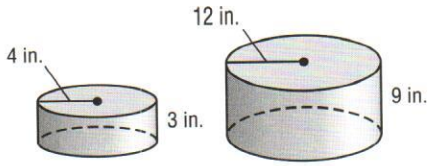
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

33. شكلان كرويان متشابهان نصف قطرهما 20π مترًا و6π أمتار. ما نسبة مساحة سطح الشكل الكروي الكبير إلى الصغير؟

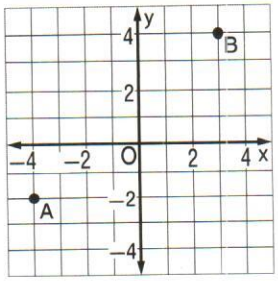
A $\frac{100}{3}$ B $\frac{100}{9}$ C $\frac{10}{3}$ D $\frac{10}{9}$

34. ما عامل مقياس الأشكال المتشابهة؟



F 0.25 H 0.5
G 0.33 J 0.75

35. إجابة قصيرة تمثل النقطة A والنقطة B موقع منزلي ليلى ومنال. إذا علمتَ أن كل وحدة على الخريطة تمثل كيلومترًا واحدًا، فكم تبلغ المسافة بين المنزلين؟



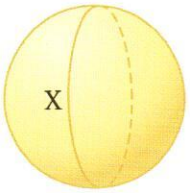
36. SAT/ACT إذا علمتَ أن $\frac{x+2}{3} = \frac{(x+2)^2}{15}$، فما القيمة المحتملة للرمز x؟

A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

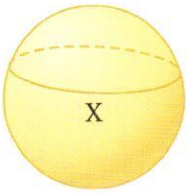
مراجعة شاملة

حدد ما إذا كان الشكل X على كل من الأشكال الكروية الموضحة هو مستقيم في الهندسة الفراغية أم لا. (الدرس 7-10)

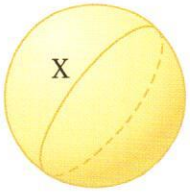
37.



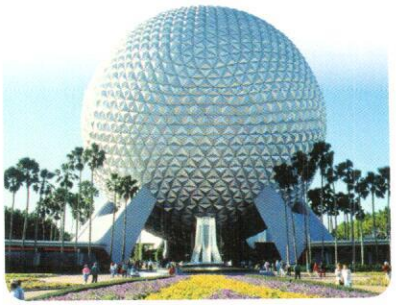
38.



39.



40. الترفيه يعتقد البعض أن مركبة الفضاء على شكل كرة أرضية في إبكوت في عالم ديزني في أورلاندو بولاية فلوريدا تشبه كرة الجولف. المبنى كروي قطره 50.16 مترًا. وقطر كرة الجولف القياسية 3.8 سم تقريبًا. (الدرس 6-10)



a. أوجد حجم المركبة الفضائية على شكل كرة أرضية وقربه إلى أقرب متر مكعب.

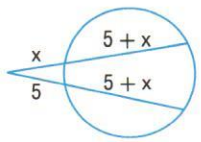
b. أوجد حجم كرة الجولف وقربه إلى أقرب جزء من عشرة.

c. ما عامل مقياس المركبة الفضائية على شكل كرة أرضية وكرة الجولف؟

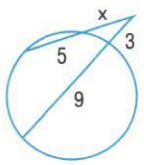
d. ما نسبة حجم المركبة الفضائية على شكل كرة أرضية إلى كرة الجولف؟

أوجد x. وافترض أن القطع المستقيمة التي يبدو أنها مماسات هي مماساتٌ بالفعل.

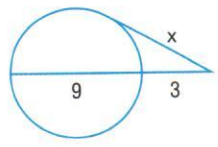
41.



42.



43.



مراجعة المهارات

اكتب كل كسر في صورة رقم عشري وقربه لأقرب جزء من مئة.

44. $\frac{8}{13}$ **45.** $\frac{17}{54}$ **46.** $\frac{11}{78}$ **47.** $\frac{43}{46}$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

10 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

تمثيلات الأشكال ثلاثية الأبعاد (الدرس 1-10)

- يمكن تصنيف المجسمات حسب القواعد والأوجه والحواف والرؤوس.

مساحة السطح للمنشور والإسطوانة (الدرس 2-10)

- مساحة السطح الجانبية لمنشور قائم: $L = Ph$
- مساحة السطح الجانبية لإسطوانة قائمة: $L = 2\pi rh$

مساحة السطح للهرم والمخروط (الدرس 3-10)

- مساحة السطح الجانبية لشكل هرمي: $L = \frac{1}{2}P\ell$
- مساحة السطح الجانبية لمخروط قائم: $L = \pi r\ell$

حجم المنشور والإسطوانة (الدرس 4-10)

- حجم منشور أو إسطوانة: $V = Bh$

حجم الأشكال الهرمية والمخروطية (الدرس 5-10)

- حجم شكل هرمي: $V = \frac{1}{3}Bh$
- حجم مخروط: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

مساحة سطح الأشكال الكروية وحجمها (الدرس 6-10)

- مساحة سطح شكل كروي: $S = 4\pi r^2$
- حجم شكل كروي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

المجسمات المتطابقة والمتشابهة (الدرس 8-10)

- المجسمات المتشابهة لها نفس الشكل ولكن ليس بالضرورة أن يكون لها نفس الحجم.
- المجسمات المتطابقة مجسمات متشابهة عامل مقياسها 1.

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

ارتفاع altitude	وجه جانبي lateral face
محور axis	هندسة غير إقليدية non-Euclidean geometry
حواف القاعدة base edge	مخروط مائل oblique cone
مجسم مركب composite solid	مجسم مائل oblique solid
مجسم متطابق congruent solid	هرم منتظم regular pyramid
مقطع عرضي cross section	مخروط قائم right cone
هندسة إقليدية Euclidean geometry	مجسم قائم right solid
دائرة كبرى great circle	مجسمات متشابهة similar solids
منظور متماثل isometric view	ارتفاع مائل slant height
مساحة جانبية lateral area	هندسة فراغية spherical geometry
حافة جانبية lateral edge	خريطة التضاريس topographic map

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي *صحيحة* أم *خاطئة*. وإذا كانت *خاطئة*، فاستبدل المصطلح الموجود تحته خط لجعل الجملة صحيحة.

1. تتعامل الهندسة الإقليدية مع نظام من النقاط والدوائر الكبرى (المستقيمات) والأشكال الكروية (المستويات).
2. المجسمات المتشابهة لها نفس الشكل تمامًا ولكن ليست بالضرورة بنفس الحجم.
3. المجسم القائم له محور هو كذلك ارتفاع.
4. المنظور المتماثل هو مشاهدة جسم من زاوية.
5. المسافة العمودية من قاعدة شكل هندسي إلى الرأس المقابل أو الضلع الموازي أو السطح الموازي هو الارتفاع.
6. التماثل الدوراني يُسمى كذلك تماثل المرآة.
7. تقاطع وجهين جانبيين متجاورين هو الحافة الجانبية.
8. الهندسة الإقليدية تشير إلى الأنظمة الهندسية التي لا تتوافق مع مسلمة التوازي.
9. المجسم المركب هو شكل ثلاثي الأبعاد مكون من أشكال أبسط.
10. الارتفاع المائل هو ارتفاع كل وجه جانبي لشكل هرمي أو مخروط.

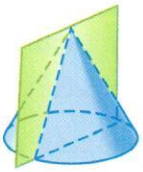
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

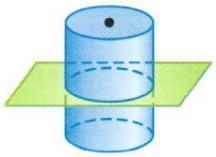
10-1 تمثيلات الأشكال ثلاثية الأبعاد

صِف كل مقطع عرضي.

11.



12.



13. **الكعك** تم قطع قالب الكعك الموضح بالنصف رأسيًا. صف المقطع العرضي من القالب.

مثال 1

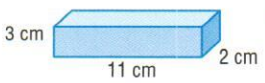
صف المقاطع العرضية الرأسية والأفقية من الأشكال الموضحة أدناه.

المقطع العرضي الرأسي مستطيل والمقطع العرضي الأفقي دائرة.

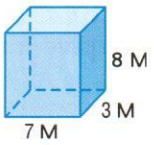
10-2 مساحة السطح للمنشور والإسطوانة

أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل منشور. قرّب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

14.

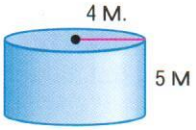


15.

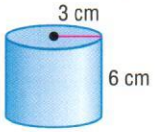


أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل إسطوانة. قرّب لأقرب جزء من العشرة.

16.

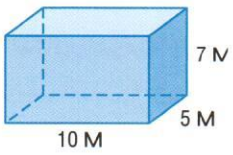


17.



مثال 2

أوجد مساحة سطح المنشور المستطيل.



استخدم المستطيل ذا الأبعاد 10 أمتار في 54 مترًا باعتباره القاعدة.

$S = Ph + 2B$ مساحة سطح المنشور

$= (2 \cdot 10 + 2 \cdot 5)(7) + 2(10 \cdot 5)$ تعويض

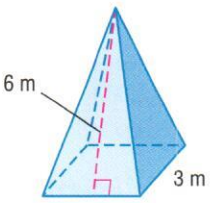
$= 310$ بسّط.

تبلغ مساحة السطح 310 أمتار مربعة.

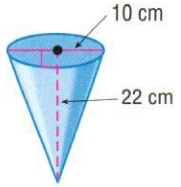
10-3 مساحة السطح للهرم والمخروط

أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل هرم منتظم. وقرّب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

18.

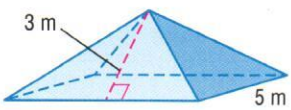


19.



مثال 3

أوجد مساحة سطح الهرم المنتظم. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.



$S = \frac{1}{2}P\ell + B$ مساحة سطح الهرم المنتظم

$= \frac{1}{2}(4 \cdot 5)3 + 5 \cdot 5$ $P = 4 \cdot 5$ 20 أو $\ell = 3$, $B = 4 \cdot 5$

$= 55$ بسّط.

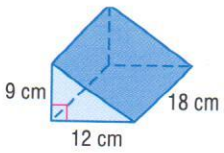
تبلغ مساحة السطح 55 مترًا مربعًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-4 حجم المنشور والإسطوانة

20. حجم الإسطوانة هو $770\ cm^3$. وارتفاعها 5 cm. أوجد نصف قطرها.

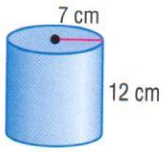
21. أوجد حجم المنشور المثلث.



22. الشاحنات الشاحنة في الأساس منشور مستطيل. الارتفاع الداخلي القياسي لهذه الشاحنات هو 108 سم. إذا علمتَ أن عرض الشاحنة 2 متر وطولها 4 متر، فما حجمها؟

مثال 4

أوجد حجم الإسطوانة.



$V = \pi r^2 h$ حجم الإسطوانة

$= \pi(7)^2(12)$ $r = 7$ و $h = 12$

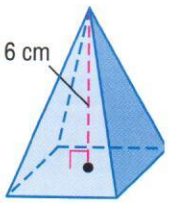
≈ 1847.5 استخدم آلة حاسبة.

الحجم تقريبًا 1847.5 سم مكعب.

10-5 حجم الأشكال الهرمية والمخروطية

23. أوجد حجم مخروط نصف قطره 1 cm وارتفاعه 3.4 cm.

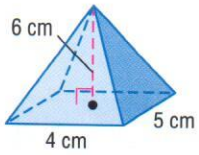
24. أوجد حجم الهرم المنتظم.



25. الهندسة المعمارية طول ضلع قاعدة الهرم الأكبر 230 مترًا وارتفاعه 147 م. أوجد حجم الهرم.

مثال 5

أوجد حجم الهرم.



$V = \frac{1}{3}Bh$ حجم الهرم

$= \frac{1}{3}(4 \cdot 5)(6)$ $B = 4 \cdot 8$ و $h = 6$

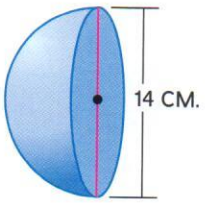
$= 40$ بسّط.

الحجم يساوي 40 سم مكعب.

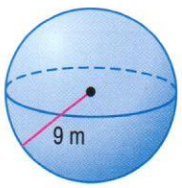
10-6 مساحة سطح الأشكال الكروية وحجمها

أوجد مساحة سطح كل شكل.

26.



27.



أوجد حجم كل شكل كروي أو نصف شكل كروي. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

28. نصف شكل كروي: محيط الدائرة الكبرى $= 24\pi$ m

29. شكل كروي: مساحة الدائرة الكبرى $= 55\pi$ cm2

30. التشييد يتم صب الإسمنت في نصف شكل كروي عرضه 6 cm. فما حجم الإسمنت المستخدم؟

مثال 6

أوجد مساحة سطح الشكل الكروي وحجمه. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

$S = 4\pi r^2$ مساحة سطح الشكل الكروي

$= 4\pi(14)^2$ عوّض.

≈ 2463 استخدم الآلة الحاسبة.

تبلغ مساحة السطح حوالي 2463 سم مربع.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ حجم الشكل الكروي

$= \frac{4}{3}\pi(14)^3$ عوض عن r باستخدام 9.

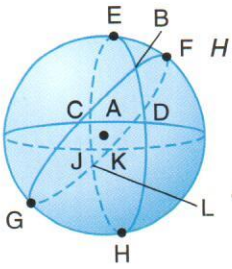
$\approx 11,494\ cm^3$ استخدم الآلة الحاسبة.

الحجم تقريبًا 11,494 سم مكعب.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

10-7 الهندسة الفراغية

قم بتعيين كل مما يلي على الشكل الكروي *A*.

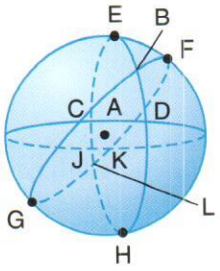


31. مستقيمان يحتويان على النقطة *C*
32. قطعة مستقيمة تحتوي على النقطة *H*
33. مثلث يحتوي على النقطة *B*
34. مستقيمان يحتويان على النقطة *L*
35. قطعة مستقيمة تحتوي على النقطة *J*
36. مثلث يحتوي على النقطة *K*

37. **البلي** حدد ما إذا كان الشكل *y* على الشكل الكروي الموضح هو مستقيم في الهندسة الفراغية أم لا.

مثال 7

قم بتعيين كل مما يلي على الشكل الكروي *A*.



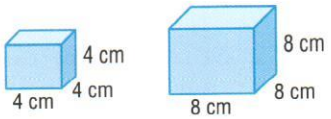
a. مستقيمان يشتملان على النقطة *D*
$\overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{CK}$

b. قطعة مستقيمة تحتوي على النقطة *E*
$\overline{DJ}$

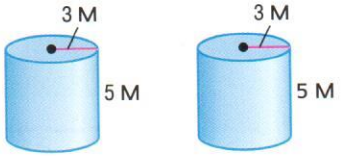
10-8 المجسمات المتطابقة والمتشابهة

حدد هل كل زوج من المجسمات *متشابه* أم *متطابقٌ* أم *ليس أيًا مما سبق*. إذا كانت المجسمات متشابهة، فاذكر عامل المقياس.

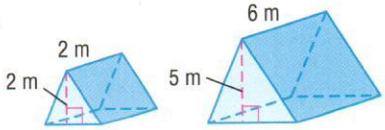
38.



39.



40.



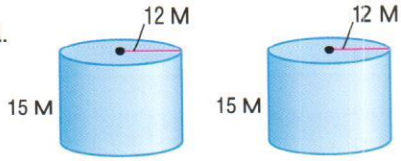
41.

42. **النماذج** تم عمل نموذج سيارة لأحد الهواة بحيث يساوي 1 سم في النموذج 0.7 متر في السيارة الحقيقية. إذا كان ارتفاع النموذج 2 سم، فما ارتفاع السيارة الحقيقية؟

مثال 8

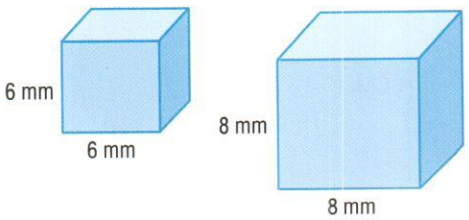
حدد هل كل زوج من المجسمات متشابه، أم متطابقٌ، أم ليس أيًا مما سبق. إذا كانت المجسمات متشابهة، فاذكر عامل المقياس.

a.



نسب القياسات المتناظرة متساوية وعامل المقياس هو 1:1، إذًا المجسمات متطابقة.

b.



نسبة العرض: $\frac{6}{8} = 0.75$

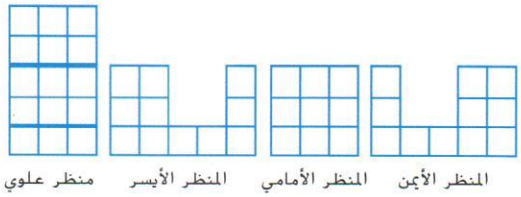
نسبة الارتفاع: $\frac{6}{8} = 0.75$

نسب القياسات المتناظرة متساوية، إذًا الأشكال الهرمية متشابهة. عامل المقياس 4:3. حيث إن عامل المقياس ليس 1:1، فالمجسمات ليست متطابقة.

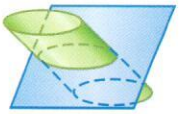
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10 تدريب على الاختبار

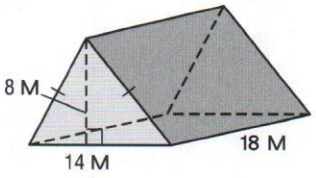
1. استخدم ورقة منقطة متساوية القياس والرسوم المتعامدة لرسم مجسم.



2. صف المقطع العرضي.



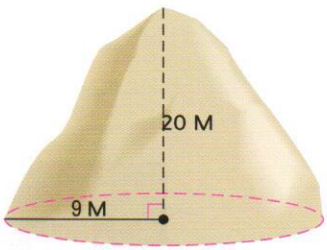
3. **إجابة قصيرة** أوجد مساحة سطح نموذج الخيمة. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



4. **الشموع** عرض شمعة على شكل عمود دائري هو 2.8 سم وطولها 6 سم. ما المساحة الجانبية للشمعة ومساحة سطحها؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

5. **الشاي** كيس شاي على شكل هرم منتظم. كل حافة قاعدة 4 سم والارتفاع المائل 5 سم. فما مساحة سطح كيس الشاي بالسنتيمتر المربع؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

6. **خلية النحل** قدر المساحة الجانبية لغرفة خلايا النحل التركية ومساحة سطحها؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.



7. أوجد حجم الشمعة في التدريب 4. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

8. أوجد حجم كيس الشاي في التدريب 5. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

9. **الأرض** نصف قطر الأرض تقريبًا 6400 كم. ما مساحة سطح الأرض وحجمها؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

10. **السوفتبول** محيط كرة السوفتبول الموافقة للوائح 30.5 سم. فما حجمها؟

قم بتعيين كل مما يلي على الشكل الكروي *A*.

11. مستقيمان يشتملان على النقطة *S*

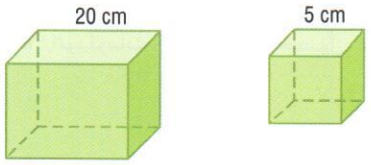
12. قطعة مستقيمة تحتوي على النقطة *L*

13. مثلث

14. مستقيمان يشتملان على النقطة *D*

15. قطعة مستقيمة تحتوي على النقطة *P*

16. هل هذان المكعبان *متشابهان* أم *متطابقان* أم *لا شيء مما سبق*؟ اشرح استنتاجك.



17. أسطوانتان متشابهتان ارتفاعهما 75 و 25 مترًا. ما نسبة حجم الإسطوانة الكبيرة إلى الصغيرة؟

18. **الخبز** قطعتان من عجين البسكويت على شكل كروي نصف قطرهما 3 و5 سم على التوالي. تم دمج القطعتين لتكوين قطعة كروية أكبر من العجين. ما نصف القطر التقريبي لكرة العجين الجديدة؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

19. **الجبر** منشور مستطيل طول ضلعي قاعدته x و$x + 3$ وارتفاعه $2x$. أوجد مساحة سطح المنشور وحجمه.

20. **النقل** طول مخروط حركة المرور 48 سم ونصف قطره 13 سم.

a. أوجد المساحة الجانبية.

b. أوجد مساحة السطح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 10 التحضير للاختبارات المعيارية

الرسم

الرسم يمكن أن يكون طريقة مفيدة للغاية لتصور كيفية حل مسألة. ارسم الرسومات على قصاصة ورقية أو في كراسة الاختبار (إذا كان مسموحًا بذلك). ولا تضع أي علامات على ورقة الإجابة بخلاف إجاباتك.

إستراتيجيات الرسم

الخطوة 1

اقرأ المسألة بعناية.

اسأل نفسك:

- ما المطلوب مني حله؟ وما المعطيات؟
- هل سيساعدني الرسم على تصور كيفية حل المسألة؟

الخطوة 2

ارسم الرسمة وميّزها بالأسماء.

- ارسم الرسمة بأكبر قدر ممكن من الوضوح والدقة.
- ضع البيانات على الرسمة بعناية. واحرص على تضمين جميع المعطيات الواردة بالمسألة.
- زود الرسمة بالمعلومات التي يمكن الحصول عليها من الحسابات الوسيطة.

مثال على الاختبار المعياري

حل المسألة أدناه. سيتم منح الدرجات على الإجابات باستخدام معايير رصد درجات الإجابات القصيرة الموضحة.

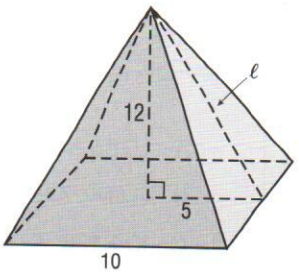
شكل هرمي منتظم طول ضلع قاعدته المربعة 10 سم وارتفاعه 12 سم. فما مساحة السطح الإجمالية للشكل الهرمي؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

معايير رصد الدرجات	
المعايير	**النقاط**
درجة كاملة: الإجابة صحيحة وتم تقديم شرح كامل يوضح كل خطوة.	2
درجة جزئية: • الإجابة صحيحة ولكن التفسير غير كامل. • الإجابة خاطئة ولكن التفسير كاملاً.	1

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اقرأ المسألة بعناية. تم ذكر أبعاد الشكل الهرمي الرباعي وطُلب منك إيجاد مساحة السطح. قد يساعدك الرسم في تصور المسألة وكيفية حلها.

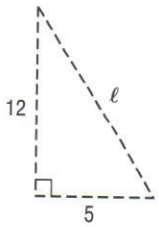
مثال على إجابة من نقطتين:



استخدم مبرهنة فيثاغورس لإيجاد الارتفاع المائل، ℓ.

$$\ell^2 = 5^2 + 12^2$$
$$\ell^2 = 169$$
$$\ell = 13$$

أوجد المساحة الجانبية.



$$L = \frac{1}{2}P\ell$$
$$= \frac{1}{2}(40)(13)$$
$$= 260$$

اجمع مساحة القاعدة المربعة.

$$S = 260 + 100 = 360$$

تبلغ مساحة السطح الإجمالية حوالي 360 سم مربع.

تم بوضوح ذكر الخطوات والحسابات والاستنتاج. وقد وصل الطالب أيضًا إلى الإجابة الصحيحة. إذًا، تستحق هذه الإجابة النقطتين بالكامل.

التمارين

حل كل مسألة. اكتب الحل هنا. سيتم منح الدرجات على الإجابات باستخدام معايير رصد درجات الإجابات القصيرة الموضحة في بداية الدرس.

1. مخروط دائري قائم ارتفاعه المائل ضعف نصف قطره. ومساحته الجانبية تقريبًا 569 ملّيمترًا مربعًا. فما نصف قطره؟ قرّب النتيجة إلى أقرب ملّيمتر صحيح.

2. من نقطة واحدة في الفناء الخلفي، تقيس منى وتضع علامة لمسافتي 18 و 30 مترًا باستخدام وتدين لضلعين من حديقتها. كم يجب أن تكون المسافة بين الوتدين لتكون الحديقة مستطيلة الشكل؟

3. يبعد قارب عابر مسافة 310 مترات عن قاعدة فنار. زاوية الانخفاض من قمة الفنار هي °24. فما ارتفاع الفنار لأقرب جزء من عشرة من المتر؟

4. شكل سداسي منتظم محاط بدائرة قطرها 12 سم. ما مساحة الشكل السداسي بالضبط؟

5. يصنع إبراهيم نموذج صاروخ لمشروع معرض العلوم. وقام بتثبيت مقدمة مخروطية على جسم أسطواني لتكوين هيكل الصاروخ. قطر الصاروخ 4 سم والارتفاع الإجمالي (بما في ذلك المقدمة المخروطية) 45 سم. وطول المقدمة المخروطية 7 سم. فما حجم الصاروخ؟ قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتيمتر المكعب.

6. يريد عبد الرحمن قياس ارتفاع قمة اللوحة الخلفية لحلقة كرة السلة. عند الساعة 4:00، يكون طول ظل عمود سور ارتفاعه 1 متر هو 20 سم، وطول ظل اللوحة الخلفية 79 سم. فما ارتفاع قمة اللوحة الخلفية؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 10
تدريب على الاختبار المعياري
تراكمي

الاختيار من متعدّد

اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. كان الارتفاع الأصلي للهرم الأكبر في الجيزة بمصر تقريبًا 148 مترًا. وكانت قاعدة الهرم مربعة طول ضلعها 230 مترًا. فكم كان الحجم الأصلي للهرم؟ قرّب إلى أقرب عدد كلي.

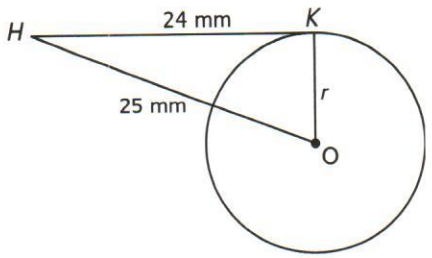
A 1,786,503 m^3

B 2,609,733 m^3

C 104,128,752 m^3

D 122,716,907 m^3

2. إذا كان $\overline{HK}$ مماس للدائرة O، فما نصف قطر الدائرة؟



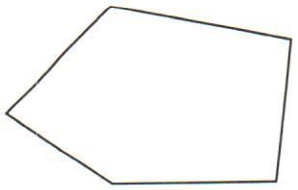
F 7 mm

G 8 mm

H 9 mm

J 10 mm

3. ما مجموع الزوايا الداخلية للشكل؟



A 450°

B 540°

C 630°

D 720°

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 1 يمكنك إقصاء بعض الإجابات غير المنطقية من خلال التقدير أولاً. الخياران C و D أكبر مما ينبغي.

4. قام عبد الرحيم بإجراء استطلاع لآراء 50 طالبًا ووجد أن 14 منهم يقضون أكثر من ساعتين كل ليلة في عمل الواجبات المنزلية. إذا كان هناك 421 طالبًا في مدرسة عبد الرحيم، فتوقع عدد الطلاب الذين يقضون أكثر من ساعتين كل ليلة في عمل الواجبات المنزلية.

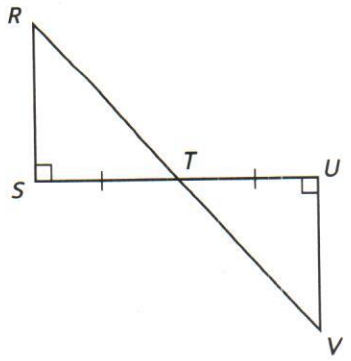
F 118

G 124

H 125

J 131

5. $\overline{RS}$ يمثل ارتفاع جبل ميتشل. أعلى نقطة في ولاية كارولينا الشمالية. إذا علمتَ أن مترًا $TU = 1528$، و مترًا $UV = 2037$ و مترًا $TV = 2547$، فاستخدم نظرية ASA لإيجاد ارتفاع جبل ميتشل.



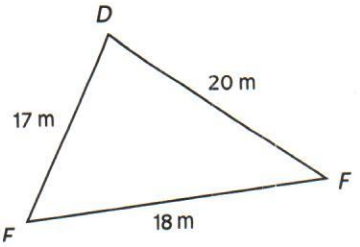
A 1528 m

B 2037 m

C 2181 m

D 2547 m

6. مثلث DEF موضح أدناه.



أي عبارة بشأن هذا المثلث صحيحة؟

F $m\angle F > m\angle D$

G $m\angle E > m\angle F$

H $m\angle D < m\angle F$

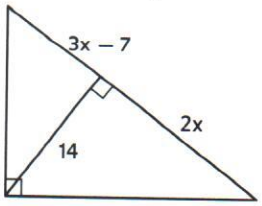
J $m\angle E < m\angle D$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الإجابة التصيرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

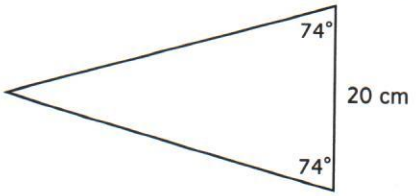
7. ما قيمة x في الشكل التالي؟



A 5 **C** 8

B 7 **D** 10

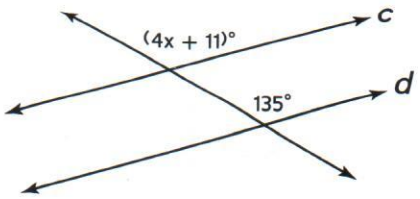
8. إجابة شبكية ما محيط المثلث متساوي الساقين لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر؟



9. حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة *أحيانًا* أم *دائمًا* أم غير صحيحة على *الإطلاق*. اشرح.

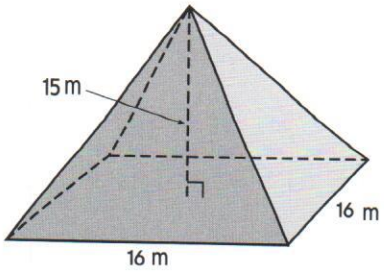
يقع ملتقى ارتفاعات المثلث عند رأس الزاوية القائمة.

10. إجابة شبكية إذا علمتَ أن: $c \parallel d$



ما قيمة x في الشكل؟

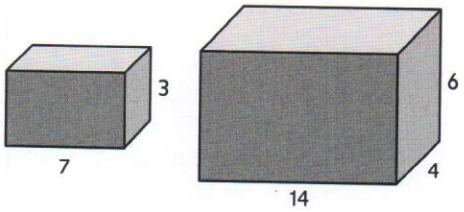
11. ما المساحة الجانبية للهرم الرباعي أدناه؟ قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. اكتب الحل هنا.



الإجابة الموسعة

دوّن إجاباتك على ورقة. واكتب الحل هنا.

12. المنشوران أدناه شكلان متشابهان.



a. ما عامل المقياس من المنشور الأصغر إلى الأكبر؟

b. ما حجمي المنشورين؟

c. بكم ضعف يفوق حجم المنشور الأكبر المنشور الأصغر؟

d. افترض وجود شكل مجسم حجمه 40 وحدة مكعبة. إذا تم تغيير أبعاده باستخدام عامل مقداره 1.5، فكم سيكون حجم الشكل الجديد؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 11

الاحتمال والقياس

السابق

- لقد تعلمت التجارب والنتائج والأحداث، وأوجدت أيضًا الاحتمالات في الأحداث البسيطة.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - تمثيل الفضاءات العينية.
  - استخدام التباديل والتوافيق في الاحتمالات.
  - إيجاد الاحتمالات باستخدام الطول والمساحة.
  - إيجاد احتمالات الأحداث المركبة.

لماذا؟

- **الألعاب** يمكن استخدام الاحتمال في توقع مدى إمكانية وقوع نتائج مختلفة للمباريات التي نخوض.

Chapter sourced from Integrated Math II Chapter 13 © 2012 McGraw-Hill Education
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الاستعداد للوحدة

1 خيار الكتاب المدرسي

حِل التدريب السريع أدناه وعد إلى المراجعة السريعة للمساعدة.

تدريب سريع

بسّط.

1. $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}$
2. $\frac{7}{9}+\frac{2}{6}$
3. $\frac{2}{5}+\frac{7}{8}$
4. $\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{8}$
5. $\frac{3}{7}\cdot\frac{21}{24}$
6. $\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}$

7. **كرة القدم** يحضر أحد فرق كرة القدم في المباريات مبرّد ماء سعة 36 لترًا. كم كوبًا سعة 250 ملّيلترًا يمكن أن يشرب الفريق في المباراة؟

تم رمي حجر نرد، أوجد احتمال كل نتيجة.

8. P (أكبر من 1)
9. P (فردي)
10. P (أقل من 2)
11. P (6 أو 1)

12. **الألعاب** يلعب صديقان مباراة بنرد له 20 وجهًا وعليه كل الحروف الهجائية الإنجليزية ما عدا حروف Q و U و V و X و Y و Z. فما احتمال سقوط النرد على حرف متحرك؟

يُظهر الجدول نتائج تجربة يدار فيها القرص الدوار المرقم من 1 إلى 4.

النتيجة	الإحصاء	التكرار
1	|||	3
2	|| 𝍸	7
3	| 𝍸	6
4	||||	4

13. ما الاحتمال التجريبي لتوقف القرص على العدد 4؟
14. ما الاحتمال التجريبي لتوقف القرص على عدد فردي؟
15. ما الاحتمال التجريبي لتوقف القرص على عدد زوجي؟

مراجعة سريعة

مثال 1

بسّط $\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{9}$.

اضرب البسوط واضرب المقامات. $\frac{6}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6\cdot1}{9\cdot2}$

بسّط. $=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$

مثال 2

عند رمي حجر نرد، ما احتمال ظهور عدد أقل من 5؟

$$P(\text{أقل من } 5)=\frac{\text{عدد النتائج المفضلة}}{\text{عدد النتائج المحتملة}}$$

$$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

احتمال لفه أقل من خمس مرات هي $\frac{2}{3}$ أو 67%.

مثال 3

تم تدوير قرص دوار مرقم من 1 إلى 6. أوجد الاحتمال التجريبي لتوقف القرص على 5.

النتيجة	الإحصاء	التكرار
1	||||	4
2	|| 𝍸	7
3	||| 𝍸	8
4	||||	4
5	||	2
6	𝍸	5

$$P(5)=\frac{\text{عدد مرات دوران العدد 5}}{\text{إجمالي عدد النتائج}}=\frac{2}{30}$$

الاحتمال التجريبي لتوقف القرص على العدد 5 هو $\frac{2}{30}$ أو 7%.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

البدء في هذه الوحدة

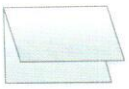
سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدةٍ أثناء دراستك للوحدة 11. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك.

المطويات® منظّم الدراسة

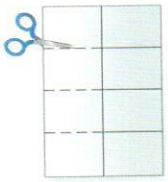
الاحتمال والقياس ابتكر المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظات الوحدة 11 عن الاحتمال وابدأ بورقة واحدة.

1 **اطوِ** ورقة بالطول.

2 **اطوِ** من المنتصف مرتين أخريين.



3 **قص** كل طبقة على العمود الأيسر.



4 **سَمِّ** الطيّات كما هو موضح.

المفردات الجديدة

sample space	الفضاء العيني
tree diagram	المخطط الشجري
permutation	تباديل
factorial	مضروب
circular permutation	التباديل الدائرية
combination	توافيق
geometric probability	الاحتمال الهندسي
probability model	نموذج الاحتمال
simulation	المحاكاة
random variable	متغير عشوائي
expected value	قيمة التوقع
compound events	الأحداث المركبة
independent events	الأحداث المستقلة
dependent events	أحداث غير مستقلة
conditional probability	احتمال مشروط
probability tree	شجرة الاحتمال
mutually exclusive	المنفصلة
complement	متممة

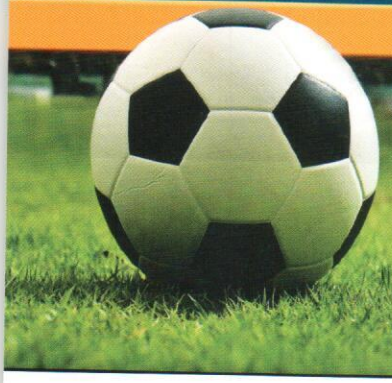
مراجعة المفردات

الحدث نتيجة واحدة أو أكثر لتجربة ما

التجربة موقف يعتمد على الحظ، مثل رمي القطعة المعدنية أو لف النرد

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 11-1 تمثيل الفضاءات العينية



السابق
- لقد حسبت الاحتمال التجريبي.

الحالي
1. استخدام القوائم والجداول والمخططات الشجرية لتمثيل الفضاء العيني.
2. استخدام مبدأ العد الأساسي لعد النتائج.

لماذا؟
- في مباراة كرة القدم، يرمي حكم المباراة قطعة معدنية عادلة لتحديد الفريق الذي يملك الكرة أولاً. وقد تقع القطعة المعدنية على الصورة أو الكتابة.

المفردات الجديدة
- الفضاء العيني sample space
- المخطط الشجري tree diagram
- تجربة ثنائية المراحل two-stage experiment
- تجربة متعددة المراحل multi-stage experiment
- مبدأ العد الأساسي Fundamental Counting Principle

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.

1 تمثيل فضاء عيني

لقد تعلمت ما يلي عن التجارب والنتائج والأحداث.

تعريف	مثال
التجربة هي موقف ينطوي على فرصة تؤدي إلى استنتاجات تسمى *نتائج*.	في الموقف المذكور أعلاه، التجربة هي رمي القطعة المعدنية.
النتيجة هي استنتاج لأداء معين أو تجريب لتجربة ما.	النتائج المحتملة هي سقوط القطعة المعدنية إما على الصورة وإما على الكتابة.
الحدث هو نتيجة واحدة أو أكثر لتجربة معينة.	ومن بين أحداث تلك التجربة سقوط القطعة المعدنية على الكتابة.

الفضاء العيني للتجربة هو مجموعة جميع النتائج المحتملة. ويمكنك تمثيل الفضاء العيني باستخدام قائمة منظمة أو جدول أو **مخطط شجري**.

مثال 1 تمثيل الفضاء العيني

تم إلقاء قطعة نقد معدنية مرتين. مثّل الفضاء العيني لهذه التجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.

مع كل رمية للقطعة المعدنية، توجد نتيجتان محتملتان؛ صورة «H» أو كتابة «T».

الجدول

أدرج نتائج الرمية الأولى في العمود الأيسر ونتائج الرمية الثانية في الصف العلوي.

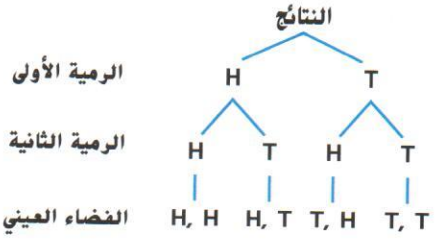
النتائج	صورة	كتابة
صورة	H, H	H, T
كتابة	T, H	T, T

القائمة المنظمة

اقرن كل نتيجة محتملة من الرمية الأولى مع كل النتائج المحتملة من الرمية الثانية.

H, H
H, T
T, H
T, T

المخطط الشجري



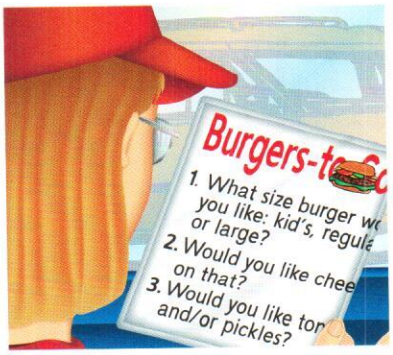
تمرين موجّه

1. تم إلقاء قطعة نقد معدنية مرتين، ثم تم تدوير مكعب الأعداد. مثّل الفضاء العيني لهذه التجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التجربة في مثال واحد مثال على **التجربة ثنائية المراحل**. وهي تجربة تُنفذ على مرحلتين أو عبر حدثين. وتُسمى التجارب التي تتم على أكثر من مرحلتين باسم **التجارب متعددة المراحل**.

مثال 2 من الحياة اليومية المخططات الشجرية متعددة المراحل

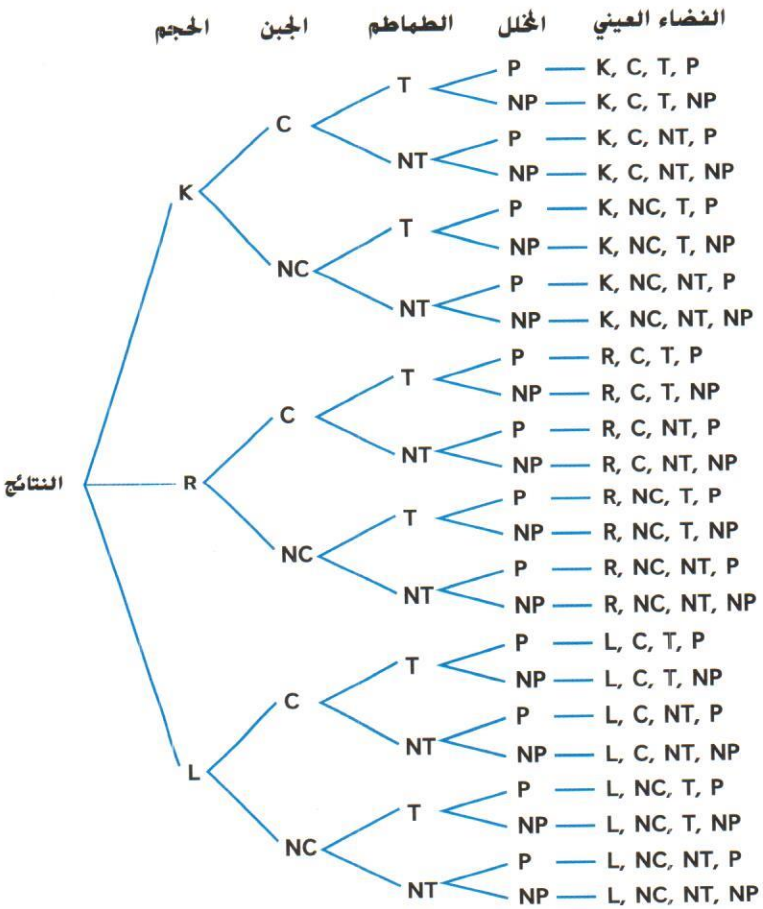


شطائر اللحم البقري عند تسجيل طلب شطائر اللحم البقري، تسأل سهيلة كل عميل الأسئلة المذكورة في السيناريو الموضح أدناه. صمم مخططًا شجريًا لتمثيل الفضاء العيني لطلبات شطائر اللحم البقري.

الفضاء العيني نتاج أربع مراحل.

- حجم الشطيرة (K أو R أو L)
- الجبن (C أو NC)
- الطماطم (T أو NT)
- المخللات (P أو NP)

ارسم مخططًا شجريًا بالمراحل الأربع.



تمرين موجّه

2. **الموسيقى** يمكن لياسمين أن تختار مُشغل MP3 صغيرًا بقرص صلب سعته 4 أو 8 جيجابايت باللون الأسود أو الأخضر المزرق أو الرمادي الفاتح أو الأحمر. ويمكنها أيضًا أن تحصل على واصلة و/أو مشبك يمكنها من التحرك. صمم مخططًا شجريًا لتمثيل الفضاء العيني لهذا الموقف.

انتبه!

الاستنتاج المنطقي تدل كلمة و/أو في السؤال الثالث من المثال 2 على وجود مرحلة إضافية في عملية الطلب. عند عمل مراحل منفصلة لاختيار الطماطم أو عدم اختيارها، أو اختيار المخللات أو عدم اختيارها، فإنك تسمح بإمكانية اختيار *كل* من الطماطم والمخللات.

قراءة في الرياضيات

ترميز المخطط الشجري

اختر ترميزًا للنتائج في المخططات الشجرية للحد من الالتباس. في المثال 2، ترمز *C* إلى *الجبن*، بينما ترمز *NC* إلى *بلا جبن*. وبالمثل، فإن *NT* و *NP* ترمزان إلى *بلا طماطم* و*بلا مخللات*، على التوالي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 مبدأ العد الأساسي

في بعض التجارب ثنائية المراحل أو متعددة المراحل، لا يكون ذكر الفضاء العيني بأكمله عمليًا أو ضروريًا. لإيجاد عدد النتائج المحتملة، يمكنك استخدام **مبدأ العد الأساسي**.

نصيحة دراسية

قاعدة الضرب أحيانًا يسمى مبدأ العد الأساسي *قاعدة الضرب للعد* أو *مبدأ العد*.

المفهوم الأساسي مبدأ العد الأساسي

الشرح يمكن إيجاد عدد النتائج المحتملة في فضاء عيني معين عن طريق ضرب عدد النتائج المحتملة من كل مرحلة أو حدث.

الرموز في إحدى تجارب المرحلة k افترض أن

n_1 = عدد النتائج المحتملة للمرحلة الأولى.

n_2 = عدد النتائج المحتملة للمرحلة الثانية بعد حدوث المرحلة الأولى.

⋮

n_k = عدد النتائج المحتملة للمرحلة k بعد حدوث المراحل $k-1$ الأولى.

وبالتالي تكون النتائج الكلية المحتملة للمرحلة k من التجربة هي

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام نظام العد الأساسي

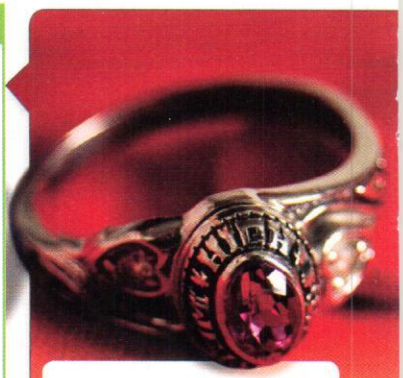
خواتم الصف اختارت وفاء المقاس والشكل العام لخاتم الصف، ويجب أن تختار الآن من خيارات الخواتم الموضحة. كم خاتمًا مختلفًا يمكن أن تبتكر وفاء عند اختيار الشكل والمقاس؟

خيارات الخاتم	عدد الاختيارات
المعادن	10
اللمسات النهائية	2
ألوان الحجر	12
ألوان القطع	5
جانب 1 شعارات النشاط	20
جانب 2 شعارات النشاط	20
أشكال الشريط	2

استخدم نظام العد الأساسي.

النتيجة المحتملة	أشكال الشريط	جانب 2 شعارات	جانب 1 شعارات	ألوان القطع	ألوان الحجر	اللمسات النهائية	المعادن
960,000 =	2 ×	20 ×	20 ×	5 ×	12 ×	2 ×	10

إذًا، بإمكان وفاء أن تبتكر 960,000 خاتمًا مختلفًا.



الربط بالحياة اليومية

أكثر من 95% من طلاب المدارس الثانوية يطلبون شكلاً تقليديًا من الخواتم، يتضمن اسم المدرسة وفصًا وسنة التخرج.

المصدر: Fort Worth *Star-Telegram*

تمرين موجّه

3. أوجد عدد النتائج المحتملة في كل موقف.

A. ورقة الإجابة الموضحة كاملة.

B. يُلف النرد أربع مرات.

C. **الأحذية** يتوفر زوج من الأحذية النسائية بكل المقاسات من 5 إلى 11 بألوان الأحمر أو الأزرق الفاتح أو البني أو الأسود. وقد تكون تلك الأحذية مصنوعة من الجلد أو الجلد المزأبر وتتوفر بثلاثة أعراض مختلفة.

ورقة الإجابة

1. (A) (B) (C) (D)
2. (A) (B) (C) (D)
3. (A) (B) (C) (D)
4. (A) (B) (C) (D)
5. (A) (B) (C) (D)
6. (A) (B) (C) (D)
7. (T) (F)
8. (T) (F)
9. (T) (F)
10. (T) (F)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

التحقق من فهمك

مثال 1

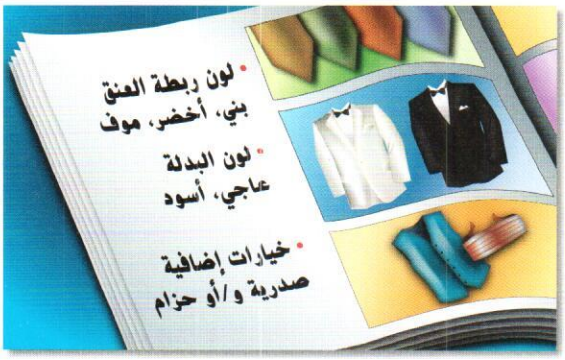
مثل الفضاء العيني لكل تجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.

1. يمكن للاعب مع كل ضربة بالمضرب إما أن يصل إلى قاعدة وإما أن يخرج.

2. باع مازن معظم تذاكر مهرجان الخريف السنوي في مدرسته. وكمكافأة له يختار مرتين من حقيبة بها بطاقات مكتوب عليها «عصير مجاني» أو «دفتر ملاحظات مجاني».

مثال 2

3. **حُلل الزفاف** يؤجر أيوب حلة زفاف من الكتالوج الموضح. صمم مخططًا شجريًا يمثل الفضاء العيني لهذا الموقف.



مثال 3

أوجد عدد النتائج المحتملة في كل موقف.

4. يشتري سعيد هاتفًا ويجب أن يختار خطة على فرض اختيار واحد من الخيارات التالية.

خيارات الهاتف النقال	عدد الاختيارات
شكل الهاتف	15
باقة الدقائق	5
إمكانية الوصول إلى الإنترنت	3
إرسال رسائل	4
الضمان	2

5. تبتكر هيام قائمة جديدة لمطعمها. على فرض تم طلب كل عنصر.

محتويات القائمة	عدد الاختيارات
المقبلات	8
الحساء	4
السلاطة	6
الطبق الرئيسي	12
الحلوى	9

التدريب وحل المسائل

مثال 1

الاستنتاج **مثّل الفضاء العيني لكل تجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.**

6. هناء طالبة في السنة قبل الأخيرة وأمامها خيار للعامين القادمين إما أن تمارس لعبة كرة اليد وإما أن تمارس السلة خلال فصل الشتاء.

7. صفان مختلفان من صفوف التاريخ في مدينة نيويورك يأخذان جولة إما إلى سميثسونيان وإما إلى متحف لتاريخ الطبيعة.

8. أمام محمود فرصة للسفر للخارج باعتباره طالب تبادل أجنبيًا أثناء العامين الأخيرين من كليته. ويمكنه الاختيار بين الإكوادور وإيطاليا.

9. أنشئ نادٍ جديد، ويجب اختيار موعد للاجتماع. أوقات الاجتماع المحتملة هي الاثنين أو الخميس في الساعة 5:00 أو 6:00 مساءً.

10. اختبار بعدة نسخ له تمارين بالمثلثات. يوجد في التدريب الأول مثلث منفرج أو حاد. ويوجد في التدريب الثاني مثلث متساوي الساقين أو مثلث مختلف الأضلاع.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

11. **الرسم** يعمل الطلاب في حصة الرسم على إنجاز مشروعين ويمكنهم استخدام نوع واحد من نوعي الرسوم المختلفة في كل مشروع. مثّل الفضاء العيني في هذه التجربة بعمل قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.

مثال 2

ارسم مخططًا شجريًّا لتمثيل الفضاء العيني لكل موقف.

12. **السنبوسك** على منضدة السنبوسك، يتاح للزبائن خيار وضع الحبوب أو التونة أو الدجاج مع الأرز أو بدون أرز وجبن و/أو صلصة.

13. **النقل** ينوي منصور شراء مركبة وأمامه خيارات سيارة أو شاحنة أو شاحنة صغيرة كسوتها الداخلية من الجلد أو القماش وبها مشغل CD و/ أو سقف مفتوح.

14. **قطع الحلوى** ذهبت هناء وصديقاتها إلى مطعم بيع الزبادي المثلج به علامة تشبه العلامة الموضحة على اليمين. صمم مخططًا شجريًا لجميع التوافيق المحتملة من أقماع المثلجات بالفول السوداني و/ أو المكسرات.

مثال 3

المثابرة في تدريب 18-15، أوجد عدد النتائج المحتملة لكل موقف.

15. يترشح في انتخابات اتحاد طلاب السنة قبل الأخيرة 3 أشخاص على منصب السكرتارية و 4 على منصب أمانة الصندوق و 5 أشخاص على منصب نائب الرئيس و 2 على منصب رئيس الصف.

16. عند التسجيل في الحصص أثناء الفصل الدراسي الأول من الدراسة بالكلية، كان أمام محمود 4 خانات يملؤها باختيار 4 صفوف للأدب وصفين للرياضيات و 6 للتاريخ و 3 للتصوير.

17. تختار هداية واحدة من بين 6 كليات و 5 تخصصات أساسية وتخصصين فرعيين و 4 أندية.

18. تمتلك هالة مطعمًا تشتمل قائمة الغداء فيه على أربعة أطباق: مقبلات، وطبق رئيسي، وحلوى، ومشروب. ويوجد 5 خيارات للمقبلات، و 4 خيارات للطبق الرئيسي، و 3 خيارات للحلوى، و 6 خيارات للمشروبات.

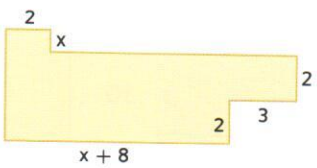
19. **الفنون** في واجب حصة الفنون. أعطى أستاذ ماجد طلابه اختيارات لشكلين رباعيين ليستخدموهما كقاعدة. ويجب أن تكون أضلاع أحدهما متساوية، بينما يجب أن يكون هناك ضلعان متوازيان على الأقل في الشكل الآخر. مثل الفضاء العيني من خلال عمل قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.

20. **الإفطار** يقدم مطعم في أحد الفنادق بيض الأومليت مع اختيار الخضراوات أو اللحم البقري أو الدجاج التي تقدم مع البطاطس المهروسة المقلية أو الفريك أو العيش المحمص.

a. كم عدد النتائج المختلفة المتوفرة من الأومليت وطبق جانبي إذا قدم طبق الأومليت مع الخضراوات وحدها؟

b. أوجد عدد النتائج المحتملة للأومليت بالخضراوات إذا كان بإمكانك الحصول على أي من الخضراوات أو كلها على أي طبق أومليت.

21. **الأشكال المركبة** يحسب فهد مساحة الشكل المركب الموجود على اليسار. بكم طريقة مختلفة يمكنه فعل ذلك؟



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

22. **النقل** اشترت نورا قفل دراجة جديد يعرض أربعة أعداد، لكل عدد منها توافيق من 0 إلى 9.
   a. كم عدد التوافيق الممكنة إن لم يكن هناك قيود على عدد المرات التي يمكن لنورا استخدام كل عدد فيها؟
   b. كم عدد التوافيق الممكنة إذا كان بإمكان نورا استخدام كل عدد مرة واحدة؟

23. **الألعاب** تلعب نهلة ونسرين لعبة لوحية يُرمى نردان فيها في كل دور.
   a. كم عدد النتائج التي تؤدي إلى مجموع عدد 8 في الدور الواحد؟
   b. كم عدد النتائج التي تؤدي إلى مجموع فردي؟

24. **التمثيلات المتعددة** ستستكشف في هذه المسألة تتابع الأحداث. في المرحلة الأولى من التجربة ثنائية المرحلة، قمت بتدوير القرص الدوار 1 الموضح أدناه. إذا كانت النتيجة أحمر، يمكنك قلب القطعة المعدنية. إذا كانت النتيجة أصفر، تقوم بتدوير النرد. إذا كانت النتيجة أخضر، يمكنك تدوير مكعب الأعداد. وإذا كانت النتيجة أزرق، يمكنك تدوير القرص الدوار 2.

القرص الدوار 1

القرص الدوار 2

   a. **الهندسي** صمم مخططًا شجريًا لتمثيل الفضاء العيني في هذه التجربة.
   a. **المنطقي** صمم مخطط فن لتمثيل النتائج المحتملة في هذه التجربة.
   c. **التحليلي** كم عدد النتائج المحتملة؟
   d. **اللغظي** هل يمكنك استخدام مبدأ العد الأساسي في تحديد عدد النتائج؟ فسّر.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

25. **التحدي** يشتمل صندوق على n من الأشياء المختلفة. إذا اخرجت ثلاثة أشياء من الصندوق، بحيث ت خرج واحدًا في كل مرة، دون أن تعيد الشيء السابق إلى الصندوق، فكم عدد النتائج المحتملة؟ فسّر استنتاجك.

26. **مسألة غير محددة الإجابة** يكون المخطط الشجري الخاص بالتجربة غير متناظر أحيانًا. صف تجربة ثنائية المرحلة المخطط الشجري فيه متناظر، وارسم المخطط الشجري. فسّر.

27. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا لا يمكن تمثيل الفضاء العيني لتجربة متعددة المراحل باستخدام جدول.

مثال 1

28. **الفرضيات** حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحةً *أحيانًا*، *أم دائمًا*، أم غير صحيحة *على الإطلاق*. فسّر استنتاجك.

عندما تخرج النتيجة عن نطاق الفضاء العيني، فهذا خطأ.

29. **التبرير** للتجربة متعددة المراحل نتائج محتملة n عند كل مرحلة. إذا تم تنفيذ التجربة بالمراحل k، فاكتب معادلة لإجمالي عدد النتائج المحتملة P. فسّر.

30. **في الرياضيات** اشرح متى يكون من الضروري عرض جميع النتائج المحتملة لتجربة ما باستخدام مخطط شجري ومتى يمكن الاكتفاء باستخدام مبدأ العد الأساسي.

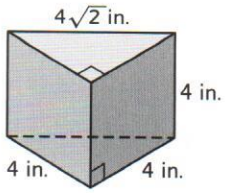
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

31. الاحتمال يمكن أن تدعو نجلاء اثنتين من صديقاتها للذهاب لتناول الغداء معها. إذا كانت ستختار من بين أربع من صديقاتها، فكم عدد النتائج المحتملة؟

A 4
B 6
C 8
D 9

32. إجابة قصيرة ما حجم المنشور الثلاثي الموضح أدناه؟



33. يجب أن تتكون كلمة مرور فالح من خمسة أرقام، مستخدمًا الأرقام من 0 إلى 9. ويجب أن يستخدم أرقامًا متكررة. ما أقصى عدد من كلمات المرور المختلفة يمكن لفالح أن يستخدم؟

F 15,120
G 30,240
H 59,049
J 100,000

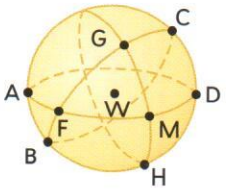
34. SAT/ACT يقدم محل بيتزا ثلاثة أنواع من البيتزا محشوة الحواف، و5 أنواع من البيتزا بالخضراوات، و4 أنواع من البيتزا باللحوم. كم نوعًا مختلفًا من البيتزا يمكن طلبه عند اختيار 1 بيتزا محشوة الحواف، و1 بيتزا بالخضراوات، و1 بيتزا باللحم؟

A 12
B 23
C 35
D 60
E عدد لا نهائي

مراجعة شاملة

35. الهندسة المعمارية لتشجيع إعادة التدوير، شيد سكان مدينة روما في إيطاليا نموذجًا لكاتدرائية القديس بطرس من علب العصائر الفارغة. تم تشييد النموذج حسب المقياس 1:5 وكان على شكل منشور مستطيل ارتفاعه 26 مترًا، وعرضه 49 مترًا وطوله 93 مترًا. أوجد أبعاد الكاتدرائية الحقيقية.

استخدم الهندسة الفراغية في تسمية كلٍ مما يلي في الفراغ W.)



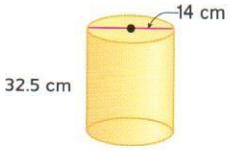
36. خطان مستقيمان يشتملان على النقطة F

37. نقطة تحتوي على قطعة G

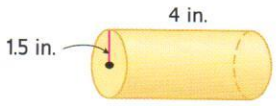
38. مثلث

أوجد المساحة الجانبية ومساحة السطح لكل أسطوانة. قرّب لأقرب جزء من العشرة.

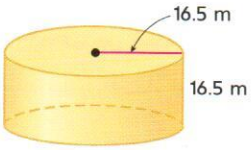
39.



40.



41.



42. الاتصالات تسير الإشارة القادمة من برج في شكل شعاع له نقطة نهاية على البرج ومماسه على الأرض. على فرض أن البرج يقع في مستوى سطح البحر حسبما هو موضح، حدد مقياس القوس الذي يتقاطع مع المماسين.

ملاحظة: الرسم غير معدّ للقياس

مراجعة المهارات

أوجد ناتج قسمة كل مما يلي.

43. $\frac{5^2}{2}$

44. $\frac{3^3}{3 \cdot 2}$

45. $\frac{2^4 \cdot 6}{8}$

46. $\frac{2^3 \cdot 12}{6}$

47. $\frac{4^4 \cdot 3}{24}$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

الدرس 11-2

استخدام التباديل والتوافيق مع الاحتمالا

السابق

- لقد استخدمت نظام العد الأساسي.

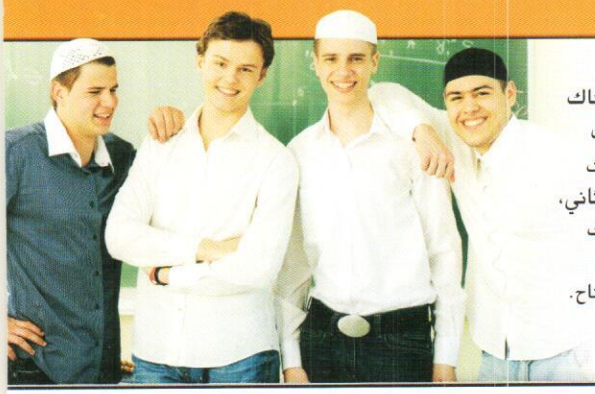
الحالي

1 استخدام التباديل مع الاحتمالات.

2 استخدام التوافيق مع الاحتمالات.

لماذا؟

- يقف فارس وعيسى وعمر وعلي بجانب بعضهم لالتقاط صورة، هناك أربعة اختيارات لمن يمكنه الوقوف ناحية أقصى اليسار، و 3 اختيارات لمن يمكنه الوقوف في الموضع الثاني، أما بالنسبة للموضع الثالث، فهناك خياران فقط، وبالنسبة للموضع الأخير فهناك خيار واحد فقط متاح.



1 الاحتمالات باستخدام التباديل

التباديل هي ترتيب الأشياء حسب الترتيب المهم. من تباديل الأصدقاء الأربعة المذكورين أعلاه عيسى، وعمر، وعلي، ثم فارس. وباستخدام مبدأ العد الأساسي، هناك $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ أو 24 ترتيبًا محتملاً للأصدقاء.

يمكن كتابة التعابير $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ المستخدمة في حساب عدد تباديل الأصدقاء الأربعة على طريقة 4!، التي تُقرأ 4 مضروب.

المفهوم الأساسي المضروب

الشرح **مضروب** العدد الصحيح الموجب n يُكتب $n!$ هو ناتج ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من أو تساوي n.

الرموز $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$، حيث $0! = 1$

مثال 1 احتمالات وتباديل عدد n من الأشياء

رياضة **نبيلة وميسون عضوتان في فريق لاكروس. إذا أُعطيت الفتيات العشرون أعضاء الفريق أرقامًا لقميص اللعبة من 1 إلى 20 بشكل عشوائي، فما احتمال أن يكون رقم قميص نبيلة 1 وميسون 2؟**

الخطوة 1 أوجد عدد النتائج المحتملة في الفضاء العيني. هذا هو عدد تباديل أسماء الفتيات العشرين أو 20!.

الخطوة 2 أوجد عدد النتائج المرغوبة. هذا هو عدد تباديل أسماء الفتيات الأخرى بحيث يكون رقم نبيلة 1 ورقم ميسون 2، أو $(20-2)!$ أو 18!.

الخطوة 3 احسب الاحتمال.

$$P(\text{نبيلة 1، ميسون 2}) = \frac{18!}{20!} \quad \begin{array}{l}\leftarrow \text{عدد النتائج المفضلة} \\ \leftarrow \text{عدد النتائج المحتملة}\end{array}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{18!}}}{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18!}_{1}} \quad \text{وسّع } 20! \text{ واقسم العوامل المشتركة.}$$

$$= \frac{1}{380} \quad \text{بسّط.}$$

تمرين موجّه

1. **التصوير** في الفقرة الافتتاحية، ما احتمال اختيار عيسى للوقوف في أقصى اليسار، واختيار عمر للوقوف في أقصى اليمين في الصورة؟

المفردات الجديدة

تباديل permutation
مضروب factorial
التباديل الدائرية circular permutation
توافيق combination

ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
استخدام نماذج الرياضيات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

في الفقرة الافتتاحية، على فرض أن 6 أصدقاء كانوا متاحين، ولكن أراد المصور أن يصور 4 أشخاص فقط في الصورة. باستخدام مبدأ العد الأساسي، يصبح عدد تبادل 4 أصدقاء مأخوذين من مجموعة من 6 أصدقاء هو $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ أو 360.

وهناك طريقة أخرى لوصف هذا الموقف وهي عدد تبادل 6 اصدقاء أخذ من بينهم 4 في كل مرة، يُرمز إليه بـ ${}_6P_4$. يمكن حساب هذا العدد أيضًا باستخدام المضروبات.

$${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!}$$

وهذا يقترح القانون التالي.

قراءة في الرياضيات

الدقة عبارة *الأشياء مميزة* تعني أن أشياء يمكن تمييزها لكونها مختلفة بطريقة ما.

المفهوم الأساسي التباديل

الرموز عدد تبادل n من الأشياء المميزة المأخوذة r في كل مرة يرمز إليه بـ ${}_nP_r$ ويتم الحصول عليه من $${}_nP_r = \frac{n!}{n-r!}.$$

مثال عدد تبادل 5 أشياء مأخوذة 2 في كل مرة هو $${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20.$$

نصيحة دراسية

العشوائية عند تحديد النتائج بشكل عشوائي، تصبح احتمال حدوثها متساوية ويمكن حساب الاحتمال باستخدام التباديل والتوافيق.

مثال 2 الاحتمالات و nPr

قُسم صف إلى فرق يتكون كلٌّ منها من 15 طالبًا. وطُلب من كل فريق أن يختار أعضاء منه ليصبحوا مسؤولين. إذا كان عدنان وعبيد وعبد الله في فريق واحد، وكان يتم تحديد المناصب عشوائيًا، فما احتمال أن يتم اختيارهم كرئيس ونائب رئيس وسكرتير، على التوالي؟

الخطوة 1 بما أن اختيار المسؤولين هو طريقة لترتيب أعضاء الفريق، فالترتيب مهم في هذا الموقف. إن عدد النتائج المحتملة في الفضاء العيني هو عدد تباديل 15 شخصًا مع أخذ 3 كل مرة، ${}_{15}P_3$.

$${}_{15}P_3 = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12!} = 2730$$

الخطوة 2 عدد النتائج المفضلة هو عدد تباديل 3 طلاب في مناصب معينة. وسيكون هذا !1 أو 1.

الخطوة 3 إذًا، فاحتمال اختيار عدنان وعبيد وعبد الله لمناصب المسؤولين الثلاثة هي $\frac{1}{2730}$.

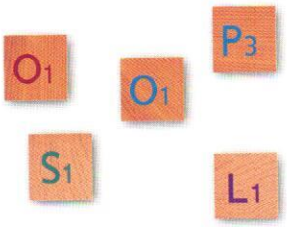
تمرين موجّه

2. تتكون بطاقة تعريف أحد الطلاب من 4 أرقام مختارة من بين 10 أرقام محتملة من 0 إلى 9. لا يمكن تكرار الأرقام.

A. كم عدد أرقام التعريف المحتملة هنا؟

B. أوجد احتمال أن يكون للبطاقة المولدة عشوائيًا العدد 4213 بالضبط.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



يجب أن تجرّب في اللعبة أن تبتكر كلمةً مستخدمًا مكعبات حروف مختارة عشوائيًا. على فرض أنك اخترت المكعبات الموضحة. إذا اعتبرت أن الحرفين O و O حرفان مميزان، فهناك 5! أو 120 تبديلاً لهذه الحروف.

فيما يلي قائمة بالترتيبات الأربعة المحتملة.

POOLS POOLS SPOOL SPOOL

لاحظ أنه لو لم تكن حروف O ملونة، فسيبدو العديد من تلك الترتيبات متشابهًا. وحيث إن هناك حرفين O يمكن ترتيبهما بطريقتين أو 2!، فإن عدد تباديل الحروف O وP وO وL وS يمكن كتابتها بالشكل $\frac{5!}{2!}$.

المفهوم الأساسي التباديل بالتكرار

عدد التباديل المُميزة للأشياء n التي تتكرر فيها الأشياء r_1 مرات، يتكرر الآخر r_2 مرات، وهكذا، هو

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!}.$$

مثال 3 الاحتمالات والتباديل مع التكرار

برنامج ألعاب قدمت إليك الحروف التالية في أحد برامج الألعاب وطُلب منك أن تفككها لتكوين اسم نهر في الولايات المتحدة الأمريكية. إذا حددت تبديلاً لهذه الحروف عشوائيًا، فما احتمال أن تكون تلك الحروف الإجابة الصحيحة وهي نهر MISSISSIPPI؟

I P S S P I S I M I S

الخطوة 1 يوجد 11 حرفًا إجمالاً. يوجد حرف I فيها 4 مرات، ويوجد حرف S 4 مرات، وحرف P يوجد 2 مرة. إذًا، فعدد التباديل المميزة لهذه الحروف هو

$$\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{39,916,800}{1152} = 34,650.$$ استخدم حاسبة.

الخطوة 2 يوجد ترتيب واحد مفضل MISSISSIPPI.

الخطوة 3 احتمال نطق تباديل هذه الحروف المختارة عشوائيًا بطريقة Mississippi هي $\frac{1}{34,650}$.

الربط بالحياة اليومية

ابتكر برنامج لعبة *Price is Right* عام 1956 وهو البرنامج الذي استمر لأطول فترة.

المصدر: IMDB

تمرين موجّه

3. أرقام الهاتف ما احتمالات أن يكون رقم هاتف مكونًا من 7 أرقام هي 5 و1 و6 و5 و2 و1 و5 مرتبًا بطريقة 5211-550؟

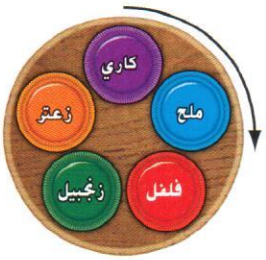
لقد درست حتى الآن الأشياء التي تُرتب ترتيبًا خطيًا. لاحظ أنه عند ترتيب البهارات أدناه في خط مستقيم، فإن تحريك كل نوع منها حركة واحدة إلى اليمين يُنتج تبديلاً مختلفًا – الكاري هو الأول بدلاً من الملح. هناك 5! تباديل مميزة لهذه البهارات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

في **التبديل الدائري**، يتم ترتيب الأشياء في دائرة أو حلقة، ويمكنك ملاحظة ترتيبات البهارات عند وضعها في مائدة دوارة. لاحظ أن تدوير المائدة الدوارة موضع واحد في اتجاه عقارب الساعة *لن* ينتج تبديلاً مختلفًا – لن يتغير ترتيب البهارات بالنسبة لبعضها البعض.

نصيحة دراسية

قلب الدائرة إذا بدا الشكل الدائري على نفس هيئته عند قلبه، كمثل حلقة مفاتيح مفرغة، فيجب قسمة عدد التباديل على 2.



بما أن 5 لفات للمائدة الدوارة ينتج عنها التباديل نفسها، فإن عدد التباديل المميزة للمائدة الدوارة هو $\frac{1}{5}$ من إجمالي عدد الترتيبات عند وضع البهارات في خط مستقيم.

$\frac{5 \cdot 4!}{5} = \frac{1}{5} \cdot 5!$ أو $4!$ حيث $(5-1)!$

المفهوم الأساسي التباديل الدائرية

عدد التباديل المميزة لعدد n من الأشياء مرتبة في شكل دائرة بلا نقطة مرجعية ثابتة هو

$\frac{n!}{n}$ أو $(n-1)!$.

إذا كانت الأشياء n مرتبة بالنسبة إلى نقطة مرجعية ثابتة، فإن الترتيبات تعامل كترتيبات خطية، مما يجعل عدد تباديل $n!$.

مثال 4 الاحتمالات والتباديل الدائرية

أوجد الاحتمالات الموضحة، واشرح استنتاجك.

a. المجوهرات إذا كانت الحلي الستة الموضحة على السوار مرتبة ترتيبًا عشوائيًّا، فما احتمال أن ينتج الترتيب الموضح

نظرًا لعدم وجود نقطة مرجعية ثابتة، فهذا تبديل دائري. إذًا، فهناك $(6-1)!$ أو $5!$ تباديل مميزة للحلي. ومن ثم، فإن احتمال الحصول على الترتيب الموضح نفسه هي $\frac{1}{5!}$ أو $\frac{1}{120}$.

b. الغداء إذا كنت تعد المقاعد لمجموعة من أربعة أشخاص حول مائدة مستديرة. يوجد أحد المقاعد بجانب نافذة. إذا جلس من سيتناولون الطعام بترتيب عشوائي، فما احتمال جلوس الشخص الذي سيدفع الفاتورة بجانب النافذة؟

بما أن الأشخاص سيجلسون حول مستديرة ذات نقطة مرجعية ثابتة، فهذا تبديل خطي. إذًا هناك $4!$ أو 24 طريقة لجلوس الأشخاص حول المائدة. إن عدد النتائج المفضلة هو عدد التباديل للأشخاص الثلاثة الآخرين مع العلم أن الشخص الذي سيدفع الفاتورة سيجلس بجانب النافذة، $3!$ أو 6.

إذًا، فاحتمال أن يجلس الشخص دافع الفاتورة بجانب النافذة هي $\frac{6}{24}$ أو $\frac{1}{4}$.

مهنة من الحياة اليومية

علماء الإحصاء

يجمع علماء الإحصاء البيانات الإحصائية الخاصة بمختلف الموضوعات، ومن أمثلة ذلك الرياضة والألعاب. ويستخدمون برامج الحاسوب في تحليل تلك البيانات وشرحها وتلخيصها. معظم علماء الإحصاء حاصلون على درجة الماجستير.

حقوق الطبع والتأليف © مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين موجّه

4. كرة القدم يلتقي أعضاء فريق كرة القدم الأحد عشر معًا قبل المباراة.

A. ما احتمال أن يقف الظهير الأيمن يمين حارس المرمى إذا اجتمع أعضاء الفريق معًا بترتيب عشوائي؟ فسّر استنتاجك.

B. إذا كان الحكم واقفًا خلف التجمع مباشرةً، فما احتمال وقوفه خلف حارس المرمى مباشرةً؟ فسّر استنتاجك.

نصيحة دراسية

التباديل والتوافيق استخدم التباديل عندما يكون ترتيب الأجسام مهمًّا والتوافيق عندما لا يكون الترتيب مهمًّا.

2 الاحتمالات باستخدام التوافيق

التوافيق هي ترتيب الأشياء حيثما لا يكون الترتيب مهمًا. لنفترض أنك تريد وضع 3 من 8 أزواج من الجوارب المختلفة في حقيبة الرحلة. فإن ترتيب اختيار الجوارب ليس مهمًا. ومن ثم فإن 3! أو 6 مجموعات من الجوارب الموضحة أدناه لا يعتبر مهمًا. وبهذا يمكنك استخدام التوافيق لتحديد عدد اختيارات الجوارب المختلفة المحتملة.

توافيق عدد n من العناصر المأخوذة من المجموعة r في كل مرة، أو ${}_nC_r$، يُحسب بقسمة عدد التباديل ${}_nP_r$ على عدد الترتيبات التي تشتمل على العناصر نفسها، $r!$.

المفهوم الأساسي التوافيق

الرموز عدد توافيق n من الأشياء المختلفة عند أخذ r في كل مرة يُرمز إليه بـ ${}_nC_r$ ويتم الحصول عليه من ${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$.

مثال عدد توافيق 8 أشياء مأخوذة 3 في كل مرة هو

$${}_8C_3 = \frac{8!}{(8-3)!\,3!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 6} = 56$$

مثال 5 الاحتمالات و ${}_nC_r$

الدعوات **يمكن أن تدعو إيمان في حفل زفافها 6 صديقات من صديقاتها العشرين للذهاب معها إلى حديقة الملاهي. إذا اختارت أن تدعو صديقاتها عشوائيًا، فما احتمال اختيار صديقاتها أسماء وأماني وأمل وأمنة وبثينة وبدرية؟**

الخطوة 1 بما أن ترتيب اختيار الصديقات غير مهم، فإن عدد النتائج المحتملة في الفضاء العيني هو نفسه عدد التوافيق لعشرين شخصًا مأخوذ منهم 6 أشخاص في كل مرة، ${}_{20}C_6$.

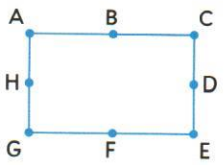
$${}_{20}C_6 = \frac{20!}{(20-6)!\,6!} = \frac{\cancel{20} \cdot 19 \cdot \cancel{18} \cdot 17 \cdot \cancel{16} \cdot 15 \cdot \cancel{14!}}{\cancel{14!} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 38{,}760$$

الخطوة 2 يوجد نتيجة واحدة مفضلة – أن يُختار الطلاب الستة المذكورون أعلاه. وترتيب اختيارهم ليس مهمًا.

الخطوة 1 إذًا فاحتمال اختيار هؤلاء الأصدقاء الستة هي $\frac{1}{38{,}760}$.

تمرين موجّه

5. الهندسة إذا كانت النقاط الثلاث المختارة بشكل عشوائي من هذه الأسماء في المستطيل الموضح، فما احتمال وقوعها جميعًا على القطعة المستقيمة نفسها؟



McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح الطبع والتأليف © محفوظة لصالح حقوق الطبع

التحقق من فهمك

مثال 1

1. **الهندسة** طُلب من خمسة طلاب أن يختاروا مضلعًا عشوائيًا من المجموعة الموضحة أدناه ويعطوه اسمًا. ما احتمال أن يختار الطالبان الأولان المثلث الشكل الرباعي، بهذا الترتيب؟

مثال 2

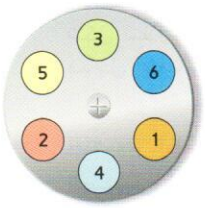
2. **المسرحية** يمثل طلاب مدرسة ثانوية مسرحية *A Raisin in the Sun* بمشاركة كل طالب في الصف الأول الثانوي في مادة اللغة الإنجليزية من بين 18 طالبًا. إذا اختير ثلاثة من فريق العمل عشوائيًا، فما احتمال اختيار إبراهيم للإضاءة، واختيار أحمد لإلقاء كلمات الشكر، واختيار إبراهيم لأداء دور إسماعيل؟

مثال 3

3. **القيادة** ما احتمال أن تكون لوحة الرخصة CFF3133 إذا كان فيها حروف C وF وF وأرقام 3 و 3 و 3 و 1؟

مثال 4

4. **الكيمياء** ينبغي في معمل الكيمياء أن تختبر ست عينات مرتبة عشوائيًا في حلقة دائرية.



   a. ما احتمال إنتاج الترتيب الموضح على اليسار؟

   b. ما مدى احتمال أن تكون أنبوبة الاختبار 2 في موضع علوي متوسط؟

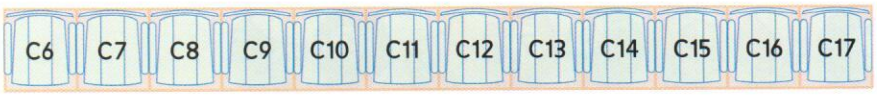
مثال 5

5. اشترك خمسمئة صبي، من بينهم أسامة وأيمن، في سحب للفوز بتذكرتي مباراة كرة قدم. ما احتمال أن يفوز أسامة وأيمن بهاتين التذكرتين؟

التدريب وحل المسائل

مثال 1

6. **حفلة موسيقية** ستذهب همسة وحليمة إلى حفلة موسيقية مع النادي الرئيسي في مدرستهم الثانوية. إذا اختارت الفتاتان مقعدًا في الصف الموصف أدناه، فما احتمال أن تجلس حليمة في المقعد C11 وهمسة في المقعد C12؟



7. **المعرض** اشترى كل من بدر وبلال تذكرة سباق من معرض المدينة. إذا بيعت 50 تذكرة عشوائيًا، فما احتمال أن يشتري بدر التذكرة رقم 14 ويشتري بلال التذكرة رقم 23؟

مثال 2

8. **تمثيل النماذج** يبين الجدول من وصلوا إلى الدور النهائي في مسابقة تمارين الحركات الأرضية، وسيتم اختيار ترتيب مشاركتهم عشوائيًا.

المؤهلون للتصفيات النهائية في تمارين الحركات الأرضية
حمدة
حورية
خديجة
خولة
رنا
ريهام
سالي

   a. ما احتمال أن تكون خديجة وخولة وحورية أول ثلاث لاعبات جمباز يؤدين العرض بأي ترتيب؟

   b. ما احتمال أن تكون خديجة هي الأولى وخولة الثانية وحورية الثالثة؟

9. **وظائف** يخصص متجر لموظفيه أرقام تعريف خاصة بالعمل عشوائيًا من أجل تتبع إنتاجية كل موظف. ويتكون كل عدد من 5 أرقام من 1 إلى 9. إذا كانت الأعداد لا تتكرر، فأوجد احتمال تكوين 25938 عشوائيًا.

10. **مجموعات** اختير شخصان عشوائيًا من مجموعة تتكون من عشرة أشخاص. ما احتمال أن يُختار جاسم أولاً وجمال ثانيًا؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3

11. **المغناطيسات** اشترى حرب بعض المغناطيسات على شكل حروف ليرتبها ويكون منها كلمات على ثلاجته. إذا اختار عشوائيًا تبديل الحروف الموضح أدناه، فما احتمال أن يكون كلمة BASKETBALL؟

12. **الرموز البريدية** ما احتمال أن يكون الرمز البريدي المولد عشوائيًا من الأرقام 3 و7 و 3 و 9 و 5 و 7 و 2 و 3 هو 39372؟

مثال 4

13. **المجموعات** ترتب سمية الطاولات عشوائيًا في دوائر لاستخدامها في أنشطة المجموعة. إذا كانت هناك 7 طاولات في الدائرة، فما احتمال أن تجلس سمية في الطاولة الأقرب إلى الباب؟

14. **مدينة الملاهي** ذهبت ساندي لمدينة الملاهي برفقة صديقاتها وركبوا لعبةً تنتظم فيها المقاعد – التي على شكل سلال – في دائرة. إذا كانت هناك 8 مقاعد، فما احتمال أن تجلس ساندي في الكرسي الأبعد عن مدخل اللعبة؟

مثال 5

15. **التصوير** إذا كنت تضع 24 صورة بشكل عشوائي داخل ألبوم الصور وكان بإمكانك أن تضع أربع صور في الصفحة الأولى، فما احتمال اختيارك الصور على جهة اليسار؟

16. **رحلة برية** تقوم سهى برحلة برية في الولايات المتحدة وستختار 15 مدينة لتقضي فيها ليلة واحدة. إذا سحبت عشوائيًا 3 منشورات دعائية للمدن من كومة بها 15 منشورًا دعائيًا، فما احتمال أن نيويورك وبوسطن وسان فرانسيسكو؟

17. **الاستنتاج المنطقي** استخدم الشكل الموضح أدناه، وعلى فرض ترتيب الكرات عشوائيًا.

a. في صف مكون من 8 كرات بلياردو، ما احتمال أن تقع الكرة الملساء 2 والكرة المخططة 11 الأول والثاني من جهة اليسار؟

b. ما احتمال أنه إذا تم خلط 8 كرات البلياردو بشكل عشوائي، نتج في النهاية الترتيب الموضح؟

c. ما احتمال أن يكون صف من كرات 7 مع صف من كرات 8، وثلاث كرات 9، وكرة واحدة 6 ؛ حيث تقع ثلاث كرات 8 على يسار كرة 6 والكرات 9 الثلاث على اليمين؟

d. إذا أعيد ترتيب الكرات بشكل عشوائي وكونت دائرة، فما احتمال أن تكون الكرة 6 مجاورة الكرة 7؟

18. كم عدد الخطوط المحددة بالنقاط العشر المختارة عشوائيًا، والتي منها رقم 3 على خط واحد؟ فسّر طريقة الحساب.

19. افترض اختيار 7 نقاط على دائرة بشكل عشوائي، كما هو موضح على اليسار.

a. باستخدام الحروف الإنجليزية من A إلى E، كم عدد الطرق التي يمكن تسمية النقاط على الدائرة بها؟

b. إذا تثبتت نقطة واحدة على الدائرة، فما عدد الترتيبات المحتملة؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

20. **ألعاب الملاهي** يوجد في لعبة الدوّارة 7 أحصنة ومقعد يسع شخصين. ولا يتحرك أحد الأحصنة لأعلى أو لأسفل.

a. كم عدد الطرق التي يمكن بها ملء مقاعد الدوّارة عشوائيًا بتسعة أشخاص؟

b. إذا امتلأت الدوّارة عشوائيًا، فما احتمال جلوسك أنت وصديقك على المقعد المزدوج؟

c. إذا امتلأت الدوّارة بستة إلى تسعة أشخاص بشكل عشوائي وكانت أعمارهم دون ثمانية أعوام. فما احتمال انتهاء الحال بالشخص الأصغر من 8 سنوات على الحصان الذي لا يتحرك لأعلى أو أسفل؟

21. **التراخيص** وُضعت كاميرا أعلى إشارة المرور لتصوير السيارات التي لا تلتزم بالوقوف عندما تكون الإشارة حمراء. يمكن للضابط أن يرى في إحدى الصور غير الواضحة أن الحرف الأول في لوحة الترخيص كان Q، وكان الحرف الثاني M أو N، و كان الحرف الثالث B، أو P، أو D. وكان الرقم الأول 0، ولكن لم يكن الرقمان الآخران واضحين. كم لوحة ترخيص تناسب هذا الوصف؟

22. **التمثيلات المتعددة** ستستكشف التباديل في هذه المسألة.

a. **عددي** اختر عشوائيًا ثلاثة أعداد من 0 إلى 9. أوجد التباديل المحتملة لهذه الأعداد الصحيحة الثلاثة.

b. **جدولي** كرر الجزء a لأربع مجموعات إضافية مكونة من ثلاثة أعداد صحيحة. وستستخدم بعض الأعداد أكثر من مرة. انسخ الجدول الموضح أدناه وأكمله.

أعداد صحيحة	التباديل	متوسط التباديل	متوسط التباديل / 37
1, 4, 7	147, 174, 417, 471, 714, 741	444	12

c. **لفظي** خمن متوسط قيمة تباديل الأعداد الثلاثة بين 0 و 9.

d. **رمزي** إذا كانت الأعداد الثلاثة هي x و y و z فهل يمكن كتابة معادلة للحصول على متوسط A من تباديل الأعداد؟ إذا كانت الإجابة نعم، فاكتب المعادلة. وإذا كانت الإجابة لا، ففسّر لم لا يمكن ذلك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

23. **التحدي** هناك 15 فتاة عمرهن أكبر من عشرين عامًا، و 15 فتاة عمرهن أصغر من عشرين عامًا اشتركن في سحب على أربع تذاكر سينما مجانية. ما احتمال أن تفوز الفتيات الأصغر من عشرين عامًا بالتذاكر الأربع؟

24. **التحدي** ادعى طالب أن التباديل والتوافيق مرتبطة بـ $_nP_r = {}_nC_r \cdot r!$ استخدم الجبر لبيان صحة ذلك. ثم فسّر سبب اختلاف $_nP_r$ و $_nC_r$ حسب المعامل $r!$.

25. **مسألة غير محددة الإجابة** صف موقفًا يمكن فيه الحصول على التبديل من $\frac{1}{{}_7C_3}$.

26. **الفرضيات** هل العبارة التالية صحيحة *أحيانًا*، *أم دائمًا*، أم *غير صحيحة أبدًا*؟ فسّر.

$$_nP_r = {}_nC_r$$

27. **البرهان** برّهن أن $_nC_n - r = {}_nC_r$.

28. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين التباديل والتوافيق.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

29. التباديل يقف دائمًا أربعة من الفريق الموسيقي، فتاتان وصبيان، في صف أثناء العزف. ما احتمال أن تقف فتاة على طرفي الصف إذا اصطفوا عشوائيًا؟

A $\frac{1}{24}$

B $\frac{1}{12}$

C $\frac{1}{6}$

D $\frac{1}{2}$

30. إجابة قصيرة إذا اخترت تباديل الحروف الموضحة أدناه عشوائيًا، فما احتمال تكوين كلمة GEOMETRY؟

31. الجبر يبيع اتحاد الطلاب المشروبات الغازية في مباريات كرة السلة، وسعر الواحدة AED 1.50. إذا دفع الاتحاد AED 75 لتأجير طاولة البيع، فكم مشروبًا غازيًا سيبيعون لتحقيق أرباح قيمتها AED 250؟

F 116

G 117

H 167

J 217

32. SAT/ACT تساوي نسبة 12:9 نسبة $\frac{1}{3}$ إلى

A $\frac{1}{4}$

B 1

C $\frac{5}{4}$

D 2

E 4

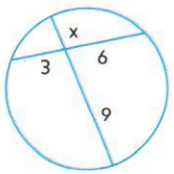
مراجعة شاملة

33. التسوق يتوفر المعطف النسائي في القياسات 4، أو 6، أو 8، أو 10 وبالألوان الأسود والبني والرمادي والكاكاوي. كم معطفًا مختلفًا يمكن اختياره؟ (الدرس 1-11)

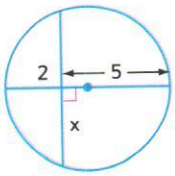
34. يوجد منشوران متشابهان مساحة سطحيهما 256 سنتيمترًا مربعًا و 324 سنتيمترًا مربعًا. ما نسبة ارتفاع المنشور الصغير إلى ارتفاع المنشور الكبير؟

أوجد *x*. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

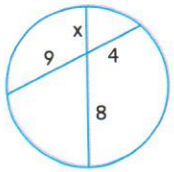
35.



36.

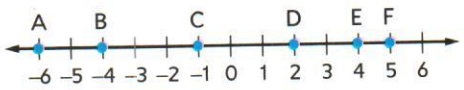


37.



مراجعة المهارات

استخدم خط الأعداد في إيجاد كل قياس.



38. *DF*

39. *AE*

40. *EF*

41. *BD*

42. *AC*

43. *CF*

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح والتأليف © محفوظة لصالح حقوق الطبع

الدرس 11-3 الاحتمالات الهندسية

السابق
- أوجدت احتمالات الأحداث البسيطة.

الحالي
1 إيجاد الاحتمالات باستخدام الطول.
2 إيجاد الاحتمالات باستخدام المساحة.

لماذا؟
- تهدف لعبة المهرجان الشعبي الموضحة إلى تجميع النقاط من خلال دحرجة كرة على منحدر، وعبر عدة مساحات دائرة مختلفة. وتُعين قيمة النقطة في كل مساحة بحسب احتمال قيام الشخص بإسقاط الكرة في تلك المساحة.

المفردات الجديدة
الاحتمال الهندسي
geometric probability

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.

1 الاحتمال باستخدام الطول

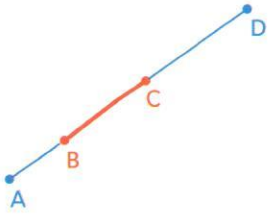
تعتمد احتمال الفوز في لعبة المهرجان على مساحة الهدف. وتسمى الاحتمال التي تنطوي على قياس هندسي، مثل الطول أو المساحة، باسم **الاحتمال الهندسي**.

المفهوم الأساسي نسبة احتمال الطول

الشرح

إذا كانت القطعة المستقيمة (1) تحتوي على قطعة أخرى (2) ونقطة على القطعة (1) يتم اختيارها بشكل عشوائي، فإن احتمال وجود النقطة على القطعة (2) هي

$$\frac{\text{طوال القطعة (2)}}{\text{طوال القطعة (1)}}$$



مثال

إذا كانت النقطة E الواقعة على $\overline{AD}$ قد اختيرت عشوائيًا.

فإن $P(E \text{ تقع على } \overline{BC}) = \frac{BC}{AD}$.

مثال 1 استخدام الأطوال في إيجاد الاحتمالات الهندسية

النقطة X مختارة عشوائيًا على $\overline{JM}$. أوجد احتمال أن X تقع على $\overline{KL}$.

$$P(X \text{ تقع على } \overline{KL}) = \frac{KL}{JM}$$ نسبة احتمال الطول

$$= \frac{7}{14}$$ $KL = 7$ و $JM = 3 + 7 + 4 = 14$

$$= \frac{1}{2}, 0.5, = 50\%$$ بسّط.

تمرين موجّه

النقطة X مختارة عشوائيًا على $\overline{JM}$. أوجد احتمال وقوع كل حدث.

1A. $P(X \text{ تقع على } \overline{LM})$

1B. $P(X \text{ تقع على } \overline{KM})$

يمكن استخدام الاحتمالات الهندسية في عدة مواقف واقعية تنطوي على عدد لا نهائي من النتائج.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الربط بالحياة اليومية

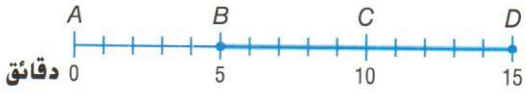
يصل قطار هيئة النقل في شيكاغو أو يغادر المحطة كل 15 دقيقة شأنه شأن قطار أديسون على "ريد لاين".

المصدر: هيئة النقل بشيكاغو

مثال 2 من الحياة اليومية تمثيل الاحتمالات من الحياة اليومية

النقل استخدم المعلومات الموضحة على اليمين. افترض أنك وصلت إلى مدينة "أديسون" على "ريد لاين" في وقت عشوائي، فما احتمال اضطرارك لانتظار القطار لمدة 5 دقائق أو أكثر؟

يمكن استخدام خط الأعداد في تمثيل نموذج هذا الموقف. بما أن القطارات تصل كل 15 دقيقة، فإن القطار التالي سيصل خلال 15 دقيقة أو أقل. على خط الأعداد الموضح أدناه، يتم تمثيل حدث الانتظار لمدة 15 دقيقة أو أكثر بالرمز $\overline{BD}$.



أوجد احتمال هذا الحدث.

نسبة احتمال الطول

$$P(\text{الانتظار 5 دقائق أو أكثر}) = \frac{BD}{AD}$$

$$= \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$BD = 10$ و $AD = 15$

إذًا، فإن احتمال انتظار القطار القادم لمدة 5 دقائق أو أكثر هي $\frac{2}{3}$ أو 67% تقريبًا.

تمرين موجّه

2. الشاي يُعد الشاي المثلج في أحد المطاعم في أوعية سعة 8 لترات. وعندما يصبح مستوى الشاي أقل من 2 لتر، يصبح مذاق الشاي ضعيفًا.

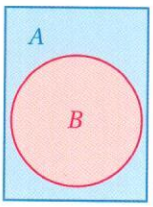
A. ما احتمال أن يكون محتوى الوعاء أقل من لترين عندما يحاول أحدهم صب كوب من الشاي منه؟

B. ما احتمال أن يتراوح مقدار الشاي في الوعاء في أي وقت ما بين لترين إلى 3 لترات؟

2 الاحتمال باستخدام المساحة

يمكن أن تتضمن الاحتمالات الهندسية المساحة أيضًا. وموضح فيما يلي نسبة حساب الاحتمالات الهندسية المشتملة على مساحة.

المفهوم الأساسي نسبة احتمال المساحة



الشرح إذا تضمنت المنطقة A المنطقة B وتم اختيار النقطة E في المنطقة A عشوائيًا، فإن احتمال أن النقطة E توجد في المنطقة B تساوي $\frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$.

مثال إذا اختيرت النقطة E عشوائيًا في المستطيل A، فإن

$$P(\text{النقطة } E \text{ توجد في دائرة } B) = \frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}.$$

عند تحديد الاحتمالات الهندسية بالأهداف، نفترض

- أن الجسم يسقط داخل مساحة الهدف، و
- أن احتمال سقوط الجسم في أي مكان من المنطقة متساوية.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام المساحة في إيجاد الاحتمالات الهندسية

القفز بالمظلات بفرض أن لاعب القفز بالمظلات يجب أن يستط على هدف من ثلاث دوائر متحدة المركز. إذا كان قطر الدائرة المركزية يساوي مترين، وتبعد الدوائر عن بعضها بمسافة متر واحد، فما احتمال أن يستط اللاعب في الدائرة الحمراء؟

ينبغي إيجاد مساحة الدائرة الحمراء إلى مساحة الهدف بأكمله.
إن نصف قطر الدائرة الحمراء يساوي 1 متر. بينما نصف قطر الهدف بأكمله يساوي 1 + 1 + 1 أو 3 أمتار.

نسبة احتمال المساحة

$$P(\text{ينزل لاعب القفز بالمظلات في الدائرة الحمراء}) = \frac{\text{مساحة الدائرة الحمراء}}{\text{مساحة الهدف}}$$

$A = \pi r^2$

$$= \frac{\pi(1)^2}{\pi(3)^2}$$

بسّط.

$$= \frac{\pi}{9\pi} = \frac{1}{9}$$

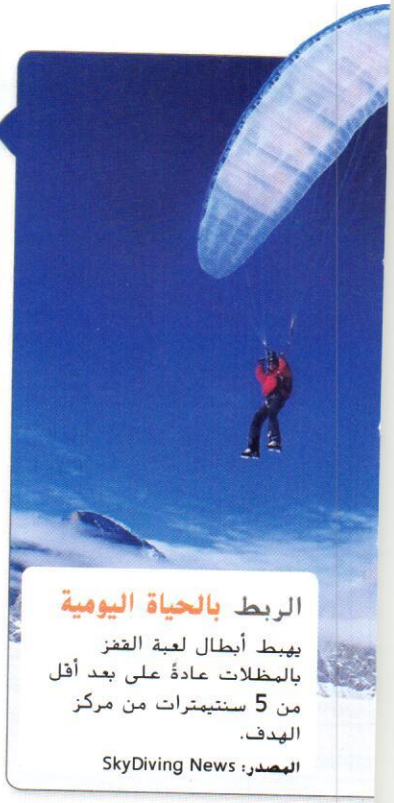
احتمال أن ينزل لاعب القفز بالمظلات في الدائرة الحمراء هي $\frac{1}{9}$ أو حوالي 11%.

تمرين موجّه

3. القفز بالمظلات أوجد كل احتمال باستخدام المثال السابق.

A. P(ينزل لاعب القفز بالمظلات في المنطقة الزرقاء)

B. P(ينزل لاعب القفز بالمظلات في المنطقة البيضاء)

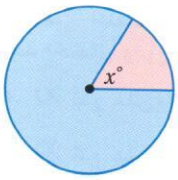


الربط بالحياة اليومية

يهبط أبطال لعبة القفز بالمظلات عادةً على بعد أقل من 5 سنتيمترات من مركز الهدف.

المصدر: SkyDiving News

يمكنك أيضًا استخدام قياس الزاوية في إيجاد الاحتمالات الهندسية.
إن نسبة مساحة جزء من الدائرة إلى مساحة الدائرة كلها هي نفسها نسبة جزء من الدائرة المركزية إلى 360.
ستبرهن على ذلك في التدريب 27.



مثال 4 استخدام قياسات الزوايا في إيجاد الاحتمالات الهندسية

استخدم القرص الدوار في إيجاد الاحتمالات في كل مما يلي.

a. P(يتجه المؤشر إلى اللون الأصفر)

قياس الزوايا في المنطقة الصفراء هو 45.

P(المؤشر يسقط على اللون الأصفر) $= \frac{45}{360}$ أو 12.5%

b. P(يتجه المؤشر إلى اللون البنفسجي)

قياس الزوايا في المنطقة البنفسجية هو 105.

P(المؤشر يسقط على اللون البنفسجي) $= \frac{105}{360}$ أو حوالي 29%

c. P(يتجه المؤشر إلى اللون الأحمر أو الأزرق)

مجموع قياسات الزوايا في المنطقتين الحمراء والزرقاء هو 70 + 50 أو 120.

P(لم يسقط المؤشر على اللون الأحمر أو الأزرق) $= \frac{360 - 120}{360}$ أو حوالي 67%

تمرين موجّه

4A. P(يتوقف المؤشر على الأزرق)

4B. P(لا يتوقف المؤشر على الأخضر)

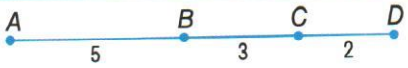
نصيحة دراسية

استخدام التقدير في المثال 4b. مساحة الجزء البنفسجي أقل من $\frac{1}{3}$ أو 33% من القرص الدوار. ومن ثم، فإن الإجابة 29% إجابة معقولة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1



النقطة X مختارة عشوائيًا على $\overline{AD}$ أوجد احتمال وقوع كل حدث.

1. $P(X$ تقع على $\overline{BD})$

2. $P(X$ تقع على $\overline{BC})$

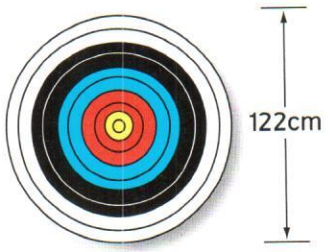
مثال 2

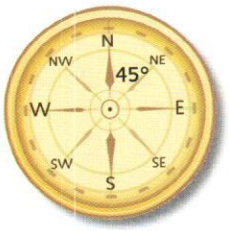
3. **أوراق اللعب** استُخدمت 43 بطاقة في لعبة أوراق اللعب، وكان من بينها ورقة الجوكر. حصل كل لاعب من أربعة لاعبين على عشر بطاقات ووضعت بقية البطاقات في كومة فوق بعضها. إذا لم يحصل حسام على بطاقة الجوكر، فما احتمال أن يحصل صديقه عليها. وما احتمال أن تكون تلك البطاقة في الكومة؟

المثالان 3 و 4

4. **الرماية** يستهدف الرامي هدفًا قطره 122 سم في 10 دوائر متحدة المركز تقل أقطارها بمقدار 12.2 سم كلما اقتربت من المركز. أوجد احتمال أن يصيب الرامي المركز.

5. **الملاحة** فقد أحد المخيمين طريقه في الغابة. ووجه بصلته في اتجاه عشوائي. أوجد احتمال أن يتوجه هذا الشخص في الاتجاه الشمالي N إلى الشمالي الشرقي NE.





التدريب وحل المسائل

مثال 1

الاستنتاج النقطة X اختيرت عشوائيًا على $\overline{FK}$. أوجد احتمال وقوع كل حدث.

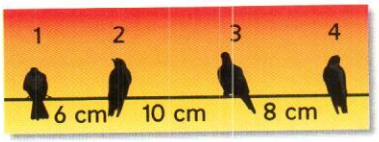
6. $P(X$ تقع على $\overline{FH})$

7. $P(X$ تقع على $\overline{GJ})$

8. $P(X$ تقع على $\overline{FH})$

9. $P(X$ تقع على $\overline{FG})$

10. **الطيور** تجلس أربعة طيور على سلك الهاتف. ما احتمال نزول طائر خامس على نقطة مختارة عشوائيًا بين الطائرين 1 و 4 واستقراره عند نقطة ما بين الطائرين 3 و 4؟



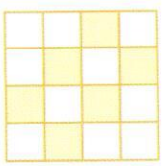
مثال 2

11. **التلفاز** يشاهد حسن التلفاز ورأي إعلان عن أقراص CD يعرف أن صديقه يريد الحصول عليها في عيد ميلاده. إذا أعيد عرض الإعلان في وقت عشوائي بعد فاصل مدته 3 ساعات، فما احتمال أن يرى الإعلان مجددًا أثناء مشاهدة برنامجه الكوميدي المفضل الذي مدته 30 دقيقة وسيعرض في اليوم التالي؟

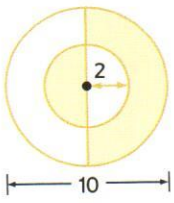
مثال 3

أوجد احتمال أن النقطة المختارة عشوائيًا تقع في المنطقة المظللة. وعلى فرض أن الأشكال التي تبدو منتظمة ومتطابقة هي فعلاً منتظمة ومتطابقة.

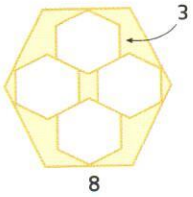
12.



13



14.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 4

استخدم القرص الدوار لإيجاد كل احتمال. إذا توقف القرص الدوار عند خط، تتم إدارته مرة أخرى.

15. (يتوقف المؤشر على اللون الأصفر)P

16. (يتوقف المؤشر على اللون الأزرق)P

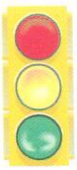
17. (يتوقف المؤشر على اللون الأخضر)P

18. (يتوقف المؤشر على اللون الأحمر)P

19. (لا يتوقف المؤشر على اللون الأحمر أو الأصفر)P

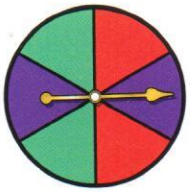
صف حدثًا به احتمال 33% لكل نموذج.

20.



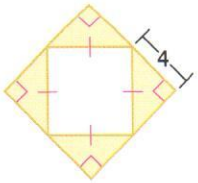
21.

22.

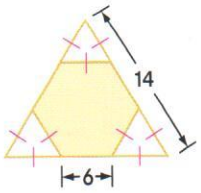


أوجد احتمال وقوع نقطة مختارة بشكل عشوائي داخل المنطقة المظللة.

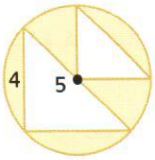
23.



24.



25.

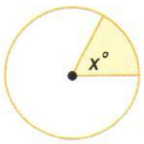


26. **الزراعة** موضح في الصورة تخطيط مزرعة ويمثل كل مربع قطعة أرض. قدّر مساحة كل حقل للإجابة عن كل سؤال.

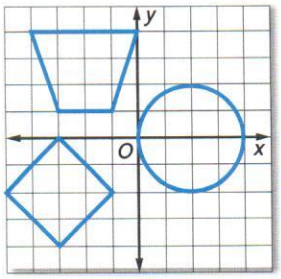
a. ما مساحة حقلي السبانخ والذرة معًا؟

b. أوجد احتمال استخدام قطعة أرض مختارة عشوائيًا في زراعة فول الصويا.

27. **الجبر** أثبت أن احتمال أن النقطة المختارة عشوائيًا في نقطة ستقع في المنطقة المظللة تساوي $\frac{x}{360}$.



28. **الهندسة الإحداثية** إذا اختيرت نقطة بشكل عشوائي في شبكة الإحداثيات الموضحة على اليسار. فأوجد كل احتمال.



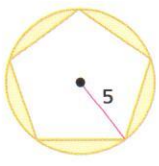
a. (النقطة داخل الدائرة)P

b. (نقطة داخل شبه المنحرف)P

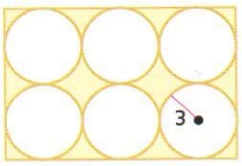
c. (نقطة داخل شبه المنحرف أو المربع أو الدائرة)P

الاستنتاج المنطقي **أوجد احتمال وقوع نقطة مختارة عشوائيًّا داخل المنطقة المظللة.**

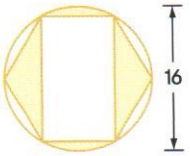
29.



30.



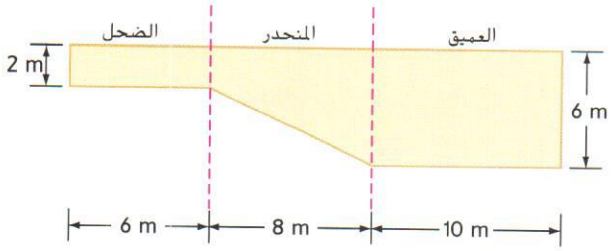
31.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

32. الهندسة الإحداثية فكرّ في نظام المتباينات، $x \le y$ و $6 \le x \le 1$، و $y \ge 1$.
إذا اختيرت النقطة (x, y) عشوائيًا في النظام، فما احتمال أن $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \ge 16$؟

33. الحجم يعيش دب قطبي في حديقة حيوان محلية بها حوض سباحة أضلاعه موضحة في الشكل التالي. إذا كان عرض حوض السباحة 20 مترًا. فما احتمال أن يكون الدب – الذي يحتمل بالتساوي أن يسبح في أي مكان – في المنطقة المنحدرة؟



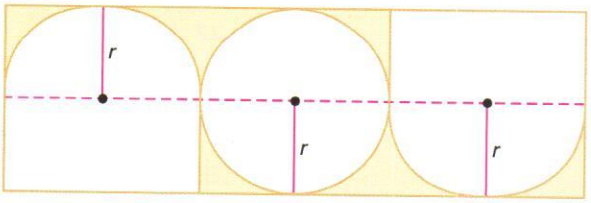
34. صناعة القرار تأجلت الرحلة الجوية التي كانت ستستقلها عبير وستتأخر بذلك على المسابقة العلمية الوطنية. وتخطط عبير لاستئجار سيارة من المطار، وتفضل شركة تأجير السيارات A على شركة تأجير السيارات B. تصل السيارة الصغيرة لشركة تأجير السيارات A كل 7 دقائق، بينما تصل السيارة الصغيرة لشركة تأجير السيارات B كل 12 دقيقة.

a. ما احتمال أن تضطر عبير إلى انتظار 5 دقائق أو أقل لرؤية كل سيارة؟ فسّر استنتاجك. (*تلميح:* استخدم نموذج المساحة.)

b. ما احتمال أن تضطر عبير إلى الانتظار لمدة 5 دقائق أو أقل لرؤية إحدى السيارتين؟ فسّر استنتاجك.

c. لا يمكن أن تنتظر عبير أكثر من 5 دقائق دون المخاطرة بالتأخر عن موعد المسابقة. إذا وصلت سيارة الشركة B أولاً، فهل ينبغي أن تنتظر سيارة الشركة A. أم تستقل سيارة الشركة B؟ فسّر استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

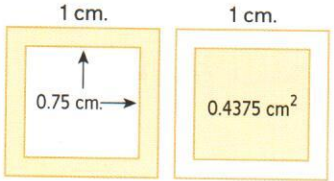


35. التحدي أوجد احتمال أن تقع نقطة مختارة عشوائيًا في المنطقة المظللة في الشكل. قرّب إلى أقرب عشرة من نسبة مئوية.

36. التبرير مثلث متساوي الساقين محيطه 32 سنتيمترًا. إذا كانت أطوال الأضلاع أعداد صحيحة، فما احتمال أن تكون مساحة المثلث 48 سم مربع بالضبط؟ فسّر.

37. الكتابة في الرياضيات هل يمكن اعتبار الأحداث الرياضية أحداثًا عشوائية؟ فسّر.

38. مسألة غير محددة الإجابة مثّل احتمال 20% لاستخدام ثلاثة أشكال هندسية مختلفة.



39. الكتابة في الرياضيات اشرح السبب في كون احتمال سقوط نقطة مختارة عشوائيًا في المنطقة المظللة من المربعات الموضحة هي نفسها لا تتغير.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة الطبع والتأليف حقوق الطبع

تدريب على الاختبار المعياري

40. الاحتمال تتضمن دائرة نصف قطرها 3 على مربع طول ضلعه 9. ما احتمال أن نقطة مختارة عشوائيًا داخل المربع تقع في داخل الدائرة؟

A $\frac{1}{9}$

B $\frac{1}{3}$

C $\frac{\pi}{9}$

D $\frac{9}{\pi}$

41. الجبر تساوي مساحة غرفة حمد $x^2 + 8x + 12$ مترًا مربعًا. تغطي عبوات طلاء سعة عشرة لترات مساحة قدرها $8 + 6x + x^2$ أمتار مربعة. ما التعبير الذي يعطي عدد عبوات الطلاء سعة 10 لترات التي ينبغي أن يشتريها حمد لطلاء غرفته؟

F $\frac{x+6}{x+4}$

G $\frac{x-4}{x-6}$

H $\frac{x+4}{x+6}$

J $\frac{x-4}{x+6}$

42. إجابة موسعة ينقسم القرص الدوار إلى 8 أقسام متساوية.

a. إذا توقف السهم عند أحد الأرقام. فما احتمال توقفه عند رقم 3؟

b. إذا توقف السهم عند أحد الأرقام. فما احتمال توقفه عند رقم فردي؟

43. SAT/ACT يوجد في صندوق 7 كرات زرقاء من الرخام، و 6 كرات حمراء، وكرتين بيضاء، و 3 كرات سوداء. إذا اختيرت كرة رخام عشوائيًا. فما احتمال أن تكون الكرة المختارة حمراء اللون؟

A 0.11

B 0.17

C 0.33

D 0.39

E 0.67

مراجعة شاملة

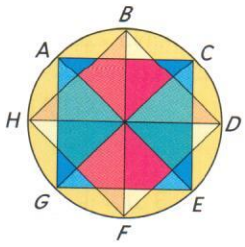
44. حفل زفاف يجلس أربعة أصدقاء على طاولة معًا في حفل زفاف. ما احتمال أن يجلس أحدهم على المقعد الأقرب إلى الباب؟ (الدرس 2-11)

مثّل الفضاء العيني لكل تجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري. (الدرس 1-11)

45. أمام حمدان خيار بأن يتلقى دروس موسيقى على مدار العامين التاليين وأن يعزف على الطبلة أو الجيتار.

46. بإمكان شيخة أن تشتري زوجًا من الأحذية إما مسطحًا وإما بكعب وباللون الأسود أو الأزرق السماوي.

الزجاج المعشق في تصميم لنافذة بالزجاج المعشق، كانت جميع الأقواس الصغيرة حول الدائرة متداخلة. على فرض أن مركز الدائرة هو النقطة O.



47. ما قياس كل من الأقواس الصغيرة؟

48. ما نوع الشكل $\triangle AOC$؟ فسّر.

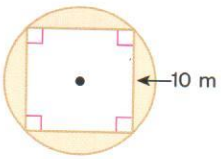
49. ما نوع الشكل متوازي الأضلاع $BDFH$؟ فسّر.

50. ما نوع الشكل متوازي الأضلاع $ACEG$؟ فسّر.

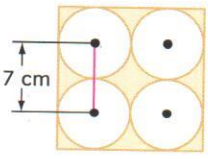
مراجعة المهارات

أوجد مساحة المنطقة المظللة. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة.

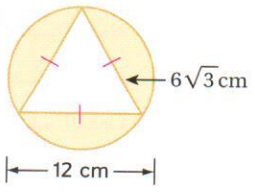
51.



52.



53.



McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © حقوق الطبع والتأليف

اختبار نصف الوحدة

الدروس من 11-1 إلى 11-3

1. الغداء يقدم أحد المتاجر وجبة غداء خاصة تتكون من شطيرة وحساء وحلوى ومشروب بسعر AED 4.99. ويبين الجدول أدناه الاختيارات المتاحة. (الدرس 11-1)

الشطيرة	الحساء	الحلوى	المشروب
سلاطة الدجاج	طماطم	كعك	شاي
لحم بقري	نودلز الدجاج	فطيرة	قهوة
تونة	خضراوات		كولا
شرائح اللحم			كولا خالية من السكر
			حليب

a. كم عدد وجبات الغداء المختلفة التي يمكن تكوينها من المكونات الموضحة في الجدول؟

b. إذا أضيف طبق حساء وقطعتان من الحلوى، فكم وجبة غداء مختلفة يمكن تقديمها؟

2. الأعلام كم إشارة مختلفة يمكن تكوينها بخمسة أعلام من أصل 8 أعلام مختلفة الألوان؟ (الدرس 11-1)

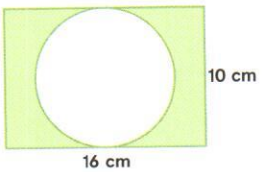
3. الملابس لدى غاية قمصان بستة ألوان: الأحمر والأزرق والأصفر والأخضر والنردي والبرتقالي. ويتوفر لديها قمصان من كل لون بأكمام قصيرة وأكمام طويلة. مثّل الفضاء العيني لاختيارات غاية من خلال عمل قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري. (الدرس 11-1)

4. الهجاء يوجد في كيس مكعب واحد لكل حرف من حروف كلمة TRAINS. إذا اخترت عشوائيًا تبديلاً من تلك الحروف، فما احتمال أن تكون تلك الحروف كلمة TRAINS؟ (الدرس 11-2)

5. الفكة لدى خالد 3 جيوب و 4 عملات معدنية مختلفة. بكم طريقة يمكنه وضع قطعة معدنية واحدة في كل جيب؟ (الدرس 11-2)

6. العملات المعدنية رُميت عشر عملات معًا في وقت واحد. كم عدد نتائج سقوط قطعة معدنية الثالثة ووجهها لأعلى؟ (الدرس 11-2)

7. أوجد احتمال وقوع نقطة مختارة بشكل عشوائي داخل المنطقة المظللة. (الدرس 11-3)



8. إجابة موسعة يُعلق حبل مشدود طوله 320 مترًا بين عمودين. على فرض أن فرصة انقطاع الحبل عند أي مكان متساوية. (الدرس 11-3)

a. حدد احتمال حدوث القطع في الـ 50 مترًا الأولى من الحبل.

b. حدد احتمال حدوث القطع على بعد 20 مترًا من أحد العمودين.

النقطة A مختارة عشوائيًا على $\overline{BE}$. أوجد احتمال كل حدث. (الدرس 11-3)

9. $P(A$ تقع على $\overline{CD})$

10. $P(A$ تقع على $\overline{BD})$

11. $P(A$ تقع على $\overline{CE})$

12. $P(A$ تقع على $\overline{DE})$

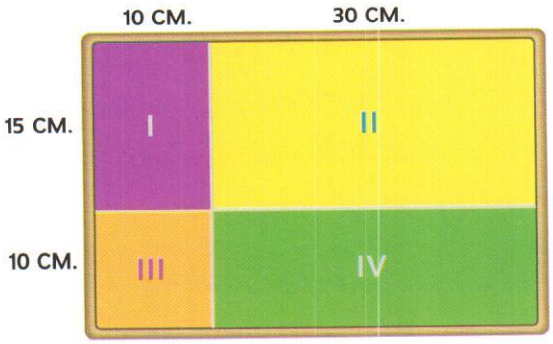
استخدم القرص الدوار لإيجاد كل احتمال. إذا توقف القرص الدوار عند خط، فسيتم تدويره مرة أخرى. (الدرس 11-3)

13. P(يتوقف المؤشر عند اللون الأصفر)

14. P(يتوقف المؤشر عند اللون الأزرق)

15. P(يتوقف المؤشر عند اللون الأحمر)

16. الألعاب كان هدف اللعبة في المهرجان أن يُرمى سهم صوب لوحة وإصابة منطقة III. (الدرس 11-3)



a. ما احتمال إصابة السهم المنطقة I؟

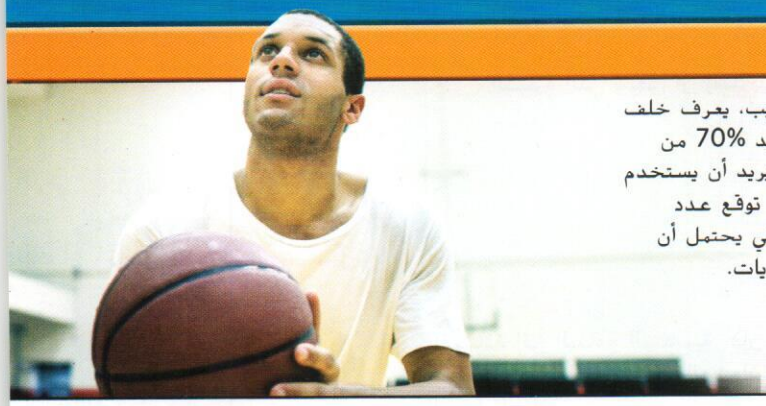
b. ما احتمال إصابة السهم المنطقة II؟

c. ما احتمال إصابة السهم المنطقة III؟

d. ما احتمال إصابة السهم المنطقة VI؟

McGraw-Hill Education مؤسسة محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

الدرس 11-4 المحاكاة



السابق
- إيجاد الاحتماليات باستخدام القياسات الهندسية.

الحالي
1. تصميم نموذج المحاكاة لتقدير الاحتمال.
2. تلخيص البيانات من خلال نماذج المحاكاة.

لماذا؟
- انطلاقًا من التدريب، يعرف خلف أنه نجح في تسديد 70% من الرميات الحرة، ويريد أن يستخدم هذه المعلومة في توقع عدد الرميات الحرة التي يحتمل أن يسددها في المباريات.

1 تصميم نموذج محاكاة

نموذج الاحتمال هو نموذج في الرياضيات يُستخدم في مطابقة ظاهرة عشوائية. **المحاكاة** هي استخدام نموذج الاحتمال في إعادة تمثيل الموقف مرات ومرات لتقدير احتماليات النتائج المختلفة. ويمكنك اتباع الخطوات التالية في تصميم نموذج المحاكاة.

المفهوم الأساسي تصميم نموذج محاكاة

الخطوة 1 حدد كل نتيجة محتملة واحتمالها النظري.

الخطوة 2 اذكر أي افتراضات.

الخطوة 3 صف نموذج الاحتمال المناسب للموقف.

الخطوة 4 عرّف المحاولة بالنسبة إلى الموقف واذكر عدد المحاولات المفترض إجراؤها.

نموذج الاحتمال الملائم له الاحتمال نفسها في نموذج المحاكاة الذي تحاول توقعه. وتعد الأمثلة الهندسية هي من نماذج الاحتمال العام.

مثال 1 تصميم نموذج محاكاة باستخدام نموذج هندسي

كرة السلة **سدد خلف 70% من رمياته الحرة في الموسم الأخير. صمم نموذج محاكاة يمكن استخدامه في تقدير احتمال الرميات الحرة التي سيسددها في هذا الموسم.**

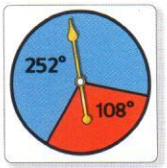
الخطوة 1 **النتائج المحتملة** — **الاحتمال النظري**
- يُسدد خلف رمية حرة. ← 70%
- يخفق خلف في تسديد رمية حرة. ← 30% أو (100 − 70)%

الخطوة 2 يشتمل نموذج المحاكاة الذي نقدمه على 40 محاولة.

الخطوة 3 يمكن هنا استخدام القرص الدوار المُقسم إلى قسمين، يتكون أحدهما من 70% من مساحة القرص الدوار، ويتكون القسم الآخر من 30%. لابتكار قرص دوار مثل هذا، أوجد قياس الزاوية المركزية لكل قسم.

رمية حرة صائبة: 70% من 360° = 252°

رمية حرة ضائعة: 30% من 360° = 108°



رمية حرة صائبة
رمية حرة ضائعة

الخطوة 4 يقوم شخص بتدوير القرص الدوار، وتمثل المحاولة تسديد رمية حرة واحدة. وتمثل المحاولة الناجحة رمية حرة صائبة، والمحاولة الفاشلة رمية حرة ضائعة. وتتكون المحاكاة من 40 محاولة.

المفردات الجديدة

نموذج الاحتمال probability model
المحاكاة simulation
متغير عشوائي random variable
قيمة التوقع expected value
قانون الأعداد الكبيرة Law of Large Numbers

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
استخدام نماذج الرياضيات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين موجّه

1. **المطاعم** يلصق أحد المطاعم أجزاء ألعاب بأكواب الشراب الكبيرة، ويقدم جائزةً للشخص الذي يجمع أجزاء اللعبة الستة جميعًا. صمم نموذج محاكاة مستخدمًا نموذجًا هندسيًا يمكن استخدامه في تقدير عدد الأكواب الكبيرة التي ينبغي أن يشتريها الشخص لتجميع أجزاء اللعبة الستة جميعًا.

نصيحة في حل المسائل

استخدام نموذج المحاكاة

توفر نماذج المحاكاة غالبًا إستراتيجية آمنة وفعالة في حل المسائل في المواقف حيث يكون استخدام الأساليب النظرية في الحل مجازفًا أو خطيرًا أو مستحيلاً. وينبغي أن تشتمل المحاكاة على بيانات يسهل الحصول عليها أكثر من البيانات الفعلية التي تستخدمها في النموذج.

بالإضافة إلى النماذج الهندسية، فإن نموذج المحاكاة يمكن إجراؤه أيضًا باستخدام النرد أو رمي القطعة المعدنية أو جداول الأعداد العشوائية، ومولدات الأعداد العشوائية. مثل المولدات المتوفرة على حاسبات التمثيل البياني.

مثال 2 تصميم نموذج محاكاة باستخدام الأعداد العشوائية

لون العيون وجدت دراسة أجريت على طلاب مدرسة الشرق الثانوية أن 40% من الطلاب عيونهم بنية، وأن 30% عيونهم عسلية، وأن 20% عيونهم زرقاء، وأن 10% عيونهم خضراء. صمم نموذج محاكاة يمكن استخدامه في تقدير احتمال لون عين أحد طلاب المدرسة إذا اختير عشوائيًا.

الخطوة 1 النتائج المحتملة — الاحتمال النظري

العيون البنية	←	40%
العيون العسلية	←	30%
العيون الزرقاء	←	20%
العيون الخضراء	←	10%

الخطوة 2 نفترض أن لون عيون الطالب سيقع ضمن واحدة من هذه الفئات الأربع.

الخطوة 3 استخدم مولّد الأعداد العشوائية في الحاسبة. عيّن الأعداد الصحيحة من 0 إلى 9 لتمثل بيانات الاحتمال بدقة، ولا يهم الأعداد المختارة فعليًا لتمثيل النتائج.

النتائج	الممثلة بـ
العيون البنية	0, 1, 2, 3
العيون العسلية	4, 5, 6
العيون الزرقاء	7, 8
العيون الخضراء	9

الخطوة 4 تقوم التجربة على اختيار طالب عشوائيًا وتسجيل لون عينه. ويتكون نموذج المحاكاة من 20 تجربة.

نصيحة دراسية

مولد الأعداد العشوائية

لتوليد مجموعة من الأعداد الصحيحة العشوائية في حاسبة التمثيل البياني، اضغط على MATH وحدد randInt في قائمة PRB. ثم أدخل قيم العدد الصحيح لبداية ونهاية النطاق الخاص بك وعدد الأعداد الصحيحة التي تريد استخدامها في كل محاولة.

تمرين موجّه

2. **كرة القدم** سدد خليفة 18% من ركلاته الحرة في الموسم الماضي. صمم نموذج محاكاة مستخدمًا مولد الأعداد العشوائي، بحيث يمكن استخدام ذلك النموذج في تقدير احتمال تسديده للركلة الحرة التالية.

2 تلخيص بيانات المحاكاة ستحتاج بعد تصميم نموذج المحاكاة إلى تنفيذ المحاكاة وتقرير نتائجها. وينبغي أن يتضمن ذلك تلخيصًا عدديًا وبيانيًا لبيانات المحاكاة، وكذلك تقديرًا لاحتمال النتائج المطلوبة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 تنفيذ نموذج المحاكاة وتلخيص البيانات

كرة السلة **راجع المحاكاة في المثال 1. نفذ نموذج المحاكاة، ثم قدم النتائج مستعينًا بالملخصات العددية والبيانية المناسبة.**

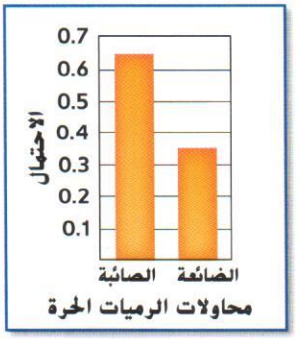
أنشئ جدول تكرار وسجل النواتج بعد تدوير القرص الدوار 40 مرة.

النتيجة	الإحصاء	التكرار
رمية حرة صائبة	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	26
رمية حرة ضائعة	𝍸 𝍸 ||||	14
الإجمالي		40

بناءً على بيانات المحاكاة، احسب احتمال تحقيق خلف الرمية الحرة المقبلة.

$$\frac{\text{عدد الرميات الحرة المُسددة}}{\text{عدد محاولات الرميات الحرة}} = \frac{26}{40} = 0.65$$ *هذه احتمال تجريبية.*

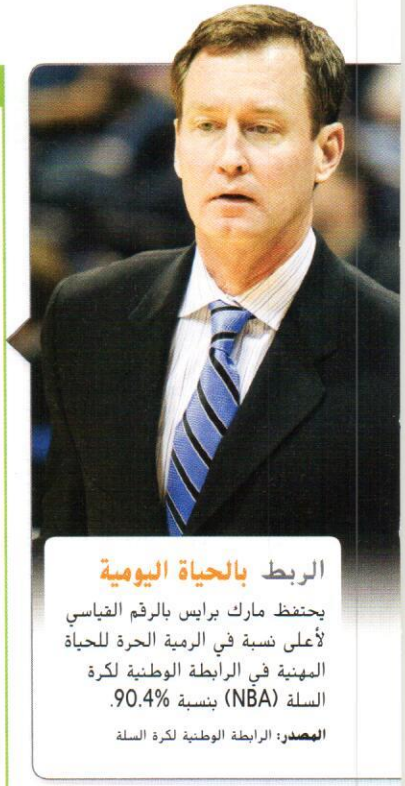
تبلغ احتمال أن يسدد خلف رميته الحرة التالية 0.65 أو 65%. لاحظ أن هذه النسبة قريبة من الاحتمال النظري، وهي 70%. إذًا، الاحتمال التجريبي لإضاعته رميته الحرة التالية تساوي 0.65 − 1 أو 35%.



ارسم تمثيلاً بيانيًّا شريطيًّا لهذه النواتج.

تمرين موجّه

3. **لون العيون** استخدم حاسبة التمثيل البياني في تنفيذ نموذج المحاكاة في المثال 2، ثم قدم النتائج مستخدمًا الملخصات العددية والبيانية المناسبة.



الربط بالحياة اليومية

يحتفظ مارك برايس بالرقم القياسي لأعلى نسبة في الرمية الحرة للحياة المهنية في الرابطة الوطنية لكرة السلة (NBA) بنسبة 90.4%.

المصدر: الرابطة الوطنية لكرة السلة

المتغير العشوائي هو متغير يمكنه افتراض مجموعة من القيم لكل منها احتمالات ثابتة. ففي تجربة رمي حجري نرد مثلاً، يمكن أن يمثل المتغير العشوائي X مجموع النتائج المحتملة لحجر النرد. ويبين الجدول بعض قيم المتغير X المعينة لنتائج هذه التجربة.

مجموع نتائج رمي حجري النرد.	
النتيجة	القيمة x
(1, 1)	2
(1, 2)	3
(2, 1)	3
(4, 5)	9
(6, 6)	12

قيمة التوقع، المعروفة أيضًا باسم توقع الرياضيات، هي القيمة المتوسطة للمتغير العشوائي الذي يتوقعه الشخص بعد تكرار تجربة أو محاكاة لعدد لانهائي نظريًا. اتبع الخطوات التالية لإيجاد قيمة التوقع $E(X)$ للمتغير العشوائي X.

المفهوم الأساسي حساب قيمة التوقع

الخطوة 1 اضرب قيمة X في احتمال حدوثها.

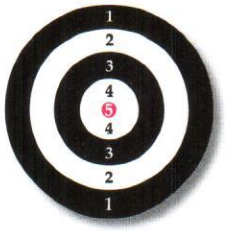
الخطوة 2 كرر الخطوة 1 لجميع القيم المحتملة من X.

الخطوة 3 أوجد مجموع النتائج.

بما أنه متوسط، فليس بالضرورة أن تكون قيمة التوقع مساوية للقيمة المحتملة للمتغير العشوائي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 حساب قيمة التوقع



الأسهم **افترض أنه تم إطلاق سهم إلى هدف معين. وكان نصف قطر الدائرة المركزية 1 سنتيمتر ويزيد نصف قطر كل دائرة تالية له بمقدار 4 بوصات عن الدائرة السابقة. وتظهر في الصورة قيمة النقطة في كل منطقة.**

a. على فرض أن المتغير العشوائي Y يمثل قيمة النقطة المعُينة لإحدى المناطق على لوحة الأسهم. احسب قيمة التوقع $E(Y)$ من كل ضربة.

احسب أولاً الاحتمالات الهندسية للهبوط في كل منطقة.

$$\text{المنطقة } 5 = \frac{\pi(1)^2}{\pi(1+4+4+4+4)^2} = \frac{1}{289}$$

$$\text{المنطقة } 4 = \frac{\pi(4+1)^2 - \pi(1)^2}{\pi(17)^2} = \frac{24}{289}$$

$$\text{المنطقة } 3 = \frac{\pi(4+5)^2 - \pi(5)^2}{\pi(17)^2} = \frac{56}{289}$$

$$\text{المنطقة } 2 = \frac{\pi(4+9)^2 - \pi(9)^2}{\pi(17)^2} = \frac{88}{289}$$

$$\text{المنطقة } 1 = \frac{\pi(4+13)^2 - \pi(13)^2}{\pi(17)^2} = \frac{120}{289}$$

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{120}{289} + 2 \cdot \frac{88}{289} + 3 \cdot \frac{56}{289} + 4 \cdot \frac{24}{289} + 5 \cdot \frac{1}{289} \text{ أو حوالي } 1.96$$

قيمة التوقع لكل رمية حوالي 1.96.

b. صمّم نموذج محاكاة لتقدير متوسط القيمة، أو متوسط نتائج المحاكاة للرمي في هذه اللعبة. كيف تقارن تلك القيمة بقيمة التوقع التي أوجدتها في الجزء a؟

حدد الأعداد الصحيحة 0-289 لتمثيل بيانات الاحتمال بدقة.

منطقة 1 = الأعداد الصحيحة 1-120

منطقة 2 = الأعداد الصحيحة 121-208

منطقة 3 = الأعداد الصحيحة 209-264

منطقة 4 = الأعداد الصحيحة 265-288

منطقة 5 = العدد الصحيح 289

استخدم حاسبة التمثيل البياني لتوليد 50 محاولة لأعداد صحيحة عشوائية من 1 إلى 289. سجّل النتائج في جدول التكرار، ثم احسب متوسط قيمة النتائج.

النتيجة	التكرار
المنطقة 1	16
المنطقة 2	13
المنطقة 3	13
المنطقة 4	8
المنطقة 5	0

$$\text{متوسط القيمة} = 1 \cdot \frac{16}{50} + 2 \cdot \frac{13}{50} + 3 \cdot \frac{13}{50} + 4 \cdot \frac{8}{50} + 5 \cdot \frac{0}{50} = 2.26$$

متوسط القيمة 2.26 أكبر من قيمة التوقع 1.96.

تمرين موجّه

4. النرد إذا رُمي نردان، لنفرض أن المتغير العشوائي X يمثل مجموع النتائج المحتملة.

A. أوجد قيمة التوقع $E(X)$.

B. صمم نموذج محاكاة ونفذه لتقدير متوسط القيمة في هذه التجربة. ما أوجه المقارنة بين هذه القيمة وبين قيمة التوقع التي أوجدتها في الجزء A؟

الاختلاف في متوسط القيمة من نموذج المحاكاة وقيمة التوقع في مثال 4 يوضح **قانون الأعداد الكبيرة**: كلما زاد عدد المحاولات في العملية العشوائية، اقترب متوسط القيمة من قيمة التوقع.

نصيحة دراسية

الاحتمال الهندسي تذكر أنه عند تحديد الاحتمالات الهندسية بالنسبة للأجسام، نفترض هبوط الجسم داخل المنطقة الهدف ومن المحتمل بالقدر نفسه أيضًا هبوطه في أي مكان داخل المنطقة.

الربط بتاريخ الرياضيات

ياكوب بيرنولي

(1654–1705) كان بيرنولي عالم رياضيات سويسريًا. وكان من الواضح له أنه كلما زادت الملاحظات عن موقف معين، زادت قدرة المرء على توقع النتائج المستقبلية. ولقد أثبت بالبرهان العلمي قانون الأعداد الكبيرة في كتابه *Ars Conjectandi* (Art of Conjecturing). المنشور سنة 1713.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

الأمثلة 1, 3

1. **الدرجات** حصلت فاطمة على درجة A في 80% من الاختبارات القصيرة لمادة الأحياء في الفصل الدراسي الأول. صمم نموذج محاكاة ونفذه مستخدمًا النموذج الهندسي لتقدير احتمال حصولها على الدرجة A في الاختبار القصير لمادة الأحياء في الفصل الدراسي الثاني. ثم اعرض النتائج مستخدمًا الملخصات العددية والبيانية المناسبة.

المثالان 2-3

2. **اللياقة البدنية** يبين الجدول النسبة المئوية للأعضاء المشاركين في أربع حصص في نادي اللياقة البدنية. صمم نموذج محاكاة ونفذه لتقدير احتمال مشاركة عضو جديد في النادي في كل حصة. واعرض النتائج مستخدمًا الملخصات العددية والبيانية المناسبة.

الصف الدراسي	نسبة التسجيلات %
التايكوندو	45%
اليوجا	30%
السباحة	15%
الملاكمة	10%

مثال 4

3. **ألعاب المهرجانات** الهدف من اللعبة الموضحة هو جمع النقاط باستخدام سهم لفرقعة البالونات. على فرض أن كل سهم سيصيب بالونًا.
   a. احسب قيمة التوقع من كل رمية.
   b. صمّم نموذج محاكاة لتقدير متوسط القيمة لهذه اللعبة.
   c. كيف تقارن قيمة التوقع بمتوسط القيمة؟

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1, 3

صمم نموذج محاكاة ونفذه باستخدام نموذج احتمال هندسي. ثم قدم النواتج باستخدام ملخصات عددية وبيانية مناسبة.

4. يبيع مسرح مجتمعي صغير تذاكر مسرحية بأربعة أسعار مختلفة. يعرض الجدول أدناه الأسعار والعدد المقابل لها من التذاكر المتاحة. ما قيمة التوقع لتذكرة مختارة عشوائيًا؟

أسعار التذاكر	
السعر	العدد المتاح
AED 8	40
AED 10	30
AED 15	20
AED 20	10

5. تتكون لعبة من مجموعة بطاقات مكتوب عليها الأعداد 1، أو 2، أو 3، أو 4. يسحب اللاعب بطاقةً من المجموعة في بداية الدورة، ثم يتحرك عدد المساحات حسب العدد المكتوب على البطاقة. يبين الجدول عدد كل نوع من البطاقات في المجموعة. ما قيمة التوقع للعدد المكتوب على بطاقة سُحبت من المجموعة؟

العدد على البطاقة	العدد على البطاقات
1	20
2	15
3	10
4	5

A 1 C 3

B 2 D 4

6. يختار الفائز برنامج الألعاب التليفزيوني مظروفًا من عشرة مظاريف بها جوائز نقدية. يبين الجدول عدد المظاريف التي تشتمل على كل مبلغ نقدي. ما قيمة التوقع للجائزة النقدية؟

المبلغ النقدي	عدد المظاريف
AED 1,000	4
AED 5,000	3
AED 10,000	2
AED 25,000	1

7. يرمز طائر الفواص إلى ولاية مينسوتا. يعرض الجدول أدناه بيانات عن تعداد طائر الفواص في 700 بحيرة عام 1989. إلى أقرب جزء من عشرة، ما عدد طيور الفواص المتوقع في بحيرة مختارة عشوائيًا؟

عدد طيور الفواص	عدد البحيرات
0	365
1	80
2	131
3	41
4	38
5	17
6	14
7	14

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8. يبلغ متوسط ضربات المضرب للاعب بيسبول في ولاية أوريجون 276. إذا ظل متوسط ضربات المضرب ثابتًا، فكم تقريبًا عدد ضربات المضرب التي يتوقع أن يضربها في المرات الخمسين القادمة؟

A 14
C 284
B 22
D 36

9. سددت فتحية 3 رميات حرة من كل 7 رميات حرة في مباريات كرة السلة العشر الأخيرة التي شاركت فيها. فكم تقريبًا عدد الرميات الحرة التي يتوقع أن تسددها خلال المباريات المئة القادمة؟

A 30
C 43
B 37
D 70

10. تختار محطة الإذاعة عشوائيًا 200 متصل لتعرف نوع الموسيقى التي يفضلون. ووجدت أن 55 متصلاً من أصل 200 متصل يفضلون أغاني الروك الحديثة، ويفضل 96 متصلاً أغاني الروك الكلاسيكية، بينما لم يذكر البقية نوعًا معينًا. كم متصلاً من المتصلين الخمسين التالين يتوقع أن يفضلوا موسيقى الروك الحديثة أو موسيقى الروك الكلاسيكية؟

A 14
C 244
B 17
D 38

11. اختارت فوزية عشوائيًا 50 نباتًا في دار الحضانة لفحصها لتحديد هل هي مصابة بحشرة المنّ أم لا. واكتشفت أن 7 نباتات مصابة بهذه الحشرات. إذا كان في دار الحضانة 780 نباتًا، فما العدد المتوقع للنباتات المصابة بحشرة المنّ؟

A 109
C 350
B 111
D 430

12. بينت عينة عشوائية من 100 قميص في أحد المصانع أن هناك فجوات في الخياطة في أربعة قمصان. إذا كانت العينة 1500 قميص، فما العدد المتوقع للقمصان التي بها فجوات مشابهة؟

A 25
C 60
B 40
D 375

13. إذا بينت عينة عشوائية من 6 طائرات حدوث تأخير في 18% من 1,200 رحلة طيران، فكم رحلة طيران من الرحلات الـ 150 التالية يتوقع أن تصل في موعدها؟

A يمكن توقع أن جميع الرحلات الجوية ستصل في موعدها.

B يمكن توقع أنه لن تصل أي رحلة جوية في موعدها.

C يمكن توقع أن 27 من الرحلات الجوية ستصل في موعدها.

D يمكن توقع أن 123 من الرحلات الجوية ستصل في موعدها.

14. استُخدم مولد الأعداد العشوائية في ابتكار سلسلة من الأعداد العشوائية من 0 إلى 9. يبين الجدول التالي النتائج التي تم الحصول عليها.

العدد	التكرار
0	2
1	5
2	4
3	2
4	8
5	11
6	0
7	4
8	6
9	2

ما الاحتمال التجريبية للحصول على عدد زوجي من مولد الأعداد العشوائية؟

A $\frac{23}{44}$
C $\frac{21}{44}$
B $\frac{1}{2}$
D $\frac{5}{11}$

15. **تمثيل النماذج** استخدمت لمياء إحصائياتها من الموسم الأخير لتصمّم نموذج محاكاة باستخدام مولد أعداد عشوائية للتنبؤ بما يتوقع أن تحرزه كلما حصلت على الكرة.

قيم الأعداد الصحيحة	النقاط المحرزة	التكرار
1-14	0	31
15	1	0
16-28	2	17
29-30	3	2

a. استنادًا إلى جدول التكرار، ما الذي افترضته لمياء أن يكون الاحتمال النظري بأن تحرز نقطتين عندما تحصل على الكرة؟

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

b. ما متوسط القيمة لحصول لمياء على الكرة؟ وما قيمة التوقع؟

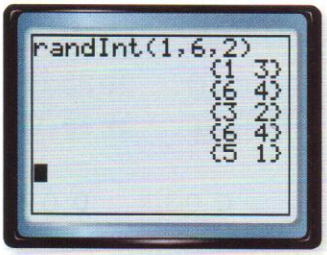
c. هل تتوقع أن تكون بيانات المحاكاة مختلفة؟ إذا كانت كذلك، فسّر ذلك. إذا لم تكن كذلك، فاشرح السبب.

16. **التمثيلات المتعددة** ستستكشف في هذه المسألة قيمة التوقع.

a. **عملي** ارمي حجري نرد 20 مرة وسجل مجموع كل رمية.

b. **عددي** استخدم برنامج توليد الأعداد العشوائي على آلة حاسبة لتوليد 20 زوجًا من الأعداد الصحيحة بين 1 و6. سجّل مجموع كل زوج ثنائي.

c. **جدولي** انسخ الجدول أدناه وأكمله باستخدام نواتجك من الجزأين a و b.



المحاولة	مجموع رمي النرد	مجموع النتائج من برنامج توليد الأعداد العشوائية
1		
2		
...		
20		

d. **بياني** استخدم تمثيلاً بيانيًا شريطيًّا لتمثيل عدد مرات حدوث كل مجموع محتمل في الدورات الخمس الأولى. كرّر العملية للدورات العشر الأولى، ثم نتائج جميع الدورات العشرين.

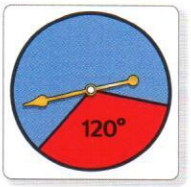
e. **لفظي** كيف يتغير شكل التمثيل البياني الشريطي مع كل محاولة إضافية؟

f. **تمثيل** بياني مثّل عدد مرات كل مجموع محتمل يحدث مع برنامج توليد الأعداد العشوائي بيانيًّا في صورة تمثيل بياني شريطي.

g. **لفظي** كيف تقارن التمثيلات البيانية لمحاولة النرد بمحاولة العدد العشوائي؟

h. **تحليلي** بناءً على التمثيلات البيانية، في رأيك كيف تكون قيمة التوقع في كل تجربة؟ فسّر استنتاجك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا



17. **الفرضيات** للتجربة ثلاث نتائج محتملة بالتساوي وهي *A*، و *B*، و *C*. هل يمكن استخدام القرص الدوار الموضح في المحاكاة في توقع احتمال النتيجة *C*؟ فسّر استنتاجك.

18. **التبرير** هل يمكن استخدام رمي القطعة المعدنية *أحيانًا*، أم *دائمًا*، أم *مطلقًا* في محاكاة تجربة لها نتيجتان محتملتان؟ فسّر.

19. **التبرير** عند تصميم نموذج محاكاة فيه تُلقى الأسهم على أهداف معينة، ما الافتراضات التي يجب اتخاذها ولماذا يجب اتخاذها؟

20. **مسألة غير محددة الإجابة** صف تجربةً لم تكن قيمة التوقع فيها نتيجة محتملة. فسّر.

21. **الكتابة في الرياضيات** كيف تختلف قيمة التوقع عن الاحتمال؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

22. الاحتمال ألقت لاميس 3 عملات معدنية في وقت واحد وكررت ذلك 9 مرات أخرى. تظهر نتائجها أدناه، حيث تمثل H وجه الصورة وتمثل T وجه الكتابة. اعتمادًا على نتائج لاميس، ما احتمال أن تقع مجموعة من 3 عملات بحيث تكون ناحية الصورة لأعلى؟

H H H	T T T
H H T	H T T
T T H	T T H
T H T	H T H
H H H	H H T

A 0.1 **B** 0.2 **C** 0.3 **D** 0.9

23. الجبر يجمع سعيد الكتب الكوميدية، ولديه الآن 20 كتابًا في مجموعته. ويضيف إليها 3 كتب كل شهر. كم شهرًا يحتاج سعيد ليصبح عدد الكتب في مجموعته 44 كتابًا؟

F 5 **G** 6 **H** 8 **J** 15

24. إجابة قصيرة صمم سالم نموذج محاكاة لتحديد عدد مرات تدوير اللاعب لعدد أكبر من 4 في حجر النرد في اللعبة اللوحية التي تتكون من 5 دورات. يبين الجدول النتائج التي حصل عليها من 50 محاولة. ما احتمال أن يقوم اللاعب بتدوير عدد أكبر من 4 مرتين أم أكثر في خمس دورات؟

عدد الدورات أكبر من 4	التكرار
0	8
1	15
2	18
3	9
4	0
5	0

25. SAT/ACT إذا كان برطمان يحتوي على 150 حبة فول سوداني و 60 حبة من الكاجو، فما الاحتمال التقريبي لاختيار حبة كاجو من البرطمان عند الاختيار العشوائي؟

A 0.25 **C** 0.33 **E** 0.71

B 0.29 **D** 0.4

مراجعة شاملة

النقطة X مختارة عشوائيًا على $\overline{QT}$. أوجد احتمال كل حدث. (الدرس 3-11)

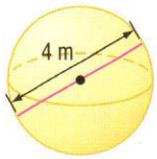
26. $P(X$ تقع على $\overline{QS})$

27. $P(X$ تقع على $\overline{RT})$

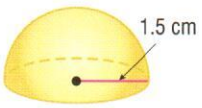
28. **الكتب** تختار منال كتبًا من بين 10 كتب في المكتبة. ما احتمال أن تختار 3 كتب معينة لتلق نظرة عليها من الكتب العشرة الأولى؟ (الدرس 2-11)

أوجد مساحة سطح كل شكل. قرّب النتيجة إلى أقرب جزء من عشرة.

29.



30.



31.

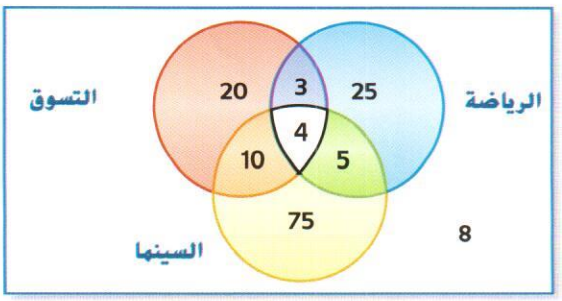
مراجعة المهارات

32. الترفيه سُئلت مجموعة مكونة من 150 طالبًا عما يريدون فعله أثناء وقت فراغهم.

a. كم طالبًا يريد الذهاب إلى السينما أو الخروج للتسوق؟

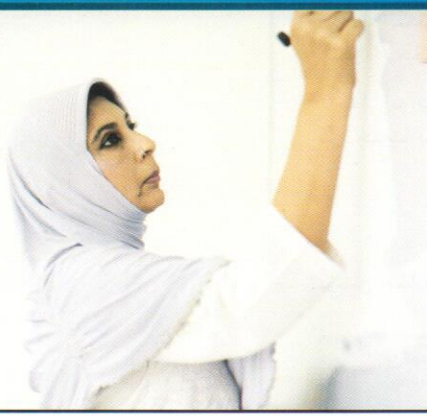
b. ما النشاط الذي ذكره 37 طالبًا؟

c. كم طالبًا *لم* يقل إنه يريد الذهاب إلى السينما؟



McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

الدرس 11-5 احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة



السابق
- تمكنت من إيجاد احتمالات بسيطة

الحالي
1. إيجاد احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة.
2. إيجاد احتمالات الأحداث علمًا بوقوع أحداث أخرى.

لماذا؟
- يُجري طلاب حصة الكيمياء الثمانية عشر لدى المعلمة منى سحبًا لتحديد من سيقدم عرضه أولاً. ويأمل سلطان أن يُختار أولاً ويريد صديقه صالح أن يكون الثاني.

المفردات الجديدة
- **الحدث المركب** compound event
- **الأحداث المستقلة** independent events
- **أحداث غير مستقلة** dependent events
- **احتمال مشروط** conditional probability
- **شجرة الاحتمال** probability tree

ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تجريدية وكميّة.
استخدام نماذج الرياضيات.

1 الأحداث المستقلة وغير المستقلة

يتكون **الحدث المركب** من حدثين بسيطين أو أكثر. في المثال أعلاه، يُعد اختيار سلطان وصالح لتقديم عرضهم أولاً حدثًا مركبًا، فهو يتكون من حادث اختيار سلطان وحادث اختيار صالح.

ويمكن أن تكون الأحداث المركبة مستقلة أو غير مستقلة.

- الحدثان A و B **مستقلان** إذا كانت احتمال وقوع الحدث A لا تؤثر على احتمال وقوع الحدث B.
- الحدثان A و B **غير مستقلين** إذا كانت احتمال وقوع الحدث A تغير بطريقةٍ ما احتمال وقوع الحدث B.

عند اختيار بعض العناصر من مجموعة من الأشياء، إذا استبدلت العنصر في كل مرة، فإن عملية اختيار العناصر الجديدة هي أحداث مستقلة. وإذا لم تستبدل العنصر في كل مرة، فإن اختيار العناصر الجديدة هي أحداث غير مستقلة.

مثال 1 تحديد الأحداث المستقلة وغير المستقلة

حدد ما إذا كانت الأحداث *مستقلة* أم *غير مستقلة*، ثم فسّر استنتاجك.

a. تم إلقاء قطعة نقد معدنية، ثم أُلقيت قطعة نقد معدنية أخرى.

لم تغير نتيجة إلقاء القطعة نقد المعدنية الأولى بأي شكل احتمال نتيجة إلقاء القطعة المعدنية الثانية. ومن ثم، فإن الحدثين *مستقلان*.

b. في مثال العرض في الصف الدراسي المذكور أعلاه، تم اختيار اسم طالب واحد ولم تتم إعادته، ثم جرى اختيار اسم طالب ثانٍ.

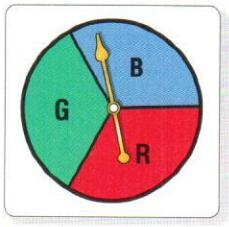
تتم إزالة اسم الطالب الأول بعد اختياره ولا يمكن إعادة اختياره مجددًا. ويؤثر هذا على احتمال اختيار الشخص الثاني. ومن ثم يقل الفضاء العيني باسم واحد. وهكذا، فإن الحدثين غير *مستقلين*.

تمرين موجّه

1A. اُختيرت بطاقة من مجموعة من البطاقات، ثم أُعيدت إلى مكانها مرة أخرى. واُختيرت بعدئذٍ بطاقة ثانية.

1B. اختارت ياسمين قميصًا من خزانتها لترتديه يوم الاثنين، ثم اختارت قميصًا مختلفًا لترتديه يوم الثلاثاء.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



على فرض أنه تم رمي قطعة نقد معدنية وتدوير القرص الدوار الموضح. يكون الفضاء العيني لهذه التجربة هو

{(H, B), (H, R), (H, G), (T, B), (T, R), (T, G)}.

باستخدام الفضاء العيني، احتمال الحدث المركب لسقوط قطعة النقد المعدنية على الصورة وتوقف القرص الدوار على اللون الأخضر هو $P(H \text{ و } G) = \frac{1}{6}$.

لاحظ أنه يمكن إيجاد الاحتمال ذاته عن طريق ضرب احتمالات كل حدث بسيط.

$$P(H) = \frac{1}{2} \quad P(G) = \frac{1}{3} \qquad P(H \text{ و } G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

يوضح هذا المثال القاعدة الأولى من قاعدتي ضرب الاحتمالات.

المفهوم الأساسي احتمال وقوع حدثين مستقلين

الشرح احتمال وقوع كلا الحدثين المستقلين هو ناتج ضرب احتمالات كل حدث بمفرده.

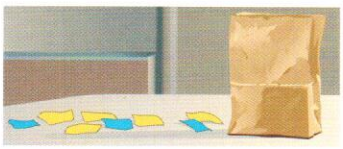
الرموز إذا كان الحدثان A و B مستقلين، إذًا $P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B)$.

قراءة في الرياضيات

و حرف العطف **و** هو عنصر رئيسي في المعادلة يشير إلى ضرب الاحتمالات.

ويمكن توسيع نطاق هذه القاعدة على أي عدد من الأحداث.

مثال 2 من الحياة اليومية احتمال وقوع الأحداث المستقلة



النقل مها وصديقاتها ستذهبن إلى حفل موسيقي. كتبت الفتيات أسماءهن في أوراق صغيرة ووضعتها داخل كيس. إذا سحبت الفتاة ورقة صفراء، فستذهب إلى الحفل في سيارة كبيرة، بينما إذا سحبت ورقة زرقاء، فستذهب إلى الحفل في سيارة عادية.

على فرض أن مها سحبت ورقة ولكن لم تعجبها النتيجة، وأعادت الورقة إلى الكيس وسحبت ورقة أخرى. ما احتمال أن تكون الورقة التي ستسحبها زرقاء؟

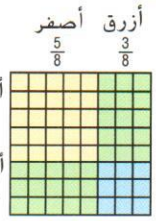
هذان الحدثان مستقلان، حيث استبدلت مها الورقة التي أخذتها. على فرض أن B تمثل ورقة زرقاء و Y تمثل ورقة صفراء.

	السحب 2		السحب 1
احتمال وقوع الأحداث المستقلة			
$P(B \text{ و } B) = P(B)$	$\cdot$	$P(B)$	
$= \frac{3}{8}$	$\cdot$	$\frac{3}{8}$ أو $\frac{9}{64}$	$P(B) = \frac{3}{8}$

إذًا، فاحتمال أن تسحب مها ورقتين زرقاوين هي $\frac{9}{64}$ أو حوالي 14%.

نصيحة دراسية

استخدام نموذج المساحة يمكنك أيضًا استخدام نموذج المساحة الموضح أدناه لحساب احتمال أن تكون الورقتان زرقاوين. تمثل المنطقة الزرقاء احتمال سحب ورقتين زرقاوين متتاليتين. ومساحة هذه المنطقة تساوي $\frac{9}{64}$ من النموذج بأكمله.



تمرين موجّه

أوجد الاحتمال في كل مما يلي.

2A. تم رمي قطعة نقد معدنية وحجر نرد. ما احتمال أن يظهر على الوجة العلوي لقطعة النقد صورة واستقرار النرد على العدد 6؟

2B. على فرض رمي قطعة النقد أربع مرات. ما احتمال أن تظهر الكتابة على القطع الأربعة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تتناول قاعدة ضرب الاحتمالات الثانية احتمال وقوع حدثين غير مستقلين.

المفهوم الأساسي احتمال وقوع حدثين غير مستقلين

الشرح احتمال وقوع كلا الحدثين غير المستقلين هو ناتج ضرب احتمال وقوع الحدث الأول، ثم احتمال وقوع الحدث الثاني بعد وقوع الحدث الأول بالفعل.

الرموز إذا كان الحدثان A و B غير مستقلين، إذًا

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B|A).$$

انتبه!
الترميز المشروط يجب عدم تفسير الرمز "|" في الترميز $P(B|A)$ على أنه رمز قسمة.

ويمكن توسيع نطاق هذه القاعدة على أي عدد من الأحداث.

يُقرأ الترميز $P(B|A)$ كالتالي: *احتمال وقوع الحدث B علمًا بوقوع الحدث A بالفعل*. ويُسمى هذا **الاحتمال المشروط**.

مثال 3 احتمال وقوع الأحداث غير المستقلة

النقل بالرجوع إلى المثال 2، على فرض أن مها سحبت ورقةً ولم تعدها. ثم سحبت صديقتها موزة ورقة أخرى، فما احتمال أن تسحب الصديقتان ورقة صفراء؟

هذان الحدثان غير مستقلين. فلم تعد مها الورقة التي أخذتها.

احتمال وقوع الأحداث غير المستقلة

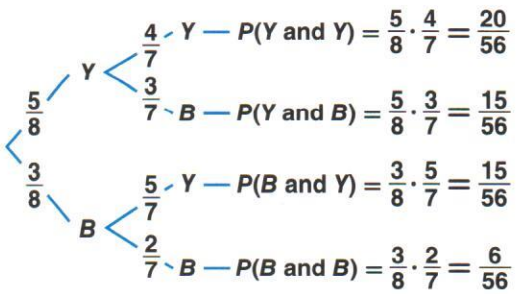
$$P(Y \text{ and } Y) = P(Y) \cdot P(Y|Y)$$

يتبقى بعد اختيار الورقة الصفراء 7 ورقات إجمالاً، 4 منها صفراء.

$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \text{ أو } \frac{5}{14}$$

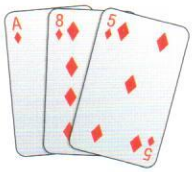
إذًا، فاحتمال أن تختار الصديقتان ورقة صفراء هي $\frac{5}{14}$ أو حوالي 36%.

التحقق يمكنك استخدام مخطط شجري للاحتمالات يُسمى **شجرة الاحتمالات** للتحقق من هذه النتيجة. احسب احتمال كل حدث بسيط في المرحلة الأولى، وكل احتمال مشروط في المرحلة الثانية. ثم اضرب كل فرع لإيجاد احتمال كل نتيجة.



يجب أن يكون مجموع الاحتمالات 1.

$$\frac{20}{56} + \frac{15}{56} + \frac{15}{56} + \frac{6}{56} = \frac{56}{56} = 1 \quad ✓$$



تمرين موجّه

3. اختيرت ثلاث بطاقات من مجموعة أوراق اللعب وعددها 52 بطاقة. ما احتمال أن تكون البطاقات الثلاث بشكل الماسة إذا لم يتم استبدال البطاقة الأولى والثانية؟

الربط بالحياة اليومية

توصلت دراسة حديثة إلى أنه مع وجود ثلاثة ركاب مراهقين أو أكثر في السيارة، فإن 85% من الحوادث القاتلة لسيارات يقودها مراهقون نتجت عن خطأ من السائق، ومن بينها 50% تقريبًا نتيجة السرعة الزائدة و 70% تقريبًا تضمنت الحادثة سيارة واحدة.

المصدر: المجلس الوطني للسلامة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 الاحتمال المشروط

بالإضافة إلى استخدام الاحتمال المشروط في إيجاد احتمال وقوع حدثين مستقلين أو أكثر، فيمكن استخدامه أيضًا عند معرفة معلومات إضافية عن حدث ما.

قراءة في الرياضيات

الاحتمال المشروط

(فردي | P(5 تُقرأ كالتالي: *احتمال أن يكون العدد الظاهر 5 علمًا بأن العدد الظاهر فردي.*

على فرض أنه تم رمي حجر النرد وكان العدد فرديًا.
ما احتمال أن يكون هذا العدد هو 5؟

يوجد ثلاثة أعداد فردية يمكن ظهورها، إذًا فقد انخفض الفضاء العيني من {1, 2, 3, 4, 5, 6} إلى {1, 3, 5}. إذًا، فاحتمال أن يكون العدد هو 5 هي $P(5 \mid \text{فردي}) = \frac{1}{3}$.

مثال 4 على الاختبار المعياري الاحتمال المشروط

يعقد طلاب صف المعلمة مايسة مناظرةً. يسحب الطلاب الثمانية المشاركون في المناظرة بطاقات مرقمة بأعداد صحيحة متعاقبة من 1 إلى 8 عشوائيًا.

- **ينضم الطلاب الذين يسحبون أعدادًا فردية إلى الفريق المدافع.**
- **ينضم الطلاب الذين يسحبون أعدادًا زوجية إلى الفريق المعارض.**

إذا كان أيمن في الفريق المعارض، فما احتمال أن يسحب العدد 2؟

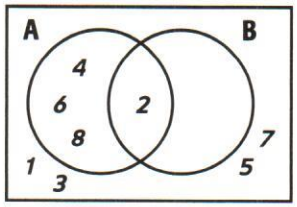
A $\frac{1}{8}$ B $\frac{1}{4}$ C $\frac{3}{8}$ D $\frac{1}{2}$

قراءة فقرة الاختبار

بما أن أيمن في فريق المعارضة، فيجب أن يسحب عددًا زوجيًا. إذًا ينبغي إيجاد احتمال أن يكون العدد المسحوب هو 2، مع العلم بأن العدد المسحوب كان زوجيًا. هذه المسألة مسألة احتمال مشروط.

حَل فقرة الاختبار

على فرض أن A هو حدث سحب عدد زوجي. وعلى فرض أن B هو حدث سحب العدد 2.



صمم مخطط فن لتمثيل هذا الموقف. يوجد أربعة أعداد زوجية فقط في الفضاء العيني، ويوجد عدد 2 واحد فقط. ومن ثم، فإن $P(B|A) = \frac{1}{4}$. الإجابة هي B.

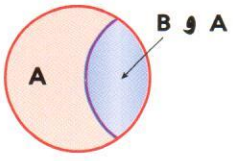
نصيحة عند حل الاختبار

استخدام مخطط فن استخدم مخطط فن لمساعدتك في تصور العلاقة بين نتائج حدثين.

تمرين موجّه

4. عند رمي حجري نرد، فما احتمال أن يظهر على أحدهما العدد 4، مع العلم أن مجموع حجري النرد هو 9؟

F $\frac{1}{6}$ G $\frac{1}{4}$ H $\frac{1}{3}$ J $\frac{1}{2}$



بما أن الاحتمال المشروط يقلل الفضاء العيني، فيمكن تحويل مخطط فن في المثال 4 إلى أبسط صورة كما هو موضح، حيث يمثل تقاطع الحدثين تلك النتائج في A و B. ويدل ذلك على الصيغة التالية.

$$P(B|A) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(A)}.$$

المفهوم الأساسي الاحتمال المشروط

الاحتمال المشروط لـ B مع العلم بأن A تساوي $P(B|A) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(A)}$، حيث $P(A) \neq 0$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1

حدد ما إذا كانت الأحداث *مستقلة* أو *غير مستقلة*. فسّر.

1. أدى عبد الرحمن اختبار SAT يوم السبت وحصل على 1350 درجة. وأدى اختبار ACT في الأسبوع التالي وحصل على 23 درجة.

2. وصل فريق كرة السلة الذي تلعب له نبيلة إلى الدور النهائي لأربعة فرق. وإذا فازوا، فسيلعبون مباراة البطولة.

مثال 2

3. **أوراق اللعب** اختيرت بطاقة عشوائيًا من مجموعة أوراق اللعب وعددها 52 بطاقة. وتمت إعادة تلك البطاقة واختيار بطاقة أخرى. ما احتمال اختيار البطاقتين الموضحتين على اليسار؟

مثال 3

4. **النقل** يستقل عبد الرحيم الحافلة بعد العمل، وتتكلف رحلته إلى المنزل AED 0.50. إذا كان معه في جيبه ثلاث عملات معدنية فئة 25 فلسًا، وعملتان فئة 5 فلسات. فأوجد احتمال أن يأخذ عشوائيًا عملتين فئة 25 فلسًا بالتوالي، على فرض أن فرصة حدوث الحدثين متساوية.

مثال 4

5. **إجابة شبكية** يلعب 10 أصدقاء لعبة الكرة الخادعة كل يوم سبت في متنزه محلي. لاختيار الفرق، يسحبون عشوائيًا بطاقات مرقمة بأعداد صحيحة متعاقبة من 1 إلى 10. ينضم اللاعبون الذين يسحبون الأعداد الفردية إلى الفريق A، والذين يسحبون الأعداد الزوجية إلى الفريق B. ما احتمال أن يسحب لاعب في الفريق B البطاقة رقم 10؟

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 3-1

التبرير **حدد ما إذا كانت الأحداث *مستقلة* أم *غير مستقلة*. ثم أوجد الاحتمال.**

6. في لعبة، رمي حجر النرد على عدد زوجي، ثم لف القرص الدوار المرقم من 1 إلى 5 وتحصل على عدد فردي.

7. تُسحب بطاقة الملك من مجموعة أوراق اللعب التي تضم 52 بطاقة دون إعادتها، ثم تُسحب بعدئذٍ بطاقة ملك ثانية.

8. يوجد في حقيبة 3 كرات زجاجية خضراء و 6 كرات زجاجية زرقاء، تم سحب كرة زجاجية زرقاء ولم تُعد ثانيةً، وسُحبت بعدئذٍ كرة زجاجية زرقاء.

9. عند رمي حجري نرد والحصول على المجموع 5 في كل مرة.

10. **ألعاب** تم تدوير القرص الموضح يسارًا في إحدى الألعاب وتم رمي عملة معدنية. ما احتمال الحصول على عدد زوجي على القرص الدوار وسقوط القطعة المعدنية على الكتابة؟

11. **الهدايا** يعقد صف نجاة حفلة لتبادل الهدايا. سحبت نجاة أولاً، وسحبت صديقتها نجلاء ثانيًا. إذا شارك في السحب 18 طالبةً، فما احتمال أن تسحب نجلاء ونجاة أسماء بعضهما البعض؟

12. **الإجازة** وجد استطلاع رأي أجري في العمل أن 8 من كل 10 موظفين حصلوا على إجازة في الصيف الماضي. إذا تم اختيار أسماء 3 موظفين عشوائيًا، مع إعادة الأسماء مرة أخرى، فما احتمال أن يكون جميع الموظفين الثلاثة قد ذهبوا في إجازة الصيف الماضي؟

13. **الحملات** يبين الجدول عدد كل لون من شارات حملة اتحاد الطلاب التي يجب أن توزعها نسرين. إذا وزعت نسرين الشارات عشوائيًا، فما احتمال أن يكون لون الشارة التي وُزعت أولاً وثانيًا كلاهما أحمر؟

لون الشارة	الكمية
أزرق	20
أبيض	15
أحمر	25
أسود	10

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4

14. تم اختيار كرة زجاجية حمراء عشوائيًا من كيس به كرتان زرقاوان، و 9 كرات زجاجية حمراء ولم يتم استبدالها. ما احتمال أن تكون الكرة الزجاجية الثانية التي سيتم اختيارها خضراء؟

15. تم رمي حجر نرد. إذا كان العدد الظاهر أكبر من 2. فأوجد احتمال أن يكون 6.

16. محيط الشكل الرباعي يساوي 12، وأطوال جميع الأضلاع أعدادًا صحيحة فردية، فما احتمال أن يكون الشكل الرباعي معينًا؟

17. تم تدوير قرص دوار مرقم من 1 إلى 12. أوجد احتمال أن العدد الذي تم تدويره هو 11، علمًا بأن العدد الذي تم تدويره كان عددًا فرديًا.

18. **الصفوف الدراسية** احتمال أن يختار الطالب في مدرسة نهلة مادتي الهندسة واللغة الفرنسية هي 0.064. واحتمال أن يختار الطالب مادة اللغة الفرنسية هي 0.45. ما احتمال أن يختار الطالب مادة الهندسة إذا اختار اللغة الفرنسية؟

19. **التقنية** في مدرسة خالد الثانوية، فاز 43% من الطلاب بمُشغل أقراص CD وفاز 28% بمُشغل أقراص CD ومُشغل MP3. ما احتمال أن يفوز الطالب بمُشغل MP3 إذا كان يملك أيضًا مُشغل CD؟

20. **البرهان** استخدم صيغة لاحتمال وقوع حدثين غير مستقلين (B و A) $P(A$ لاستخلاص قانون الاحتمال المشروط لوقوع $P(B|A)$.

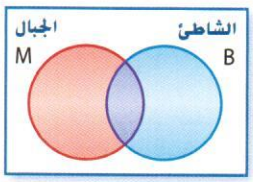
21. **التنس** يحدث الخطأ المزدوج في التنس عندما يفشل لاعب الإرسال في توجيه إرساله دون أن يدوس على خط الإرسال في محاولتين. كانت النسبة المئوية لإرسال نورا الأولى هي 40%، بينما كانت النسبة المئوية لإرسالها الثاني هي 70%.

a. صمم شجرة الاحتمال التي تبين كل نتيجة.

b. ما احتمال أن ترتكب نورا خطأً مزدوجًا؟

c. صمّم نموذج محاكاة باستخدام برنامج مولد أعداد عشوائي يمكن استخدامه لتقدير احتمال ارتكاب نورا لأخطاء مزدوجة في إرسالها التالي.

22. **الإجازة** تم إجراء استطلاع رأي عشوائي لتحديد أين تقضي العائلات إجازاتها. وبينت النتائج أن $P(B) = 0.6,\ P(B \cap M) = 0.2$. واحتمال أن العائلة لم تقض الإجازة في أي وجهة هو 0.1.



a. ما احتمال أن تقضي العائلة إجازتها وسط الجبال؟

b. ما احتمال أن تزور الجبال أيضًا العائلة التي تزور الشاطئ؟

23. **صناعة القرار** كنت تحاول أن تقرر ما إذا كنت ستتوسع في عملك التجاري أم لا. إذا لم تتوسع وظلت الحالة الاقتصادية جيدة، فإنك تتوقع تحقيق أرباح قيمتها 2 مليون AED. وإذا كانت الحالة الاقتصادية سيئة، فإنك تتوقع تحقيق 0.5 مليون AED. وكانت تكلفة التوسع هي 1 مليون AED، ولكن ستكون الأرباح المتوقعة بعد التوسع هي 4 ملايين AED في ظل الحالة الاقتصادية الجيدة و 1 مليون AED في ظل الحالة الاقتصادية السيئة. وتفترض أن فرص الحالة الاقتصادية الجيدة والسيئة هي 30% و 70%، على التوالي. استخدم شجرة الاحتمال لتفسير ما ينبغي فعله.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

24. **الفرضيات** يوجد n أشياء مختلفة في حقيبة. إن احتمال سحب العنصر A ثم العنصر B دون استبدال هي 2.4% تقريبًا. ما قيمة n؟ فسّر.

25. **التبرير** إذا كان $P(A|B)$ يماثل $P(A)$، و $P(B|A)$ يماثل $P(B)$، فماذا يمكن أن يُقال عن العلاقة بين الحدثين A و B؟

26. **مسألة غير محددة الإجابة** صف زوجًا من الأحداث المستقلة وزوجًا من الأحداث غير المستقلة. فسّر استنتاجك.

27. **الكتابة في الرياضيات** يشير تقرير طبي إلى احتمال أن يعاني الشخص من مشكلات القلب إذا كان والده أو والدته يعانيان من مشكلات في القلب. فسّر كيف يمكنك تحديد أن احتمال إصابة الشخص بمشكلات القلب وإصابة والديه بمشكلات القلب حدثان مستقلان.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

28. الاحتمال سيتم عشوائيًا تخصيص حصص تربية رياضية للمعلم رياض بمعدل 1 من 6 على مدار اليوم، و 1 من 3 أوقات غداء. ما احتمال أن يحصل على حصة التربية الرياضية الثانية والغداء الأول؟

A $\frac{1}{18}$ B $\frac{1}{9}$ C $\frac{1}{6}$ D $\frac{1}{2}$

29. الجبر قام تيمور بتنزيل مقطعي فيديو و 7 أغانٍ على مُشغل الوسائط الرقمية بسعر AED 10.91. وقام محسن بتنزيل 3 مقاطع فيديو و 4 أغانٍ بسعر AED 9.93. ما تكلفة كل فيديو؟

F AED 0.99 H AED 1.42

G AED 1.21 J AED 1.99

30. إجابة شبكية يشتمل كيس حلوى الجيلي على 7 قطع حمراء، و 11 قطعة صفراء، و 13 قطعة خضراء. يختار جلال قطعتي جيلي من الكيس دون أن ينظر. ما احتمال اختيار جلال لقطع خضراء ثم قطعة حمراء، مع تقريب الاحتمال كنسبة مئوية إلى أقرب عشرة؟

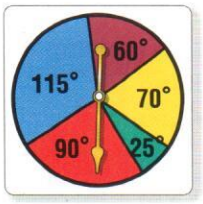
31. SAT/ACT إذا كان احتمال سقوط الأمطار يوم الثلاثاء هو $\frac{4}{13}$، إذًا فما احتمال أنها *لن* تمطر؟

A $\frac{4}{9}$ C $\frac{13}{9}$ E $\frac{13}{4}$

B $\frac{9}{13}$ D $\frac{13}{5}$

مراجعة شاملة

32. كرة السوفتبول أخفقت مي في ضرب 10% من ضرباتها في الموسم الماضي. صمم ونفذ نموذج محاكاة لتقدير احتمال إخفاقها في ضرباتها في هذا الموسم. (الدرس 4-11)



استخدم القرص الدوار لإيجاد كل احتمال. ويتم تدوير القرص الدوار مجددًا إذا توقف على مستقيم. (الدرس 3-11)

33. P(المؤشر يتوقف على اللون الأحمر)

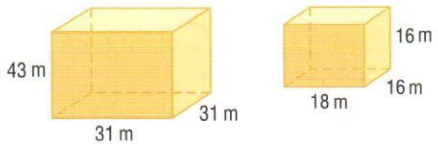
34. P(المؤشر يتوقف على اللون الأزرق)

35. P(المؤشر يتوقف على اللون الأخضر)

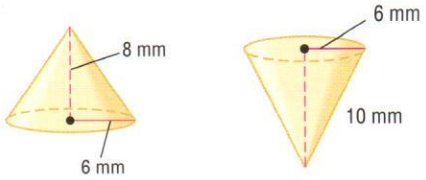
36. P(المؤشر يتوقف على اللون الأصفر)

حدد هل كل زوج من المجسمات متشابه، أم متطابقٌ، أم ليس أيًا مما سبق. إذا كانت المجسمات متشابهة، فاذكر عامل المقياس.

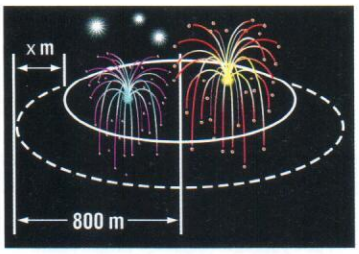
37.



38.



39. الألعاب النارية أطلقت الألعاب النارية من منصة على النهر. وتوجد دائرة انفجار تنفجر داخلها جميع الألعاب النارية، بينما يجلس المشاهدون خارج دائرة أمان تبعد 800 متر عن مركز عرض الألعاب النارية.



a. أوجد محيط دائرة الأمان التقريبي.

b. إذا كانت دائرة الأمان على بُعد 200 إلى 300 متر من مركز دائرة الانفجار، فأوجد مدى قيم نصف قطر دائرة الانفجار.

c. أوجد أصغر محيط لدائرة الانفجار وأكبر محيط لها مقربًا إلى أقرب متر.

مراجعة المهارات

أوجد عدد النتائج المحتملة لكل موقف.

40. تختار حورية من بين 5 نكهات آيس كريم مختلفة و 3 إضافات مختلفة.

41. يختار حسن من بين 6 ألوان وتصميمين للمقاعد من أجل دراجته الجبلية الجديدة.

42. محيط المستطيل 12 وأطوال أضلاعه بأعداد صحيحة.

43. رُميت ثلاثة مكعبات أعداد في آن واحد.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

التوسع 11-5

مختبر الهندسة
جداول التكرار ذات المدخلين

يُستخدم **جدول التكرار بمدخلين** أو جدول *التوافق* لعرض تكرارات البيانات المشتقة من استطلاع رأي أو تجربة. وتُصنّف حسب متغيرين، ويحتوي الجدول على صفوف تشير إلى متغير واحد وأعمدة تشير إلى المتغير الآخر.

المعايير المحلية الأساسية المشتركة

معايير المحتوى

S.CP.4 أنشئ جدول تكرار ذا مدخلين للبيانات وفسره عندما تتعلق فئتان بكل عنصر يتم تصنيفه. استخدم الجدول ذا المدخلين باعتباره فضاء عينيًا لتحديد ما إذا كانت الأحداث مستقلة أو لا. ولتقريب الاحتمالات الشرطية.

S.CP.6 أوجد الاحتمال المشروط لوقوع A علمًا بوقوع B في صورة كسر لنتائج B التي تنتمي أيضًا إلى A. وفسّر النتيجة باستخدام النموذج.

ممارسات في الرياضيات 5

النشاط 1 جداول التكرار بمدخلين

حفل التخرج **سأل مازن عينة عشوائية مكونة من 160 طالبًا في السنة الأخيرة وقبل الأخيرة في مدرسته الثانوية عما إذا كانوا يخططون لحضور حفل التخرج أم لا. وقد توصل إلى أن 44 طالبًا في السنة الأخيرة و 32 طالبًا في السنة قبل الأخيرة يخططون لحضور حفل التخرج، بينما هناك 25 طالبًا في السنة الأخيرة و 59 طالبًا في السنة قبل الأخيرة لا يخططون للحضور. رتّب الإجابات في جدول بمدخلين.**

الخطوة 1 حدد المتغيرات. يمكن تصنيف الطلاب الذين تم استطلاع رأيهم حسب الصف الدراسي والحضور. وبما أن استطلاع الرأي تضمن طلاب السنوات الأخيرة فقط، فإن المتغير *الصف الدراسي* يتضمن فئتين: طلاب السنة الأخيرة أو طلاب السنة قبل الأخيرة. ويتضمن المتغير *الحضور* أيضًا فئتين: حضور حفل التخرج أو عدم حضوره.

الخطوة 2 قم بإنشاء جدول تكرار بمدخلين. اجعل الصفوف في الجدول تمثل الصف الدراسي والأعمدة تمثل الحضور. ومن ثم، املأ خلايا الجدول بالمعلومات المعطاة.

الخطوة 3 أضِف صف الإجمالي وعمود الإجمالي إلى جدولك واملأ هذه الخلايا بالمجموع الصحيح.

الصف الدراسي	حضور حفل التخرج	عدم حضور حفل التخرج	الإجمالي
السنة الأخيرة	44	32	76
السنة قبل الأخيرة	25	59	84
الإجمالي	69	91	160

يطلق على التكرارات المبينة في صف *الإجمالي* وأعمدة *الإجمالي* مصطلح **التكرارات الهامشية**. وتبين الخلية أقصى اليسار في الأسفل إجمالي عدد المشاهدات. وتُسمى التكرارات المبينة في الجزء الداخلي من الجدول **التكرارات المشتركة**. وهي تعرض تكرارات كل التوافيق المحتملة لفئات المتغير الأول مع فئات المتغير الثاني.

تحليل النتائج

1. كم عدد طلاب النسبة الأخيرة الذين تم استطلاع رأيهم؟
2. كم عدد الطلاب ممن تم استطلاع رأيهم الذين يخططون لحضور حفل التخرج؟

التكرار النسبيّ هو نسبة عدد المشاهدات في فئة ما مقابل إجمالي عدد المشاهدات.

النشاط 2 جداول التكرار النسبيّ بمدخلين

حفل التخرج **حوّل الجدول من "نشاط 1" إلى جدول للتكرارات النسبية.**

الخطوة 1 اقسم التكرار المبين في كل خلية على إجمالي عدد المشاركين في الاستطلاع، 160 طالبًا.

الصف الدراسي	حضور حفل التخرج	عدم حضور حفل التخرج	الإجمالي
السنة الأخيرة	$\frac{44}{160}$	$\frac{32}{160}$	$\frac{76}{160}$
السنة قبل الأخيرة	$\frac{25}{160}$	$\frac{59}{160}$	$\frac{84}{160}$
الإجمالي	$\frac{69}{160}$	$\frac{91}{160}$	$\frac{160}{160}$

الخطوة 2 اكتب كل كسر في صورة نسبة مئوية مقربة إلى أقرب عشرة.

الصف الدراسي	حضور حفل التخرج	عدم حضور حفل التخرج	الإجمالي
السنة الأخيرة	27.5%	20%	47.5%
السنة قبل الأخيرة	15.6%	36.9%	52.5%
الإجمالي	43.1%	56.9%	100%

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك استخدام التكرارات النسبية المشتركة والهامشية لتقريب الاحتمالات المشروطة.

النشاط 3 الاحتمالات المشروطة

حفل التخرج باستخدام الجدول من "نشاط 2"، أوجد احتمال أن طالب في السنوات الأخيرة ممن تم استطلاع رأيهم يخطط لحضور حفل التخرج علمًا بأنه طالب في السنة قبل الأخيرة.

احتمال أن طالب في السنوات الأخيرة ممن تم استطلاع رأيهم يخطط لحضور حفل التخرج علمًا بأنه طالب في السنة قبل الأخيرة يُعرف بأنه احتمال مشروط (حضور حفل التخرج | طالب في السنة قبل الأخيرة) P.

الاحتمال المشروط

$$P(\text{حضور حفل التخرج} \mid \text{طالب في السنة قبل الأخيرة}) = \frac{P(\text{طالب في السنة قبل الأخيرة ويحضر حفل التخرج})}{P(\text{طالب في السنة قبل الأخيرة})}$$

$$\approx \frac{0.156}{0.525} = 29.7\%$$

P (يحضرون حفل التخرج وطالب في السنة قبل الأخيرة) $= P = 15\%.6 = 0.156$

(طالب في السنة قبل الأخيرة) $= 52\%.5 = 0.525$

التحليل والتطبيق

راجع النشاطين 2 و 3.

3. إذا كان هناك 285 طالبًا في السنة الأخيرة وقبل الأخيرة، فكم عدد الطلاب الذين تتوقع أنهم يخططون لحضور حفل التخرج؟
4. أوجد احتمال أن يكون الطالب الذي تمّ استطلاع رأيه في السنة قبل الأخيرة ولا يخطط لحضور حفل التخرج.
5. أوجد احتمال أن يكون الطالب الذي تمّ استطلاع رأيه في السنة الأخيرة علمًا بأنه يخطط لحضور حفل التخرج.
6. ما التوجه المحتمل الذي تلاحظه في البيانات؟

عندما تُصنّف نتائج استطلاع الرأي حسب المتغيرات، فقد ترغب في تحديد ما إذا كانت هذه المتغيرات مستقلة عن أحدها الآخر. يُعتبر المتغير A متغيرًا مستقلاً عن المتغير B إذا كان $P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B)$. في جدول التكرار بمدخلين، يمكنك اختبار ما إذا كان المتغيران مستقلين عن طريق مقارنة التكرارات النسبية المشتركة بنواتج ضرب التكرارات النسبية الهامشية المقابلة.

النشاط 4 استقلال الأحداث

حفل التخرج استخدم جدول التكرار النسبيّ من "نشاط 2" لتحديد ما إذا كان حضور حفل التخرج مستقل عن الصف الدراسي.

احسب التكرارات النسبية المشتركة المتوقعة إذا كان الحدثان مستقلين.

على سبيل المثال، إذا كان 47.5% من الذين خضعوا لاستطلاع الرأي طلاب في السنة الأخيرة و 43.1% من الذين خضعوا لاستطلاع الرأي يخططون لحضور حفل التخرج، إذًا من المتوقع أن 47.5% × 43.1% أو حوالي 20.5% من الذين خضعوا لاستطلاع الرأي هم طلاب في السنة الأخيرة يخططون لحضور حفل التخرج.

بما أن التكرارات النسبية المشتركة المتوقعة والفعلية ليست واحدة، فإن حضور حفل التخرج لهؤلاء الذين خضعوا لاستطلاع الرأي غير مستقل عن الصف الدراسي.

الصف الدراسي	حضور حفل التخرج	عدم حضور حفل التخرج	الإجمالي
السنة الأخيرة	27.5% (20.5%)	20% (27%)	47.5%
السنة قبل الأخيرة	15.6% (22.6%)	36.9% (29.9%)	52.5%
الإجمالي	43.1%	56.9%	100%

ملحوظة: الأعداد بين الأقواس هي التكرارات النسبية المتوقعة.

تجميع البيانات صمّم استطلاع رأي للطلاب في مدرستك وقم بإجرائه. أنشئ جدول تكرار نسبي بمدخلين للبيانات. استخدم جدولك لتحديد ما إذا كانت البيانات التي جمعتها تشير إلى علاقة مستقلة بين المتغيرين. اشرح استنتاجك.

7. نوع الطالب وما إذا كان هو من يدفع تأمين سيارته أو والديه
8. نوع الطالب وما إذا كان يشتري وجبة الغداء لنفسه أو يجلبها معه

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

11-6 احتمالات الأحداث المنفصلة

السابق..
- قمت بإيجاد احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة.

الحالي..
1. إيجاد احتمالات الأحداث المنفصلة والأحداث غير المنفصلة.
2. إيجاد احتمالات المتممات.

لماذا؟..
- في مدرسة الأمل الثانوية، يمكن لطلاب السنوات الأولى والثانية وقبل الأخيرة والأخيرة التنافس على رئاسة اتحاد الطلبة. يأمل أيوب في أن يفوز بالانتخابات مرشح من السنة قبل الأخيرة أو الأخيرة. في حين يأمل سعيد في أن يفوز طالب من السنة الأولى أو ذكر. ولكنه يقول: إذا كان الفائز طالب السنة الثانية يوسف، فسأسعد كثيرًا!"

المفردات الجديدة

أحداث منفصلة mutually exclusive events

متممة complement

ممارسات في الرياضيات

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

استخدام نماذج الرياضيات.

1 الأحداث المنفصلة

في الدرس 4-11، فحصت الاحتمالات التي تتضمن تقاطع حدثين أو أكثر. وفي هذا الدرس، ستفحص الاحتمالات التي تتضمن اتحاد حدثين أو أكثر.

$P(A \text{ or } B)$ ← يشير إلى اتحاد عنصرين من عناصر الفضاء العيني.

$P(A \text{ and } B)$ ← يشير إلى تقاطع عنصرين من عناصر الفضاء العيني.

لإيجاد احتمال وقوع حدث معين *أو* وقوع حدث آخر، يتعين عليك معرفة العلاقة التي تربط بين الحدثين. وإذا لم يكن من الممكن أن يقع الحدثان في الوقت ذاته، فيُقال إنهما **منفصلان**. وهذا يعني أنه لا توجد نتائج مشتركة بين الحدثين.

مثال 1 من الحياة اليومية التعرف على الأحداث المنفصلة

الانتخابات راجع التطبيق أعلاه. **حدد ما إذا كانت الأحداث *منفصلة* أو *غير منفصلة*. واشرح استنتاجك.**

a. فوز طالب في السنة قبل الأخيرة بالانتخابات أو فوز طالب في السنة الأخيرة

هذان الحدثان منفصلان. لا توجد نتائج مشتركة–لا يمكن أن يكون الطالب في السنة قبل الأخيرة والأخيرة معًا.

b. فوز طالب في السنة الأولى بالانتخابات أو فوز طالبة بالانتخابات

هذان الحدثان غير منفصلين. طالبة فتاة وتدرس في السنة الأولى هي نتيجة مشتركة بين الحدثين.

c. سحب بطاقة آس أو سباتي من مجموعة أوراق اللعب.

بما أن بطاقة آس سباتي تمثل الحدثين، فهما ليسا متنافرين.

تمرين موجّه

حدد ما إذا كانت الأحداث *منفصلة* أو *غير منفصلة*. واشرح استنتاجك.

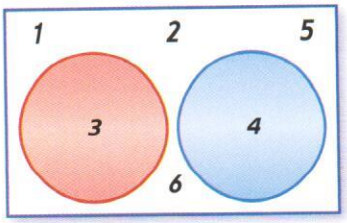
1A. اختيار عدد عشوائيًا من مجموعة أعداد صحيحة من 1 إلى 100 والحصول على عدد قابل للقسمة على 5 أو عدد قابل للقسمة على 10

1B. سحب بطاقة من مجموعة أوراق اللعب والحصول على 5 أو قلب

1C. الحصول على المجموع 6 أو 7 عند رمي حجري نرد

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يعد فحص الفضاء العيني إحدى الطرق المستخدمة في إيجاد احتمال حدثين منفصلين يقعان.



عند رمي حجر نرد، ما احتمال ظهور العدد 3 أو 4؟ من مخطط فن، يمكنك رؤية أن هناك نتيجتين تحققان هذه الحالة. 3 و 4. إذًا،

$$P(3 \text{ و } 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

لاحظ أنه يمكن إيجاد الاحتمال نفسه عن طريق جمع احتمالات كل حدث بسيط.

$$P(3) = \frac{1}{6} \quad P(4) = \frac{1}{6} \quad P(3 \text{ و } 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

يوضح هذا المثال القاعدة الأولى من قاعدتي جمع الاحتمالات.

قراءة في الرياضيات

أو حرف العطف *أو* هو عنصر رئيسي يفيد بوقوع حدث واحد على الأقل. $P(A \text{ أو } B)$ تُقرأ كالتالي *احتمال وقوع الحدث A أو وقوع الحدث B*.

المفهوم الأساسي احتمال وقوع الأحداث المنفصلة

الشرح إذا كان الحدثان A و B منفصلين، فإن احتمال وقوع A أو B هو مجموع احتمالات كل حدث بمفرده.

مثال **إذا كان الحدثان A أو B منفصلين، فإن** $P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B)$.

ويمكن توسيع نطاق هذه القاعدة على أي عدد من الأحداث.

مثال 2 من الحياة اليومية الأحداث المنفصلة

الموسيقى **أعد ناصر قائمة تشغيل تضم مجموعة أغاني من ثلاثة ألبومات مختلفة لمطربه المفضل. إذا جعل مُشغّل MP3 الخاص به يختار الأغاني من هذه القائمة عشوائيًا، فما احتمال أن تكون الأغنية الأولى التي يتم تشغيلها من الألبوم 1 أو الألبوم 2؟**

هذه أحداث منفصلة؛ حيث لا يمكن أن تكون الأغاني المختارة من الألبومين 1 و 2 معًا.

افترض أن الحدث A_1 يمثل اختيار أغنية من الألبوم 1.
وافترض أن الحدث A_2 يمثل اختيار أغنية من الألبوم 2.
يوجد إجمالي 13 + 12 + 10 أو 35 أغنية.

احتمال وقوع الأحداث المنفصلة

$$P(A_1 \text{ or } A_2) = P(A1) + P(A2)$$
$$= \frac{10}{35} + \frac{12}{35}$$
$$= \frac{22}{35}$$

$$P(A1) = \frac{10}{35} \text{ و } P(A2) = \frac{12}{35}$$

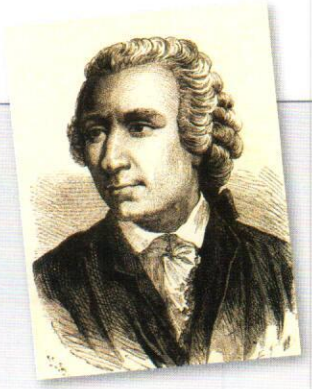
اجمع.

إذًا، احتمال أن تكون الأغنية الأولى التي يتم تشغيلها من الألبوم 1 أو الألبوم 2 هو $\frac{22}{35}$ أو حوالي 63%.

تمرين موجّه

2A. عند رمي حجري نرد. فما احتمال الحصول على عددين متطابقين أو عددين مجموعهما 9؟

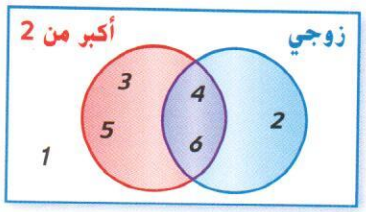
2B. ألعاب الكرنفال إذا ربحت لعبة رمي الحلقات في الكرنفال، فإنك تفوز بدمية محشوة. إذا تم اختيار الدمية المحشوة عشوائيًا من بين 15 مهرًا و 16 هرة صغيرة و 14 ضفدعة و 25 ثعبانًا و 10 وحيد القرن، فما احتمال أن يحصل الرابح على مهر أو هرة صغيرة أو وحيد القرن؟



الربط بتاريخ الرياضيات

ليونهارت أويلر (1707-1783) قدّم أويلر نظرية التمثيل البياني عام 1736 في بحث بعنوان "جسور كونيغسبرغ السبعة" *Seven Bridges of Konigsburg* عبارة عن مسألة رياضيات محلولة ومشهورة مستوحاة من مكان وموقف حقيقي. علاوة على ذلك، يمثل قانون أويلر المرتبط بعدد حواف متعدد الوجوه المحدب وعدد الرؤوس والأوجه أساس نظرية التمثيل البياني. راجع "التوسع 6-11".

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



عند رمي حجر نرد، فما احتمال الحصول على عدد أكبر من 2 أو عدد زوجي؟ من مخطط فن، يمكنك رؤية أن هناك 5 أعداد إما أكبر من 2 أو عدد زوجي: 2 و 3 و 4 و 5 و 6. إذًا،

$$P(\text{أكبر من 2 } or \text{ عدد زوجي}) = \frac{5}{6}$$

بما أنه من الممكن ظهور عدد أكبر من 2 وعدد زوجي، فهذه الأحداث غير منفصلة. وفكّر في احتمالات كل حدث بمفرده.

$$P(\text{فردي}) = \frac{3}{6} \qquad P(\text{أكبر من 2}) = \frac{4}{6}$$

إذا تم جمع هذه الاحتمالات، فسيتم حساب احتمال النتيجتين، 4 و 6، مرتين–مرة لكونهما عددين أكبر من 2 ومرة أخرى لكونهما عددين زوجيين. يتعين عليك طرح احتمال هذه النتائج المشتركة.

$$P(\text{أكبر من 2 } or \text{ عدد زوجي}) = P(\text{أكبر من 2}) + P(\text{عدد زوجي}) - P(\text{أكبر من 2 } and \text{ عدد زوجي})$$
$$= \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

وهذا يقودنا إلى قاعدة جمع الاحتمالات الثانية.

المفهوم الأساسي احتمال وقوع الأحداث غير المنفصلة

الشرح إذا كان الحدثان، A و B حدثين غير منفصلين، فإن احتمال وقوع A أو B هو ناتج جمع احتمالات كل منهما مطروحًا منه احتمال وقوع كل من A و B معًا.

الرموز إذا كان الحدثان A و B غير منفصلين، فإن $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$.

مثال 3 من الحياة اليومية الأحداث غير المنفصلة

الفن **يوضح الجدول عدد ونوع اللوحات التي رسمتها ياسمين. إذا اختارت لوحة عشوائيًا لتقديمها في مسابقة للرسم، فما احتمال أن تختار لوحة لشخص أو لوحة زيتية؟**

	لوحات ياسمين		
إعلانية	طبيعة صامتة	لوحة لأشخاص	مناظر طبيعية
ألوان مائية	4	5	3
زيتية	1	3	2
أكريليك	3	2	1
باستيل	1	0	5

بما أن بعض لوحات ياسمين تتضمن كلاً من لوحات لأشخاص ولوحات زيتية، فهذه الأحداث غير منفصلة. استخدم القاعدة لحدثين غير منفصلين. إجمالي عدد اللوحات التي تختار من بينها هو 30 لوحة.

$$P(\text{لوحة لأشخاص } or \text{ زيتية}) = P(\text{لوحة لأشخاص}) + P(\text{زيتية}) - P(\text{لوحة لأشخاص } and \text{ زيتية})$$

$$= \frac{1+3+2}{30} + \frac{5+3+2+0}{30} - \frac{3}{30} \qquad \text{بالتعويض}$$

$$= \frac{6}{30} + \frac{10}{30} - \frac{3}{30} = \frac{13}{30} \qquad \text{بسّط.}$$

احتمال أن تختار ياسمين لوحة لأشخاص أو لوحة زيتية هو $\frac{13}{30}$ أو حوالي 43%.

تمرين موجّه

3. ما احتمال سحب بطاقة الملك أو ديمن من مجموعة أوراق اللعب التي تضم 52 بطاقة؟

الربط بالحياة اليومية

العروض الفنية الخاضعة للتحكيم هي عروض يُطلب فيها من الرسامين إرسال لوحاتهم الفنية وتقرر لجنة من الحكام أي لوحة سيتم عرضها. وقد ظهرت هذه العروض في العقد الأول من القرن التاسع عشر لعرض أعمال الرسامين الحاليين وتثقيف الجمهور.

المصدر: Humanities Web

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 احتمالات المتممات

تتكون **متممة** الحدث A من جميع النتائج في الفضاء العيني غير المضمنة على أنها نتائج للحدث A.

عند رمي حجر نرد، فإن احتمال الحصول على 4 هو $\frac{1}{6}$. ما احتمال عدم الحصول على 4؟ توجد 5 نتائج محتملة لهذا الحدث: 1 أو 2 أو 3 أو 5 أو 6. إذًا P(ليس 4) $= \frac{5}{6}$. لاحظ أيضًا أن هذا الاحتمال هو $1 - \frac{1}{6}$ أو $1 - P(4)$.

المفهوم الأساسي احتمال متممة الحدث

الشرح احتمال عدم وقوع حدث ما يساوي 1 ناقص احتمال وقوع الحدث.

الرموز بالنسبة للحدث A، P(ليس A) $= 1 - P(A)$.

مثال 4 الأحداث المتممة

بطاقات لاعبي كرة القدم **اشترى طارق 20 بطاقة لاعبي كرة قدم، آملاً أن يحصل على البطاقة الوحيدة التي تحتوي على لاعبه المفضل. فإذا تم بيع إجمالي 300 بطاقة ولا يوجد بهم سوى بطاقة واحدة عليها اللاعب، فما احتمال ألا يحصل طارق على هذه البطاقة؟**

افترض أن الحدث A يمثل بطاقات طارق التي تحتوي على اللاعب. ثم أوجد احتمال متممة A.

احتمال المتممة $P(A\text{ ليس}) = 1 - P(A)$

بالتعويض $= 1 - \frac{20}{300}$

اطرح وبسّط. $= \frac{280}{300} = \frac{14}{15}$

احتمال ألا تحتوي بطاقات طارق على اللاعب هو $\frac{14}{15}$ أو حوالي 93%.

تمرين موجّه

4. إذا كانت فرص تساقط الأمطار هي 70%، فما احتمال ألا تتساقط الأمطار؟

قراءة في الرياضيات

المتمم متمم الحدث A يمكن أن يُكتب أيضًا في صورة A_C.

ملخص المفهوم قواعد الاحتمالات

أنواع الأحداث	الشرح	قاعدة الاحتمال
أحداث مستقلة	نتيجة الحدث الأول لا تؤثر على نتيجة الحدث الثاني.	إذا كان الحدثان A و B مستقلين، فإن $P(A \text{ and } B) = P(A) \cdot P(B)$.
أحداث غير مستقلة	نتيجة الحدث الأول تؤثر على نتيجة الحدث الآخر.	إذا كان الحدثان A و B غير مستقلين، فإن $P(A \text{ and } B) = P(A) \cdot P(B\|A)$.
مشروطة	معلومات إضافية معروفة عن احتمال وقوع حدث.	الاحتمال المشروط لوقوع A علمًا بوقوع B هو $P(A\|B) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(B)}$.
أحداث منفصلة	لا توجد نتائج مشتركة بين الأحداث.	إذا كان الحدثان A أو B منفصلين، فإن $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$.
أحداث غير منفصلة	توجد نتائج مشتركة بين الأحداث.	إذا كان الحدثان A و B غير منفصلين، $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$.
أحداث متممة	تتكون نتائج حدث واحد من كل النتائج في الفضاء العيني التي لا تمثل نتائج الحدث الآخر.	بالنسبة للحدث A، $P(A\text{ ليس}) = 1 - P(A)$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 5 من الحياة اليومية التعرف على قواعد الاحتمالات واستخدامها

أحزمة الأمان راجع المعلومات المبينة في الجانب الأيمن. افترض أنه تم اختيار شخصين عشوائيًا من مجموعة تضم 100 قائد سيارة وراكب أمريكي. إذا كانت هذه المجموعة تمثل عينة من السكان، فما احتمال أن يكون واحد على الأقل منهم لا يضع حزام الأمان؟

الفهم أنت تعلم أن 81% من الأمريكيين يستخدمون حزام الأمان.

عبارة واحد على الأقل تعني واحدًا أو أكثر. إذًا، تحتاج إلى إيجاد احتمال أنه إما

- الشخص الأول المختار لا يستخدم حزام الأمان *أو*
- الشخص الثاني المختار لا يستخدم حزام الأمان *أو*
- كلا الشخصين المختارين لا يستخدمان حزام الأمان.

التخطيط متممة الحدث الموصوف أعلاه تمثل حدث أن كلا الشخصين المختارين يستخدمان حزام الأمان. أوجد احتمال هذا الحدث، ثم أوجد احتمال متممته.

افترض أن الحدث A يمثل اختيار شخص يستخدم حزام الأمان.

افترض أن الحدث B يمثل اختيار شخص يستخدم حزام الأمان بعد اختيار الشخص الأول بالفعل.

هذان حدثان غير مستقلين؛ حيث إن نتيجة الحدث الأول تؤثر على احتمال نتيجة الحدث الثاني.

الحل احتمال الأحداث غير المستقلة

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

$$P(A) = \frac{0.81(100)}{100} = \frac{81}{100}$$

$$= \frac{81}{100} \cdot \frac{80}{99}$$

اضرب.

$$= \frac{6480}{9900} = \frac{36}{55}$$

احتمال المتممة

$$P[\text{ليس } (A \text{ and } B)] = 1 - P(A \text{ and } B)$$

بالتعويض

$$= 1 - \frac{36}{55}$$

اطرح.

$$= \frac{19}{55}$$

إذًا، احتمال أن راكبًا واحدًا على الأقل لا يستخدم حزام الأمان هو $\frac{19}{55}$ أو حوالي 35%.

التحقق استخدم التفكير المنطقي للتحقق من صحة إجابتك.

احتمال اختيار شخص واحد من 100 لا يرتدي حزام الأمان هي 81% (100 − 81) أو 19%. ويجب أن يكون احتمال اختيار شخصين من 100 يرتدون حزام الأمان أكبر من 19%. حيث إن 19% < 35%. فالإجابة منطقية.

تمرين موجّه

5. **الهواتف الخلوية** وفقًا لاستبيان إلكتروني، فإن 35% من سائقي السيارات الأمريكيين يستخدمون بانتظام هواتفهم الخلوية أثناء القيادة. وقد تم اختيار ثلاثة أشخاص عشوائيًا من مجموعة تضم 100 قائد سيارة. فما احتمال أن

A. يستخدم على الأقل اثنان منهم هواتفهم الخلوية أثناء القيادة؟

B. يستخدم واحد على الأكثر هاتفه الخلوي أثناء القيادة؟

الربط بالحياة اليومية

ما يقرب من 81% من قادة السيارات الأمريكيين ومن يجلسون على المقعد الأيمن بجوارهم يضعون حزام الأمان.

المصدر: National Highway Traffic Safety Administration

نصيحة دراسية

الكلمات الرئيسية الدالة على الاحتمال عند تحديد نوع الاحتمال الذي تتعامل معه في موقف ما، فعليك البحث عن الكلمات الرئيسية وتفسير معانيها بالشكل الصحيح.

و ← أحداث مستقلة أو غير مستقلة

أو ← منفصلة أو غير منفصلة

ليس ← أحداث متممة

وإذا ← مشروطة

n على الأقل ← *n* أو أكثر

n على الأكثر ← *n* أو أقل

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1

حدد ما إذا كانت الأحداث *منفصلة* أو *غير منفصلة*. واشرح استنتاجك.

1. سحب بطاقة من مجموعة أوراق اللعب والحصول على ولد أو سباتي

2. رعاية قطة أو حصان

مثال 2

3. **الوظائف** هيام هي موظفة الشهر المثالية. وجائزتها هي الاختيار عشوائيًا من بين 4 بطاقات هدايا و 6 أقداح قهوة و 7 أسطوانات DVD و 10 أسطوانات مضغوطة و 3 سلال هدايا. ما احتمال أن تحصل على بطاقة هدايا أو قدح قهوة أو أسطوانة مضغوطة؟

مثال 3

4. **النوادي** وفقًا للجدول، ما احتمال أن يكون الطالب في النادي في السنة قبل الأخيرة أو في فريق المناظرة؟

النادي	السنة الأولى	السنة قبل الأخيرة	السنة الأخيرة
التطوعي	12	14	8
المناظرة	2	6	3
الرياضيات	7	4	5
الفرنسية	11	15	13

مثال 4

حدد احتمال وقوع كل حدث.

5. إذا كانت فرصة إسقاط الكرات في لعبة البولينج هي 2 من 10. فما احتمال أن تفوّت الضربة؟

6. إذا كانت فرصة الإقامة في مهجع بعينه هي 75%. فما احتمال الإقامة في مهجع آخر؟

مثال 5

7. **حفل التخرج** في صف خالد للطلاب في السنة الأخيرة الذي يضم 100 طالب، حضر 91 طالبًا حفل تخرج الدفعة. إذا تم اختيار طالبين عشوائيًا من الصف بأكمله، فما احتمال عدم حضور واحد على الأقل منهم حفل التخرج؟

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 3-1

حدد إذا ما كانت الأحداث *منفصلة* أم *غير منفصلة* . ثم أوجد الاحتمال. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة في المئة، إذا لزم الأمر.

8 سحب بطاقة من مجموعة أوراق اللعب والحصول على ولد أو ستة

9 رمي حجري نرد والحصول على عددين متطابقين أو ما مجموعه 8

10. اختيار عدد عشوائيًا من مجموعة أعداد صحيحة من 1 إلى 20 والحصول على عدد زوجي أو عدد قابل للقسمة على 3

11. إلقاء قطعة نقد معدنية والحصول على صورة أو كتابة

12. سحب بطاقة آس أو قلب من مجموعة أوراق اللعب التي تضم 52 بطاقة

13. رمي حجري نرد والحصول على ما مجموعه 6 أو 10

14. **الرياضة** يحتوي الجدول على كل البرامج المتاحة في المجمع الرياضي وعدد المشاركين الذين تتراوح أعمارهم بين 16-14. فما احتمال أن يكون سن اللاعب 14 عامًا أو يلعب كرة السلة؟

مجمع جريس لاند الرياضي			
العمر	كرة القدم	كرة القاعدة	كرة السلة
14	28	36	42
15	30	26	33
16	35	41	29

15. **تمثيل النماذج** حان وقت عودة طالبة تبادل إلى إيطاليا، وترغب زميلاتها في الصف في تقديم هدية وداع لها. وقد أجرت المعلمة استطلاعًا للرأي في الصف المكون من 32 طالبة ووجدت أن 10 طالبات اخترن بطاقة و 12 طالبة اخترن قميصًا و 6 اخترن فيديو و 4 اخترن سوارًا. إذا اختارت المعلمة الهدية عشوائيًا، فما احتمال حصول طالبة التبادل على بطاقة أو سوار؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 **حدد احتمال وقوع كل حدث.**

16. رمي حجري نرد وعدم الحصول على 3

17. سحب بطاقة من مجموعة أوراق لعب وعدم الحصول على بطاقة ديمن (ماسة)

18. إلقاء قطعة نقد معدنية وعدم سقوطها على الصورة

19. تدوير قرص دوار مرقم من 1 إلى 8 وعدم توقفه على العدد 5

20. اشترى منصور 20 كتابًا. إذا تم بيع إجمالي 500 كتاب. فما احتمال أن يحصل منصور على كتاب تالف؟

21. **الوظائف** من بين الموظفين الشباب الذين تتراوح أعمارهم بين 18 و 25 عامًا، يتقاضى 71% أجرهم بالساعة. إذا تم اختيار اثنين عشوائيًا من مجموعة تضم 100 موظف شاب، فما احتمال أن يتقاضى واحد بالتحديد أجره بالساعة؟

مثال 5 22. **إعادة التدوير** افترض أن 31% من الأمريكيين يعيدون تدوير المواد. إذا تم اختيار شخصين عشوائيًا من مجموعة تضم 50 أمريكيًا، فما احتمال أن واحدًا منهم على الأكثر يعيد تدوير المواد؟

البطاقات افترض أنك سحبت بطاقة من مجموعة أوراق اللعب التي تضم 52 بطاقة. أوجد احتمال وقوع كل حدث.

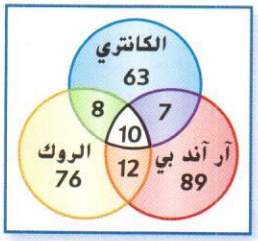
23. البطاقة هي العدد 4.

24. البطاقة حمراء اللون.

25. البطاقة هي بطاقة عليها صورة.

26. البطاقة ليست بطاقة عليها صورة.

27. **الموسيقى** أجرت إحدى المدارس استطلاعًا للرأي على 265 طالبًا لمعرفة أنواع الموسيقى التي يرغبون سماعها في حفل المدرسة الراقص. تظهر النتائج في مخطط فن. أوجد كل احتمال.



a. P(الكانتري *or* آر أند بي)

b. P(الروك والكانتري *or* آر أند بي والروك)

c. P(آر أند بي ولكن ليس الروك)

d. P(كل الأنواع الثلاثة)

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

28. **التفكير النقدي** تريد هناء وهدى تحديد احتمال اختيار كرة زجاجية حمراء من كيس يحتوي على 4 كرات زجاجية حمراء و7 زرقاء وكرتين زجاجيتين أرجوانيتين. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

هناء	هدى
$P(R) = \frac{4}{17}$	$P(R) = 1 - \frac{4}{18}$

29. **التحدي** إذا رُميت 3 أحجار نرد، فما احتمال أن تكون نتيجة حجري نرد على الأقل 1 أقل من أو يساوي 4؟ اشرح استنتاجك.

التبرير **حدد ما إذا كانت الأحداث التالية منفصلة. فسّر ذلك.**

30. اختيار رباعي أضلاع في شكل مربع وآخر في شكل مستطيل

31. اختيار مثلث في شكل متساوي أضلاع وآخر في شكل متساوي الزوايا

32. اختيار عدد مركب واختيار عدد طبيعي

33. **مسألة غير محددة الإجابة** صِف حدثين منفصلين وحدثين غير منفصلين.

34. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا لا يكون مجموع احتمالات حدثين منفصلين 1 دائمًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

35. الاحتمال يمكن أن يفوز الزبائن في صالون جديد بجوائز في يوم الافتتاح. يعرض الجدول نوع الجوائز وعددها. ما احتمال أن تفوز الزبونة الأولى بجلسة مانيكير أو تدليك؟

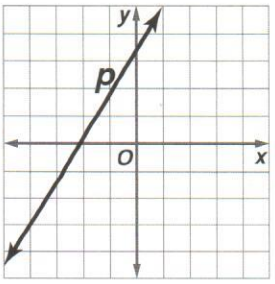
الجائزة	العدد
مانيكير	10
باديكير	6
تدليك	3
تجميل للوجه	1

A 0.075
B 0.35
C 0.5
D 0.65

36. إجابة قصيرة يظهر مكعب مرقم من 1 إلى 6.

إذا تمت رمي المكعب مرة، فما احتمال أن يظهر عدد أقل من 3 أو عدد فردي على الوجه العلوي للمكعب؟

37. الجبر ماذا سيحدث لميل الخط p إذا تم تغييره بحيث يظل التقاطع مع المحور الرأسي y كما هو ويقترب التقاطع مع المحور الأفقي x من نقطة الأصل؟



F سيصبح الميل سالبًا.
G سيصبح الميل صفرًا.
H سيقل الميل.
J سيزيد الميل.

38. SAT/ACT احتمال اختيار حلوى النعناع من كيس حلوى هو 0.25 واحتمال اختيار شوكولاتة هو 0.3. يحتوي الكيس على 60 قطعة حلوى، مع العلم أن أنواع الحلوى الوحيدة الموجودة في الكيس هي النعناع والشوكولاتة والسكر البني مع الزبدة. كم عدد حلوى السكر البني مع الزبدة في الكيس؟

A 25
B 27
C 30
D 33
E 45

مراجعة شاملة

حدد ما إذا كانت الأحداث *مستقلة* أم *غير مستقلة*. ثم أوجد الاحتمال. (الدرس 5-11)

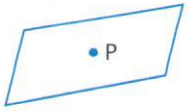
39. تُسحب بطاقة ملك، دون إعادتها، من مجموعة أوراق اللعب التي تضم 52 بطاقة. وبعد ذلك، تُسحب بطاقة ملك ثانية.

40. رُمي نردًا وتحصل على العدد 2. ورُمي نردًا آخر وتحصل على العدد 3.

41. الرياضة توصل استطلاع للرأي في مدرسة ثانوية أن 15% من الرياضيين بالمدرسة يلعبون الكرة الطائرة فقط، و 20% يلعبون كرة القدم الأمريكية فقط، و 30% يلعبون كرة السلة فقط، و 35% يلعبون كرة القدم فقط. صمّم نموذج المحاكاة الذي يمكن استخدامه لتقدير احتمال ممارسة الرياضي كل واحدة من تلك الرياضات. (الدرس 4-11)

انسخ الشكل إضافةً إلى النقطة P. ثم استخدم مسطرةً لرسم صورة الشكل الذي مركزه P بعد تغيير الأبعاد وفق معامل القياس المحدّد r.

42. $r = \frac{1}{2}$



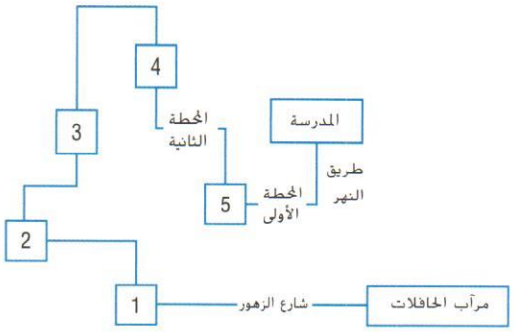
43. $r = 3$

44. $r = \frac{1}{5}$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مختبر الهندسة
6-11 نظرية التمثيل البياني

يمكن استخدام بنيات الرياضيات لإنشاء نموذج للعلاقات ضمن المجموعة. ويطلق على دراسة هذه التمثيلات البيانية نظرية *التمثيل البياني*. ولا تشبه هذه **التمثيلات البيانية ذات الرؤوس والأطراف** التمثيلات البيانية التي يمكن رؤيتها على المستوى الإحداثي. ويطلق على كل تمثيل بياني أيضًا **شبكة**. وهي عبارة عن مجموعة من الرؤوس التي يطلق عليها **عُقَدًا** والقطع المستقيمة التي تربط العُقد ويطلق عليها **حواف**.

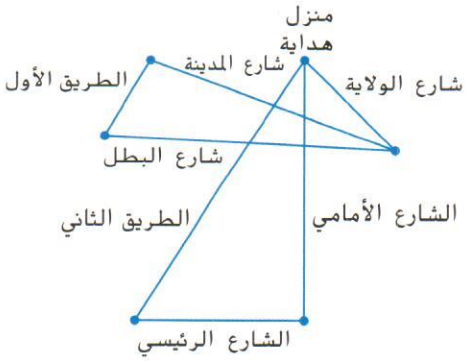


يعتبر مسار الحافلة الموضح في الشكل مثالاً على الشبكة. ويعتبر كل من المدرسة والمحطات والمرأب عُقدًا في الشبكة. بينما تعتبر الشوارع التي تصل بينهم مثل شارع الزهور الحواف.

إنه مثال **لشبكة يمكن تعقبها** حيث ترتبط جميع العُقد من خلال استخدام كل حافة لمرة واحدة فقط في الشبكة.

النشاط 1

يمثل التمثيل البياني الطريق إلى الجريدة التي تعمل بها هداية. لتقطع هذا الطريق بأسرع وقت ممكن، كيف تستطيع هداية قيادة دراجتها بأن تقطع كل شارع مرة واحدة؟



الخطوة 1 انسخ التمثيل البياني في ورقتك.

الخطوة 2 بالبدء من منزل هداية. تتبع طريقها دون أن ترفع قلمك الرصاص للحظة . وتذكر أن تتبع كل حافة مرة واحدة فقط.

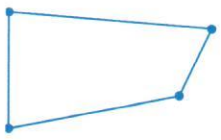
الخطوة 3 صفّ طريق هداية.

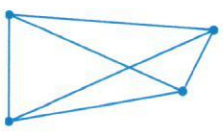
التحليل

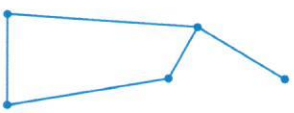
1. هل هناك أكثر من طريق يمكن تتبعه يبدأ من منزل هداية؟ إذا كانت الإجابة نعم، فكم عدد الطريق؟

2. إذا لم تكن نقطة البداية لهداية ذات أهمية، فكم طريقًا محتملاً يمكن تتبعه؟

هل يمكن تتبع كل التمثيلات البيانية؟ اكتب نعم أو لا. اشرح استنتاجك.

3. 

4. 

5. 

6. يحتوي حرم مدرسة الأمل الثانوية على خمسة مبانٍ مقامة حول حافة فناء مستدير. ويوجد رصيف بين كل مبنيين.

   a. ارسم تمثيلاً بيانيًا للحرم المدرسي. وهل يمكن تتبع التمثيل البياني؟

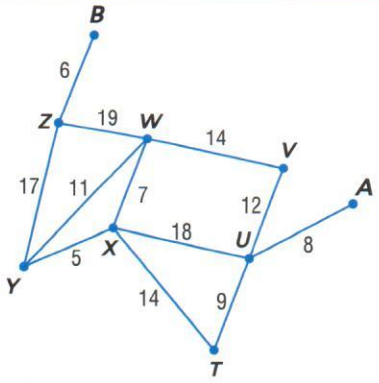
   b. افترض أن هناك رصيفًا بين كل مبنيين متجاورين. هل من الممكن الوصول إلى جميع المباني الخمسة دون المشي على أي رصيف أكثر من مرة واحدة؟

7. **الاستنتاج** اكتب قاعدة تحدد ما إذا كان التمثيل البياني يمكن تتبعه.

في الشبكة، تسمى الطرق المؤدية من رأس إلى أخرى *مسارات*. **التمثيلات البيانية الموزونة للرؤوس والحواف** هي تمثيلات بيانية يتم فيها تعيين قيمة أو **وزن** لكل حافة. ويكون **وزن المسار** عبارة عن مجموع أوزان الحواف الموجودة على طول المسار. ويكون **المسار الفعال** هو المسار الأقل وزنًا.

النشاط 2

لحواف الشبكة أوزان مختلفة. ابحث عن المسار الفعال من *A* إلى *B*.



الخطوة 1 اعثر على جميع المسارات الممكنة من *A* إلى *B*.
ضع على طول كل مسار أحرف العُقد.

الخطوة 2 تتبع كل مسار وأضف أوزان كل حافة.
على أن يكون المسار الأقل وزنًا هو المسار الفعال:
A-U-X-Y-Z-B. الوزن هو 54.

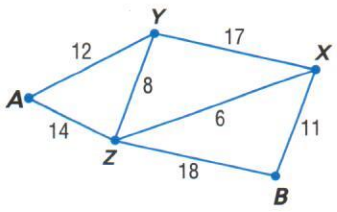
انتبه إلى الأوزان عند تحديد المسار الفعال. ربما لا يكون المسار الأقل عددًا من حيث الحواف.

النموذج والتحليل

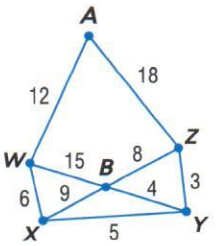
8. ما أطول مسار من *A* إلى *B* لا يغطي أي حافة أكثر من مرة واحدة؟

حدد المسار الفعال من *A* إلى *B* لكل شبكة.

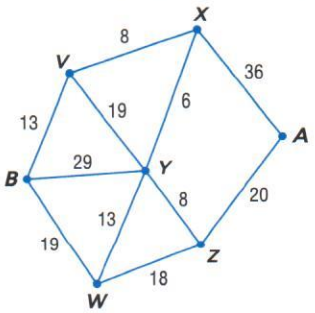
9.



10.



11.



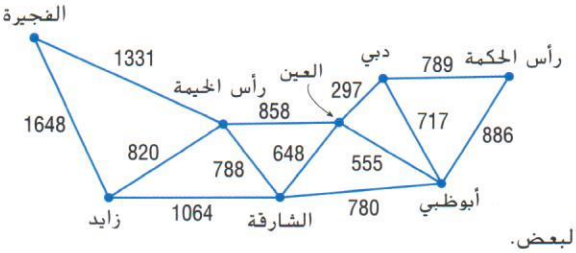
12. مسألة غير محددة الإجابة أنشئ شبكة بها 8 عُقد ومسارًا فعالاً قيمته 25.

13. الكتابة في الرياضيات اشرح طريقتك لتحديد المسار الفعال للشبكة.

14. السفر استخدم التمثيل البياني الموجود إلى اليسار للعثور على جميع المسارات الفعالة.

a. من مدينة زايد إلى رأس الحكمة

b. من الفجيرة إلى أبوظبي



15. *الدرجات الست من التباعد* مثال شهير لنظرية التمثيل البياني. وفيها يمثل كل شخص عُقدة ويتصل الأشخاص بحافة إذا كانوا على معرفة ببعضهم البعض.

a. ضع تمثيلاً بيانيًا للموقف. صلّ نفسك مباشرة بثلاثة أشخاص تعرفهم معرفة شخصية. ومثل هذا أول درجة من التباعد.

b. اشرح التمثيل البياني لتوضيح الدرجات الثلاث الأولى من التباعد. اذكر اسم شخص على بُعد 3 درجات منك واسرد المسار.

الوحدة 11 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

تمثيل الفضاءات العينية (الدرس 1-11)

- الفضاء العيني للتجربة هو مجموعة جميع النتائج المحتملة. ويمكنك التحديد باستخدام قائمة منظمة أو جدول أو مخطط شجري.

التباديل والتوافيق (الدرس 2-11)

- التباديل لمجموعة مكونة من n من العناصر مأخوذ منها r في المرة هي $_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$.
- التوافيق لمجموعة مكونة من n من العناصر مأخوذ منها r في المرة هي $_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$.
- يجب استخدام التباديل عندما يكون الترتيب ذا أهمية وتُستخدم التوافيق عندما لا يكون الترتيب مهمًا.

الاحتمال الهندسي (الدرس 3-11)

- إذا تضمنت المنطقة A المنطقة B وتم اختيار النقطة E في المنطقة A بشكل عشوائي، فإن احتمال أن تكون النقطة E في المنطقة B تساوي $\frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$.

المحاكاة (الدرس 4-11)

- تستخدم المحاكاة نموذج الاحتمال لإعادة موقف مرة بعد مرة بحيث يمكن تقدير احتمال حدوث النتائج المختلفة.

الاحتمال في الأحداث المركبة (الدرسان 5-11 و 6-11)

- إذا لم يؤثر الحدث A على نتيجة الحدث B، فإن الأحداث مستقلة و $P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B)$.
- إذا كان الحدثان A و B غير مستقلين، فإن $P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B|A)$.
- إذا كان الحدثان A و B يستحيل حدوثهما معًا في نفس الوقت، فإنهما منفصلان ويكون $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$.
- إذا كان الحدثان A و B غير منفصلين، فإن $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$.

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

circular permutation	التباديل الدائرية
combination	توافيق
complement	متممة
compound events	أحداث مركبة
conditional probability	احتمال مشروط
dependent events	أحداث غير مستقلة
expected value	قيمة التوقع
factorial	مضروب
Fundamental Counting Principle	مبدأ العد الأساسي
geometric probability	الاحتمال الهندسي
independent events	الأحداث المستقلة
mutually exclusive events	أحداث منفصلة
permutation	تباديل
probability model	نموذج الاحتمال
probability tree	شجرة الاحتمال
random variable	متغير عشوائي
sample space	الفضاء العيني
simulation	المحاكاة
tree diagram	المخطط الشجري

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي صحيحة أم *خاطئة*. وإذا كانت *خاطئة*، فاستبدل المصطلح الموجود تحته خطّ لجعل الجملة صحيحة.

1. يستخدم المخطط الشجري قطعًا مستقيمة لعرض النتائج المكنة.
2. التباديل هي ترتيب مجموعة من العناصر ليس لترتيبها أهمية.
3. يتطلب تنظيم الأفراد حول مائدة مستديرة تباديل دائرية.
4. إلقاء قطعة معدنية ثم إلقاء أخرى مثال للأحداث غير المستقلة.
5. يتضمن الاحتمال الهندسي قياسًا هندسيًا مثل الطول أو المساحة.
6. $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \times 1$. مثال على المضروب.
7. يُطلق على المجموعة الكاملة للنتائج المحتملة الفضاء العيني.
8. الجمع بين إلقاء قطعة معدنية ورمي النرد يصنع حدثًا بسيطًا.
9. نقر حمد العملة بطرف إصبعه 200 مرة لإنشاء شجرة احتمال للتجربة
10. يمثل سحب جوربين من الدرج دون إعادتهما أمثلة لأحداث منفصلة.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مراجعة درس بدرس

11-1 تمثيل الفضاءات العينية

11. **الفشار** تبيع دار سينما فشار بالحجم الصغير (S) والوسط (M) والكبير (L) بخيار عدم إضافة زبد (NB) أو بإضافة زبد (B) أو بإضافة الكثير من الزبد (EB). مثّل الفضاء العيني لطلبات الفشار بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.

12. **الأحذية** يتوفر زوج من الأحذية الرجالية بكل المقاسات من 5 إلى 13 بالألوان الكحلي والبني والأسود. كم عدد أزواج الأحذية المختلفة التي يمكن اختيارها؟

مثال 1

تم إلقاء قطعة نقد معدنية ثلاث مرات. مثّل الفضاء العيني لهذه التجربة بعمل قائمة منظمة.

اقرن كل نتيجة محتملة من الرمية الأولى مع النتائج المحتملة من الرمية الثانية والثالثة.

HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT

11-2 الاحتمالات باستخدام التباديل والتوافيق

13. **العشاء** خرجت أسرة مكونة من ثلاث من الفتيات وثلاثة من الصبية لتناول الطعام في الخارج. ولا يحتوي المطعم إلا على الموائد المستديرة. لا يرغب زايد في جلوس أي من الأخوات إلى جواره كما لا ترغب عبير في جلوس أي من إخوانها إلى جوارها. كم عدد الترتيبات الممكنة؟

14. **الحفل** تتكون لجنة الحفل من 10 طلاب. وستختار اللجنة ثلاثة أعضاء بشكل عشوائي. ما احتمال أن يتم اختيار ماجد وفهد وفالح؟

15. **مسابقة** سيتم بشكل عشوائي اختبار 4 طلاب من بين 32 طالبًا لتكوين فريق للدخول في تحدٍ دراسي. فبكم طريقةٍ يمكن القيام بذلك؟

مثال 2

تحتاج هالة إلى وضع مقاعد لأربعة أشخاص حول مائدة مستديرة لإقامة مأدبة طعام بالمشاركة. كم عدد التوافيق الممكنة؟

بما أنه لا توجد نقطة مرجعية ثابتة، فإن هذه تباديل دائرية.

قانون التباديل الدائرية $P_n = (n-1)!$

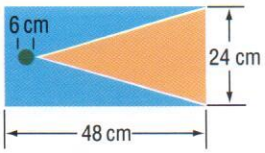
$n = 4$ $P_4 = (4-1)!$

بسّط. $= 3! = 6$

إذًا فهناك 6 طرق لنورا لوضع مقاعد لأربعة أشخاص حول المائدة المستديرة.

11-3 الاحتمالات الهندسية

16. **ألعاب** موضح في الشكل قياسات للعبة أكياس الفول. ما احتمال وقوع كل حدث؟



a. (بفتحة) P

b. (بدون فتحة) P

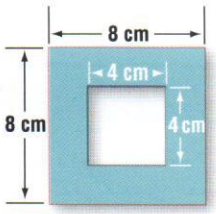
17. **حوض السباحة** يجلس فارس وعيسى وعمر وعلي على جانب حوض السباحة بهذا الترتيب. يبعد فارس عن عيسى بمترين. ويبعد عيسى عن عمر 4 أمتار. ويبعد عمر عن علي 3 أمتار. وانضم إليهم عدنان

a. أوجد مدى احتمال أن يجلس عدنان بين فارس وعيسى.

b. أوجد مدى احتمال أن يجلس عدنان بين عيسى وعلي.

مثال 3

موضح في الشكل لعبة كرنفال.



a. إذا ألقت نسرين 10 أكياس على اللوح، فما مدى احتمال أن يدخل الكيس في الفتحة؟

مساحة الفتحة $= 4 \cdot 4 = 16$

مساحة اللوح $48 = 16 - 64 = (8 \cdot 8)$

(بفتحة) $P = \frac{16}{64}$ أو حوالي 25%

b. ما احتمال ألا يدخل الكيس في الفتحة؟

(بدون فتحة) $P = \frac{48}{64}$ أو حوالي 75%

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

11-4 نماذج المحاكاة

صفّ كيف يمكنك استخدام نموذج الاحتمال الهندسي لتصميم نماذج محاكاة لكل مما يلي.

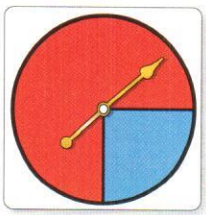
18. **كرة الماء** يسجل عبيد 35% من الأهداف التي يسجلها فريقه في كل مباراة لكرة الماء.

19. **كُتب** طبقًا لاستطلاع رأي، يشتري 30% من الأشخاص كتبهم خلال شهر أكتوبر ونوفمبر وديسمبر، و 22% منهم خلال شهر يناير وفبراير ومارس، و 23% منهم خلال شهر أبريل ومايو ويونيه، و 25% منهم خلال شهر يوليو وأغسطس وسبتمبر.

20. **نفط** تستهلك الولايات المتحدة 17.3 مليون برميل من النفط يوميًا. يتم استخدام 63% منه للنقل، و 4.9% لتوليد الكهرباء، و 7.8% للتدفئة والطهي، و 24.3% للعمليات الصناعية.

مثال 4

سدد عبد الله 75% من تصويبات الأهداف الموسم الماضي. صمم نموذج محاكاة يمكن استخدامه في تقدير احتمال تصويبات الأهداف التي سيسددها في هذا الموسم.



استخدم القرص الدوار المقسم إلى جزأين. اجعل جزءًا منه أحمر اللون ويحتوي على 75% من مساحة القرص والآخر أزرق اللون ويحتوي على 25% من مساحة القرص.

أدر القرص 50 مرة. تمثل كل دورة تصويب هدف. تتمثل المحاولة الناجحة في تصويب هدف والمحاولة الفاشلة في إضاعة هدف.

11-5 احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة

21. **البلي** يحتوي صندوق على 3 من البلي الأبيض، و 4 من الأسود. ما احتمال سحب 2 من البلي الأسود و 1 من البلي الأبيض من صف دون إعادة أي منها؟

22. **أوراق اللعب** تم اختيار ورقتين بشكل عشوائي من مجموعة أوراق اللعب مع إعادتهما. ما احتمال النجاح في سحب ورقة الرقم ثلاثة ثم ورقة ملكة بالترتيب؟

23. **بيتزا** أوضح استطلاع للرأي أُجري على مستوى الولايات المتحدة أن 72% من الأشخاص في البلد يحبون البيتزا. إذا تم اختيار 3 أشخاص بشكل عشوائي، فما احتمال أن يكون الثلاثة من محبي البيتزا؟

مثال 5

تحتوي حقيبة على 3 من البلي الأحمر و 2 من الأبيض و 6 من الأزرق. ما احتمال سحب 2 من البلي الأحمر و 1 من الأزرق بالترتيب دون إعادتهم؟

بما أنه لم تتم إعادة البلي، فإن الأحداث هي أحداث غير مستقلة.

$$P(\text{أحمر، أحمر، أزرق}) = P(\text{أحمر}) \cdot P(\text{أحمر}) \cdot P(\text{أزرق})$$

$$= \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{6}{9}$$

$$= \frac{2}{55} \text{ تقريبًا } 3.6\%$$

11-6 احتمالات الأحداث المنفصلة

24. **رمي حجر النرد** عند رمي حجر نرد. فما احتمال الحصول على مجموع العددين 7 أو 11؟

25. **أوراق اللعب** تم سحب ورقة من مجموعة أوراق اللعب. أوجد احتمال سحب ورقة الرقم 10 أو ورقة ديمن.

26. **سباق** حقيبة تحتوي على 40 تذكرة سباق مرقمة من 1 إلى 40.

a. ما احتمال أن تكون التذكرة المختارة عشوائيًا عددًا زوجيًا أو أقل من 5؟

b. ما احتمال أن تكون التذكرة المختارة عشوائيًا أكبر من 30 أو أقل من 10؟

مثال 6

عند رمي حجري نرد. ما احتمال أن يكون المجموع 5 أو الحصول على عددين متطابقين؟

هذه أحداث منفصلة لأن مجموع العددين المتطابقين يستحيل أن يساوي 5.

$$P(\text{المجموع 5 or عددان متطابقان}) = P(\text{المجموع 5}) + P(\text{عددان متطابقان})$$

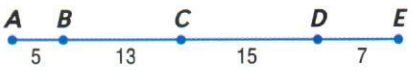
$$= \frac{4}{36} + \frac{6}{36}$$

$$\frac{5}{18} = 5/18 \text{ تقريبًا } 278\%$$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

11 تدريب على الاختبار المعياري

النقطة X مختارة عشوائيًا على $\overline{AE}$. أوجد احتمال كل حدث.



1. P (X تقع على $\overline{AC}$)
2. P (X تقع على $\overline{CD}$)

3. **بيسبول** يلعب 9 لاعبون في فريق البيسبول. كم عدد ترتيب ضربات الكرة التي يمكن للاعبين التسعة تسديدها؟

4. **سفر** تحتاج موظفة مبيعات مسافرة إلى زيارة أربع مدن في منطقتها. كم عدد المسارات المميزة الموجودة لزيارة كل مدينة لمرة واحدة؟

مثّل الفضاء العيني لكل تجربة بإعداد قائمة منظمة وجدول ومخطط شجري.

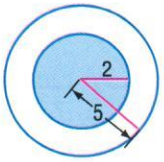
5. صندوق به 1 كرة حمراء و 1 كرة خضراء و 1 كرة زرقاء. تم سحب كرتين من الصندوق واحدة تلو الأخرى دون إعادتهما.

6. يريد عبد الكريم اقتناء حيوان أليف وذهب إلى جمعية الرفق بالحيوان للحصول على هامستر أو قطة. وبينما هو هناك، قرر اقتناء حيوانين أليفين.

7. **هندسة** يعمل مهندس على تحليل ثلاثة عوامل تؤثر على جودة الموصلات الجزئية: من حيث درجة الحرارة والرطوبة وانتقاء المواد. هناك 6 إعدادات ممكنة لدرجة الحرارة، و 4 إعدادات ممكنة للرطوبة، و 6 اختيارات للمواد. كم عدد توافيق الإعدادات الموجودة؟

8. **هجاء** كم عدد الطرق المميزة لترتيب الحروف في كلمة "bubble"؟

9. **كرة الطلاء** يُطلق عبد الله كرات الطلاء بالبندقية على الهدف. ما احتمال إصابة المنطقة المظللة؟



10. **إجابة مختصرة** رقم هاتف يحتوي على الأعداد 6, 2, 2, 2, 7, 7, 7. فما احتمال أن يكون الرقم هو 622-2777؟

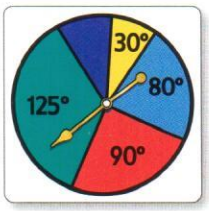
11. **بطاقة** دخل خمسة عشر شخصًا السحب المبين إلى اليسار. ما احتمال أن يفوز عبد العزيز وعبد الرحيم وعبد الرحمن جميعهم بالبطاقات؟

حدد ما إذا كانت الأحداث *مستقلة* أم *غير مستقلة*. ثم أوجد الاحتمال.

12. مجموعة أوراق لعب بها 5 أوراق صفراء و 5 أوراق وردية و 5 أوراق برتقالية. تم اختيار ورقتين من المجموعة ثم إعادتهما. أوجد P (الورقة الأولى وردية والثانية وردية).

13. يوجد في قبعة 6 من البلي الأخضر و 2 من الأحمر و 2 من البني و 4 من الكحلي و 2 من الأرجواني. اختار عدنان 2 كرة من القبعة دون إعادتهما. ما احتمال أن تكون البلية الأولى بنية والثانية ليست أرجوانية؟

استخدم القرص الدوار لإيجاد كل احتمال. إذا توقف القرص الدوار عند خط، تتم إدارته مرة أخرى.



14. (يتوقف المؤشر على اللون الأرجواني) P
15. (يتوقف المؤشر على اللون الأحمر) P
16. (يتوقف المؤشر على اللون الأصفر) P

17. **كرة القدم** وفقًا لمعدل النجاح لفريق كرة القدم الأمريكية في الخطة الدفاعية، يجب على الفريق إسقاط الكرة وركلها 40% من الوقت، والتصويب في اتجاه المرمى 30% من الوقت وفقد الاستحواذ على الكرة 5% من الوقت. وتسجيل أهداف 25% من الوقت. صمّم نموذج محاكاة باستخدام برنامج مولد أعداد عشوائي. ثم اعرض النتائج مستخدمًا الملخصات العددية والبيانية المناسبة.

حدد ما إذا كانت الأحداث *منفصلة* أو *غير منفصلة*. اشرح استنتاجك.

18. شخص يملك سيارة وشاحنة

19. إلقاء زوج من النرد والحصول على مجموع 7 و 6 على وجه نرد واحد

20. ورقة لعب تكون البسوتي والإسباتي

21. **الصفوف الدراسية** حصل عامر في هذا الربع على درجة A في صفوفه الدراسية 45% من المرات. صمم نموذج محاكاة ونفذه باستخدام نموذج احتمال هندسي. ثم قدم النواتج باستخدام ملخصات عددية وبيانية مناسبة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 11

التحضير للاختبارات المعيارية

تنظيم البيانات

ربما تُعطى في بعض الأحيان مجموعة بيانات تحتاج إلى تحليلها لحل فقرات في الاختبار المعياري. استخدم هذا القسم للتدرب على تنظيم البيانات ومساعدتك في حل المسائل.

إستراتيجيات تنظيم البيانات

الخطوة 1

عند إعطائك نص مسألة يتضمن بيانات، فكّر فيما يلي:

- **عمل قائمة** بالبيانات.
- **استخدام جدول** لتنظيم البيانات.
- **استخدام عرض البيانات** (*مثل تمثيل بياني بالأعمدة، رسم تخطيط فن، تمثيل بياني دائري، تمثيل بياني خطي، مخطط صندوق ذي عارضين، إلخ*) لتنظيم البيانات.

الخطوة 2

تنظيم البيانات.

- أنشئ جدولاً أو قائمة أو عرض بيانات.
- إذا أمكن، فاكتب القيم الناقصة التي يمكن إيجادها بالحسابات الفورية.

الخطوة 3

تحليل البيانات لحل المسألة.

- أعد قراءة نص المسألة لتحديد الحل المطلوب.
- استخدم خصائص الهندسة والجبر للعمل مع البيانات المنظمة وحل المسألة.
- ارجع للتحقق من إجابتك إذا كان الوقت يسمح بهذا.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة وحدد ما تحتاج لمعرفته، ثم استخدم المعلومات المعطاة بالمسألة لحلها.

من بين الطلاب المتحدثين بلغات أجنبية في مدرسة لميس، يتحدث 18 طالبًا الإسبانية، و 14 طالبًا الفرنسية، و 16 طالبًا الألمانية. ويوجد 8 طلاب يتحدثون الإسبانية فقط، و 7 يتحدثون الألمانية فقط، و 3 يتحدثون الإسبانية والفرنسية و 2 يتحدثان الفرنسية والألمانية و 4 يتحدثون كل اللغات الثلاث. إذا تم اختيار طالب بشكل عشوائي، فما مدى احتمال أن يكون متحدثًا باللغة الإسبانية أو الألمانية وليس الفرنسية؟

A $\frac{7}{12}$ B $\frac{9}{16}$ C $\frac{2}{5}$ D $\frac{5}{18}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

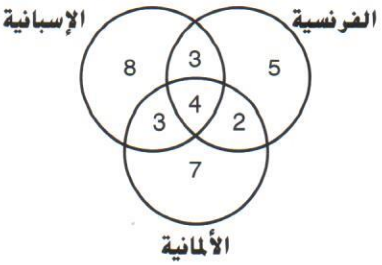
اقرأ المسألة بعناية. يصعب تحليل البيانات في صورتها المُعطاة. استخدم مخطط فن لتنظيم البيانات وحل المسألة.

الخطوة 1 ارسم ثلاث دوائر كل منها تمثل لغة.

الخطوة 2 اكتب البيانات المُعطاة في نص المسألة.

الخطوة 3 أكمل القيم الناقصة. تعرف مثلاً أن 18 طالبًا يتحدثون الإسبانية و 14 طالبًا يتحدثون الفرنسية.

$18 - 8 - 3 - 4 = 3$ (الإسبانية والفرنسية)
$14 - 3 - 4 - 2 = 5$ (الفرنسية فقط)



الخطوة 4 أوجد حل المسألة. مطلوب منك إيجاد احتمال أن يتم عشوائيًا تحديد طالب يتحدث الإسبانية أو الألمانية وليس الفرنسية. من مخطط فن، يمكنك مشاهدة أن إجمالي عدد الطلاب 32 طالبًا. من بينهم $7 + 3 + 8$ أو 18 طالبًا يتحدثون الإسبانية أو الألمانية وليس الفرنسية. إذًا يساوي الاحتمال $\frac{18}{32}$ أو $\frac{9}{16}$. إذًا، الإجابة الصحيحة هي B.

التدريبات

اقرأ المسألة وحدد ما تحتاج لمعرفته، ثم رتب البيانات لحل المسألة.

1 لدى لمياء مربعات الحروف A و H و M و T في حقيبة. إذا اختارت تباديل هذه المربعات بشكل عشوائي، فما مدى احتمال أن تُكون الأحرف هجاء الكلمة "MATH"؟

A $\frac{1}{4}$ C $\frac{3}{50}$

B $\frac{1}{12}$ D $\frac{1}{24}$

2. يوضح الجدول التالي عدد طلاب الصف الأول والثاني والصف قبل الأخير والصف الأخير المشاركين في كرة السلة وكرة القدم والكرة الطائرة. ما احتمال أن يكون طالبًا مختارًا بشكل عشوائي من الصف قبل الأخير أو يلعب الكرة الطائرة؟

الرياضة	الأول	الثاني	قبل الأخير	الأخير
كرة السلة	7	6	5	6
كرة القدم	6	4	8	7
الكرة الطائرة	9	2	4	6

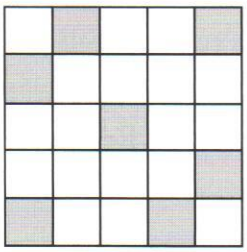
F $\frac{4}{21}$ H $\frac{5}{17}$

G $\frac{5}{21}$ J $\frac{17}{35}$

3. أوجد احتمال وقوع نقطة مختارة بشكل عشوائي داخل المنطقة المظللة.

A 0.22 C 0.28

B 0.25 D 0.32



4. يوجد 10 طلاب من الصف الثاني و 8 من الصف قبل الأخير و 9 من الصف الأخير في اتحاد الطلاب. تم تكليف كل عضو بالمساعدة في التخطيط لنشاط مدرسي واحد خلال العام. هناك 4 طلاب من الصف الثاني يعملون على يوم النشاط الميداني و 6 يعملون على تجمع الطلاب التشجيعي. ومن بين طلاب الصف قبل الأخير، يعمل 2 من الطلاب على يوم النشاط الميداني و 5 على حفل التخرج. وهناك 2 من طلاب الصف الأخير يعملون على تجمع الطلاب التشجيعي. إذا كان إجمالي الطلاب الذين يساعدون في التخطيط لكل نشاط 9 طلاب، فما احتمال أن يكون عضو الاتحاد المختار عشوائيًا طالبًا من الصف قبل الأخير أو يعمل على يوم النشاط الميداني؟

F $\frac{4}{21}$ H $\frac{5}{17}$

G $\frac{5}{21}$ J $\frac{17}{35}$

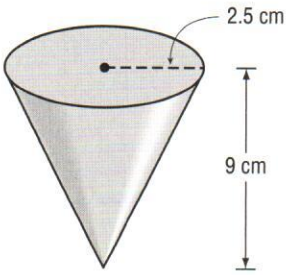
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 11
تدريب على الاختبار المعياري
تراكمي

الاختيار من متعدّد

اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. ما مقدار الورق اللازم لصناعة كوب الشرب الموضح أدناه؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.



F $73.4\ cm^2$

G $70.7\ cm^2$

H $67.9\ cm^2$

J $58.8\ cm^2$

2. أي من الخصائص التالية للأعداد الحقيقية تبرر العبارة أدناه؟

إذا كان $3x - 2 = 7x + 12$، فإن $3x - 2 + 2 = 7x + 12 + 2$.

A خاصية الجمع في المعادلة

B خاصية الانعكاس في المعادلة

C خاصية الطرح في المعادلة

D خاصية التماثل في المعادلة

3. ما عدد المرات المتوقع حصول فوزية فيها على عددين متطابقين عند إلقاء حجري نرد في 90 محاولة؟ (يحدث العددان المتطابقان عندما يظهر نفس العدد على حجري النرد عند إلقائهما في محاولة.)

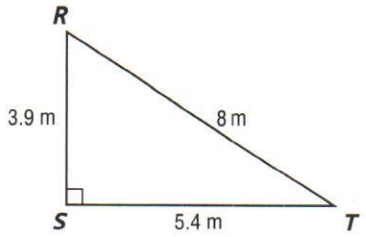
F 6

G 9

H 10

J 15

4. أي مما يلي يوضح بشكل صحيح العلاقة بين قياسات الزوايا للمثلث RST؟



F $m\angle S < m\angle R < m\angle T$

G $m\angle T < m\angle S < m\angle R$

H $m\angle R < m\angle S < m\angle T$

J $m\angle T < m\angle R < m\angle S$

نصيحة عند حل الاختبار

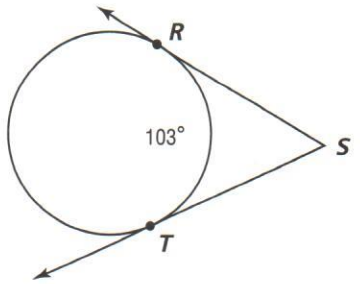
السؤال 3 ما مدى احتمال الحصول على عددين متطابقين عند إلقاء حجري نرد؟ اضرب الاحتمال في عدد المحاولات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

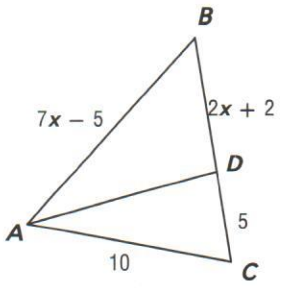
الإجابة القصيرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

5. **إجابة شبكية** ما قياس $m\angle S$ في الشكل أدناه؟ وضّح إجابتك بالدرجات.

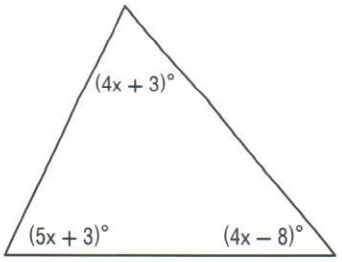


6. **إجابة شبكية** القطعة المستقيمة AD تنصف $\angle CAB$ في المثلث أدناه. ما قيمة x؟



7. **إجابة شبكية** يسند فارس سلمًا طوله 18 قدمًا على جانب منزله لينظف المزراب. وتبعد قاعدة السلم عن الجدار 1.5 متر. ما الارتفاع الذي يصل إليه السلم على جانب المنزل؟ وضّح إجابتك بالأمتار. قرب إلى أقرب جزء من عشرة.

8. أوجد x في المثلث أدناه.



الإجابة الموسعة

دوّن إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

9. حقيبة تحتوي على 3 شرائح حمراء و 5 شرائح خضراء و 2 شريحة صفراء و 4 شرائح بنية و 6 شرائح قرنفلية. بعد اختيار شريحة بشكل عشوائي. لوحظ لونها وعادت الشريحة إلى الحقيبة.

   a. بفرض إجراء هذه التجربة مرتين. فهل هذه الأحداث مستقلة أم غير مستقلة؟ فسّر ذلك.

   b. ما احتمال أن تكون الشريحتان قرنفليتي اللون؟

   c. ما احتمال أن تكون الشريحة الأولى خضراء والثانية بنية؟

هل تحتاج إلى مساعدة؟

إذا أخطأت في السؤال...	9	8	7	6	5	4	3	2	1
فاذهب الى الدرس ...	12-5	6-1	10-2	7-1	11-6	7-5	12-4	5-2	13-3

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

كتيب الطالب

يمكنك بمساعدة **كتاب الطالب**
هذا الإجابة عن هذه الأسئلة.

ماذا لو نسيتُ إحدى المفردات؟

القاموس
GL1

يقدم **مسرد المصطلحات** تعريفات الكلمات الهامة
أو الصعبة المستخدمة في الكتاب المدرسي.

ماذا لو نسيتُ إحدى الصيغ؟

الدوال والمتطابقات المثلثية، الصيغ والرموز
TF-1

هذه قوائم من **الصيغ والمتطابقات والرموز**
المستخدمة في الكتاب.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الرموز

$\neq$	لا يساوي	AB	قياس $\overline{AB}$
$\approx$	تقريبًا يساوي	$\angle$	زاوية
$\sim$	يشابه	$\triangle$	مثلث
$>, \geq$	أكبر من، أو أكبر من أو يساوي	$^\circ$	درجة
$<, \leq$	أصغر من، أو أصغر من أو يساوي	π	باي
$-a$	المعكوس أو المعكوس الجمعي لـ a	$\sin x$	جيب الزاوية x
$\lvert a \rvert$	القيمة المطلقة لـ a	$\cos x$	جيب تمام الزاوية x
$\sqrt{a}$	الجذر التربيعي الأساسي لـ a	$\tan x$	ظل الزاوية x
$a : b$	نسبة a إلى b	$!$	مضروب
(x, y)	زوج مرتّب	$P(a)$	احتمال a
$f(x)$	f لـ x؛ قيمة f لـ x	$P(n, r)$	تباديل مجموعة تحتوي n من العناصر مأخوذة منها r في كل مرة
$\overline{AB}$	القطعة المستقيمة AB	$C(n, r)$	توافيق مجموعة تحتوي n من العناصر مأخوذة منها r في كل مرة

الخواص الجبرية والمفاهيم الأساسية

المحايد	لأي عدد a، $a + 0 = 0 + a = a$ و $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
التعويض (=)	إذا كان $a = b$، فإن يمكن التعويض عن a باستخدام b.
الانعكاس (=)	$a = a$
التماثل (=)	إذا كان $a = b$، فإن $b = a$.
التعدي (=)	إذا كان $a = b$ و $b = c$، فإن $a = c$.
التبديل	لأي عددين a و b، $a + b = b + a$ و $a \cdot b = b \cdot a$.
التجميع	لأي أعداد a و b و c، $(a + b) + c = a + (b + c)$ و $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
التوزيع	لأي أعداد a و b و c، $a(b + c) = ab + ac$ و $a(b - c) = ab - ac$.
المعكوس الجمعي	لأي عدد a، يوجد فقط عدد واحد $-a$ بحيث $a + (-a) = 0$.
المعكوس الضربي	لأي عدد $\frac{a}{b}$، حيث a و $b \neq 0$، يوجد فقط عدد واحد $\frac{a}{b}$ بحيث $\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$.
الضرب (0)	لأي عدد a، $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
الجمع (=)	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a = b$، فإن $a + c = b + c$.
الطرح (=)	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a = b$، فإن $a - c = b - c$.
الضرب والقسمة (=)	لأي أعداد a و b و c، حيث $c \neq 0$، إذا كان $a = b$، فإن $ac = bc$ و $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
الجمع (>)*	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a > b$، فإن $a + c > b + c$.
الطرح (>)*	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a > b$، فإن $a - c > b - c$.
الضرب والقسمة (>)*	لأي أعداد a و b و c. 1. إذا كان $a > b$ و $c > 0$، فإن $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. 2. إذا كان $a > b$ و $c < 0$، فإن $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
ناتج الضرب الصفري	لأي عددين حقيقيين a و b، إذا كان $ab = 0$، فإن $a = 0$ أو $b = 0$ أو a و b يساويان 0.
مربع مجموع	$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
مربع فرق	$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
ناتج ضرب مجموع وفرق	$(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

* *تنطبق هذه الخواص كذلك على $>$ و $\geq$ و $\leq$.*

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الصيغ

الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
المسافة على مستوى إحداثي	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
نقطة المنتصف على مستوى إحداثي	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
محيط المستطيل	$P = 2\ell + 2w$ أو $P = 2(\ell + w)$
محيط الدائرة	$C = 2\pi r$ أو $C = \pi d$

المساحة

مستطيل	$A = \ell w$	**شبه منحرف**	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$
متوازي أضلاع	$A = bh$	**دائرة**	$A = \pi r^2$
مثلث	$A = \frac{1}{2}bh$		

مساحة السطح

مكعب	$S = 6s^2$	**هرم منتظم**	$S = \frac{1}{2}P\ell + B$
منشور	$S = Ph + 2B$	**مخروط**	$S = \pi r\ell + \pi r^2$
إسطوانة	$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$		

الحجم

مكعب	$V = s^3$	**هرم منتظم**	$V = \frac{1}{3}Bh$
منشور	$V = Bh$	**مخروط**	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
إسطوانة	$V = \pi r^2 h$		

القياسات

متري	عرفي
الطول	
1 كيلو متر (km) = 1000 متر (m)	1 ميل (mi) = 1760 ياردة (yd)
1 متر = 100 سنتيمتر (cm)	1 ميل = 5280 قدمًا (ft)
1 سنتيمتر = 10 مللي متر (mm)	1 ياردة = 3 أقدام
	1 قدم = 12 بوصة (in.)
	1 ياردة = 36 بوصة
الحجم والسعة	
1 لتر (L) = 1000 مللي لتر (mL)	1 جالون (gal) = 4 أرباع (qt)
1 كيلو لتر (kL) = 1000 لتر	1 جالون = 128 أونصة سائلة (fl oz)
	1 ربع = 2 باينت (pt)
	1 باينت = 2 كوب (c)
	1 كوب = 8 أونصات سائلة
الوزن والكتلة	
1 كيلو جرام (kg) = 1000 جرام (g)	1 طن (T) = 2000 رطل (lb)
1 جرام = 1000 مللي جرام (mg)	1 رطل = 16 أونصة (oz)
1 طن متري (t) = 1000 كيلو جرام	

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الصيغ

الهندسة الإحداثية

الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
المسافة على خط الأعداد:	$d = \lvert a - b \rvert$
المسافة في مستوى إحداثي:	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
المسافة في الفضاء:	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
طول قوس المسافة:	$\ell = \frac{x}{360} \cdot 2\pi r$
نقطة المنتصف على خط الأعداد:	$M = \frac{a + b}{2}$
نقطة المنتصف في مستوى إحداثي:	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
نقطة المنتصف في الفضاء:	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

المُحيط ومحيط الدائرة

مربع	$P = 4s$	مستطيل	$P = 2\ell + 2w$	دائرة	$C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$

المساحة

مربع	$A = s^2$	مثلث	$A = \frac{1}{2}bh$
مستطيل	$A = bh$ أو $A = \ell w$	مُضلع منتظم	$A = \frac{1}{2}Pa$
متوازي أضلاع	$A = bh$	دائرة	$A = \pi r^2$
شبه منحرف	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$	قطاع دائري	$A = \frac{x}{360} \cdot \pi r^2$
معين	$A = bh$ أو $A = \frac{1}{2}d_1d_2$		

مساحة السطح الجانبية

منشور	$L = Ph$	هرم	$L = \frac{1}{2}P\ell$
إسطوانة	$L = 2\pi rh$	مخروط	$L = \pi r\ell$

مساحة السطح الكلية

منشور	$S = Ph + 2B$	مخروط	$S = \pi r\ell + \pi r^2$
إسطوانة	$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$	كرة	$S = 4\pi r^2$
هرم	$S = \frac{1}{2}P\ell + B$		

الحجم

مكعب	$V = s^3$	هرم	$V = \frac{1}{3}Bh$
منشور مستطيل	$V = \ell wh$	مخروط	$V = \frac{1}{3}\pi r^2h$
منشور	$V = Bh$	كرة	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
إسطوانة	$V = \pi r^2h$		

معادلات الأشكال على مستوى إحداثي

صيغة الميل والمقطع لمستقيم	$y = mx + b$	دائرة	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
صيغة النقطة والميل لمستقيم	$y - y_1 = m(x - x_1)$		

حساب المثلثات

قانون الجيب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	قانون جيب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$		

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الرموز

$\neq$	لا يساوي	$\parallel$	يوازي	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	مقدار متجه من A إلى B
$\approx$	تقريبًا يساوي	$\nparallel$	لا يوازي	A'	صورة الصورة الأصلية A
$\cong$	يطابق	$\perp$	متعامد على	$\rightarrow$	موضوع على
$\sim$	يشابه	$\triangle$	مثلث	$\odot A$	دائرة مركزها A
$\angle$, $\measuredangle$	زاوية، زوايا	$>, \geq$	أكبر من، أو أكبر من أو يساوي	π	باي
$m\angle A$	قياس درجة $\angle A$	$<, \leq$	أصغر من، أو أصغر من أو يساوي	$\overset{\frown}{AB}$	قوس أصغر نقطتاه الطرفيتان A و B
$^\circ$	درجة	$\square$	متوازي أضلاع	$\overset{\frown}{ABC}$	قوس أكبر نقطتاه الطرفيتان A و C
$\overleftrightarrow{AB}$	مستقيم يحتوي على النقطتين A و B	n-gon	مضلع عدد أضلاعه n	$m\overset{\frown}{AB}$	قياس درجة القوس AB
$\overline{AB}$	مستقيم نقطتاه الطرفيتان A و B	$a:b$	نسبة a إلى b	$f(x)$	f لـ x؛ قيمة f لـ x
$\overrightarrow{AB}$	شعاع تحتوي نقطته الطرفية A على B	(x, y)	زوج مرتّب	!	مضروب
AB	قياس $\overline{AB}$؛ المسافة بين A و B	(x, y, z)	مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر(ثلاثي مُرتب)	${}_nP_r$	تباديل مجموعة تحتوي n من العناصر مأخوذة منها r في كل مرة
$\sim p$	نفي p؛ ليس p	$\sin x$	جيب الزاوية x	${}_nC_r$	توافيق مجموعة تحتوي n من العناصر مأخوذة منها r في كل مرة
$p \wedge q$	ربط p و q	$\cos x$	جيب تمام الزاوية x	$P(A)$	احتمال A
$p \vee q$	فصل p و q	$\tan x$	ظل الزاوية x	$P(A\|B)$	احتمال A إذا علمت أن B حدث بالفعل
$p \longrightarrow q$	العبارة الشرطية، إذا كان p فإن q	$\vec{a}$	المتجه a		
$p \longleftrightarrow q$	العبارة ثنائية الشرط، p إذا وفقط إذا كان q	$\overrightarrow{AB}$	المتجه من A إلى B		

القياسات

متري	عرفي
الطول	
1 كيلو متر (km) = 1000 متر (m)	1 ميل (mi) = 1760 ياردة (yd)
1 متر = 100 سنتيمتر (cm)	1 ميل = 5280 قدمًا (ft)
1 سنتيمتر = 10 مللي متر (mm)	1 ياردة = 3 أقدام
	1 ياردة = 36 بوصة
	1 قدم = 12 بوصة (in.)
الحجم والسعة	
1 لتر (L) = 1000 مللي لتر (mL)	1 جالون (gal) = 4 أرباع (qt)
1 كيلو لتر (kL) = 1000 لتر	1 جالون = 128 أونصة سائلة (fl oz)
	1 ربع = 2 باينت (pt)
	1 باينت = 2 كوب (c)
	1 كوب = 8 أونصات سائلة
الوزن والكتلة	
1 كيلو جرام (kg) = 1000 جرام (g)	1 طن (T) = 2000 رطل (lb)
1 جرام = 1000 مللي جرام (mg)	1 رطل = 16 أونصة (oz)
1 طن متري (t) = 1000 كيلو جرام	

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الصيغ

الهندسة الإحداثية

نقطة المنتصف	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$	المسافة	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
		الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$

المصفوفات

الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$	الضرب في كمية عددية	$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$	الضرب	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab+bg & af-bh \\ ce+dg & cf-dh \end{bmatrix}$

كثيرات الحدود

القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$	مربع فرق	$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$ $= a^2 - 2ab + b^2$
مربع مجموع	$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ $= a^2 + 2ab + b^2$	ناتج ضرب مجموع وفرق	$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b)$ $= a^2 - b^2$

اللوغاريتمات

خاصية ناتج الضرب	$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$	خاصية الأس الثابت	$\log_b m^p = p \log_b m$
خاصية ناتج القسمة	$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b, b \neq 0$	تغيير الأساس	$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

القطوع المخروطية

قطع مكافئ	$y = a(x-h)^2 + k$ أو $x = a(y-k)^2 + h$	قطع ناقص	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b \neq 0$ أو $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$
دائرة	$x^2 + y^2 = r^2$ أو $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	قطع زائد	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b \neq 0$ أو $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

المتتاليات والمتسلسلات

الحد النوني، لمتتالية حسابية	$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد النوني، لمتتالية هندسية	$a_n = a_1 r^{n-1}$
مجموع متسلسلة حسابية	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$	مجموع متسلسلة هندسية	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$ أو $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}, r \neq 1$

حساب المثلثات

قانون الجيب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, a, b, c \neq 0$		
قانون جيب التمام	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
النسب المثلثية	$\tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	$\cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$	$\sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$
	$\cot \theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$	$\sec \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{1}{\cos \theta}$	$\csc \theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{1}{\sin \theta}$
متطابقات فيثاغورس	$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

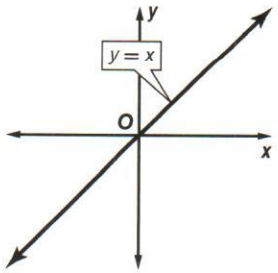
الرموز

$f(x) = \begin{cases} \end{cases}$	دالة متعددة التعريف
$f(x) = \lvert x \rvert$	دالة القيمة المطلقة
$f(x) = [\![x]\!]$	دالة أكبر عدد صحيح ليس أكبر من a
$f(x, y)$	f حسب x و y؛ دالة متغيراها x وy
$\overrightarrow{AB}$	المتجه AB
i	الوحدة التخيلية
$[f \circ g](x)$	f لـ g لـ x؛ تركيب الدالتين f وg
$f^{-1}(x)$	معكوس $f(x)$
$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$	الجذر النوني لـ b
$\log_b x$	أساس اللوغاريتم b من x
$\log x$	اللوغاريتم العادي x
$\ln x$	اللوغاريتم الطبيعي x

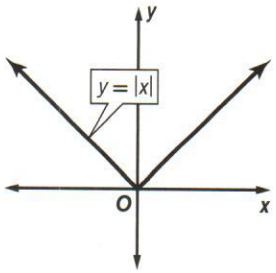
$\sum$	سيغما، المجموع
$\bar{x}$	متوسط عينة
μ	متوسط مجتمع إحصائي
s	الانحراف المعياري لعينة
σ	الانحراف المعياري لمجتمع إحصائي
$P(B \mid A)$	احتمال B إذا علمت أن A حدث بالفعل
nPr	تباديل مجموعة فيها n من العناصر مأخوذة منها مجموعة فيها r عنصر في كل مرة
nCr	توافيق مجموعة فيها n من العناصر مأخوذة منها مجموعة فيها r عنصر في كل مرة
$\text{Sin}^{-1} x$	Arcsin x
$\text{Cos}^{-1} x$	Arccos x
$\text{Tan}^{-1} x$	Arctan x

الدوال الأصلية

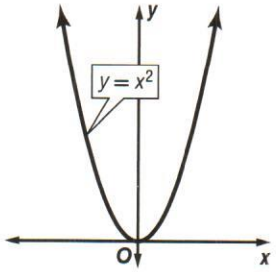
الدوال الخطية



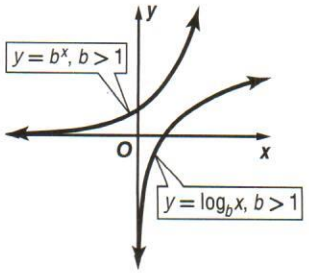
دوال القيمة المطلقة



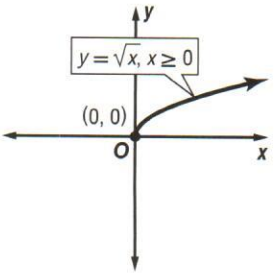
الدوال التربيعية



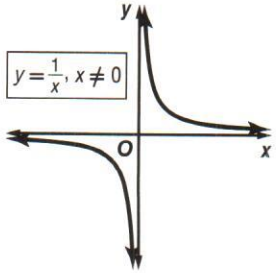
الدوال الأسية واللوغاريتمية



دوال الجذر التربيعي



الدوال العكسية والنسبية



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

شكر و تقدير

نسخة الطلاب

vii Glow Images; viii Leon58/Shutterstock.com; ix Purestock/Getty Images; x JeremyRichards/Shutterstock.com; xi Image Source/Age Fotostock; xii Ingram Publishing; xiii Purestock/SuperStock; xiv Hero/Corbis/Glow Images; xv ©Deborah Benbrook/Alamy; xvi age fotostock/SuperStock; xvii Image Source/SuperStock, 528 ©Deborah Benbrook/Alamy; 531 Digital Vision/Alamy; 534 Purestock/SuperStock; 537 (tl) Jacobs Stock Photography/Getty Images, (tc)Image Source/SuperStock, (tr)Richard Cummins/SuperStock; 548 Clearviewstock/Alamy; 562 McGraw-Hill Education; 574 Radius Images/Alamy; 576 Janie Airey/SuperStock; 579 (l)Doug Sherman/Geofile, (r) SuperStock/Alamy; 582 Ben Mangor/SuperStock; 584 SuperStock; 586 McGraw-Hill Education; 588 Jason Lafontaine/Painet Inc.; 590 Lenz, G/Arco Images/age fotostock; 598 ©Javier Pierini/Getty Images; 614 age fotostock/SuperStock; 619 Boutet Jean-Pierre/age fotostock; 620 Toño Labra/age fotostock; 626 ImageSource/Inmagine/123RF; 634 age fotostock/SuperStock; 637 Medioimages/Photodisc/Getty Images; 643 Image Source; 644 Fotoinfot/Shutterstock.com; 653 Zadiraka Evgenii/Shutterstock.com; 655 Steve Allen/Getty Images; 659 Joanne Harris and Daniel Bubnich/Shutterstock.com; 660 Lumppini/Shutterstock.com; 663 dreamtours/age fotostock; 665 Paul Springett 01/Alamy; 669 Goddard Space Flight Center Scientific Visualization Studio/NASA; 671 (cl)Hugh Threlfall/Alamy, (cr)D. Hurst/Alamy; 672 (l)Justus de Cuveland/age fotostock, (r)imagenavi/age fotostock; 676 Burazin/Photographer's Choice RF/Getty Images; 680 Richard Cummins/RGB Ventures/SuperStock/Alamy; 682 Danielle Gali/age fotostock; 688 ZouZou/Shutterstock.com; 692 Image Source/SuperStock; 695 Moomsabuy/Shutterstock.com; 697 VStock/Alamy; 702 Zurijeta/Shutterstock.com; 704 Roger Bacon/REUTERS/Alamy; 705 Wavebreakmedia/Shutterstock.com; 711 fotog/Getty Images; 712 Ingram Publishing/SuperStock; 713 Purestock/SuperStock; 719 Rawpixel.com/Shutterstock.com; 721 Darrell Walker/Icon SMI 945/Darrell Walker/Icon SMI/Newscom; 722 North Wind/North Wind Picture Archive; 727 Rawpixel.com/Shutterstock; 729 Gianni Caito/Shutterstock.com; 736 Image Source Plus/Alamy; 737 (l)Jill Braaten/McGraw-Hill Education, (r)Jaime Abecasis/imageBROKER/Alamy; 738 VGstockstudio/Shutterstock.com; 740 Syda Productions/Shutterstock.com; 750 Zurijeta/Shutterstock.