الوحدة 13 الأشكال الرباعية

السابق	الحالي	لماذا؟
لقد صنفت المضلعات وعرفت على خصائص المضلعات وطبقتها.	في هذه الوحدة، يتم: • إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخلية والخارجية لمضلع واستخدامها. • التعرف على خصائص الأشكال الرباعية وتطبيقها. • المقارنة بين الأشكال الرباعية.	**البرج والألعاب** يمكن استخدام خصائص الأشكال الرباعية لإيجاد قياسات زوايا متعددة وأطوال أضلاع مثل قياسات الزوايا في معدات الألعاب والملاعب وتوصيلات الألعاب.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مشروع الوحدة

وقت اللعب

يستخدم الطلاب ما تعلموه بشأن التصنيفات المختلفة للأشكال رباعية الأضلاع في تصميم وإنشاء لوحة لعب من خلال استخدام هذه المضلعات المتميزة.

- نظّم الطلاب في مجموعات ثنائية واجعلهم يبحثوا في الكيفية التي تم من خلالها استخدام الأشكال رباعية الأضلاع في تصميم لوحات اللعب. يرجع تاريخ تصميمات ألواح اللعب في الأشكال رباعية الأضلاع إلى عام 1400 قبل الميلاد.
- بعد ذلك، يجب أن تستخدم المجموعات الأنواع المتعددة من الأشكال رباعية الأضلاع في تصميم وعمل لوحة اللعب الخاصة بها. كذلك، اجعل الطلاب يضعوا هدفًا للعبتهم ويضعوا تعليمات للعبها توضح جليًا كيفية اللعب وربح اللعبة.
- بعد الخطوة السابقة وبعد إتمام عمل لوحة اللعب، اجعل الطلاب يصنفوا الأشكال رباعية الأضلاع التي استخدموها في تصميمهم. بعد ذلك، اطلب منهم أن ينشئوا معيارًا لتصنيفات جديدة وينظموا الأشكال رباعية الأضلاع حسب هذا المعيار الجديد.
- في النهاية، اجعل كل مجموعة تعرض تصميم لوحة اللعب الخاصة بها والتعليمات الخاصة باللعبة ونتائج بحثها أمام الفصل بأكمله. أكمل المشروع بأن تسمح للطلاب أن يتبادلوا اللعب فيما بينهم.

المفردات الأساسية قدّم المفردات الأساسية في الوحدة متبعًا النظام التالي.

عرّف: متوازيات الأضلاع هي أشكال رباعية يتوازى فيه كل ضلعين متقابلين؟

مثال:

اسأل: ما العلاقة في رأيك بين أطوال الأضلاع المتقابلة؟ وما العلاقة في رأيك بين قياسات الزوايا المتقابلة؟

الإجابات الإضافية (صفحة 801)

7. $x = 1, WX = XY = YW = 9$
8. $x = 5, FG = GH = 39$

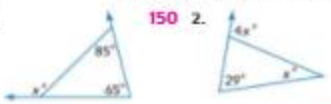
الاستعداد للوحدة

1 الكتاب الدراسي الاختياري قم بالتدريب السريع أدناه وعد إلى المراجعة السريعة للمساعدة.

تدريب سريع

أوجد قيمة x إلى أقرب جزء من العشرة.

1. 150
2. 9.7

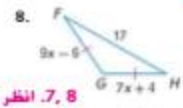


التزلج السريع تصنع متزلجة سريعة على الأقل مجموعتين من زوايا المثلث والزوايا الخارجية أثناء تزلجها.

3. $m\angle 1$ 54
4. $m\angle 2$ 53
5. $m\angle 3$ 137
6. $m\angle 4$ 103

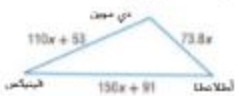
الجبر أوجد x وقياسات الأضلاع المجهولة في كل مثلث.

7.

8.


7, 8. انظر الهامش.

9. **السفر** تنتقل طائرة من دي موين إلى فينيكس ثم إلى أطلنطا وتعود مرة أخرى إلى دي موين كما هو موضح أدناه. أوجد المسافة بالكيلومتر من دي موين إلى فينيكس إذا كان طول الرحلة كلها 5570 كيلومترًا.



من دي موين إلى فينيكس = 1686 km، ومن دي موين إلى أطلنطا = 1540 km، ومن فينيكس إلى أطلنطا = 2344 km

مراجعة سريعة

مثال 1 (مستخدم في الدرس 1-13)

أوجد قياس جميع الزوايا المرقمة.

a. $m\angle 1$

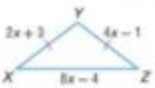
$m\angle 1 = 65 + 47$	نظرية الزاوية ∠ الخارجية
$m\angle 1 = 112$	اجمع.

b. $m\angle 2$

$180 = m\angle 2 + 68 + 65$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$180 = m\angle 2 + 133$	بسّط.
$m\angle 2 = 47$	اطرح.

مثال 2 (مستخدم في الدروس 2-13 و 3-13 و 6-13)

الجبر أوجد قياسات أضلاع المثلث متساوي الساقين $\triangle XYZ$.



$XY = YZ$	معطى
$2x + 3 = 4x - 1$	بالتعويض
$-2x = -4$	اطرح.
$x = 2$	بسّط.
$XY = 2x + 3$	معطى
$= 2(2) + 3$ أو 7	$x = 2$
$YZ = XY$	معطى
$= 7$	$XY = 7$
$XZ = 8x - 4$	معطى
$= 8(2) - 4$ أو 12	$x = 2$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

801

الأسئلة الأساسية

- كيف يمكن حساب مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع؟ الإجابة النموذجية: نقسّم الشكل إلى مثلثات لا تتداخل مع بعضها البعض. والمجموع هو ناتج عدد المثلثات التي ستتشكل و 180.
- ما الأنواع المختلفة للأشكال الرباعية، وما العلاقة بينها؟ الإجابة النموذجية: متوازيات الأضلاع، والمستطيلات، والمعيّن، والمربعات، وشبه المنحرف والطائرات الورقة. المستطيل والمعيّن والمربع عبارة عن متوازيات أضلاع، والمربع عبارة عن مستطيل ومعيّن، وشبه المنحرف والطائرة الورقية لا تعد من متوازيات الأضلاع.

المطويات منظّم الدراسة

المطويات® دينا زايك

التركيز يكتب الطلاب ملاحظاتٍ عن كل درسٍ في هذه الوحدة.

التدريس اطلب من الطلاب عمل المطويات وتسميتها حسبما هو موضح.

يستخدم الطلاب مطوياتهم لتدوين الملاحظات، وتعريف المصطلحات، وتسجيل المفاهيم، وتطبيق خواص الأشكال الرباعية. شجع الطلاب على استخدام البيانات المسجلة للمقارنة وتبين الفرق بين الأشكال الرباعية الخمسة المدرّسة.

وقت الاستخدام

تبويبات المطوية	الدرس (الدروس)
متوازيات الأضلاع	13-1, 13-2
المستطيلات	13-1, 13-3
المربعات والمعينات	13-4
أشباه المنحرف والطائرة الورقية	13-5

التدريس المتمايز

مسرد مصطلحات الطالب

يُكمل الطلاب المخطط عن طريق تقديم تعريف كل مصطلح وطرح مثال عليه أثناء التقدم في الوحدة 13. هذه الوسيلة الدراسية يمكن استخدامها أيضًا في المراجعة استعدادًا لاختبار الوحدة.

البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدةٍ أثناء دراستك للوحدة 13. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك. قد تحتاج إلى العودة إلى الوحدة 0 لمراجعة المهارات المطلوبة:

المطويات منظّم الدراسة

الأشكال رباعية الأضلاع اصنع المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظات الوحدة 6 عن الاحتمال. وابدأ بورقة واحدة من أوراق الدفتر.

1 **اطوِ** بالطول حتى الثقوب.

2 **اطوِ** بطول عرض الورقة مرتين ثم افرد الورقة.

3 **قُصّ** بطول علامات الطي على الجانب الأيسر من الورقة.

4 **سَمِّ** الطيّات كما هو موضح.

المفردات الجديدة

متوازي أضلاع	parallelogram
مستطيل	rectangle
معين	rhombus
مربّع	square
شبه منحرف	trapezoid
أساس/قاعدة	base
ساقان	legs
شبه منحرف متساوي الساقين	isosceles trapezoid
منصف ساقي شبه المنحرف	midsegment of a trapezoid

مراجعة المفردات

الزاوية الخارجية هي زاوية تتكون بواسطة أحد أضلاع مثلث مع امتداد ضلع آخر له

الزاوية الداخلية غير المجاورة هي زوايا المثلث غير المجاورة للزاوية الخارجية المحددة

الميل لمستقيم (غير رأسي) يحتوي على نقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2)، يتحدد العدد m من القانون

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ حيث } x_2 \neq x_1$$

حقوق النشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

802 | الوحدة 13 | الأشكال الرباعية

13-1 متوازيات الأضلاع

السابق	الحالي	لماذا؟
لقد صنّفت المضلعات ذات الأضلاع الأربعة على أنها متوازيات أضلاع.	1 التعرف على خصائص أضلاع وزوايا متوازيات الأضلاع وتطبيقها. 2 التعرف على خصائص أقطار متوازيات الأضلاع وتطبيقها.	ذراع هدف كرة السلة يمكن تعديله ليكون على ارتفاع 3 أمتار أو 1.5 متر. لاحظ أنه مع تعديل الارتفاع، تظل أزواج الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متوازية.

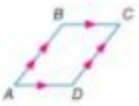
المفردات الجديدة

متوازي أضلاع
parallelogram

إثبات نظريات حول متوازيات الأضلاع.
استخدام البراهين لإثبات النظريات الهندسية البسيطة جبريًا.
استخدام مبادئ الرياضيات، بناء فرضيات صالحة والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 أضلاع متوازيات الأضلاع وزواياها متوازي الأضلاع هو رباعي أضلاع بتوازي فيه كل ضلعان متقابلان.

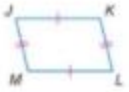
لتسمية متوازي الأضلاع، استخدم الرمز ▱ في ▱ABCD. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ و $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ حسب التعريف.



▱ABCD

الخصائص الأخرى لمتوازيات الأضلاع مذكورة في النظريات أدناه.

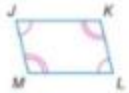
نظرية خواص متوازيات الأضلاع



13.1 إذا كان الشكل الرباعي عبارة عن متوازي أضلاع، فإن ضلعيه المتقابلين متطابقان.

الاختصار الضلعان المتقابلان في ▱ متطابقان ≅.

مثال إذا كان $JKLM$ متوازي أضلاع، فإن $\overline{JK} \cong \overline{ML}$ و $\overline{JM} \cong \overline{KL}$.



13.2 إذا كان الشكل الرباعي عبارة عن متوازي أضلاع، فإن كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.

الاختصار الزاويتان المتقابلتان A في ▱ متطابقتان ≅.

مثال إذا كان $JKLM$ متوازي أضلاع، فإن $\angle J \cong \angle L$ و $\angle K \cong \angle M$.

13.3 إذا كان الشكل الرباعي عبارة عن متوازي أضلاع، فإن كل زاويتين متتاليتين متكاملتان.

الاختصار الزاويتان المتتاليتان A في ▱ متكاملتان.

مثال إذا كان $JKLM$ متوازي أضلاع، فإن $x + y = 180$.

13.4 إذا كان متوازي الأضلاع يحتوي على زاوية واحدة قائمة، فإنه يحتوي على أربع زوايا قائمة.

الاختصار إذا كان ▱ فيه ∠ زاوية واحدة قائمة، فإنه يحتوي على 4 ∠ زوايا قائمة

مثال في ▱JKLM، إذا كانت ∠L زاوية قائمة، فإن ∠K، و ∠L، و ∠M هي أيضًا زوايا قائمة.

حقوق النشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 1-13 تصنيف المضلعات ذات الأضلاع الأربعة على أنها أشكال رباعية.

الدرس 1-13 التعرف على خصائص الأضلاع والزوايا لمتوازي الأضلاع وتطبيقها. التعرف على خصائص أقطار متوازي الأضلاع وتطبيقها.

بعد الدرس 1-13 التعرف على الشروط التي تضمن أن الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع.

2 التدريس

أسئلة الدعائم التعليمية

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- ما الخصائص التي تجعل الشكل المكون من الأذرع والقائم والمرمى متوازي أضلاع؟ أن تكون الأذرع متوازية دائمًا وأن يكون القائم والمرمى متوازيين دائمًا.
- ما الذي يحدث لقياس الزوايا إذا تم خفض المرمى من 3 أمتار إلى 1.5 متر؟ تصبح الزوايا الحادة منفرجة وتصبح الزوايا المنفرجة حادة.
- ما التخمينات التي يمكنك التوصل إليها بشأن العلاقة بين الزوايا الأربع بغض النظر عن ارتفاع المرمى؟ سيساوي مجموع قياسات الزوايا الأربع 360 دائمًا. ستكون الزوايا المتقابلة دائمًا متطابقة. وإذا كان قياس أحد الزوايا 90، فإن جميع الزوايا ستساوي 90.

1 أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه

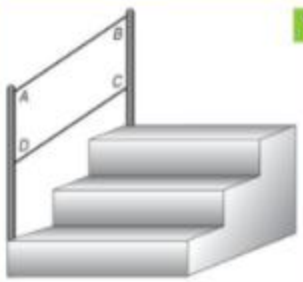
المثال 1 يوضح كيفية استخدام خصائص متوازي الأضلاع لإيجاد القياسات المفقودة.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1



الإنشاء في $\square ABCD$، افترض أن $m\angle B = 32$، $CD = 200$ cm. $BC = 40$ cm. احسب كل قياس.

a. AD 40 cm

b. $m\angle C$ 148

c. $m\angle D$ 32

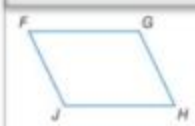
تصيحة دراسية

إدراج رسم

تقدم النظريات في صورة عامة. في البرهان، يتعين عليك إدراج رسم بحيث يمكنك الإشارة بدقة إلى القطع المستقيمة والزوايا.

برهان النظرية 13.2

اكتب برهانًا من عمودين للنظرية 13.4.



المعطيات: $\square FGHJ$

المطلوب: $\angle H \cong \angle F$، $\angle G \cong \angle J$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1. $\square FGHJ$	1. المعطيات
2. $\overline{FJ} \parallel \overline{GH}$، $\overline{FG} \parallel \overline{JH}$	2. تعريف متوازي الأضلاع
3. $\angle F$ و $\angle J$ متكاملتان. $\angle J$ و $\angle H$ متكاملتان. $\angle H$ و $\angle G$ متكاملتان.	3. إذا قُطعت خطوط المتوازية بواسطة خط قاطع، فإن الزوايا الداخلية المتتالية متكاملة.
4. $\angle F \cong \angle H$، $\angle J \cong \angle G$	4. الزوايا المكملة لنفس الزاوية تكون متطابقة.

مهنة من الحياة اليومية

المدرب تنظّم المدربون عمل الرياضيين الهواة والمحترفين، ويعلّمونهم أساسيات إحدى الرياضات ويديرون فرقًا أثناء مواسم التدريب والمسابقات على حد سواء. وقد تشتمل المهام الإضافية على اختيار المعدات والمواد واللوازم الرياضية وتوزيعها. وعادةً ما يكون المدربون الذين في المدارس الثانوية الحكومية حاصلين على درجة البكالوريوس.

مثال من الحياة اليومية 1 استخدام خصائص متوازيات الأضلاع

كرة السلة في $\square ABCD$، افترض أن $m\angle A = 55$ وأن $AB = 0.75$ متر وأن $BC = 0.30$ متر. أوجد جميع القياسات.

a. DC

$DC = AB$	الضلعان المتقابلان في $\square$ متطابقتان. $\cong$
$= 0.75$ m	بالتعويض

b. $m\angle B$

$m\angle B + m\angle A = 180$	الزاويتان المتتاليتان A في $\square$ متكاملتان.
$m\angle B + 55 = 180$	بالتعويض
$m\angle B = 125$	اطرح 55 من كل طرف.

c. $m\angle C$

$m\angle C = m\angle A$	الزاويتان المتقابلتان A في $\square$ متطابقتان $\cong$
$= 55$	بالتعويض

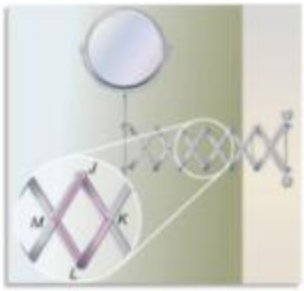
تمرين موجّه

1. **المرايا** المرآة المثبتة على الحائط الموضحة تستخدم متوازيات أضلاع تغير شكلها عند تمديد الذراع. في $\square JKLM$، افترض أن $m\angle J = 47$. أوجد جميع القياسات.

A. $m\angle L$ 47 B. $m\angle M$ 133

C. افترض أن الذراع قد مُدّدت أكثر بحيث تكون الزاوية $m\angle J = 90$. ما قياس كل زاوية من الزوايا الأخرى؟ برر إجابتك.

1C. كل قياس من قياسات الزوايا الأخرى سيكون 90 بحسب النظرية 13.6.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

انتبه!

متوازيات الأضلاع تنطبق النظريات من 13.3 إلى 13.6 فقط إذا كنت تعرف بالفعل أن الشكل متوازي أضلاع. وبشكل خاص لا ينطبق معكوس نظرية 13.6.

إرشاد للمعلمين الجدد

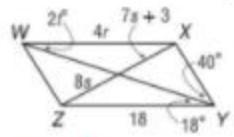
متوازي الأضلاع قبل إخبار الطلاب بالنظريات من 13.3 إلى 13.6، اطلب منهم إعمال الفكر لتخمين الخصائص التي يظنون أنها تنطبق على متوازي الأضلاع.

2 أقطار متوازيات الأضلاع

الأمثلة من 2 إلى 4 توضح كيفية استخدام النظريات لإثبات أن أقطار متوازي الأضلاع تنصف بعضها البعض.

مثال إضافي

2 إذا كان $WXYZ$ عبارة عن متوازي أضلاع، فأوجد قيمة المتغير المشار إليه.



a. r $r = 4.5$

b. s $s = 3$

c. t $t = 9$

التركيز على محتوى الرياضيات

القواطع تتقاطع أقطار متوازي الأضلاع وبالتالي تكون الزوايا الداخلية المتبادلة متطابقة.

2 أقطار متوازيات الأضلاع أقطار متوازي الأضلاع لها خصائص خاصة أيضًا.

نظرية أقطار متوازيات الأضلاع

13.5 إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإن قطريه ينصفان بعضهما.

الاختصار قطرا ▱ ينصفان بعضهما.

مثال إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع، فإن $\overline{AP} \cong \overline{PC}$ و $\overline{DP} \cong \overline{PB}$

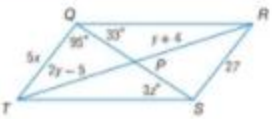
13.6 إذا كان الشكل الرباعي عبارة عن متوازي أضلاع، فإن كل قطر يقسم متوازي الأضلاع إلى مثلثين متطابقين.

الاختصار القطر يقسم ▱ إلى $\triangle$ $\cong$.

مثال إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع، فإن $\triangle ABD \cong \triangle CDB$

مثال 2 استخدام خواص متوازي المستطيلات والجبر

الجبر إذا كان $QRST$ عبارة عن متوازي أضلاع، فأوجد قيمة المتغير المشار إليه.



a. x

$\overline{QT} \cong \overline{RS}$	الضلعان المتقابلان في ▱ متطابقان $\cong$.
$QT = RS$	تعريف التطابق
$5x = 27$	بالتعويض
$x = 5.4$	اقسم كل طرف على 5.

b. y

$\overline{TP} \cong \overline{PR}$	قطرا ▱ ينصفان بعضهما.
$TP = PR$	تعريف التطابق
$2y - 5 = y + 4$	بالتعويض
$y = 9$	اطرح y وأضف 5 إلى كل طرف.

c. z

$\triangle TQS \cong \triangle RSQ$	القطر يقسّم ▱ إلى مثلثين متطابقين $\cong$.
$\angle QST \cong \angle SQR$	CTCPC المبرهنة
$m\angle QST = m\angle SQR$	تعريف التطابق
$3z = 33$	بالتعويض
$z = 11$	اقسم الطرفين على 3.

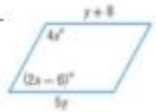
تصيحة دراسية

المثلثات المتطابقة

متوازي الأضلاع الذي به قطران ينصفان الشكل إلى زوجين من المثلثات المتطابقة.

تمرين موجّه

أوجد قيمة كل متغير في متوازي الأضلاع المعطى.

2A. 

$x = 31, y = 2$

2B.

$z = 4.5$

حقوق النسخ © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني أكد أنه في بعض متوازيات الأضلاع، تبدو الأقطار وكأنها تنصف الزوايا المقابلة، بيد أن هذا ليس من خصائص متوازيات الأضلاع. نبّه الطلاب لئلا يفترضوا أن الزوايا منصفة. في الدرس 4-13، سيدرس الطلاب المعين والمربع. وفي هذا النوع من متوازيات الأضلاع تنصف الأقطار الزوايا المقابلة.

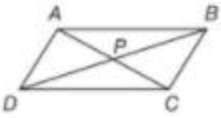
أمثلة إضافية

3 ما إحداثيات تقاطع أقطار متوازي الأضلاع $MNPR$، ذي الرؤوس $M(-3, 0)$ و $N(-1, 3)$ و $P(5, 4)$ و $R(3, 1)$؟ $(1, 2)$

4 اكتب فقرة برهان.

المعطيات: $\square ABCD$، $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ هما قطراه والنقطة P هي نقطة تقاطع $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$.

المطلوب: ينصف $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ كل منهما الآخر.



$ABCD$ متوازي أضلاع و $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ هما قطراه. إذًا $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. و $\overline{AC}$ متقاطع. $\angle BAC \cong \angle DCA$ و $\angle ABD \cong \angle CDB$ وفقًا لنظرية الزوايا الداخلية المتبادلة ⚠ لمتوازي الأضلاع $AB \cong CD$ حيث إن أضلاع $\triangle APB \cong \triangle CPD$ ≅ وفقًا لمسلمة تساوي زاويتين وضلع محصور. إذًا، وفقًا لخصائص المثلثات المتطابقة $\overline{BP} \cong \overline{DP}$ و $\overline{AP} \cong \overline{CP}$. وبناء على ذلك، ينصف $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ كل منهما الآخر.

يمكنك استخدام النظرية 13.5 لتحديد إحداثيات تقاطع القطرين في متوازي أضلاع على المستوى الإحداثي من طريق معرفة إحداثيات الرؤوس.

مثال 3 متوازيات الأضلاع والهندسة الإحداثية

الاستيعاب حدّد إحداثيات نقطة تقاطع القطرين في $\square FGHJ$ الذي رؤوسه $F(-2, 4)$ و $G(3, 5)$ و $H(2, -3)$ و $J(-3, -4)$.

لأن قطري متوازي الأضلاع ينصفان بعضهما، فإن نقطة التقاطع هي منتصف كل من $\overline{FH}$ و $\overline{GJ}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{FH}$ التي طرفاها $(-2, 4)$ و $(2, -3)$.

$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-2 + 2}{2}, \frac{4 + (-3)}{2}\right)$ قانون نقطة المنتصف

$= (0, 0.5)$ بسّط

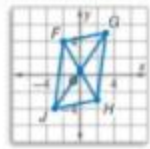
إحداثيات نقطة تقاطع القطرين في $\square FGHJ$ هي $(0, 0.5)$.

التحقق أوجد نقطة منتصف $\overline{GJ}$ التي طرفاها $(3, 5)$ و $(-3, -4)$.

$\left(\frac{3 + (-3)}{2}, \frac{5 + (-4)}{2}\right) = (0, 0.5)$ ✔

تصيحة دراسية

الانتظام مثّل متوازي المستطيلات بيانيًا في المثال 3 ونقطة تقاطع القطرين التي تجدها. ارسم القطرين. تبدو نقطة التقاطع صحيحة.



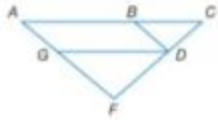
تمرين موجّه

3. **الاستيعاب** حدّد إحداثيات نقطة تقاطع القطرين في $RSTU$ الذي رؤوسه $R(-8, -2)$ و $S(-6, 7)$ و $T(6, 7)$ و $U(4, -2)$. $(-1, 2.5)$

يمكنك استخدام خصائص متوازيات الأضلاع وأقطارها لكتابة الإثباتات.

مثال 4 براهين تستخدم خواص متوازيات الأضلاع

اكتب فقرة برهان.



المعطيات: $\square ABDG$، $\overline{AF} \cong \overline{CF}$

المطلوب: $\angle BDG \cong \angle C$

البرهان:

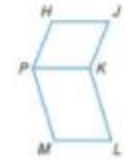
نعلم من المعطيات أن $ABDG$ متوازي مستطيلات. ولأن الزوايا المتقابلة في متوازي المستطيلات تكون متطابقة، فإن $\angle BDG \cong \angle A$. كما نعلم أيضًا من المعطيات أن $\overline{AF} \cong \overline{CF}$. حسب نظرية المثلث متساوي الساقين، تكون $\angle C \cong \angle A$. وإذًا حسب خاصية التعدي في التطابق، فإن $\angle BDG \cong \angle C$.

تمرين موجّه

4. اكتب برهانًا من عمودين.

المعطيات: $\square HJKP$ و $\square PKLM$

المطلوب: $\overline{HJ} \cong \overline{ML}$



4. **المعطيات:** $\square HJKP$ و $\square PKLM$

المطلوب: $\overline{HJ} \cong \overline{ML}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\square HJKP \cong \square PKLM$ (معطيات)
2. $\overline{PK} \cong \overline{ML}$، $\overline{HJ} \cong \overline{PK}$ الأضلاع المتقابلة في $\square$ تتطابق)
3. $\overline{HJ} \cong \overline{ML}$ (خاصية التعدي)

حقوق النشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمرينين من 1 إلى 8 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم المخطط الموجود في الجزء السفلي من هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

التحقق من فهمك

مثال 1

1. **الدراجات** إطار يمر بين الدراسات على شكل شبه منحرف متساوي الساقين. في $\square ABCD$، افترض أن $m\angle ABC = 45$ و $AB = 61$ cm و $AD = 58$ cm. أوجد جميع القياسات.

a. $m\angle BAD$ 135

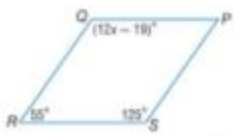
b. BC 58 cm

c. $m\angle ADC$ 45

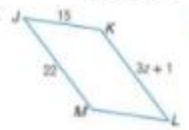
مثال 2

الجبر أوجد قيمة كل متغير في كل متوازي أضلاع.

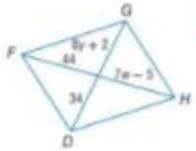
2. $x = 12$



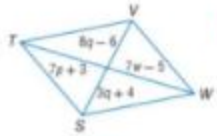
3. $z = 7$



4. $w = 7$, $y = 4$



5. $p = 5$, $q = 2$



مثال 3

6. **الهندسة الإحداثية** حدد الإحداثيات التي تغلق كل رباعي من الرباعيات في طريقين في $\square FGHJ$ الذي رؤوسه $F(-7, 6)$ و $G(-1, 10)$ و $H(3, 0)$ و $J(-3, -4)$. $(-2, 3)$

مثال 4

البرهان اكتب النوع المحدد من البراهين. 8–7. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.

7. برهان ج

المعطيات: $\square ABCD$، $\angle A$ زاوية قائمة

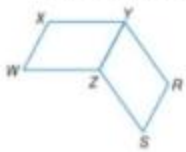
المطلوب: $\angle B$ و $\angle C$ و $\angle D$ زوايا قائمة

(انظر نظرية 13.6).

8. برهان ج

المعطيات: $XYZW$ و RSW متوازيا أضلاع.

المطلوب: $\overline{XW} \cong \overline{RS}$



التدرب وحل المسائل

مثال 1

استخدم $\square LMNP$! أوجد جميع القياسات.

9. $m\angle L$ 108°

10. MP 8

11. $m\angle M$ 72°

12. LM 12

جميع الحقوق محفوظة © McGraw-Hill Education

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار التمرين	
AL مرتفع	9–25, 42–58	9–25 فردي, 46–49	10-24 زوجي, 42-45, 50-58
OL أساسي	9–37 فردي, 38–40, 42–58	9–25, 46–49	27-40, 42-45, 50-58
BL متقدم	26–58		

13. **الرسم** 3 متوازيات أضلاع مستخدمة في رسم مكعب يبدو ثلاثي الأبعاد 3-D في $\square FGHD$، $FD = 1$ متر، $FG = \frac{1}{2}$ متر، و $m\angle GFD = 132$. أوجد جميع القياسات.

a. DH 1 متر

b. GH $\frac{1}{2}$ متر

c. $m\angle GHD$ 132

d. $m\angle FDH$ 48

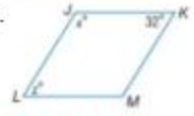
14. **الهندسة المعمارية** سقف أحمد البناني مقام على شكل متوازي أضلاع.

a. حدد زوجين من القطع المستقيمة المتطابقة. $\overline{JM} \cong \overline{KL}$ و $\overline{LK} \cong \overline{ML}$

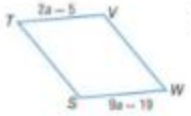
b. حدد زوجين من الزوايا المتكاملة. $\angle JKL$ متكاملة مع $\angle JML$ و $\angle KLM$ متكاملة مع $\angle KJM$

مثال 2

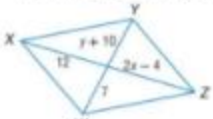
الجبر أوجد قيمة كل متغير في كل متوازي أضلاع.

15. 

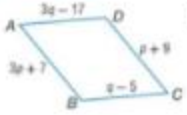
$x = 148, z = 32$

16. 

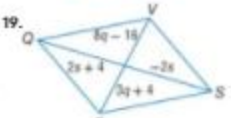
$a = 7, b = 5$

17. 

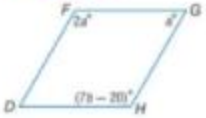
$x = 8, y = -3$

18. 

$p = 2, q = 6$

19. 

$s = -1, q = 4$

20. 

$a = 60, b = 20$

مثال 3

الهندسة الإحداثية أوجد إحداثيات نقطة تقاطع القطرين في $\square WXYZ$ المحطى لك رؤوسه.

21. $W(-3, 5), X(1, 7), Y(3, 1), Z(-1, -1)$ (0,3)

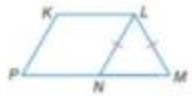
22. $W(1, 2), X(4, 7), Y(6, 5), Z(3, 0)$ $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$

مثال 4

البرهان اكتب برهانًا من عمودين. 24–23. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.

23. **المعطيات:** $ABDE$ و $ABCD$ متوازيا أضلاع.
المطلوب: $\triangle ADE \cong \triangle BCD$

24. **المعطيات:** $\triangle LMN$ مثلث متساوي الساقين. $KLNP$ متوازي أضلاع.
المطلوب: $\angle LMN$ متكاملة مع $\angle KPN$



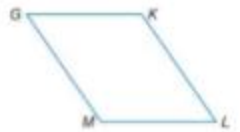
حقوق النشر والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز OL BL

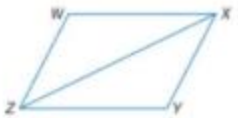
التوسع اطلب من الطلاب رسم متوازي أضلاع يقع في نطاق جميع الأرباع لشبكة إحداثيات. ثم اطلب من الطلاب رسم أقطار الشكل. ثم اطلب من الطلاب رسم شكلين مشابهين للشكل مع تغيير أبعادهما بمعاملي مقياس 0.5 و 2. وينبغي أن يرسم الطلاب الأقطار على الشكلين المغيّر أبعادهما أيضًا. اطلب من الطلاب أن يكتبوا في دفاترهم العلاقة بين الزوايا الداخلية للأشكال الثلاثة وأقطارها. إن تغيير أبعاد متوازي الأضلاع لا يغير من قياس الزوايا الداخلية للشكل التالي. جميع الأقطار المتناظرة متوازية.

البرهان اكتب النوع المحدّد من البراهين. 25–28. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.

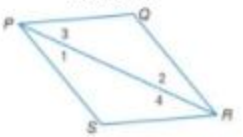
25. من عمودين
المعطيات: $\square GKLM$
المطلوب: تكامل $\angle G$ مع $\angle K$ و $\angle K$ مع $\angle L$ و $\angle L$ مع $\angle M$ و $\angle M$ مع $\angle G$
(النظرية 13.3)



26. من عمودين
المعطيات: $\square WXYZ$
المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$
(النظرية 13.6)

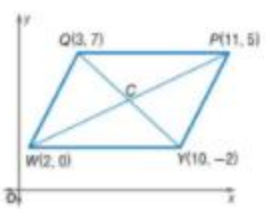


27. من عمودين
المعطيات: $\square PQRS$
البرهان: $\overline{PQ} \cong \overline{RS}, \overline{QR} \cong \overline{SP}$
(النظرية 13.1)



28. حر
المعطيات: $\square ACDE$ متوازي أضلاع.
البرهان: $\overline{AD}$ تنصّف $\overline{EC}$
(النظرية 13.5)

29. **الهندسة الإحداثية** استخدم التمثيل البياني المجاور.



a. استخدم قانون المسافة في بيان أن $\overline{QW} \cong \overline{PY}$ و $\overline{QP} \cong \overline{WY}$.

$\overline{QP} = \sqrt{(11-3)^2 + (5-7)^2} = 2\sqrt{17}$
$\overline{WY} = \sqrt{(10-2)^2 + (-2-0)^2} = 2\sqrt{17}$
$\overline{QW} = \sqrt{(3-2)^2 + (7-0)^2} = 5\sqrt{2}$
$\overline{PY} = \sqrt{(11-10)^2 + (5--2)^2} = 5\sqrt{2}$

b. أوجد إحداثيات C إذا كانت $\overline{QY}$ تنصف $\overline{WP}$ $\left(\frac{13}{2}, \frac{5}{2}\right)$

c. استخدم الميول في تحديد ما إذا كان $QPWY$ متوازي أضلاع أم لا.

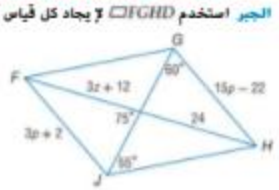
$\overline{QP}$ ميل $= \frac{7-5}{3-11} = -\frac{1}{4}$ $\overline{QW}$ ميل $= \frac{7-0}{3-2} = 7$
$\overline{WY}$ ميل $= \frac{-2-0}{10-2} = -\frac{1}{4}$ $\overline{PY}$ ميل $= \frac{5--2}{11-10} = 7$

لأن الأضلاع المتقابلة في $QPWY$ متوازية، فإن $QPWY$ متوازي أضلاع.

الجبر استخدم $\square FGHD$ لإيجاد كل قياس أو قيمة.

30. z 4

31. $m\angle FHJ$ 20



32. $m\angle FHJ$ 65

33. p 2

34. $m\angle GHK$ 45

35. $m\angle FJH$ 115

حقوق النسخ والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

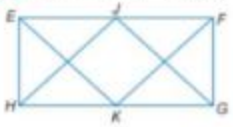
809

36. **الهندسة الإحداثية** إذا كان $WXYZ$ يتضمن الرؤوس $W(3, -2)$ و $X(-2, -4)$ و $Y(1, 1)$، فحدد إحداثيات الرأس Z إذا كانت تقع بالربع الأول. **(6,3)**

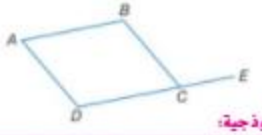
البرهان اكتب برهانًا من عمودين.

37. **المعطيات:** $\overline{HJ}$ تنصف $\overline{EK}$، $\overline{EF}$ تنصف $\overline{HG}$، $\square EFGH$

البرهان: $\triangle EJH \cong \triangle GKF$ **انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**



38. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف الزاوية التي تنتج بعد أحد أضلاع متوازي الأضلاع.



a. **هندسيًا** قم بإنشاء 3 متوازيات أضلاع وقم بعد أحد الأضلاع. قم بتسمية كل منها بالاسم $ABCD$ كما هو موضح. قم بقياس ونمذجة أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه. **انظر الهامش.**

b. **جدوليًا** انسخ الجدول التالي وأكمله.

متوازي الأضلاع	$m\angle A$	$m\angle D$	$m\angle BCE$
متوازي الأضلاع 1			
متوازي الأضلاع 2			
متوازي الأضلاع 3			

الإجابة النموذجية:

متوازي الأضلاع	$m\angle A$	$m\angle D$	$m\angle BCE$
متوازي الأضلاع 1	30	150	150
متوازي الأضلاع 2	60	120	120
متوازي الأضلاع 3	20	160	160

c. **لفظيًا** قم بتخمين قياس الزاوية المكونة من مد أحد أضلاع متوازي الأضلاع وكذلك تخمين قياسات الزوايا الأخرى. **الإجابة النموذجية: $m\angle BCE$ تساوي $m\angle D$ والزاوية $m\angle B$ تكمل الزاوية $m\angle A$ والزاوية $m\angle BCD$.**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

39. **تحدي** $ABCD$ متوازي أضلاع قطراه كما هو مبين. اذكر جميع أزواج المثلثات المتطابقة. **الإجابة النموذجية: $\triangle ABE \cong \triangle CDE$، $\triangle BEC \cong \triangle DEA$، $\triangle ABC \cong \triangle CDA$، $\triangle BAD \cong \triangle DCB$**

40. **الكتابة في الرياضيات** اشرح ما الذي يجعل متوازيات الأضلاع أنواعًا خاصة من الأشكال الرباعية. **انظر الهامش.**

41. **مسألة غير محددة** الإجابة فكم مثالاً مكسيًا لتوضيح أن متوازيات الأضلاع ليست دائمًا متطابقة إذا كانت زواياها المتناظرة متطابقة. **انظر الهامش.**

42. **تبرير** إذا كان $A(-1, 2)$ و $B(2, 1)$ ثلاثة رؤوس لمتوازي أضلاع، فما النقاط التي يمكن أن تستخدم للرأس الرابعة؟ **انظر الهامش.**

43. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في أن المستطيلات دائمًا تكون متوازيات أضلاع، ولكن متوازيات الأضلاع تكون أحيانًا مستطيلات.

المستطيلات تكون دائمًا متوازيات أضلاع لأن الأضلاع المتقابلة في المستطيلات دائمًا تكون متوازية ولكن متوازيات الأضلاع تكون أحيانًا مستطيلات لأن بعض متوازيات الأضلاع لا تحتوي على زوايا قائمة والمستطيل يجب أن يكون به أربع زوايا قائمة.

حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمثيلات المتعددة

في التمرين 38، يستخدم الطلاب رسومًا هندسيةً وجدولاً إضافةً إلى الوصف اللفظي لاستكشاف اختبار لمعرفة متى يكون رباعي الأضلاع متوازي أضلاع.

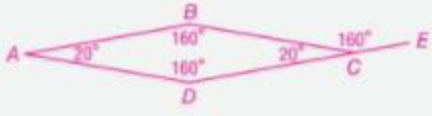
إجابات إضافية

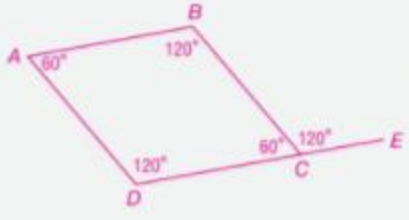
40. متوازيات الأضلاع عبارة عن أنواع خاصة من الأشكال رباعية الأضلاع. وهذا لأنها عبارة عن أشكال ذات أربعة جوانب، تكون فيها الجوانب المتقابلة متوازية. وتكون الزوايا والجوانب المتقابلة متطابقة وتنصف الأقطار بعضها البعض.

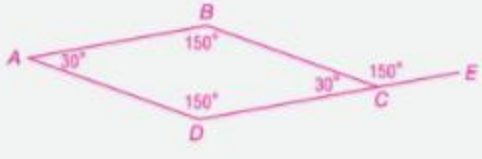
41. الإجابة النموذجية:

42. $(0, 4), (4, -2), (-2, 0)$

38a. الإجابة النموذجية:







4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب

اطلب من الطلاب ذكر جميع خصائص متوازيات الأضلاع التي تعلموها. اطلب من الطلا ب تقديم عباراتهم بالترتيب قبل مغادرتهم للصف الدراسي.

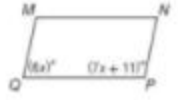
تدرب على الاختبار المعياري

44. زاويتان متتاليتان في متوازي أضلاع قياساهما $3x + 42$ و $9x - 18$. ما قياس الزاويتين؟ **D**

A 13, 167 C 39, 141

B 58.5, 31.5 D 81, 99

45. **الإجابة الشبكية** في متوازي الأضلاع $MNPQ$ الموضح بالرسم، ما قيمة x؟ **13**



46. **الجبر** في صف حساب مثلثات يضم 32 طالبًا، النسبة بين الطلاب الذين يدرسون الهندسة والطلاب الذين يدرسون الرياضيات هي 5 إلى 3. بكم يزيد عدد طلاب الهندسة عن طلاب الرياضيات؟ **G**

F 2 G 8 H 12 J 15

47. SAT/ACT يوضح الجدول ارتفاعات أعلى البنايات في كنساس سيتي، ميزوري. فما الفارق الموجب، مُقرّبًا لأقرب جزء من العشرة، بين وسيط البنايات ووسطها؟ **B**

الاسم	الارتفاع (m)
وان كنساس سيتي بليس	193
ثاون باسيليون	180
حيلة ريجينسي	154
باور آند لايت بيلدينج	147
مجلس المدينة	135
1201 والنت	130

A 5
B 6
C 7
D 8
E 10

مراجعة شاملة

في الشكل، $b \parallel a$ و $d \parallel c$ و $m\angle 4 = 57$. أوجد قياس كل زاوية.

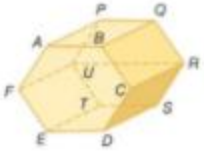
48. $\angle 5$ **123**

49. $\angle 1$ **123**

50. $\angle 8$ **57**

51. $\angle 10$ **57**

راجع الرسم التخطيطي الموجود على اليسار.



52. حدد جميع القطع المستقيمة التي توازي $\overline{TU}$. **$\overline{BC}$, $\overline{EF}$, $\overline{QR}$**

53. حدد جميع المستويات التي تتقاطع مع المستوى BCR. **ABC, ABQ, PQR, CDS, APU, DET**

54. حدد جميع القطع المستقيمة المتخالفة مع $\overline{DE}$. **$\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$, $\overline{FU}$, $\overline{PU}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{TU}$**

55. **الإنشاءات** توجد أربعة بنايات في حرم مدرسة مانصفيلد الثانوية. ولا تبدو ثلاثة بنايات منها على خط مستقيم. فكم عدد الممرات التي يتبقى بناؤها حتى يتصل كل مبنى مباشرة بالمباني الأخرى؟ **6**

مراجعة المهارات

رؤوس الشكل الرباعي هي $W(3, -1)$ و $X(4, 2)$ و $Y(-2, 3)$ و $Z(-3, 0)$. حدد ما تمثله كل قطعة مستقيمة في الشكل الرباعي؛ أهي ضلع أم قطر؟ وأوجد ميل كل قطعة مستقيمة.

56. $\overline{YZ}$ **3 ضلع؛**

57. $\overline{YW}$ **$-\frac{4}{5}$ قطر؛**

58. $\overline{ZW}$ **$-\frac{1}{6}$ ضلع؛**

حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

811

1 التركيز

الهدف استخدام حاسبة التمثيل البياني لاستكشاف خواص متوازيات الأضلاع.

المواد

- حاسبة تمثيل بياني

2 التدريس

العمل بصورةٍ مستقلة

اطلب من الطلاب العمل بصورة مستقلة أو مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات.

اطلب من الطلاب إكمال الخطوات من 1 إلى 5.

اطرح السؤالين التاليين:

- ما الذي يمكن قوله بشأن طولي $\overline{CA}$ و $\overline{DB}$؟ الأطوال متطابقة حيث إن $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.
- ما الغرض من استخدام أداة الميل في هذا النشاط؟ إذا كان هناك مستقيمان لهما نفس الميل، فهما متوازيان والأضلاع المتوازية تشير إلى أن الشكل متوازي أضلاع.

التمرين اطلب من الطلاب العمل بصورة مستقلة لإكمال التمارين من 5-1.

3 التقويم

التقويم التكويني

استخدم التمرينين 4 و 5 لتقويم ما إذا كان الطلاب يمكنهم فهم خصائص متوازي الأضلاع.

من العملي إلى النظري

أخبر الطلاب البحث بأنحاء الفصل للعثور على أمثلة لمتوازيات الأضلاع. اسأل الطلاب كيف يمكنهم معرفة إن كانت الأمثلة شكل رباعي فقط أو شكل رباعي عبارة عن متوازي أضلاع.

13-2 مختبر تقنية التمثيل البياني
متوازيات الأضلاع

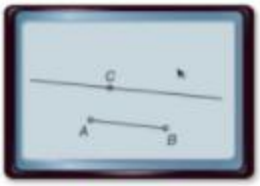
تصميم إنشاءات هندسية للأشكال باستخدام مختلف الأدوات والطرق (الفرجار والمسطرة والمنقلة والأدوات المقاسة والورق العادي للطي وبرنامج هندسي ديناميكي، وما إلى ذلك).

النشاط

أنشئ رباعي أضلاع به زوج واحد من الأضلاع متوازٍ ومتطابق على حدٍ سواء.

الخطوة 1 أنشئ قطعة مستقيمة باستخدام الأداة **Segment (القطعة المستقيمة)** من القائمة F2. أسمِ القطعة المستقيمة الاسم $\overline{AB}$. هذه القطعة هي أحد أضلاع الشكل الرباعي.

الخطوة 2 استخدم الأداة **Parallel (متوازي)** من القائمة F3 لإنشاء مستقيم موازٍ للقطعة المستقيمة. يؤدي الضغط على ENTER إلى رسم مستقيم ونقطة على المستقيم. قم بتسمية النقطة بالاسم C.



الخطوتان 1 و 2

الخطوة 3 افتح الأداة **Compass (الفرجار)** من القائمة F3. اضبط فتحة الفرجار بطول $\overline{AB}$ بتحديد أحد طرفي القطعة المستقيمة ثم تحديد الطرف الآخر. قم برسم دائرة مركزها C.

الخطوة 4 استخدم الأداة **Point Intersection (نقطة تقاطع)** من القائمة F2 لرسم نقطة عند تقاطع مع المستقيم والدائرة. قم بتسمية النقطة بالاسم D. ثم استخدم الأداة **Segment (القطعة المستقيمة)** من القائمة F2 لرسم $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$.

الخطوتان 3 و 4

الخطوة 5 استخدم الأداة **Hide/Show (إخفاء/إظهار)** من القائمة F5 لإخفاء الدائرة ثم افتح الأداة **Slope (ميل)** ضمن **Measure (قياس)** من القائمة F5. اعرض الميل لكل من $\overline{AB}$ و $\overline{BD}$ و $\overline{CD}$ و $\overline{AC}$.

الخطوة 5

تحليل النتائج 5-1. انظر الهامش.

1. ما العلاقة بين الضلعين $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$؟ اشرح كيف عرفت ذلك.
2. ما الذي تلاحظه بشأن ميلي الضلعين المتقابلين من الشكل الرباعي؟ ما نوع الشكل الرباعي $ABDC$؟ اشرح.
3. اضغط على النقطة A واسحبها لتغيير شكل $ABDC$. ما الذي تلاحظه؟
4. حدّد بشأن رباعي أضلاع يتطابق ويتوازى به زوج من الأضلاع المتقابلة.
5. استخدم حاسبة التمثيل البياني لإنشاء رباعي أضلاع بحيث يتطابق به زوجان من الأضلاع المتقابلة. ثم حلل قيم ميل أضلاع الشكل الرباعي. حدّد بناءً على ملاحظاتك.

حقوق النشر وتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

وسِّع النشاط

اطرح السؤال التالي:

- افترض أن هناك شكل رباعي به زوج من الأضلاع المتوازية والمتطابقة. هل هو متوازي أضلاع؟ نعم.

إجابات إضافية

1. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ و $\overline{AB} \cong \overline{CD}$: تم رسم المستقيم الذي يتضمن $\overline{CD}$ بحيث يكون موازيًا لـ $\overline{AB}$. واستخدم الفرجار لضمان أن يكون $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
2. الميلان متساويان. $ABDC$ متوازي أضلاع حيث إن الأضلاع المتقابلة متوازية.
3. يظل ميل الأضلاع المتقابلة متساويًا.
4. رباعي الأضلاع هو متوازي أضلاع.
5. إن رباعي الأضلاع الذي يحتوي على زوجين من الأضلاع المتقابلة المتوازية هو متوازي أضلاع.

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 2-13 التعرف على خصائص متوازيات الأضلاع وتطبيقها.

الدرس 2-13 التعرف على الشروط التي تضمن أن الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع. إثبات أن مجموعة من النقاط تكون متوازي أضلاع على المستوى الإحداثي.

بعد الدرس 2-13 استخدام خواص التشابه من أجل استكشاف التخمينات الخاصة بالمستطيلات وتعليلها.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤالين التاليين:

- كيف قطعت أسماء كل ورقة؟ صمم رسمًا تخطيطيًا.

- كيف تحققت إيمان من أن طريقة أسماء نجحت؟ الإجابة النموذجية: يمكنها قياس كل زاوية والتأكد من أن الزوايا المتتالية متكاملة. وحيث إن هذا صحيح، فإن الأضلاع المتقابلة متوازية.

13-2 اختبارات متوازيات الأضلاع

السابق

- تعرفت على خصائص متوازيات الأضلاع وتطبيقها.

الحالي

1 التعرف على الشروط التي تضمن أن يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

2 إثبات أن مجموعة نقاط تكون متوازي أضلاع في المستوى الإحداثي.

لماذا؟

- باسمين وسهيلة تقطّعان قصاصات ورقية من ورقة لوحة إعلانات بزاوية لتكوين معرض الرواق البوصي. وسألهما أصدقاؤهما عن كيفية قطعهما للقصاصات بحيث تكون جوانبها متوازية بدون استخدام منقلة.

شرحت سهيلة أنه نظرًا لأن حافتي الورقة الأيسر والأيمن متوازيان، فلم يلزمها سوى التأكد من أن الأضلاع قُطعت على بطول واحد لضمان أن القصاصة ستشكّل متوازي أضلاع.

إثبات نظريات حول متوازيات الأضلاع

استخدام الإحداثيات لإثبات النظريات الهندسية البسيطة جبريًا.

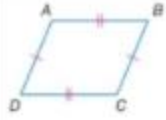
بناء فرضيات صيغية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين التفكير بطريقة شبيهة وكتابتها.

1 شروط متوازيات الأضلاع

إذا كان كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي متوازيين، فإنه يكون متوازي أضلاع حسب التعريف.

هذا ليس الاختبار الوحيد. ولكن يمكن استخدامه لتحديد إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

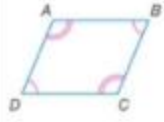
النظريات شروط متوازيات الأضلاع



13.7 إذا كان كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي متطابقين، فإن الشكل الرباعي يكون متوازي أضلاع.

الاختصار *إذا كان كل ضلعين متقابلين متطابقين ≅، فإن الشكل الرباعي يكون □.*

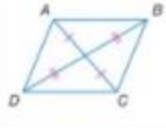
مثال إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BC}$، فإن ABCD هو متوازي أضلاع.



13.8 إذا كان كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي متطابقتين، فإن الشكل الرباعي يكون متوازي أضلاع.

الاختصار *إذا كان كل زاويتين متقابلتين ∠ متطابقتين ≅، فإن الشكل الرباعي يكون □.*

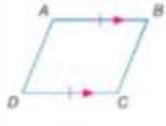
مثال إذا كان $\angle C \cong \angle A$ و $\angle D \cong \angle B$، فإن ABCD متوازي أضلاع.



13.9 إذا كان القطران في الشكل الرباعي ينصفان بعضهما، فإن الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع.

الاختصار *إذا كان القطران ينصفان بعضهما، فإن الشكل الرباعي هو □.*

مثال إذا كان $\overline{AC}$ وكان $\overline{DB}$ ينصفان بعضهما، فإن ABCD متوازي أضلاع.



13.10 إذا كان ضلعان متقابلان في الشكل الرباعي متوازيين ومتطابقين أيضًا، فإن الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع.

الاختصار *إذا كان هناك ضلعان متقابلان ≅ وأيضًا ||، فإن الشكل الرباعي يكون □.*

مثال إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ و $\overline{AB} \cong \overline{DC}$، فإن ABCD هو متوازي أضلاع.

سأثبت أن النظريات 13.8 و 13.10 و 13.11 في التمرينات 30 و 32 و 33 على الترتيب.

1 شروط متوازيات الأضلاع

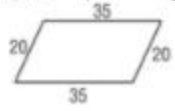
الأمثلة من 1 إلى 3 توضح كيفية استخدام النظريات الجديدة، وهي عكس النظريات في الدرس 1-8 لإثبات أن أحد الأشكال متوازي أضلاع.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

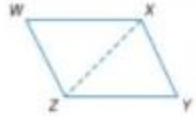
1 حدد إذا ما كان رباعي الأضلاع هو متوازي أضلاع أم لا. برر إجابتك.



إن كل زوج من أزواج الأضلاع المتقابلة متساوي في القياس. ومن ثم، فهم متطابقان. إذا كلا زوجي الأضلاع المتقابلة متطابق، فإن رباعي الأضلاع عبارة عن متوازي أضلاع.

برهان النظرية 13.7

اكتب برهانًا حرًا للنظرية 13.7.



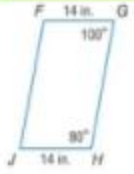
المعطيات: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$, $\overline{WZ} \cong \overline{XY}$

المطلوب: WXYZ متوازي أضلاع.

فقرة البرهان:

النقطتان يحددان مستقيمًا. وبهذا يمكننا رسم مستقيم مساعد $\overline{ZX}$ لتكوين المثلث ΔZWX والمثلث ΔXYZ. من المعطيات نعلم أن $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$ و $\overline{WZ} \cong \overline{XY}$. كما أن $\overline{ZX} \cong \overline{XZ}$ حسب خاصية الانعكاس في التطابق. وعلى هذا ΔZWX ≅ ΔXYZ حسب المبرهنة SSS. وحسب المبرهنة CPCTC، تكون ∠WXZ ≅ ∠YZX و ∠WZX ≅ ∠YXZ. هذا يعني أن $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$ وأن $\overline{WZ} \parallel \overline{XY}$ حسب معكوس نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة. الأضلاع المتقابلة في WXYZ متوازية وبالتالي حسب التعريف فإن WXYZ متوازي أضلاع.

مثال 1 تحديد متوازيات الأضلاع



حدد إذا ما كان الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع أم لا. علّل إجابتك.

الضلعان المتقابلان $\overline{FG}$ و $\overline{JH}$ متطابقان لأن لهما نفس القياس. وأيضًا بما أن ∠FGH و ∠GHJ زاويتين داخليتين متكاملتين، فإن $\overline{FG} \parallel \overline{JH}$. وعلى هذا، حسب النظرية 13.7، فإن FGHJ متوازي أضلاع.

تمرين موجّه

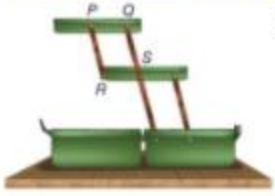
1A.

1B.

1A. نعم؛ كل ضلعين متقابلين متطابقان.
1B. لا؛ لم يجتز أيًا من اختبارات متوازيات الأضلاع.

يمكنك استخدام شروط متوازيات الأضلاع لإثبات العلاقات في مواقف من الحياة اليومية.

مثال 2 من الحياة اليومية استخدام متوازيات الأضلاع لإثبات العلاقات



صيد الأسماك **الرسم التخطيطي يبين منظرًا جانبيًا لصندوق معدات الصيد على اليسار. في الرسم التخطيطي، $PQ = RS$ و $QS = PR$. اشرح السبب في أن الدرجين العلوي والأوسط يظلان متوازيين بغض النظر عن الارتفاع الذي يُرفع إليه أو يُنزل إليه الدرجان.**

بما أن كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي PQSR متطابقان، فإن PQRS متوازي أضلاع حسب النظرية 13.7. وحسب تعريف متوازي الأضلاع، فإن الأضلاع المتقابلة متوازية وبهذا تكون $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$. وعلى هذا بصرف النظر عن كون الموضع الرأسي للدرجين، فإنها يظلان متوازيين دائمًا.

تمرين موجّه

2. اللافتات في المثال الموجود في بداية الدرس، اشرح السبب في أن القطع التي صنعتها باسمين و سهيلة متوازية. **انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

الربط بالحياة اليومية

صندوق معدات صيد ثلاثي أو ثلاثي الدعامات غالبًا ما يُستخدم في ترتيب الطعوم ولوازم الصيد الأخرى. ترتفع الأدراج لأعلى وللخارج بحيث يسهل الوصول إلى كل الأغراض بالصندوق.

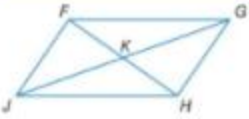
انتبه!

متوازيات الأضلاع يحتاج الشكل الرباعي لأن ينجح في أحد الاختبارات الخمسة التي تثبت كونه متوازي أضلاع. وليس هناك حاجة إلى إثبات جميع خصائص متوازي الأضلاع.

يمكنك كذلك استخدام شروط متوازيات الأضلاع بالتزامن مع الجبر لإيجاد القيم المجهولة التي تجعل من الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

مثال 3 استخدام متوازيات الأضلاع والجبر لإيجاد القيم

إذا كان $FK = 3x - 1$ و $KG = 4y + 3$ و $JK = 6y - 2$ و $KH = 2x + 3$. فأوجد x و y بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.



حسب النظرية 13.9، إذا كان قطرا الشكل الرباعي ينصفان بعضهما فإنه في هذه الحالة يكون متوازي أضلاع. إذا أوجد x بحيث تكون $FK \cong KH$ وأوجد y بحيث تكون $JK \cong KG$.

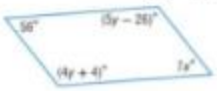
$FK = KH$	تعريف التطابق =
$3x - 1 = 2x + 3$	بالتعويض
$x - 1 = 3$	اطرح $2x$ من كل طرف.
$x = 4$	أضف 1 إلى كل طرف.
$JK = KG$	تعريف التطابق =
$6y - 2 = 4y + 3$	بالتعويض
$2y - 2 = 3$	اطرح $4y$ من كل طرف.
$2y = 5$	أضف 2 إلى كل طرف.
$y = 2.5$	اقسم الطرفين على 2.

لذا، فحينما تكون x بقيمة 4 وتكون y بقيمة 2.5، فإن الشكل الرباعي $FGHJ$ هو متوازي أضلاع.

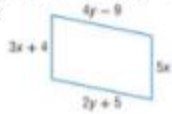
تمرين موجّه

أوجد قيمة x و y بحيث يكون كل الشكل الرباعي عبارة عن متوازي أضلاع.

3A.



3B.



انتبه!

متوازيات الأضلاع في المثال 3. إذا كانت x تساوي 4، فيجب أن تكون y تساوي 2.5 حتى يكون $FGHJ$ متوازي أضلاع. وبعبارة أخرى، إذا كانت x تساوي 4 وكانت y تساوي 1، فإن $FGHJ$ ليس متوازي أضلاع.

3A. $x = 8$, $y = 30$
3B. $x = 3$, $y = 7$

لقد عرفت شروط متوازيات الأضلاع. العائلة التالية تلخّص كيفية استخدام الشروط لإثبات أن الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع.

ملخص المفهوم

برهن على أن الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع

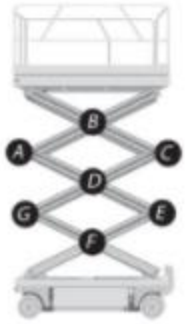
- بيان أن كل ضلعين متقابلين متوازيان. (التعريف)
- بيان أن كل ضلعين متقابلين متطابقان. (النظرية 13.7)
- بيان أن كل زاويتين متقابلتين متطابقتان. (النظرية 13.8)
- بيان أن القطرين ينصفان بعضهما. (النظرية 13.9)
- بيان أن ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان في نفس الوقت. (النظرية 13.10)

التدريس المتمايز AL OL BL

المتعلّمون بالتمرين الشخصي اطلب من الطلاب اختيار زميل. اطلب من أحد الطالبين رسم متوازي أضلاع. ثم اطلب من زميله إثبات أن رباعي الأضلاع هو متوازي أضلاع. ثم اطلب من الطلاب تبادل الأدوار وكرر النشاط مرة أخرى.

مثال إضافي

2 **علم الميكانيكا** تركب الرافعات المقصية، مثل المنصة المبينة أدناه، بشكل شائع على الأدوات المصممة لحمل الأجسام الثقيلة. في الرسم التخطيطي، $\angle A \cong \angle C$ و $\angle B \cong \angle D$. اشرح السبب في أن الزوايا المتتالية ستكون دائمًا متكاملة بغض النظر عن ارتفاع المنصة.



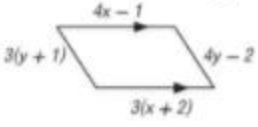
حيث إن كلا زوجي الزوايا المتقابلة للشكل الرباعي $ABCD$ متطابق، فإن $ABCD$ متوازي أضلاع بحسب النظرية 13.10. وتنص النظرية 13.55 أن الزوايا المتتالية في متوازي الأضلاع تكون متكاملة. إذًا، $m\angle A + m\angle B = 180$ و $m\angle C + m\angle D = 180$. بالتعويض، $m\angle A + m\angle D = 180$ و $m\angle C + m\angle B = 180$.

إرشاد للمعلمين الجدد

الاستنتاج اطلب من الطلاب ذكر طريقة بديلة يمكن استخدامها لإكمال البرهان بمناقشة الشروط الخمسة لإثبات متوازي الأضلاع. ذكّر الطلاب بأنه دائمًا ما يوجد عدة إستراتيجيات يمكن استخدامها بالرغم من استخدام إحداها يغني عن البقية.

مثال إضافي

3 أوجد قيمة x و y التي تجعل كل الشكل الرباعي عبارة عن متوازي أضلاع.



$x = 7$; $y = 5$

2 متوازيات الأضلاع على المستوى الإحداثي

المثالان 4 و 5 يوضحان كيفية استخدام قوانين المستوى الإحداثي لتحديد ما إن كان الشكل الرباعي عبارة عن متوازي أضلاع أم لا.

أمثلة إضافية

4 **هندسة إحداثية** مثّل الشكل الرباعي $QRST$ بيانيًا بالرؤوس $Q(-1, 3)$ و $R(3, 1)$ و $S(2, -3)$ و $T(-2, -1)$. حدد ما إن كان الشكل الرباعي عبارة عن متوازي أضلاع أم لا. برر إجابتك باستخدام قانون الميل.

ميل $\overline{QR} = -\frac{1}{2}$

ميل $\overline{ST} = -\frac{1}{2}$

ميل $\overline{QT} = 4$

ميل $\overline{RS} = 4$

$QRST$ عبارة عن متوازي أضلاع بحسب التعريف.

5 اكتب إحداثيات برهان العبارة التالية. إذا كان كلا زوجي الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي متطابقًا، فإن الشكل الرباعي عبارة عن متوازي أضلاع.

ضع الشكل الرباعي $ABCD$ على المستوى الإحداثي بحيث $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. استخدم الشكل الرباعي $A(0, 0)$ و $B(a, 0)$ و $C(b + a, c)$ و $D(b, c)$.

المعطيات: الشكل $ABCD$ الشكل الرباعي.

المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.

حسب التعريف، الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع، إذا كان ضلعاه المتقابلان متوازيين. استخدم قانون الميل.

ميل $\overline{AD} = \frac{c - 0}{b - 0} = \frac{c}{b}$

ميل $\overline{BC} = \frac{c - 0}{b - 0} = \frac{c}{b}$

ميلا $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ يساويان 0.

حيث إن $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ لهما نفس الميل و $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ لهما نفس الميل و $\overline{CD}$، $\overline{AB} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. إذًا الشكل الرباعي $ABCD$ عبارة عن متوازي أضلاع حيث إن أضلاعه المتقابلة متوازية.

نصيحة دراسية

قانون نقطة المنتصف

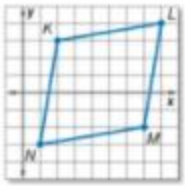
لبيان أن الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع، يمكنك أيضًا استخدام قانون نقطة المنتصف. إذا كانت نقطة المنتصف في كلا القطرين عند نفس النقطة، فهذا يعني أن القطرين ينصفان بعضهما.

2 متوازيات الأضلاع على المستوى الإحداثي

المثال 4 يوضح كيفية استخدام قوانين المستوى الإحداثي لتحديد ما إن كان الشكل الرباعي عبارة عن متوازي أضلاع أم لا.

مثال 4 متوازيات الأضلاع والهندسة الإحداثية

الهندسة الإحداثية مثّل الشكل الرباعي $KLMN$ الذي رؤوسه $K(2, 3)$ و $L(8, 4)$ و $M(7, -2)$ و $N(1, -3)$. عند ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا. برر إجابتك باستخدام قانون الميل.



إذا كانت الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي متوازية، فإنه متوازي أضلاع.

ميل $\overline{KL} = \frac{4 - 3}{8 - 2}$ أو $\frac{1}{6}$

ميل $\overline{NM} = \frac{-2 - (-3)}{7 - 1}$ أو $\frac{1}{6}$

ميل $\overline{KN} = \frac{-3 - 3}{1 - 2} = \frac{-6}{-1}$ أو 6

ميل $\overline{LM} = \frac{-2 - 4}{7 - 8} = \frac{-6}{-1}$ أو 6

بما أن الأضلاع المتقابلة لها نفس الميل، إذا $\overline{KL} \parallel \overline{NM}$ وإذا $\overline{KN} \parallel \overline{LM}$. وبهذا، فإن $KLMN$ متوازي أضلاع حسب التعريف.

تمرين مرجعه

حدد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا. برر إجابتك باستخدام قانون المسافة أو قانون نقطة المنتصف.

4A. $A(3, 3)$، $B(8, 2)$، $C(6, -1)$، $D(1, 0)$ — انظر الهامش **4A–B**

4B. $F(-2, 4)$، $G(4, 2)$، $H(4, -2)$، $J(-2, -1)$، قانون نقطة المنتصف

في الوحدة 12، علمت أنه يمكن استخدام إحداثيات المتغيرات في تمثيل رؤوس المثلث. بعد ذلك، تم استخدام قوانين المسافة والميل ونقطة المنتصف في كتابة براهين إحداثية للنظريات. يمكن تطبيق الشيء نفسه على الأشكال الرباعية.

مراجعة المفردات

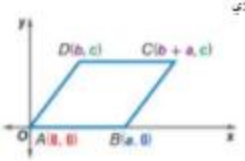
البرهان الإحداثي برهان يستخدم الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر في إثبات مفاهيم هندسية

مثال 5 متوازيات الأضلاع والبراهين الإحداثية

اكتب برهانًا إحداثيًا للعبارة التالية.

إذا كان زوج واحد من الأضلاع المتقابلة في شكل رباعي متوازيًا ومتطابقًا، فإن الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع.

الخطة 1 ضع الشكل الرباعي $ABCD$ على المستوى الإحداثي بحيث يكون $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ و $\overline{AB} \cong \overline{DC}$.



- ابدأ بوضع الرأس A عند نقطة الأصل.
- افترض أن $\overline{AB}$ طولها a من الوحدات والافتراض أن B إحداثياتها هي $(a, 0)$.
- بما أن القطع المستقيمة متوازية، فضع القطعتين الطرفيتين للقطعة $\overline{DC}$ بحيث يكون لهما نفس الإحداثي y، c.
- بحيث تكون المسافة من النقطة D إلى النقطة C هي أيضًا بعدد a من الوحدات، افترض أن الإحداثي x الذي يخص D سيكون b والذي يخص C سيكون $b + a$.

حقوق الطبع والتأليف © مجموعة ماكجرو هيل التعليمية

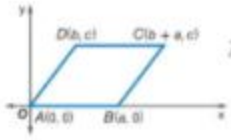
التدريس باستخدام التكنولوجيا

تمرين ويكيبيديا اجعل الطلاب يعملوا في مجموعات ثنائية ليقوموا بعمل صفحة ويكيبيديا تعرض وتشرح الطرق المختلفة المتبعة في إثبات أن رباعي الأضلاع عبارة عن متوازي أضلاع. يجب أن يتعاون الطلاب معًا في تعديل ومراجعة عملهم ليضمنوا صحته ووضوحه.

الربط بتاريخ الرياضيات

رينيه ديكارت (1650-1596) رينيه ديكارت عالم رياضيات فرنسي أول من استخدم الشبكة الإحداثية. يقال إنه أول من فكر في تحديد نقطة على مستوى إحداثي باستخدام عددين وذلك حينما رأى ذبابة عالقة بالسقف ولكن هذه الحكاية مجرد خرافة.

الخطوة 2 استخدم الشكل المجاور بك في كتابة برهان.



المعطيات: الشكل الرباعي $ABCD$. فيه $\overline{AB} \cong \overline{DC}$، $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.

البرهان الإحداثي:

حسب التعريف، الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع إذا كانت أضلاعه المتقابلة متوازية. نعلم من المعطيات أن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. إذا قمنا بإضافة خط إلى توضيح أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

استخدام قانون الميل.

ميل $\overline{AD} = \frac{c-0}{b-0} = \frac{c}{b}$ ميل $\overline{BC} = \frac{c-0}{b+a-a} = \frac{c}{b}$

بما أن $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ لهما نفس الميل، إذا $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. وعلى هذا فالشكل الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع لأن أضلاعه المتقابلة متطابقة.

تمرين موجّه

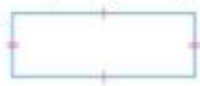
5. اكتب برهانًا إحداثيًا لهذه العبارة: إذا كان رباعي أضلاع عبارة عن متوازي أضلاع، فإن أضلاعه المتقابلة تكون متطابقة. **انظر الهامش.**

التحقق من فهمك

مثال 1 حدد إذا ما كان كل الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع أم لا. علّل إجابتك.

1.

لا؛ لم يكتمل أيّ من اختبارات □.

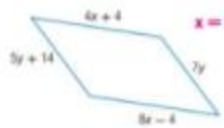
2. 
نعم؛ كل ضلعين متقابلين متطابقان.

مثال 2

3. **النجارة** يقوم راشد بصناعة طاولة ويريد أن يتأكد من أن الخياط التي تلتقي بها أرجل الطاولة مع الأرضية تكوّن متوازي أضلاع زواياه قائمة. كيف يمكن لراشد أن يستخدم ظهر الطاولة في إثبات أن الأرجل تكوّن متوازي أضلاع؟

بإمكان راشد أن يقيس ظهر الطاولة ليتأكد من أن الأضلاع المتقابلة لها طول واحد. إذا كان لها طول واحد وكانت الأرجل موجودة بزوايا ظهر الطاولة، فإن الأرجل تكوّن متوازي أضلاع.

مثال 3 **الجبر** أوجد قيمة x و y بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

4. 

$x = 2; y = 7$

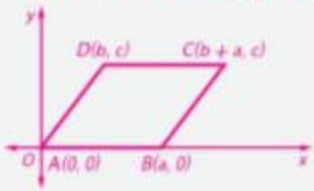
5.

$x = 30; y = 45$

حقوق الطبع © محفوظة لشركة ماكجرو هيل للتعليم

5. **المعطيات:** $ABCD$ متوازي أضلاع.

المطلوب: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BC}$



البرهان الإحداثي:

$AB = \sqrt{(a-0)^2 + (0-0)^2}$ or a

$DC = \sqrt{(b+a-b)^2 + (c-c)^2}$ or a

$AD = \sqrt{(c-0)^2 + (b-0)^2}$ or $\sqrt{c^2 + b^2}$

$BC = \sqrt{(a-(b+a))^2 + (c-0)^2}$

$= \sqrt{b^2 + c^2}$ or $\sqrt{c^2 + b^2}$

حيث إن $AB = DC$ و $AD = BC$. إذًا، $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AB} \cong \overline{DC}$.

3 التمرين

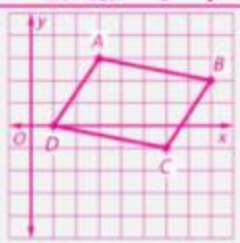
التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 8 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إجابات إضافية (تمرين موجّه)

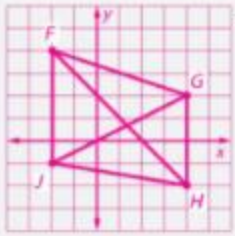
4A.



إذا كان كلا زوجي الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي متطابقة، فهو عبارة عن متوازي أضلاع

$AB = \sqrt{26}$; $DC = \sqrt{26}$; $AD = \sqrt{13}$; $BC = \sqrt{13}$ حيث إن $AB = DC$ و $AD = BC$. إذًا $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. إذًا $ABCD$ متوازي أضلاع وفقًا للنظرية 13.9.

4B.



إذا كانت أقطار الشكل الرباعي تنصف بعضها البعض، فهو عبارة عن متوازي أضلاع. تنصف أقطار الشكل الرباعي بعضها البعض، إذا التقى القطران في نقطة منتصفهما. ونقطة منتصف القطر $\overline{FH} = (1, 1)$ ونقطة منتصف القطر $\overline{JG} = (1, 0.5)$. وحيث إن نقطة منتصف الأقطار $\overline{FH}$ و $\overline{JG}$ ليس لها نفس الإحداثيات، فإن الشكل الرباعي $FGHJ$ ليس بمتوازي أضلاع.

إجابات إضافية

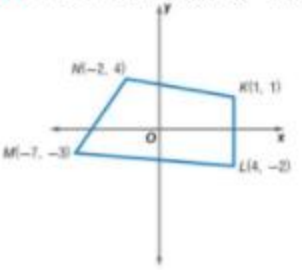
6. ليس بمتوازي أضلاع لأن نقطة منتصف $\overline{KM}$ هي $(-3, -1)$ ونقطة منتصف $\overline{NL}$ هي $(-1, -1)$. ومن ثم لا ينصّف القطران بعضهما البعض.

7. نعم، هو متوازي أضلاع لأن ميل $\overline{FG} = -\frac{1}{4}$ وميل $\overline{JH} = -\frac{1}{4}$. كذلك، ميل $\overline{HG} = 1$ وميل $\overline{JF} = 1$. إذًا، الجوانب المتقابلة للشكل الرباعي متوازية.

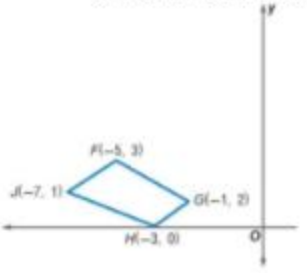
28. 4؛ محمود يمكنه قياس الجوانب المقابلة أو الزوايا المقابلة.

مثال 4 **الهندسة الإحداثية** مثّل بيانيًا كل رباعي أضلاع معطى لك برؤوسه وحدد ما إذا كان الشكل متوازي أضلاع أم لا. علّل إجابتك باستخدام الطريقة المذكورة.

6. $K(1, 1)$, $L(4, -2)$, $M(-7, -3)$, $N(-2, 4)$؛ قانون نقطة المنتصف **6, 7. انظر الهامش.**



7. $F(-5, 3)$, $G(-1, 2)$, $H(-3, 0)$, $J(-7, 1)$؛ قانون الميل

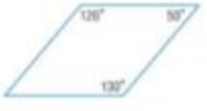


مثال 5 8. اكتب برهانًا إحداثيًا لهذه العبارة: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإن قطريه ينصفان بعضهما. **انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

التمرين وحل المسائل

مثال 1 حدد إذا ما كان كل شكل رباعي هو متوازي أضلاع أم لا. علّل إجابتك.

9.



ليس متوازي أضلاع لأن الزوايا المتقابلة غير متطابقة

10.

نعم إنه متوازي أضلاع لوجود ضلعين متقابلين متوازيين ومتطابقين

11.

نعم، كل ضلعين متقابلين متطابقين.

12.

لم تتحقق أي من اختبارات ▱

13.

لا، لم تتحقق أي من اختبارات ▱

14.

لا، لم تتحقق أي من اختبارات ▱

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	9-29, 41-43, 45-51	9-29 فردي, 46-49	10-28 زوجي, 41-43, 45,50-51
OL أساسي	9-31 فردي, 35, 37, 39, 41-43, 45-51	9,29, 46-49	31, 35-37, 39, 41-43, 45, 50-51
BL متقدم	30-51		

مثال 2

الهندسة الإحداثية مثّل بيانيًا الشكل الرباعي المعطى لك رؤوسه وحدد ما إذا كان الشكل متوازي أضلاع أم لا. علّل إجابتك باستخدام الطريقة المذكورة. **15–18. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

15. $Q(-1, 2)$، $R(4, 3)$، $S(2, -1)$، $T(-2, -1)$، قانون الميل

16. $J(1, 4)$، $K(4, 0)$، $L(-4, -6)$، $M(-7, -2)$، قانون الميل

17. $A(-5, 8)$، $B(-3, 7)$، $C(-2, 1)$، $D(-4, 0)$، قانون المسافة

18. $V(10, 4)$، $W(15, 3)$، $X(13, 0)$، $Y(8, 1)$، قانون الميل **وقانون المسافة**

مثال 3

19. اكتب برهانًا إحداثيًا للعبارة، في الشكل الرباعي، إذا تطابق كل ضلعين متقابلين فإنه يكون متوازي أضلاع. **19–21. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

20. اكتب برهانًا إحداثيًا للعبارة، إذا كان متوازي الأضلاع يحتوي على زاوية واحدة قائمة، فإنه يحتوي على أربع زوايا قائمة.

21. **برهان** اكتب برهانًا جزءًا على النظرية 13.8

22. **السياحة** أثناء رحلتها إلى نيويورك، تريد عليمة زيارة أربع وجهات يقصدها السياح. مبنى الإمباير ستيت وتمثال الحرية وسنترال بارك وميدان تايمز سكوير. فإذا كانت إحداثيات GPS لمبنى الإمباير ستيت هي °40.74 شمالاً و°73.99 غربًا وكانت إحداثيات GPS لتمثال الحرية هي °30.69 شمالاً و °74.05 غربًا وكانت إحداثيات GPS لسنترال بارك هي °40.78 شمالاً و°73.97 غربًا وكانت إحداثيات GPS لميدان تايمز سكوير هي °40.75 شمالاً و°73.99 غربًا. فحدد ما إذا كانت هذه الوجهات الأربعة تكوّن متوازي أضلاع أم لا. **لا، فهي لا تكوّن متوازي أضلاع.**

البرهان اكتب برهانًا من عمودين. **23–25. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

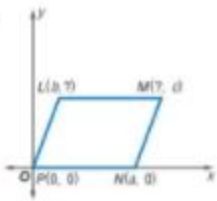
23. النظرية 13.9

24. النظرية 13.10

25. اشرح كيف يمكنك استخدام النظرية 13.9 في إنشاء متوازي أضلاع ثم قم بإنشاء متوازي أضلاع بالطريقة نفسها.

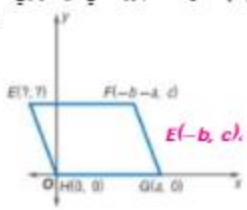
اذكر اسم الإحداثيات المجهولة في كل متوازي أضلاع.

26.



$L(b, c)$، $M(a + b, c)$

27.



$E(-b, c)$، $G(a, 0)$

28. **القيادة** يقوم محمود بطلاء خطوط لقطعة أرض مخصصة لموقف سيارات جديد. ما أقل عدد من القياسات يحتاج محمود إلى أخذها باستخدام البنطلة وشريط القياس ليضمن أن تكوّن الخطوط متوازي أضلاع؟ **انظر الهامش**

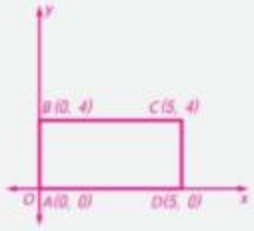
حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة هولت للنشر والتأليف

819

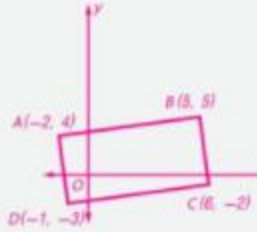
التمثيلات المتعددة
يستخدم الطلاب في التمرين 30 الرسومات الهندسية والجداول والوصف الكلامي لاستكشاف خصائص المستطيلات.

إجابات إضافية

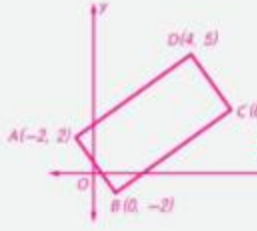
30a. الإجابة النموذجية:



مستطيل 1



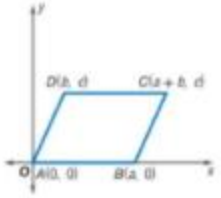
مستطيل 2



مستطيل 3

30c. الإجابة النموذجية: المستطيل هو متوازي أضلاع بأربع زوايا قائمة.

29. البرهان اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن القطرين في متوازي أضلاع يكوّنان مجموعتين من المثلثات المتطابقة.
انظر ملحق إجابات الوحدة 13.



30. التمثيلات المتعددة ستستكشف في هذه المسألة خواص المستطيلات. **انظر الهامش.**

a. هندسيًا ارسم النقاط التالية على ثلاثة مستويات إحداثية منفصلة. النقاط الأربع على كل تمثيل بياني تكوّن مستطيلاً.

المستطيل 1: A(0, 0), B(0, 4), C(5, 4), D(5, 0)

المستطيل 2: A(−2, 4), B(5, 5), C(6, −2), D(−1, 3)

المستطيل 3: A(−2, 2), B(0, −2), C(6, 1), D(4, 5)

b. جدوليًا انسخ الجدول أدناه. استخدم ميل كل من $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ و AD لإكمال الجدول.

المستطيل	$m\angle A$	$m\angle B$	$m\angle C$	$m\angle D$	هل $ABCD$ متوازي أضلاع؟
المستطيل 1					
المستطيل 2					
المستطيل 3					

c. لفظيًا علّق بشأن تعريف المستطيل.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

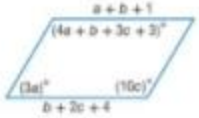
31. تحليل الخطأ تقول آمنة إن الشكل الرباعي ABCD هو متوازي أضلاع ولكن عائشة تقول إنه ليس متوازي أضلاع. فمن منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.
عائشة على صواب لأنه لم تتحقق أي من اختبارات □.

32. الكتابة في الرياضيات اشرح الطرق المختلفة لاستخدام الأضلاع المتوازية في إثبات أن الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع. **إذا كانت الأضلاع المتقابلة متوازية فإن الشكل الرباعي يكون متوازي أضلاع. إذا كان ضلعين متقابلين موازيين وفي الوقت نفسه متطابقين فإن رباعي الأضلاع يكون متوازي أضلاع.**

33. تبرير إذا تطابقت الأضلاع المتقابلة الأربعة في متوازي أضلاع، فهل يتطابق متوازيا الأضلاع أحيانًا أم دائمًا أمام لا يتطابقا على الإطلاق؟ **33, 34. انظر الهامش.**

34. مسألة غير محددة الإجابة قم بوضع وتسمية متوازي أضلاع على المستوى الإحداثي بحيث لا توجد أي من رؤوسه عند نقطة الأصل.

35. تحدٍّ أوجد قيم a و b و c إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع.



$a = 20, b = 7, c = 12$

36. الكتابة في الرياضيات قارن بين النظريتين 13.5 و 13.9.
انظر ملحق إجابات الوحدة 13.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز

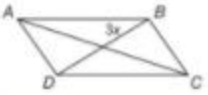
التوسع اطلب من الطلاب تعيين $P(-4, -3)$ و $L(-1, 2)$ و $S(5, 1)$ على المستوى الإحداثي. واطلب منهم تعيين وتحديد موقع النقطة الرابعة T والتي ستنشئ متوازي الأضلاع. وينبغي أن يبرهنوا أن الشكل عبارة عن متوازي أضلاع باستخدام النظريات في هذا الدرس. وتكون إحداثيات النقطة الرابعة هي $(2, -4)$. وتنشئ هذه النقطة متوازي أضلاع ويبرهن ذلك إما بقانون المسافة أو قانون الميل.
الإجابة النموذجية: ميل $\overline{PL} = \frac{5}{3}$ و $\overline{LS} = -\frac{1}{6}$ و $\overline{ST} = \frac{5}{3}$ و $\overline{TP} = -\frac{1}{6}$. وحيث إن الجوانب المتقابلة لها الميل نفسه، فإن $\overline{PL} \parallel \overline{ST}$ و $\overline{LS} \parallel \overline{TP}$. ومن ثم، فإن $PLST$ عبارة عن متوازي أضلاع بحسب التعريف.

تدريب على الاختبار المعياري

37. إذا كان الضلعان $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ في الشكل الرباعي $ABCD$ متوازيين، فأي معلومات إضافية ستكفي لإثبات أن الشكل الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع؟ **B**

A $\overline{AB} \cong \overline{AC}$
C $\overline{AC} \cong \overline{BD}$
B $\overline{AB} \cong \overline{DC}$
D $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

38. **الإجابة القصيرة** الشكل الرباعي $ABCD$ الموضح أدناه. AC تساوي 40 كما أن BD تساوي $\frac{3}{5}AC$ تنصف $\overline{AC}$. ما قيمة x التي بها يكون $ABCD$ متوازي أضلاع؟ **4**



39. **الجير** كان متوسط السرعة التي قاد بها محمد السيارة في رحلة مدتها 5 ساعات هو 58 كيلو مترا في الساعة. خلال الساعات الثلاث الأولى قاد بسرعة 50 كيلومترا في الساعة. فكم يبلغ متوسط سرعته بالكيلومتر في الساعة خلال آخر ساعتين من الرحلة؟ **F**

F 70
H 60
G 66
J 54

40. **SAT/ACT** متوازي أضلاع رؤوسه عند النقاط (0, 0)، (3, 5)، (0, 5). ما إحداثيات الرأس الرابع؟ **E**

A (0, 3)
D (0, −3)
B (5, 3)
E (3, 0)
C (5, 0)

مراجعة شاملة

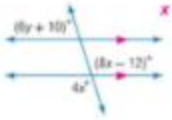
الهندسة الإحداثية أوجد إحداثيات نقطة تقاطع قطري $\square ABCD$ الذي رؤوسه. (الدرس 1-3)

41. $A(-3, 5), B(6, 5), C(5, -4), D(-4, -4)$ **(1, 0.5)**
42. $A(2, 5), B(10, 7), C(7, -2), D(-1, -4)$ **(4.5, 1.5)**

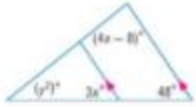
حدد ميل المستقيم الذي يمر بالنقاط التالية.

43. $J(4, 3), K(5, -2)$ **−5**
44. $X(0, 2), Y(-3, -4)$ **2**
45. $A(2, 5), B(5, 1)$ $-\frac{4}{3} \approx -1.3$

أوجد x و y في كل شكل.

46. 

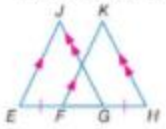
$x = 3, y \approx 26.33$

47. 

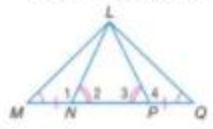
$x = 16, y = 8.7$

البرهان اكتب برهاناً من عمودين. 49 ,48. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.

48. المعطيات: $\overline{EJ} \parallel \overline{FK}, \overline{JG} \parallel \overline{KH}, \overline{EF} \cong \overline{GH}$
المطلوب: $\triangle EJG \cong \triangle FKH$



49. المعطيات: $\overline{MN} \cong \overline{PQ}, \angle M \cong \angle Q, \angle 2 \cong \angle 3$
المطلوب: $\triangle MLP \cong \triangle QLN$



مراجعة المهارات

استخدم الميل لتحديد ما إذا كان XY و YZ متعامدين أم غير متعامدين.

50. $X(-2, 2), Y(0, 1), Z(4, 1)$ **غير متعامدين**
51. $X(4, 1), Y(5, 3), Z(6, 2)$ **غير متعامدين**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4 التقويم

حصاد الأمس اطلب من الطلاب كتابة فقرة توضح كيف ساعدهم الدرس حول متوازيات الأضلاع في الدرس الخاص باختبارات متوازيات الأضلاع.

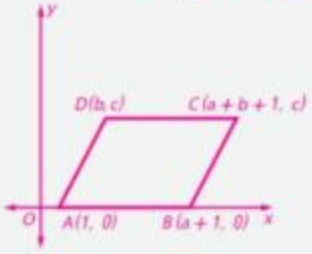
التقويم التكويني

تحقق من فهم الطلاب للدرس 2-13.

إجابات إضافية

33. في بعض الأحيان

34. الإجابة النموذجية:



التدريس المتمايز

التوسع اطلب من الطلاب رسم متوازي أضلاع على المستوى الإحداثي بالإحداثيات (0, 0) و(4, 2) و(8, 4) و(6, 0). ثم اطلب منهم أن يصلوا النقطة (4, 2) بالنقطة (0, 5) والنقطة (3, 4) بالنقطة (6, 0) والنقطة (0, 0) بالنقطة (6, 4) والنقطة (0, 2) بالنقطة (8, 4). ما الشكل الذي يكونه تقاطع القطع المستقيمة الأربع؟ متوازي أضلاع

30b. الإجابة النموذجية:

المستطيل	$m\angle A$	$m\angle B$	$m\angle C$	$m\angle D$	هل $ABCD$ متوازي أضلاع؟
مستطيل 1	90	90	90	90	نعم
مستطيل 2	90	90	90	90	نعم
مستطيل 3	90	90	90	90	نعم

التقويم التكويني

استخدم اختبار نصف الوحدة لتقويم مدى تقدم الطلاب في النصف الأول من الوحدة.

اطلب من الطلاب مراجعة الدرس الموضح للمسائل التي أجابوا عنها بشكل غير صحيح.

المعلومات منظّم الدراسة

المطويات ®دينا زايك

قبل أن ينتهي الطلاب من اختبار منتصف الوحدة، شجعهم على مراجعة المعلومات التي سجّلوها للدرسين 1-13 و 2-13 في مطوياتهم.

إجابات إضافية

4. الإجابة النموذجية: تأكد من أن الأضلاع المتقابلة متطابقة أو أن الزوايا المتقابلة متطابقة.

13 اختبار نصف الوحدة

الدرسان 1-13 و 2-13

استخدم $\square WXYZ$ لإيجاد كل قياس.

1. $m\angle WZY$ 75
2. WZ 24
3. $m\angle XYZ$ 105

4. **التصميم** صف طريقتين لرصفان أن قطع الباتشورك الموجودة يحكي السوار ستتلاءم مع بعضها بشكل مثالي. انظر الهامش.

الجبر أوجد قيمة كل متغير في كل متوازي أضلاع.

5. W, X, Y, Z, 8, 6, $s-7$, $2t-6$

$s = 13, t = 7$

6. J, K, M, L, $3t-6$, 56°, $(3d-21)°$, $2f+8$

$d = 42, f = 14$

7. **البرهان** اكتب برهانا من عمودين.

المعطيات: $\square GFBA$ و $\square HACD$

المطلوب: $\angle D \cong \angle F$

انظر ملحق إجابات الوحدة 13.

أوجد x و y بحيث يكون كل شكل رباعي متوازي أضلاع.

8. $x+5$, $3y+5$, $y+10$, $2x+2$

$x = 3, y = 5$

9. $3x-2$, $6y-8$, $4y+6$, $2x+6$

$x = 8, y = 7$

10. **الموسيقى** إذا تكون أرجل العازف الجانبية ومرفقان متوازيان بحيث تكون المنتصف دائما متوازية لأرضي؟

انظر ملحق إجابات الوحدة 13.

11. **اختيار من متعدد** أي شكل الرباعية التالية ليست متوازي أضلاع؟ D

A

C

B

D

الهندسة الإحداثية حدد ما إذا كان الشكل متوازي أضلاع أم لا. علّل إجابتك باستخدام الطريقة المحددة.

12, 13. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.

12. قانون المسافة $A(-6, -5)$، $B(-1, -4)$، $C(0, -1)$، $D(-5, -2)$

13. قانون الميل $Q(-5, 2)$، $R(-3, -6)$، $S(2, 2)$، $T(-1, 6)$

14. **الهندسة الإحداثية** أوجد إحداثيات تقاطع قطري $\square ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه $A(1, 3)$، $B(6, 2)$، $C(4, -2)$، و $D(-1, -1)$. (2.5, 0.5)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

13-3 المستطيلات

السابق
- لقد استخدمت خصائص متوازيات الأضلاع وحددت إذا ما كانت رباعيات الأضلاع متوازيات أضلاع.

الحالي
1 التعرف على خواص المستطيلات وتطبيقها.
2 تحديد ما إذا كانت متوازيات الأضلاع مستطيلات.

لماذا؟
- خميس مصوّل عن تصميم ديكور مسرحية مدرسية. وهو يحتاج إلى استخدام الطلاء لابتكار منظر مدخل على جدار سلب خفيف الوزن. وسيكون المدخل على شكل مستطيل بعرض 90 سنتيمترًا وبطول 200 سنتيمتر. فكيف لخميس أن يتأكد من أنه يقوم بطلاء مستطيل؟

المفردات الجديدة
مستطيل rectangle

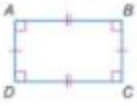
إثبات نظريات حول متوازيات الأضلاع.
استخدام الإحداثيات لإثبات النظريات الهندسية البسيطة جبريًا.
بناء فرضيات حيلية والتحقيق على طريقة استنتاج الأمريين.
استخدام الأدوات البلاغية بطريقة إستراتيجية.

1 خواص المستطيلات

إن **المستطيل** عبارة عن متوازي أضلاع به أربع زوايا قائمة. حسب التعريف، يكون للمستطيل الخواص التالية.

- كل الزوايا الأربع زوايا قائمة.
- الأضلاع المتقابلة متوازية ومتطابقة.
- الزوايا المتقابلة متطابقة.
- الزوايا المتتالية متكاملة.
- القطران ينصفان بعضهما.

وبالإضافة إلى ذلك، قطرا المستطيل متطابقان.



المستطيل *ABCD*

النظرية 13.11 أقطار المستطيل

إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلاً، فإن قطريه متطابقان.

الاختصار إذا كان $\square$ مستطيلاً، فإن قطريه متطابقان $\cong$.

مثال إذا كان $\square JKLM$ مستطيلاً، فإن $\overline{JL} \cong \overline{MK}$.

مثال 1 من الحياة اليومية استخدام خصائص المستطيلات

تمرين منتزه مستطيل الشكل به ممران للمشي كما هو موضح. إذا كان $PS = 180$ مترًا وكان $PR = 200$ مترًا، فأوجد QT.

$\overline{QS} \cong \overline{PR}$	إذا كان $\square$ مستطيلاً، فإن قطريه متطابقان $\cong$.
$QS = PR$	تعريف التطابق
$QS = 200$	بالتعويض

بما أن $PQRS$ مستطيل فهو متوازي أضلاع وقطرا متوازي الأضلاع ينصفان بعضهما وإذا $ST = QT$.

$QT + ST = QS$	جمع القطع المستقيمة
$QT + QT = QS$	عوض
$2QT = QS$	بسّط.
$QT = \frac{1}{2}QS$	اقسم كل طرف على 2.
$QT = \frac{1}{2}(200)$ أو 100	بالتعويض

تمرين موجّه انظر الشكل الموضّح في المثال 1.

1A. إذا كان $TS = 120$ مترًا، فأوجد PR. **240**

1B. إذا كان $m\angle PRS = 64$. فأوجد $m\angle SQR$. **26**

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 3-13 استخدام خواص متوازي الأضلاع وتحديد إن كانت الأشكال الرباعية عبارة عن متوازيات أضلاع.

الدرس 3-13 التعرف على خواص المستطيل وتطبيقها. تحديد إذا كانت متوازيات الأضلاع مستطيلات أم لا.

بعد 3-13 استخدام الاستدلال الاستقرائي لإثبات العبارات.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤالين التاليين:

- كيف كنت ستتعامل مع المسألة إذا كنت مكان مدير؟ ما الذي يتعين على مدير القيام به لتأكد أن الباب مستطيل؟ الإجابة النموذجية: قِس ارتفاع 200 سنتيمتر من الأرض، ثم 90 سنتيمترًا على الجهة المقابلة بزاوية قائمة ثم العودة ثانية إلى الأرض. تأكد أن الزوايا قائمة. وتأكد من أن يكون ضلعا جانبي الباب بنفس الطول. وأن يكون ضلعا أعلى الباب وقاعدته بنفس الطول.
- افترض أن الأرض مستوية. كيف يمكن لخميس التحقق إذا كان الباب مستطيلاً دون قياس الأضلاع أو الزوايا؟ قياس الأقطار. فإذا كانت متطابقة، يكون الشكل مستطيلاً.

1 خواص المستطيلات

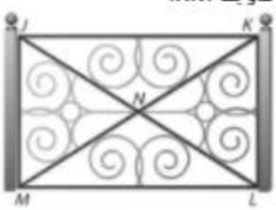
المثالان 1 و 2 يوضحان كيفية إثبات أن الأشكال الرباعية مستطيلات جبريًا باستخدام خواص المستطيلات ونظريائها.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

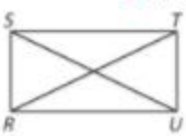
أمثلة إضافية

1 الإنشاء بوابة حديقة مستطيلة الشكل مدعمة بدعائم على شكل أقطار لمنعها من الارتخاء. إذا كان $JK = 3.6$ أمتار، و $LN = 2$ متر، فأوجد KM.



$KM = 4$ أمتار

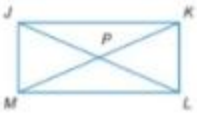
2 الشكل الرباعي $RSTU$ عبارة عن مستطيل. إذا كان $m\angle RTU = 8x + 4$ و $m\angle SUR = 3x - 2$. فأوجد x. 8



يمكنك استخدام خواص المستطيلات وكذلك الجبر لإيجاد القيم المجهولة.

مثال 2 استخدام خواص المستطيلات والجبر

الجبر الشكل الرباعي $JKLM$ عبارة عن مستطيل. إذا كان $m\angle KJL = 2x + 4$ و $m\angle JLK = 7x + 5$. فأوجد قيمة x.



بما أن $JKLM$ مستطيل، إذًا به أربع زوايا قائمة وبهذا $m\angle MLK = 90$. وبما أن المستطيل هو متوازي أضلاع، فإن الأضلاع المتقابلة متوازية. الزوايا الداخلية المتبادلة للمستقيمات المتوازية تكون متطابقة وبهذا $\angle JLM \cong \angle KJL$، وكذلك $m\angle JLM = m\angle KJL$.

جمع الزوايا	$m\angle JLM + m\angle JLK = 90$
بالتعويض	$m\angle KJL + m\angle JLK = 90$
بالتعويض	$2x + 4 + 7x + 5 = 90$
اجمع الحدود المتشابهة.	$9x + 9 = 90$
اطرح 9 من كل طرف.	$9x = 81$
اقسم الطرفين على 9.	$x = 9$

تصيحة دراسية

الزوايا القائمة تذكّر من النظرية 13.4 أنه إذا كان متوازي الأضلاع به زاوية قائمة واحدة، فإن به أربع زوايا قائمة.

تمرين موجّه

2. ارجع إلى الشكل في المثال 2. إذا كان $JP = 3y - 5$ وكان $MK = 5y + 1$. فأوجد y. 11

2 إثبات أن متوازيات الأضلاع مستطيلات معكوس النظرية 13.11 هو أيضًا صحيح.

النظرية 13.12 أقطار المستطيل

إذا كان القطران في متوازي الأضلاع متعامدين، فيكون إذا متوازي الأضلاع هذا عبارة عن معين.

الاختصار إذا كان قطرا $\square$ متطابقان $\cong$، فإن $\square$ مستطيل.

مثال إذا كان $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$ و $\overline{WY} \perp \overline{XZ}$ في $\square WXYZ$، فإن $\square WXYZ$ عبارة عن مستطيل.

مثال 3 من الحياة اليومية تقديم علاقات المستطيل

لعبة كرة التنادي مركز ترفيهي اجتماعي أنشأ ملعبًا في الهواء الطلق للعب كرة التنادي. وللتأكد من أنه يستوفي متطلبات الملعب المثالي، قام بقياس أضلاع الملعب وقطريه. إذا كان $AB = 18$ مترًا و $BC = 9$ أمتار و $CD = 18$ مترًا و $AD = 9$ أمتار و $AC = 20$ مترًا و $BD = 20$ مترًا، فاشرح كيف يتأكد المركز من أن الملعب على شكل مستطيل.

بما أن $AB = CD$، $BC = AD$، $AC = BD$، فإن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$، $\overline{BC} \cong \overline{AD}$، $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ لأن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$، $\overline{BC} \cong \overline{AD}$. إذا $ABCD$ عبارة عن متوازي أضلاع. بما أن $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ قطران متطابقان في $\square ABCD$، إذا $\square ABCD$ عبارة عن مستطيل.

الربط بالحياة اليومية

لعبة الكرة المذكورة تلعب على ملعب مستطيل الشكل أبعاده المثالية بطول 18 مترًا وعرض 9 أمتار. تقسّم الملعب إلى قسمين متساويين بخط المنتصف وخطوط الهجوم التي تبعد 3 أمتار (9.8 أقدام) عن خط المنتصف ومتوازية معه.

المصدر: الرابطة الوطنية لهواة الكرة المذكورة

حقوق الطبع والتأليف © تعود لشركة مكجروهيل للتعليم

التدريس المتمايز AL OL BL

المتعلمون بالطريقة الحسية الحركية اطلب من الطلاب استخدام قطعتي حبل متساويتي الطول وشريط لاصق وسطح أملس لتحديد الشكل الرباعي. الصق قطعتي الحبل في السطح الأملس بإحكام بحيث تتقاطعان. استخدم الشريط اللاصق لرسم شكل رباعي بأن تصل بين نهايات قطع الحبل. كرر العملية مرات عديدة على أن يتقاطع في نقاط عديدة. ينبغي أن يرى الطلاب أن الشكل الرباعي لا يكون مستطيلاً إلا إذا تقاطع الحبلان عند نقطة منتصفهما.

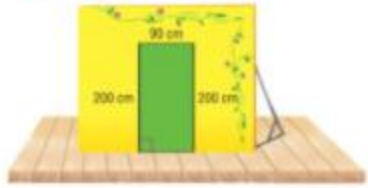
824 | الدرس 3-13 | المستطيلات

الربط بالحياة اليومية

مسرح شباب الصيفحاء في ديترويت، ميشيغان - هو برنامج احترافي للتدريب على الفنون المسرحية للشباب في الأعمار من 12 وحتى 18 عامًا. يشترك الطلاب في كل جوانب الأداء، بما فيها تصميم الديكور والإضاءة، وبناء الديكور وإدارة خشبة المسرح والصوت والملابس.

تمرين موجّه

3. **تصميم ديكور** راجع بداية الدرس. يقيس خميس أضلاع الشكل الخماسي، ويؤكد أن لها نفس القياسات المرئية كما هو موضح. وباستخدام زاوية النجار، فهو يؤكد أيضًا أن قياس الركن السفلي الأيسر هو زاوية قائمة. هل يمكنه استنتاج أن الشكل مستطيل؟ اشرح. **انظر الهامش.**

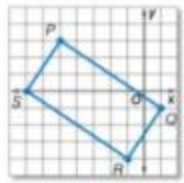


يمكنك أيضًا استخدام خصائص المستطيلات لإثبات أن متوازي الأضلاع الموجود على مستوى إحداثي هو مستطيل باستخدام إحداثيات الرؤوس.

مثال 4 المستطيلات والهندسة الإحداثية

الهندسة الإحداثية رباعي أضلاع $PQRS$ رؤوسه $P(-5, 3)$ و $Q(1, -1)$ و $R(-1, -4)$ و $S(-7, 0)$. حدد ما إذا كان $PQRS$ مستطيلاً أم لا باستخدام قانون المسافة.

الخطوة 1 استخدم قانون المسافة لتحديد ما إذا كان $PQRS$ متوازي أضلاع أم لا عن طريق تحديد مدى تطابق الأضلاع المتقابلة.



$$PQ = \sqrt{(-5-1)^2 + [3-(-1)]^2} = \sqrt{52}$$

$$RS = \sqrt{[-1-(-7)]^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{52}$$

$$PS = \sqrt{[-5-(-7)]^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$$

$$QR = \sqrt{[1-(-1)]^2 + [-1-(-4)]^2} = \sqrt{13}$$

لأن الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي لها نفس القياس، إذًا فهي متطابقة ومن ثم فالشكل الرباعي $PQRS$ هو متوازي أضلاع.

الخطوة 2 حدد إذا ما كان قطرا $PQRS$ متطابقين.

$$PR = \sqrt{[-5-(-1)]^2 + [3-(-4)]^2} = \sqrt{65}$$

$$QS = \sqrt{[1-(-7)]^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{65}$$

بما أن القطرين لهما نفس القياس، إذا فهما متطابقان وعلى هذا فإن $PQRS$ مستطيل.

تصيحة دراسية

المستطيلات ومتوازيات الأضلاع كل مستطيل متوازي أضلاع، وليس بالضرورة كل متوازي أضلاع هو مستطيل.

تمرين موجّه

4. الشكل الرباعي $JKLM$ رؤوسه $J(-10, 2)$ و $K(-8, -6)$ و $L(5, -3)$ و $M(2, 5)$. حدد ما إذا كان $JKLM$ مستطيلاً أم لا باستخدام قانون الميل.

4. **لا؛ $\overline{JK}$ و $\overline{ML}$ ليسا متوازيين.**

حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة [illegible]

2 أثبت أن متوازيات الأضلاع عبارة عن مستطيلات

المثالان 3 و 4 يوضّحان طريقة إثبات أن متوازيات الأضلاع مستطيلات باستخدام النظرية 13.14.

أمثلة إضافية

3 فنون يقوم بعض الفنانين بشد لوحاتهم على أطر خشبية. وهذا ما يسمح لهم بتخصيص وتعديل حجم اللوحة. لضمان أن الإطار عبارة عن مستطيل قبل شد اللوحة عليه، يكون على الفنان أن يقيس جوانب وأقطار الإطار. فإذا كان $AB = 30$ سنتيمترًا، و $BC = 87.5$ سنتيمترًا، و $CD = 30$ سنتيمترًا، و $DA = 87.5$ سنتيمترًا، و $BD = 92.5$ سنتيمترًا، و $AC = 92.5$ سنتيمترًا. وضّح كيف يمكن للفنان أن يتأكد من أن الإطار مستطيل الشكل.

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AB} \cong \overline{DC}$؛ بناءً عليه، فإن $ABCD$ عبارة عن متوازي أضلاع. $\overline{AC} \cong \overline{BD}$؛ ومن ثم، $\square ABCD$ عبارة عن مستطيل.

4 الشكل الرباعي $JKLM$ بالرؤوس $J(-2, 3)$ و $K(1, 4)$ و $L(3, -2)$ و $M(0, -3)$. حدد ما إذا كان $JKLM$ مستطيلًا باستخدام قانون المسافة.

حيث إن $JK = ML = \sqrt{10}$ و $JM = KL = \sqrt{40}$، إذًا $JKLM$ متوازي أضلاع. حيث إن $KM = JL = \sqrt{50}$، إذًا $JKLM$ مستطيل.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

مدونة الصف على مدونة الفصل، اجعل الطلاب يكتبوا مدخلات في المدونة توضح طريقتين لإثبات أن متوازي الأضلاع عبارة عن مستطيل.

إجابة إضافية (تمرين موجّه)

3. نعم؛ حيث إن الأضلاع المتقابلة متطابقة، فإن البوابة عبارة عن متوازي أضلاع. وإذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فستكون جميع زواياه قائمة. وحيث إن الزاوية اليسرى من الأسفل للبوابة قائمة، فجميع زوايا البوابة قائمة وبحسب التعريف فالبوابة مستطيلة.

التحقق من فهمك

مثال 1 **الأعلام** على اليسار علم جامايكا. إذا كانت AE تساوي 1.75 مترًا، وكانت AD تساوي 0.9 متر وكان $m\angle EDC = 33$، فأوجد جميع القياسات.

1. BC 0.9 متر
2. BD 3.5 أمتار
3. $m\angle ADE$ 57
4. $m\angle ABE$ 33

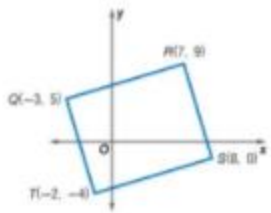
مثال 2 **الجبر** الشكل الرباعي $LMNP$ هو عبارة عن مستطيل.

5. إذا كان $m\angle MLN = 5x + y$ وكان $m\angle NLP = x + 10y - 1$، فأوجد $m\angle MLN$. 35
6. إذا كان $MN = 5x + 2$ وكان $LP = 4x - 3$، فأوجد MN. 17

مثال 3 7. **البرهان** إذا كان $DEFG$ مستطيلاً وكانت $GF \parallel HJ$. فأثبت أن $DEJH$ مستطيل. انظر الهامش.

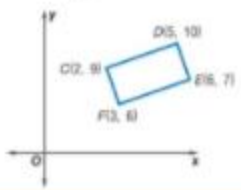
مثال 4 **الهندسة الإحداثية** مثّل بيانيًا الشكل الرباعي المعطى لك رؤوسه وحدد ما إذا كان الشكل مستطيلاً أم لا. علّل إجابتك باستخدام القانون المذكور.

8. $R(7, 9)$، $S(8, 0)$، $T(-2, -4)$، $Q(-3, 5)$. قانون الميل



لا هذا ليس مستطيل. ميل $RQ = \frac{2}{5}$ وميل $QT = -9$، إذًا $\angle RQT$ ليست زاوية قائمة.

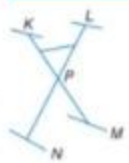
9. $C(2, 9)$، $D(5, 10)$، $E(6, 7)$، $F(3, 6)$. قانون المسافة



نعم، $DF = \sqrt{(5-3)^2 + (10-6)^2} = \sqrt{20}$ و $CE = \sqrt{(6-2)^2 + (7-9)^2} = \sqrt{20}$ القطران متطابقان، فإن $CDEF$ مستطيل.

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **الموسيقى** حامل عرض عليه لوحة مفاتيح. $KLMN$ تكوّن مستطيلاً. إذا كانت $NM = 75$ سنتيمترًا وكانت $NP = 32.5$ سنتيمترًا وكان $m\angle LPK = 25$، فأوجد جميع القياسات.



10. KL 75 سنتيمترًا
11. KP 32.5 سنتيمترًا
12. LN 65 سنتيمترًا
13. $m\angle LPM$ 155

حقوق الطبع © محفوظة لشركة ماكجرو هيل للتعليم

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 9-1 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم المخطط الموجود في الجزء السفلي من هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إجابات إضافية

7. **البرهان:** تعلم من المعطيات أن $DEFG$ عبارة عن مستطيل. إذًا، وحسب تعريف المستطيل، فإن $GF \parallel DE$ و $EF \parallel DG$. حيث إن DH عبارة عن جزء من DG و EJ عبارة عن جزء من EF، $EJ \parallel DH$. تعلم أيضًا من المعطيات أن $GF \parallel HJ$. إذًا وحسب خاصية التعدي، فإن $HJ \parallel DE$. وعلى هذا يكون $DEJH$ متوازي أضلاع. بما أن $DEFG$ مستطيل، إذًا $m\angle E = 90$. إذا وجد بمتوازي الأضلاع زاوية واحدة قائمة، فيتعين حتمًا أن يكون له أربع زوايا قائمة. ومن ثم، يكون $DEJH$ عبارة عن مستطيل.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	10-25, 46-55	11-25 ,فردي 50-53	10-24 ,زوجي 46-49, 54-55
OL أساسي	11-31 ,فردي 32, 46-55 ,فردي 33-43	10-25, 50-53	26-44, 46-49, 54-55
BL متقدم	26-55		

مثال 2 **الجبر** الشكل الرباعي $ABCD$ مستطيل.

14. إذا كان $m\angle BAC = 7x - 7$ ، $m\angle CAD = 8x - 8$ فأوجد $m\angle BAC$. **42**

15. إذا كان $m\angle ADB = 8x$ ، $m\angle BDC = 3x - 9$ فأوجد $m\angle DBC$. **72**

16. إذا كان $AD = 3x + 6$ ، $BC = 9x - 7$ فأوجد AD. **12**

17. إذا كان $DE = 4x + 3$ ، $BC = 5x - 1$ فأوجد AE. **19**

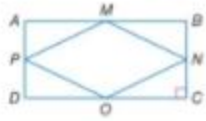
18. إذا كان $m\angle BDC = 6x - 1$ ، $m\angle CBD = 11x - 11$ فأوجد $m\angle ADB$. **35**

19. إذا كان $BE = 2x - 3$ ، $AC = 3x + 1$ فأوجد AC. **22**

مثال 3 **البرهان** اكتب برهاناً من عمودين. **21–20. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

20. **المعطيات:** $VWXY$ متوازي أضلاع. $\triangle XZY$ مثلث متساوي الساقين و $\triangle VZY \cong \triangle WZX$.

المطلوب: $VWXY$ مستطيل.

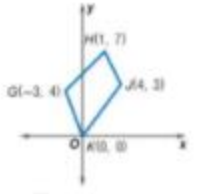


21. **المعطيات:** $ABCD$ مستطيل M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{BC}$ ، O منتصف $\overline{DC}$ ، P منتصف $\overline{AD}$.

المطلوب: $MNOP$ متوازي أضلاع.

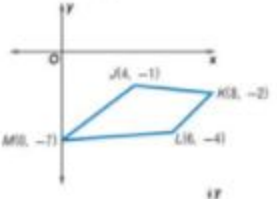
مثال 4 **الهندسة الإحداثية** مثّل بيانيًا الشكل الرباعي المعطى لك رؤوسه وحدد ما إذا كان الشكل مستطيلاً أم لا. علّل إجابتك باستخدام القانون المذكور.

22. $G(-3, 4)$، $H(1, 7)$، $J(4, 3)$، $K(0, 0)$ قانون الميل



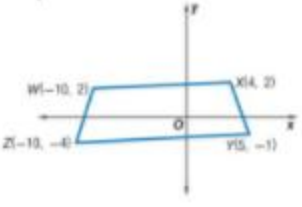
نعم $GHJK$ مستطيل. ميل $HJ = -\frac{4}{3}$ وميل $JK = \frac{3}{4}$ وميل GK يساوي $-\frac{4}{3}$ وميل GH يساوي $\frac{3}{4}$. بما أن الأضلاع المتقابلة متوازية، فإن $GHJK$ متوازي أضلاع وبما أن الأضلاع المتجاورة متعامدة، فإن $GHJK$ مستطيل.

23. $J(4, -1)$، $K(8, -2)$، $L(6, -4)$، $M(0, -7)$ قانون الميل



لا $JKLM$ ليس مستطيلاً. ميل $JK = -\frac{1}{4}$ وميل $KL = 1$ وميل $ML = \frac{1}{2}$ وميل $MJ = -\frac{3}{2}$. بما أن الأضلاع المتقابلة ليست متوازية، فإن $JKLM$ ليس متوازي أضلاع وبالتالي لا يكون مستطيلاً.

24. $W(-10, 2)$، $X(4, 2)$، $Y(5, -1)$، $Z(-10, -4)$ قانون المسافة

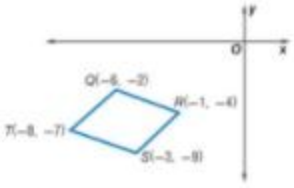


لا، $WY = \sqrt{(-10 - 5)^2 + (2 - -1)^2} = 3\sqrt{26}$ و $XZ = \sqrt{(4 - -10)^2 + (2 - -4)^2} = 2\sqrt{58}$. بما أن القطرين غير متطابقين، فإن $WXYZ$ ليس مستطيلاً.

حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

827

25. قانون المسافة، $Q(-6, -2)$، $R(-1, -4)$، $S(-3, -9)$، $T(-8, -7)$



نعم، $QS = \sqrt{(-6 - -3)^2 + (-1 - -8)^2} = \sqrt{58}$ و
بما أن $TR = \sqrt{(-8 - -1)^2 + (-7 - -4)^2} = \sqrt{58}$
القطرين متطابقتين، فإن $QRST$ مستطيل.

الشكل الرباعي $WXYZ$ مستطيل. أوجد جميع القياسات إذا كان $m\angle 6 = 110$.

26. $m\angle 1$ 25
27. $m\angle 2$ 65
28. $m\angle 3$ 65
29. $m\angle 4$ 25
30. $m\angle 5$ 25
31. $m\angle 7$ 50

الجبر الشكل الرباعي $CDEF$ مستطيل.

32. إذا كان $CF = 5$ و $FE = 12$، فأوجد DF. 13

33. إذا كان $DE = 8$ و $DF = 10$، فأوجد CD. 6

34. **الإنشاء** اشرح كيفية استخدام الأضلاع المتطابقة والمستقيمات المتعامدة في إنشاء مستطيل. **انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

35. **البستنة** تنشر نجلاء صندوق زهور على شكل مستطيل لتستخدمه في حديقتها. اشرح كيف تتأكد نجلاء من أن قاعدة الصندوق مستطيلة باستخدام شريط قياس. **يمكن أن تستخدم نجلاء الشريط في قياس الأضلاع المتقابلة وتتأكد من أن كل ضلعين متقابلين لهما نفس الطول وتتأكد من أن القطرين لهما نفس الطول وهذا يؤكد أن قاعدة الصندوق مستطيلة الشكل.**

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

36. **تحدٍّ** في المستطيل $CDEF$، $m\angle EBF = 11x + 4y$، $m\angle DCB = \frac{3x}{2} + 5y - 1$، $m\angle DBE = 65$.
أوجد قيم x و y. $x = 9, y = 4$

37. **تحليل الخطأ** في الشكل مستطيل $KLNM$. يدعي طارق أن $\angle LMN \cong \angle KLM$. لكن ميرو يرى أن $\angle KLM \cong \angle KML$. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش**

38. **تبرير**

a. اذكر جميع المثلثات القائمة في المستطيل $ABCD$.
$\triangle ADC, \triangle BCD, \triangle DAB, \triangle CBD$

b. اذكر جميع المثلثات متساوية الساقين في المستطيل ABCD.
$\triangle AEB, \triangle BEC, \triangle CED, \triangle DEA$

39. **مسألة غير محددة الإجابة** أوجد إحداثيات رؤوس المستطيل الذي طول قطريه 5.
الإجابة النموذجية: (0,0)، (3, 0)، (4, 0)

40. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف يمكنك استخدام أطوال أضلاع المستطيل في إيجاد طول قطري المستطيل. **انظر الهامش.**

حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

انتبه!

تحليل الخطأ بالنسبة للتمرين 46، يجب أن يدرك الطلاب أنه من الممكن تنظيم أي من المثلثين حادي الزاوية المتطابقين بحيث يشكلان متوازي أضلاع. للمستطيلات رؤوس 90 درجة، ومن ثم، يمكن تنظيم مثلثين متطابقين قائمي الزاوية فقط ليشكلا مستطيلاً.

إجابات إضافية

37. طارق محق لأن $\angle KLM$ و$\angle LMN$ عبارة عن زوايا داخلية متبادلة.

40. دائمًا ما تشكل أضلاع المستطيل وواحد من الأقطار زاوية قائمة. إذا كان لديك أطوال الأضلاع، فسوف تصبح هذه هي سيقان المثلث قائم الزاوية، ويمكنك استخدام نظرية فيثاغورس لحساب وتر المثلث قائم الزاوية والذي يكون عبارة عن قطر المستطيل.

4 التقويم

عيّن مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب توضيح كيفية كتابة برهان من عمودين لتوضيح أن رباعي الأضلاع الذي أقطاره متطابقة يكون مستطيلاً.

تدريب على الاختبار المعياري

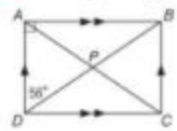
41. إذا كان $FM = 3x + y$ ، $FJ = -3x + 5y$ ، $GH = 11$ ، $GM = 13$. فما قيمتا x و y اللتين تجعلان من متوازي الأضلاع $FGHJ$ مستطيلاً؟ **A**

A $x = 3, y = 4$
B $x = 4, y = 3$
C $x = 7, y = 8$
D $x = 8, y = 7$

42. **الجبر** ملعب على شكل مستطيل محاطًا بسياج طوله 80 مترًا. يزيد أحد أضلاع الملعب عن الضلع الآخر بمقدار 10 أمتار. أي من المعادلات التالية يمكن أن تستخدم في إيجاد قيمة r، الضلع الأقصر من الملعب؟ **J**

F $10r + r = 80$
G $4r + 10 = 80$
H $r(r + 10) = 80$
J $2(r + 10) + 2r = 80$

43. **الإجابة المختصرة** ما قياس $\angle APB$؟ **112**

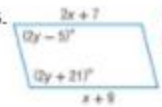


44. **SAT/ACT** إذا كان p فرديًا، فأي مما يلي يجب أن يكون أيضًا فرديًا؟ **E**

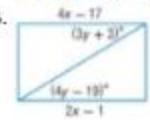
A $2p$
B $2p + 2$
C $\frac{p}{2}$
D $2p - 2$
E $p + 2$

مراجعة شاملة

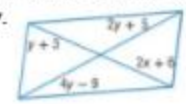
الجبر أوجد قيمة x و y بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع. (الدرس 13-2)

45. 

$x = 2$, $y = 41$

46. 

$x = 8$, $y = 22$

47. 

$x = 2$, $y = 7$

48. **الهندسة الإحداثية** أوجد إحداثيات نقطة تقاطع قطري $\square ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه A(1, 3) ، B(6, 2) ، C(4, −2) ، D(−1, −1). (الدرس 13-2) **(2.5, 0.5)**

راجع الشكل الموجود على اليسار.

49. إذا كان $\overline{AC} \cong \overline{AF}$، فاذكر زاويتين متطابقتين. $\angle ACF$ و $\angle AFC$

50. إذا كان $\angle AJH \cong \angle AHJ$، فاذكر قطعتين مستقيمتين متطابقتين. $\overline{AH}$ و $\overline{AJ}$

51. إذا كان $\angle ALJ \cong \angle AJL$، فاذكر قطعتين مستقيمتين متطابقتين. $\overline{AJ}$ و $\overline{AL}$

52. إذا كان $\overline{JA} \cong \overline{KA}$، فاذكر زاويتين متطابقتين. $\angle AJK$ و $\angle AKJ$

مراجعة المهارات

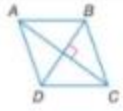
أوجد المسافة بين كل زوجين من النقاط.

53. (4, 2), (2, −5) $\sqrt{53}$
54. (0, 6), (−1, −4) $\sqrt{101}$
55. (−4, 3), (3, −4) $7\sqrt{2}$

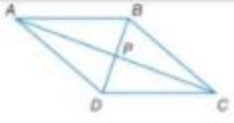
التدريس المتمايز

التوسع اطلب من الطلاب مراجعة الدروس من 1-13 إلى 3-13. واطلب منهم كتابة فرضية حول النتيجة عندما تتكوّن الأقطار في المربعات أو المعينات. يوضح الدرس 3-13 أنه إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلاً، فإن أقطاره تكون متطابقة. ونظرًا لأن الدرس 3-13 يركز على طول القطر، فإن الخطوة التالية هي التركيز على كيفية تقاطع الأقطار. ويمكن افتراض أن أقطار المعين أو المربع متعامدة.

13-4 المعينات والمربعات



$\overline{AC} \perp \overline{BD}$



$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

$\overline{AB} \cong \overline{BC}$

$\overline{AC}$ $\overline{BD}$

$\overline{BP} \cong \overline{BP}$ $\overline{AP} \cong \overline{PC}$

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

مثال 1

$\overline{KJ}$

$m\angle KJH = \frac{1}{2}(82)$ $m\angle KJH = \frac{1}{2}m\angle FJH$

$m\angle KJH + m\angle JKH + m\angle KHJ = 180$

$41 + 90 + m\angle KHJ = 180$

$131 + m\angle KHJ = 180$

$m\angle KHJ = 49$

$\overline{GH} \cong \overline{JH}$

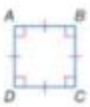
$GH = JH$

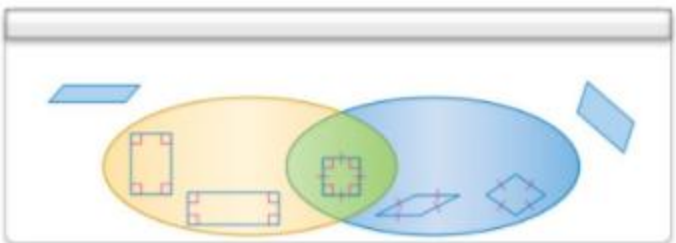
$x + 9 = 5x - 2$

$9 = 4x - 2$

$11 = 4x$

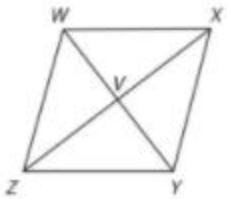
$2.75 = x$

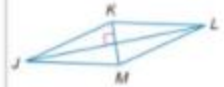




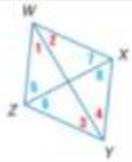
مثال إضافي

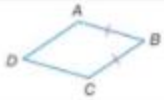
1





$\overline{JL} \perp \overline{KM}$

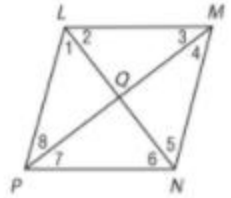




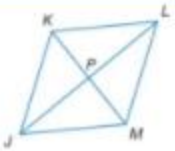
$\overline{AB} \cong \overline{BC}$

مثال إضافي

2



مثال 2



$\overline{KL} \cong \overline{JK}$

$\overline{PR}$
$\overline{SQ}$

$\overline{SQ}$
$\overline{PR}$

$\overline{SQ}$

$\overline{PR}$ $\overline{PR}$

$\overline{SQ}$

$\overline{MP}$ $\overline{MR}$ $\overline{QS}$ $\overline{PR}$ $\overline{PR}$

$\overline{PR}$

$\overline{MS}$ $\overline{QM}$ $\overline{SQ}$

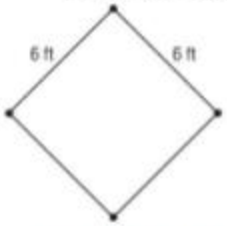
$\overline{MS}$ $\overline{MR}$

$\overline{MS}$ $\overline{MP}$

$\overline{PR}$ $\overline{SQ}$

مثال إضافي

3 **العناية بالحدائق** يقيس عمر حدود حديقة جديدة. ويرغب أن تكون الحديقة مربعة. وقد وضع كل وتد ركني على بعد 6 أمتار. ما الذي يحتاج عمر إلى معرفته ليضمن أن تكون الحديقة مربعة؟



حيث إن الأضلاع المتقابلة متطابقة، فإن الحديقة عبارة عن متوازي أضلاع. وحيث إن كل ضلعين متجاورين متطابقان، فالحديقة عبارة عن معين. ويحتاج عمر إلى معرفة إن كانت أقطار الحديقة متطابقة. فإذا كانت أقطار الحديقة متطابقة، فالحديقة مستطيلة. وحسب النظرية 13.20، فهي مربعة.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو اطلب من الطلاب العمل في مجموعات ثنائية لإنشاء فيديو يصف خواص المعين والمربع. تأكد من تعيين جميع خواص هذه الأشكال. تتضمن الخواص المشتركة مع متوازيات الأضلاع الأخرى.

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام الحالات للمعينات والمربعات

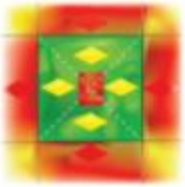
علم الآثار العنصر الأساسي لنجاح عملية التنقيب هو وجود خرائط دقيقة. كيف يتأكد علماء الآثار من أن المنطقة التي وضعوا عليها العلامات هي مربع أبعاده 1 متر في 1 متر؟

يبلغ طول كل ضلع من أضلاع الشكل الرباعي $ABCD$ 1 متر. بما أن الأضلاع المتقابلة متطابقة، فإن $ABCD$ متوازي أضلاع. بما أن ضلعين متتاليين في $\square ABCD$ متطابقان، إذًا فهو معين. إذا استطاع علماء الآثار إثبات أن $\square ABCD$ هو مستطيل أيضًا، فإذا حسب النظرية 13.20، يكون $\square ABCD$ مربعًا.

إذا تطابق قطرا متوازي الأضلاع، فإن متوازي الأضلاع يكون مستطيلاً. إذا قام علماء الآثار بقياس طول الحبل المطلوب لعمل كل قطر ووجدوا أنهما متساويان في الطول، فإن $ABCD$ يكون مربعًا.

تمرين موجّه

3. **خياطة الألحفة** تُصمم فاطمة لحافًا به مربعات مثل المربع المبين.



A. فإذا كانت فاطمة تحدد قطري كل قطعة صفراء وتحرص على أن يكون كل زوج من الأقطار متعامدًا، فهل يمكنها استنتاج أن كل قطعة صفراء عبارة عن معين؟ اشرح.

B. إذا كان لجميع الزوايا الأربعة للقطعة الخضراء نفس القياس وللضلعين العلوي والأيسر نفس القياس، فهل يمكنها استنتاج أن كل قطعة خضراء عبارة عن مربع؟ اشرح.

في الوحدة 12، استخدمت الهندسة الإحداثية في تصنيف المثلثات. يمكن أيضًا استخدام الهندسة الإحداثية في تصنيف الأشكال الرباعية.

الربط بالحياة اليومية

علم الآثار هو دراسة القطع الأثرية التي توفر معلومات حول حياة البشر ونشاطاتهم في الماضي. ولأن البشر بدؤوا الكتابة قبل 5000 عام، فلن يمكن جمع معلومات حول الفترات التي قبل هذا التاريخ إلا من خلال الأشياء التي يعثر عليها علماء الآثار.

المصدر: الموسوعة البريطانية

3A. لا؛ لا يمكنها التوصل لهذا الاستنتاج إلا إذا كانت تعلم كذلك أن الشكل الرباعي عبارة عن متوازي أضلاع.

3B. نعم؛ إذا تساوى قياس الزوايا الأربع كلها، فسيكون قياس كل منها هو 4 ÷ 360 أو 90. إذًا الزوايا المتقابلة متطابقة وبهذا تكون القطعة عبارة عن متوازي أضلاع. إذا كان قياس كل زاوية هو 90، فإن الشكل الرباعي يكون به أربع زوايا قائمة وبهذا تكون القطعة أيضًا مستطيلاً. إذا تساوى ضلعان متتاليان في الطول، فتكون القطعة كذلك مربعًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني قد لا يصدق الطلاب أن المعين أقطاره متعامدة. اطلب من مجموعة من الطلا ب قص أربعة مثلثات قائمة الزاوية متطابقة. تأكد من أن لكل مجموعة مثلثات فريدة. اطلب منهم ضم المثلثات معًا عند رؤوس زواياها القائمة. ينبغي أن تكون المثلثات معينًا. وينبغي أن تشارك كل مجموعة نتائجها مع الصف الدراسي.

مثال إضافي

4 حدد إن كان متوازي الأضلاع $ABCD$ عبارة عن معين أم مستطيل أم مربع حيث إن $A(-2, -1)$ و $B(-1, 3)$ و $C(3, 2)$ و $D(2, -2)$. اذكر جميع ما ينطبق. فسّر ذلك.

$AC = \sqrt{34}; BD = \sqrt{34}$;

ميل $\overline{AC} = \frac{3}{5}$.

ميل $\overline{BD} = -\frac{5}{3}$.

حيث إن ميل $\overline{AC}$ يساوي المعكوس الضربي السالب لميل $\overline{BD}$. إذًا فالأقطار متعامدة. وتكون أطوال $\overline{AC}$ و$\overline{BD}$ متساوية. إذًا، $ABCD$ عبارة عن معين ومستطيل ومربع.

إجابات إضافية

3. *البرهان:*

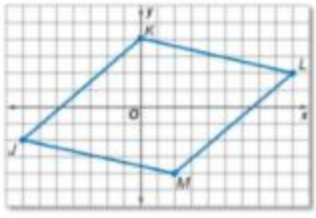
العبارات (المبررات)

1. $LMNP$ عبارة عن معين (معطيات)
2. $\overline{LM} \cong \overline{MN}$ (جميع أضلاع المعين متطابقة.)
3. $\overline{LQ} \cong \overline{QN}$ (أقطار المعيّن تنصّف بعضها البعض.)
4. $\angle MLQ \cong \angle MNQ$ (أقطار المعيّن تنصّف الزوايا.)
5. $\triangle LQM \cong \triangle NQM$ (المسلمة *SAS*)

4. بما أن عبد العزيز يستخدم 36 مربعات متطابقة، فإن كل أضلاع كل مربع تكون متساوية وكل الزوايا تكون زوايا قائمة. عندما تضع كل تلك المربعات معًا، فسوف تحصل على مجموعة مكونة من 6 صور عرضًا و6 صور طولاً. وبما أن كل صورة لها نفس العرض، فإن عرض المجموعة سيكون أكبر 6 مرات من عرض الصورة الواحدة، وبالمثل، فإنه طولها سيكون أكبر بمقدار 6 مرات من طول الصورة الواحدة. وبما أنه سيكون هناك صورة واحدة في كل ركن، فإن الزوايا ستكون 90 درجة.

مثال 4 تصنيف الأشكال الرباعية باستخدام الهندسة الإحداثية

الهندسة الإحداثية حدد ما إذا كان $\square JKLM$ الذي رؤوسه $J(-7, -2)$ و $K(0, 4)$ و $L(9, 2)$ و $M(2, -4)$ معينًا أم مستطيلاً أم مربعًا. اذكر جميع ما ينطبق. اشرح.



الفهم عيّن الرؤوس على مستوى إحداثي وصل بينها.

يظهر من التمثيل البياني أن متوازي الأضلاع به أربعة أضلاع متطابقة ولكن ليس به زوايا قائمة. وبهذا يبدو الشكل معينًا وليس مربعًا أو مستطيلاً.

التخطيط إذا كان قطرا متوازي الأضلاع متطابقين فإنه يكون مستطيلاً وإذا كانا متعامدين فإنه يكون معينًا وإذا كانا متطابقين ومتعامدين في الوقت نفسه فإنه يكون مستطيلاً ومعينًا ومربعًا.

الحل **الجزء 1** استخدم قانون المسافة لمقارنة طول القطرين.

$KM = \sqrt{(2-0)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{68}$ أو $2\sqrt{17}$

$JL = \sqrt{[9-(-7)]^2 + [2-(-2)]^2} = \sqrt{272}$ أو $4\sqrt{17}$

بما أن $2\sqrt{17} \neq 4\sqrt{17}$، فإن القطرين غير متطابقين. إذًا، متوازي الأضلاع $\square JKLM$ ليس مستطيلاً. بما أن الشكل ليس مستطيلاً، فإنه حتمًا ليس مربعًا.

الجزء 2 استخدم قانون الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدين.

ميل $\overline{KM} = \frac{-4-4}{2-0} = \frac{-8}{2}$ أو -4

ميل $\overline{JL} = \frac{2-(-2)}{9-(-7)} = \frac{4}{16}$ أو $\frac{1}{4}$

بما أن ناتج ضرب ميلي القطرين يساوي -1، فالقطران متعامدان وبهذا يكون $\square JKLM$ عبارة عن معين.

التحقق $JK = \sqrt{[4-(-2)]^2 + [0-(-7)]^2}$ أو $\sqrt{85}$

$KL = \sqrt{(9-0)^2 + (2-4)^2}$ أو $\sqrt{85}$

إذًا $\square JKLM$ هو معين حسب النظرية 13.20.

بما أن ميل $\overline{JK} = \frac{4-(-2)}{0-(-7)}$ أو $\frac{6}{7}$ وميل $\overline{KL} = \frac{2-4}{9-0}$ أو $-\frac{2}{9}$

وناتج ضرب هذين الميلين ليس -1، فإن الضلعين المتتاليين $\overline{JK}$ و $\overline{KL}$ ليسا متعامدين. وبهذا $\angle JKL$ ليست زاوية قائمة ومن ثم فإن $\square JKLM$ ليس مستطيلاً ولا مربعًا. ✔

تمرين موجّه

4. بمعلومية $J(5, 0)$ و $K(8, 11)$ و $L(-3, 14)$ و $M(-6, 3)$. حدد ما إذا كان متوازي الأضلاع $JKLM$ عبارة عن معين، أم مستطيل، أم مربع. اذكر جميع ما ينطبق. اشرح.

4. مربع، مستطيل، معين؛ جميع الأضلاع متطابقة ومتعامدة.

نصيحة **في حل المسائل**

رسم تمثيل بياني عند تمثيل شكل ما باستخدام الهندسة الإحداثية، فارسم الشكل للمساعدة على صياغة استنتاج وكذلك للمساعدة على التحقق من صحة الإجابة التي حصلت عليها جبريًا.

نصيحة **دراسية**

المربع والمعين

كل مربع يكون معينًا، ولكن ليس بالضرورة أن يكون كل معين مربعًا.

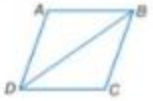
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز OL BL

التوسّع اطلب من الطلاب تخيل أنهم يعملون في متجر إطارات صور. وقد طلب منهم أحد العملاء صنع إطار من أربع قطع خشب متطابقة. اكتب وصفًا حتى يستخدمه الموظفون في المستقبل لاختبار أن إطار الصورة مربع. الإجابة النموذجية: قس أقطار الإطار. إذا كانت الأقطار ينصف كل منهما الآخر، فإن الإطار متوازي أضلاع. ثم قس الزوايا المتكونة من منصفات الأقطار. إذا كانت الأقطار متعامدة، فالإطار مربع.

التحقق من فهمك

مثال 1 **الجبر** الشكل الرباعي $ABCD$ عبارة عن معيّن. أوجد جميع القيم أو القياسات.

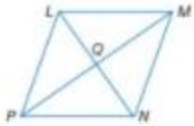


1. إذا كان $AB = 8x - 5$ ، $BC = 4x + 3$ فأوجد AD. 11
2. إذا كان $m\angle ADC = 70$ فأوجد $m\angle ABD$. 35

مثال 2 3. **البرهان** إذا كان $LMNP$ معيّنًا. فاكتب برهانًا من عمودين لإثبات أن $\Delta LQM \cong \Delta NQM$.

4. **التصوير** يقوم عبد العزيز بعمل مجموعة ملصقات صور باستخدام 36 مربعًا متطابقًا استخدم هذه المعطيات في إثبات أن مجموعة الملصقات تصنعها مربعة الشكل.

4, 3. انظر الهامش.



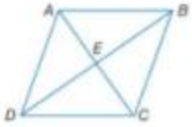
مثال 4 **الهندسة الإحداثية** بالنظر إلى كل مجموعة من الرؤوس، حدد إذا ما كان $XYWZ$ عبارة عن معين أم مستطيل أم مربع. اذكر كل ما ينطبق. اشرح استنتاجك.

5. $X(-2, 1)$, $Y(0, -3)$, $W(4, -1)$, $Z(2, 3)$
معين ومستطيل ومربع. $XYWZ$ به أربعة أضلاع متطابقة وأربع زوايا قائمة.

6. $X(4, -1)$, $Y(-1, 0)$, $W(0, 3)$, $Z(5, 2)$
مستطيل. $XYWZ$ به أربع زوايا قائمة ولكن ليس به أضلاع متطابقة.

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **الجبر** الشكل الرباعي $ABCD$ عبارة عن معيّن. أوجد جميع القيم أو القياسات.



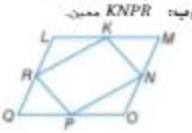
7. إذا كان $m\angle DAE = 25$ فأوجد $m\angle DAB$. 25
8. إذا كان $DC = 12$ فأوجد AD. 12
9. إذا كان $m\angle EDC = 6x$، $m\angle DBC = 5x + 6$ فأوجد $m\angle DCB$. 60
10. إذا كان $m\angle EAD = 5x + 5$، $m\angle BCE = 7x + 9$ فأوجد $m\angle EAD$. 45
11. إذا كان $AE = 5x - 3$، $AC = 7x + 5$ فأوجد BD. 14
12. إذا كان $BC = 6x - 3$، $AD = 7x - 6$ فأوجد DC. 15

مثال 2 **البرهان** اكتب برهانًا من عمودين. 13. انظر الهامش.

13. **المعطيات:** $m\angle LMQ = m\angle QPN$، $m\angle NMQ = m\angle LPQ$، $\overline{LM} \cong \overline{MN}$
المطلوب: $LMNP$ معين.

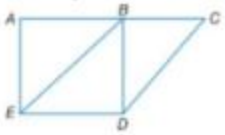
14. **المعطيات:** ΔWPX مثلث متساوي الساقين قائم الزاوية. $\Delta WPX \cong \Delta ZPY$
المطلوب: $WXYZ$ مربع.

15. **المعطيات:** $LMPQ$ متوازي أضلاع K ينصف LM، N ينصف MO، P ينصف OQ، R منتصف LQ. $\angle L \cong \angle M$
المطلوب: $KNPR$ معين.



16–14. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.

16. **المعطيات:** $ABDE$ مربع، $\Delta ABE \cong \Delta BCD$
المطلوب: $BCDE$ متوازي أضلاع



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين 1-6 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم المخطط الموجود في الجزء السفلي من هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

إجابات إضافية

13. **البرهان:**

العبارات (المبررات)

1. $m\angle LMQ = m\angle QPN$ (معطيات)
2. $LM \parallel PN$ (الزوايا الداخلية المتبادلة متطابقة.)
3. $m\angle NMQ = m\angle LPQ$ (معطيات)
4. $LP \parallel MN$ (الزوايا الداخلية المتبادلة متطابقة.)
5. $LMNP$ عبارة عن متوازي أضلاع (الجوانب المتقابلة متوازية)
6. $LP = MN$ و $LM = PN$ (الجوانب المتقابلة لمتوازي الأضلاع تكون متطابقة.)
7. $\overline{LM} \cong \overline{MN}$ (معطيات)
8. $LM = PN = LP = MN$ (خاصية التعدي)
9. $LMNP$ عبارة عن معيّن ($LMNP$ عبارة عن متوازي أضلاع له أضلاع متطابقة.)

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	7-22, 46, 47, 49-65	7-21, فردي, 51-54	8-22, زوجي, 45, 47, 49, 50, 55-63
OL أساسي	7-41, فردي, 43-47,	7-21, 51-54	22-47, 49, 50, 55-63
BL متقدم	23-63		

ملاحظات لحل التمرين

المسطرة والمنقلة تتطلب التمارين 38 و39 استخدام مسطرة ومنقلة.

17. **الأوريجامي** تقوم لمياء بقص قطع ورق لتستخدمها في الأوريجامي. فإذا استخدمت لمياء المنقلة لتتأكد من أن قياس الزوايا هو 90 درجة ومن أن القطرين لهما نفس الطول، فهل يمكن لها بذلك أن تتأكد من أن قطعة الورق مربعة الشكل أم لا؟ اشرح استنتاجك. **انظر الهامش**

مثال 4

الهندسة الإحداثية بالنظر إلى كل مجموعة من الرؤوس، حدد إذا ما كان $ABCD$ عبارة عن معين أم مستطيل أم مربع. اذكر جميع ما ينطبق. اشرح استنتاجك.

18. $A(-2, 1), B(3, 1), C(6, 5), D(1, 5)$ معين، القطران متعامدان

19. $A(-6, -5), B(-1, -5), C(2, -1), D(-3, -1)$ معين، القطران متعامدان

20. $A(2, 3), B(0, 7), C(5, 9), D(7, 5)$ لا شيء؛ القطران غير متطابقين وغير متعامدين.

21. $A(-5, -4), B(0, -3), C(0, 2), D(-5, 2)$ مربع، مستطيل، معين، جميع الأضلاع متطابقة ومتعامدة.

مثال 3

$JKLM$ معين. إذا كان $JK = 8$ و $CM = 4$ و $m\angle CJM = 30$. فأوجد جميع القياسات.

22. JC $4\sqrt{3}$

23. $m\angle JKL$ 120

24. MK $8\sqrt{3}$

25. $m\angle CJK$ 30

$RSTV$ مربع. إذا كان $RP = 7$. فأوجد جميع القياسات.

26. VT $7\sqrt{2}$

27. SV 14

28. $m\angle SPR$ 90

29. $m\angle PST$ 45

صنّف كل شكل رباعي.

30.
مستطيل

31.
معين

32.
مربّع

البرهان اكتب برهانًا حرًا. **37–33. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

33. النظرية 13.14

34. النظرية 13.15

35. النظرية 13.16

36. النظرية 13.17

37. النظرية 13.18

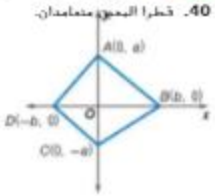
الإنشاء استخدم القطرين لإنشاء كل شكل. علّل كل إنشاء.

38. معين

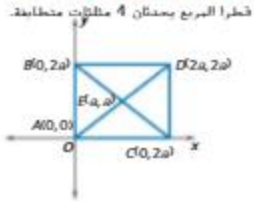
39. مربع **39 ,38. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

البرهان اكتب برهانًا حرًا لكل عبارة. **41 ,40. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

40. قطرا المعين متعامدان.



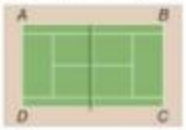
41. قطرا المربع يحددان 4 مثلثات متطابقة.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

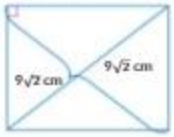
836 | الدرس 13-4 | المعينات والمربعات

42. **الرياضة** الرسم التخطيطي الموضح أدناه ملعب تنس. إذا كان الملعب متناظرًا بالنسبة لشبكة التنس، فصنّف الشكل الرباعي $ABCD$. ثم وضّح تبريرك.



انظر ملحق إجابات الوحدة 13.

43. **المخبوزات** يمثّل الرسم التخطيطي أدناه وعاءً لتحضير المعجنات. فإذا كان هذا الوعاء يستخدم لخبز دفعة من المعجنات، وسيقسم إلى 9 أقسام لبلائم مكان 9 قطع من المعجنات، فما أبعاد كل قطعة منها؟



8 cm × 8 cm

44. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف خواص طائرات ورقية تكون في أشكال رباعية يختلف فيها كل ضلعين متجاورين.

a–c انظر ملحق إجابات الوحدة 13.

a. **هندسيًا** ارسم 3 طائرات ورقية تتنوع أطوال أضلاعها. قم بتسمية واحدة $ABCD$ وواحدة $QRSP$ وواحدة $WXYZ$.

b. **جدوليًا** استخدم مسطرة في قياس زوايا كل طائرة ورقية وضع هذه النتائج في جدول.

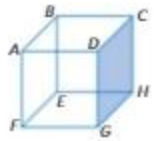
c. **لفظيًا** عبّر عن تخمين بشأن قطري طائرة ورقية.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

45. **تبرير** حدد ما إذا كانت العبارة صحيحة أم خطأ. ثم اكتب معكوس العبارة وعكسها ومكافئها العكسي وحدد القيمة الصحيحة لكل عبارة؟ اشرح استنتاجك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

إذا كان الشكل الرباعي معينًا، فهو إذا مربع.

46. **تحدٍّ** الشكل الذي على اليسار مكعب. إذا كان $\overline{AD} = 5$، فأوجد $\overline{AH}$ **$5\sqrt{3}$**



47. **تحليل الخطأ** في متوازي الأضلاع $ABCD$، $m\angle CAB = 45$ و $\overline{AE} = \overline{ED}$.

ترى إيمان أن متوازي الأضلاع هو مربع بينما ترى فتحية أنه معين فقط.

هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **إيمان على صواب. بما أن $AE = ED$، فإن جميع الزوايا حتمًا متطابقة وبهذا يكون الشكل الرباعي زوايا قائمة ومن ثم فهو مربع.**

48. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب معادلتين لمستقيمين متعامدين. أوجد رؤوس مربع يقع قطراه على المستقيمين اللذين كتبت معادلتين لهما.

الإجابة النموذجية: $y = x$ و $y = -x$ (1, 1), (−1, −1), (1, −1), (−1, 1)

49. **الكتابة في الرياضيات** اشرح الطرق التي تثبت بها أن متوازي أضلاع ما هو مربع. **يمكنك إثبات أن زاوية واحدة قائمة وأن ضلعين متجاورين متطابقين. يمكنك إثبات أن القطرين متطابقتان ومتعامدان.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

837

التدريس المتمايز OL AL

التوسّع اطلب من الطلاب تأليف قصة أطفال معًا بناء على الموضوع التالي. المربعات تمثل مجموعة الصفوف نظرًا لأن متطلبات الحصول على عضوية "مجموعة المربعات" صارمة للغاية. وتزيد المربعات تدريجيًا العضويات بتغيير تصنيف المجموعة وتقليل عدد المتطلبات اللازمة للانضمام إليها.

التمثيلات المتعددة

يستخدم الطلاب في التمرين 44 الرسومات الهندسية والجداول والوصف الكلامي لاستكشاف خواص أشكال الطائرات الورقية.

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 45. يجب أن يدرك الطلاب أنه بالرغم من أن أقطار المربع والمعيّن متطابقة، فإن هذه الحقيقة وحدها لا تكفي كبرهان لأي منهما. وهناك حاجة إلى مزيد من المعلومات حول متوازيات الأضلاع وأقطارها. أما جميع المستطيلات فأقطارها متطابقة بحسب النظرية 13.14. لذا يجب أن يكون متوازي الأضلاع مستطيلاً، ولكن لا يكون بالضرورة معينًا أو مربعًا.

إجابات إضافية

17. لا. يمكن أن يكون مستطيلاً. على ليس أن تتأكد من أن جميع الأضلاع متطابقة أو أن الأقطار متعامدة.

4 التقويم

حساب الأمس اطلب من الطلاب ملأ حظة ودراسة ملخص المفاهيم. اطلب منهم كتابة استنتاجات عن التشابه والاختلاف بين مفاهيم الأمس للمستطيل ومفاهيم اليوم للمربع والمعين.

إجابات إضافية

57. لا؛ لم يجتز أيّ من اختبارات متوازيات الأضلاع.

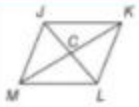
58. نعم؛ كلا زوجي الأضلاع المتقابلين متطابق.

59. نعم. أحد زوجي الأضلاع المتقابلة متوازيان ومتطابقان في نفس الوقت.

60. $\triangle ABC$ عبارة عن انعكاس للمثلث $\triangle XYZ$.
$AB = 5, BC = 4, AC = \sqrt{41}$,
$XY = 5, YZ = 4, XZ = \sqrt{41}$.
$\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ حسب مسلمة تساوي الأضلاع الثلاثة SSS.

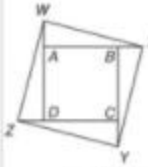
تدريب على الاختبار المعياري

50. $JKLM$ معين.
إذا كان $CK = 8$ و $JK = 10$.
فأوجد JC. **B**



A 4 C 8
B 6 D 10

51. الإجابة الموسعة ثم توسيع أضلاع المربع $ABCD$ بأطوال متساوية لتشكيل المربع $WXYZ$.

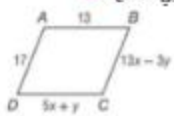


a. إذا كان $CY = 3$ cm وكانت مساحة $ABCD$ تساوي 81 cm^2. فأوجد مساحة $WXYZ$. **153 cm^2**

b. إذا كانت مساحتي $ABCD$ و $WXYZ$ هما 49 cm^2 و 169 cm^2 على التوالي. فأوجد DZ. **5 cm**

c. إذا كان $AB = 2CY$ وكانت مساحة هي $ABCD = g$ متر مربع. فأوجد مساحة $WXYZ$ بالمتر المربع. **2.5g**

52. الجبر ما قيمتا x و y اللتان تجعلان الشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع؟ **H**



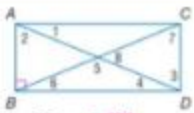
F $x = 3, y = 2$
G $x = \frac{3}{2}, y = -1$
H $x = 2, y = 3$
J $x = 3, y = -1$

53. **SAT/ACT** ما القيمة التي تزيد بمقدار 6 عن ناتج ضرب -3 في العدد x؟ **D**

A $-3x - 6$ D $-3x + 6$
B $-3x$ E $6 + 3x$
C $-x$

مراجعة شاملة

الشكل الرباعي $ABDC$ مستطيل. أوجد جميع القياسات إذا كان $m\angle 1 = 38$. (الدرس 4-13)



54. $m\angle 2$ **52**
55. $m\angle 5$ **104**
56. $m\angle 6$ **38**

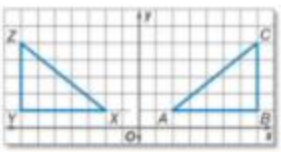
حدد ما إذا كان كل شكل رباعي متوازي أضلاع أم لا. علّل إجابتك. **59–57. انظر الهامش.**

57.

58.

59.

60. **الهندسة الإحداثية** حدد التحويل الهندسي. وتحقق أنه عبارة عن تحويل تطابق. **انظر الهامش.**



مراجعة المهارات

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

61. $\frac{1}{2}(5x + 7x - 1) = 11.5$ **2**
62. $\frac{1}{2}(10x + 6x + 2) = 7$ $\frac{3}{4}$
63. $\frac{1}{2}(12x + 6 - 8x + 7) = 9$ $\frac{5}{4}$

حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المتابعة

استكشف الطلاب خواص متوازيات الأضلاع والمستطيلات والمعينات والمربعات.

اطرح السؤال التالي:

- ما السمات التي تميز متوازيات الأضلاع والمستطيلات والمعيّنات والمربعات؟ **الإجابة النموذجية: الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع تكون متوازية. والمستطيلات عبارة عن متوازيات أضلاع لها أربع زوايا قائمة. والمعيّنات عبارة عن متوازيات أضلاع جميع أضلاعها متطابقة. والمربعات لها أربع زوايا قائمة و جميع الأضلاع متطابقة، ومن ثم، كلاهما عبارة عن مستطيلات ومعيّنات.**

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 5-13 استخدام خواص الحالات الخاصة لمتوازي الأضلاع.

الدرس 5-13 التعرف على خواص شبه المنحرف وتطبيقها.
التعرف على خواص أشكال الطائرات الورقية وتطبيقها.

بعد الدرس 5-13 استخدام الاستدلال الاستقرائي لإثبات العبارات.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- ما الخوّاص التي تميّز شبه المنحرف عن متوازي الأضلاع؟ شبه المنحرف يتضمن زوجًا واحدًا من الأضلاع المتوازية.
- لماذا يكون حاجز القفز الخاص بالخيل المصنع على شكل شبه منحرف أكثر استقرارًا من المصنع على شكل مستطيل؟ لأن إحدى قاعدتيه تكون أعرض من الأخرى؛ وبالتالي تقل احتمالات تعثر الحصان القافز فيها عن تلك المصنعة على شكل مستطيل بنفس الطول والعرض.
- انظر في الرسم التوضيحي لصناديق القفز الأربعة المثبتة. ما الافتراضات التي توصلت إليها بشأن زوايا شبه المنحرف التي تتكون عند نهاية الصندوق؟ يجب أن تكون الزوايا المتناظرة لأشباه المنحرف الأربعة متطابقة مع القاعدة العلوية للشكل أدناه. وبالتالي فإن أشباه المنحرف التي تكوّن نهايات صندوق القفز يجب أن تكون متشابهة.

13-5 شبه المنحرف والطائرة الورقية

السابق
- لقد استخدمت خواص متوازيات الأضلاع المماثلة.

الحالي
1 تطبيق خواص شبه المنحرف.
2 تطبيق خواص الطائرة الورقية.

لماذا؟
- في الجسار، مربعات القفز المصنوعة من رغوة عالية الانضغاط تستخدم كمنصات قفز وأحصنة قفز وعقبات. الجانبان الأيسر والأيمن من كل قسم عبارة عن شبه منحرف.

المفردات الجديدة
- شبه منحرف trapezoid
- قاعدتان bases
- ساقا شبه المنحرف legs of a trapezoid
- زوايا القاعدة base angles
- شبه منحرف متساوي الساقين isosceles trapezoid
- منصف ساقي شبه المنحرف midsegment of a trapezoid
- الطائرة الورقية kite

استخدام الإحداثيات في إثبات النظريات الهندسية البسيطة بمرفق.

استخدام الطرق الهندسية في حل المسائل أمثل تصميم جسم أو إنشاء لاستيفاء القيود المادية أو تقليل التكلفة، العمل بالأنظمة الشبكية البيضية الظاهرة على النصب ★

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها. التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

1 خواص شبه المنحرف **شبه المنحرف** هو شكل رباعي به ضلعان فقط متوازيان. يسمى الضلعان المتوازيان **القاعدتان**. يسمى الضلعان غير المتوازيين **الساقان**. زوايا **القاعدة** تتكون من القاعدة وأحد الساقين. في شبه المنحرف $ABCD$، الزاويتان $\angle A$ و $\angle B$ هما زوجان من زوايا القاعدة والزاويتان $\angle C$ و $\angle D$ هما الزوجان الآخران. إذا تطابق ساقا شبه المنحرف، فإنه يكون **شبه منحرف متساوي الساقين**.

النظريات شبه المنحرف متساوي الساقين

13.19 إذا كان شبه المنحرف متساوي الساقين، فيتطابق كل زوجين من أزواج زوايا القاعدة.

مثال إذا كان شبه المنحرف $FGHJ$ متساوي الساقين، فإن $\angle H \cong \angle G$ و $\angle J \cong \angle F$.

13.20 إذا تطابق في شبه المنحرف زوجان من أزواج زوايا القاعدة، فهو شبه منحرف متساوي الساقين.

مثال إذا كانت $\angle M \cong \angle L$، فإن شبه المنحرف $KLMP$ يكون متساوي الساقين.

13.21 يكون شبه المنحرف متساوي الساقين فقط إذا كان قطراه متطابقين.

مثال إذا كان شبه المنحرف $QRST$ متساوي الساقين، فإن $\overline{RT} \cong \overline{QS}$ وبالمثل، إذا كان $\overline{QS} \cong \overline{RT}$ فإن شبه المنحرف QRST يكون متساوي الساقين.

سوف تثبت النظريتين 13.19 و 13.20، والجزء الآخر من النظرية 13.21 في التمرينات 28 و 29 و 30.

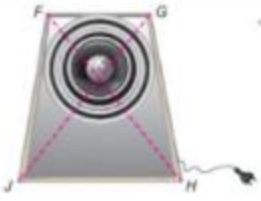
برهان جزء من النظرية 13.21

المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين.

المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

حقوق الطبع والتأليف © مملوكة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

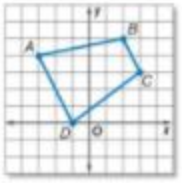
مثال 1 من الحياة اليومية



$\overline{FG} \parallel \overline{JH}$

$\overline{XG}$ $\overline{FH}$

مثال 2

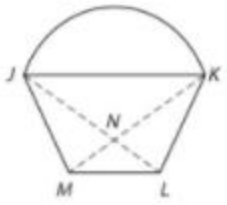


$\overline{AD}$ $\overline{BC}$

$\overline{DC}$ $\overline{AB}$

مثال إضافي

1



الضلعان المتقابلان $\overline{BC}$ و $\overline{AD}$.

ميل $\overline{BC} = 3 - \frac{5}{3} - 2 = -\frac{2}{1}$ أو -2

ميل $\overline{AD} = \frac{0-4}{-1-(-3)} = \frac{-4}{2}$ أو -2

بما أن ميلي $\overline{BC}$ و $\overline{AD}$ متساويان، فإن $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.

الضلعان المتقابلان $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$.

ميل $\overline{AB} = \frac{5-4}{2-(-3)} = \frac{1}{5}$

ميل $\overline{DC} = \frac{0-3}{-1-3} = \frac{-3}{-4}$ أو $\frac{3}{4}$

بما أن ميلي $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ ليسا متساويين، فإن $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. بما أن الشكل الرباعي $ABCD$ به فقط ضلعان متقابلان متوازيان، فإن الشكل الرباعي $ABCD$ يكون شبه منحرف.

قراءة في الرياضيات
الرموز تذكر أن الرمز $\nparallel$ يعني غير متوازٍ مع.

مثال 2 استخدم قانون المسافة في المقارنة بين طولي الساقين $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ يكون شبه المنحرف متساوي الساقين إذا تطابق ساقاه.

$AB = \sqrt{(-4-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2}$ أو $\sqrt{50}$

$DC = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25}$ أو 5

بما أن $AB \neq DC$، فإن الساقين $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ غير متطابقين وبهذا فشبه المنحرف $ABCD$ ليس متساوي الساقين.

تمرين موجّه

2. الشكل الرباعي $QRST$ رؤوسه $Q(-8, -4)$، $R(0, 8)$، $S(6, 8)$، و $T(-6, -10)$. بيّن أن $QRST$ شبه منحرف وحدد ما إذا كان $QRST$ شبه منحرف متساوي الساقين أم لا.

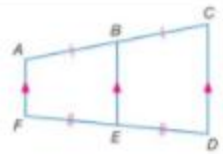
$\overline{ST} \parallel \overline{RQ}$، $\overline{RS} \parallel \overline{QT}$؛ ليس متساوي الساقين $RS = 6$، $QT = \sqrt{40}$

قراءة في الرياضيات
منصف الساقين منصف ساقي شبه المنحرف يمكن أن يُسمى أيضًا المتوسط.

منصف ساقي شبه المنحرف هو القطعة المستقيمة التي تصل بين نقطتي منتصف ساقي شبه المنحرف.

توضح النظرية التالية العلاقة بين منصف الساقين والقاعدتين في شبه المنحرف.

النظرية 13.22 نظرية منصف ساقي شبه المنحرف



يكون منصف ساقي شبه المنحرف موازيًا لكلتا القاعدتين. ويكون قياسه هو نصف مجموع طول القاعدتين.

مثال إذا كان $\overline{BE}$ عبارة عن منصف ساقي شبه المنحرف $ACDF$، فإن $\overline{AF} \parallel \overline{BE}$، $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$، و $BE = \frac{1}{2}(AF + CD)$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال إضافي

2 الشكل الرباعي $ABCD$ بالرؤوس $A(5, 1)$ و $B(-3, -1)$ و $C(-2, 3)$ و $D(2, 4)$. بيّن أن $ABCD$ شبه منحرف وحدد إن كان شبه منحرف متساوي الساقين أم لا.

الخطوة 1: ميل $\overline{AB} = \frac{1}{4}$.

ميل $\overline{CD} = \frac{1}{4}$.

ميل $\overline{AD} = -1$.

ميل $\overline{BC} = 4$.

حيث إن $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ لهما نفس الميل، فإن $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. فهناك زوج واحد فقط من الأضلاع المتقابلة متوازٍ. إذًا، $ABCD$ عبارة عن شبه منحرف.

الخطوة 2: $BC = \sqrt{17}$، و $AD = \sqrt{18}$. حيث إن الساقين غير متطابقين، إذًا $ABCD$ ليس شبه منحرف متساوي الساقين.

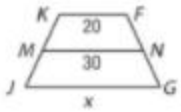
انتبه!
الهندسة الإحداثية عند استخدام قانوني المسافة أو الميل، انتبه إلى علامات الأعداد. وتأكد أيضًا من استخدام قيمتي x و y بالترتيب الصحيح.

التدريس المتمايز

التوسّع يوجد العديد من الكلمات المتشابهة التي تتضمن معاني مختلفة في الرياضيات. من الأمثلة على ذلك كلمة المتوسط الحسابي في الإحصاء والمتوسط في الهندسة. اطلب من الطلاب المقارنة وتبيين الفرق بين معنى المتوسط في المثلث وشبه المنحرف. واطلب منهم توضيح معنى المتوسط الحسابي في مجموعة بيانات. وتكون المقارنة بينها أن المتوسط في المثلث وشبه المنحرف هو قطعة مستقيمة تصل بين نقطة منتصف إحدى القطع المستقيمة فيها ونقطة أخرى في الشكل. ويرتبط الفارق بين المتوسط في المثلث برأس بينما يصل المتوسط في شبه المنحرف بين نقطتي منتصف الساقين. ويعني المتوسط الحسابي لمجموعة بيانات القيمة المتوسطة بين مجموعة بيانات مرتبة.

مثال إضافي

3 مثال على الاختبار المعياري
في الشكل، $\overline{MN}$ هو منصف ساق شبه المنحرف $FGJK$. ما قيمة x؟



40

إرشاد للمعلمين الجدد

أشباه المنحرف من التعريفات البديلة لشبه المنحرف هو أنه يحتوي *على الأقل* على زوج واحد من الأضلاع المتوازية. في هذا التعريف، يعتبر متوازي الأضلاع حالة خاصة من شبه المنحرف.

مثال 3 على الاختبار المعياري منصف ساقي شبه المنحرف

الإجابة الشبكية في الشكل، $\overline{LH}$ هو منصف ساقي شبه المنحرف $FGJK$. ما قيمة x؟

ملحوظة: الشكل غير مرسوم بمقياس رسم.

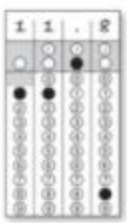
قراءة فقرة الاختبار

أعطيت طول منصف ساقي شبه منحرف وطول إحدى قاعدتيه وطلب منك إيجاد طول القاعدة الأخرى.

حل فقرة الاختبار

$LH = \frac{1}{2}(FG + KJ)$	نظرية منصف ساقي شبه المنحرف
$5 = \frac{1}{2}(x + 18.2)$	بالتعويض
$30 = x + 18.2$	اضرب كل طرف في 2.
$11.8 = x$	اطرح 18.2 من كل طرف.

الإجابة الشبكية



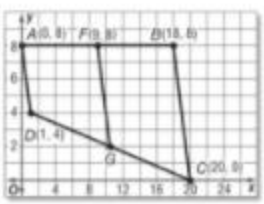
- يمكن إدخال الإجابة العشرية إما عن طريق وضع الرقم الأول في مربع الإجابة الأيسر أو وضع الرقم الأخير في مربع الإجابة الأيمن.
- لا تشترك مربعات قارئة في نفس العمود الإجابة.
- أيًا **قناعة واحدة** مقابل كل مربع إجابة. لا أكثر من دائرة واحدة في مربع إجابة، لا تقلق بشأن الدوائر الفارغة في المربعات التي بدون إجابة.

نصيحة **عند حل الاختبار**

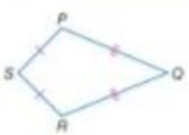
الإجابات الشبكية
الإجابات التي هي أعداد عشرية في الغالب يمكن تدوينها بطريقة أكثر من طريقة. الإجابة مثل $\frac{8}{5}$ يمكن تدوينها بالعشرية 8/5 أو العشرية 1.6. ولكن تدوينها بالعشرية 1 3/5.

تمرين موجّه

3. **الإجابة الشبكية** شبه المنحرف $ABCD$ موضح بالعشرية أدناه. إذا كانت $\overline{FG}$ توازي $\overline{AD}$، فما الإحداثي x للنقطة G؟ 10.5



2 خواص الطائرة الورقية **الطائرة الورقية** هي رباعي أضلاع به ضلعان قصيران متطابقان وضلعان كبيران متطابقان. إذا كان رباعي الأضلاع طائرة ورقية فليست متطابقة ولا متوازية.



حقوق الطبع والتأليف © مجموعة ماكجرو هيل للتعليم

التدريس باستخدام التكنولوجيا

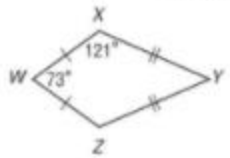
اللوحة البيضاء التفاعلية ارسم جدولاً يحتوي على 7 أعمدة، وعنونها بالأسماء الشكل الرباعي، ومتوازي أضلاع، ومستطيل، ومعيّن، ومربع، وطائرة ورقية، وشبه منحرف. اعرض أمثلة لكل فئة من هذه الفئات على اللوحة واختر طلابًا ليسحبوا كل شكل إلى العمود الذي يتوافق اسمه أكثر معه. إذا رأى الطلاب أن الشكل يمكن تصنيفه تحت أكثر من فئة، فساعدهم في تحديد الاسم *الأكثر* انطباقًا عليه.

2 خواص أشكال الطائرة الورقية

المثال 4 يوضح كيفية استخدام النظريات والخواص لإثبات أو تحديد أن الشكل هو شكل طائرة ورقية.

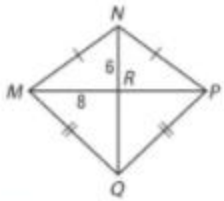
مثال إضافي

4 a. إذا كان $WXYZ$ عبارة عن شكل طائرة ورقية، فأوجد قياس $\angle XYZ$.



45

b. إذا كان $MNPQ$ عبارة عن شكل طائرة ورقية، فأوجد NP.



10

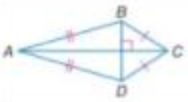
التركيز على محتوى الرياضيات

شكل الطائرة الورقية يوجد ثلاث خواص إضافية لأشكال الطائرة الورقية. 1) الزوايا بين الأضلاع غير المتطابقة لأشكال الطائرة الورقية تكون متطابقة. 2) أقطار الزوايا غير المتطابقة تكون دائماً المنصف العمودي لأقطار الزوايا المتطابقة. 3) تنصف الأقطار الزوايا غير المتطابقة.

تصيحة دراسية

الطائرة الورقية الزوايا المتطابقة في شكل الطائرة الورقية محصورة بين الأضلاع المتجاورة غير المتطابقة.

نظريات شكل الطائرات الورقية



13.23 إذا كان منوازي الأضلاع عبارة عن شكل طائرة ورقية، فإن قطريه يكونان متعامدين.

مثال إذا كان الشكل الرباعي $ABCD$ عبارة عن طائرة ورقية، فإن $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

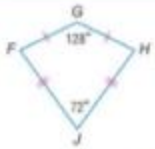
13.24 إذا كان منوازي الأضلاع عبارة عن شكل طائرة ورقية، فتتطابق زاويتان من الزوايا المتقابلة.

إذا كان الشكل الرباعي $JKLM$ عبارة عن شكل طائرة ورقية وكان $\overline{JK} \cong \overline{KL}$، فإذا $\angle J \cong \angle L$، و $\angle K \ncong \angle M$.

يمكنك استخدام النظريتين المذكورتين أعلاه، نظرية فيثاغورث، ونظرية مجموع زوايا المضلع الداخلية، لإيجاد القياسات المجهولة في شكل الطائرة الورقية.

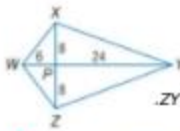
مثال 4 استخدام خواص شكل الطائرة الورقية

a. إذا كان $FGHJ$ عبارة عن شكل طائرة ورقية، فأوجد $m\angle GFJ$.



بما أن الطائرة الورقية يكون بها زاويتان اثنتان فقط متطابقتان وبما أن $\angle J \ncong \angle G$، فإن $\angle F \cong \angle H$.
إذا $m\angle F = m\angle H$. اكتب معادلة وقم بحلها لإيجاد $m\angle F$.

$m\angle F + m\angle G + m\angle H + m\angle J = 360$	نظرية مجموع زوايا المضلع الداخلية
$m\angle F + 128 + m\angle F + 72 = 360$	بالتعويض
$2m\angle F + 200 = 360$	بسّط.
$2m\angle F = 160$	اطرح 200 من كل طرف.
$m\angle F = 80$	اقسم كل طرف على 2.

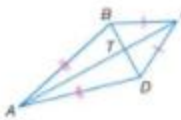


b. إذا كان $WXYZ$ عبارة عن شكل طائرة ورقية، فأوجد ZY.

بما أن قطرا الطائرة الورقية متعامدان، فإنهما يقسمان $WXYZ$ إلى أربعة مثلثات قائمة. استخدم نظرية منوازي الأضلاع في إيجاد ZY. طول الوتر في المثلث القائم $\triangle YPZ$.

$PZ^2 + PY^2 = ZY^2$	نظرية فيثاغورس
$8^2 + 24^2 = ZY^2$	بالتعويض
$640 = ZY^2$	بسّط.
$\sqrt{640} = ZY$	احذف الجذر التربيعي من كل طرف.
$8\sqrt{10} = ZY$	بسّط.

تمرين موجّه



4A. إذا كان $m\angle BAD = 38$ و $m\angle BCD = 50$، فأوجد $m\angle ADC$. 136

4B. إذا كان $BT = 5$ و $TC = 8$، فأوجد CD. $\sqrt{89}$

الربط بالحياة اليومية

أسرع سرعة مسجلة لطائرة ورقية هي 192 كيلومترًا في الساعة. الرقم القياسي الأعلى لارتفاع حلقت فيه طائرة ورقية واحدة هو3741 مترًا.

المصدر: بريتانيكا للطائرات الورقية

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز OL AL

المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني يمكن للطلاب توضيح الأضلاع المتطابقة وكذلك الزوايا المتطابقة وغير المتطابقة لشكل الطائرة الورقية. اطلب من الطلاب طي قطعة من الورق إلى نصفين. ثم اطلب منهم أن يقوموا بقطع قطري بأي طول بالبدء من الثنية. اطلب منهم تكرار العملية بالبدء من طرف الثنية والقطع حتى يتلاقى القطعان القطريان. ويمكن للطلاب بعدها مقارنة الأضلاع والزوايا المتطابقة وغير المتطابقة. اطلب من الطلاب قطع أحجام مختلفة من الطائرات الورقية لتوضيح أن هذه الخواص تنطبق دائمًا.

843

التحقق من فهمك

مثال 1 أوجد قياس كل مما يلي.

1. $m\angle C$ 60

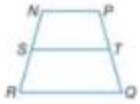
2. EJ إذا كان $HF = 50$، $JG = 10$ ، 40

مثال 2 **الهندسة الإحداثية** الشكل الرباعي $JKLM$ رؤوسه هي $J(3, 10)$ و $K(2, 6)$ و $L(11, 6)$ و $M(8, 10)$.

3. تحقق من أن $JKLM$ شبه منحرف. **انظر الهامش.**

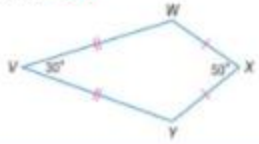
4. حدد ما إذا كان $JKLM$ شبه منحرف متساوي الساقين. اشرح. **انظر الهامش.**

مثال 3 5. **الإجابة الشبكية** في الشكل الذي على اليسار، $\overline{ST}$ هي منصف شبه المنحرف $NPQR$. حدد قيمة x. 11

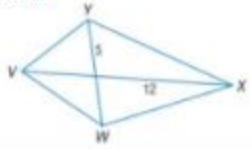


مثال 4 إذا كان $VWXY$ عبارة عن شكل طائرة ورقية، فأوجد جميع القياسات.

6. $m\angle W$ 140



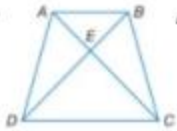
7. YX 13



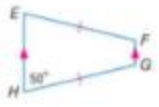
التمرين وحل المسائل

مثال 1 أوجد قياس كل مما يلي.

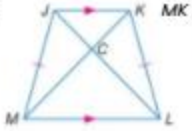
8. AC إذا كان $BE = 12$، $ED = 24$ ، 36



9. $m\angle F$ 130



10. JC إذا كان $MK = 18$، $CL = 12$ ، 6



11. $m\angle P$ 60

مثال 2 **الهندسة الإحداثية** بالنسبة لكل شكل رباعي له رؤوس معلومة، تحقق ما إذا كان الشكل الرباعي هذا شبه منحرف أم لا. وحدد ما إذا كان الشكل شبه المنحرف متساوي الساقين أم لا. 12–15. **انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

12. $A(-6, -3)$, $B(-4, 1)$, $C(1, 1)$, $D(3, -3)$

13. $E(0, 3)$, $F(-4, -1)$, $G(-3, -8)$, $H(7, 2)$

14. $J(0, 4)$, $K(3, 7)$, $L(8, 6)$, $M(10, 2)$

15. $N(2, 0)$, $P(12, 8)$, $Q(7, 9)$, $R(2, 5)$

حقوق النشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 7 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم المخطط الموجود في الجزء السفلي من هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

المتابعة

استكشف الطلاب خواص أشباه المنحرف والطائرات الورقية.

اطرح السؤال التالي:

- ما مدى اختلاف أشباه المنحرف والطائرات الورقية عن متوازيات الأضلاع؟ الإجابة النموذجية: تحتوي أشباه المنحرف على زوج واحد فقط من الجوانب المتقابلة المتوازية، فلا يكون كلا الجانبين متوازيًا. أما الطائرات الورقية، فلها زوجان من الجوانب المتتالية المتطابقة بدلاً من وجود زوجين من الجوانب المتبادلة المتطابقة.

إجابات إضافية

3. ميل $\overline{JM} = \frac{10-10}{3-8} = 0$

ميل $\overline{KL} = \frac{6-6}{2-11} = 0$

بما أن ميلي كل من $\overline{JM}$ و $\overline{KL}$ متساويان، فإن $\overline{KL} \parallel \overline{JM}$.

ميل $\overline{JK} = \frac{10-6}{3-2} = 4$.

ميل $\overline{ML} = \frac{10-6}{8-11} = -\frac{4}{3}$

بما أن ميلي $\overline{JK}$ و $\overline{ML}$ غير متساويين، فإن $\overline{JK}$ و $\overline{ML}$ غير متوازيين. بما أن الشكل الرباعي $JKLM$ له زوج واحد فقط من الجوانب المتقابلة المتوازية، فإن الشكل الرباعي $JKLM$ عبارة عن شبه منحرف.

4.

$JK = \sqrt{(3-2)^2 + (10-6)^2} = \sqrt{17}$

$ML = \sqrt{(8-11)^2 + (10-6)^2} = 5$

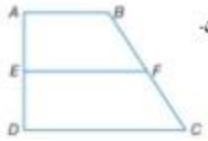
بما أن $JK \neq ML$، فإن الساقين $\overline{JK}$ و $\overline{ML}$ ليسا متطابقين. ومن ثم، فإن شبه المنحرف $JKLM$ ليس متساوي الساقين.

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	8-27, 65, 67-81	70-73, فردي 9-27	8-26, زوجي, 65, 67-69, 74-81
OL أساسي	29-63, فردي 9-27 65, 67-81, فردي	70-73, فردي 8-27	28-65, 67-69, 74-81
BL متقدم	28-81		

مثال 3

في شبه المنحرف $ABCD$، النقطتان E و F هما نقطتا منتصف الساقين.



16. إذا كان $AB = 10$ ، $CD = 14$، فأوجد EF. **12**

17. إذا كان $EF = 7$ ، $CD = 10$، فأوجد AB. **4**

18. إذا كان $AB = 5$ ، $EF = 10$، فأوجد DC. **20**

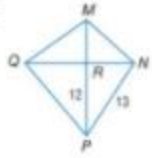
19. إذا كان $EF = 13$ ، $DC = 14$، فأوجد AB. **12**

20. إذا كان $AB = 12$ ، $EF = 14$، فأوجد DC. **16**

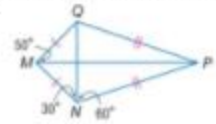
21. إذا كان $AB = 7$ ، $DC = 33$، فأوجد EF. **20**

إذا كان $MNPQ$ عبارة عن شكل طائرة ورقية، فأوجد جميع القياسات.

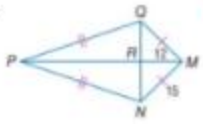
22. QN **10**



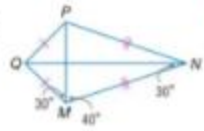
23. $m\angle P$ **80**



24. NR **9**



25. $m\angle Q$ **160**



البرهان اكتب برهانًا حرًا لكل نظرية. **31–26. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

26. النظرية 13.19

27. النظرية 13.20

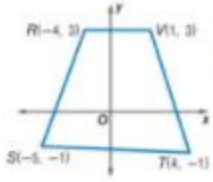
28. النظرية 13.21

29. النظرية 13.23

30. النظرية 13.24

31. **البرهان** اكتب برهانًا إحداثيًا للنظرية 13.22.

32. **الهندسة الإحداثية** راجع الشكل الرباعي $RSTV$.

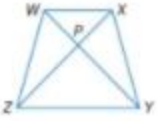


a. حدد ما إذا كان الشكل شبه منحرف أم لا. إن كان كذلك، فهل هو متساوي الساقين؟ اشرح. **a, b. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

b. هل نقطة الأصل تقع على منصف الساقين؟ علّل إجابتك.

c. أوجد طول المنصف. **7.07**

الجبر $WXYZ$ عبارة عن شبه منحرف.



33. إذا كان $m\angle WZY = 4x + 10$ ، $m\angle XYZ = 5x - 5$، فأوجد قيمة x بحيث يكون $WXYZ$ متساوي الساقين. **15**

34. إذا كان $WY = 4x + 1$ ، $XZ = 5x - 3$، فأوجد قيمة x بحيث يكون $WXYZ$ متساوي الساقين. **4**

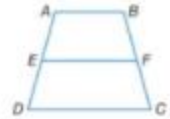
حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

845

الطعام جانب الحاوية المعروضة بالصورة عبارة عن شبه منحرف متساوي الساقين. إذا كان $AE = 8$ سنتيمترات وكان $ED = 5$ سنتيمترات وكان $m\angle ABD = 75$، فأوجد جميع القياسات.

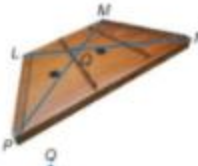
35. $m\angle BAC$ 75
36. AD 13 سنتيمترًا
37. $m\angle BDC$ 105
38. BC 13 سنتيمترًا

الجبر في شبه المنحرف $ABCD$، النقطتان E و F هما نقطتا منتصف الساقين.



39. إذا كان $AB = x + 2$ ، $DC = 2x + 1$ ، $EF = 9$. فأوجد قيمة x. 5
40. إذا كان $AB = 6$ ، $EF = 3x$ ، $DC = 5x - 3$. فأوجد قيمة x. 3
41. إذا كان $AB = 3x - 6$ ، $EF = 4x - 8$ ، $DC = 20$. فأوجد قيمة EF. 61
42. إذا كان $AB = x + 4$ ، $EF = 2x - 3$ ، $DC = 2x - 1$. فأوجد قيمة x. 9

الموسيقى القانون آلة موسيقية تأخذ في القالب شكل شبه المنحرف. الرسم التخطيطي الذي بالصورة، فيه $LN = 60$ سنتيمترًا و $QP = 25$ سنتيمترًا و $m\angle LPQ = 65$. أوجد جميع القياسات.



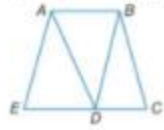
43. $m\angle MLP$ 50
44. LQ 14
45. $m\angle MNP$ 130
46. MP 24

الجبر $QRST$ عبارة عن شكل طائرة ورقية.

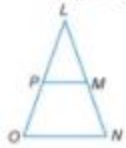
74. إذا كان $m\angle TSR = 40$ ، $m\angle TQR = 6x$ ، و $m\angle QRS = 7x + 10$. فأوجد $m\angle QTS$. 115
84. إذا كان $m\angle TQR = 60$ ، $m\angle RST = x - 3$ ، و $m\angle QTS = 7x$. فأوجد $m\angle QRS$. 140

البرهان اكتب برهانًا من عمودين. 49، 50 انظر الهامش.

49. **المعطيات:** $\triangle AED \cong \triangle BCD$، $\angle BAD \cong \angle EDA$
المطلوب: $ABCE$ شبه منحرف متساوي الساقين.



50. **المعطيات:** $PMNO$ شبه منحرف
المطلوب: جميع زوايا $\triangle LPM$ متطابقة مع زوايا $\triangle LON$



حدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة دائمًا أم أحيانًا أم غير صحيحة على الإطلاق.

51. الطائرة الورقية هي شبه منحرف. لا مطلقًا
52. الزاويتان المتجاورتان في شبه المنحرف تكون متكاملتان. أحيانًا
53. الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع. أحيانًا
54. المربع هو مستطيل. دائمًا
55. قطرا الطائرة الورقية متعامدان. دائمًا
56. **البرهان** $ABCD$ طائرة ورقية، اكتب فقرة برهان تثبت أن $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.

البرهان: نعلم من المعطيات أن $ABCD$ طائرة ورقية. حسب التعريف، يكون $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ و $\overline{BC} \cong \overline{DC}$. نعلم أن $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ حسب خاصية الانعكاس. ولهذا، حسب المبرهنة SSS، يكون $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.

حقوق الجمع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التدريس المتمايز OL BL

التوسّع يتعلم الطلاب بعض الصيغ والمعادلات الأساسية للمساحة في الوحدة السابقة. اطلب من الطلاب وصف كيف تكفي معرفة صيغ مساحة المستطيل لاستنباط صيغ مساحة المثلثات والأشكال الرباعية الأخرى. يمكن للطلاب استخدام الأمثلة لتوضيح تحليل المضلعات والطرق الأخرى المستخدمة في إيجاد المساحات المتناظرة والمساحات الإجمالية.

إجابات إضافية

49. البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\angle BAD \cong \angle EDA$ (معطيات)
2. $AB \parallel ED$ (الزوايا الداخلية المتبادلة متطابقة.)
3. $ABCE$ عبارة عن شبه منحرف. (تعريف شبه المنحرف)
4. $\triangle AED \cong \triangle BCD$ (معطيات)
5. $\overline{AE} \cong \overline{BC}$ (CPCTC النظرية)
6. $ABCE$ عبارة عن شبه منحرف متساوي الساقين (تعريف شبه المنحرف متساوي الساقين.)

50. البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $PMNO$ شكل شبه منحرف. (معطيات)
2. $PM \parallel ON$ (قواعد شبه المنحرف تكون متوازية)
3. $\angle LPM \cong \angle LON$; $\angle LMP \cong \angle LNO$ (الزوايا المتناظرة متطابقة)
4. $\angle L \cong \angle L$ (خاصية الانعكاس)

57. **جدول** استكمل الجدول التالي. بالعمود الأيمن أربعة أنواع من الأشكال رباعية الأضلاع. في العمود الأيسر اكتب المجموعات الأخرى التي يطابقها الشكل الرباعي الذي بنفس الصف. اكتب "لا يوجد" إن لم يطابق أي فئة أخرى. **انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

الشكل الرباعي	يكون أيضًا ...
مثال: مستطيل	متوازي الأضلاع
المعين	
المربع	
شبه المنحرف متساوي الساقين	
شبه المنحرف	
الطائرة الورقية	

58. **مربع؛ الضلعان متطابقان ومتعامدان**

59. **متوازي الأضلاع؛ الأضلاع المتقابلة متوازية وليس به زوايا قائمة ولا به أضلاع متتالية متطابقة.**

الهندسة الإحداثية حدد ما إذا كان كل شكل عبارة عن شبه منحرف، أو متوازي أضلاع، أو مربع، أو معين، أو الشكل الرباعي. اختر المصطلح الأنسب. اشرح.

58. $L(1, 1), M(0, -5), N(7, 0), P(6, -6)$ 59. $A(2, 7), B(5, 9), C(6, 6), D(3, 4)$

60. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف التناسب في أشكال شبه المنحرف متساوية الساقين.

a. **هندسيًا** قم بإنشاء ثلاثة أشكال شبه منحرف متساوية الساقين. قم بتسمية كل منها $ABCD$. ارسم الأقطار وحدد نقطة التقاطع R. **انظر الهامش.**

b. **جدوليّ** انسخ الجدول التالي. استخدم مسطرة في إكمال الجدول. **انظر الهامش.**

شبه المنحرف	AR	RC	$\frac{RC}{AR}$	AB	DC	$\frac{DC}{AB}$
شبه المنحرف 1						
شبه المنحرف 2						
شبه المنحرف 3						

c. **لفظيًا** قم بالتخمين حول التناسب بين القطرين والتناسب بين القاعدتين من التمامد. **انظر الهامش.**

البرهان اكتب برهانًا حرًا لكل عبارة.

61. منصف ساقي شبه المنحرف متوازي مع القاعدتين. **انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

62. قطرا الطائرة الورقية متعامدان.

المعطيات: $ABCD$ طائرة ورقية.

المطلوب: AC متعامد على BD.

البرهان. ميل $DB = 0$ وميل AC غير معرّف لأنها قطعة مستقيمة رأسية ولذا فإن AC عمودي على BD.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

63. **تبرير** هل شكل الطائرة الورقية يكون مستطيلًا أحيانًا أم دائمًا أم لا يكون على الإطلاق؟ **لا مطلقًا**

64. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم طائرتين ورقيتين غير متطابقتين $LMNP$ و $ABCD$ فيهما $\overline{AB} \cong \overline{LM}$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

65. **تحليل الخطأ** يحاول سلطان وخالد تحديد $m\angle F$ في شبه المنحرف الذي بالصورة. هل أي منهما على صواب؟ اشرح.

سلطان
$m\angle F = 45$

خالد
$m\angle F = 135$

سلطان لتطابق كل زوجين من أزواج زوايا القاعدة.

66. **تحدٍّ** $\triangle AED$ و $\triangle ADB$ و $\triangle DBC$ مثلثات متساوية الأضلاع. أثبت أن $ABCE$ شبه منحرف متساوي الأضلاع. انظر ملحق إجابات الوحدة 13.

67. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبيّن الفرق بين خواص متوازي الأضلاع وخواص شبه المنحرف. **انظر ملحق إجابات الوحدة 13.**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمثيلات المتعددة

في التمرين 60، يستخدم الطلاب رسومًا هندسيةً وجدولاً إضافةً إلى الوصف اللفظي لاستكشاف خواص أشكال الطائرة الورقية.

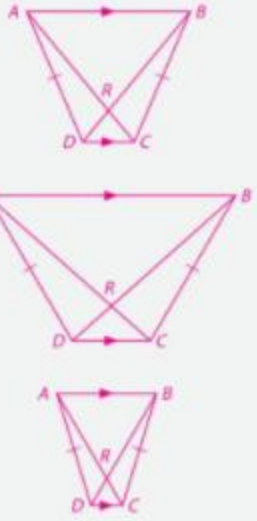
ملاحظات لحل التمرين

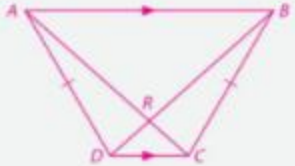
مسطرة التقويم والمنقلة والفرجار

يتطلب التمرين 60 استخدام مسطرة تقويم ومنقلة وفرجار.

إجابات إضافية

60a. الإجابة النموذجية:





60b.

شبه المنحرف	AR	RC	$\frac{RC}{AR}$	AB	DC	$\frac{DC}{AB}$
شبه المنحرف 1	5	2	بساق	10	4	بساق
شبه المنحرف 2	7	3	بساق	14	6	بساق
شبه المنحرف 3	2	1	بساق	4	2	بساق

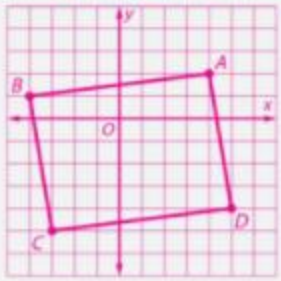
60c. القطع المستقيمة للقطر والقواعد تكون متناسبة.

4 التقويم

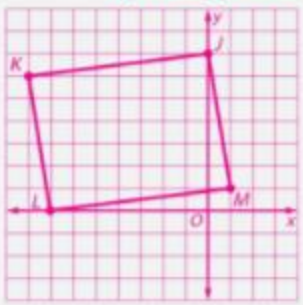
عيّن مصطلح الرياضيات اطلب من الطلاب وصف كل نوع من أنواع الأشكال الرباعية. وينبغي أن يكتبوا فقرة تشرح الفارق بين متوازيات الأضلاع وأشباه المنحرف وأشكال الطائرة الورقية. واطلب منهم كذلك التمييز بين المستطيلات والمعينات والمربعات.

إجابات إضافية

76. لا. $AB = \sqrt{65} = CD$ و $BC = \sqrt{37} = DA$. إذًا، $ABCD$ عبارة عن متوازي أضلاع. $BD = \sqrt{106}$، $AC = \sqrt{98}$. $BD \neq AC$. إذًا الأقطار ليست متطابقة. إذًا $ABCD$ ليس مستطيلاً.



77. لا. ميل $\overline{JK} = \frac{1}{8}$ = ميل $\overline{LM}$ وميل $\overline{KL} = -6$ = ميل $\overline{MJ}$. إذًا، JKLM عبارة عن متوازي أضلاع. ونواتج ميل الجانبين المتتاليين $-1 \neq$، ومن ثم فإن الجانبين المتتاليين غير متعامدين. بناءً عليه، JKLM ليس مستطيلاً.



تدريب على الاختبار المعياري

68. الجبر جميع العناصر الموجودة بعائلة الإفطار لها نفس التكلفة سواء تم طلبها مع غيرها أم لا. تبلغ تكلفة وجبة إفطار مكونة من كعكتان صغيرتان وواحد أومليت AED 4.92. إذا كانت تكلفة طلبين من الأومليت هي AED 3.96. فكم تبلغ تكلفة الكعكة الصغيرة؟ **B**

A AED 0.96
B AED 1.47
C AED 1.98
D AED 2.94

69. الإجابة إذا كان الشكل الرباعي $ABCD$ عبارة عن طائرة ورقية. فما $m\angle C$؟ **76**

70. ما نوع الشكل الذي يمكن أن يقدم مثالاً عكسيًا على العبارة أدناه؟ **J**

إذا كان القطران في متوازي الأضلاع متطابقين، فإن متوازي الأضلاع هذا عبارة عن مستطيل.

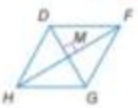
F مربع
G معين
H متوازي أضلاع
J شبه منحرف متساوي الساقين

SAT/ACT 71. في الشكل أدناه، ما قيمة x؟ **B**

A 60
B 120
C 180
D 240
E 300

مراجعة شاملة

الجبر الشكل الرباعي $DFGH$ عبارة عن معيّن أوجد جميع القيم أو القياسات. (الدرس 5-13)



72. إذا كان $m\angle FGH = 118$، فأوجد $m\angle GHM$. **31**

73. إذا كان $DM = 4x - 3$ و $MG = x + 6$، فأوجد DG. **18**

74. إذا كان $DF = 10$، فأوجد FG. **10**

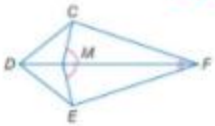
75. إذا كان $HM = 12$ و $HD = 15$، فأوجد MG. **9**

الهندسة الإحداثية مثّل بيانيًا الشكل الرباعي المعطى لك رؤوسه وحدد ما إذا كان الشكل معينًا أم لا. علّل إجابتك باستخدام القانون المذكور. (الدرس 4-13)

76. $A(4, 2)$, $B(-4, 1)$, $C(-3, -5)$, $D(5, -4)$، قانون المسافة **76, 77. انظر الهامش**

77. $J(0, 7)$, $K(-8, 6)$, $L(-7, 0)$, $M(1, 1)$، قانون الميل

78. البرهان اكتب برهانًا من عمودين. **انظر الهامش.**



المعطيات: $\angle CMF \cong \angle EMF$، $\angle CFM \cong \angle EFM$

المطلوب: $\triangle DMC \cong \triangle DME$

مراجعة المهارات

اكتب تعبيرًا لمنحنى كل قطعة مستقيمة باستخدام المعطيات من الإحداثيات والنقطتين الطرفيتين.

79. $(x, 4y)$, $(-x, 4y)$ **0**
80. $(-x, 5x)$, $(0, 6x)$ **1**
81. (y, x), (y, y) **غير معرّف**

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

13 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

خواص متوازي الأضلاع

- الضلعان المتقابلان متطابقان ومتوازيان.
- الزوايا المتقابلة متطابقة.
- الزوايا المتتالية متكاملة.
- إذا احتوى متوازي أضلاع على زاوية واحدة قائمة، فإن به أربع زوايا قائمة.
- القطران ينصفان بعضهما.

خواص المستطيل والمعين والمربع وشبه المنحرف

- يتميز المستطيل بجميع الخواص التي يتميز بها متوازي الأضلاع. القطران متطابقان وينصفان بعضهما. جميع زواياه الأربعة قائمة.
- يتميز المعين بجميع خواص متوازي الأضلاع. جميع أضلاعه متطابقة. القطران متعامدان وينصف كل قطر اثنين من الزوايا المتقابلة.
- لدى المربع جميع خصائص متوازي الأضلاع والمستطيل والمعين.
- في شبه المنحرف متساوي الساقين، تكون زاويتا القاعدة متطابقتين والقطران متطابقين.

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

base	أساس/قاعدة
base angle	زاوية قاعدية
isosceles trapezoid	شبه منحرف متساوي الساقين
kite	الطائرة الورقية
legs	ساقان
midsegment of a trapezoid	منصف ساقي شبه المنحرف
parallelogram	متوازي أضلاع
rectangle	مستطيل
rhombus	معين
square	مربّع
trapezoid	شبه منحرف

مراجعة المفردات

حدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خطأ. إن كانت خاطئة، فاستبدل الكلمة أو العبارة التي تحتها خط لجعل الجملة صحيحة.

1. لا يوجد بشبه المنحرف متساوي الساقين زوايا متطابقة. **خطأ، كل زوجين من زوايا القاعدة**
2. إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلاً، فإن قطريه متطابقان. **صحيحة**
3. منصف ساقي شبه المنحرف هو عبارة عن قطعة مستقيمة تربط بين أي رأسين غير متتاليين. **خطأ، القطر**
4. قاعدة شبه المنحرف هي أحد الأضلاع المتوازية. **صحيحة**
5. قطرا المعين متعامدان. **صحيحة**
6. المستطيل ليس دائمًا متوازي أضلاع. **خطأ، دائمًا**
7. الشكل الرباعي الذي يوجد به ضلعان متوازيان يكون متوازي أضلاع. **خطأ، شبه منحرف**
8. المستطيل الذي يستوفي شروط المعين يكون مربعًا. **صحيحة**
9. ساق شبه المنحرف هي أحد الضلعين المتوازيين. **خاطئة، غير المتوازيين**

حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المطويات منظّم الدراسة

المطويات® دينا زايك

اطلب من الطلاب إلقاء نظرة على الوحدة للتأكد من أنهم قد أضافوا بعض الأمثلة إلى كل علامة تبويب في مطوياتهم. واقترح عليهم إبقاء مطوياتهم بجانبهم أثناء إكمال صفحات دليل الدراسة والمراجعة، مشيرًا إلى أن المطويات تعدّ بمثابة أداة مراجعة سريعة من أجل المذاكرة لاختبار الوحدة.

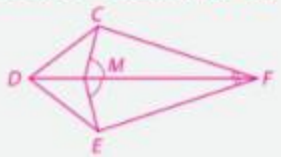
التقويم التكويني

المفردات الأساسية تشير الصفحات المرجعية المذكورة بعد كل كلمة إلى الموضع الذي ورد فيه ذلك المصطلح لأول مرة. فإذا واجه الطلاب صعوبة في الإجابة عن الأسئلة 9-1، فذكّرهم باستخدام هذه الصفحات المرجعية لإنعاش ذاكراتهم بشأن مصطلحات المفردات.

الإجابات الإضافية (صفحة 848)

75. المعطيات: $\angle CMF \cong \angle EMF$، $\angle CFM \cong \angle EFM$

المطلوب: $\triangle DMC \cong \triangle DME$



البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\angle CMF \cong \angle EMF$، $\angle CFM \cong \angle EFM$ (معطيات)
2. $\overline{MF} \cong \overline{MF}$، $\overline{DM} \cong \overline{DM}$ (خاصية الانعكاس)
3. $\triangle CMF \cong \triangle EMF$ (زاويتين وضلع محصور ASA)
4. $\overline{CM} \cong \overline{EM}$ (النظرية CPCTC)
5. $\angle DMC$ و$\angle CMF$ متكاملتان، و$\angle DME$ و$\angle EMF$ متكاملتان. (نظرية المتكاملات)
6. $\angle DMC \cong \angle DME$ (∡s المتكاملة مع ≅ ∡s تكون ≅.)
7. $\triangle DMC \cong \triangle DME$ (مسلّمة SAS)

مراجعة درس بدرس

التدخل التقويمي إذا كانت الأمثلة المقدمة غير كافية لعرض الموضوعات التي تتناولها الأسئلة، فذكّر الطلاب بأن مراجع الدروس ترشدهم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

إجابات إضافية

14. $x = 5,\ y = 12$

15. $x = 37,\ y = 6$

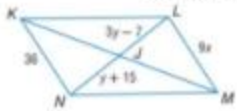
16. الإجابة النموذجية: إذا كان كلا زوجي الأضلاع المتقابلة بنفس الطول أو إذا أحد زوجي الأضلاع المتقابلة متطابقين ومتوازيين في الوقت نفسه، فإن هذه الأشكال متوازيات أضلاع. ويمكن أن تكون الأشكال متوازيات أضلاع إذا كان كلا زوجي الأضلاع المتقابلة متطابقين أو إذا كانت الأقطار ينصف بعضها البعض.

مراجعة درس بدرس

13-1 متوازيات الأضلاع

مثال 1

الجبر إذا كان $KLMN$ عبارة عن متوازي أضلاع، فأوجد قيمة المتغير المشار إليه.



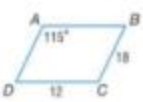
a. x

$\overline{KN} \cong \overline{LM}$	الضلعان المتقابلان في $\square$ يكونان $\cong$.
$KN = LM$	تعريف التطابق
$36 = 9x$	بالتعويض
$4 = x$	اقسم.

b. y

$\overline{NJ} \cong \overline{JL}$	قطرا $\square$ ينصفان بعضهما.
$NJ = JL$	تعريف التطابق
$y + 15 = 3y - 7$	بالتعويض
$-2y = -22$	اطرح.
$y = 11$	اقسم.

استخدم $\square ABCD$ لإيجاد جميع القياسات.



10. $m\angle ADC$ 65°
11. AD 18
12. AB 12
13. $m\angle BCD$ 115°

الجبر أوجد قيمة كل متغير في كل متوازي أضلاع. 14, 15. **انظر الهامش.**

14.

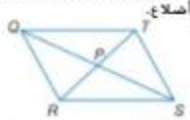
15.

16. **تصميم** ما نوع المعلومات اللازمة لتحديد ما إذا كانت الأشكال التي تكوّن نافذة الزجاج الملون متوازيات أضلاع؟ **انظر الهامش.**

13-2 اختبارات متوازيات الأضلاع

مثال 2

إذا كان $QP = 2y - 6$، $TP = 4x + 2$، $PS = 5y - 12$، و $PR = 6x - 4$. فأوجد قيمة x و y بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.



أوجد قيمة x حيث $\overline{QP} \cong \overline{PS}$، و y حيث $\overline{TP} \cong \overline{PR}$

$TP = PR$	تعريف $\cong$
$4x + 2 = 6x - 4$	بالتعويض
$-2x = -6$	اطرح.
$x = 3$	اقسم.
$QP = PS$	تعريف التطابق $\cong$
$2y - 6 = 5y - 12$	بالتعويض
$-3y = -6$	اطرح.
$y = 2$	اقسم.

حدد ما إذا كان كل شكل رباعي متوازي أضلاع أم لا. علّل إجابتك. 17, 18. **انظر الهامش.**

17.

18.

19. **البرهان** اكتب برهانًا من عمودين. **انظر الهامش.**

المعطيات: $\overline{AE} \cong \overline{CF}$، $\square ABCD$

المطلوب: الشكل الرباعي $EBFD$ هو متوازي أضلاع.

الجبر أوجد قيمة x و y بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع. 20, 21. **انظر الهامش.**

20.

21.

حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابات إضافية

17. نعم. النظرية 6.11
18. نعم النظرية 6.12
19. **المعطيات:** $\square ABCD$, $\overline{AE} \cong \overline{CF}$

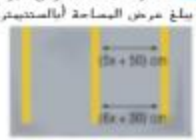
المطلوب: رباعي الأضلاع $EBFD$ هو متوازي أضلاع.

1. $ABCD$ هو متوازي أضلاع، $\overline{AE} \cong \overline{CF}$ (معطيات)
2. $AE = CF$ (تعريف $\cong$ القطع المستقيمة)
3. $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ (أضلاع $\square$ المتقابلة$\cong$)
4. $AD = BC$ (تعريف $\cong$ القطع المستقيمة.)
5. $BC = BF + CF$, $AD = AE + ED$ (مسلّمة جمع القطع المستقيمة.)
6. $BF + CF = AE + ED$ (التعويض.)
7. $BF + AE = AE + ED$ (التعويض.)
8. $BF = ED$ (خاصية التعويض.)
9. $\overline{BF} \cong \overline{ED}$ (تعريف $\cong$ القطع المستقيمة)
10. $\overline{BF} \parallel \overline{ED}$ (تعريف $\square$)
11. الشكل الرباعي $EBFD$ متوازي أضلاع. (إذا كان زوج واحد من الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي متوازيين ومتطابقين، فإن الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع.)

20. $x = 4$, $y = 8$
21. $x = 5$, $y = 12$

13-3 المستطيلات

22. **ركن السيارات** خطوط مساحة الركن الموضحة أدناه متوازية. كم يبلغ عرض المساحة (بالسنتيمتر)؟ **150 cm**



الجبر الشكل الرباعي $EFGH$ مستطيل.

23. إذا كان $m\angle FEG = 57$. فأوجد $m\angle GEH$. **33**
24. إذا كان $m\angle HGE = 13$. فأوجد $m\angle EGF$. **77**
25. إذا كان $FK = 32$ متراً. فأوجد EG. **64**
26. أوجد $m\angle HEF + m\angle EFG$. **180**
27. إذا كان $EF = 4x - 6$ و $HG = x + 3$. فأوجد EF. **6**

مثال 3

الجبر الشكل الرباعي $ABCD$ عبارة عن مستطيل. إذا كان $m\angle ADB = 4x + 8$ و $m\angle DBA = 6x + 12$. فأوجد قيمة x.

$ABCD$ مستطيل، إذا $m\angle ABC = 90$. بما أن كل ضلعين متقابلين متوازيان في المستطيل، والزوايا المتبادلة الداخلية للمستقيمات المتوازية متطابقة، فإن $\angle ADB \cong \angle DBC$، و $m\angle DBC = m\angle ADB$.

جمع الزوايا	$m\angle DBC + m\angle DBA = 90$
بالتعويض	$m\angle ADB + m\angle DBA = 90$
بالتعويض	$4x + 8 + 6x + 12 = 90$
اجمع.	$10x + 20 = 90$
اطرح.	$10x = 70$
اقسم.	$x = 7$

13-4 المعينات والمربعات

الجبر $ABCD$ معين. إذا كان $EB = 9$ و $AB = 12$، و $m\angle ABD = 55$. فأوجد جميع القياسات.

28. AE **7.9**
29. $m\angle BDA$ **55**
30. CE **7.9**
31. $m\angle ACB$ **53**

32. **الشعارات** شركة سيارات تستخدم الرمز الموضح على اليسار في شعارها. إذا كانت المساحة الداخلية للشعار عبارة عن معين، فما طول FJ؟ **2.5 cm**

33. **مستطيل، معين، مربع؛ جميع الأضلاع متطابقة** $\cong$، **الأضلاع المتتالية متعامدة** $\perp$.

الهندسة الإحداثية بالنظر إلى كل مجموعة من الرؤوس، حدد إذا ما كان $\square QRST$ عبارة عن معين أم مستطيل أم مربع. اذكر كل ما ينطبق. اشرح.

34. **المعين؛ جميع الأضلاع متطابقة** $\cong$، **والأقطار متعامدة** $\perp$.

33. $Q(12, 0)$, $R(6, -6)$, $S(0, 0)$, $T(6, 6)$
34. $Q(-2, 4)$, $R(5, 6)$, $S(12, 4)$, $T(5, 2)$

حقوق النشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

851

دليل استباقي

اجعل الطلاب يكملوا الدليل الاستباقي في الوحدة 13 ويناقشوا كيف تغيرت إجاباتهم الآن بعد أن أتموا الوحدة 13.

إجابات إضافية

37a. الإجابة النموذجية: ساقا شبه المنحرف جزء من أقطار مربع. تنصف أقطار المربع الزاوية المقابلة. إذًا يساوي قياس كل زاوية قاعدة في شبه المنحرف °45. أحد زوجي الأضلاع متوازيان ومتطابقان وزوايا القاعدة متطابقة.

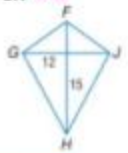
37b. $40 + 20\sqrt{2} \approx 68.28$ cm.

13 دليل الدراسة والمراجعة عبم

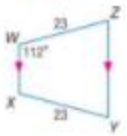
13-5 شبه المنحرف والطائرة الورقية

أوجد قياس كل مما يلي.

35. GH **19.2**



36. $m\angle Z$ **68**



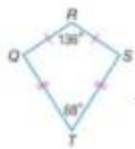
37. **التصميم** تصميم صمم سعيد عنوانًا مربعًا كمشروع فني.

a. صف طريقة لتحديد ما إذا كانت أشباه المنحرف الموجودة في التصميم متساوية الساقين. **انظر الهامش.**

b. إذا كان محيط بلاطة هو 120 سنتيمترًا ومحيط المربع الأحمر يبلغ 40 سنتيمترًا فما محيط شكل واحد من أشباه المنحرف؟ **انظر الهامش.**

مثال 5

إذا كان $QRST$ عبارة عن شكل طائرة ورقية، فأوجد قياس $\angle RST$.



بما أن $m\angle Q = m\angle S$، $\angle Q \cong \angle S$.
اكتب معادلة وأوجد حلها لمعرفة $m\angle S$.

نظرية مجموع زوايا المضلع الداخلية	$m\angle Q + m\angle R + m\angle S + m\angle T = 360$
بالتعويض	$m\angle Q + 136 + m\angle S + 68 = 360$
بشط.	$2m\angle S + 204 = 360$
اطرح.	$2m\angle S = 156$
اقسم.	$m\angle S = 78$

حقوق النشر والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابات إضافية (تمرين على الاختبار)

1a. الإجابة النموذجية: ينبغي أن تقيس الزوايا عند الرؤوس لترى إن كانت 90 أو يمكنها التحقق إن كانت الأقطار متطابقة ومتعامدة.

11. الإجابة النموذجية: نعم. إذا كان مستطيلاً، فستكون الأقطار متطابقة.

التقويم الختامي

استخدم اختبارات الوحدات ذات المستويات المختلفة لمفاضلة التقويمات من أجل طلابك.

إجابات إضافية

18. نعم. الزوايا المتقابلة متطابقة.

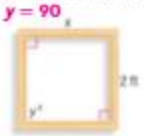
19. لا. الزوايا المتقابلة ليست متطابقة.

13 تدريب على الاختبار

1. **الفن** تصنع مبير إطارًا لبد قطعة قماش على لوحة. قامت بتثبيت أربع قطع خشبية باستخدام المسامير في أماكن تمتد أنها تمثل أربعة رؤوس للمربع.

a. كيف يمكن لها أن تتأكد من أن قطعة القماش ستكون مربعة؟ **انظر الهامش**

b. إذا كانت لقطعة القماش الأبعاد الموضحة أدناه، فما القياسات المجهولة؟ $x = 0.6$ متر، $y = 90$



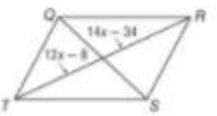
الشكل الرباعي $ABCD$ هو عبارة عن شبه منحرف متساوي الساقين.

2. ما الزاوية المتطابقة مع $\angle C$؟ $\angle D$

3. ما الضلع الموازي للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$؟ $\overline{DC}$

4. ما القطعة المستقيمة المتطابقة مع $\overline{AC}$؟ $\overline{BD}$

5. **الاختبار من متعدد** إذا كان $QRST$ عبارة عن متوازي أضلاع، فما قيمة x؟ C

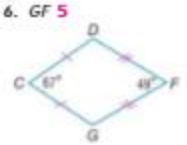


A 11 C 13

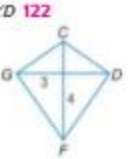
B 12 D 14

إذا كان $CDFG$ عبارة عن شكل طائرة ورقية، فأوجد جميع القياسات.

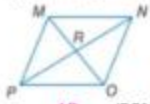
6. GF 5



7. $m\angle D$ 122



الجبر الشكل الرباعي $MNOP$ عبارة عن معيّن أوجد جميع القيم أو القياسات.



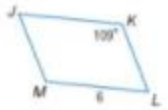
8. $m\angle MRN$ 90

9. إذا كان $PR = 12$، فأوجد RN. 12

10. إذا كان $m\angle PON = 124$، فأوجد $m\angle POM$. 62

11. **الإنشاء** تبني عائلة إبراهيم جزءًا ملصقًا ببيتزلهم. قامت زوجة إبراهيم بعمل فتحة لنافذة جيدة. فإذا قامت بالقياس لتعرف مدى تطابق الأضلاع المتقابلة ومدى تطابق القطرين، فهل يمكنها أن تتأكد من أن فتحة النافذة على شكل مستطيل؟ اشرح. **انظر الهامش.**

استخدم $JKLM$ ◻ لإيجاد جميع القياسات.



12. $m\angle JML$ 109

13. JK 6

14. $m\angle KLM$ 71

الجبر الشكل الرباعي $DEFG$ مستطيل.

15. إذا كان $DF = 2(x + 5) - 7$ ، $EG = 3(x - 2)$، فأوجد GE. 21

16. إذا كان $m\angle EDF = 5x - 3$ ، $m\angle DFG = 3x + 7$، فأوجد $m\angle EDF$. 22

17. إذا كان $DE = 14 + 2x$ ، $GF = 4(x - 3) + 6$، فأوجد FG. 34

حدد إذا ما كان كل الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع أم لا. علّل إجابتك. 18, 19. **انظر الهامش.**

18.

19.

حقوق الطبع والتأليف © McGraw-Hill Education مسموح لصانع مؤسسة

1 التركيز

الهدف تعلم كيفية تطبيق التعريفات الهندسية والخواص في حل المسائل.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطرح الأسئلة التالية:

- كيف يساعد استخدام التعريفات الهندسية والخواص في حل المسائل؟ الإجابة النموذجية: يمكن استخدام التعريفات الهندسية والخواص لحل المسائل بإيجاد القيم المجهولة.
- كيف يمكن تحديد التعريفات والخواص التي ينبغي استخدامها في السؤال؟ الإجابة النموذجية: يمكنك البحث عن الكلمات الدليلية مثل "مجموع" أو "الصورة الأصلية" أو "قياس الزاوية" أو "رباعي الأضلاع" لتحديد إن كان التعريف أو الخاصية يمكن استخدامها لتساعدك في حل المسألة.
- ما المعطيات الأخرى التي ينبغي جمعها عندما تبدأ حل المسألة؟ الإجابة النموذجية: عند حل المسألة، ينبغي كتابة أي قيم أو قياسات زوايا أو معادلات مقدمة في المسألة.

تطبيق التعريفات والخواص

تتطلب كثير من مسائل الهندسة على الاختبارات القياسية تطبيق التعريفات والخواص في حلها. استخدم هذا القسم في ممارسة تطبيق التعريفات ليساعدك ذلك في حل فقرات الاختبار ذات الإجابات الموسعة.

إستراتيجيات تطبيق التعريف والخواص

الخطوة 1

اقرأ المسألة بعناية.

- حدد ما الذي تطلب منك إيجاده.
- ادرس أية أشكال معطاة في المسألة.
- **اسأل نفسك:** ما المبادئ أو الخواص التي لهذا الشكل ويمكنني تطبيقها في حل المسألة؟

الخطوة 2

حل المسألة.

- حدد التعريفات أو المفاهيم الهندسية التي يمكنك استخدامها في إيجاد المجاهيل في المسألة.
- استخدم التعريفات وخواص الأشكال في إنشاء معادلة وقم بحلها.

الخطوة 3

- تحقق من إجابتك.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. وحدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها. واكتب الحلّ هنا.

تقوم مجموعة فنون مسرحية ببناء مسرح يحيط به الجمهور من كل الجوانب لتقديمعليه أعمالها القادمة. سيكون المسرح على شكل ثماني أضلاع منتظم محيطه 28 مترًا.

a. ما الطول المتر من لكل لوح لتكوين أضلاع المسرح؟

b. ما الزاوية التي من المتر من قطع طرف كل لوح بها حتى يتم تركيبها معًا على النحو المناسب لتكوين المسرح؟ اشرح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اقرأ المسألة بعناية. علمت أن الألواح تكوّن ثماني أضلاع محيطه 28 مترًا. مطلوب منك إيجاد طول كل لوح والزاوية التي تقطع بها ليتم تركيبها معًا على النحو الصحيح.

لإيجاد طول كل لوح، اقسم المحيط على عدد الأضلاع.

$$28 \div 8 = 3.5$$

إذًا من المفترض أن يكون طول كل لوح 3.5 أمتار أو 3 أمتار و 50 سنتيمترًا.

استخدم خاصية مجموع الزوايا الداخلية لمضلع محدب لإيجاد قياس الزاوية الداخلية للشكل الثماني المنتظم. أولاً أوجد مجموع الزوايا الداخلية S.

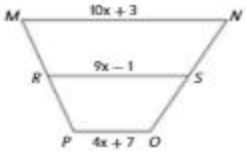
$$S = (n - 2) \cdot 180$$
$$= (8 - 2) \cdot 180$$
$$= 1080$$

إذًا قياس زاوية الشكل الثماني المنتظم الداخلية هو $1080 \div 8$، أو 135°. ولأنه يتم استخدام لوحين لتكوين كل رأس من رؤوس المسرح، فإنه يجب قطع نهاية كل لوح بزاوية قدرها $135 \div 2$، أو 67.5°.

التمارين

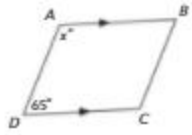
اقرأ كل مسألة. وحدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها. واكتب الحلّ هنا.

1. $\overline{RS}$ منصف ساقين يشبه المنحرف MNOP. ما طول $\overline{RS}$؟ **D**



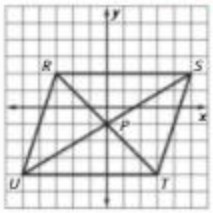
A. 14 وحدة
B. 19 وحدة
C. 23 وحدة
D. 26 وحدة

2. إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$، فأوجد قيمة x. **J**



F 32.5
G 65
H 105
J 115

3. استخدم التمثيل البياني الموضح أدناه لتجيب عن الأسئلة. **a, b. انظر الهامش.**



a. هل يتعامد قطرا الشكل الرباعي $RSTU$؟ استخدم قانون المسافة للتحقق من إجابتك.

b. ما نوع الشكل الرباعي $RSTU$؟ اشرح باستخدام خواص و/أو تعريفات هذا النوع من الأشكال الرباعية.

4. ما مجموع قياسات الزوايا الداخلية لشكل ثماني أضلاع منتظم؟ **C**

A 45
B 135
C 360
D 1080

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مكجروهيل للتعليم McGraw-Hill Education

مثال إضافي

تدريب على الاختبار المعياري

صممت منصّة قفز على شكل سداسي أضلاع منتظم. وكان محيط المنصة 10.8 قدمًا.

a. ما طول كل ضلع من أضلاع المنصة؟ 1.75 متر

b. ما قياس الزاوية التي تكوّنت في كل ركن من أركان المنصة؟ 120

3 التقويم

استخدم التمارين من 1 إلى 4 لتقويم استيعاب الطلاب.

إجابات إضافية

3a. الإجابة النموذجية: نعم. لأن $PS = \sqrt{34}$ و $UP = \sqrt{34}$، $PT = 3\sqrt{2}$ و $RP = 3\sqrt{2}$. تنصف الأقطار بعضها البعض.

3b. الإجابة النموذجية: متوازي أضلاع؛ إذا كان القطران في الشكل الرباعي ينصفان بعضهما، فإن الشكل عبارة عن متوازي أضلاع.

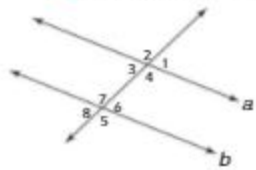
13 تدريب على الاختبار المعياري

تراكمي: الوحدات من 1 إلى 13

الاختيار من متعدّد

اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. إذا كان $a \parallel b$، فأي مما يلي ليس صحيحًا؟ D

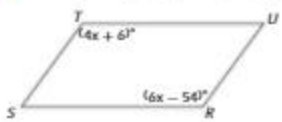


A $\angle 1 \cong \angle 3$
C $\angle 2 \cong \angle 5$
B $\angle 4 \cong \angle 7$
D $\angle 8 \cong \angle 2$

2. صنّف المثلث الموجود أدناه حسب قياسات زواياه. اختر المصطلح الأنسب. G

F حاد الزاوية
G متساوي الزوايا
H منفرج الزاوية
J قائم الزاوية

3. قم بالحل لإيجاد قيمة x في متوازي الأضلاع $RSTU$. D



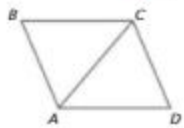
A 12
C 25
B 18
D 30

نصيحة عند حل الاختبار
السؤال 3 استخدم خواص متوازيات الأضلاع في حل المسألة. الزوايا المتعاقبة متطابقة.

4. أعلى نقطة في كارولينا الشمالية هي جبل ميتشيل الذي يبلغ ارتفاعه 611 مترًا فوق مستوى سطح البحر. افترض أن موضع المتسلق يتحدد من العلاقة $p(t) = -2.5t + 611$، حيث t هي عدد الدقائق. أي مما يلي الأنسب في تفسير ميل الدالة؟ H

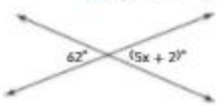
F الموضع المبدئي للمتسلق كان تحت مستوى سطح البحر بمقدار 611 مترًا.
G الموضع المبدئي للمتسلق كان فوق مستوى سطح البحر بمقدار 611 مترًا.
H يهبط المتسلق بمعدل 2.5 متر في الدقيقة.
J يصعد المتسلق بمعدل 2.5 متر في الدقيقة.

5. الشكل الرباعي $ABCD$ معين. إذا كان $m\angle BCD = 120$، فأوجد $m\angle DAC$. B



A 30
C 90
B 60
D 120

6. ما قيمة x في الشكل التالي؟ G



F 10
H 14
G 12
J 15

7. أيّ من العبارات التالية صحيح؟ C

A جميع المستطيلات مربعات.
B جميع المعينات مربعات.
A جميع المستطيلات متوازيات أضلاع.
D جميع متوازيات الأضلاع مستطيلات.

حقوق النشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

856 | الوحدة 13 | تدريب على الاختبار المعياري

خيارات الواجب المنزلي

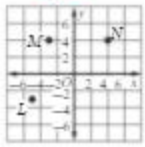
الاستعداد للوحدة 14 عيّن للطلاب تمارين في الصفحة 859 كواجب منزلي لتقويم مستواهم لمعرفة هل حققوا المهارات المطلوبة للوحدة التالية أم لا.

الإجابة التحسيرة/الإجابة الشبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو في ورقة أخرى.

8. الإجابة الشبكية المسافة اللازمة للسيارة حتى تتوقف تتناسب طرديًا مع مربع سرعتها. إذا كانت السيارة يمكن أن تتوقف خلال 242 مترًا بسرعة 22 كيلومترًا في الساعة، فكم عدد الأمتار اللازمة حتى تتوقف وهي بسرعة 30 كيلومترًا في الساعة؟ **450**

9. ما إحداثيات النقطة O ، الرأس الرابع في شبه منحرف متساوي الساقين؟ اكتب الحل هنا. **(6, −3)**



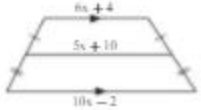
10. ماذا تعرف عن متوازي الأضلاع إذا كان قطراه متعامدين؟ اشرح.

الإجابة النموذجية:
متوازي الأضلاع مربع أو معين.

11. أحرزت رنا 84 هدفًا ميدانيًا خلال موسم كرة السلة بإجمالي 183 نقطة. كل هدف ميداني يعادل نقطتين أو ثلاث نقاط. كم عدد الأهداف الميدانية التي تعادل نقطتين وعدد الأهداف الميدانية التي تعادل ثلاث نقاط التي أحرزتها رنا خلال الموسم؟

15 هدف ميداني من التي تعادل ثلاث نقاط و 69 هدفًا ميدانيًا من التي تعادل نقطتين

12. الإجابة الشبكية أوجد الحل لمعرفة قيمة x في الشكل التالي. قرب إلى أقرب جزء من عشرة إن لزم الأمر. **3**



13. الإجابة الشبكية يدفع أحمد أندية جميع الدرعات مبلغ AED 180 نظير استثمار كشك لبيع الوجبات السريعة في إحدى مباريات كرة القدم. يقومون بشراء علب الصودا مقابل AED 0.25 ويبيعونها في المباراة بمبلغ AED 1.15. كم عدد العلب التي يجب بيعها حتى يصلوا إلى نقطة التعادل أي نقطة تكلفة ما أنفقوه دون تحقيق أي أرباح؟ **200**

الإجابة المبوسعة

دوّن إجاباتك على ورقة. واكتب الحل هنا.

14. حدد مدى إمكانية إثبات أن كل شكل مما يلي هو متوازي أضلاع. إن تعذر الإثبات، فاذكر المعلومات الأخرى المطلوبة لإثبات ذلك. اشرح استنتاجك.

a–c. انظر الهامش.

a.

b.

c.

حقوق الطبع والتأليف © بمحفوظ لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابات إضافية

14a. نعم، تكون الأضلاع المتقابلة متطابقة مما يدل على أن الشكل عبارة عن متوازي أضلاع.

14b. لا ، يوجد زوج واحد من الأضلاع المتقابلة متوازيًا. ستحتاج إلى أن توضح أنه إما 1) أن الأضلاع المتوازية متطابقة أيضًا، أو 2) أن الزوج الآخر من الأضلاع المتقابلة متوازٍ.

14c. نعم، تكون الزوايا المتقابلة متطابقة مما يدل على أن الشكل عبارة عن متوازي أضلاع.

الصفحات 810–807، الدرس 1-13

7. البرهان:
العبارات (المبررات)
1. $\square ABCD$ (معطى)
2. $AB \parallel CD;\ AC \parallel BD$ (تعريف متوازي الأضلاع)
3. $\angle A$ زاوية قائمة. (معطى)
4. $m\angle A + m\angle C = 180$ (الزوايا الداخلية المتتالية تكون متكاملة)
5. $m\angle C = 90$ (حساب قيمة $m\angle C$)
6. $m\angle A + m\angle B = 180$ (الزوايا الداخلية المتتالية تكون متكاملة)
7. $m\angle B = 90$ (حساب قيمة $m\angle B$)
8. $m\angle B + m\angle D = 180$ (الزوايا الداخلية المتتالية تكون متكاملة)
9. $m\angle D = 90$ (حساب قيمة $m\angle D$)
10. $\angle C$ و $\angle B$ و $\angle D$ عبارة عن زوايا قائمة $(m\angle C = 90,\ m\angle B = 90,\ m\angle D = 90)$

8. البرهان: لدينا معطيات بأن الشكل $XYZW$ عبارة عن متوازي أضلاع. وبما أن الأضلاع المتقابلة لمتوازيات الأضلاع تكون متطابقة، نجد أن $\overline{XW} \cong \overline{YZ}$. لدينا معطيات كذلك بأن الشكل $YRSZ$ عبارة عن متوازي أضلاع. ومن ثم فإن $\overline{YZ} \cong \overline{RS}$. حسب تعريف خاصية التعدي، يصبح لدينا $\overline{XW} \cong \overline{RS}$.

23. البرهان:
العبارات (المبررات)
1. $ABCD$ شكل متوازي أضلاع (معطى)
2. $\angle BAD \cong \angle BCD$ (الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.)
3. $ABDE$ شكل متوازي أضلاع (معطى)
4. $AB \parallel ED$ (تعريف متوازي الأضلاع)
5. $\angle BAD \cong \angle ADE$ (الزوايا الداخلية المتبادلة تكون متطابقة)
6. $\angle BCD \cong \angle ADE$ (خاصية التعدي)
7. $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع تكون متطابقة)
8. $\overline{AB} \cong \overline{ED}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع تكون متطابقة)
9. $\overline{DC} \cong \overline{ED}$ (خاصية التعدي)
10. $\angle AED \cong \angle ABD$ (الزوايا المتقابلة لمتوازي الأضلاع تكون متطابقة)
11. $\angle ABD \cong \angle$BDC (الزوايا الداخلية المتبادلة تكون متطابقة)
12. $\triangle ADE \cong \triangle BCD$ (مسلّمة ASA)

24. البرهان:
العبارات (المبررات)
1. $\triangle LMN$ مثلث متساوي الساقين (معطى)
2. $\angle LMN \cong \angle LNM$ (نظرية المثلث متساوي الساقين)
3. $\angle LNM$ تكون متكاملة مع $\angle LNM$ ($\angle LNP$ و $\angle LNP$ تشكّل زاوية مستقيمة)
4. $\angle LMN$ تكون متكاملة مع $\angle LNP$ (الزوايا المتطابقة تكون متكاملة للزاوية نفسها)
5. KLNP شكل متوازي أضلاع (معطى)
6. $\angle LNP$ تكون متكاملة مع $\angle KPN$ (الزوايا المتتالية في متوازي الأضلاع تكون متكاملة)
7. $\angle KPN$ تكون متكاملة مع $\angle LMN$. (خاصية التعدي.)

25. البرهان:
العبارات (المبررات)
1. $\square GKLM$ (معطى)
2. $\overline{GK} \parallel \overline{ML},\ \overline{GM} \parallel \overline{KL}$ (أضلاع $\square$ المتقابلة تكون متوازية $\parallel$.)
3. $\angle G$ و $\angle K$ متكاملتان، $\angle K$ و $\angle L$ متكاملتان $\angle L$ و $\angle M$ متكاملتان و $\angle M$ و $\angle G$ متكاملتان. (الزوايا الداخلية المتتالية في $\square$ متكاملة.)

26. البرهان:
العبارات (المبررات)
1. $\square WXYZ$ (معطى)
2. $\overline{WX} \cong \overline{ZY},\ \overline{WZ} \cong \overline{XY}$ (أضلاع $\square$ المتقابلة تكون $\cong$.)
3. $\angle ZWX \cong \angle XYZ$ (أضلاع $\square$ في $\triangle$ المتقابلة تكون $\cong$.)
4. $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$ (مسلمة تساوي ضلعين وزاوية)

27. البرهان:
العبارات (المبررات)
1. $\square PQRS$ (معطى)
2. ارسم قطعة مستقيمة مساعدة $\overline{PR}$ وسم الزوايا 1 و 2 و 3 و 4 كما هو موضح. (قطر $PQRS$)
3. $\overline{PQ} \parallel \overline{SR},\ \overline{PS} \parallel \overline{QR}$ (أضلاع $\square$ المتقابلة تكون متوازية $\parallel$.)
4. $\angle 2 \cong \angle 1$ و$\angle 4 \cong \angle 3$ (نظرية $\triangle$ الداخلية المتبادلة.)
5. $\overline{PR} \cong \overline{RP}$ (خاصية الانعكاس)
6. $\triangle QPR \cong \triangle SRP$ (مسلمة زاويتين وضلع محصور)
7. $\overline{PQ} \cong \overline{RS},\ \overline{QR} \cong \overline{SP}$ (تطابق الأجزاء المتقابلة في المثلثات المتطابقة)

28. البرهان: تذكر المعطيات أن $ACDE$ is a متوازي أضلاع.
حيث إن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، فإن $\overline{EA} \cong \overline{DC}$. حسب تعريف متوازي الأضلاع، فإن $\overline{EA} \parallel \overline{DC}$. $\angle DCB \cong \angle AEB$ و $\angle EAB \cong \angle$CDB حيث إن الزوايا الداخلية المتبادلة متطابقة.
$\triangle EBA \cong \triangle CBD$ حسب مسلّمة زاويتين وضلع محصور.
$\overline{EB} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AB} \cong \overline{BD}$ حسب تطابق الأجزاء المتقابلة في المثلثات المتطابقة. وحسب تعريف القطعة المستقيمة المنصفة، $\overline{EC}$ ينصف $\overline{AD}$ و $\overline{AD}$ ينصف $\overline{EC}$.

37. البرهان:
العبارات (المبررات)
1. $\square EFGH$ (معطى)
2. $\overline{EH} \cong \overline{GF}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع تكون متطابقة.)
3. $\overline{EF} \cong \overline{HG}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع تكون متطابقة.)
4. $\overline{HJ}$ ينصف $\overline{EF}$ و$\overline{EK}$ ينصف $\overline{HG}$. (معطى)
5. $\overline{EJ} \cong \overline{GK}$ ($\overline{HJ}$ ينصف $\overline{EF}$ و $\overline{EK}$ ينصف $\overline{HG}$ و $\overline{EF} \cong \overline{HG}$)
6. $\angle$JEH $\cong \angle KGF$ (الزوايا المتقابلة لمتوازي الأضلاع تكون متطابقة.)
7. $\triangle EJH \cong \triangle GKF$ (مسلّمة SAS)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

صفحة 814، الدرس 13-2 (تمرين موجّه)

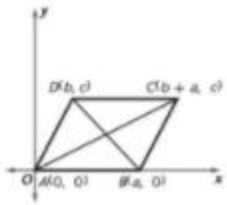
2.

حيث إن $AD = BC$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. وتذكر المعطيات أن أضلاع ورقة لوحة الإعلانات متوازية. فإن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. ومن ثم، حسب النظرية 12.6، فإن رباعي الأضلاع $ABCD$ عبارة عن متوازي أضلاع. وبما أنه حسب التعريف أن الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع تكون متوازية، نعلم أن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.

الصفحات 818-821، الدرس 13-2

8. **المعطيات:** $ABCD$ متوازي أضلاع.

المطلوب: $\overline{AC}$ و $\overline{DB}$ ينصف كل منهما الآخر.



البرهان:

نقطة منتصف $\overline{AC}$

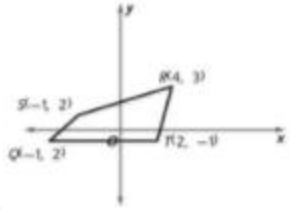
$$= \left(\frac{0 + (a + b)}{2}, \frac{0 + c}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{a + b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

نقطة منتصف $\overline{DB}$

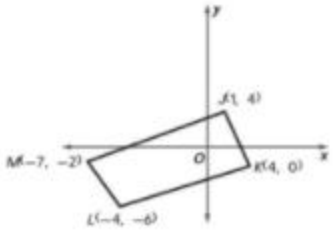
$$= \left(\frac{(a + b)}{2}, \frac{0 + c}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{a + b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

$\overline{AC}$ و $\overline{DB}$ ينصف كل منهما الآخر.

15. لا. ليس متوازي أضلاع. ميل SR يساوي $\frac{1}{5}$ وميل QT يساوي 1. ومن ثم هذه الأضلاع المتقابلة ليست متوازية.



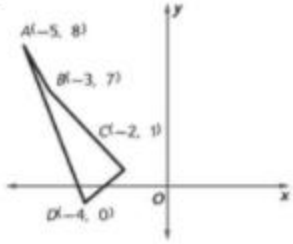
16. نعم. متوازي أضلاع. ميل JK يساوي $\frac{4}{3}$ وميل ML يساوي $-\frac{4}{3}$ ومن ثم هذه الأضلاع المتقابلة متوازية. ميل JM يساوي $\frac{3}{4}$ وميل LK يساوي $\frac{3}{4}$ ومن ثم، فإن هذه الأضلاع المتقابلة تكون متوازية.



17. لا، هذا ليس متوازي أضلاع.

$$\overline{AB} = \sqrt{(-5 - 3)^2 + (8 - 7)^2} = \sqrt{65},$$
$$\overline{CB} = \sqrt{(-2 - 3)^2 + (1 - 7)^2} = \sqrt{61},$$
$$\overline{BD} = \sqrt{(-3 - 4)^2 + (7 - 0)^2} = \sqrt{50},$$
$$\overline{DA} = \sqrt{(-4 - 5)^2 + (0 - 8)^2} = \sqrt{65}$$

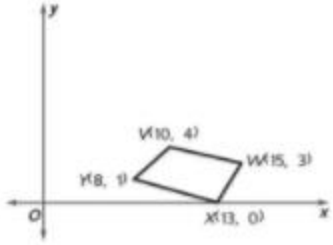
بما أن الأضلاع المتقابلة ليست متطابقة، فإن هذا ليس بمتوازي أضلاع.



18. نعم، هذا متوازي أضلاع.

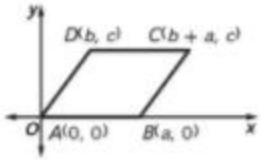
$$\overline{VW} = \sqrt{(15 - 10)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{26}$$
$$\overline{XY} = \sqrt{(13 - 8)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{26},$$

ميل VW يساوي $-\frac{1}{5}$. وميل XY يساوي $-\frac{1}{5}$. بما أن الأضلاع المتقابلة تكون متوازية ومتطابقة، فإن هذا متوازي أضلاع.



19. **المعطيات:** $\overline{AB} \cong \overline{CD}, \overline{AD} \cong \overline{BC}$

المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.



البرهان:

ميل $\overline{AD} = \frac{c - 0}{b - 0} = \frac{c}{b}$

ميل $\overline{AB}$ هو 0.

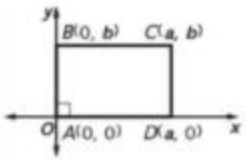
ميل $\overline{BC} = \frac{c - 0}{b + a - a} = \frac{c}{b}$

ميل $\overline{CD}$ هو 0.

إذًا، $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. إذًا، من تعريف متوازي الأضلاع، فإن $ABCD$ متوازي أضلاع.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

20. المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع.
$\angle A$ زاوية قائمة.



المطلوب: $\angle B$ و $\angle C$ و $\angle D$ زوايا قائمة.

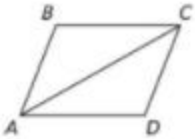
البرهان:

ميل $\overline{BC} = \left(\frac{b-b}{a-0}\right)$ أو 0 ميل $\overline{CD}$ غير محدد.

ميل $\overline{AD} = \left(\frac{0-0}{a-0}\right)$ أو 0 ميل $\overline{AB}$ غير محدد.

إذا، $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ و $\overline{CD} \perp \overline{BC}$ و $\overline{BC} \perp \overline{AB}$. ومن ثم، $\angle B$ و $\angle C$ و $\angle D$ زوايا قائمة.

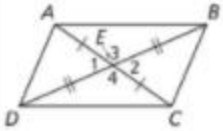
21. المعطيات: $\angle A \cong \angle C$ و $\angle B \cong \angle D$



المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.

البرهان: ارسم $\overline{AC}$ لتكون مثلثين. مجموع زوايا المثلث الواحد يساوي 180. إذًا فمجموع الزوايا للمثلثين يساوي 360. إذًا.
$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360$. حيث إن
$\angle A \cong \angle C$ و $\angle B \cong \angle D$ و $m\angle A = m\angle C$ و $m\angle B = m\angle D$.
بالتعويض، $m\angle A + m\angle A + m\angle B + m\angle B = 360$. إذًا
$2(m\angle A) + 2(m\angle B) = 360$. بقسم كل طرف على 2 ينتج
$m\angle A + m\angle B = 180$. إذًا فالزوايا المتجاورة متكاملة و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.
بالمثل، $2(m\angle A) + 2(m\angle D) = 360$ أو $m\angle A + m\angle D = 180$.
إذًا فهذه الزوايا المتجاورة متكاملة $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ الأضلاع المتقابلة متوازي، إذًا $ABCD$ متوازي أضلاع.

23. المعطيات: $\overline{AE} \cong \overline{EC}$ و $\overline{DE} \cong \overline{EB}$



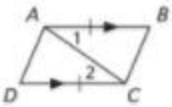
المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.

البرهان:

العبارات (المبرّرات)

1. $\overline{AE} \cong \overline{EC}$ و $\overline{DE} \cong \overline{EB}$ (معطى)
2. $\angle 4 \cong \angle 3$ ، $\angle 2 \cong \angle 1$ (الزوايا المتقابلة بالرأس ∠ تكون ≅.)
3. $\triangle ADE \cong \triangle CBE$ و $\triangle ABE \cong \triangle CDE$ (مسلمة تساوي ضلعين وزاوية)
4. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ (تطابق الأجزاء المتقابلة في المثلثات المتطابقة)
5. $ABCD$ متوازي أضلاع. (إذا كان زوجا الأضلاع المتقابلة ≅، فإن الشكل الرباعي عبارة عن ▱)

24. المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ ، $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$



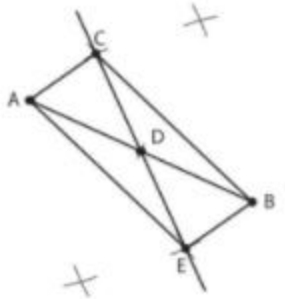
المطلوب: $ABCD$ متوازي أضلاع.

البرهان:

العبارات (المبرّرات)

1. $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ ، $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ (معطى)
2. ارسم $\overline{AC}$. (نقطتان تحددان المستقيم.)
3. $\angle 2 \cong \angle 1$ (إذا كان المستقيمان ∥، فإن الزوايا الداخلية المتبادلة ∡ تكون ≅.)
4. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ (خاصية الانعكاس)
5. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (مسلمة تساوي ضلعين وزاوية)
6. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (تطابق الأجزاء المتقابلة في المثلثات المتطابقة)
7. $ABCD$ متوازي أضلاع. (إذا كان زوجي الأضلاع المتقابلة ≅، فإن الشكل الرباعي عبارة عن ▱.)

25. حسب النظرية 13.9 ، إذا كنت أقطار رباعي الأضلاع تنصف بعضها البعض، فإن رباعي الأضلاع عبارة عن متوازي أضلاع. ابدأ برسم وتنصيف القطع المستقيمة $\overline{AB}$. ثم ارسم مستقيمًا يتقاطع مع القطعة المستقيمة الأولى في نقطة منتصفها D. عيّن النقطة C على أحد جانبي هذا المستقيم ثم أنشئ القطعة المستقيمة $\overline{DE}$ بحيث تطابق $\overline{CD}$ على الجانب الآخر من D. والآن لديك قطع مستقيمة متقاطعة ينصف بعضها البعض. صل النقطة A بالنقطة C والنقطة C بالنقطة B والنقطة B بالنقطة E والنقطة E بالنقطة A لتكوّن الشكل $\square ACBE$.



29. البرهان الإحداثي: أقطار متوازي الأضلاع تنصف بعضها البعض، ومن ثم، فإن نقطة منتصف الأقطار $E\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

$$\overline{DE} = \sqrt{\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(c - \frac{c}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2 - c^2},$$

$$\overline{AE} = \sqrt{\left(0 - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(0 - \frac{c}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2ab + b^2 - c^2},$$

$$\overline{CE} = \sqrt{\left(a + b - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(c - \frac{c}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2ab + b^2 - c^2},$$

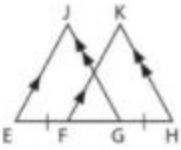
$$\overline{BE} = \sqrt{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(0 - \frac{c}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2 - c^2},$$

بناءً عليه، فإن $\overline{DE} \cong \overline{BE}$ و $\overline{AE} \cong \overline{CE}$. بما أن الأضلاع المتقابلة لمتوازيات الأضلاع تكون متطابقة، فإننا نعلم أن $\overline{DA} \cong \overline{CB}$ و $\overline{DC} \cong \overline{AB}$. ومن ثم، وحسب مسلمة SSS، فإن $\triangle DEC \cong \triangle BEA$ و $\triangle AED \cong \triangle CEB$. وهكذا، نكون قد أوضحنا أن أقطار متوازي الأضلاع تشكل زوجين من المثلثات المتطابقة.

36. تدور النظريتان حول أقطار متوازي الأضلاع. يمكن استخدام النظرية 13.5 إذا كنا نعلم بالفعل أن الشكل الرباعي عبارة عن متوازي أضلاع من أجل إثبات أن الأقطار تنصف بعضها البعض. ويمكن استخدام النظرية 13.9 لإثبات أن الشكل الرباعي عبارة عن متوازي أضلاع إذا كنا نعلم بالفعل أن الأقطار تنصف بعضها البعض.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

48. البرهان:



$\overline{EF} \cong \overline{GH}$ — المعطيات

$EF = GH$

تعريف القطع المستقيمة المتطابقة

$EF + FG = FG + GH$ ← $FG = FG$ (خاصية الانعكاس)

خاصية الجمع

$EG = FH$ ← $EF + FG = EG$, $FG + GH = FH$ (مسلّمة جمع القطع المستقيمة)

التعويض

$EG \cong FH$ ← $\overline{EJ} \parallel \overline{FK}$, $\overline{JG} \parallel \overline{KH}$ — المعطيات

تعريف القطع المستقيمة المتطابقة

$\triangle EJG \cong \triangle FKH$ ← $\angle JEG \cong \angle KFH$, $\angle JGE \cong \angle HFK$ (الزوايا المتناظرة متطابقة)

ASA

49. البرهان:

$\overline{MN} \cong \overline{PQ}$ — المعطيات

$MN = PQ$

تعريف القطع المستقيمة المتطابقة

$MN + NP = NP + PQ$ ← $NP = NP$ (خاصية الانعكاس)

خاصية الجمع

$MP = NQ$ ← $MN + NP = MP$, $NP + PQ = NQ$ (مسلّمة جمع القطع المستقيمة)

التعويض

$\overline{MP} \cong \overline{NQ}$

تعريف القطع المستقيمة المتطابقة

$\triangle MLP \cong \triangle QLN$ ← $\angle M \cong \angle Q$, $\angle 2 \cong \angle 3$ — المعطيات

ASA

صفحة 822، اختبار نصف الوحدة

7. البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $\square GFBA$ و $\square HACD$ (معطى)
2. $\angle D \cong \angle A$ و $\angle F \cong \angle A$ (أضلاع ∠ المتقابلة $\square$ تكون≅)
3. $\angle F \cong \angle D$ (خاصية التعدي.)

10. الإجابة النموذجية: يوضع الساقين بحيث تنصف بعضها البعض. ومن ثم يكون رباعي الأضلاع المتكون حول أطراف الساقين دائمًا متوازي أضلاع. وبالتالي، يكون أعلى الحامل موازيًا للأرض.

12. نعم، كلا زوجي الأضلاع المتقابلة لا بد وأن يكونا متطابقًا. المسافة بين A و B تساوي $\sqrt{26}$. والمسافة بين B و C تساوي $\sqrt{10}$. المسافة بين C و D تساوي $\sqrt{26}$. المسافة بين D و A تساوي $\sqrt{10}$ بما أن زوجي الأضلاع المتقابلة متطابقان، فإن $ABCD$ عبارة عن متوازي أضلاع.

13. لا . يجب أن يكون كلا زوجي الأضلاع المتقابلة متوازيًا. وحيث إن ميل $\overline{QR} \neq$ ميل $\overline{TS}$ فإن الشكل $QRST$ ليس متوازي أضلاع.

الصفحات 8278283، الدرس 3-13

20. البرهان:

العبارات (المبررات)

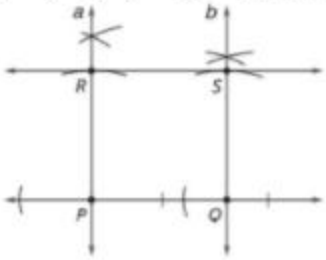
1. $\triangle XZY$ مثلث متساوي الساقين (معطى)
2. $\overline{XZ} \cong \overline{ZY}$ (تعريف المثلث متساوي الساقين.)
3. $\triangle VZY \cong \triangle WZX$. (معطى)
4. $\overline{WZ} \cong \overline{VZ}$ (النظرية $CPCTC$)
5. $\overline{VX} \cong \overline{WY}$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)
6. $VWXY$ مستطيل. (إذا كانت أقطار متوازي الأضلاع متطابقة، فإن متوازي الأضلاع عبارة عن مستطيل.)

21. البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $ABCD$ هو مستطيل (مُعطى)
2. $m\angle A = m\angle B = m\angle C = m\angle D = 90$ (تعريف المستطيل)
3. $\overline{AB} \cong \overline{DC}, \overline{AD} \cong \overline{BC}$ (تعريف المستطيل)
4. M نقطة منتصف $\overline{AB}$، N نقطة منتصف $\overline{BC}$، O نقطة منتصف $\overline{DC}$ و P نقطة منتصف $\overline{AD}$. (المعطيات)
5. $\overline{AM} \cong \overline{MB} \cong \overline{DO} \cong \overline{OC}; \overline{AP} \cong \overline{PD} \cong \overline{BN} \cong \overline{NC}$ (تعريف نقطة المنتصف)
6. $\triangle AMP \cong \triangle MBN \cong \triangle OCN \cong \triangle ODP$ (مسلّمة SAS)
7. $\overline{PM} \cong \overline{MN} \cong \overline{NO} \cong \overline{PO}$ (النظرية $CPCTC$)
8. $MNOP$ عبارة عن متوازي أضلاع (الأضلاع المتقابلة متطابقة)

34. الإجابة النموذجية: باستخدام المنقلة، نجد أن $m\angle P = m\angle Q = 90$. تم استخدام نفس فتحة الفرجار لتحديد أماكن النقاط S وR إذًا، فهما على نفس المسافة من النقطتين Q وP على التوالي. RQ وSP متساويان، ومن ثم فإن الأقطار متطابقة. بناءً عليه، $PQSR$ عبارة عن مستطيل.



الصفحات 835-837، الدرس 4-13

14. البرهان:

العبارات (المبرّرات)

1. $\triangle WPX$ مثلث متساوي الساقين قائم الزاوية. (المعطيات)
2. $\overline{LM} \cong \overline{MN}, m\angle WPX = 90$ (تعريف المثلث متساوي الساقين قائم الزاوية.)
3. $m\angle PWX = m\angle PXW = 45$ (نظرية مجموع زوايا المثلث)
4. $\triangle WPX \cong \triangle ZPY$ (معطيات)
5. $\triangle PWX \cong \triangle PZY$ (النظرية $CPCTC$)
6. $WX \parallel ZY$ (الزوايا الداخلية المتبادلة متطابقة.)
7. $\overline{ZX} \cong \overline{ZY}$ (النظرية CPCTC)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8. $WXYZ$ متوازي أضلاع (زوج واحد من الأضلاع المتقابلة تكون متوازيًا ومتطابقًا)
9. $WXYZ$ معيّن (الأقطار متعامدة على بعضها البعض.)
10. $\angle XPW \cong \angle XPY$ (عبارة عن زوايا متكاملة)
11. $\overline{XP} \cong \overline{YP}$ (النظرية $CPCTC$)
12. $\triangle WPX \cong \triangle XPY$ (مسلمة SAS)
13. $\overline{WX} \cong \overline{XY}$ (النظرية $CPCTC$)
14. $WXYZ$ معيّن (الأضلاع المتجاورة من متوازي الأضلاع تكون متطابقة.)
15. $m\angle WXY = 90$ ($m\angle WXP + m\angle PXY = 45 + 45 = 90$)
16. $WXYZ$ معيّن ($WXYZ$ متوازي أضلاع بزاوية قائمة واحدة)
17. $WXYZ$ مربع ($WXYZ$ عبارة عن مستطيل ومعيّن.)

15. البرهان:

العبارات (المبرّرات)

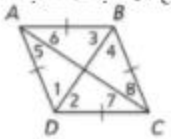
1. $LMPQ$ متوازي أضلاع (معطيات)
2. $\overline{LM} \cong \overline{QO}, \overline{LQ} \cong \overline{MO}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع تكون متطابقة.)
3. K ينصف LM و N ينصف MO و P ينصف OQ و R ينصف LQ. (معطيات)
4. $\overline{LK} \cong \overline{KM}, \overline{MN} \cong \overline{NO}, \overline{QP} \cong \overline{PO}, \overline{LR} \cong \overline{RQ}$ (تعريف المنصّفات)
5. $\overline{LK} \cong \overline{KM} \cong \overline{QP} \cong \overline{PO}, \overline{LR} \cong \overline{RQ} \cong \overline{MN} \cong \overline{NO}$ (خاصية التعدي)
6. $\angle M \cong \angle Q, \angle L \cong \angle O$ (الزوايا المتقابلة لمتوازي الأضلاع تكون متطابقة.)
7. $\angle L \cong \angle M$ (معطيات)
8. $\angle L \cong \angle Q \cong \angle M$ (خاصية التعدي)
9. $\triangle KLR \cong \triangle PQR \cong \triangle PON \cong \triangle KMN$ (مسلمة SAS)
10. $\overline{KR} \cong \overline{RP} \cong \overline{PN} \cong \overline{NK}$ (النظرية $CPCTC$)
11. $KNPR$ معيّن
($KNPR$ عبارة عن شكل الشكل الرباعي له أربعة أضلاع متطابقة)

16. البرهان:

العبارات (المبررات)

1. $ABDE$ مربع (معطى)
2. $\overline{AB} \cong \overline{ED}$ (الأضلاع المتقابلة للمربع تكون متطابقة.)
3. $\triangle ABE \cong \triangle BCD$ (معطيات)
4. $\overline{BC} \cong \overline{AB}$ ($CPCTC$ النظرية)
5. $\overline{ED} \cong \overline{BC}$ (خاصية التعدي)
6. $\overline{BE} \cong \overline{CD}$ ($CPCTC$ النظرية)
7. $BCDE$ عبارة عن متوازي أضلاع (الأضلاع المتقابلة متطابقة)

33. المعطيات: $ABCD$ مستطيل.

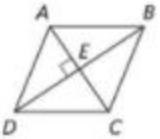


المطلوب: كل قطر يقطع زاويتين متقابلتين.

البرهان: تذكر المعطيات أن الشكل $ABCD$ عبارة عن معين. وحسب تعريف المعين، فإن $ABCD$ متوازي أضلاع. تكون الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، إذًا، $\angle ADC \cong \angle ABC$ و $\angle BAD \cong \angle BCD$ $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$ لأن جميع أضلاع المعين تكون متطابقة. $\triangle ADC \cong \triangle ABC$ حسب مسلمة SAS. $\angle 6 \cong \angle 5$ و $\angle 8 \cong \angle 7$ حسب النظرية CPCTC. $\triangle BAD \cong \triangle BCD$ حسب مسلمة SAS.

$\angle 2 \cong \angle 1$ و $\angle 4 \cong \angle 3$ بحسب مسلمة تطابق الأجزاء المتقابلة في المثلثات المتطابقة. وبحسب تعريف منصف الزاوية، ينصف كل قطر زوجًا من الزوايا المتقابلة.

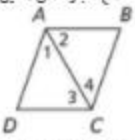
34. المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع؛ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.



المطلوب: $ABCD$ معين.

البرهان: تذكر المعطيات أن الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع. تنصف أقطار متوازي الأضلاع بعضها البعض، إذًا $\overline{AE} \cong \overline{EC}$. $\overline{BE} \cong \overline{BE}$ حيث غن تطابق القطع المستقيمة انعكاسي. تذكر المعطيات أيضًا أن $\overline{AC} \perp \overline{BD}$. ومن ثم، $\angle AEB$ و $\angle BEC$ زوايا قائمة بحسب تعريف المستقيمات المتعامدة. إذًا، $\angle BEC \cong \angle AEB$ لأن جميع الزوايا القائمة تكون متطابقة. بناءً عليه، $\triangle AEB \cong \triangle CEB$ حسب مسلمة SAS. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ حسب النظرية $CPCTC$. الجوانب المتقابلة لمتوازيات الأضلاع تكون متطابقة، ومن ثم فإن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{BC} \cong \overline{AD}$. وبما أن تطابق المستقيمات يكون متعديًا، فإن $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$. جميع الأضلاع الأربعة للشكل $ABCD$ تكون متطابقة، ومن ثم فإن $ABCD$ عبارة عن معين حسب التعريف.

35. إذا كان قطر متوازي الأضلاع ينصف زاويته، فإن متوازي الأضلاع عبارة عن معين.

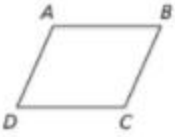


المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع القطر $\overline{AC}$ ينصف $\angle DAB$ و $\angle BCD$.

المطلوب: $\square ABCD$ معيّن.

البرهان: تذكر المعطيات أن الشكل $ABCD$ عبارة عن متوازي أضلاع. وبما أن الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع تكون متوازية، فإن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. حسب التعريف، فإن $\angle 2$ و $\angle 3$ عبارة عن زوايا داخلية متبادلة للأضلاع المتوازية $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$. بما أن الزوايا الداخلية المتبادلة تكون متطابقة، فإن $\angle 3 \cong \angle 2$. يكون التطابق الزاوي تناظريًا، إذًا $\angle 2 \cong \angle 3$. تذكر المعطيات أن $\overline{AC}$ ينصف $\angle DAB$ و $\angle BCD$. ومن ثم، فإن $\angle 2 \cong \angle 1$ و $\angle 4 \cong \angle 3$ حسب التعريف. وحسب خاصية التعدي، فإن $\angle 3 \cong \angle 1$ و $\angle 4 \cong \angle 2$. بما أن الزوايا المتطابقة للأضلاع المتقابلة في المثلث متطابقة، فإن $\overline{DC} \cong \overline{AD}$ و $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. إذا، حيث إن زوجًا من الأضلاع المتجاورة لمتوازي الأضلاع متطابق، فإن $ABCD$ عبارة عن معين.

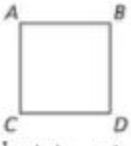
36. المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع $\overline{BC} \cong \overline{AB}$.



المطلوب: $ABCD$ معين.

البرهان: حيث إن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، إذًا $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ و $\overline{CD} \cong \overline{AB}$. وتذكر المعطيات أن $\overline{BC} \cong \overline{AB}$ إذًا حسب خاصية التعدي، فإن $\overline{BC} \cong \overline{CD}$ إذًا $\overline{AB} \cong \overline{AD} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD}$ إذًا $ABCD$ معين بحسب تعريفه.

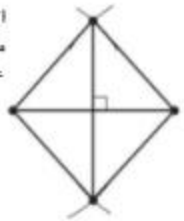
37. المعطيات: $ABCD$ مستطيل ومعين.

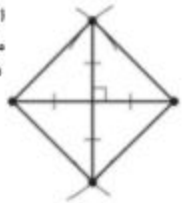


المطلوب: أن $ABCD$ مربع.

البرهان: نعلم أن $ABCD$ مستطيل ومعين. يعني ذلك أن $ABCD$ متوازي أضلاع. حيث إن جميع المستطيلات والمعينات متوازيات أضلاع. وبحسب تعريف المستطيل، فإن $\angle A$ و $\angle B$ و $\angle C$ و $\angle D$ زوايا قائمة. وبحسب تعريف العين فإن جميع الأضلاع متطابقة. إذًا $ABCD$ مربع حيث إن $ABCD$ متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة وجميع زواياه قائمة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

38. 
الإجابة النموذجية: إذا كان القطران في متوازي الأضلاع متعامدين، فهو عبارة عن معين.

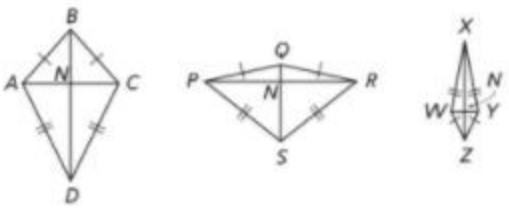
39. 
الإجابة النموذجية: إذا كان القطران في متوازي الأضلاع متطابقين ومتعامدين، فهو عبارة عن مربع.

40. البرهان، أي معيّن يمكن وضعه على محور إحداثي كما هو موضح في الشكل بنقاط الرأس $A(0, a)$ و $B(b, 0)$ و $C(0, -a)$ و $D(-b, 0)$. AC عبارة عن قطعة مستقيمة رأسية، و BD عبارة عن قطعة مستقيمة أفقية، ومن ثم فإنهما متعامدتان.

41. البرهان، يمكن وضع أي مربع على محور إحداثي كما هو موضح في الرسم التخطيطي بنقاط الرأس $A(0, 0)$، $B(2a, 0)$، $C(0, 2a)$ و$D(2a, 2a)$. تكون نقطة منتصف الأقطار عند $E(a, a)$. يكون طول كل ضلع من الشكل $ABCD$ يساوي $2a$. وأطوال BE و DE و EC و EA تساوي جميعها a. ومن ثم، تكون أقطار المربع متعامدة. إذًا، $m\angle BED = m\angle DEC = m\angle CEA = m\angle AEB = 90$. بناءً عليه، $\triangle BED \cong \triangle DEC \cong \triangle CEA \cong \triangle AEB$ حسب المسلمة SAS.

42. $ABCD$ مستطيل. الزوايا تكون قائمة والأضلاع المتقابلة تكون متطابقة.

44a. الإجابة النموذجية:



44b. الإجابة النموذجية:

$ABCD$	$m\angle A$	$m\angle B$	$m\angle C$	$m\angle D$
	100	90	100	70
$QRSP$	$m\angle Q$	$m\angle R$	$m\angle S$	$m\angle P$
	140	70	80	70
$WXYZ$	$m\angle W$	$m\angle X$	$m\angle Y$	$m\angle Z$
	120	40	120	80

44c. زاويتا الطائرة الورقية تكونان دائمًا متطابقتين.

45. العبارة خاطئة لأن المعين ليس من المحتم أن يحتوي على أربع زوايا قائمة.
التقاش هو: إذا كان الشكل الرباعي مربعًا، فإنه معين. وهذا صحيح لأن المربع لا بد وأن يكون متوازي أضلاع وجميع الأضلاع تكون متطابقة.
العكس: إذا لم يكن الشكل الرباعي معيّنًا، فإنه ليس مربعًا. وهذا صحيح لأن المربع لا بد وأن يكون متوازي أضلاع ولا بد أن يكون له أربعة أضلاع متطابقة، ومن ثم يكون دائمًا عبارة عن معيّن.

المكافئ العكسي: إذا لم يكن الشكل الرباعي مربعًا، فإنه ليس معينًا. وهذا غير صحيح لأن المعين ليس من المحتم أن يكون به زوايا قائمة.

الصفحات 847-844، الدرس 5-13

12. $AD = \frac{-3 - -3}{-6 - 3} = 0$ وميل $BC = \frac{1 - 1}{-4 - 1} = 0$ ميل
إذًا $AD \parallel BC$.
$BA = \frac{1 - -3}{-4 - -6} = 2$ وميل $CD = \frac{1 - -3}{1 - 3} = -2$ ميل
$ABCD$ عبارة عن شبه منحرف.
$BA = \sqrt{(-4 - -6)^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{20}$
$CD = \frac{1 - -3}{1 - 3} = -2$. $ABCD$
$BA = \sqrt{(-4 - -6)^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{20}$
$CD = \sqrt{(1 - 3)^2 + (1 - -3)^2} = \sqrt{20}$ عبارة عن شبه منحرف متساوي الساقين.

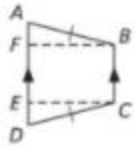
13. $EF = \frac{3 - -1}{0 - -4} = 1$ وميل $GH = \frac{-8 - 2}{-3 - 7} = 1$ ميل
إذًا $EF \parallel GH$.
$FG = \frac{-1 - -8}{-4 - -3} = -7$ وميل $EH = \frac{3 - 7}{0 - 2} = 2$ ميل
$EFGH$ عبارة عن شبه منحرف.
$FG = \sqrt{(-4 - -3)^2 + (-1 - -8)^2} = \sqrt{50}$
$EH = \sqrt{(0 - 7)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{50}$ عبارة عن شبه منحرف متساوي الساقين.

14. $KL = \frac{7 - 6}{3 - 8} = \frac{-1}{5}$ وميل $JM = \frac{4 - 2}{0 - 10} = \frac{-1}{5}$ ميل
إذًا $KL \parallel JM$.
$JK = \frac{4 - 7}{0 - 3} = -1$ وميل $LM = \frac{6 - 2}{8 - 10} = -2$ ميل
$JKLM$ عبارة عن شبه منحرف.
$JK = \sqrt{(0 - 3)^2 + (4 - 7)^2} = 3\sqrt{2}$
$LM = \sqrt{(8 - 10)^2 + (6 - 2)^2} = 2\sqrt{5}$. $JKLM$ عبارة عن شبه منحرف متساوي الساقين.

15. $RQ = \frac{9 - 5}{1 - 2} = \frac{4}{5}$ وميل $NP = \frac{0 - 8}{2 - 12} = \frac{4}{5}$ ميل
إذًا $RQ \parallel NP$
$QP = \frac{9 - 8}{7 - 12} = \frac{-1}{5}$ وميل $RN = \frac{5 - 0}{2 - 2}$ = غير محدد وميل
$NPQR$ عبارة عن شبه منحرف.
$RN = \sqrt{(2 - 2)^2 + (5 - 0)^2} = 5$
$QP = \sqrt{(7 - 12)^2 + (9 - 8)^2} = \sqrt{26}$. $NPQR$ ليس شبه منحرف متساوي الساقين.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

26. **المعطيات:** $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين.
$\overline{BC} \parallel \overline{AD}, \overline{AB} \cong \overline{CD}$



المطلوب: $\angle A \cong \angle D$ و $\angle ABC \cong \angle DCB$

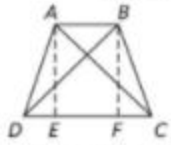
البرهان: ارسم القطعة المستقيمة المساعدة بحيث يكون $\overline{BF} \perp \overline{AD}$ و $\overline{BF} \parallel \overline{BC}$. حيث إن $\overline{CE} \perp \overline{AD}$ والمستقيمات المتوازية على مسافة واحدة في جميع نقاطها. فإن $\overline{BF} \cong \overline{CE}$ تشكل المستقيمات المتعامدة زوايا قائمة. إذًا $\angle BFA$ و $\angle CED$ زوايا قائمة. $\angle BFA$ و $\angle CED$ مثلثات قائمة الزاوية حسب التعريف. بناءً عليه، $\triangle CED \cong \triangle BFA$ حسب مسلمة الوتر والساق. $\angle A \cong \angle D$ حسب النظرية $CPCTC$. حيث إن $\angle CBF$ و $\angle BCE$ زوايا قائمة وجميع الزوايا القائمة تكون متطابقة. فإن $\angle BCE \cong \angle CBF$. $\angle DCE \cong \angle ABF$ حسب النظرية $CPCTC$. إذًا، $\angle ABC \cong \angle DCB$ حسب خاصية جمع الزوايا.

27. **المعطيات:** $ABCD$ شبه منحرف، و $\angle C \cong \angle D$.

المطلوب: شبه المنحرف $ABCD$ متساوي الساقين.

البرهان: بحسب مسلمة التوازي، نعلم أنه يمكننا رسم مستقيم مساعد $\overline{EB} \parallel \overline{AD}$. $\angle BEC \cong \angle D$، بحسب نظرية الزوايا المتناظرة. وتذكر المعطيات أن $\angle C \cong \angle D$، إذًا بحسب خاصية التعدي، فإن $\angle C \cong \angle BEC$. إذًا، $\triangle EBC$ متساوي الساقين $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$. بحسب تعريف شبه المنحرف، فإن $\overline{EB} \cong \overline{AD}$. حيث إن كلًا من زوجي الأضلاع المتقابلة متوازٍ. فإن ABED متوازي أضلاع. إذًا، $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ بحسب خاصية التعدي $\overline{BC} \cong \overline{AD}$. إذًا، $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين.

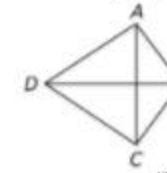
28. **المعطيات:** $ABCD$ شبه منحرف: $\overline{BC} \cong \overline{AD}$.



المطلوب: شبه المنحرف $ABCD$ متساوي الساقين.

البرهان: تذكر المعطيات أن $ABCD$ شبه منحرف و $\overline{AC} \cong \overline{BD}$. ارسم قطعة مستقيمة مساعدة بحيث يكون $\overline{AE} \perp \overline{DC}$ و $\overline{BF} \perp \overline{DC}$ حيث إن المستقيمات المتعامدة تشكل زوايا قائمة. فإن $\angle AEF$ و $\angle BFE$ زوايا قائمة. إذًا، $\triangle AEC$ و $\triangle BFD$ قائمي الزاوية بحسب التعريف. $\overline{AE} \parallel \overline{BF}$ حيث إن أي مستقيمين في المستوى يتعامدان على نفس المستقيم يكونان متوازيين $\overline{AE} \parallel \overline{BF}$ حيث إن الأضلاع المتقابلة في شبه المنحرف متطابقة. $\triangle BFD \cong \triangle AEC$ بحسب مسلّمة الوتر والساق و $\angle BDC \cong \angle ACD$ بحسب مسلمة تطابق الأجزاء المتقابلة في المثلثات المتطابقة. حيث إن $\overline{DC} \cong \overline{DC}$ بحسب خاصية انعكاس التطابق، فإن $\triangle BCD \cong \triangle ADC$ (مسلمة تساوي ضلعين وزاوية). $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ بحسب مسلمة تطابق الأجزاء المتقابلة في المثلثات المتطابقة، إذًا شبه المنحرف $ABCD$ متساوي الساقين.

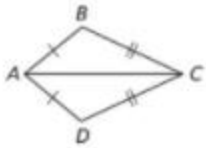
29. **المعطيات:** $ABCD$ طائرة ورقية بها $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{DC}$.



المطلوب: $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

البرهان: تذكر المعطيات أن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{DC}$. إذًا، B و D على نفس المسافة من A و C. إذا كانت النقطة على نفس المسافة من نقطتي نهاية القطعة المستقيمة، إذًا فهي المنصف المتعامد للقطعة المستقيمة. ويكون المستقيم المتضمن B و D هو المنصف العمودي لـ $\overline{AC}$. حيث إنه لا يمكن أن يمتد سوى مستقيم واحد بين أي نقطتين. إذًا $\overline{BD} \perp \overline{AC}$.

30. **المعطيات:** $ABCD$ شكل طائرة ورقية

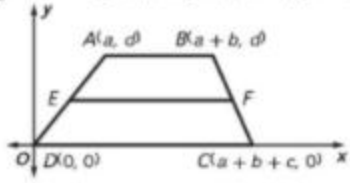


المطلوب إثباته: $\angle B \cong \angle D, \angle BAD \ncong \angle BCD$

البرهان:

نعلم أن $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ و $\overline{BC} \cong \overline{CD}$ حسب تعريف شكل الطائرة الورقية. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ بحسب خاصية الانعكاس، إذًا، $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ حسب مسلمة تساوي الأضلاع الثلاثة. $\angle B \cong \angle D$ حسب النظرية $CPCTC$. إذا كان $\angle BCD \cong \angle BAD$، و فإن الشكل $ABCD$ عبارة عن متوازي أضلاع حسب التعريف، وهذا لا يمكن أن يكون صحيحًا لأن المعطيات تذكر أن الشكل $ABCD$ عبارة عن طائرة ورقية. بناءً عليه، فإن $\angle BCD \ncong \angle BAD$.

31. **المعطيات:** $ABCD$ شبه منحرف له الوسيط $\overline{EF}$
المطلوب: $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ و $\overline{EF} \parallel \overline{DC}$ و $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$



البرهان:

بحسب تعريف متوسط شبه المنحرف، فإن E هي نقطة منتصف $\overline{AD}$ و F هي نقطة منتصف $\overline{BC}$.

نقطة المنتصف E تساوي $\left(\frac{a}{2}, \frac{d}{2}\right)$ أو $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{d+0}{2}\right)$.

نقطة المنتصف F تساوي $\left(\frac{a+b+a+b+c}{2}, \frac{d+0}{2}\right)$ أو $\left(\frac{2a+2b+c}{2}, \frac{d}{2}\right)$.

ميل $\overline{AB} = 0$ وميل $\overline{EF} = 0$ وميل $\overline{DC} = 0$. إذًا، $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ و $\overline{EF} \parallel \overline{DC}$.

$$AB = \sqrt{[(a+b)-a]^2 + (d-d)^2} = \sqrt{b^2}$$

$$DC = \sqrt{[(a+b+c)-0]^2 + (0-0)^2}$$

$$= \sqrt{(a+b+c)^2} \text{ or } a+b+c$$

$$EF = \sqrt{\left(\frac{2a+2b+c-a}{2}\right) + \left(\frac{d}{2} - \frac{d}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a+2b+c}{2}\right)^2} \text{ or } \frac{a+2b+c}{2}$$

$$\frac{1}{2}(AB + DC) = \frac{1}{2}[b + (a+b+c)]$$

$$= \frac{1}{2}(a+2b+c)$$

$$= \frac{a+2b+c}{2}$$

$$= EF$$

إذًا، $\frac{1}{2}(AB + DC) = EF$.

32a. ميل $\overline{RV} = \frac{3-3}{-4-1} = 0$ وميل $\overline{ST} = \frac{-1-1}{-5-4} = 0$

بما أن ميل $\overline{RV}$ و $\overline{ST}$ متساويان، $(RV)^{-} \parallel (ST)^{-}$.

ميل $\overline{RS} = \frac{3-1}{-4-5} = 4$ وميل $\overline{VT} = \frac{3-1}{1-4} = -\frac{4}{3}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

بما أن ميلي $\overline{RS}$ و $\overline{VT}$ غير متساويين، فإن $\overline{RS}$ و $\overline{VT}$ غير متوازيين. وحيث إن الشكل الرباعي $RSTV$ له زوج واحد فقط من الأضلاع المتقابلة المتوازية، فإن رباعي الأضلاع $RSTV$ عبارة عن شبه منحرف.

$$RS = \sqrt{(-4 - -5)^2 + (3 - -1)^2} = \sqrt{17}$$

$$VT = \sqrt{(1 - 4)^2 + (3 - -1)^2} = 5$$. $RSTV$ ليس شبه منحرف متساوي الساقين.

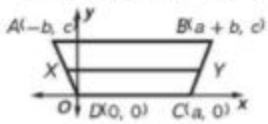
32b. لا . قطعة المنتصف المستقيمة تصل النقاط $(0, -4.5)$ و $(1, 2.5)$. معادلة قطعة المنتصف المستقيمة هي $y = \frac{1}{7}x + \frac{9}{4}$ نقطة الأصل غير موجودة في هذا الخط.

57.

الشكل الرباعي	كذلك...
مثال: مستطيل	متوازي الأضلاع
المعين	متوازي الأضلاع
المربع	معين، مستطيل، متوازي أضلاع
شبه منحرف متساوي الساقين	شبه المنحرف
شبه المنحرف	لا شيء
الطائرة الورقية	لا شيء

61. المعطيات: $ABCD$ عبارة عن شبه منحرف له وسيط $\overline{XY}$.

المطلوب: $\overline{XY} \parallel \overline{AB}$ و $\overline{XY} \parallel \overline{DC}$



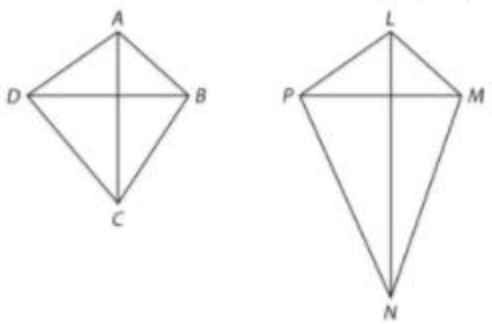
البرهان:

نقطة منتصف $\overline{AD}$ هي X. وإحداثياتها $\left(\frac{-b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

نقطة منتصف $\overline{BC}$ هي $Y\left(\frac{2a + b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

ميل $\overline{AB} = 0$ وميل $\overline{XY} = 0$ وميل $\overline{DC} = 0$. إذًا $\overline{XY} \parallel \overline{AB}$ و $\overline{XY} \parallel \overline{DC}$

64. الإجابة النموذجية:



66. البرهان: بما أن $\triangle AED$ و $\triangle ADB$ مثلثان متساويا الأضلاع، فإن $m\angle BAD = 60$ و $m\angle ADE = 60$. بما أن هذه الزوايا عبارة عن زوايا داخلية متبادلة، فإننا نعلم أن $AB \parallel EC$. إذًا $ABCE$ شبه منحرف. وبما أن $\triangle AED$ متساوي الأضلاع، فإن $AE = AD$ وبما أن $\triangle ADB$ متساوي الأضلاع، فإن $AD = BD$ وبما أن $\triangle DBC$ متساوي الأضلاع، فإن $BD = BC$. بناءً عليه، وحسب خاصية التعدي، $AE = BC$ ومن ثم فإن $ABCE$ عبارة عن مثلث متساوي الساقين.

67. متوازي الأضلاع وشبه المنحرف عبارة عن الأشكال الرباعية. ومجموع زوايا متوازي الأضلاع وشبه المنحرف يساوي 360 درجة. تضم متوازيات الأضلاع زوجين من الأضلاع المتوازية، ولكن شبه المنحرف لا يضم سوى زوج واحد فقط من الأضلاع المتوازية. الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع تكون متطابقة، ولكن في شبه المنحرف، لا يتحتم أن تكون أضلاعًا متطابقة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education