الوحدة 10 نظرية المجموعات

لمحة عامة

1 مقدمة في نظرية المجموعات

2 المجموعات الجزئية والعمليات على المجموعات

3 استخدام مخططات فن Venn لدراسة العلاقات على المجموعات

4 استخدام المجموعات لحل المسائل

الملخص

S. Set Theory: Foundations with in Our World Chapter 2 © 2019 McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

almanahj.com/ae

almanahj.com/ae

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

603

الدرس 10-1 مقدمة في نظرية المجموعات

أهداف التعلم

1. تعريف المجموعة.
2. كتابة المجموعات بثلاث طرق مختلفة.
3. تعريف المجموعة الخالية.
4. إيجاد عدد العناصر الرئيسة في المجموعة.
5. تصنيف المجموعات إلى منتهية وغير منتهية.
6. تحديد ما إذا كانت المجموعتان متساويتين أم متكافئتين.

تحدد القوانين التي تقرر من يمكنه التصويت في انتخابات معينة مجموعة محددة جيدًا من الأشخاص. فإذا لم تكن المجموعة محددة جيدًا، فسيكون تطبيق القانون مستحيلاً تقريبًا.

هل فكرت من قبل في الدور الذي يقوم به تجميع الأشياء في حياتنا اليومية؟ فكّر في كافة المجموعات الجزئية التي بين الأشخاص الذين تعرفهم فقط: لديك مجموعة الأصدقاء المقربين، مجموعة أصدقاء التواصل الاجتماعي، مجموعة أفراد العائلة، مجموعة المعارف العابرين، مجموعة زملاء الدراسة، مجموعة الأساتذة، مجموعة زملاء العمل، . . كما أن لديك مجموعة المفاتيح، ومجموعة الملابس، والأجهزة الإلكترونية، والأطعمة، والبرامج التلفزيونية، وغيرها الكثير. فعالمنا بالكامل مقسم إلى مجموعات من الأشياء أو ما نسميه *المجموعات*. ومن ثم فإن دراسة المجموعات من منظور رياضي يُعد فرصة جيدة لدراسة كيفية استخدام الرياضيات في عالمنا. سيتم تنظيم دراستنا للمجموعات بالكامل بحسب الموضوعات التي في هذا القسم. تنظيم – هل فهمت ما أقصد؟ لن تجد هذا النوع من الدعابة الرديئة في معظم الكتب الدراسية.

المفاهيم الأساسية

لنبدأ بالتعريف الأساسي للمجموعات.

المجموعة عبارة عن تجميع للأشياء.

1. تعريف المجموعة.

في دراستنا للمجموعات، سنرغب في تقييد انتباهنا بالمجموعات المحددة جيدًا. وتكون المجموعة **محددة جيدًا** إذا استطعنا –فيما يتعلق بأي عنصر محدد– تحديد ما إذا كان ضمن المجموعة أم لا بشكل موضوعي. على سبيل المثال، تُعد مجموعة "الحروف الأبجدية للغة العربية" محددة جيدًا لأنها تتكون من 28 حرفًا نستخدمها، دون غيرها من العناصر، لتكوين الحروف الأبجدية. أما مجموعة "الأشخاص الطوال القامة" في صفك، فليست محددة جيدًا لأن تحديد من ينتمي إلى هذه المجموعة تحديدًا دقيقًا موضع تأويل. وهكذا، لكي تكون المجموعة محددة جيدًا، يجب أن يستند تحديد ما تحتوي عليه وما لا تحتوي عليه إلى حقائق وليس إلى وجهات نظر.

يسمى كل شيء في المجموعة **عنصرًا** أو عضوًا في المجموعة. يُطلق على إحدى طرق تصميم المجموعة **طريقة ذكر العناصر أو ذكر عناصرها**، وفيها تُدرج العناصر بين قوسين، مع الفصل بينها باستخدام الفواصل. ولا يُعد ترتيب العناصر مهمًّا: فالمجموعتان {5, 2, 7} و{5, 2, 7} هما نفسهما. ونسمّي المجموعات غالبًا باستخدام حرف كبير من أحرف الانجليزية.

مثال كتابة المجموعة باستخدام ذكر العناصر

اكتب مجموعة شهور السنة التي تبدأ بحرف M في اللغة الإنجليزية. هل هذه المجموعة محددة جيدًا؟ لم أو لم

الحل

الشهران اللذان يبدآن بالحرف M هما March وMay. ويمكن كتابة الإجابة باستخدام رمز المجموعة كما يلي

$M = \{\text{March, May}\}$

وهذه مجموعة محددة جيدًا لأن كلا الشهور إما أن يبدأ بحرف M أو لا. فلا تحتمل التأويل.

ملاحظة رياضية

توضح الفواصل التي بين العناصر أن عناصر المجموعة هي الأسماء، وليست الحروف الفردية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

almanahj.com/ae

جرّب هذا 1

اكتب مجموعة اسماء الشهور التي تنتهي بحرف *y* في اللغة الإنجليزية.

في الرياضيات، يجرى تحديد مجموعة *أعداد العد* أو **الأعداد الطبيعية** كما يلي $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. (عندما نصمم المجموعات، فإن النقاط الثلاث، أو *علامة القطع*، تعني أن قائمة العناصر تستمر بشكل لا نهائي بالنمط نفسه). المجموعة $E = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ هي مجموعة **الأعداد الطبيعية الزوجية** والمجموعة $O = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ هي مجموعة **الأعداد الطبيعية الفردية**.

مثال 2 كتابة المجموعات بذكر العناصر

استخدم طريقة ذكر العناصر للقيام بما يلي:

(a) كتابة مجموعة الأعداد الطبيعية التي تقل عن 6.
(b) كتابة مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية التي تزيد عن 4.
(c) هل يمكنك التفكير في طريقة أخرى لوصف كل مجموعة لفظيًا؟

الحل

(a) {1, 2, 3, 4, 5}
(b) {5, 7, 9, 11, . . .}
(c) يمكن وصف المجموعة الأولى بمجموعة الأعداد الطبيعية التي تقل عن أو تساوي 5، أو المحصورة بين 0 و6.
ويمكن وصف المجموعة الثانية بمجموعة الأعداد الفردية التي تزيد عن 3، أو التي تزيد عن أو تساوي 5.

ملاحظة رياضية

يمكنك إدراج عنصر المجموعة أكثر من مرة إذا كان يعني الكثير بالنسبة إليك، لكن لا يوجد سبب جيد تحديدًا لذكر التكرار. على سبيل المثال، مجموعة حروف كلمة *تكرار* تُكتب هكذا {ت، ك، ر، ا}.

جرّب هذا 2

اكتب كل مجموعة، باستخدام طريقة ذكر العناصر، ثم اكتب وصفًا بديلًا واحدًا على الأقل لكل مجموعة.

(a) مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية التي [illegible] 90.
(b) مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية التي [illegible] 10.

تنبيه

يتساءل الطلاب غالبًا عن عدد عناصر المجموعة التي يكتبونها قبل الانتهاء بعلامة القطع. الإجابة الصحيحة هي "سبعة". مجرد مزاح — لا توجد قاعدة محددة. تأكد فقط من تضمين أعداد كافية من النمط. فبالنسبة إلى (b)2 على سبيل المثال، سيترك الاكتفاء بكتابة {5, 7, . . .} أي عدد من التفسيرات المحتملة، {5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, . . .}، أما {5, 7, 10, 14, . . .} فهما الزوجان اللذان سيتبادران إلى الذهن.

ملاحظة رياضية

يستخدم البعض الرمز ∋ عند القراءة من اليمين إلى اليسار.

يستخدم الرمز ∈ – ينتمي – لتوضيح أن شيئًا ما عنصرًا في المجموعة. على سبيل المثال، إذا كانت A هي مجموعة الأعداد الأولية، فيمكننا كتابة $7 \in A$، وتُقرأ "7 أحد عناصر المجموعة A" أو"7 ينتمي الى A". وبالمثل، يمكننا كتابة $11 \in A$.

وعندما لا يكون الشيء عنصرًا في المجموعة، فإننا نستخدم الرمز ∉ – لا ينتمي. حيث إن "9" ليس عددا أوليا، يمكننا كتابة $9 \notin A$، وتُقرأ "9 ليس عنصرًا في المجموعة A" أو "9 لا ينتمي الى A".

مثال 3 فهم رمز المجموعات

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صائبة أم خاطئة.

(a) الجزائر تنتمي إلى A، حيث A هي مجموعة الدول الواقعة غرب نهر النيل.
(b) 27 ∈ {1, 5, 9, 13, 17, . . .}
(c) z ∈ {v, w, x, y, z}

الحل

(a) تقع الجزائر غرب النيل، لذا فإن الجزائر عنصر في المجموعة A. العبارة صائبة.
(b) يوضح النمط أن كل عنصر يزيد بمقدار 4 عن العنصر السابق. ومن ثم تكون العناصر الثلاثة التالية 21 و25 و29؛ ثم تجاوز 27. ومن ثم فإن 27 لا ينتمي إلى المجموعة. العبارة خاطئة.
(c) الحرف z ينتمي إلى المجموعة. ومن ثم تكون هذه العبارة خاطئة.

ملاحظة رياضية

يمكن أن يكون رمز المجموعة مربكًا إلى حد ما. ويجب أن تكون حريصًا على كتابة ما تقصد. على سبيل المثال، من الخطأ كتابة $\{6\} \in \{2,4,6\}$. حيث يمثل الرمز {6} مجموعة تحتوي على 6، وهي ليست عنصرا في {2,4,6}. ولكن ينبغي كتابة $6 \in \{2,4,6\}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

almanahj.com/ae

605

جرّب هذا 3

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صائبة أم خاطئة.

(a) يوليو ينتمي إلى A. حيث A هي مجموعة اسماء الشهور بين يوم الأم واليوم العالمي للتحصيل.

(b) $21 \in \{2, 5, 8, 11, \ldots\}$

(c) صفر لا ينتمي إلى {ص، ق، ر}

ثمة ثلاث طرق شائعة لتصميم المجموعات:

1. طريقة *القائمة* أو *ذكر العناصر*.
2. *الطريقة الوصفية*.
3. *رمز بناء المجموعة*.

إننا نعرف بالفعل الكثير عن استخدام طريقة القائمة أو ذكر العناصر؛ حيث نُدرج عناصر المجموعة بين قوسين ويتم الفصل بينها بالفاصلة. كما في الأمثلة 1 إلى 3.

تستخدم **الطريقة الوصفية** عبارة لفظية قصيرة لوصف المجموعة.

مثال 4 وصف المجموعة باستخدام الطريقة الوصفية

استخدم الطريقة الوصفية لوصف المجموعة B التي تتضمن الأعداد 2 و4 و6 و8 و10 و12 بطريقتين مختلفتين.

الحل

إن كل العناصر التي في المجموعة أعداد طبيعية زوجية. وجميعها أقل من 14. ومن ثم تكون B هي مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية التي تقل عن 14. توجد طرق أخرى كثيرة يمكن وصف المجموعة بها. ومن بين الطرق الأخرى "مجموعة الأعداد الطبيعية التي تقع بين 1 و15 وتقبل القسمة على 2".

جرّب هذا 4

استخدم الطريقة الوصفية لوصف المجموعة A التي تتضمن العناصر $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ بطريقتين مختلفتين.

ملاحظة رياضية

عندما تسمع *متغيرًا*، قد تفكر تلقائيًا في حرف، مثل x أو y. لكن ينبغي لك التفكير فيما تعنيه كلمة *المتغير* بالفعل: شيء ما يمكن أن يتغير أو يتنوع. والمتغير هو مجرد رمز يمثل عددًا أو شيئًا ما يمكن أن يتغير.

أما الطريقة الثالثة (والأرقى) لتصميم المجموعة، فهي **رمز بناء المجموعة**. وتستخدم هذه الطريقة المتغيرات.

المتغير عبارة عن رمز (يكون حرفًا عادةً) يمكن أن يمثل عناصر مختلفة في مجموعة ما.

يستخدم رمز بناء المجموعة المتغير والأقواس والعمود الرأسي | الذي يُقرأ "بحيث". على سبيل المثال، يمكن كتابة المجموعة {1, 2, 3, 4, 5, 6} باستخدام رمز بناء المجموعة كما يلي

$$\{x \mid x \in N \text{ و } x < 7\}$$

ويقرأ ذلك كما يلي: "مجموعة العناصر x بحيث x عدد طبيعي و x أقل من 7." يمكننا استخدام أي حرف أو رمز للمتغير. على سبيل المثال، يمكننا استخدام x. (إذا كنت ترغب في مراجعة رموز المتباينة، فراجع موارد مراجعة الجبر عبر الإنترنت).

ملاحظة رياضية

لعلك لاحظت أن أحد الأمور الرائعة حول رمز المجموعة هو وجود أكثر من طريقة غالبًا لكتابة المجموعة في المثال 5. كان يمكننا كتابة $W = \{x \mid x$ أحد ألوان علم كولومبيا$\}$.

مثال 5 كتابة مجموعة باستخدام رمز بناء المجموعة

استخدم رمز بناء المجموعة لوصف كل مجموعة، ثم اكتب كيف ستُقرأ إجابتك بصوت عالٍ.

(a) تحتوي المجموعة R على العناصر 2 و4 و6.

(b) تحتوي المجموعة W على العناصر حمراء وصفر وأزرق.

الحل

(a) $R = \{x \mid x \in E$ و $x < 7\}$. المجموعة x بحيث x عددٌ طبيعيٌّ زوجيٌّ و x أقل من 7.

(b) $W = \{x \mid x$ لون أساسي$\}$. مجموعة x بحيث x لون أساسي.

almanahj.com/ae

McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة

جرّب هذا 5

استخدم رمز بناء المجموعة لتصميم كل مجموعة. ثم اكتب كيف ستَقرأ إجابتك بصوت عالٍ.

(a) تحتوي المجموعة K على العناصر 10, 12, 14, 16, 18.
(b) تحتوي المجموعة W على العناصر داشاركي ورومانو.

مثال 6 استخدام رموز المجموعات المختلفة

حدد المجموعة S التي تضم العناصر . . . 32, 33, 34, 35, باستخدام

(a) طريقة ذكر العناصر.
(b) الطريقة الوصفية.
(c) رمز بناء المجموعة.

الحل

(a) {32, 33, 34, 35, . . .}

(b) المجموعة S هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأكبر من 31.

(c) $\{x \mid x \in N \text{ و } x > 31\}$

جرّب هذا 6

صمّم المجموعة التي تضم العناصر . . . 11, 13, 15, 17, باستخدام

(a) طريقة ذكر العناصر.
(b) الطريقة الوصفية.
(c) رمز بناء المجموعة.

إذا تضمنت المجموعة عناصر متعددة، فيمكننا إعادة استخدام علامة القطع لتمثيل العناصر المفقودة طالما كنا نستخدم نمطًا واضحًا. على سبيل المثال، تتضمن المجموعة {1, 2, 3, . . . 99, 100} كل الأعداد الطبيعية من 1 إلى 100. وبالمثل، والمجموعة {a, b, c, . . . , x, y, z} تتضمن كل الحروف الهجائية الإنجليزية.

مثال 7 كتابة مجموعة باستخدام علامة القطع

باستخدام ذكر العناصر، اكتب المجموعة التي تتضمن كل الأعداد الطبيعية الزوجية التي 99 < و201.

الحل

{100, 102, 104, . . . , 198, 200}

جرّب هذا 7

باستخدام ذكر العناصر، اكتب مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية التي بين 50 و500.

2. كتابة المجموعات بثلاث طرق مختلفة.

توجد بعض الحالات التي يكون من الضروري فيها تحديد المجموعة من دون عناصر. على سبيل المثال، لن تتضمن مجموعة الرئيسات السيدات للولايات المتحدة أشخاصًا، ومن ثم تكون بلا عناصر (على الأقل حتى كتابة هذه السطور).

تُسمى المجموعة التي لا تتضمن أي عناصر **المجموعة الخالية**. والرمزان المستخدمان لتمثيل المجموعة الخالية هما { } أو $\emptyset$.

almanahj.com/ae
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ملاحظة رياضية

في ديسمبر 2011، أعلنت مجموعة من العلماء من اليابان وروسيا أنها تأمل في استنساخ ماموثًا من الحمض النووي المتجمد لفترة طويلة والموجود في سيبيريا خلال 5 سنوات. أعتقد أننا قد نتفق جميعًا على أنه سيكون رائعًا جدًا. لذا فأنا أحتفظ بالحق في تغيير إجابتي عن المثال 8(b).

مثال 8 تحديد المجموعات الخالية

أي من المجموعات التالية خالية؟

(a) مجموعة أحافير الماموث في المتاحف
(b) $\{x | x$ ماموث صوفي حي$\}$
(c) $\{O\}$
(d) $\{x | x$ عدد طبيعي محصور بين 1 و2$\}$

الحل

(a) توجد بشكل مؤكد أحفورة ماموث على الأقل في أحد المتاحف في مكان ما. ومن ثم فإن المجموعة غير خالية.
(b) لقد انقرضت حيوانات الماموث منذ 8,000 سنة تقريبًا. ومن ثم تكون هذه المجموعة خالية بالتأكيد.
(c) هذه المجموعة مخادعة. فكل من $\{\ \}$ وO يمثل المجموعة الخالية. لكن $\{O\}$ هي مجموعة تتضمن المجموعة الخالية، والتي تحتوي على عنصر واحد. انتبه. إنها تتضمن عنصرًا واحدًا.
(d) هذه المجموعة خالية حيث لا توجد أعداد طبيعية بين 1 و2.

جرّب هذا 8

أي من المجموعات التالية خالية؟

(a) $\{x | x$ عدد طبيعي يقبل القسمة على 7$\}$
(b) $\{x | x$ إنسان يعيش على كوكب المريخ$\}$
(c) $\{\{\ \}\}$
(d) تتألف المجموعة Z من الأشخاص الذين يعيشون على الأرض وتزيد أعمارهم عن 120 سنة.

تنبيه

تأكد من أنك لا تكتب المجموعة الخالية على الصورة $\{O\}$، حيث تشير الأقواس إلى مجموعة تحتوي على ما بداخلها، بحيث يمثل الرمز مجموعة تحتوي على عنصر واحد: المجموعة الخالية.

العدد الرئيس للمجموعة

3. تعريف المجموعة الخالية.

يُسمى عدد العناصر في المجموعة *العدد الرئيس* للمجموعة. على سبيل المثال، تحتوي المجموعة $R = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ على عدد رئيس يساوي 5 لأنها تحتوي على 5 عناصر. كما يمكن التعبير عن ذلك أيضًا بقولنا **عدد العناصر الرئيسة** للمجموعة R هو 5. ويُعرَّف رسميًا كما يلي.

العدد الرئيس لمجموعة هو عدد العناصر فيها. بالنسبة إلى المجموعة A يرمز لعدد العناصر الرئيسة فيها $n(A)$، والذي يُقرأ "n لـ A".

مثال 9 إيجاد عدد العناصر الرئيسة لمجموعة

جد العدد الرئيس لكل مجموعة.

(a) $A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$
(b) $B = \{x | x \in N$ و $x < 16\}$
(c) $C = \{16\}$
(d) O

الحل

(a) $n(A) = 6$ لأن المجموعة A تحتوي على 6 عناصر
(b) B هي المجموعة $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 14, 15\}$، التي تحتوي على 15 عنصرًا. ومن ثم تكون $n(B) = 15$.
(c) $n(C) = 1$ لأن المجموعة C تحتوي على عنصر واحد
(d) $n(O) = 0$ حيث لا توجد عناصر في المجموعة الخالية

almanahj.com/ae
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظة لصالح المنهج والتأليف

جرّب هذا 9

جِد العدد الرئيس لكل مجموعة.

(a) $A = \{z, y, x, w, v\}$
(b) $B = \{x \mid x \in E \text{ و } 15 < x < 31\}$
(c) $C = \{\text{شيفروليه}\}$

4. إيجاد عدد العناصر الرئيسة في المجموعة.

المجموعات المنتهية وغير المنتهية

يمكن تصنيف المجموعات إلى منتهية أو غير منتهية.

تسمى المجموعة **منتهية** إذا تضمنت عددًا مُحددًا من العناصر، أو كان عدد عناصرها عددًا طبيعيًا. وتُسمى المجموعة التي ليست منتهية **مجموعة غير منتهية** إذا تضمنت عدد غير مُحدد من العناصر. فالمجموعة $\{p, q, r, s\}$ منتهية لأنها تحتوي على أربعة عناصر: p وq وr وs. أما المجموعة $\{10, 20, 30, \ldots\}$ غير منتهية لأنها تحتوي على عدد غير مُحدد من العناصر: فهي كل الأعداد الطبيعية التي تمثل مضاعفات العدد 10.

ملاحظة رياضية

إذا كنت تتساءل عن كيفية وصف عدد العناصر الرئيسة للمجموعة غير المنتهية، فستجد القسم 5.

مثال 10 تصنيف المجموعات إلى منتهية وغير منتهية

صنّف كل مجموعة إلى منتهية أو غير منتهية.

(a) $\{x \mid x \in N \text{ و } x < 100\}$
(b) المجموعة R هي مجموعة الحروف المستخدمة لكتابة الأعداد الرومانية.
(c) $\{100, 102, 104, 106, \ldots\}$
(d) المجموعة M هي مجموعة أعداد أرجل الكائنات الحالية.
(e) المجموعة S هي مجموعة الأناشيد التي يمكن كتابتها.

الحل

(a) المجموعة منتهية حيث يوجد 99 عددًا طبيعيًا أقل من 100.
(b) المجموعة منتهية حيث إن الحروف المستخدمة هي C وD وI وL وM وV وX.
(c) المجموعة غير منتهية حيث إنها تتكون من عدد غير مُحدد من العناصر.
(d) المجموعة منتهية حيث يوجد عدد مُحدد من الأشخاص في أسرتك الحالية.
(e) المجموعة غير منتهية حيث يمكن كتابة عدد غير مُحدد من الأناشيد.

جرّب هذا 10

صنّف كل مجموعة إلى منتهية أو غير منتهية.

(a) المجموعة P هي مجموعة الأعداد التي تتضمن مضاعفات العدد 6.
(b) $\{x \mid x$ هو عدد المجلس الوطني الاتحادي$\}$
(c) $\{6, \ldots, 24\}$
(d) مجموعة كلمات مرور أجهزة الكمبيوتر المحتملة

5. تصنيف المجموعات إلى منتهية أو غير منتهية.

المجموعات المتساوية والمتكافئة

عند دراسة نظرية المجموعات، سنحتاج إلى فهم الفرق بين مفهومين أساسيين: *المجموعات المتساوية* و*المجموعات المتكافئة*.

تكون المجموعتان A وB **متساويتين** (تُكتبان على الصورة $A = B$) إذا كان بهما العناصر نفسها. وتُعتبر المجموعتان المنتهيتان A وB **متكافئتين** (تُكتبان على الصورة $A \cong B$) إذا كان بهما عدد العناصر نفسه؛ أي أن $n(A) = n(B)$.

فمثلًا تتساوى المجموعتان $\{a, b, c\}$ و$\{c, b, a\}$ حيث إنهما تحتويان على العناصر نفسها a وb وc. كما أن المجموعة $\{4, 5, 6\}$ تساوي المجموعة $\{4, 4, 5, 6\}$ حيث لا يلزم كتابة 4 مرتين في المجموعة الثانية. أما المجموعة التي تضم كافة أسماء الطلاب في صفك ومجموعة بطاقات تعريفهم فمتكافئتان لأنهما تحتويان على عدد العناصر نفسه لكن العناصر مختلفة ومن ثم تكونان غير متساويتين.

ملاحظة رياضية

كل المجموعات المتساوية متكافئة لأن كلتا المجموعتين ستحتوي على عدد العناصر نفسه. ولكن ليست كل المجموعات المتكافئة متساوية.

almanahj.com/ae

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جرّب هذا 12

أثبت أن المجموعتين {شمال، جنوب، شرق غرب} و{شمس، مطر، ثلج، برد} بينهما تناظر واحد لواحد.

المجموعات المتناظرة والمتكافئة

6. تحديد ما إذا كانت المجموعتان متساويتين أم متكافئتين.

تكون المجموعتان
- متكافئتان إذا كان يمكن وضع عناصرهما في تناظر واحد لواحد.
- غير متكافئتين إذا لم نتمكن من وضع عناصرهما في تناظر واحد لواحد.

إجابات جرّب هذا

1 {January, February, May, July}

2 (a) {80, 82, 84, 86, 88, 90}
(b) {11, 13, 15, 17, . . .}

3 (a) صائبة (b) خاطئة (c) صائبة

4 مجموعة الأعداد الصحيحة من −3 إلى 3

5 (a) $K = \{x | x \in E$ و $x > 9$ و $x < 19\}$. مجموعة x بحيث x هو عددٌ طبيعيٌّ زوجيٌّ وx أكبر من 9 وx أقل من 19.
(b) $W = \{x | x$ جنسية أوروبية$\}$. مجموعة x بحيث x هي جنسية أوروبية.

6 (a) {11, 13, 15, 17, . . .}
(b) مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية التي تزيد عن 10
(c) $\{x \mid x \in N$، x عدد فردي و $x > 10\}$

7 {51, 53, 55, . . . , 497, 499}

8 (b) و(d)

9 (a) 5 (b) 8 (c) 1

10 (a) غير منتهية (b) منتهية (c) منتهية (d) غير منتهية

11 (a) متكافئتان (c) متساويتان ومتكافئتان
(b) لا شيء منهما (d) متكافئتان

12 شمال جنوب شرق غرب
↕ ↕ ↕ ↕
شمس مطر ثلج برد

almanahj.com/ae

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 10-1 مجموعة التمارين

دليل الدراسة

التمارين الكتابية

1. اشرح ما المقصود بالمجموعة.
2. ما معنى أن تكون المجموعة محدودة؟
3. اكتب مثالًا لمجموعة محدودة، وأخرى غير محددة. (لا تقتبس أمثلة من الكتاب!)
4. اذكر ثلاث طرق لكتابة المجموعات وصفها.
5. ما الفرق بين المجموعتين المتساويتين والمتكافئتين؟
6. اشرح الفرق بين المجموعة المنتهية وغير المنتهية.
7. ما المقصود بـ "تناظر واحد لواحد بين مجموعتين"؟
8. عرّف المجموعة الخالية واذكر مثالَين لمجموعة خالية.

التمارين الحسابية

بالنسبة إلى التمارين 9-22. اكتب كل مجموعة باستخدام طريقة ذكر العناصر. إذا احتوت على عناصر متكررة، وفكر في سبب عدم احتياجك إلى إدراج العنصر أكثر من مرة واحدة. قد ترغب في القيام ببحث بسيط عبر الإنترنت بالنسبة إلى بعض المسائل.

9. T هي مجموعة الحروف في كلمة تفكير.
10. A هي مجموعة [illegible] دولة الامارات العربية المتحدة.
11. P هي مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين 50 و60.
12. R هي مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية المحصورة بين 10 و40.
13. $C = \{x \mid x \in N \text{ و } x < 9\}$
14. $F = \{x \mid x \in N \text{ و } x > 100\}$
15. $G = \{x \mid x \in N \text{ و } x > 10\}$
16. B هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأكبر من 100.
17. Y هي مجموعة الأعداد الطبيعية بين 2,000 و3,000.
18. $Z = \{x \mid x \in N \text{ و } 500 < x < 6{,}000\}$
19. C هي مجموعة الألوان في أعلام البلدان التي تبدأ في O في اللغة الإنجليزية.
20. S هي مجموعة لاعبي اتحاد الإمارات العربية المتحدة لكرة السلة.
21. L هي مجموعة الأربطة التي في ركبة الإنسان.
22. A هي مجموعة عواصم الإمارات السبعة في الإمارات العربية المتحدة.

بالنسبة إلى التمارين 23-28. حدد ما إذا كانت العبارة صائبة أم خاطئة.

23. $5 \in \{1, 3, 5, 7\}$
24. $8 \notin \{2, 4, 6, \ldots\}$
25. $\frac{1}{2} \notin N$
26. $0.6 \in N$
27. $\{x \mid x$ ديناصور ستيجوسورس حي$\}$ مجموعة خالية.
28. أبو ظبي تنتمي إلى $\{x \mid x$ إحدى الإمارات العربية$\}$

بالنسبة إلى التمارين 29-36. اكتب كل مجموعة باستخدام الطريقة الوصفية.

29. $\{5, 10, 15, 20, \ldots\}$
30. $\{4, 8, 12, 16\}$
31. $\{13, 26, 39, 52\}$
32. $\{7, 14, 21, 28, \ldots\}$
33. $\{s, t, e, v, n\}$
34. $\{a, u, g, s, t\}$
35. $\{100, 101, 102, \ldots, 199\}$
36. $\{21, 22, 23, \ldots, 29, 30\}$

بالنسبة إلى التمارين 37-42. اكتب كل مجموعة باستخدام رمز بناء المجموعة، ثم اكتب وصفًا بديلًا لكل مجموعة.

37. $\{10, 20, 30, 40, \ldots\}$
38. $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$
39. X هي مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية الأقل من 16.
40. Z هي مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين 70 و76.
41. $\{$أحمر، أبيض، أزرق$\}$
42. $\{$أسود، أبيض، أحمر، أخضر$\}$

بالنسبة إلى التمارين 43-48. اذكر العناصر في كل مجموعة.

43. H هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأقل من 0.
44. $\{x \mid x \in N \text{ و } 70 < x < 80\}$
45. $\{x \mid x$ أحد فصول السنة$\}$
46. R هي مجموعة الحروف التي يمكن أن تكون ساكنة أو متحركة في اللغة الإنجليزية.
47. $\{x \mid x$ عدد طبيعي زوجي بين 100 و120$\}$
48. $\{x \mid x$ عدد طبيعي فردي بين 90 و100$\}$

بالنسبة إلى التمارين 49-54. حدد ما إذا كانت كل مجموعة محدودة أم ليست محدودة.

49. L هي مجموعة المتسابقين الذين ربحوا في برنامج المسابقات
50. AIA مجموعة الطلاب الذين حصلوا على شهادات تقدير في الشارقة
51. {لاعبو كرة السلة في اتحاد الإمارات العربية المتحدة الذين أحرزوا غمسات رائعة الأسبوع الماضي}
52. N هي مجموعة المرضى المستحقين لزراعة القلب.
53. $B = \{x \mid x$ عدد كبير$\}$
54. $C = \{x \mid x$ عدد أكبر من عدد السكان في الإمارات العربية المتحدة$\}$

بالنسبة إلى التمارين 55-60. حدّد ما إذا كانت العبارة صائبة أم خاطئة.

افترض أن A = مجموعة المحيطات
$B = \{10, 20, 30, 40, \ldots\}$
C = مجموعة لاعبي كرة القدم المشهورين

55. $35 \in B$
56. ليبرون جيمس ينتمي إلى C
57. البحر الأبيض المتوسط لا ينتمي إلى A
58. $350 \in B$
59. المحيط الهادئ ينتمي إلى A
60. ديفيد بيكهام ينتمي إلى C

almanahj.com/ae

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

بالنسبة إلى التمارين 61-68. حدد ما إذا كانت كل مجموعة غير منتهية أم منتهية.

61. $\{x \mid x$ ينتمي إلى N وx عدد زوجي$\}$
62. $\{1, 2, 3, \ldots, 999, 1{,}000\}$
63. K هي مجموعة الحروف الأبجدية العربية.
64. $\{x \mid x$ ينتمي إلى أعداد المدارس الثانوية في إمارة دبي$\}$
65. $\{x \mid x$ ينتمي إلى N وx عدد يكون آحاده صفرًا$\}$
66. $\varnothing$
67. $\{x \mid x$ برنامج تلفزيوني حالي$\}$
68. $\{x \mid x$ كسر$\}$

بالنسبة إلى التمارين 69-74. حدد ما إذا كان كل زوج من المجموعات متساويًا أم متكافئًا أم لا هذا ولا ذاك.

69. $\{t, v, w, s, u\}$ و$\{s, t, u, v, w\}$
70. $\{10, 20, 30, 40, 50\}$ و$\{1, 2, 3, 4, 5\}$
71. $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ و$\{2, 4, 6, 8\}$
72. {واحد} و{و، ا، ح، د}
73. $\{\varnothing\}$ و$\{3\}$
74. $\{x \mid x$ ينتمي إلى أسماء الشهور التي تتكون من 30 يومًا بالتحديد$\}$ و{أبريل، يونيه، سبتمبر، نوفمبر}

بالنسبة إلى التمارين 75-78. أثبت أن كل زوج من المجموعات متكافئ باستخدام تناظر واحد لواحد.

75. $\{40, 10, 20, 30\}$ و$\{10, 20, 30, 40\}$
76. $\{1, 2, 3, 4\}$ و$\{w, x, y, z\}$
77. $\{x \mid x \in N\}$ و$\{x \mid x$ من مضاعفات العدد $4\}$
78. $\{x \mid x$ عدد طبيعي فردي أقل من $11\}$ و$\{x \mid x$ عدد طبيعي زوجي أقل من $12\}$

بالنسبة إلى التمارين 79-86. جد العدد الرئيس لكل مجموعة.

79. $A = \{63, 72, 51, 44\}$
80. $B = \{10, 11, 12, \ldots, 20\}$
81. $C = \{x \mid x$ يوم في الأسبوع$\}$
82. $D = \{x \mid x$ شهر في السنة$\}$
83. $E = \{$ثلاثة$\}$
84. $F = \{$ث، ل، ا، ة$\}$
85. $G = \{x \mid x$ ينتمي إلى N وx عدد سالب$\}$
86. $H = \varnothing$

بالنسبة إلى التمارين 87-92. حدّد ما إذا كانت كل عبارة صائبة أم خاطئة.

87. كل المجموعات المتساوية متكافئة.
88. لا توجد مجموعات متكافئة متساوية.
89. $n(\{\varnothing\}) = 0$
90. $E = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ مجموعة منتهية
91. $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ مكافئة لـ $\{10, 20, 30, 40, \ldots\}$
92. $n(\{\ \}) = 0$

التطبيقات في عالمنا

93. يوضح الجدول أعلى 10 ولايات من حيث عدد المهاجرين الممنوحين إقامة دائمة في 2015.

الولاية	عدد المهاجرين	% من إجمالي المهاجرين إلى الولايات المتحدة
كاليفورنيا	209,568	19.9%
نيويورك	130,010	12.4%
فلوريدا	118,873	11.3%
تكساس	99,727	9.5%
نيو جيرسي	49,801	4.7%
إلينوي	40,482	3.9%
ماساشوستس	28,535	2.7%
[illegible]جينيا	27,622	2.6%
[illegible]	25,919	2.5%
[illegible]	24,969	2.4%

المصدر: وزارة الأمن الداخلي في الولايات المتحدة

(a) اذكر مجموعة الولايات التي يزيد عدد مهاجريها على 100,000.
(b) اذكر عناصر مجموعة الولايات المذكورة ضمن أعلى 10 ولايات ويقل عدد مهاجريها عن 50,000.
(c) اسرد عناصر $\{x \mid x$ الولاية التي تتضمن 4% على الأقل من إجمالي المهاجرين$\}$.
(d) اذكر عناصر $\{x \mid x$ الولاية التي تتضمن ما يتراوح بين 3% و10% من إجمالي المهاجرين$\}$.

94. يسرد الجدول عدد درجات البكالوريوس التي منحها في الإمارات العربية المتحدة في أفضل 10 تخصصات لعام 2009 في الجدول، إلى جانب بيانات عامي 1999 و2014 أيضًا.

(a) اسرد مجموعة التخصصات التي زادت شعبيتها في كل عام مذكور.
(b) اسرد مجموعة التخصصات التي لم تزد شعبيتها من 2009 حتى 2014.
(c) اسرد مجموعة التخصصات التي تضم ما يتراوح بين 90,000 و120,000 درجة تم منحها عام 2014.
(d) جد المجموعة $\{x \mid x$ زيادة الشعبية بين 2004 و2009$\}$.
(e) لإيجاد نسبة الزيادة P بين الكمية الأصلية O والكمية الجديدة N. استخدم الصيغة التالية: $P = (N - O)/O$. احسب نسبة زيادة أي تخصص شهد زيادة في عدد الدرجات التي تم منحها بين عامي 2009 و2014. اسرد بعض التخصصات التي زادت على الأقل بنسبة 30%.

almanahj.com/ae

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

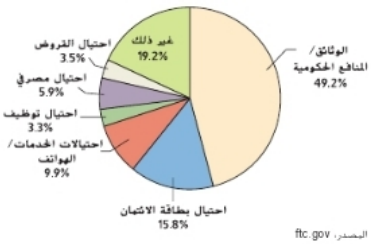
الدرس 10-1 مجموعة التمارين يُتبع

التخصص	2004	2009	2014
قطاع الأعمال	307,149	348,056	358,079
المهن الصحية والبرامج ذات الصلة	73,934	120,420	198,770
العلوم الاجتماعية والتاريخ	150,357	168,517	173,096
علم النفس	82,098	94,273	117,298
العلوم البيولوجية والطبية	62,624	82,828	104,633
التربية	106,278	101,716	98,854
الفنون البرئية والاستعراضية	77,181	89,143	97,246
الهندسة	63,410	68,911	92,162
التواصل والصحافة والبرامج ذات الصلة	70,968	77,984	87,604
الأمن الداخلي وإنفاذ القانون ومكافحة الحرائق	28,175	41,788	62,409

المصدر: شبكة الحارس المستهلك

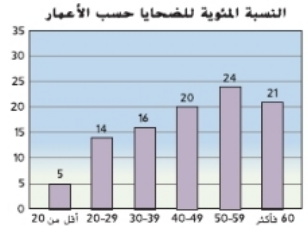
95. تُعد سرقة الهوية الآن إحدى أكثر الجرائم المكلفة في الولايات المتحدة، وتؤثر غالبًا في البالغين الأصغر سنًا. فمن بين 251,000 شكوى بسرقة الهوية قُدمت إلى لجنة التجارة الفدرالية (FTC) عام 2015، كان أكثر من 30% من أعمار الضحايا أقل من 30 سنة. يوضح المخطط التالي أنواع حالات سرقة الهوية التي تم الإبلاغ عنها في عام 2015 ونسبة الضحايا حسب العمر.

أنواع احتيالات سرقة الهوية المبلَّغ عنها في عام



المصدر: ftc.gov

النسبة المئوية للضحايا حسب الأعمار



(a) اذكر عناصر مجموعة تضم نوعي سرقة الهوية الأقل نسبة من بين الجرائم المبلَّغ عنها.

(b) اذكر عناصر مجموعة الفئات العمرية التي تزيد نسبتها عن 18%.

(c) اذكر عناصر مجموعة أنواع سرقة الهوية التي شكّلت أكثر من نسبة 15% من بين الجرائم المبلَّغ عنها.

(d) اذكر عناصر المجموعة $\{x|x$ تنتمي إلى الذين أعمارهم 40 سنة فأكثر من بين ضحايا سرقة الهوية$\}$.

(e) اذكر عناصر المجموعة $\{x|x$ نوع الحالة التي وقعت بنسبة تتراوح بين 10% و20% من الجرائم المبلَّغ عنها$\}$.

(f) أضف النسب المئوية التي في المخطط الدائري. ماذا تلاحظ؟ هل يمكنك التفكير في التفسيرات المحتملة؟

96. تزامن ازدهار التوزيع الرقمي للموسيقى مع انهيار القرص المدمج، على الأقل فيما يتعلق بالمبيعات. يوضح المخطط عدد الأقراص المدمجة والألبومات المنزّلة التي تم بيعها (بالملايين) لبعض السنوات الأخيرة، بالإضافة إلى قيمة تلك المبيعات (أيضًا بالملايين).

(a) اذكر عناصر مجموعة السنوات التي تجاوزت خلالها مبيعات القرص المدمج قيمة تنزيلات الألبومات.

(b) اذكر عناصر مجموعة السنوات التي قلّت فيها قيمة تنزيلات الألبومات عن السنة السابقة.

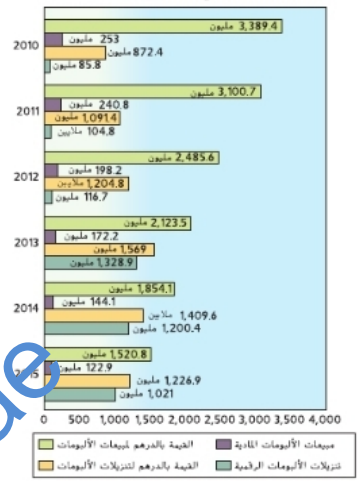
(c) اذكر عناصر $\{x|x$ السنة التي انخفض فيها عدد مبيعات الألبومات بما يزيد على 25 مليون وحدة$\}$.

(d) اذكر عناصر المجموعة $\{x|x$ القيمة الدرهمية لتنزيلات الألبومات التي شكّلت زيادة تزيد عن 100 مليون AED من العام السابق$\}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

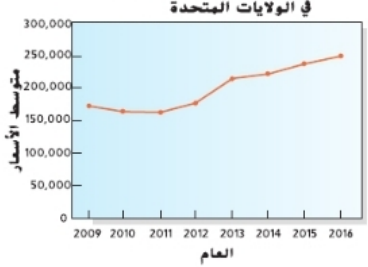
almanahj.com/ae

مبيعات الأقراص المدمجة مقابل تنزيلات الألبومات في الولايات المتحدة



97. لقد استغرق الأمر بعض الوقت، لكن في عام 2015، وصلت أسعار المساكن أخيرًا إلى قيم مماثلة للأسعار قبل انهيار الإسكان في عام 2006. يعرض التمثيل البياني الخطي أدناه متوسط أسعار المساكن الحالية في الإمارات العربية المتحدة للأعوام من 2009 إلى 2016.

متوسط أسعار المساكن الحالية في الولايات المتحدة



المصدر: الرابطة الوطنية للوسطاء العقاريين

(a) اذكر عناصر مجموعة السنوات التي كان فيها متوسط الأسعار فوق $200,000.

(b) اذكر عناصر مجموعة السنوات التي كان فيها متوسط الأسعار يتراوح بين $170,000 و$200,000.

(c) جد $\{x \mid x$ السنة التي زاد فيها متوسط الأسعار عن السنة السابقة$\}$.

(d) جد $\{x \mid x$ السنة التي انخفض فيها متوسط الأسعار عن السنة السابقة$\}$.

التفكير الناقد

98. إذا كانت $A \cong C$ و $B \cong C$، فهل $A \cong B$؟ اشرح إجابتك.

99. هل $\{0\}$ مكافئة لـ $\emptyset$؟ اشرح إجابتك.

100. اكتب مجموعتين متكافئتين ولكن غير متساويتين.

لماذا لا يمكن كتابة مجموعتين متساويتين ولكن غير متكافئتين؟

101. إننا نعرف أن المجموعتين تكونان متكافئتين إذا استطعنا الربط بين عناصرهما بتناظر واحد لواحد.

(a) ما المجموعة التي تضم عناصر أكثر:
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$
أو $B = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$؟

(b) اكتب المقابلة بين المجموعتين A وB حيث يتقابل كل عنصر في A مع مثليه في B. هل يغير هذا تفكيرك بشأن إجابتك عن الجزء (a)؟ (إذا وجدت هذه المسألة ممتعة، فسحب الفسم 5 كثيرًا).

102. اذكر كل المجموعات المختلفة التي يمكنك تكوينها باستخدام العناصر التي في المجموعة $\{2, 4, 6\}$ فقط.

(b) [illegible] مجموعات يمكن تكوينها في الجزء (a). هل وجدت سبيلا منها؟ إذا كنت قد وجدتها، فهل يمكنك [illegible] ترك واحدة؟

103. اشرح لماذا كل من المجموعات التالية غير محدودة.

(a) مجموعة جميع الأوروبيين.

(b) مجموعة المباريات الماضية من طراز 2011

(c) مجموعة جميع الكائنات التي لها فرصة مشروعة للفوز ببطولة كرة السلة (يمكن على الأقل!)

(d) مجموعة جميع الوظائف التي يتقاضى أصحابها ما يزيد على AED50,000 سنويًا

(e) مجموعة الأمهات

104. أحيانًا عندما تكون المجموعة غير محدودة، يمكنك تقديم وصف أفضل يجعلها محدودة. على سبيل المثال، مجموعة الأفلام الرائعة حقًا من سنة 2016 ليست محدودة، لكن إذا غيرنا الوصف إلى مجموعة الأفلام التي صدرت في 2016 وحصلت على 90/100 على الأقل من تقدير النقد فسنكون قد حددنا ما نقصد بقولنا "رائعة حقًا". والآن أصبحت المجموعة محدودة. بالنسبة إلى كل من المجموعات في التمرين 105 اكتب وصفًا يجعل المجموعة محدودة؟

almanahj.com/ae

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

615

ملاحظاتي

almanahj.com/ae

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 10-2 المجموعات الجزئية والعمليات على المجموعات

أهداف التعلم

1. تعريف متممة المجموعة.
2. إيجاد كافة المجموعات الجزئية للمجموعة.
3. استخدام رمز المجموعة الجزئية.
4. إيجاد عدد المجموعات الجزئية للمجموعة.
5. إيجاد التقاطعات والاتحادات والفروق بين المجموعات.

لقد رأينا أن نظرية المجموعات تتعلق بتحديد العلاقات بين الأشياء التي يتم تجميعها معًا لسبب ما. وبتناول هذه الفكرة بتوسع أكبر، فإن المجموعات ترتبط غالبًا مع المجموعات الأخرى بعلاقات، وهذا عندما تصبح الأشياء معقدة نوعًا ما. في هذه الحالة، سيكون النظام الخاص بعرض هذه العلاقات ودراستها مفيدًا، وهو في النهاية نوع من النقاط الأساسية لدراسة نظرية المجموعات. لكننا لم نتطرق إلى الآن إلا إلى ظاهر الموضوع. على سبيل المثال، هب أنك أحد أعضاء كلتا مجموعتي طلاب المدرسة الثانوية والطلاب الذين يخوضون دورة تدريبية في رياضيات المرحلة الثانوية. فمن الممكن أن تكون ضمن مجموعة طلاب الصف العاشر أو مجموعة طلاب الصف الحادي عشر، لكن ليس في كليهما. وربما تكون ضمن مجموعة الطلاب الذين يعيشون بعيدًا عن حرم المدرسة ومجموعة الطلاب الذين يذهبون إلى المدرسة مشيًا. وربما تكون ضمن مجموعة الطلاب الذين يتناولون الغداء في كافتيريا المدرسة ومجموعة الطلاب الذين يعتقدون أن البطاطس المقلية رطبة جدًا. لكن ليس في مجموعة الأشخاص الذين يضعون صلصة الطماطم ويأكلون الأشياء الرديئة بأي شكل. لنر ما الذي يمكننا القيام به حول تنظيم هذه الروابط المعقدة بين المجموعات. في هذا الدرس، سندرس العلاقات بين المجموعات.

لكي نبدأ، سنحتاج إلى التفكير في مفهوم جديد يُسمى *المجموعة الشاملة*.

والمجموعة الشاملة الخاصة بحالة معينة، ورمزها U، هي مجموعة جميع الأشياء التي يكون من المنطقي مراعاتها في هذه الحالة.

على سبيل المثال، تحتوي كل المجموعات المذكورة في الفترة الافتتاحية على أشخاص، ومن ثم يمكننا نظريًا استخدام مجموعة جميع البشر بوصفها U. لكن الأمر ليس منطقيًا أن تقوم بتخصيص $U = \{\text{طلاب المرحلة الثانوية}\}$.

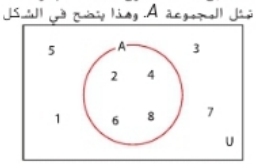
وبمجرد تحديد المجموعة الشاملة في حالة معينة، يمكننا حصر التفكير في عناصر هذه المجموعة فقط. إذا كانت $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$، فإن العناصر التي يمكننا استخدامها فقط لتحديد المجموعات الأخرى في هذه الحالة هي مجموعة الأعداد الصحيحة من 1 إلى 8.

سنستخدم في بقية هذه الوحدة طريقة ذكية لتصور المجموعات وعلاقاتها تُسمى **مخطط فن** *Venn* (وقد سُمي بذلك نسبة إلى الرجل الذي قام بتطويره، جون فن، في القرن التاسع عشر). يعرض الشكل 2-1 مثالًا.

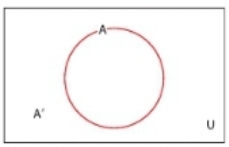
يمكنك الحصول على مزيد من المعلومات من هذه المخطط البسيط. فلتحديد مجموعة تسمى A والمجموعة الشاملة التي يمكن من خلالها اختيار عناصر المجموعة A هي $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. المجموعة A هي $\{2, 4, 6, 8\}$. والعناصر التي ليست ضمن المجموعة A هي $\{1, 3, 5, 7\}$. سنسمي عناصر المجموعة U والتي ليست ضمن المجموعة A متممة المجموعة A. ونشير إليها بالرمز A'.

ومتممة المجموعة A، ورمزها A'، هي مجموعة العناصر التي في المجموعة الشاملة U ولكن ليست في A. باستخدام بناء رمز المجموعة، تكون متممة A هي $A' = \{x | x \in U \text{ و } x \notin A\}$.

في مخطط فن *Venn*، تكون متممة المجموعة A هي كافة العناصر التي بداخل المستطيل ولكن ليست بداخل الدائرة التي تمثل المجموعة A. وهذا يتضح في الشكل 1.



الشكل 1



الشكل 2

almanahj.com/ae
حقوق الطبع والتأليف © لمجموعة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 1 إيجاد متممة المجموعة

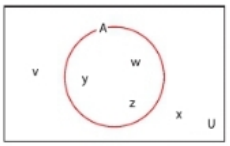
(a) لتكن $U = \{v, w, x, y, z\}$ و$A = \{w, y, z\}$. جد A' وارسم مخطط فن *Venn* الذي يوضح هذه المجموعات.

(b) ما متممة المجموعة الشاملة لحالة معينة؟

الحل

(a) باستخدام قائمة العناصر التي في U. يلزمنا فقط شطب العناصر التي في A كذلك. وستكون العناصر المتبقية في المجموعة A'.

$U = \{v, w, x, y, z\}$ $\quad A' = \{v, x\}$



الشكل 3

يظهر مخطط فن *Venn* في الشكل 3.

(b) لا توجد عناصر في مجموعة شاملة ليست ضمن المجموعة الشاملة، ومن ثم، ووفقًا لتعريف المتممة، لا توجد عناصر في متممة مجموعة شاملة، أي إن المتممة هي المجموعة الخالية.

جرّب هذا 1

(a) افترض أن $U = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$ و$A = \{10, 30, 50\}$. جد A' وارسم مخطط فن *Venn* الذي يوضح هذه المجموعات.

(b) ما متممة المجموعة الخالية؟

1. تحديد متممة المجموعة.

المجموعات الجزئية

كنا قد أشرنا في بداية هذا الدرس إلى أنك تنتمي إلى كلتا مجموعتي طلاب المدرسة الثانوية والطلاب الذين يخوضون دورة تدريبية في رياضيات المرحلة الثانوية. لاحظ أن كل من في المجموعة الثانية هو بالفعل في المجموعة الأولى. (فلا شك أنك إذا كنت تخوض دورة تدريبية في رياضيات المرحلة الثانوية، فلابد أن تكون طالبًا في المدرسة الثانوية). ويمكن أن نقول إن مجموعة الطلاب الذين يخوضون الدورة التدريبية في رياضيات المرحلة الثانوية مشمولون ضمن مجموعة جميع طلاب المدرسة الثانوية. وإذا كانت مجموعة ما مشمولة في مجموعة أخرى، فإننا نُسمي المجموعة الأصغر مجموعة جزئية للمجموعة الأكبر.

المفهوم الأساسي المجموعات الجزئية

إذا كان كل عنصر في المجموعة A عنصرًا في المجموعة B، فإن A تُسمى **مجموعة جزئية** للمجموعة B. نستخدم الرمز $\subseteq$ لتحديد المجموعة الجزئية؛ في هذه الحالة، نكتب $A \subseteq B$ ونقرأ A **محتواة في** B.

يوجد العديد من المجموعات الجزئية لهذه المجموعة من الطلاب المستمتعين بعطلة الربيع: المجموعة الجزئية للطالبات الإناث، المجموعة الجزئية للطلاب الذكور، وهكذا.

وثمة تعريف آخر مماثل في أن A مجموعة جزئية من B إذا لم توجد أي عناصر في A ليست أيضًا في B. فيما يلي مجموعتان تتعلقان بالمجموعات الجزئية.

- كل مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها. يكون كل عنصر في المجموعة A عنصرًا في المجموعة A ومن ثم فإن $A \subseteq A$.
- المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية من كل مجموعة. فالمجموعة الخالية لا تتضمن أي عناصر، ومن ثم، فبالنسبة إلى أي مجموعة A، لا يمكنك تحديد أي عنصر $\emptyset$ غير موجود كذلك في A.

إذا بدأنا بالمجموعة $\{x, y, z\}$، فإليك جميع المجموعات الجزئية التي يمكننا تكوينها:

عدد العناصر في المجموعة الجزئية	المجموعات الجزئية المرتبة على هذا العدد من العناصر	
3	$\{x, y, z\}$	(مجموعة جزئية واحدة)
2	$\{x, y\}$، $\{x, z\}$، $\{y, z\}$	(ثلاث مجموعات جزئية)
1	$\{x\}$، $\{y\}$، $\{z\}$	(ثلاث مجموعات جزئية)
0	$\emptyset$	(مجموعة جزئية واحدة)

لذا، بالنسبة إلى مجموعة مكونة من ثلاثة عناصر، يمكننا تكوين ثماني مجموعات جزئية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

almanahj.com/ae

مثال 1 إيجاد متممة المجموعة

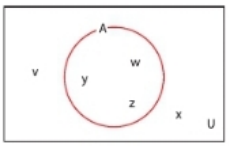
(a) لتكن $U = \{v, w, x, y, z\}$ و$A = \{w, y, z\}$. جد A' وارسم مخطط فن *Venn* الذي يوضح هذه المجموعات.

(b) ما متممة المجموعة الشاملة لحالة معينة؟

الحل

(a) باستخدام قائمة العناصر التي في U. يلزمنا فقط شطب العناصر التي في A كذلك. وستكون العناصر المتبقية في المجموعة A'.

$U = \{v, w, x, y, z\}$ $A' = \{v, x\}$



الشكل 3

يظهر مخطط فن *Venn* في الشكل 3.

(b) لا توجد عناصر في مجموعة شاملة ليست ضمن المجموعة الشاملة، ومن ثم، ووفقًا لتعريف المتممة، لا توجد عناصر في متممة مجموعة شاملة. أي إن المتممة هي المجموعة الخالية.

جرّب هذا 1

(a) افترض أن $U = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$ و$A = \{10, 30, 50\}$. جد A' وارسم مخطط فن *Venn* الذي يوضح هذه المجموعات.

(b) ما متممة المجموعة الخالية؟

1. تحديد متممة المجموعة.

المجموعات الجزئية

كنا قد أشرنا في بداية هذا الدرس إلى أنك تنتمي إلى كلتا مجموعتي طلاب المدرسة الثانوية والطلاب الذين يخوضون دورة تدريبية في رياضيات المرحلة الثانوية. لاحظ أن كل من في المجموعة الثانية هو بالفعل في المجموعة الأولى. (فلا شك أنك إذا كنت تخوض دورة تدريبية في رياضيات المرحلة الثانوية، فلابد أن تكون طالبًا في المدرسة الثانوية). ويمكن أن نقول إن مجموعة الطلاب الذين يخوضون الدورة التدريبية في رياضيات المرحلة الثانوية مشمولون ضمن مجموعة جميع طلاب المدرسة الثانوية. وإذا كانت مجموعة ما مشمولة في مجموعة أخرى، فإننا نسمي المجموعة الأصغر مجموعة جزئية للمجموعة الأكبر.

المفهوم الأساسي المجموعات الجزئية

إذا كان كل عنصر في المجموعة A عنصرًا في المجموعة B، فإن A تُسمى **مجموعة جزئية** للمجموعة B. نستخدم الرمز $\subseteq$ لتحديد المجموعة الجزئية؛ في هذه الحالة، نكتب $A \subseteq B$ ونقرأ A **محتواة في** B.

يوجد العديد من المجموعات الجزئية لهذه المجموعة من الطلاب المستمتعين بعطلة الربيع: المجموعة الجزئية للطالبات الإناث، المجموعة الجزئية للطلاب الذكور، وهكذا.

وثمة نعت آخر مشابه لمثل في أن A مجموعة جزئية من B إذا لم توجد أي عناصر في A ليست أيضًا في B. فيما يلي ملاحظتان تتعلقان بالمجموعات الجزئية.

- كل مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها. يكون كل عنصر في المجموعة A عنصرًا في المجموعة A ومن ثم فإن $A \subseteq A$.
- المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية من كل مجموعة. فالمجموعة الخالية لا تتضمن أي عناصر، ومن ثم، فبالنسبة إلى أي مجموعة A لا يمكنك تحديد أي عنصر $\emptyset$ غير موجود كذلك في A.

إذا بدأنا بالمجموعة $\{x, y, z\}$، فإن عدد المجموعات الجزئية التي يمكننا تكوينها:

عدد العناصر في المجموعة الجزئية	المجموعات الجزئية المترتبة على هذا العدد من العناصر	
3	$\{x, y, z\}$	(مجموعة جزئية واحدة)
2	$\{x, y\}$، $\{x, z\}$، $\{y, z\}$	(ثلاث مجموعات جزئية)
1	$\{x\}$، $\{y\}$، $\{z\}$	(ثلاث مجموعات جزئية)
0	$\emptyset$	(مجموعة جزئية واحدة)

لذا، بالنسبة إلى مجموعة مكونة من ثلاثة عناصر، يمكننا تكوين ثماني مجموعات جزئية.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة
almanahj.com/ae

مثال 2 إيجاد كافة المجموعات الجزئية للمجموعة

جـد كافة المجموعات الجزئية للمجموعة A = {برد، أنطلونزا}.

الحل

المجموعات الجزئية هي

{برد، أنطلونزا}
{برد}
{أنطلونزا}
$\emptyset$

لاحظ أن المجموعة المكونة من عنصرين لها أربع مجموعات جزئية.

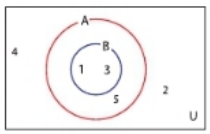
جرّب هذا 2

جـد كافة المجموعات الجزئية للمجموعة B = {الهواتف، الحواسب، الأجهزة اللوحية}.

للإشارة إلى أن مجموعة ما ليست مجموعة جزئية من مجموعة أخرى، يُستخدم الرمز $\not\subset$. على سبيل المثال، $\{1, 3\} \not\subset \{0, 3, 5, 7\}$ حيث إن $1 \notin \{0, 3, 5, 7\}$.

من بين المجموعات الجزئية الأربعة في المثال 2، توجد مجموعة واحدة فقط تساوي المجموعة الأصلية. سنسمي المجموعات الثلاث المتبقية *مجموعات جزئية فعلية* للمجموعة A. يظهر مخطط فن *Venn* للمجموعة $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$، $A = \{1, 3, 5\}$، $B = \{1, 3\}$ جزئية فعلية في الشكل 4. في هذه الحالة،

إذا كانت المجموعة A مجموعة جزئية للمجموعة B وليست مساوية للمجموعة B، فإننا نسمي A **مجموعة جزئية فعلية** للمجموعة B، ونكتب $A \subset B$. أي إن $A \subseteq B$، $A \neq B$.



الشكل 4 $B \subset A$

مثال 3 إيجاد المجموعات الجزئية الفعلية للمجموعة

جـد كافة المجموعات الجزئية الفعلية للمجموعة {التسويق، اللغة الإنجليزية، علم النفس}

الحل

{التسويق، اللغة الإنجليزية} {التسويق، علم النفس} {اللغة الإنجليزية، علم النفس}
{التسويق} {اللغة الإنجليزية} {علم النفس}
$\emptyset$

جرّب هذا 3

جـد كافة المجموعات الجزئية الفعلية من المجموعة {ربيع، صيف، خريف، شتاء}

2. إيجاد كافة المجموعات الجزئية للمجموعة

يُستخدم الرمز $\not\subset$ للإشارة إلى أن المجموعة ليست مجموعة جزئية منها. على سبيل المثال، $\{1, 3\} \subset \{1, 3, 5\}$، لكن $\{1, 3, 5\} \not\subset \{1, 3, 5\}$.

مثال 4 فهم رمز المجموعات الجزئية

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صائبة أم خاطئة.

(a) $\{5, 3, 1\} \subseteq \{7, 5, 3, 1\}$
(b) $\{a, b\} \subset \{a, b\}$
(c) $\{x | x \in E, x > 10\} \subset N$
(d) $\{r, s, t\} \not\subset \{t, s, r\}$
(e) {جبل حفيت، جبل جيس} لا تنتمي إلى مجموعة جبال الإمارات العربية المتحدة
(f) $\emptyset \subset \{5, 10, 15\}$
(g) $\{u, v, w, x\} \subseteq \{x, w, u\}$
(h) $\{0\} \subseteq \emptyset$

ملاحظة رياضية

يستخدم البعض الرمز $\supseteq$ عند القراءة من اليمين إلى اليسار.

almanahj.com/ae

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

619

ملاحظة رياضية

من المهم عدم الخلط بين مفهوم المجموعات الجزئية ومفهوم العناصر. على سبيل المثال: تُعد العبارة $6 \in \{2, 4, 6\}$ صائبة لأن 6 أحد عناصر المجموعة $\{2, 4, 6\}$. لكن العبارة $\{6\} \in \{2, 4, 6\}$ خاطئة لأنها تفيد بأن المجموعة التي تحتوي على العنصر 6 هي أحد عناصر المجموعة التي تحتوي على العناصر 2 و4 و6. لكن من الصواب أن نقول إن $\{6\} \subseteq \{2, 4, 6\}$ أو إن $\{6\} \subset \{2, 4, 6\}$.

الحل

(a) كل من 1 و3 و5 في المجموعة الثانية، ومن ثم تكون $\{1, 3, 5\}$ مجموعة جزئية للمجموعة $\{1, 3, 5, 7\}$. العبارة صائبة.

(b) حتى بالرغم من أن $\{a, b\}$ مجموعة جزئية من $\{a, b\}$، فإنها ليست مجموعة جزئية فعلية. ومن ثم تكون العبارة خاطئة.

(c) كل عنصر في المجموعة الأولى عدد طبيعي، لكن ليست كل الأعداد الطبيعية مشمولة في المجموعة. ومن ثم تكون هذه المجموعة مجموعة جزئية فعلية من مجموعة الأعداد الطبيعية. العبارة صائبة.

(d) المجموعتان متطابقتان. ومن ثم فإن $\{r, s, t\}$ ليست مجموعة جزئية فعلية من $\{t, s, r\}$. العبارة صائبة.

(e) إن كلًا من جبل حفيت وجبل جيس من جبال الإمارات. ومن ثم تكون المجموعة {جبل حفيت، جبل جيس} مجموعة جزئية من جبال الإمارات. العبارة خاطئة.

(f) صائبة؛ المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية فعلية من كل مجموعة باستثناء نفسها.

(g) خاطئة؛ v هو أحد عناصر المجموعة $\{u, v, w, x\}$ لكنه ليس ضمن $\{x, w, u\}$.

(h) المجموعة التي في اليسار تحتوي على عنصر واحد، 0. المجموعة الخالية لا تتضمن أي عناصر، ومن ثم، تكون العبارة خاطئة.

جرّب هذا 4

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صائبة أم خاطئة.

(a) $\{8\}$ محتواة في $\{x | x$ عدد طبيعي زوجي$\}$

(b) $\{6\} \subseteq \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

(c) $\{2, 3\} \subseteq \{x | x \in N\}$

(d) $\{a, b, c\}$ مجموعة جزئية فعلية من {الحروف الأبجدية للغة الإنجليزية}

(e) $O \in \{x, y, z\}$

(f) O محتواة في {أحمر، أصفر، أزرق}

(g) $\{100, 200, 300, 400\} \subset \{200, 300, 400\}$

(h) $\{O\} \subseteq O$

3. استخدام رمز المجموعة الجزئية.

المجموعة التي تحتوي على عنصر واحد لها مجموعتان جزئيتان – هي نفسها والمجموعة الخالية. لقد رأينا أنه إذا كانت المجموعة تتضمن عنصرين، فستوجد أربع مجموعات جزئية، وإذا كانت المجموعة تتضمن ثلاثة عناصر، فستوجد ثماني مجموعات جزئية.

عدد العناصر	0	1	2	3
عدد المجموعات الجزئية	1	2	4	8

ملاحظة رياضية

في التمرين 11، رأيتها جديدًا لتطوير صيغة المجموعات الجزئية. فهو يستخدم التبرير الاستنتاجي وليس التبرير الاستقرائي.

ليس من الصعب أن نلاحظ أن عدد المجموعات الجزئية يتضاعف كل مرة تضيف فيها عنصرًا واحدًا إلى المجموعة الأصلية. ولا يستغرق الأمر سوى قليل من التفكير لملاحظة أن في كل حالة، حتى الآن على الأقل، عدد المجموعات الجزئية يساوي 2 مرفوعة إلى أس يقيمة عدد العناصر. ولذا، فقد نستخدم التبرير الاستقرائي لتخمين أن عدد المجموعات الجزئية لأي مجموعة يتبع هذا النمط نفسه. وإذا قمنا بذلك، فسنكون على صواب. كما أن عدد المجموعات الجزئية الفعلية يكون أقل بواحد دائمًا. ومن ثم سنحصل على الصيغة التالية:

عدد المجموعات الجزئية للمجموعة المنتهية

إذا كانت المجموعة المنتهية تحتوي على عدد n من العناصر، فإنها تضم 2^n من المجموعات الجزئية و $2^n - 1$ من المجموعات الجزئية الفعلية.

مثال 5 إيجاد عدد المجموعات الجزئية للمجموعة

(a) جد عدد المجموعات الجزئية والمجموعات الجزئية الفعلية للمجموعة {أبيض، أزرق، أصفر، أحمر، أخضر، أسود}.

(b) اشرح لماذا يكون عدد المجموعات الجزئية الفعلية لمجموعة ما دائمًا بواحد عن إجمالي عدد المجموعات الجزئية.

الحل

(a) تحتوي المجموعة على $6 = n$ عناصر، لذا يوجد 2^n، أو $2^6 = 64$ مجموعة جزئية. من بينها، توجد $2^n - 1$، أو 63، مجموعة جزئية فعلية. تذكر أن 2^6 تعني $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$، وهو ما يساوي 64.

(b) عند إيجاد المجموعات الجزئية الفعلية، يجرى استثناء مجموعة جزئية واحدة فقط من قائمة كافة المجموعات الجزئية: المجموعة الأصلية نفسها. ولذا توجد دائمًا مجموعة جزئية فعلية واحدة أقل من إجمالي عدد المجموعات الجزئية.

جرّب هذا 5

جد عدد المجموعات الجزئية والمجموعات الجزئية الفعلية للمجموعة {الحديد، النحاس، الكروم، الكوبالت، الألومنيوم، الماغنسيوم، الذهب، الزئبق}.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

almanahj.com/ae

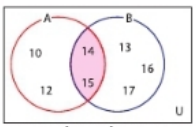
620 | 10-2 | المجموعات الجزئية والعمليات على المجموعات

4. إيجاد عدد المجموعات الجزئية للمجموعة

تقاطع المجموعات واتحادها

كنا قد أشرنا في بداية هذا الدرس أنك قد تنتمي إلى كلتا مجموعتي الطلاب الذين يعيشون قريبًا من حرم المدرسة والطلاب الذين يذهبون إلى المدرسة مشيًا. سنحدد الأشياء المشتركة بين مجموعتين أو أكثر باستخدام مصطلح *التقاطع*.

وتقاطع المجموعتين A وB، ورمزه $A \cap B$، هو مجموعة العناصر الموجودة في كل من المجموعتين. وبالرموز: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ و } x \in B\}$.



الشكل 5 $A \cap B = \{14, 15\}$

على سبيل المثال، إذا كانت $A = \{10, 12, 14, 15\}$ و$B = \{13, 14, 15, 16, 17\}$، فإن تقاطع $A \cap B = \{14, 15\}$. لأن 14 و15 هما العنصران الوحيدان المشتركان بين المجموعتين. يظهر مخطط فن *Venn* تقاطع $A \cap B$ في الشكل 5. لاحظ أن عناصر المجموعة A توجد داخل الدائرة الخاصة بالمجموعة A وأن عناصر المجموعة B توجد داخل الدائرة الخاصة بالمجموعة B. أما عنصرا التقاطع فيوجدان في الجزء الذي تتداخل فيه الدائرتان: $A \cap B$ هو الجزء المظلل.

يُعد التقاطع مثالًا لإحدى **العمليات على المجموعات**—قاعدة لدمج مجموعتين أو أكثر لتكوين مجموعة جديدة. يتكون تقاطع ثلاث مجموعات أو أكثر من مجموعة العناصر التي توجد في كل مجموعة لوحدها. لاحظ أن حرف العطف **و** يُستخدم أحيانًا للتعبير عن التقاطع: $A \cap B$هو مجموعة العناصر التي في A وB.

مثال 6 إيجاد التقاطعات

يجري تقييم ثلاثة أدوية تجريبية من حيث السلامة. ولكل منها آثار جانبية رصدها 1% على الأقل من الأشخاص الذين جربوا الدواء. وهذه تجربة عمياء، ولذا سيُرمز إلى الأدوية باستخدام الرموز A وB وC. فيما يلي سرد للآثار الجانبية لكل منها.

A = {غثيان، تعرق ليلي، عصبية، جفاف الفم، تورم القدمين}
B = {زيادة الوزن، غثيان، عصبية، رؤية مشوشة، حمى، صعوبة في النوم}
C = {جفاف الفم، غثيان، رؤية مشوشة، حمى، فقدان الوزن، إكزيما}

جد كل من المجموعات الجزئية الآتية:

(a) $A \cap B$ (b) $B \cap C$ (c) $A \cap B \cap C$

الحل

(a) ثمة أثران جانبيّان مذكوران لكل من A وB: الغثيان والعصبية. إذن $A \cap B$ = {غثيان، عصبية}.
(b) توجد ثلاثة آثار جانبية مشتركة بين العقارين B وC: الغثيان والرؤية المشوشة والحمى. إذن $B \cap C$ = {غثيان، رؤية مشوشة، حمى}.
(c) يشير هذا المثال إلى أن إيجاد تقاطع أكثر من مجموعتين يبدو منطقيًا تمامًا: لقد جُدت للتو العناصر في كل مجموعة. في هذه الحالة، يكون ثمة أثر جانبي واحد مذكور لكافة العقاقير الثلاثة: الغثيان. إذن $A \cap B \cap C$ = {غثيان}.

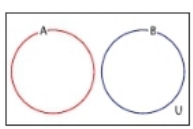
جرّب هذا 6

إذا كانت A = {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان} وB = {دبا الحصن، رأس الخيمة، دبي، خورفكان} وC = {الفجيرة، رأس الخيمة أبو ظبي}. فجد $A \cap B$ و$B \cap C$ و$A \cap B \cap C$.

عندما يكون تقاطع مجموعتين عبارة عن المجموعة الخالية، تُسمى المجموعات **منفصلة**. على سبيل المثال، نجد أن مجموعة طلاب الصف العاشر ومجموعة طلاب الحادي عشر منفصلتان، حيث لا يمكن أن يكون الطالب مشترك بين المجموعتين. ويظهر مخطط فن *Venn* الخاص بالمجموعتين المنفصلتين A وB في الشكل 6. إذا لم تتضمن المجموعتان أي عناصر مشتركة، فلن تتقاطع الدائرتان اللتان تمثلهما على الإطلاق.

ثمة طريقة أخرى لدمج مجموعتين لتكوين مجموعة جديدة تُسمى *الاتحاد*.

واتحاد المجموعتين A وB، ورمزه $A \cup B$، هو مجموعة العناصر الموجودة في المجموعة A **أو** في المجموعة B (أو كلتيهما). وبالرموز:



الشكل 6 $A \cap B = \emptyset$

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ أو } x \in B\}$$

almanahj.com/ae
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

على سبيل المثال، إذا كانت $A = \{5, 10, 15, 20\}$ و$B = \{5, 20, 30, 45\}$، فإن اتحاد $A \cup B = \{5, 10, 15, 20, 30, 45\}$. وحتى بالرغم من وجود 5 و20 في كلتا المجموعتين، فإننا نذكرهما مرة واحدة فقط في الاتحاد. يظهر مخطط فن *Venn* لاتحاد $A \cup B$ في الشكل 7. والمجموعة $A \cup B$ هي المنطقة المظللة والتي تتكون من كافة العناصر في كلتا المجموعتين.

الشكل 7 $A \cup B$

مثال 7 إيجاد الاتحادات

بالنسبة إلى المجموعتين اللتين في المثال 6، جد كلًا مما يلي، ثم صف ما تمثله كل مجموعة لفظيًا.

(a) $A \cup B$
(b) $A \cup C$
(c) $A \cup B \cup C$

الحل

لإيجاد الاتحاد، ما عليك سوى تكوين قائمة بكافة العناصر من كلتا المجموعتين دون كتابة التكرارات.

(a) $A \cup B$ = {غثيان، تعرق ليلي، عصبية، جفاف الفم، تورم القدمين، زيادة الوزن، رؤية مشوشة، حمى، صعوبة في النوم}. هذه مجموعة الآثار الجانبية التي رصدها أكثر من 1% من الأشخاص الذين جربوا الدواء A أو B.

(b) $A \cup C$ = {غثيان، تعرق ليلي، عصبية، جفاف الفم، تورم القدمين، رؤية مشوشة، حمى، فقدان الوزن، إكزيما}. هذه مجموعة الآثار الجانبية التي رصدها أكثر من 1% من الأشخاص الذين جربوا الدواء A أو C.

(c) $A \cup B \cup C$ = {غثيان، تعرق ليلي، عصبية، جفاف الفم، تورم القدمين، زيادة الوزن، رؤية مشوشة، حمى، صعوبة في النوم، فقدان الوزن، إكزيما}. هذه مجموعة الآثار الجانبية التي رصدها أكثر من 1% من الأشخاص الذين جربوا أيًا من الأدوية الثلاثة.

جرّب هذا 7

بالنسبة إلى المجموعات التي في جرّب هذا 6، جد $A \cup B$ و $B \cup C$ و $A \cup B \cup C$.

ماذا عن العمليات التي تتضمن أكثر من مجموعتين وأكثر من عملية واحدة؟ وكما هو الحال بالنسبة إلى العمليات التي تتضمن الأعداد، فإننا نستخدم الأقواس للإشارة إلى ترتيب العمليات. ويتضح ذلك في المثال 8.

مثال 8 إجراء العمليات على المجموعات

استخدم المجموعات في المثال 6 مرة أخرى. وجد كل مجموعة مطلوبة واكتب الوصف اللفظي لما تمثله كل مجموعة.

(a) $(A \cup B) \cap C$
(b) $A \cap (B \cup C)$
(c) $(A \cap B) \cup C$

الحل

يتمثل المفتاح في أداء العملية التي بين القوسين أولًا.

(a) أولًا، نجد B لـ A. هذه هي المجموعة التي وجدناها في الجزء (a) من المثال 7. الآن، نجد العناصر المشتركة بين هذه المجموعة والمجموعة C: $(A \cup B) \cap C$ = {جفاف الفم، غثيان، رؤية مشوشة، حمى}. هذه هي مجموعة الآثار الجانبية المشتركة بين العلاج C وأي من A أو B (أو كليهما).

(b) $A \cap (B \cup C)$ = {غثيان، جفاف الفم، عصبية}. هذه هي مجموعة الآثار الجانبية المشتركة بين العلاج A وأي من B أو C (أو كليهما).

(c) $(A \cap B) \cup C$ = {غثيان، عصبية، جفاف الفم، رؤية مشوشة، حمى، فقدان الوزن، إكزيما}. هذه هي مجموعة الآثار الجانبية المشتركة التي رصدها مستخدمو العلاج C أو كل من مستخدمي A ومستخدمي B.

جرّب هذا 8

بالنسبة إلى المجموعات التي في جرّب هذا 6، جد $A \cup (B \cap C)$ و $(A \cap B) \cup C$ و $A \cap (B \cup C)$.

McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة

almanahj.com/ae

622 | 10-2 | المجموعات الجزئية والعمليات على المجموعات

تنبيه

عند جمع الاتحاد والتقاطع مع المتممات كما سنفعل في المثال 9 ، يجب أن نكون حذرين للغاية. انتبه بشكل خاص إلى الأقواس وما إذا كان رمز المتممة داخل الأقواس أم خارجها.

مثال 9 إجراء العمليات على المجموعات

بالرجوع إلى مجموعات الآثار الجانبية، تذكّر أنها رُصدت من قبل 1% على الأقل من المستخدمين. فيما يلي المجموعة الشاملة لكافة الآثار الجانبية التي رصدها أي من مستخدمي الأدوية الثلاثة. استخدمها لإيجاد المجموعات التالية.

U = {غثيان، تعرق ليلي، عصبية، جفاف الفم، تورم القدمين، زيادة الوزن، رؤية مشوشة، حمى، صعوبة في النوم، فقدان الوزن، إكزيما، ارتعاش اليد، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة}.

(a) $A' \cap C'$ (b) $(A \cap B)' \cap C$ (c) $B' \cup (A \cap C')$

ملاحظة رياضية

لا تنس أهمية المجموعة الشاملة عند إيجاد المتممات: متممة المجموعة A هي جميع العناصر الموجودة في *المجموعة الشاملة* وليست في المجموعة A. وليست كل العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة وفي المجموعة A.

الحل

(a) نوجد أولًا A'، والتي تضم كافة العناصر التي في المجموعة الشاملة وليست في المجموعة A:
A' = {زيادة الوزن، رؤية مشوشة، حمى، صعوبة في النوم، فقدان الوزن، إكزيما، ارتعاش اليد، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة}.
ثم نوجد C'، C' = {تعرق ليلي، عصبية، تورم القدمين، زيادة الوزن، حمى، صعوبة في النوم، ارتعاش اليد، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة}.
الآن يكون $A' \cap C'$ هي العناصر المشتركة بين A' وC': $A' \cap C'$ = {زيادة الوزن، صعوبة في النوم، ارتعاش اليد، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة}.

(b) يشير القوسان إلى أنه علينا أولًا إيجاد $A \cap B$ أولًا: $A \cap B$ = {غثيان، عصبية}. ثم نوجد المتممة: $(A \cap B)'$ = {تعرق ليلي، جفاف الفم، تورم القدمين، زيادة الوزن، رؤية مشوشة، حمى، صعوبة في النوم، فقدان الوزن، إكزيما، ارتعاش اليد، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة}. وعناصر هذه المجموعة والموجودة كذلك في المجموعة C هي ما نبحث عنه. أي أن $(A \cap B)' \cap C$ = {جفاف الفم، رؤية مشوشة، حمى، فقدان الوزن، إكزيما}.

(c) نجد أولًا $A \cap C'$: $A \cap C'$ = {تعرق ليلي، عصبية، تورم القدمين، زيادة الوزن، حمى، صعوبة في النوم، ارتعاش اليد، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة}. ومن ثم، فإن $A \cap C'$ = {تعرق ليلي، عصبية، تورم القدمين}.
ثم نلاحظ أن B' = {تعرق ليلي، جفاف الفم، تورم القدمين، فقدان الوزن، إكزيما، ارتعاش اليد، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة}.
إن الاتحاد الذي نبحث عنه هو كافة عناصر B' إلى جانب العناصر التي في $A \cap C'$ والتي لم تدرج بالفعل في B'.
$B' \cup (A \cap C')$ = {تعرق ليلي، جفاف الفم، تورم القدمين، فقدان الوزن، إكزيما، ارتعاش اليد، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة، عصبية}.

جرّب هذا 9

إن المجموعة الشاملة للمجموعات التي في جرّب هذا 6 هي U = {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، رأس الخيمة، الفجيرة، أبو ظبي، جبل علي، حتا}. جـــد كل مجموعة.

(a) C' (b) $(A \cup B)'$ (c) $A' \cap C'$ (d) $(A \cup B) \cap C'$

يشيع استخدام اتحاد المجموعات وتقاطعها في الحياة اليومية – لكن ربما لم تفكر فقط في هذا الأمر بهذه الطريقة. فمثلًا، يشكل تقاطع مجموعة مواطني الولايات المتحدة الذين تزيد أعمارهم عن 17 مجموعة مواطني الولايات المتحدة غير المدانين إجراميًا مجموعة المواطنين المؤهلين للتصويت في الانتخابات القادمة. يكوّن اتحاد مجموعة والدتي أمك ومجموعة والدتي أبيك مجموعة أجدادك.

طرح المجموعات

تُسمى العملية الثالثة التي سندرّسها على المجموعات *الفرق* بين المجموعات. وسنسميها كذلك *طرح المجموعات* كما سنستخدم علامة الطرح لتمثيلها.

almanahj.com/ae

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

إن **الفرق** بين المجموعة A والمجموعة B هي مجموعة العناصر الموجودة في المجموعة A وليست موجودة في المجموعة B. وبالرموز: $A - B = \{x | x \in A \text{ و } x \notin B\}$.

مثال 10 إيجاد الفرق بين مجموعتين

سنستخدم مرة أخرى المجموعات في المثال 6. ينبغي لك أن تكون على معرفة جيدة بها الآن.
جـد كل مجموعة.

(a) $A - B$ (b) $B - C$ (c) $(A - B) - C$

الحل

(a) نبدأ بعناصر المجموعة A ثم نحذف كل عنصر في B موجود كذلك في A. العنصران المشتركان هما الفئران والعصبية، ومن ثم تكون $A - B$ = {تعرق ليلي، جفاف الفم، تورم القدمين}.
(b) في هذه المرة، سنبدأ بالمجموعة B، ثم نحذف الأشياء التي في C وموجودة كذلك في B. العناصر المشتركة هي الفئران والرؤية المشوشة والحمى، ومن ثم تكون $B - C$ = {زيادة الوزن، عصبية، صعوبة في النوم}.
(c) إننا نعرف بالفعل أن $A - B$ = {تعرق ليلي، جفاف الفم، تورم القدمين}. والآن سنحتاج إلى إيجاد أي عناصر موجودة كذلك في المجموعة C ثم نحذفها. لا يوجد سوى جفاف الفم في المجموعة C. إذن $(A - B) - C$ = {تعرق ليلي، تورم القدمين}.

ملاحظة رياضية

يمكن كتابة بعض العمليات بدلالة عمليات أخرى. على سبيل المثال، $5 - 3$ تكون كذلك $5 + (-3)$. هل يمكنك التفكير في طريقة لكتابة $A - B$ باستخدام التقاطع والمتممة؟ قد يكون رسم مخطط فن *Venn* مفيدًا.

جرّب هذا 10

بالنسبة إلى المجموعات التي في جرّب هذا 6، جـد كل مجموعة.

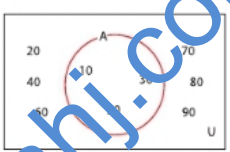
(a) $A - B$ (b) $B - C$ (c) $(B - C) - A$

5 إيجاد التقاطعات والاتحادات والفروق بين المجموعات.

لقد استخدمنا إلى الآن مخططات فن *Venn* كطريقة لتصوير مجموعات معينة. في الدرسين التاليين سندرس كيف يمكن استخدام هذه المخططات لدراسة المجموعات بتعمق أكبر في مجموعة متنوعة من الحالات المنطبقة.

إجابات جرّب هذا

1 (a) $A' = \{90, 80, 70, 60, 40, 20\}$



(b) المجموعة المتممة للمجموعة A هي في المجموعة الشاملة.

2 {الهواتف، الحواسب، الأجهزة اللوحية}، {الهواتف، الحواسب}، {الحواسب، الأجهزة اللوحية}، {الهواتف، الأجهزة اللوحية}، {الحواسب}، {الأجهزة اللوحية}، {الهواتف}، $\varnothing$

3 {الربيع، الصيف، الخريف}، {الربيع، الصيف، الشتاء}، {الربيع، الخريف، الشتاء}، {الصيف، الخريف، الشتاء}، {الربيع، الصيف}، {الربيع، الخريف}، {الربيع، الشتاء}، {الصيف، الخريف}، {الصيف، الشتاء}، {الخريف، الشتاء}، {الربيع}، {الصيف}، {الخريف}، {الشتاء}، $\varnothing$

4 (a) صائبة (c) صائبة (e) خاطئة (g) خاطئة
(b) خاطئة (d) صائبة (f) صائبة (h) خاطئة

5 المجموعات الجزئية: $2^8 = 256$؛ المجموعات الجزئية الفعلية: 255

6 (a) $A \cap B$ = {دبي، خورفكان}
(b) $B \cap C$ = {رأس الخيمة}؛ $A \cap B \cap C = \varnothing$

7 (a) $A \cup B$ = {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان، دبا الحصن، رأس الخيمة}
(b) $A \cup C$ = {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان، الفجيرة، أبو ظبي}
(c) $A \cup B \cup C$ = {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان، دبا الحصن، رأس الخيمة، الفجيرة، أبو ظبي}

8 (a) $A \cup (B \cap C)$ = {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان، رأس الخيمة}
(b) $(A \cap B) \cup C$ = {دبي، خورفكان، الفجيرة، رأس الخيمة، أبو ظبي}
(c) $A \cap (B \cup C)$ = {دبي، خورفكان}

9 (a) C' = {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان، دبا الحصن، جبل علي، حتا}
(b) $(A \cup B)'$ = {الفجيرة، أبو ظبي، جبل علي، حتا}
(c) $A' \cap C'$ = {دبا الحصن، جبل علي، حتا}
(d) $(A \cup B) \cap C'$ = {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان، دبا الحصن}

10 (a) $A - B$ = {الشارقة، عجمان، أم القيوين}
(b) $B - C$ = {دبا الحصن، دبي، خورفكان}
(c) $(B - C) - A$ = {دبا الحصن}

almanahj.com/ae

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

10-2 مجموعة التمارين

تمارين كتابية

1. ما المقصود بالمجموعة الجزئية؟
2. اشرح الفرق بين المجموعة الجزئية والمجموعة الجزئية الفعلية.
3. اشرح الفرق بين المجموعة الجزئية وعنصر المجموعة.
4. اشرح لماذا تمثل المجموعة الخالية مجموعة جزئية لنفسها، لكنها ليست مجموعة جزئية فعلية.
5. اشرح الفرق بين اتحاد مجموعتين وتقاطعهما.
6. متى يقال إن المجموعتين منفصلتان؟
7. ما المقصود بالمجموعة الشاملة؟
8. ما المقصود بمتممة مجموعة؟
9. اكتب مثالًا من الحياة اليومية يمثل اتحاد المجموعات واشرح لماذا يمثل اتحادًا. ثم قم بالشيء نفسه مع التقاطع.
10. اكتب مثالًا من الحياة اليومية يمثل الفرق بين المجموعات واشرح لماذا يمثل فرقًا.

تمارين حسابية

بالنسبة إلى التمارين 11-14. لتكن $U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$، و $A = \{5, 7, 11, 13\}$، و $B = \{2\}$، و $C = \{13, 17, 19\}$، و $D = \{3, 5\}$. جد كل مجموعة.

11. A'
12. B'
13. C'
14. D'

15. إذا كانت U = مجموعة الأعداد الطبيعية، و $A = \{4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$. فجد A'.
16. إذا كانت U = مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية، و $B = \{13, 15, 17, 19, 21, 23, \ldots\}$. فجد B'.

بالنسبة إلى التمارين 17-24. جد جميع المجموعات الجزئية وجميع المجموعات الجزئية الفعلية لكل مجموعة.

17. {كرة السلة، كرة القدم، والكرة اللينة}
18. {الإلقاء، الصحافة، الخطابة}
19. {الراديو، التلفاز}
20. {الكتروني، ورقي}
21. $\varnothing$
22. $\{\ \}$
23. {الحمى، الارتجاف، الغثيان، الصداع}
24. {نوبات مرضية، تنمل، شلل، ألم}

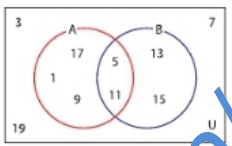
بالنسبة إلى التمارين 25-34. حدّد ما إذا كانت كل عبارة صائبة أم خاطئة.

25. $\{3\} \subseteq \{5, 3, 1\}$
26. $\{a, b, c\} \subset \{c, b, a\}$
27. $\{1, 2, 3\} \subseteq \{123\}$
28. $\varnothing \subset \varnothing$
29. $\varnothing \in \{\ \}$
30. $\{x | x \in E, x > 100\} \subset \{x | x \in N, x > 52\}$
31. $\{3\} \in \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$
32. $\{x | x \in N, x > 10\} \subseteq \{x | x \in N, x \geq 10\}$
33. $\varnothing \subset \{a, b, c\}$
34. $\{7, 11, 13, 17\} \subseteq \{17, 13, 11\}$

بالنسبة إلى التمارين 35-40. جد عدد المجموعات الجزئية والمجموعات الجزئية الفعلية التي تتضمنها كل مجموعة. لا تسرد المجموعات الجزئية.

35. $\{25, 75, 50\}$
36. $\{a, b, c, d, \ldots, z\}$
37. $\varnothing$
38. $\{0\}$
39. $\{x, y\}$
40. $\{10, 8, 6, 4, 2, \ldots, 30\}$

بالنسبة إلى التمارين 41-50. استخدم مخطط فن Venn لإيجاد العناصر في كل مجموعة.



41. U
42. A
43. B
44. $A \cap B$
45. $A \cup B$
46. A'
47. B'
48. $(A \cup B)'$
49. $(A \cap B)'$
50. $A \cap B'$

بالنسبة إلى التمارين 51-60. لتكن

$U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$
$A = \{14, 15, 16, 17\}$
$B = \{11, 13, 15, 17, 19\}$
$C = \{12, 14, 15, 19, 20\}$

جد كل مجموعة.

51. $A \cup C$
52. $A \cap B$
53. A'
54. $(A \cap B) \cup$
55. $A' \cap (B \cup C)$
56. $(A \cup B) \cap C$
57. $(A \cup B)' \cap C$
58. $A \cap B'$
59. $(B \cup C) \cap A'$
60. $(A' \cup B)' \cup C'$

بالنسبة إلى التمارين 61-70. لتكن

$U = \{x | x \in N, x < 25\}$
$W = \{x | x \in N, 5 < x < 15\}$
$X = \{x | x \in$ {الأعداد الطبيعية الزوجية التي تقل عن 10}$\}$
$Y = \{x | x \in N, 20 < x < 25\}$
$Z = \{x | x \in$ {مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية التي تقل عن 13}$\}$

جد كل مجموعة.

61. $W \cap Y$
62. $X \cup Z$
63. $W \cup X$
64. $(X \cap Y) \cap Z$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

almanahj.com/ae

10-2 مجموعة التمارين يُتبع

65. $W \cap X$
66. $(Y \cup Z)'$
67. $(X \cup Y) \cap Z$
68. $(Z \cap Y) \cup W$
69. $W' \cap X'$
70. $(Z \cup X)' \cap Y$

بالنسبة إلى التمارين 71-74، لتكن

$U = \{1, 2, 3, \ldots\}$
$A = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$
$B = \{9, 18, 27, 36, \ldots\}$
$C = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

جد كل مجموعة.

71. $A \cap B$
72. $A' \cap C$
73. $A \cap (B \cup C')$
74. $A \cup B$

بالنسبة إلى التمارين 75-80، لتكن

$U = \{p, q, r, s, t, u, v, w\}$
$A = \{p, q, r, s, t\}$
$B = \{r, s, t, u, v\}$
$C = \{p, r, t, v\}$

جد كل مجموعة.

75. $C - B$
76. $A - C$
77. $B - C$
78. $B - A$
79. $B \cap C'$
80. $C \cap A'$

بالنسبة إلى التمارين 81-84، بفرض أن

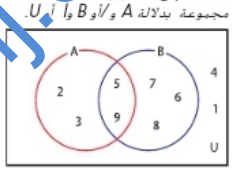
$D = \{11, 12, 13, 14, 15, \ldots\}$
$M = \{x | x \in E, x > 10\}$
$T = \{x | x \in N, x < 100\} \cup \{x | x \in O, x > 100\}$

جد كل مجموعة.

81. $D - M$
82. $T - D$
83. $(D - M) - T$
84. $(T - D) - M$

بالنسبة إلى التمارين 85-88، استخدم مخطط فن Venn لكتابة كل مجموعة بدلالة A و/أو B و/أو U.

85. {1, 2, 3, 4}
86. {2, 3, 5, 6, 7, 8, 9}
87. {2, 3, 6, 7, 8}
88. {1, 4}



التطبيقات في عالمنا

89. يمكن للطالب الحصول على جهاز لوحي وهاتف ذكي وكمبيوتر محمول أثناء قضاء بعض الوقت في الحرم الجامعي بين الصفوف. اسرد جميع مجموعات خيارات تمثيل المعلومات المختلفة التي يمكن للطالب اختيارها، مع وضع جميع هذه التقنيات أو بعضها أو لا شيء منها في الاعتبار.

90. إذا تم توزيع خمس بطاقات لعب على شخص، ولديه فرصة تجاهل أيّ عدد يتضمن 0. فكم عدد الخيارات المتاحة لهذا الشخص؟

91. تستطيع إحدى طالبات الفرقة الأولى في الكلية اختيار أحد الصفوف التالية أو بعضها أو جميعها لنصف السنة الأول: صف اللغة العربية وصف الرياضيات وصف اللغة الأجنبية وصف العلوم وصف الفلسفة وصف التربية البدنية وصف التاريخ. كم عدد الاحتمالات المختلفة المتوفرة لديها لجدولها الجديد؟

92. منذ إعادة تشكيل اتحاد الطلاب، كان ثمة خيارات محدودة من الأطعمة والمشروبات التي يمكن للطالب شراؤها كوجبة خفيفة بين الصفوف الدراسية. فيمكن للطلاب عدم اختيار أي من هذه العناصر أو اختيار بعضها أو جميعها: البيتزا والبطاطس المقلية والمخبوزات الناعمة الكبيرة والمياه الغازية والكولا عديمة السكر والعصائر. كم عدد الاختيارات المختلفة التي يمكن إجراؤها؟

93. تشتري رنا كمبيوتر محمولًا جديدًا للمدرسة ويمكنها عدم اختيار أي شيء من خيارات الأجهزة الطرفية التالية أو اختيار بعضها أو جميعها: ماوس ليزر أو ناسخ الأقراص الرقمية أو كاميرا ويب أو ذاكرة متنقلة. كم عدد اختيارات الأجهزة الطرفية المختلفة الممكنة للكمبيوتر المحمول الخاص بها؟

94. لدمج تمارين الأيروبيك في برنامج التمرين الخاص بها، يمكن لشيماء اختيار إحدى هذه الآلات أو بعضها أو جميعها: جهاز السير والدراجة وجهاز ستير ستيبر. اسرد جميع الاحتمالات لاختيارات تمارين الأيروبيك.

95. إعلان الوظائف الشاغرة التالي يبحث عن شخص يقع ضمن تقاطع ثلاث مجموعات. اذكر تلك المجموعات الثلاث؟

اكتب وصفًا لفظيًا لكل مجموعة.

96. (a) $B \cup C$ (b) $C \cup D$ (c) $D \cup E$
97. (a) A' (b) C' (c) E'
98. (a) $B \cap C$ (b) $A \cap B$ (c) $C \cap B'$
99. (a) $(A \cup B)'$ (b) $(B \cup D)'$ (c) $A - (B \cap C)$

التفكير الناقد

إن **الضرب الديكارتي** هو عملية تتم في المجموعة لم ندرسها بعد. عند اقتران عناصر من مجموعتين معًا في مجموعة داخل قوسين، مثل (الأنفلونزا، الارتجاف). تسمى ذلك **زوجًا مرتبًا**. *الضرب الديكارتي للمجموعتين A و B، والذي يُرمز له بالرمز $A \times B$ هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة بحيث يكون الإدخال الأول عنصرا من المجموعة A والإدخال الثاني من المجموعة B. وتستخدم هذه العملية لربط الأشياء المتوافقة مع بعضها بشكل طبيعي، مثل الأمراض والأعراض. على سبيل المثال، إذا كانت A = {برد، أنفلونزا} و B = {حمى، ارتجاف}، فإن $A \times B$ = {(برد، حمى)، (برد، ارتجاف)، (أنفلونزا، حمى)، (أنفلونزا، ارتجاف)}. بالنسبة إلى كل زوج من المجموعات في التمرينين 101 و102، جد ناتج الضرب المتجهي واكتب وصفًا لفظيًا عن أهميته.*

100. A = {قميص، معطف}،
B = {أخضر، أصفر، أحمر}

almanahj.com/ae

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

101. A = {ناجح، راسب}، B = {ناجح في جميع المواد، ناجح في المواد العملية، ناجح في المواد النظرية}

102. إذا كانت $n(A) = n$ و $n(B) = m$، فما هي $n(A \times B)$؟ اشرح كيف توصلت إلى إجابتك.

103. ما العلاقة بين الضرب الديكارتي والضرب العادي؟

104. هل يمكنك إيجاد مجموعتين اتحادهما وتقاطعهما واحد؟

105. اختر ثلاثة أدوية وابحث عن مورد عبر الإنترنت يذكر الآثار الجانبية المحتملة لكل منها. جد تقاطع المجموعات.

106. (a) كوّن مجموعتين A و B تتضمن كل منهما بين 4 و 8 عناصر بحيث يكون $A \cap B$ غير خالية. جد كلًا من $n(A)$ و $n(B)$ و $n(A \cup B)$ و $n(A \cap B)$.

(b) كرر الجزء (a) بمجموعتين مختلفتين تمامًا A و B.

(c) استخدم نتائج الجزأين (a) و(b) لتكوين تخمين حول صيغة لإيجاد عدد العناصر الرئيسة لاتحاد المجموعتين.

107. (a) اكتب المجموعتين A و B بحيث تكون عندهما $n(A \cup B) > n(A \cap B)$.

(b) اكتب المجموعتين A و B بحيث تكون عندهما $n(A \cup B) = n(A \cap B)$.

(c) هل يمكنك كتابة المجموعتين A و B بحيث تكون عندهما $n(A \cup B) < n(A \cap B)$؟ استخدم مخطط فن Venn لتوضيح السبب وراء إمكانية ذلك أو عدم إمكانيته.

108. فكّر في المجموعتين A و B. ماذا يجب أن يحدث ليكون $A \cap B = A$؟ ماذا عن $A \cap B = B$؟

109. بالنسبة إلى أي مجموعتين A و B. ماذا يجب أن يحدث بالنسبة إلى الأمرين الواردين في التمرين 109؟

110. إليك طريقة بديلة لتكوين صيغة لعدد المجموعات الجزئية لمجموعة تتضمن n من العناصر. إذا كانت المجموعة تضم عنصرين، فعند تكوين مجموعة جزئية، سيوجد خياران لكل عنصر: إما أن يكون ضمن المجموعة الجزئية أو لا. إذا ضربنا خيارين للعنصر الأول في خيارين للعنصر الثاني، نحصل على أربعة خيارات للمجموعة الجزئية. (هذا يوضح فكرة مهمة تُسمى مبدأ العد الأساسي). قم بتعميم هذه الفكرة لاستنباط الصيغة لإيجاد عدد المجموعات الجزئية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

almanahj.com/ae

627

10-3 الدرس
استخدام مخططات فِن Venn لدراسة العمليات على المجموعات

أهداف التعلم

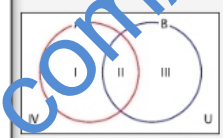
1. توضيح عبارات مجموعة تضم مجموعتين باستخدام مخططات فِن *Venn*.
2. توضيح عبارات مجموعة تضم ثلاث مجموعات باستخدام مخططات فِن *Venn*.
3. استخدام قوانين دي مورجان.
4. استخدام مخططات فِن *Venn* لتحديد ما إذا كانت المجموعتان متساويتين أم لا.
5. استخدام الصيغة لإيجاد عدد العناصر الرئيسة لاتحاد المجموعتين.

هل سبق لك أن أردت نشر شيء ما على مواقع التواصل الاجتماعي، ثم قررت ألا تنشره لأنه ربما لم يكن ضمن الأشياء التي تريد أن يراها الجميع؟ إن بعض الناس ليسوا أصدقاءً على وسائل التواصل الاجتماعي إلا مع أقرب أصدقائهم؛ معظم الأشخاص يكونون أصدقاءً لمئات من الأشخاص، بداية من أمهاتهم وحتى مجموعة المعارف العابرين. لدي أنا وصديقي المقرب مجموعة خاصة سرية على أحد مواقع التواصل الاجتماعي لهذا السبب بالتحديد؛ فمجموعة الأشياء التي أشعر بالارتياح للإفصاح عنها لزملاء الدراسة لا تساوي –أو حتى تكافئ– بالتأكيد مجموعة الأشياء التي أشعر بالارتياح للإفصاح عنها لأمي أو صديقي المقرب. ومعظمنا لديه العديد من الدوائر المتميزة للأصدقاء وجهات الاتصال، وعندما تصطدم تلك العوالم، قد تأتي النتائج غير متوقعة، وربما تكون مضحكة عن غير قصد.

وثمة طريقة جيدة للتعامل مع التداخل بين المجموعات المتنوعة تتمثل في استخدام المخططات. وهل يمكنك تخمين نوع المخطط الذي سنختاره لتحقيق ذلك؟ إذا لم تقل "مخطط فن *Venn*"، فارجع رجاءً وأعد قراءة الدرس السابق.

في هذا الدرس، سنطور طريقة لرسم مخططات فن *Venn* التي ستساعدنا على توضيح العمليات على المجموعات. وسنبدأ بالمخططات التي تتضمن التفاعلات بين مجموعتين، كما في الشكل 8. لاحظ أنه توجد أربع مناطق منفصلة في مخطط فن *Venn* الذي يوضح المجموعتين A وB. سنريد ترقيم المناطق للمرجعية؛ كما سنستخدم الأرقام الرومانية بحيث لا تتداخل أرقام المناطق مع العناصر التي في المجموعة أو عناصرها الرئيسة.

كما أن الإجراء الذي سنستخدمه لتوضيح عناصر المجموعتين الموجودتين في المربع أدناه، ثم عرضه في المثالين 1 و2، أما الآن، فسنشرع في العمل باستخدام مجموعات مجردة تمامًا، لكنها معلقة هناك، وستساعدنا المهارات التي تعلمناها على حل مسائل حقيقية فيما بعد.



الشكل 8

توضيح عبارة مجموعة باستخدام مخطط فِن *Venn*

الخطوة 1 ارسم مخططًا للمجموعات. بالأرقام الرومانية في كل منطقة.

الخطوة 2 [illegible] باستخدام تلك الأرقام الرومانية، ثم بذكر المناطق التي تصفها كل مجموعة.

الخطوة 3 [illegible] جد مجموعة الأعداد التي توافق المجموعة المعطاة في عبارة المجموعة.

الخطوة 4 ظلل المنطقة المطابقة لمجموعة الأعداد الموجودة في الخطوة 3.

المنطقة I [illegible] الموجودة في المجموعة A وغير موجودة في المجموعة B.

المنطقة II تمثل [illegible] الموجودة في كلتا المجموعتين A وB.

المنطقة III تمثل العناصر الموجودة في المجموعة B وغير موجودة في المجموعة A.

المنطقة IV تمثل المجموعة الشاملة التي لا توجد في كلتا المجموعتين A وB.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

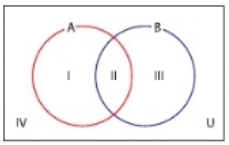
almanahj.com/ae

مثال 1 رسم مخطط فن Venn

ارسم مخطط فن Venn لتوضيح المجموعة $(A \cup B)'$.

الحل

الخطوة 1 ارسم المخطط وقم بتسمية كل منطقة بالأرقام الرومانية.

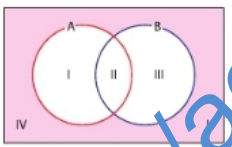


الخطوة 2 من المخطط، قم بذكر المناطق التي تتكون منها كل مجموعة.

$U = \{I, II, III, IV\}$
$A = \{I, II\}$
$B = \{II, III\}$

الخطوة 3 باستخدام المجموعات الواردة في الخطوة 2، جد $(A \cup B)'$.
أولًا، تقع I وII وIII إما في المجموعة A أو B. لذا $A \cup B = \{I, II, III\}$. المجموعة الوحيدة غير الموجودة في $A \cup B$ هي IV. لذا المجموعة المتبقية هي $(A \cup B)' = \{IV\}$.

الخطوة 4 ظلل المنطقة IV لتوضيح $(A \cup B)'$.



جرّب هذا 1

ارسم مخطط فن Venn لتوضيح المجموعة $A' \cap B$.

مثال 2 رسم مخطط فن Venn

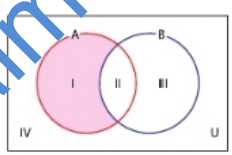
ارسم مخطط فن Venn لتوضيح المجموعة $A \cap B'$.

الحل

الخطوة 1 ارسم المخطط وقم بتسمية كل منطقة. سيكون هذا هو المخطط نفسه الموجود في الخطوة 1 من المثال 1.

الخطوة 2 من المخطط، قم بذكر المناطق التي تتكون منها كل مجموعة.

$U = \{I, II, III, IV\}$
$A = \{I, II\}$
$B = \{II, III\}$



الخطوة 3 باستخدام المجموعات الواردة في الخطوة 2، جد $A \cap B'$.
أولًا، توجد المنطقتان I وIV خارج المجموعة B. لذا $B' = \{I, IV\}$. من بين هاتين المنطقتين، تقع I كذلك في المجموعة A. لذا $A \cap B' = \{I\}$.

الخطوة 4 ظلل المنطقة I لتوضيح $A \cap B'$.

ملاحظة رياضية

في أي مسألة يطلب منا توضيح عبارة مجموعة تضم مجموعتين، ستكون الخطوتان 1 و2 نفسيهما تمامًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

almanahj.com/ae

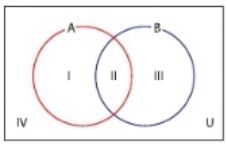
629

مثال 1 رسم مخطط فن Venn

ارسم مخطط فن Venn لتوضيح المجموعة $(A \cup B)'$.

الحل

الخطوة 1 ارسم المخطط وقم بتسمية كل منطقة بالأرقام الرومانية.

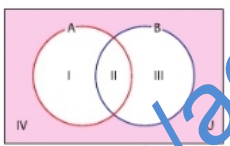


الخطوة 2 من المخطط، قم بذكر المناطق التي تتكون منها كل مجموعة.

$U = \{I, II, III, IV\}$
$A = \{I, II\}$
$B = \{II, III\}$

الخطوة 3 باستخدام المجموعات الواردة في الخطوة 2، جد $(A \cup B)'$.
أولاً، تقع I وII وIII إما في المجموعة A أو B. لذا $A \cup B = \{I, II, III\}$. المجموعة الوحيدة غير الموجودة في $A \cup B$ هي IV. لذا المجموعة المتممة هي $(A \cup B)' = \{IV\}$.

الخطوة 4 ظلل المنطقة IV لتوضيح $(A \cup B)'$.



جرّب هذا 1

ارسم مخطط فن Venn لتوضيح المجموعة $A' \cap B$.

مثال 2 رسم مخطط فن Venn

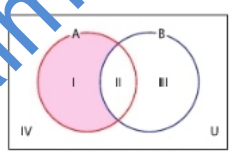
ارسم مخطط فن Venn لتوضيح المجموعة $A \cap B'$.

الحل

الخطوة 1 ارسم المخطط وقم بتسمية كل منطقة. سيكون هذا هو المخطط نفسه الموجود في الخطوة 1 من المثال 1.

الخطوة 2 من المخطط، قم بذكر المناطق التي تتكون منها كل مجموعة.

$U = \{I, II, III, IV\}$
$A = \{I, II\}$
$B = \{II, III\}$



الخطوة 3 باستخدام المجموعات الواردة في الخطوة 2، جد $A \cap B'$.
أولاً، توجد المنطقتان I وIV خارج المجموعة B. لذا $B' = \{I, IV\}$. من بين هاتين المنطقتين، تقع I كذلك في المجموعة A. لذا $A \cap B' = \{I\}$.

الخطوة 4 ظلل المنطقة I لتوضيح $A \cap B'$.

ملاحظة رياضية

في أي مسألة يطلب منا توضيح عبارة مجموعة تضم مجموعتين، ستكون الخطوتان 1 و2 نفسيهما تمامًا.

حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

almanahj.com/ae

629

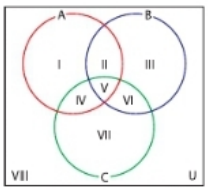
جرّب هذا 2

ارسم مخطط فن *Venn* لتوضيح المجموعة $A' \cup B$.

1. توضيح عبارات مجموعة تضم مجموعتين باستخدام مخططات فن *Venn*.

تُعد مخططات فن *Venn* رائعة في فرز المعلومات، وسترغب في بعض التجارب مع مخططات فن *Venn* التي تتضمن ثلاث مجموعات قبل أن ننتقل إلى حل هذه المسائل.

ولحسن الحظ، يمكن استخدام الإجراء الذي استخدمناه مع مجموعتين مع ثلاث مجموعات أيضًا؛ ستحصل فقط على مخطط أكثر تعقيدًا (انظر الشكل 9).



الشكل 9

المنطقة I تمثل العناصر الموجودة في المجموعة A وغير موجودة في المجموعة B أو المجموعة C.
المنطقة II تمثل العناصر الموجودة في المجموعة A والمجموعة B وغير موجودة في المجموعة C.
المنطقة III تمثل العناصر الموجودة في المجموعة B وغير موجودة في المجموعة A أو المجموعة C.
المنطقة IV تمثل العناصر الموجودة في المجموعتين A وC وغير موجودة في المجموعة B.
المنطقة V تمثل العناصر الموجودة في المجموعات A، B، وC.
المنطقة VI تمثل العناصر الموجودة في المجموعتين B وC وغير موجودة في المجموعة A.
المنطقة VII تمثل العناصر الموجودة في المجموعة C وغير موجودة في المجموعة A أو المجموعة B.
المنطقة VIII تمثل العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة U، وغير موجودة في المجموعة A أو B أو C.

مثال 3 رسم مخطط فن *Venn* بثلاث مجموعات

ارسم مخطط فن *Venn* لتوضيح المجموعة $A \cap (B \cap C)'$.

الحل

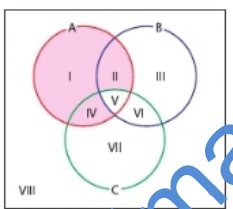
الخطوة 1 ارسم المخطط وقم بتسميته كما هو موضح في الشكل 9–2.

الخطوة 2 من المخطط، قم بذكر المناطق التي تتكون منها كل مجموعة.

$U = \{I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII\}$
$A = \{I, II, IV, V\}$
$B = \{II, III, V, VI\}$
$C = \{IV, V, VI, VII\}$

الخطوة 3 باستخدام المجموعات الواردة في الخطوة 2، جد $A \cap (B \cap C)'$.
أولًا، جد $B \cap C$: $B \cap C = \{V, VI\}$. المجموعة المتممة هي $(B \cap C)' = \{I, II, III, IV, VII, VIII\}$. المناطق I وII وIV هي كذلك أجزاء من المجموعة A. لذا $A \cap (B \cap C)' = \{I, II, IV\}$.

الخطوة 4 ظلل المناطق I وII وIV لتوضيح $A \cap (B \cap C)'$.



ملاحظة رياضية

عند توضيح مجموعات معقدة $A \cap (B \cap C)'$، لا تنس [illegible] المجموعة الموجودة بين المجموعتين أو هذا هو سبب وجود الأقواس.

جرّب هذا 3

ارسم مخطط فن *Venn* لتوضيح المجموعة $C \cup (A \cap B')$.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

almanahj.com/ae

630 | 10-3 | استخدام مخططات فن Venn لدراسة العمليات على المجموعات

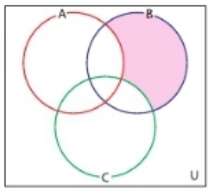
للتعامل مع مخططات فن *Venn* بصورة أفضل، سيكون من المفيد تحويل العملية، مع البدء بمخطط مظلل ومعرفة المجموعة التي يمثلها، كما في المثال 4.

مثال 4 إيجاد المجموعة المناظرة لمخطط فن *Venn*

اكتب المجموعة الموضحة باستخدام مخطط فن *Venn* في الشكل 10.

الحل

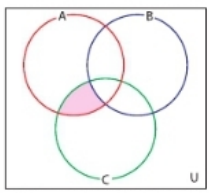
الجزء المظلل موجود بالكامل داخل الدائرة للمجموعة B. لذا فهو بالتأكيد مجموعة جزئية من B. لكنه لا يتضمن أيّ شيء من المجموعة A أو C. لذا يمكننا كتابته إما $B - (A \cup C)$ أو $B \cap (A \cup C)'$.



الشكل 10

جرّب هذا 4

اكتب المجموعة الموضحة باستخدام مخطط فن *Venn* في الشكل 11.



الشكل 11

قوانين دي مورجان

ثمة صيغتان معروفتان جيدًا تفيدان في تبسيط بعض العمليات على المجموعات. وقد سُميا بذلك تكريمًا لعالم رياضيات من القرن التاسع عشر يُدعى أوجستن دي مورجان.

سنبدأ أولًا بكتابة الصيغتين، وسنوضح كلًا منهما بمثال. وبعد ذلك، سنرى كيف يمكن استخدام مخططات فن *Venn* لإثبات الصيغتين.

قوانين دي مورجان

بالنسبة إلى أي مجموعتين A وB،

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

ينص القانون الأول على أن متممة اتحاد مجموعتين تساوي دائمًا تقاطع متممتي المجموعتين.

2. توضيح عبارات مجموعة تضم ثلاث مجموعات باستخدام مخططات فن *Venn*.

مثال 5 استخدام قوانين دي مورجان

إذا كانت U = {حطين، عين جالوت، اليرموك، ذات الصواري، نهاوند، القادسية، مؤتة} و A = {حطين، عين جالوت، اليرموك، ذات الصواري} و B = {اليرموك، ذات الصواري، نهاوند، القادسية}، فجد $(A \cup B)'$ و $A' \cap B'$. ماذا يمكننا ملاحظته بشأن هاتين المجموعتين؟

الحل

$A \cup B$ = {حطين، عين جالوت، اليرموك، ذات الصواري، نهاوند، القادسية} و $(A \cup B)'$ = {مؤتة}

A' = {نهاوند، القادسية، مؤتة}
B' = {حطين، عين جالوت، مؤتة}
$A' \cap B'$ = {مؤتة}

هاتان المجموعتان متماثلتان، الأمر الذي يتوافق مع أول قوانين دي مورجان.

almanahj.com/ae

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

631

جرّب هذا 5

إذا كانت U = {الحديد، النحاس، الكروم، الكوبالت، الألومونيوم، الماغنسيوم، الذهب، الزئبق} وA = {النحاس، الكوبالت، الألومونيوم، الماغنسيوم} وB = {الحديد، النحاس، الكروم، الكوبالت}. فجد $(A \cup B)'$ و$A' \cap B'$.

معلومات إضافية الحاضر وفِن Venn

تُنسب مخططات فِن *Venn* بوجه عام إلى عالم الرياضيات البريطاني جون فِن، الذي قدمها عام 1880 على النحو الذي تستخدم عليه اليوم. هذا يجعل الأمر يبدو مفهومًا قديمًا إلى حد ما، لكن يمكن أن ترجع جذور الفكرة العامة إلى أبعد من ذلك بكثير. فقد استخدم عالم الرياضيات الكبير ليونهارد أويلر مخططات مشابهة في القرن الثامن عشر ويمكن أن ترجع جذور أشكال أخرى مماثلة إلى القرن الثالث عشر!

بينما كان من الحقيقي بلا ريب أن جون فِن كان أكاديميًا كلاسيكيًا—فقد كان يكتب أو يحاضر في كل من الأخلاق والرياضيات والمنطق ونظرية الاحتمال والفلسفة والميتافيزيقيا والتاريخ في الوقت نفسه—إلا أنه كان يمارس هواية مدهشة إلى حد ما: إنشاء الآلات. وعلى وجه الخصوص، كان معروفًا أكثر ببناء آلة لقذف كرات الكريكيت (وهو ما يشبه القذف في لعبة البيسبول تقريبًا). كانت آلته جيدة جدًا لدرجة أنها حققت في عام 1909 "رمية نظيفة" أمام أحد أفضل لاعبي الكريكيت في ذلك الوقت في أربع مناسبات.

ينص القانون الثاني من قوانين دي مورجان على أن متممة تقاطع مجموعتين تساوي اتحاد متممتي المجموعتين.

مثال 6 استخدام قوانين دي مورجان

إذا كانت U = {حطين، عين جالوت، اليرموك، ذات الصواري، نهاوند، القادسية، مؤتة} وA = {حطين، عين جالوت، اليرموك، ذات الصواري} وB = {اليرموك، ذات الصواري، نهاوند، القادسية}. فجد $(A \cap B)'$ و$A' \cup B'$. ماذا يمكننا ملاحظته بشأن هاتين المجموعتين؟

الحل

$A \cap B$ = {اليرموك، ذات الصواري} و$(A \cap B)'$ = {حطين، عين جالوت، نهاوند، القادسية، مؤتة}

A' = {نهاوند، القادسية، مؤتة}

B' = {حطين، عين جالوت، مؤتة}

$A' \cup B'$ = {نهاوند، القادسية، مؤتة، حطين، عين جالوت}

على الرغم من ذكرهما بترتيبات مختلفة (الأمر الذي نعلم أنه غير مهم)، فإن هاتين المجموعتين متماثلتان. المثال [illegible] يتوافق مع ثاني قوانين دي مورجان.

ملاحظة رياضية

في المثالين 5 و6، نبحث في أمثلة محددة. لذلك نستخدم التفكير الاستقرائي لاستنتاج أن قوانين دي مورجان صحيحة على [illegible]. في المثال 7، سنستخدم التفكير الاستنتاجي *لإثباتها*.

3. استخدام قوانين دي مورجان.

جرّب هذا 6

إذا كانت U = {الحديد، النحاس، الكروم، الكوبالت، الألومونيوم، الماغنسيوم، الذهب، الزئبق} وA = {النحاس، الكوبالت، الألومونيوم، الماغنسيوم} وB = {الحديد، النحاس، الكروم، الكوبالت}. فجد $(A \cap B)'$ و$A' \cup B'$.

الآن وبعد أن عرفنا كيفية عرض المجموعات باستخدام مخططات فِن *Venn*، يمكننا استخدامها لإثبات أن المجموعتين اللتين تبدوان مختلفتين متماثلتان في الواقع. سنوضح في المثال 7 الإجراء عن طريق إثبات قانون دي مورجان الأول. وسنترك القانون الثاني للتمرين الذي يحاول إثباته.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

almanahj.com/ae

632 | 10-3 | استخدام مخططات فِن Venn لدراسة العمليات على المجموعات

مثال 7 استخدام مخططات فن Venn لتوضيح تساوي المجموعات

استخدم مخططات فن Venn لتوضيح أن $(A \cup B)' = A' \cap B'$. يثبت أول قوانين دي مورجان.

الحل

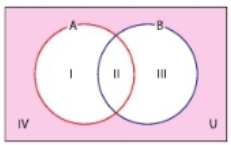
ابدأ برسم مخطط فن Venn لـ $(A \cup B)'$.

الخطوة 1 ارسم الشكل (كما هو موضح في الخطوة 4).

الخطوة 2 المجموعة U تتضمن المناطق I وII وIII وIV. المجموعة A تتضمن المنطقتين I وII. والمجموعة B تتضمن المنطقتين II وIII.

الخطوة 3 $A \cup B = \{I, II, III\}$. لذا $(A \cup B)' = \{IV\}$.

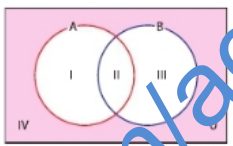
الخطوة 4 ظلل المنطقة IV لتوضيح $(A \cup B)'$.



ثم ارسم مخطط فن Venn لـ $A' \cap B'$. الخطوتان 1 و2 مثل الخطوتين أعلاه.

الخطوة 3 $A' = \{III, IV\}$ و$B' = \{I, IV\}$. لذا $A' \cap B' = \{IV\}$.

الخطوة 4 ظلل المنطقة IV لتوضيح $A' \cap B'$.



حيث إن مخططات كل طرف من المعادلة متطابقة، فإننا نستخدم التبرير الاستنتاجي لتبرير أن $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

جرّب هذا 7

استخدم مخططات فن Venn لتوضيح أن $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

فيما يلي ثمة مثال لاستخدام ثلاث مجموعات.

مثال 8 استخدام مخططات فن Venn لتحديد مساواة مجموعتين

حدد ما إذا كانت هاتان المجموعتان متساويتين باستخدام مخططات فن Venn: $(A \cup B) \cap C$ و$(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

الحل

المجموعة $A \cup B$ تتكون من المناطق I إلى VI. ومن بين هذه المناطق، توجد المناطق IV وV وVI في المجموعة C كذلك. لذا $(A \cup B) \cap C$ تتكون من المناطق IV وV وVI.

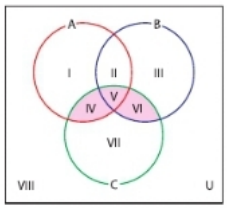
ملاحظة رياضية

كلما شعرت بالراحة في العمل باستخدام مخططات فن Venn، ستتمكن على الأرجح من تظليل المناطق الموضحة من خلال مجموعة دون المرور بشكل رسمي عبر عملية من أربع خطوات، كما نفعل في المثال 8.

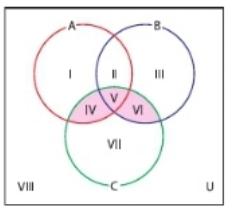
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

almanahj.com/ae

633



تتكون المجموعة $A \cap C$ من المنطقتين IV و V وتتكون المجموعة $B \cap C$ من المنطقتين V و VI. وينتج عن اتحادها المناطق IV و V و VI.



وحيث إن المناطق المظللة هي نفسها، فإن المجموعتين متساويتان.

جرب هذا 8

حدد ما إذا كانت المجموعتان متساويتين باستخدام مخططات فن *Venn*: $B \cup (A \cap C)$ و $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

4. استخدام مخططات فن *Venn* لتحديد ما إذا كانت المجموعتان متساويتين أم لا.

عدد العناصر الرئيسة للاتحاد

كان 10 من أصدقائك ينتمون إلى مجموعة الطلاب الذين يخوضون الدورة التدريبية في الرياضيات. و7 ينتمون إلى مجموعة الطلاب الذين يخوضون دورة تدريبية في اللغة الإنجليزية. فما عدد الأصدقاء الذين في اتحاد المجموعتين؟ إذا كان انطباعك الأول 24، فلست وحدك – فهذا نوع من التخمين القياسي. وقد يكون خاطئًا بالفعل. ولكن فقط إذا لم يكن أحد من أصدقائك يخوض كلتا دورتي الرياضيات واللغة الإنجليزية. فإذا كان هناك من يخوض كلتا الدورتين، فستكون قد حسبته مرتين عن طريق جمع عدد الأصدقاء في كل مجموعة. يمكن استخدام مخطط فن *Venn* لتحليل هذه الحالة.

مثال 9 إيجاد عدد العناصر الرئيسة للاتحاد

ارسم مخطط فن *Venn* للمجموعات التالية، ثم استخدم المخطط لإيجاد عدد العناصر الرئيسة لـ $A \cup B$، $A \cap B$، B، A.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

استخدم النتيجة لتكوين صيغة لعدد العناصر الرئيسة للاتحاد.

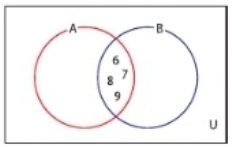
الحل

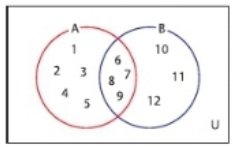
أولًا. لاحظ وجود 6 و7 و8 و9 في كلتا المجموعتين. لذا سنبدأ مخطط فن *Venn* بوضع تلك العناصر في جزء التقاطع من المخطط. ثم نضع العناصر المتبقية في A داخل الدائرة المخصصة للمجموعة A لكن خارج التقاطع، ونفعل الشيء نفسه مع العناصر المتبقية في B.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

almanahj.com/ae

634 | 10-3 | استخدام مخططات فن Venn لدراسة العمليات على المجموعات





والآن يمكننا فقط العدّ لإيجاد عدد العناصر الرئيسة المشار إليها.

$$n(A) = 9 \quad n(B) = 7 \quad n(A \cap B) = 4 \quad n(A \cup B) = 12$$

من المخطط، يمكننا رؤية أنه إذا قمت بجمع عدد العناصر في المجموعتين A وB، فستقوم بجمع العناصر الموجودة في التقاطع مرتين. لذا لتقديم تفسير لذلك يمكننا طرح عدد العناصر الموجودة في التقاطع، الأمر الذي يمنحنا الصيغة

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

جرّب هذا 9

ارسم مخطط فن *Venn* الذي يوضح الصيغة الخاصة بنا لإيجاد عدد العناصر الرئيسة لاتحاد باستخدام المجموعات التالية.

$A = \{a, c, f, g, l, k, m, n, p\}$ $B = \{g, l, m, o, q, r, t, z\}$

ملاحظة رياضية

تنص الصيغة الواردة على اليسار أنه لإيجاد عدد العناصر في اتحاد المجموعتين A وB، تقوم بجمع عدد العناصر في A وB ثم تطرح عدد العناصر الموجودة في تقاطع A وB.

عدد العناصر الرئيسة للاتحاد

إذا كان $n(A)$ يمثل العدد الرئيس لـ A، وكان $n(B)$ يمثل العدد الرئيس لـ B، فإن عدد العناصر الرئيسة لاتحاد A وB بالنسبة إلى أي مجموعتين منتهيتين A وB.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

ثم سنرى كيف يمكن استخدام هذا الصيغ في حالة منطبقة.

مثال 10 استخدام صيغة لعدد العناصر الرئيسة للاتحاد

في مسح شمل 100 طالب من الفرق الأولى تم اختيارهم عشوائيًا أثناء سيرهم في الحرم الجامعي، تبين أن 42 منهم يدرسون الرياضيات بينما يدرس 51 منهم اللغة الإنجليزية ويدرس 12 منهم كلتا المادتين. كم عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات أو اللغة الإنجليزية؟

الحل

إذا أطلقنا على مجموعة الطلاب الذين يدرسون الرياضيات A ومجموعة الطلاب الذين يدرسون اللغة الإنجليزية B. فالمطلوب منا إيجاد $n(A \cup B)$. قيل لنا إن $n(A) = 42$, $n(B) = 51$ و$n(A \cap B) = 12$. لذا،

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 42 + 51 - 12 = 81$$

جرّب هذا 10

أظهر مسح شمل 200 طبيب عبر إحدى البلدان أن 112 منهم كانت تتم مساعدتهم في مكاتبهم بواسطة ممرضات مسجلات. بينما 83 منهم كانت تتم مساعدتهم بواسطة ممرضات ممارسات حاصلات على رخصة و21 منهم كانت تتم مساعدتهم بواسطة كلتيهما. كم عدد الذين كانت تتم مساعدتهم بواسطة نوع واحد على الأقل من الممرضات؟

5. استخدام الصيغة لإيجاد عدد العناصر الرئيسة لاتحاد المجموعتين.

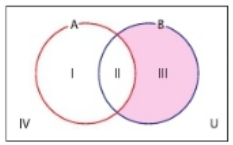
في هذا الدرس، رأينا كيف يمكن استخدام مخططات فن *Venn* لعرض المجموعات وإثبات تساوي مجموعتين وحل المسائل. سنستكشف الجانب الخاص بحل المسائل لمخططات فن *Venn* لاحقًا في الدرس 4 ونعرف كيفية حل المسائل التي تشبه الموجودة في مقدمة الوحدة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

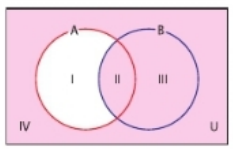
almanahj.com/ae

إجابات جرّب هذا

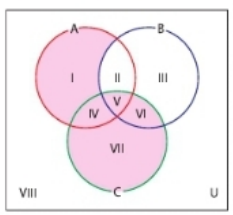
1



2



3

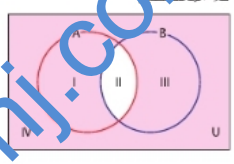


4 $B' \cap (A \cap C)$ أو $(A \cap C) \cap B'$

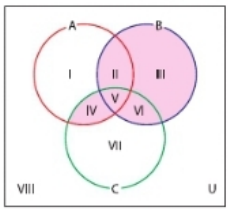
5 كلاهما {الذهب، الرثيق}.

6 كلاهما {الكروم، الألومونيوم، الماغنسيوم، الذهب، الرثيق}

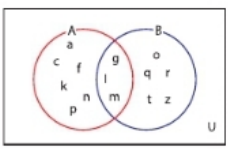
7 كلا المخططين



8 كلا المخططين



9



10 174

almanahj.com/ae

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

636 | 10-3 | استخدام مخططات فن Venn لدراسة العمليات على المجموعات

3-10 مجموعة التمارين

تمارين كتابية

1. يتصفح أحد رفاقك كتابك المدرسي ويرى بعض مخططات فن *Venn*. فتساءل، "ما فائدة هذه الصور؟" كيف ستجيب عن ذلك؟
2. اشرح بكلمات من عندك كيف ترسم مخطط فن *Venn* يمثل المجموعة $A \cup B$.
3. اشرح بكلمات من عندك كيف ترسم مخطط فن *Venn* يمثل المجموعة $A \cap B$.
4. كيف يمكننا استخدام مخططات فن *Venn* لتحديد ما إذا كانت مجموعتان تبدوان مختلفتين متساويتين بالفعل؟
5. صف بكلمات من عندك نص قوانين دي مورجان.
6. صف بكلمات من عندك كيف تجد العدد الرئيس لاتحاد مجموعتين.

تمارين حسابية

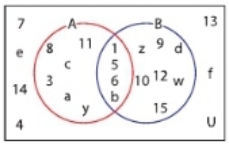
بالنسبة إلى التمارين 30–7، ارسم مخطط فن Venn وظلل الأقسام التي تمثل كل مجموعة.

7. $A \cup B'$
8. $(A \cap B)'$
9. $A' \cup B'$
10. $A' \cup B$
11. $A' \cap B'$
12. $A \cap B'$
13. $A \cup (B \cap C)$
14. $A \cap (B \cup C)$
15. $(A \cup B) \cup (A \cap C)$
16. $(A \cup B) \cap C$
17. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
18. $(A \cap B) \cup C$
19. $(A \cap B)' \cup C$
20. $(A \cup B) \cup C'$
21. $A \cap (B \cup C)'$
22. $A' \cap (B' \cup C')$
23. $(A' \cup B') \cap C$
24. $A \cap (B \cap C)'$
25. $(A \cup B)' \cap (A \cup C)$
26. $(B \cup C) \cup C'$
27. $A' \cap (B' \cap C')$
28. $(A \cup B)' \cap C'$
29. $A' \cap (B \cup C)'$
30. $(A \cup B) \cap (A \cap C)$

بالنسبة إلى التمارين 38–31، استخدم مخططات فن Venn لتحديد ما إذا كانت المجموعتان متساويتين أم لا.

31. $(A \cap B)'$ و $A' \cup B'$
32. $(A \cup B)'$ و $A' \cup B'$
33. $(A \cup B) \cup C$ و $A \cup (B \cup C)$
34. $A \cap (B \cup C)$ و $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
35. $A' \cup (B \cap C')$ و $(A' \cup B) \cap C'$
36. $(A \cap B) \cup C'$ و $(A \cap B) \cup (B \cap C')$
37. $(A \cap B)' \cup C$ و $(A' \cup B') \cap C$
38. $(A' \cup B') \cup C$ و $(A \cap B)' \cap C'$

بالنسبة إلى التمارين 50–39، استخدم مخطط فن Venn التالي لإيجاد عدد العناصر الرئيسة لكل مجموعة.



39. $n(A)$
40. $n(B)$
41. $n(A \cap B)$
42. $n(A \cup B)$
43. $n(A')$
44. $n(B')$
45. $n(A' \cap B')$
46. $n(A' \cup B')$
47. $n(A - B)$
48. $n(B - A)$
49. $n(A \cap (B - A))$
50. $n(B' \cup (B - A))$

بالنسبة إلى التمارين 60–51، استخدم المعلومات التالية:

$U = \{x \mid x$ عدد طبيعي أقل من 20$\}$
$A = \{x \mid x$ عدد طبيعي فردي أقل من 16$\}$
$B = \{x \mid x$ عدد أولي أكبر من 5$\}$

(ملاحظة: الأعداد الأولية الأقل من 20 هي 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، و19.) جد عدد العناصر الرئيسة لكل مجموعة.

51. $n(A)$
52. $n(B)$
53. $n(A \cap B)$
54. $n(A \cup B)$
55. $n(A \cap B')$
56. $n(A \cup$ [illegible]
57. $n(A')$
58. $n(B')$
59. $n($ [illegible] $- B)$
60. $n(B' - A)$

التطبيقات في عالمنا

في التمارين 64–61، $A = \{$الأشخاص الذين يقودون سيارة رياضية متعددة الأغراض$\}$ و $B = \{$الأشخاص الذين يقودون [illegible]$\}$. ارسم مخطط فن Venn لما يلي، واكتب جملة تصف ما تمثله المجموعة.

61. $A \cup B$
62. $A \cap B$
63. A'
64. $(A \cap B)'$

almanahj.com/ae

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 10-3 مجموعة التمارين يُتبع

في التمارين 65–68، $O = \{$الطلاب في دورات تدريبية عبر الإنترنت$\}$، $B = \{$الطلاب في دورات تدريبية متنوعة$\}$ و $T = \{$الطلاب في دورات تدريبية تقليدية$\}$. ارسم مخطط فن Venn لما يلي. واكتب جملة تصف ما تمثله المجموعة.

65. $O \cap (T \cup B)$
66. $B \cup (O \cap T)$
67. $B \cap O \cap T$
68. $(B \cup O) \cap (T \cup O)$

في التمارين 69–72، $D = \{$الطلاب من الرياض$\}$، $R = \{$الطلاب من جدة$\}$ و $I = \{$الطلاب لا من هذه ولا تلك$\}$. ارسم مخطط فن Venn لما يلي. واكتب جملة تصف ما تمثله المجموعة.

69. $D' \cup R$
70. $D' \cap I'$
71. $(D \cup R) \cap I'$
72. $I - (D \cup R)$

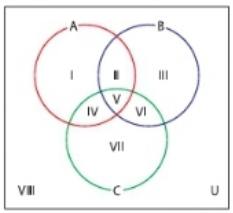
في التمارين 73–76، $G = \{$الأشخاص الذين يستخدمون Google$\}$، $Y = \{$الأشخاص الذين يستخدمون Yahoo! بانتظام$\}$ و $B = \{$الأشخاص الذين يستخدمون Bing بانتظام$\}$. ارسم مخطط فن Venn لما يلي. واكتب جملة تصف ما تمثله المجموعة.

73. $G - Y$
74. $G - (Y \cap B)$
75. $G' \cap Y' \cap B'$
76. $(Y \cap B) \cup (Y \cap G)$

يستخدم المخطط فن Venn التالي في التمرينات 77–82. يعرض الدائرة الأولى الست المشاركة في دورة الترقي بدوري الدرجة الثانية لكرة القدم من عام 2013 إلى 2015. بالنسبة إلى كل تمرين، اكتب المنطقة (المناطق) ضمن مخطط فن Venn التي ستتضمن الفريق المدرج.

2013		2014		2015
النصر		الرائد		النصر
الرائد		النصر		الرائد
الهلال		الأبطال		الهلال
التضامن		الاتحاد		التضامن
الأصدقاء		الهلال		الأصدقاء
الأبطال		النسور		الفرسان

ملاحظة: تمثل المجموعة A الفرق المشاركة في دورة الترقي عام 2013 بينما تمثل المجموعة B الفرق المشاركة في دورة الترقي عام 2014 وتمثل المجموعة C الفرق المشاركة في دورة الترقي عام 2015.



77. الاتحاد
78. الأصدقاء
79. الفرسان
80. النسور
81. الأبطال
82. الشباب

التفكير الناقد

83. بالنسبة إلى المجموعتين المنتهيتين A و B، هل $n(A - B)$ تساوي $n(B) - n(A)$؟ وإذا كانت الإجابة لا، فهل يمكنك إيجاد صيغة لـ $n(A - B)$؟
84. هل يمكنك إيجاد صيغة لـ $n(A \cap B)$ بدلالة $n(A)$ و $n(B)$ فقط؟ لم أو لم لا؟ اكتشف ما إذا كان يمكنك إيجاد صيغة لـ $n(A \cap B)$ باستخدام أي المجموعات التي تفضلها.
85. خمن شكلًا آخر للمجموعة $(A \cup B \cup C)'$ استنادًا إلى أول قوانين دي مورجان. تحقق من تخمينك باستخدام مخطط فن Venn.
86. خمن شكلًا آخر للمجموعة $(A \cap B \cap C)'$ استنادًا إلى ثاني قوانين دي مورجان. تحقق من تخمينك باستخدام مخطط فن Venn.

في التمارين 87–92، (a) استخدم مخطط فن Venn لتوضيح أن المجموعتين غير متساويتين بشكل عام؛ (b) حاول إيجاد مجموعتين محددتين A و B (و C إذا لزم الأمر) تكون المجموعتان متساويتين فيهما؛ و(c) حاول إيجاد شرط عام تكون بموجبه المجموعتان متساويتين دومًا. تذكر أن U تمثل المجموعة الشاملة.

87. $A \cap B$ و B
88. $A - B$ و A
89. $(A \cap B)'$ و U
90. $(A \cap B)'$ و A'
91. $(A - C) \cap B$ و $B \cap A$
92. $(A - C) \cup (B - A)$ و $B - C$

almanahj.com/ae

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

الدرس 10-4 استخدام المجموعات لحل المسائل

أهداف التعلم

1 حل المسائل باستخدام مخططات فن *Venn*.

لقد أصبح التواصل في عالمنا أقل تكلفة وأيسر وأكثر فاعلية طوال الوقت. ففي عصر الهواتف الذكية وفاعلية الإنترنت على مدار الساعة، وجدت الشركات أن التواصل مع الأشخاص لاستطلاع آرائهم أصبح أسهل من ذي قبل. وبات الأشخاص يكتشفون أن الشركات ترغب في الدفع مقابل سماع ما يريدون الإفصاح عنه. كما أصبح العالم اليوم يضم مئات الشركات حرفيًا تتمثل وظيفتها الرئيسة في جمع الآراء حول أي شيء بداية من المرشحين السياسيين وحتى شرائح البطاطس. وبالفعل، يتم إنفاق المليارات على أبحاث السوق كل عام. ربما ستفكر مرتين في المرة التالية التي سيسألك فيها شخص ما عن رأيك مجانًا.

مع وضع الأموال على المحك، ليس من المستغرب أن يكون تنظيم كافة البيانات التي يتم جمعها ذا أهمية. ومن المؤكد أن هذا ينطبق إلى حد كبير ما نستخدم نظرية المجموعات لأجله! لقد عرفنا الكثير عن العمل باستخدام مخططات فن *Venn* حتى الآن. وأرى أن هذه المعرفة تُعد طريقة رائعة لتنظيم البيانات التي يتم جمعها من عمليات المسح وغيرها من المصادر. (حقًا، ودون أي رسوم– يمكنك معرفة هذا الرأي دون مقابل).

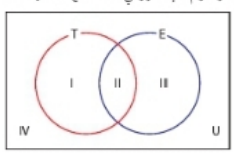
عند تصنيف الأشياء إلى مجموعتين منفصلتين، يمكننا استخدام مخطط فن *Venn* مجموعتين لتفسير المعلومات. ويتضح ذلك في المثال

مثال 1 حل مسألة باستخدام مخططات فن *Venn*

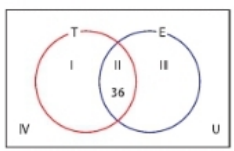
تتبع دولة تضم 50 مدينة أحد أساليب تحصيل رسوم الطريق. 44 مدينة ممن شملها المسح استخدمت المواقف التقليدية لتحصيل رسوم الطرق بينما استخدمت 36 مدينة مواقف تحصيل رسوم الطرق وتحصيل الرسوم الإلكتروني (ETC). ارسم مخطط فن *Venn* لتمثيل نتائج المسح. وجد عدد المدن التي تتبع نظام تحصيل الرسوم التقليدي فقط وعدد المدن التي تتبع نظام تحصيل الرسوم الإلكتروني فقط وعدد المدن التي لا تتبع أيًا منهما.

الحل

الخطوة 1 ارسم مخطط فن *Venn* بدوائر تمثل المواقف المطلوبة لتحصيل رسوم الطرق (T) ونظام تحصيل الرسوم الإلكتروني (E). مع تسمية المناطق بأرقام رومانية كالمعتاد.



الخطوة 2 تستخدم ست وثلاثون مدينة كلا النظامين، لذلك ضع 36 في تقاطع T وE. وهو ما يمثله المنطقة II.



ملاحظة رياضية

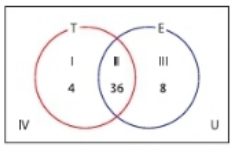
أول معلومة حصلنا عليها هي أن هناك 36 مدينة تتبع المواقف التقليدية لتحصيل رسوم الطرق، لذا فمن المحفز البدء بوضع 36 في المنطقة I. لكن هذا ليس صحيحًا— فالمنطقة I تمثل المدن التي تستخدم نظام المواقف التقليدية لتحصيل الرسوم وليس نظام تحصيل الرسوم الإلكتروني ولا نعرف ذلك الرقم بعد. وإذا كنا نعلم العدد الموجود في التقاطع، فهذا هو الموضع الذي سنبدأ منه دومًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

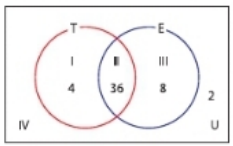
almanahj.com/ae

639

الخطوة 3 وحيث إن 40 مدينة تستخدم المواقف التقليدية لتحصيل رسوم الطرق وتتبع 36 مدينة كلا النظامين، فيجب وجود 4 مدن تستخدم المواقف التقليدية لتحصيل رسوم الطرق فقط. ضع 4 في المنطقة I. حيث إن 44 مدينة تستخدم نظام التحصيل الإلكتروني وتتبع 36 مدينة كلا النظامين، فيجب وجود 8 مدن تتبع نظام التحصيل الإلكتروني فقط. ضع 8 في المنطقة III.



الخطوة 4 الآن تم تمثيل 48 مدينة، لذلك يجب أن تتبقى مدينتان لوضعهما في المنطقة IV.



الآن يمكننا الإجابة عن الأسئلة بسهولة. توجد 4 مدن تستخدم المواقف التقليدية لتحصيل رسوم الطرق وليس نظام تحصيل الرسوم الإلكتروني (المنطقة I) وتتبع 8 مدن نظام تحصيل الرسوم الإلكتروني وليس المواقف التقليدية لتحصيل رسوم الطرق (المنطقة III) ولا تتبع مدينتان فقط أيًا من النظامين (المنطقة IV).

جرّب هذا 1

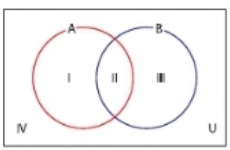
في سنة عادية، تشهد المدينة A هطول بعض الأمطار خلال 163 يومًا وبعض الثلوج خلال 63 يومًا وكلاهما خلال 24 يومًا. ارسم مخطط فن *Venn* لتمثيل هذه القيم المتوسطة. وجد عدد الأيام التي تشهد هطول أمطار فقط وثلوجًا فقط والتي لا تشهد أيًا منهما.

يمكننا استخدام نتائج المثال 1 لكتابة إجراء عام لاستخدام مخطط فن *Venn* لتفسير المعلومات التي يمكن تقسيمها إلى مجموعتين.

استخدام مخططات فن *Venn* بمجموعتين

الخطوة 1 جد عدد العناصر المشتركة بين كلتا المجموعتين واكتب ذلك العدد في المنطقة II.

الخطوة 2 جد عدد العناصر الموجودة في المجموعة *A* وغير موجودة في المجموعة *B* بطرح العدد الموجود في المنطقة II من إجمالي عدد العناصر في *A*. ثم اكتب ذلك العدد في المنطقة I. كرر ذلك مع العناصر الموجودة في *B* لكن غير موجودة في المنطقة II. اكتب هذا العدد في المنطقة III.



الخطوة 3 جد عدد العناصر الموجودة في *U* وغير الموجودة في *A* أو *B* واكتب هذا العدد في المنطقة IV.

الخطوة 4 استخدم المخطط الفني للإجابة عن أسئلة محددة متعلقة بهذه المسألة.

تصويت سريع

هل وضعك المالي حاليًا أسوأ مما كان في السنوات الأخيرة؟

- نعم
- لا
- الوضع متساوٍ تقريبًا

أرسل التصويت

تتضمن العديد من المواقع الإخبارية الإلكترونية عمليات مسح يومية، مثل هذا المسح من موقع cnn.com

من بين التطبيقات الأكثر إفادة لمخططات فن *Venn* هو استخدامها لدراسة نتائج عمليات المسح. فسواء أكانت الأبحاث متعلقة بالأعمال أم لمجرد [illegible] الأيام، لاسيما عبر الإنترنت. يحلل المثال 2 نتائج مسح حول اقتناء نوع السيارة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

almanahj.com/ae

640 | 10-4 | استخدام المجموعات لحل المسائل

مثال 2 حل مسألة مسح باستخدام مخطط فِن Venn

في مسح ما، سُئل 500 شخص عبر الاتصال الهاتفي العشوائي ما إذا كان لديهم سيارة صالون أو سيارة رياضية متعددة الأغراض (SUV). أفاد 79 من بين هؤلاء بامتلاك سيارة صالون فقط وأفاد 31 منهم بامتلاك سيارة رياضية متعددة الأغراض فقط وأفاد 151 منهم بامتلاك واحدة على الأقل من الاثنين. ارسم مخطط فِن *Venn* لتمثيل هذه النتائج واستخدم رسمك التخطيطي لإيجاد النسبة المئوية من المستجيبين الذين يمتلكون سيارة صالون والذين يمتلكون سيارة رياضية متعددة الأغراض والذين يمتلكون كلتيهما والذين لا يمتلكون أيًا منهما.

الحل

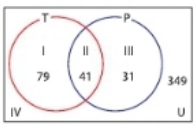
في هذا المثال، سيتعين علينا تعديل الإجراء من المثال 1 لأننا لا نعرف عدد من يمتلك كلتا السيارتين. ويتمثل مفتاح الحل في البدء بتعبئة المعلومات المعطاة التي تتوافق تمامًا مع إحدى المناطق في مخطط فِن *Venn*.

الخطوة 1 أخبرنا بأن 79 شخصًا يمتلكون سيارة صالون فقط. ما يعني أنه يمكننا وضع 79 في المنطقة I. وأخبرنا كذلك بأن 31 شخصًا يمتلكون سيارة رياضية متعددة الأغراض فقط، لذلك يتم وضع ذلك في المنطقة III.

الخطوة 2 يملك151 سيارة صالون أو سيارة رياضية متعددة الأغراض أو كلتيهما. وهذا يمثل اتحاد المجموعتين *T* و*P*، والذي يشكل المناطق I وII وIII. ونعلم بالفعل أن هناك 110 أشخاص في المنطقتين I وIII مجتمعين (31 + 79). لذا يجب أن يوجد 41 = 110 − 151 شخصًا في المنطقة II.

الخطوة 3 تم تمثيل 151 من أصل 500 حتى الآن، لذلك يجب أن تحتوي المنطقة IV على 500 − 151 = 349 شخصًا.

الخطوة 4 ثمة إجمالي 120 شخصًا في المناطق التي تكون المجموعة *T*، لذلك يملك 120 شخصًا سيارة صالون؛ 120/500 = 0.24. إذًا يمتلك 24% سيارة صالون. ويملك اثنان وسبعون سيارة رياضية متعدد الأغراض (14.4%). بينما يملك 41 كلتا السيارتين (8.2%)، ولا يملك 349 أيًا منهما (69.8%).



جرّب هذا 2

وفق مسح عبر الإنترنت على أحد المواقع، أبدى 12,395 شخصًا آراءهم بشأن مشروب الكوكا مقابل البيبسي. من بين هؤلاء، يتناول 5,786 شخصًا الكوكا فقط بينما يتناول 3,765 البيبسي فقط ويتناول 11,405 أشخاص أحدهما على الأقل. ارسم مخطط فِن *Venn* لتمثيل هذه النتائج واستخدم رسمك التخطيطي لإيجاد النسبة المئوية من المشاركين الذين يتناولون الكوكا والذين يتناولون البيبسي والذين يتناولون كلا المشروبين والذين لا يتناولون أيًا منهما.

معلومات إضافية الجانب المضيء من استطلاعات الرأي

لقد أصبح معظمنا معتادًا إلى حد ما على عمليات مسح الرأي العام التي تتناول قضايا مهمة—السياسة وتغير المناخ والاقتصاد— لكن ليس كل مسح بذلك المستوى من الجدية دائمًا. إليك نظرة على بعض الحقائق الغريبة التي نتجت من عمليات المسح الأخيرة.

- تم العثور على حوالي 50% من أجهزة التحكم عن بعد المفقودة في [illegible] الأثاث. وانتهى المطاف بحوالي 4% منها في الثلاجة أو المجمد وحوالي 2% وجد خارج المنزل أو في السيارة.
- يعتقد 29% من الأشخاص أن "الحوسبة السحابية" تنطوي على شحب [illegible] السماء.
- اعترف أكثر من 60% ممن أعلنوا أنهم نباتيون بتناول اللحوم في الـ 24 ساعة [illegible].
- لا يضع 47% من الأشخاص فلسًا واحدًا من راتبهم في مدخرات طويلة الأجل.
- 52% من الأشخاص يغنون أثناء الاستحمام. تُنسب مخططات فِن *Venn* بوجه عام إلى عالم الرياضيات البريطاني جون فن، الذي قدمها عام 1880 على النحو الذي تستخدم عليه اليوم. هذا يجعل [illegible] مفهومًا قديمًا إلى حد ما. لكن يمكن أن ترجع جذور الفكرة العامة إلى أبعد من ذلك بكثير. فقد استخدم [illegible] الرياضي الكبير ليونهارد أويلر مخططات مشابهة في القرن الثامن عشر ويمكن أن ترجع جذور أشكال أخرى منه إلى القرن الثالث عشر!

بينما كان من الحقيقي بلا ريب أن جون فن كان أكاديميًا كلاسيكيًا—فقد كان يكتب أو يحاضر في كل من الأخلاق والرياضيات والمنطق ونظرية الاحتمالية والفلسفة والبيتافيزيقيا والتاريخ في الوقت نفسه—إلا أنه كان يمارس هوايته المدهشة إلى حد ما: إنشاء الآلات. وعلى وجه الخصوص، كان معروفًا أكثر ببناء آلة لقذف كرات الكريكيت (وهو ما يشبه القذف في لعبة البيسبول تقريبًا). كانت آلته جيدة جدًا لدرجة أنها حققت في عام 1909 "رمية نظيفة" أمام أحد أفضل لاعبي الكريكيت في ذلك الوقت في أربع مناسبات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

almanahj.com/ae

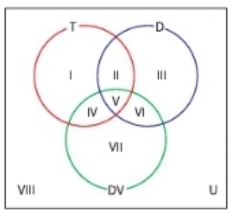
عندما تتكون مسألة التصنيف أو المسح من ثلاث مجموعات، يُتبع إجراء مشابه، مع استخدام مخطط فن *Venn* لثلاث مجموعات. فلدينا فقط المزيد من العمل للقيام به حيث يوجد الآن ثماني مناطق بدلًا من أربع.

مثال 3 حل مسألة باستخدام مخطط فن *Venn* من ثلاث مجموعات

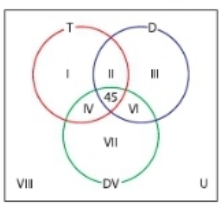
يدرس طالب معدل تكرار أنواع محددة من البريد المستلم في مدينة مجاورة. يدرس البريد المستلم لعدد 300 مقيم في المدينة، ويسأل تحديدًا عن طلبات التبرع لجمعيات خيرية محلية والإعلانات وفواتير المرافق. ووجد أن 194 قد تلقوا فواتير بينما تلقى 210 طلبات تبرع و170 إعلانات. بالإضافة إلى ذلك، تلقى 142 بريدًا بشأن فواتير المرافق وطلبات التبرع و111 بشأن طلبات التبرع والإعلانات و91 بشأن الإعلانات وفواتير المرافق وتلقى 45 الأنواع الثلاثة. ارسم مخطط فن *Venn* لتمثيل هذه النتائج، وجد عدد المقيمين الذين تلقوا بريدًا بشأن

(a) طلبات التبرع فقط.
(b) الإعلانات وفواتير المرافق وليس طلبات التبرع.
(c) فواتير المرافق وطلبات الجمعيات الخيرية.
(d) لا شيء من ذلك.

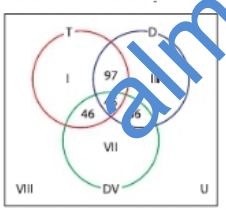
الحل



الخطوة 1 المنطقة الوحيدة التي نعرفها على وجه اليقين من المعلومات المعطاة هي المنطقة V—عدد المقيمين الذين تلقوا أنواع البريد الثلاثة هذه. لذلك نبدأ بوضع 45 في المنطقة V.



الخطوة 2 [illegible] مقيمًا تلقوا بريدًا بشأن فواتير المرافق وطلبات التبرع معًا، لكن يتعين علينا طرح عدد المقيمين الذين تلقوا أنواع البريد الثلاثة لإيجاد العدد في المنطقة II: 97 = 45 − 142. وبالطريقة نفسها، نحصل على 46 = 45 − 91 في المنطقة IV (فواتير المرافق والإعلانات معًا) و[illegible] = 45 − 111 في المنطقة VI (طلبات التبرع والإعلانات معًا).

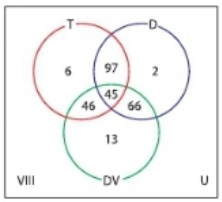


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

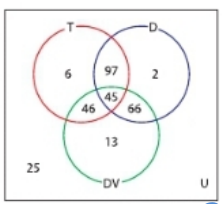
almanahj.com/ae

642 | 10-4 | استخدام المجموعات لحل المسائل

الخطوة 3 الآن يمكننا إيجاد عدد العناصر في المناطق I وIII وVII. كان هناك 194 قد تلقوا بريدًا بشأن فواتير المرافق. لكن 97 + 45 + 46 = 188 تم تمثيلهم بالفعل في الرسم التخطيطي. لذا يتبقى 6 في المنطقة I. من بين 210 مقيمًا ممن تلقوا بريدًا بشأن طلبات التبرع، 97 + 45 + 66 = 208 تم تمثيلهم بالفعل. مع ترك 2 فقط في المنطقة III. كان هناك 170 مقيمًا تلقوا بريدًا بشأن الإعلانات. مع 46 + 45 + 66 = 157 تم تمثيلهم بالفعل. يتبقى 13 فقط في المنطقة VII.



الخطوة 4 بجمع جميع الأعداد في المخطط حتى الآن، نحصل على 275. ويتبقى 25 فقط في المنطقة VIII.



الخطوة 5 والآن بعد اكتمال المخطط، نوجه اهتمامنا نحو الأسئلة.

(a) يوجد [illegible] الذين تلقوا بريدًا بشأن طلبات التبرع فقط في المنطقة III. يوجد 2 فقط.

(b) توجد فواتير المرافق [illegible] الإعلانات دون طلبات التبرع في المنطقة IV. لذلك يوجد 46 مقيمًا.

(c) يوجد المقيمون الذين تلقوا طلبات التبرع أو فواتير المرافق في جميع المناطق باستثناء VII وVIII. لذلك لا يوجد 38 = 13 + 25 لم يتلقوا نوعًا واحدًا على الأقل من تلك الأنواع. و262 = 38 − 300 [illegible] نوعًا واحدًا على الأقل منها.

(d) 25 مقيمًا فقط (خارج جميع الدوائر) لم يتلقوا أيًا من رسائل البريد تلك.

ملاحظة رياضية

لاحظ أنه عند ملء مخطط فن Venn في المثال 3، بدأنا بعدد العناصر في المنطقة الداخلية وندرجنا إلى الخارج.

جرّب هذا 3

أجرت مكتبة إلكترونية عبر الإنترنت مسحًا شمل 500 قارئ ووجدت أن 270 شخصًا يقرؤون قصص المغامرات و320 شخصًا يقرؤون القصص البوليسية و160 شخصًا يقرؤون قصص الفكاهة. بالإضافة إلى ذلك، هناك 140 شخصًا يقرؤون القصص البوليسية وقصص المغامرات معًا و120 شخصًا يقرؤون القصص البوليسية وقصص الفكاهة و80 شخصًا يقرؤون قصص المغامرات وقصص الفكاهة. وأخيرًا، 50 شخصًا يقرؤون الأنواع الثلاثة. ارسم مخطط فن Venn يمثل نتائج المسح ثم جد عدد [illegible] الذين

(a) يقرؤون قصص المغامرات فقط.

(b) يقرؤون القصص البوليسية وقصص الفكاهة ولكن لا يقرؤون قصص المغامرات.

(c) لا يقرؤون أيًا من أنواع القصص الثلاثة.

(d) لا يقرؤون قصص الفكاهة.

1. حل المسائل باستخدام مخططات فن Venn.

بدلًا من كتابة إجراء عام لحل المسائل باستخدام مخطط فن Venn لثلاث دوائر، سنحل مثالًا إضافيًا. وتُعد المعلومات المقدّمة في هذه البرة مختلفة نوعًا ما. ويتمثل المفتاح، وهو بالفعل مفتاح لحل كل هذه المسائل، في إيجاد المعلومات التي تنطبق تحديدًا على بعض المناطق في المخطط. ومن ثم استخدام الطرح لإيجاد المناطق الأخرى واحدة تلو الأخرى.

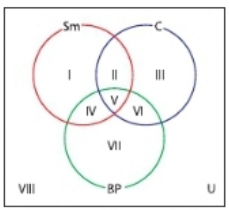
almanahj.com/ae
McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 4 حل مسألة باستخدام مخطط فن Venn من ثلاث مجموعات

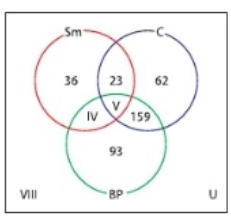
يمثل ارتفاع ضغط الدم وارتفاع الكوليسترول والتدخين ثلاثة من أخطر عوامل الخطر للإصابة بالأزمة القلبية. في مسح أجري على 690 شخصًا من الناجين من الأزمة القلبية، كان يعاني 62 شخصًا فقط من ارتفاع الكوليسترول من بين عوامل الخطر الثلاثة تلك؛ ويعاني 36 شخصًا فقط من التدخين؛ ويعاني 93 شخصًا فقط من ارتفاع ضغط الدم. وثمة إجمالي 370 شخصًا يعانون من ارتفاع الكوليسترول و159 شخصًا يعانون من ارتفاع ضغط الدم والكوليسترول وغير مدخنين و23 مدخنون ويعانون من ارتفاع الكوليسترول ولا يعانون من ارتفاع ضغط الدم. أخيرًا، يعاني 585 شخصًا من عمل خطر واحد على الأقل. ارسم مخطط فن Venn يمثل هذه المعلومات واستخدمه للإجابة عن الأسئلة التالية.

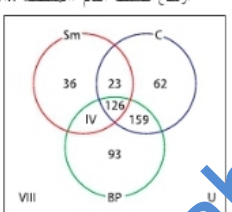
(a) كم عدد الناجين الذين يعانون من عوامل الخطر الثلاثة؟
(b) كم عدد الذين يعانون من عاملين تحديدًا من عوامل الخطر الثلاثة؟
(c) كم عدد الذين لا يعانون من أي من هذه العوامل؟
(d) كم بلغت النسبة المئوية للمدخنين؟

الحل



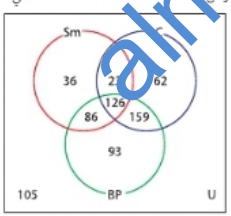
الخطوة 1 تختلف هذه المسألة قليلًا عن السابقة لأنه ليس لدينا عدد الأشخاص الموجودين في منطقة تقاطع المجموعات الثلاث. إلا أنه توجد أخبار جيدة تتمثل في أننا حصلنا بالفعل على العدد الدقيق في خمس مناطق مختلفة: 62 شخصًا يعانون من ارتفاع الكوليسترول فقط (المنطقة III) و36 شخصًا مدخنًا فقط (المنطقة I) و93 شخصًا يعانون من ارتفاع ضغط الدم فقط (المنطقة VII) و159 شخصًا يعانون من ارتفاع ضغط الدم والكوليسترول ولكنهم غير مدخنين (المنطقة VI) و23 شخصًا يعانون من ارتفاع الكوليسترول والتدخين ولكنهم لا يعانون من ارتفاع ضغط الدم (المنطقة II).





الخطوة 2 ثمة إجمالي 370 شخصًا يعانون من ارتفاع الكوليسترول. ولدينا 244 = 159 + 62 + 23 شخصًا حتى الآن. لذلك يجب أن تحتوي المنطقة V على ناجيًا 126 = 244 − 370.

الخطوة 3 المعلومة الأخيرة التي لدينا هي أنه يوجد 585 شخصًا يعانون من عامل خطر واحد على الأقل. يتيح لنا ذلك إيجاد المنطقتين المتبقيتين. تُضاف جميع الأعداد الموجودة حاليًا في الرسم التخطيطي إلى 499. لذلك يجب أن تحتوي المنطقة IV على ناجيًا 86 = 499 − 585. وكذلك إذا كان 585 مريضًا يعانون من عامل خطر واحد على الأقل، فيتبقى وفق 105 = 585 − 690 في المنطقة VIII.



almanahj.com/ae
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

644 | 10-4 | استخدام المجموعات لحل المسائل

الخطوة 4 يمكننا الآن الإجابة عن مجموعة كبيرة من الأسئلة حول الدراسة.

(a) يحتوي التقاطع بين عوامل الخطر الثلاثة على 126 ناجيًا.
(b) تمثل المناطق II وIV وVI المرضى الذين يعانون من عاملين تحديدًا من عوامل الخطر؛ ما يساوي ناجيًا 268 = 159 + 23 + 86.
(c) ونلاحظ من المنطقة VIII أن 105 مرضى لا يعانون من أي من عوامل الخطر.
(d) يبلغ إجمالي العدد الموجود داخل دائرة المدخنين 271 = 86 + 126 + 23 + 36؛ ويمثل ذلك 271/690، أو 39.3% من الناجين.

جرّب هذا 4

ثمة ثلاثة عوامل خطر أخرى وهي السمنة وتاريخ عائلي لأمراض القلب والضغط. ضمن مجموعة المرضى المصابين بأزمة قلبية في المثال 4، امتلك 213 تاريخًا عائليًا لأمراض القلب، عانى 47 منهم كذلك من الإجهاد ولم يعانوا من السمنة وعانى 60 من السمنة ولم يعانوا من مشاكل الضغط و12 لم يعانوا من الضغط ولا السمنة. كان الضغط عاملًا لإجمالي 170 شخصًا، لم يمتلك 8 منهم تاريخًا عائليًا ولم يعانوا من السمنة. ثمة 396 مريضًا لا يعانون من أي من عوامل الخطر الثلاثة هذه.

(a) كم عدد المرضى الذين عانوا من السمنة؟
(b) ما النسبة المئوية التي مثلتها عوامل الخطر الثلاثة هذه؟
(c) كم عدد المرضى الذين لم يعانوا من السمنة وليس لديهم تاريخ عائلي للإصابة بأمراض القلب؟

لقد قطعنا شوطًا طويلًا جدًا من مجرد تحديد المجموعات والعناصر فقط! في هذا الدرس، رأينا أنه يمكن استخدام مخططات فن *Venn* بفعالية لفرز بعض الحالات المعقدة جدًا في عالمنا. وكلما ازدادت براعتك في تفسير المعلومات، زادت جودة استعدادك للبقاء والازدهار في عصر المعلومات.

إجابات جرّب هذا

1 أمطار فقط: 139؛ ثلوج فقط: 39؛ لا هذا ولا ذاك: 163 (بفرض أنها ليست سنة كبيسة!)

2 كوكا: 60.7%، بيبسي: 44.6%
كلاهما: 14.7%، لا هذا ولا ذاك: 9.4%

3 (a) 100 (b) 70 (c) 40 (d) 340

4 (a) 227 (b) 13.6% (c) 404

almanahj.com/ae

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

645

الدرس 10-4 مجموعة التمارين

التطبيقات في عالمنا

1. في مسح شمل 85 طالبًا جامعيًا. يستخدم 72 طالبًا البريد الإلكتروني للتواصل ويستخدم 31 طالبًا المراسلة الفورية (IM) ويستخدم 21 طالبًا كليهما.
   (a) كم عدد مستخدمي المراسلة الفورية (IM) فقط؟
   (b) كم عدد مستخدمي البريد الإلكتروني فقط؟
   (c) كم عدد الذين لا يستخدمون هذا ولا ذاك؟
2. في صف دراسي يضم 25 طالبًا، كان هناك 18 طالبًا متخصصًا في الرياضيات و12 طالبًا متخصصًا في علوم الحاسوب و7 طلاب مزدوجي التخصص في الرياضيات وعلوم الحاسوب.
   (a) كم عدد الطلاب المتخصصين في الرياضيات فقط؟
   (b) كم عدد الطلاب غير المتخصصين في علوم الحاسوب؟
   (c) كم عدد الطلاب غير المتخصصين في الرياضيات أو علوم الحاسوب؟
3. يوضّح بحث في سجلات الجامعة شمل 250 من طلاب الفرقة الأولى في جامعة الولاية أن 26 طالبًا قد حصلوا على شهادة من الكلية بإتمام دورات تدريبية في العلوم دون دورات تدريبية في الرياضيات وأن 12 طالبًا قد حصلوا على شهادة من الكلية بإتمام دورات تدريبية في الرياضيات دون دورات تدريبية في العلوم. وثبة 202 طالب لم يحصلوا على شهادات لأي منهما.
   (a) كم عدد الطلاب الذين حصلوا على شهادة من الكلية في الرياضيات؟
   (b) كم عدد الطلاب الذين حصلوا على شهادة من الكلية بإتمام دورات تدريبية في العلوم؟
4. [illegible] وعشرون فأرًا في تجربة خاصة بعلم الأحياء متحملة التعرض للمواد الكيميائية الموجودة في دخان السجائر. أصيب خمسة [illegible] ورم واحد على الأقل وعانى تسعة من فشل في الجهاز التنفسي. أصيب أربعة بأورام وفشل في الجهاز التنفسي.
   (a) كم عدد [illegible] الإصابة بأورام؟
   (b) كم عدد الفئران غير المصابة بورم؟
   (c) كم عدد الفئران الذين عانوا من أثر واحد على الأقل من هذه الآثار؟
5. من بين 20 طالبًا خضعوا [illegible] العام في علم النفس. أجاب 15 طالبًا عن السؤال الأول من السؤالين الإضافيين وأجاب 13 طالبًا عن السؤال الإضافي الثاني ولم يحاول 2 مجرد الإجابة عن أي منهما.
   (a) ما النسبة المئوية للطلاب الذين اجتهدوا في الإجابة عن السؤالين؟
   (b) ما النسبة المئوية للطلاب الذين اجتهدوا في الإجابة عن سؤال واحد على الأقل؟
6. في دراسة أجريت على 400 من المقبلات المقدّمة في 75 من مطاعم الحرم الجامعي، تضمن 70 منها أقل من 10 جرامات من الدهون ولكن ليس أقل من 350 سعرة حرارية؛ تضمن 48 منها أقل من 350 سعرة حرارية ولكن ليس أقل من 10 جرامات من الدهون؛ تضمن 140 منها أكثر من 350 سعرة حرارية وأكثر من 10 جرامات من الدهون.
   (a) ما النسبة المئوية للدهون التي تضمنت أقل من 10 جرامات من الدهون؟
   (b) ما النسبة المئوية للمقبلات التي تضمنت أقل من 350 سعرة حرارية؟
7. أجرى قسم المساعدات المالية في الجامعة مسحًا شمل 70 طالبًا. وسألهم ما إذا كانوا يحصلون على أي نوع من المساعدات المالية. لخّصت نتائج المسح في الجدول التالي.

عدد الطلاب	المساعدة المالية
16	المنح الدراسية
24	قروض الطلاب
20	المنح الخاصة
9	المنح الدراسية والقروض
11	القروض والمنح الخاصة
7	المنح الدراسية والمنح الخاصة
2	المنح الدراسية والقروض والمنح الخاصة

   (a) كم عدد الطلاب الحاصلين على منح دراسية فقط؟
   (b) كم عدد الطلاب الحاصلين على قروض ومنح خاصة وغير حاصلين على منح دراسية؟
   (c) كم عدد الطلاب غير الحاصلين على أي من أنواع المساعدات المالية هذه؟
8. تضع مديرة صالة الألعاب الرياضية بالحرم الجامعي جدول دروس اللياقة البدنية للعام الدراسي الجديد. وستقرر عدد مرات انعقاد دروس معينة استنادًا إلى اهتمامات الطلاب. حيث أجرت مسحًا شمل 47 طالبًا في أوقات مختلفة من اليوم، حيث سألتهم عن نوع الدروس التي سيهتمون بحضورها. لخّصت النتائج في الجدول التالي.

الطلاب المهتمون	نوع الدرس
17	اليوجا
13	تمارين البيلاتس
12	الدراجة الثابتة
9	اليوجا وتمارين البيلاتس
3	تمارين البيلاتس والدراجة الثابتة
5	اليوجا والدراجة الثابتة
2	الثلاثة جميعًا

   (a) كم عدد الطلاب المهتمين باليوجا أو الدراجة الثابتة ولكن غير مهتمين بتمارين البيلاتس؟
   (b) كم عدد الطلاب المهتمين بالفعل بدرسين من الدروس الثلاثة؟
   (c) كم عدد الطلاب المهتمين باليوجا وغير مهتمين بتمارين البيلاتس؟
9. خلال فصل دراسي واحد في الكيمياء، رسب 14 طالبًا بسبب قلّة الحضور ورسب 23 طالبًا بسبب عدم المذاكرة ورسب 15 طالبًا بسبب عدم تسليم الواجبات ورسب 9 طلاب بسبب قلّة الحضور وعدم المذاكرة ورسب 8 طلاب بسبب عدم المذاكرة وعدم تسليم الواجبات ورسب 5 طلاب بسبب قلّة الحضور وعدم تسليم الواجبات ورسب 2 من الطلاب بسبب هذه الأسباب الثلاثة جميعًا.
   (a) كم عدد الطلاب الذين رسبوا نظرًا لسببين تحديدًا من الأسباب الثلاثة؟
   (b) كم عدد الذين رسبوا بسبب قلّة الحضور وعدم المذاكرة وليس بسبب عدم تسليم الواجبات؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

almanahi.com/ae

(c) كم عدد الذين رسبوا نظرًا لسبب واحد تحديدًا من الأسباب الثلاثة؟

(d) كم عدد الذين رسبوا بسبب قلّة الحضور وعدم تسليم الواجبات وليس بسبب عدم المذاكرة؟

10. وفق مسح أجرته مؤسسة ناشونال بيتزا والذي قمت بترتيبه الآن، من بين 109 من العملاء الذين شملهم المسح، يفضّل 32 عميلًا البيتزا بلحم البيروني البقري فقط ويفضلها 40 عميلًا بنفانق الديك الرومي فقط ويفضلها 18 عميلاً بالبصل فقط. يفضل ثلاثة عشر من محبي اللحوم بشكل كبير لحم البيروني البقري ونفانق الديك الرومي ويفضل 10 عملاء نفانق الديك الرومي والبصل ويفضل 9 عملاء لحم البيروني البقري والبصل؛ في كل حالة. يمكن إضافة الصنف الثالث أيضًا. يخرج سبعة أشخاص جميعًا. ويطلبون الأنواع الثلاثة.

(a) كم عدد العملاء الذين يفضلون لحم البيروني البقري أو نفانق الديك الرومي أو لحم البيروني البقري ونفانق الديك الرومي من دون بصل؟

(b) ماذا عن نفانق الديك الرومي أو البصل أو نفانق الديك الرومي والبصل من دون لحم البيروني البقري؟

(c) كم عدد الذين سيتبعون النهج المبل—وجبات خالية من أي من تلك الإضافات؟

11. سجل مئتا مريض يعانون من الاكتئاب في تجربة سريرية لاختبار آثار مضادات الاكتئاب المختلفة. أُعطي العقار A الـ 37% من المرضى وأُعطي العقار B لـ 30% وأُعطي العقار C لـ [illegible] ثبت معالجة ثلاثة عشر بالمئة باستخدام العقارين A وB على الـ [illegible] وأعطي 11.5% العقارين B وC على الأقل وأُعطي 7% العقارين A وC على الأقل وثبت معالجة 4% بالعقاقير الثلاثة جميعًا.

(a) كم عدد المرضى في التجربة الذين أُعطوا عقارين على الأكثر من العقاقير الثلاثة؟

(b) كم عدد المرضى الذين ثبت معالجتهم بالعقارين A وC دون استخدام العقار B؟

(c) كم عدد المرضى الذين أُعطوا دواءً وهميًا لا يتضمن أيًا من العقاقير الثلاثة؟

12. وضّح مسح شمل 96 طالبًا في الحرم الجامعي أن 29 طالبًا قرؤوا جريدة الطلبة المسماة *منبر الحرم الجامعي* في ذلك الصباح. وقرأ 24 طالبًا الأخبار عبر الإنترنت في ذلك الصباح وقرأ 20 طالبًا جريدة المدينة المحلية في ذلك الصباح. قرأ ثمانية طلاب جريدة *منبر الحرم الجامعي* والأخبار عبر الإنترنت في ذلك الصباح بينما قرأ أربعة طلاب الأخبار عبر الإنترنت والجريدة المحلية وقرأ سبعة طلاب جريدة *منبر الحرم الجامعي* وجريدة المدينة المحلية وقرأ شخصٌ واحدٌ جريدة *منبر الحرم الجامعي* والأخبار عبر الإنترنت والجريدة المحلية.

(a) كم عدد من قرأ الأخبار عبر الإنترنت أو الجريدة المحلية وليس كلتيهما؟

(b) كم عدد من قرأ الأخبار عبر الإنترنت والجريدة المحلية ولم يقرؤوا جريدة *منبر الحرم الجامعي*؟

(c) كم عدد من قرأ الأخبار عبر الإنترنت أو جريدة *منبر الحرم الجامعي* أو كلتيهما؟

13. من بين أكبر 50 مدينة في الولايات المتحدة، 11 مدينة لكل منها فريقٌ في الرابطة الوطنية لكرة السلة ولكن ليس لديها فريقٌ في دوري البيسبول الرئيس؛ و9 مدن لدى كل منها فريقٌ في دوري البيسبول الرئيس ولكن ليس لديها فريقٌ في الرابطة الوطنية لكرة السلة؛ و12 مدينة لا تملك هذا ولا ذاك.

(a) كم عدد المدن التي لدى كل منها فريقٌ في دوري البيسبول الرئيس وفريقٌ في الرابطة الوطنية لكرة السلة؟

(b) تمتلك كل مدينة من شيكاغو ونيويورك ولوس أنجلوس فريقين للبيسبول، ولكن لوس أنجلوس هي المدينة الوحيدة التي لها فريقان لكرة السلة. كل مدينة من تلك المدن لها فريق في كلا الدوريين. كم عدد الفرق الموجودة في كل دوري؟

14. يصدر مئة كتاب جديد على المستوى الوطني على مدار 3 أيام من النشاط المتواصل في ديسمبر. ثبة ثمانية كتب لها نسخة إلكترونية متاحة على موقع Amazon فقط و5 كتب متاحة على موقع Google فقط و18 كتابًا متاحًا على موقع iTunes فقط. وكان هناك إجمالي 26 كتابًا متاحًا على Google و7 كتب يمكن العثور عليها على Amazon وGoogle معًا ولكنها غير موجودة على iTunes و4 كتب يمكن العثور عليها على iTunes وGoogle معًا ولكنها غير موجودة على Amazon. ارسم مخطط فن *Venn* يمثل هذه المعلومات واستخدمه للإجابة عن الأسئلة التالية.

(a) كم عدد الكتب المتاحة على المواقع الثلاثة جميعًا؟

(b) اشرح لماذا لا يمكنك إيجاد عدد الكتب التي لم تكن متاحة على أي من الخدمات الثلاث.

(c) إذ كان كل كتاب تم إصداره متاحًا في صورة كتاب إلكتروني على موقع واحد من Amazon أوGoogle أو iTunes على الأقل. فكم عدد الكتب التي كانت متاحة على Amazon وiTunes وليست متاحة على Google؟

(d) في تلك الحالة، كم عدد الكتب التي كانت متاحة على [illegible] من المواقع الثلاثة هذه؟

15. توظف شركة [illegible] موظفين لإجراء أبحاث حول عادات الاستماع لدى السائقين في منطقة حضرية كبيرة. في اليوم الأول، أجرى مسح شمل 127 سائقًا، يستمع 26 سائقًا إلى راديو FM أثناء القيادة، 4 [illegible] إلى FM فقط. ويستمع ثمانية آخرون إلى راديو AM فقط. بينما يستمع 4 إلى FM والراديو الفضائي فقط و6 سائقين يستمعون إلى راديو AM فقط ويستمع 22 سائقًا إلى الراديو الفضائي ويستمع 69 إلى نوع واحد فقط على الأقل من [illegible]

(a) هل عدد من يستمع إلى الراديو الفضائي أكثر أم عدد من لا يستمع إلى أي نوع من الأنواع الثلاثة [illegible] في المسح أكثر؟

(b) كم يزيد عدد الأشخاص الذين يستمعون إلى راديو AM عن أولئك الذين يستمعون إلى FM؟

(c) كم عدد المستمعين إلى بعض أنواع الراديو، لكن ليس راديو AM؟

almanahj.com/ae

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

647

الدرس 10-4 مجموعة التمارين يتبع

16. صُنفت مجتمعات الفنون في 230 مدينة في جميع أنحاء البلاد وفق ما إذا كان بها متحفٌ فنيٌّ وأوركسترا سيمفونية وفرقة باليه. كان ثمة 119 مدينة بها متحفٌ فنيٌّ؛ 20 منها بها فرقة باليه كذلك لكن لا توجد بها أوركسترا و41 مدينة بها أوركسترا لكن لا توجد بها فرقة الباليه و30 مدينة لا يوجد فيها أي من ذلك. من بين 75 مدينة بها فرقة باليه، 10 منها بها أوركسترا كذلك، لكن لا يوجد بها متحفٌ فنيٌّ. اثنان وعشرون مدينة يوجد بها أوركسترا فقط.

(a) ما النسبة المئوية للمدن التي توجد بها أوركسترا؟
(b) كم يزيد عدد المدن التي لا يوجد بها أي من هذه الأشياء الثلاثة عن التي يوجد بها جميعها؟
(c) إذا اخترت مدينة عشوائيًا من هذه القائمة للسفر إليها وتريد حقًا الذهاب إما إلى متحف فني أو حفلة أوركسترا، فما النسبة المئوية لاحتمال إصابتك بخيبة أمل في نهاية الأمر؟

التفكير الناقد

17. تم توظيف باحث لدراسة عادات الشرب لدى مستهلكي مشروب الشاي. اشرح لماذا تم فصله عندما نشر النتائج التالية.
تم مسح شمل 40 من هؤلاء المستهلكين:
قال 23 إنهم يشربون الشاي الأسود.
قال 18 إنهم يشربون الشاي الأخضر.
قال 19 إنهم يشربون الشاي العشبي.
قال 12 إنهم يشربون الشاي الأسود والشاي الأخضر.
قال 6 إنهم يشربون الشاي الأخضر والشاي العشبي.
قال 7 إنهم يشربون الشاي الأسود والشاي العشبي.
قال 2 إنهم يشربون الأنواع الثلاثة جميعًا.
قال 2 إنهم لا يشربون أيًا من الأنواع الثلاثة.

18. قامت شركة Ocelliant12 للأبحاث التسويقية بتصميم ثلاثة إعلانات عشوائية وإرسال كل إعلان إلى 40 حساب بريد إلكتروني. كان الإعلان الأول عن كريم لإزالة الشعر، والثاني إعلان عن علاجات للصداع النصفي، والثالث إعلان عن نظام غذائي جديد من فاصولياء ليما. اشرح لماذا توقفت الشركات الراعية عن تقديم خدماتها عند ظهور النتائج التالية.
حذف 23 مستلمًا إعلان كريم إزالة الشعر ومن النظام إليه.
حذف 18 مستلمًا إعلان علاجات الصداع النصفي
حذف 19 مستلمًا إعلان النظام الغذائي من فاصولياء ليما.
حذف 12 مستلمًا إعلاني كريم إزالة الشعر وعلاجات الصداع النصفي.
حذف 6 مستلمين إعلاني علاجات الصداع النصفي والنظام الغذائي من فاصولياء ليما.
حذف 7 مستلمين إعلاني كريم إزالة الشعر والنظام الغذائي من فاصولياء ليما.
حذف 2 من المستلمين الإعلانات الثلاثة جميعًا.

19. تقوم شبكة تلفزيونية تفكر في إبرام عقود جديدة لبث قنوات رياضية بتوظيف مستشار تسويق لإجراء مسح بشمل مشاهدي تلفاز تم اختيارهم عشوائيًا لسؤالهم عن الرياضة التي يسعون جاهدين لمشاهدتها عبر التلفاز من بين كرة القدم والتنس وكرة السلة. ومن بين من شملهم المسح، يشاهد 35 التنس و235 كرة السلة و295 كرة القدم ويشاهد 90 كرة السلة وكرة القدم و560 لا يشاهدون أيًا من الثلاثة.
(a) اشرح لماذا لا تُعد هذه المعلومات كافية لإيجاد إجمالي عدد الأشخاص الذين شملهم المسح.
(b) عند النظر إلى النتائج بعناية أكثر، يكتشف أحد أعضاء الفريق الاستشاري أن كل شخص يشاهد التنس يشاهد كرة السلة كذلك. ولا يشاهد أيّ من هؤلاء الأشخاص كرة القدم. هل يمكنك الآن إيجاد عدد الأشخاص الذين شملهم المسح؟
(c) كم شخصًا يشاهد كرة القدم فقط؟ كم شخصًا يشاهد كرة السلة فقط؟

20. (a) ما عدد المناطق المختلفة الموجودة في مخطط فن *Venn* مكوّن من دائرتين؟ ماذا عن المخطط المكوّن من ثلاث دوائر؟ استخدم هذا لتكوين تخمين بشأن عدد المناطق اللازمة لمخطط *Venn* من أربع دوائر.
(b) قم ببعض المحاولات لرسم مخطط فن *Venn* بأربع دوائر. ثم اشرح لماذا يتعذر ذلك.
(c) استخدم الإنترنت لإيجاد مخطط فن *Venn* لأربع مجموعات، واستخدمه للتحقق من تخمينك من الجزء (a).

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

almanahj.com/ae

الدرس 10-5 المجموعات غير المنتهية

أهداف التعلم

1. تعريف المجموعات غير المنتهية.
2. توضيح أن مجموعة ما غير منتهية.
3. إيجاد حد عام لمجموعة غير منتهية.
4. تعريف المجموعات القابلة للعد وغير القابلة للعد.

قد تبدو السماء ليلًا غير منتهية. ولكن هل فكرت مطلقًا في معنى ذلك حقًا؟

يُعد مفهوم اللانهاية بالغ الصعوبة بالنسبة إلينا كبشر لتدركه عقولنا. ولأن أفكارنا تتشكل من خلال التجارب في عالم مادي محدود الأبعاد، فإن الأشياء الكبيرة بصورة غير منتهية تبدو دائمًا بعيدة عن متناولنا. يشعر بعض الفلاسفة أن البشر عاجزون بشكل أساسي عن فهم مفهوم الشيء الكبير بصورة غير منتهية على الإطلاق!

إن دراسة اللانهاية والمجموعات غير المنتهية من منظور الرياضيات تُعد حديثة نسبيًا إذا ما قورنت بتاريخ الرياضيات بشكل عام. فمنذ مدة لا تقل عن ألفي سنة، كانت طبيعة اللانهاية مربكة بدرجة كبيرة لأعظم العقول البشرية الذين اختاروا عدم التطرق لها على الإطلاق. ومع ذلك، ففي العمل في مجموعة تكون ببساطة الأرقام الطبيعية، فإننا نتعامل مع مجموعات غير منتهية في الرياضيات طوال الوقت. إنها مفارقة مثيرة للاهتمام.

تعريف المجموعات غير المنتهية

تذكر من الدرس 1 أن المجموعة تُعد منتهية إذا كان عدد العناصر إما صفرًا أو عددًا طبيعيًا. وإلا، فستُعد مجموعة غير منتهية. على سبيل المثال، تُعد المجموعة {10, 20, 30, 40} منتهية لأن عدد العناصر (أربعة) عدد طبيعي. لكن المجموعة {. . . ,10, 20, 30, 40} غير منتهية لأن عدد العناصر غير محدد، ومن ثم لا يكون عددًا طبيعيًا.

قد نتعرف على المجموعة غير المنتهية عندما نراها، لكن ليس من السهل بالضرورة أن نقدم تعريفًا دقيقًا لما يعنيه كون المجموعة غير منتهية (غير المنتهي الواضح، "غير منتهية"). يشتهر عالم الرياضيات الألماني جورج كانتور، الذي يُعد على نطاق واسع أبًا لنظرية المجموعات، بدراسة المجموعات غير المنتهية التي أجراها في القرن التاسع عشر. وقد أتى تعريف كانتور البسيط والأنيق للمجموعة غير المنتهية كما يلي:

تكون المجموعة **غير منتهية** إذا أمكن وضعها في تناظر أحادي مع مجموعة جزئية فعلية من المجموعة الجزئية الفعلية الخاصة بها.

أولًا، لاحظ أن المجموعة المنتهية لا تفي بالتأكيد بالشرط الوارد في هذا التعريف: إذا كانت المجموعة تحتوي على عدد محدد من العناصر، وليكن 10، فإن أي مجموعة جزئية فعلية تحتوي على 9 عناصر على الأكثر ومحاولة وضع تناظر واحد لواحد ستخلّف دائمًا عضوًا واحدًا على الأقل.

والشيء الأصعب هو استيعاب كيف يمكن للمجموعة غير المنتهية أن تحقق هذا الشرط. سنوضّح ذلك باستخدام مجموعة غير منتهية نعرفها جيدًا، مجموعة الأعداد الطبيعية {. . . ,1, 2, 3, 4, 5}. مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية {. . . ,2, 4, 6, 8} هي مجموعة جزئية فعلية؛ كل عدد زوجي هو عدد طبيعي كذلك، لكن توجد أعداد طبيعية ليست أعدادًا زوجية. الآن، سنوضح طريقة ماهرة لوضع هاتين المجموعتين في تناظر واحد لواحد: توصيل كل عدد طبيعي بمثليه.

$$1 \leftrightarrow 2, \quad 2 \leftrightarrow 4, \quad 3 \leftrightarrow 6, \quad 4 \leftrightarrow 8, \ldots$$

بشكل عام، يمكننا تحديد مقابلتنا بتوصيل أي n من مجموعة الأعداد الطبيعية بعدد زوجي مقابل $2n$. وبعد ذلك تناظر واحد لواحد لأن كل عدد طبيعي له مقابل (مثلاه)، وكل عدد زوجي له مقابل (نصفه).

1. تعريف المجموعات غير المنتهية رسميًا.

ملاحظة رياضية

فكر فيما يلي لمدة ثانية: أي المجموعتين أكبر: {. . . ,1, 2, 3, 4, 5} أم {. . . ,2, 4, 6, 8, 10}؟ عالبًا أي شخص عاقل سيقول إن الأولى هي الأكبر. أليس كذلك؟ لكن المناقشة الموجودة على اليسار توضّح أنهما متساويتان في الحجم بالعمل.

almanahj.com/ae

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

649

ومن ثم نكون قد وضعنا الأعداد الطبيعية في تناظر واحد لواحد مع مجموعة جزئية فعلية، ما يثبت أنها مجموعة غير منتهية.

لنجرب مثالاً آخر.

معلومات إضافية الفندق غير المنتهي

يفرض أن هناك فندقًا هائلاً جدًا في إحدى المجرات البعيدة يتضمن بالفعل عددًا لا نهائيًا من الغرف، مرقّمة على النحو 1, 2, 3, 4, ... هناك اجتماع كبير بين مخلوقات غريبة ومروعة في المدينة، لذلك جميع الغرف مشغولة. يدخل مسافر منهك إلى الردهة ويطلب غرفة، وعندما يعلم أن الفندق ممتلئ، يحتج بأن الفندق يمكن أن يستوعبه بالتأكيد. هل تتفق معه؟ هل يمكنهم العثور على غرفة له دون طرد شخص ما؟

يميل الأشخاص إلى الانقسام بشأن هذا السؤال إلى نصفين: يعتقد نصفهم أنه لا يمكنهم استيعابه لأن جميع الغرف ممتلئة. ويعتقد النصف الآخر أنه يمكنهم ذلك لأن هناك العديد من الغرف غير المنتهية. في الحقيقة، المسافر مُحقّ— فالأمر لا يتطلب سوى إزعاج جميع النزلاء الآخرين! إذا طلب المدير من كل نزيل الانتقال إلى الغرفة التي يزيد رقمها بمقدار 1 عن رقم غرفته الحالية، فإن كل شخص كان في الأصل في غرفة لا يزال يمتلك غرفة، ويستطيع مسافرنا إراحة جسده المرهق في الغرفة 1.

هذا التمرين العقلاني الذكي الصغير هو نتيجة للحقيقة التي تفيد أن الأعداد الطبيعية تشكل مجموعة غير منتهية— يمكن وضعها في تناظر واحد لواحد مع مجموعة جزئية فعلية من نفسها عن طريق مقابلة أي n بـ $n+1$.

وضّح أن المجموعة {5, 10, 15, 20, 25, . . .} هي مجموعة غير منتهية.

مثال 1 توضيح أن مجموعة ما غير منتهية

الحل

ثمة طريقة بسيطة لوضع هذه المجموعة في مقابلة مع مجموعة جزئية فعلية من نفسها وهي مطابقة كل عنصر n مع مثليه $2n$.

$$\begin{matrix}\{5, & 10, & 15, & 20, & 25, \ldots\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \{10, & 20, & 30, & 40, & 50, \ldots\}\end{matrix}$$

المجموعة الثانية، {10, 20, 30, 40, 50, . . .}، هي مجموعة جزئية فعلية من المجموعة الأولى. والمجموعتان في تناظر واحد لواحد، لذا {5, 10, 15, 20, 25, . . .} هي مجموعة غير منتهية.

جرّب هذا 1

وضّح أن المجموعة {−1, −2, −3, −4, −5, . . .} هي مجموعة غير منتهية.

الحد العام للمجموعة غير المنتهية

2. توضيح أن مجموعة ما غير منتهية.

تتمثل إحدى نتائج الطريقة التي أشرنا بها أن مجموعة الأعداد الطبيعية غير منتهية في أننا يمكننا إيجاد صيغة عامة لمجموعة الأعداد الزوجية، حيث n هي المجموعة {1, 2, 3, 4, . . .}. سنسمي $2n$ في هذه الحالة **حدًا عامًا** لمجموعة الأعداد الزوجية. ولاحظ أننا قلنا "حد عام" وليس "الحد العام". فثمة حدود عامة أخرى يمكننا كتابتها لهذه المجموعة؛ فـ $2n$، حيث n هي المجموعة {4, 5, 6, 7, . . .}، يُعد احتمالاً آخر. لكن في معظم الحالات يكون الحد العام الأبسط هو الحد الذي يتم الحصول على العدد الأول المذكور فيه بالتعويض بـ 1 عن n. وهذا هو الحد الذي سنجده عادةً.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

almanahj.com/ae

ملاحظة رياضية

لا يعد إيجاد حد عام لمجموعة أمرًا سهلًا دومًا. في بعض الحالات، قد يكون أمرًا بالغ الصعوبة أو مستحيلًا فقد تحتاج إلى إجراء بعض المحاولات وارتكاب الأخطاء قبل إيجاد صيغة صحيحة.

مثال 2 إيجاد الحد العام لمجموعة غير منتهية

جـــد حدًّا عامًّا للمجموعة {4, 7, 10, 13, 16, . . .}.

الحل

يجب أن نبدأ دومًا بمحاولة التعرف على نمط متبع في أعداد المجموعة. في هذه الحالة، النمط هو زيادة الأعداد بمعدل 3. عندما نكون الحالة كذلك، فإن $3n$ يمثل خيارًا جيدًا، لأنه عندما تزداد n بمعدل 1، تزداد $3n$ بمعدل 3. ولكن مجرد استخدام $3n$ سيمنحنا المجموعة {3, 6, 9, 12, . . .}، التي لا تمثل ما نريده بالتحديد. نعالج ذلك بإضافة 1 إلى الحد العام الخاص بنا، للحصول على $3n + 1$ (نتحقق من تلك الإجابة بالتعويض بالقيم 1, 2, 3, . . . عن n لنلاحظ أن النتيجة هي المجموعة {4, 7, 10, 13, 16, . . .}).

جرّب هذا 2

جـــد حدًّا عامًّا للمجموعة {2, 8, 14, 20, 26, . . .}.

أنواع اللانهاية المختلفة؟

3. إيجاد حد عام لمجموعة غير منتهية.

سريعًا، ما المجموعة الأكبر، مجموعة الأعداد الطبيعية أم مجموعة الأعداد الحقيقية؟ من المحتمل أن تكون قد أجبت بمجموعة الأعداد الحقيقية. لكن كلتا المجموعتين كبيرة بصورة غير منتهية. أليستا متساويتين في الحجم إذن؟ لقد واجه كانتور هذه المسألة في أواخر القرن التاسع عشر. وحدد أن المجموعة تكون **قابلة للعد** إذا كانت منتهية أو يمكن وضعها في تناظر واحد لواحد مع الأعداد الطبيعية، وأن المجموعة غير المنتهية تكون **غير قابلة للعد** إذا تعذر ذلك. واستخدم الرمز $\aleph_0$، ويُنطق ألف–صفر، لتمثيل عدد العناصر الرئيسة للمجموعة القابلة للعد.

مثال 3 توضيح أن مجموعة ما قابلة للعد

وضّح أن مجموعة الأعداد الصحيحة قابلة للعد.

الحل

إذا كانت مجموعة هي مجموعة منتهية، فإنها قابلة للعد دومًا. لذلك فإن ذلك يستحق التفكير على الأقل. ولكن الأعداد الصحيحة ليست مجموعة منتهية، لذلك نحتاج إلى إيجاد طريقة لوضعها في تناظر واحد لواحد مع أعداد طبيعية. يمكننا مطابقة 0 مع 1، و1 مع 2، و2 مع 3، وهكذا. ولكن ذلك سيهمل الأعداد السالبة. لذلك فلنتخيل الأمر بصورة أشمل:

الأعداد الطبيعية	1	2	3	4	5	6	7	8	9	. . .
الأعداد الصحيحة	0	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4	. . .

يعد هذا صحيحًا لأننا يمكننا ملاحظة أن كل عدد صحيح سيقابله عدد طبيعي في الجدول. لا يمكن أن يحدد ذلك تناظر واحد لواحد. بالرغم من ذلك، سيكون الإثبات أقوى إذا تمكنا من تحديد صيغة لكل عدد طبيعي n.

$$n \rightarrow \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{إذا كان } n \text{ عددًا زوجيًا} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{إذا كان } n \text{ عددًا فرديًا} \end{cases}$$

يحدد تناظر واحد لواحد.

almanahi.com/ae

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

651

معلومات إضافية القصة الحزينة للرجل الذي كان ذا بصيرة

الشخص الذي صاغ عبارة "العبقرية الحقيقية لا تُدرك مطلقًا في الوقت المناسب" كان سيجب جورج كانتور. إن مجرد أن تشتهر بكونك مؤسسًا لما يمثل الآن فرعًا رئيسًا في الرياضيات (نظرية المجموعات) يُعد إنجازًا عظيمًا. ولكن الأمر كان يتعلق بقدرة كانتور الفريدة على إضفاء الطابع الرسمي على دراسة اللانهاية التي كانت أعظم إنجازته. وفي النهاية مثلت اللعنة الأكبر له.

لقرون عديدة، تجاهلت دراسة الرياضيات بشكل أساسي حقيقة أن أعمدتها الأساسية—الأعداد الطبيعية والحقيقية—كانت مجموعات غير منتهية؛ ببساطة لم تتم دراسة اللانهاية. بالنسبة إلى الجزء الأكبر، كان هذا يعزى إلى المعتقدات الدينية—وكان يعتقد أن اللانهاية هو عالم يخص الله وحده، واعتبرت محاولات دراستها علميًا أمرًا غير لائق من قبل البعض وبدعة صريحة من قبل آخرين. وعلى أقل تقدير، لم يتم الاحتفاء بعمل كانتور وقت صدوره. كان اثنان من أكبر منتقدي كانتور كذلك من بين أشهر علماء الرياضيات في أواخر القرن التاسع عشر: هنري بوانكاريه وليوبلد كرونكر. أشار بوانكاريه إلى عمل كانتور على أنه "مرض خطير يصيب الرياضيات". ومن الواضح أن كرونكر فضّل الهجمات الشخصية، واصفًا كانتور بأنه "دجال علمي" و"مرتد" و"مفسد الشباب". وكان هذا من جانب علماء الرياضيات—شعر الفلاسفة الدينيون أنه يجب سجنه أو أسوأ من ذلك.

أثقل ذلك النقد كاهل جورج المسكين بشدة، حيث دخل المستشفى لأول مرة بسبب الاكتئاب الحاد في عام 1884 بعد 10 سنوات من العمل التأسيسي في نظرية المجموعات. على الرغم من أنه ظل ناشطًا كعالم رياضيات حتى عام 1913، إلا أنه كان ينضم إلى المؤسسات ويرحل منها بسرعة، وقضى آخر 5 سنوات من حياته في مصحة حتى مات في عام 1918.

لكن صدّق أو لا تصدق، كان يمكن أن يكون الوضع أسوأ من ذلك. يمكن أن ترجع جذور الأفكار التي نقبلها الآن عن اللانهاية إلى الفيلسوف الإيطالي وعالم الرياضيات وعالم الفلك جوردانو برونو، الذي تمت مكافأته على فهمه الرائد للطبيعة اللانهائية للكون بحرقه على الوتد في 17 فبراير 1600.

جرّب هذا 3

وضّح أن مجموعة الأعداد النسبية الموجبة ذات المقامات 2 أو 3 هي مجموعة قابلة للعد. (الأعداد النسبية هي كسور ذات أعداد صحيحة في البسط والمقام.)

الآن يكون السؤال الذي يطرح نفسه هو: ما أنواع المجموعات غير القابلة للعد؟ وكيف يمكنك إثباتها؟ هذا، يا أصدقائي، ليس سؤالًا سهلًا على الإطلاق. لقد كان أحد أهم إنجازات كانتور، في الحقيقة، هو إثبات أن مجموعة الأعداد الحقيقية ليست قابلة للعد. فإذا كنت قد خمّنت إذن أن الأعداد الحقيقية أكبر من الأعداد الطبيعية، فأنت محق. لكن دراسة المجموعات غير المنتهية غريبة وشيقة في آن واحد، حيث النتائج غير المتوقعة في كل محاولة تقريبًا. فمثلًا، يمكن إثبات أن عدد العناصر الرئيسة لمجموعة من الأعداد التي بين 0 و1 فقط هو نفسه عدد العناصر الرئيسة لمجموعة الأعداد الحقيقية بالكامل! إذا وجدت هذه الأفكار مشوقة، فستحصل على المزيد منها في المشروعين 3 و4 في نهاية هذه الوحدة.

إجابات جرّب هذا

1 يمكن حلها بطرق عديدة: أحد الخيارات هو تناوب بين -2 و-4، ويوجه عام n بـ $-2n$.

2 $6n - 4$

3 احتمال واحد:

1	2	3	4	5	6	...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	...

$$n \to \begin{cases} \frac{(n+1)}{4} & \text{إذا كان } n \text{ عددًا فرديًا} \\ \frac{n}{6} & \text{إذا كان } n \text{ عددًا زوجيًا} \end{cases} \quad \text{أو} \quad n \to \begin{cases} \frac{(n+1)/2}{2} & \text{إذا كان } n \text{ عددًا فرديًا} \\ \frac{n/2}{3} & \text{إذا كان } n \text{ عددًا زوجيًا} \end{cases}$$

almanahj.com/ae

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 10-5 مجموعة التمارين

تمارين كتابية

1. عرّف المجموعة المنتهية، بكلماتٍ من عندك وباستخدام تعريف كانتور كذلك.
2. ما المقصود بالحد العام لمجموعة غير منتهية؟
3. ماذا يعني أن تكون مجموعة ما قابلة للعد؟
4. اشرح كيف يمكنك معرفة أن مجموعة الأعداد الطبيعية ومجموعة الأعداد الزوجية تتضمنان عدد العناصر الرئيسة نفسه.

تمارين حسابية

بالنسبة إلى التمارين 5–20، جِد حدًا عامًا للمجموعة.

5. {7, 14, 21, 28, 35, . . .}
6. {1, 8, 27, 64, 125, . . .}
7. {4, 16, 64, 256, 1,024, . . .}
8. {4, 9, 16, 25, . . .}
9. {−3, −6, −9, −12, −15, . . .}
10. {22, 44, 66, 88, 110, . . .}
11. $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \ldots\}$
12. $\{\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, 1, \ldots\}$
13. {2, 6, 10, 14, 18, . . .}
14. {1, 4, 7, 10, 13, . . .}
15. $\{\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \ldots\}$
16. $\{1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \frac{1}{125}, \ldots\}$
17. {100, 200, 300, 400, 500, . . .}
18. {50, 100, 150, 200, 250, . . .}
19. {−4, −7, −10, −13, −16, . . .}
20. {−3, −5, −7, −9, −11, . . .}

بالنسبة إلى التمارين 21–30، وضّح أن كل مجموعة هي مجموعة غير منتهية.

21. {3, 6, 9, 12, 15, . . .}
22. {10, 15, 20, 25, 30, . . .}
23. {9, 18, 27, 36, 45, . . .}
24. {4, 10, 16, 22, 28, . . .}
25. {2, 5, 8, 11, 14, . . .}
26. {20, 24, 28, 32, 36, . . .}
27. {10, 100, 1,000, 10,000, . . .}
28. {100, 200, 300, 400, 500, . . .}
29. $\{\frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{5}, \ldots\}$
30. $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots\}$

بالنسبة إلى التمارين 31–34، وضّح أن المجموعة المعطاة قابلة للعد. (انظر المثال 3 للاسترشاد.)

31. {5, 10, 15, 20, 25, . . .}
32. {−3, −6, −9, −12, −15, −18, . . .}
33. مجموعة الأعداد التي جذرها التربيعي عددٌ كليّ
34. مجموعة الأعداد النسبية السالبة ذات المقامين 5 و7

التفكير الناقد

35. مجموعة الأعداد النسبية هي مجموعة تتضمن جميع الكسور المحتملة التي تكون قيم البسط والمقام لها أعدادًا صحيحة. بديهيًا، هل تعتقد أنه توجد أعداد نسبية أكثر من الأعداد الطبيعية؟ لماذا؟ هل تعتقد أن مجموعة الأعداد النسبية قابلة للعد؟
36. هل يمكنك التفكير في أي مجموعة من الأشياء الملموسة التي تعد مجموعة غير منتهية؟ لمَ أو لمَ لا؟
37. ادرس المثال 3 بعناية، ثم قارنه بالمثال 2. ما الذي أثبتناه بالفعل في المثال 2 من دون حتى إدراك ذلك؟
38. صواب أم خطأ:
    (a) المجموعة الجزئية من مجموعة غير منتهية تكون غير منتهية.
    (b) إذا كانت المجموعة A تتضمن مجموعة جزئية غير منتهية، فإن A يجب أن تكون غير منتهية كذلك.

يستخدم التمرينان 39 و40 الحقيقة التي تفيد أن عدد العناصر الرئيسة لمجموعة الأعداد الطبيعية {1, 2, 3, 4, . . .} هو $\aleph_0$.

39. (a) حدد التناظر واحد لواحد بين مجموعة الأعداد الطبيعية والمجموعة {0, 1, 2, 3, 4, . . .}.
    (b) اكتب مسألة حسابية تتضمن $\aleph_0$ الموضح بواسطة الجزء (a). (*إرشاد:* كم عدد العناصر الزائدة عن الأعداد الطبيعية التي تتضمنها المجموعة {0, 1, 2, 3, 4, . . .}؟)
40. (a) حدد التناظر واحد لواحد بين مجموعة الأعداد الطبيعية ومجموعة جميع الأعداد الصحيحة باستثناء الصفر.
    (b) اكتب مسألة حسابية تتضمن $\aleph_0$ الموضح بواسطة الجزء (a).

في التمارين 41–46، حدد العناصر الرئيسة للمجموعة المعطاة. ربما تجد الأفكار الواردة في التمرينين 39 و40 مفيدة.

41. {10, 11, 12, 13, 14, . . .}
42. {−1, −2, −3, −4, −5, . . .}
43. {1, 3, 5, 7, 9, . . . 29}
44. {2, 4, 6, 8, 10, . . . , 24}
45. مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية.
46. مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية.

almanahj.com/ae

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

653

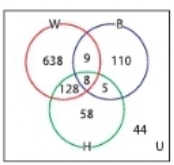
الوحدة 10-5 الملخص

الدرس	مصطلحات مهمة	أفكار مهمة
1	المجموعة طريقة ذكر العناصر العنصر محددة جيدًا الأعداد الطبيعية الطريقة الوصفية رمز بناء المجموعة المتغير مجموعة منتهية مجموعة غير منتهية عدد رئيس مجموعة خالية مجموعات متساوية مجموعات متكافئة التناظر واحد لواحد	**المجموعة** هي مجموعة من العناصر؛ وتكون المجموعة محدودة إذا كان يمكن الجزم بموضوعية أن أي عنصر ينتمي إلى المجموعة أو لا ينتمي إليها. يسمى كل شيء عنصرًا أو عضوًا في المجموعة. نستخدم ثلاث طرق لتحديد المجموعات: طريقة ذكر العناصر والطريقة الوصفية ورمز بناء المجموعة. تتضمن المجموعة المنتهية عدد محدود من العناصر، بينما تتضمن المجموعة غير المنتهية عدد غير محدود من العناصر. إذا كانت المجموعة لا تتضمن أي عناصر، فتسمى مجموعة خالية أو مجموعة فارغة. تكون المجموعتان متساويتين إذا كانتا تتضمنان العناصر نفسها، وتكون المجموعتان المنتهيتان متكافئتين إذا كانتا تتضمنان عدد العناصر نفسه. تسمى المجموعتان في حالة تناظر واحد لواحد إذا كان من الممكن إقتران العناصر بحيث يكون لكل عنصر في المجموعة الأولى عنصر مناظر تمامًا في المجموعة الثانية، والعكس.
2	المجموعة الشاملة متممة المجموعة الجزئية المجموعة الجزئية الفعلية التقاطع الاتحاد الطرح الضرب الديكارتي	**المجموعة الشاملة** هي مجموعة تضم كافة العناصر المستخدمة لمسألة أو حالة محددة. المجموعة المتممة لمجموعة محددة هي مجموعة تتألف من جميع العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة وليست في المجموعة المحددة. تسمى المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة B إذا كان كل عنصر في A موجودًا كذلك في B. نُسمي A مجموعة جزئية فعلية للمجموعة B إذا وجد عنصر واحد على الأقل في B غير موجود في A. اتحاد مجموعتين هو المجموعة التي تضم جميع العناصر الموجودة في مجموعة واحدة على الأقل من المجموعتين. التقاطع هو المجموعة التي تضم جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين. الفرق بين المجموعة A والمجموعة B، يرمز إليه بـ $A - B$، هو مجموعة العناصر الموجودة في المجموعة A لكنها غير موجودة في المجموعة B. الضرب الديكارتي للمجموعتين A و B هو $A \times B = \{y \in B, (x, \quad) \in A$.
3	مخطط فن *Venn*	اخترع **عالم رياضيات** اسمه **جون فن** طريقة لتمثيل المجموعات بشكل تصويري. يستخدم أسلوبه الدوائر المتداخلة لتمثيل المجموعات. توضع العناصر الموجودة ضمن تقاطع المجموعات في موضع تداخل الدوائر. قوانين دي مورجان لمجموعتين A و B هي $(A \cap B)' = A' \cup B'$، $(A \cup B)' = A' \cap B'$. لأي مجموعتين منتهيتين A و B، $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.
4		يمكن استخدام **مخططات فن** *Venn* لحل مسائل في عالمنا تتضمن عمليات المسح والتصنيفات.
5	مجموعة غير منتهية الحد العام مجموعة قابلة للعد مجموعة غير قابلة للعد	**يمكن وضع مجموعة غير منتهية** في تناظر واحد لواحد مع مجموعة جزئية فعلية من نفسها. تسمى المجموعة قابلة للعد إذا كانت منتهية أو يمكن وضع تناظر واحد لواحد بين المجموعة ومجموعة الأعداد الطبيعية. تسمى المجموعة غير قابلة للعد إذا كان يتعذر عدها. وتعد الأعداد الطبيعية مثالًا على مجموعة غير منتهية قابلة للعد، بينما تعد الأعداد الحقيقية مجموعة غير قابلة للعد.

مراجعة الرياضيات في التنوع

اعتمد مخطط فن *Venn* الموضّح على اليسار إلى التقديرات السكانية المقدمة:

1. البيض فقط: 638، السود فقط: 110، الأصل الإسباني فقط: 58
2. الأصل الإسباني والسود، دون البيض: 5
3. الأصل الإسباني أو السود: 318
4. غير البيض أو السود أو المنحدرين من أصل إسباني: 44



5. هذا يُعد بسيطًا إذا فكرت فيه: النسبة المئوية للبيض أقل من 50. ومن ثم سيكون غير البيض أكثر.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

almanahj.com/ae

الوحدة 10 تمارين المراجعة

مراجعة درس بدرس

10-1 مقدمة في نظرية المجموعات

بالنسبة إلى التمارين 1–8، اكتب كل مجموعة برمز السرد.

1. المجموعة D هي مجموعة الأعداد الزوجية بين 50 و60.
2. المجموعة F هي مجموعة الأعداد الفردية بين 3 و40.
3. المجموعة L هي مجموعة الحروف التي تتضمنها الكلمة خطابات.
4. المجموعة A هي مجموعة الحروف التي تتضمنها الكلمة أركنساس.
5. المجموعة B هي $\{x | x \in N \text{ و } x > 500\}$.
6. المجموعة C هي مجموعة الأعداد الطبيعية بين 5 و12.
7. M هي مجموعة الرجال الذين ساروا على سطح القمر.
8. W هي مجموعة النساء اللاتي سرن على سطح القمر.

بالنسبة إلى التمارين 9–12، اكتب كل مجموعة باستخدام رمز بناء المجموعة.

9. {18, 20, 22, 24}
10. {5, 10, 15, 20}
11. {101, 103, 105, 107, . . .}
12. {8, 16, 24, . . . 72}

بالنسبة إلى التمارين 13–20، حدد ما إذا كانت المجموعة منتهية أم غير منتهية.

13. $\{x | x \in N \text{ و } x \geq 9\}$
14. {4, 8, 12, 16, . . .}
15. {إعلانات تجارية مزعجة}
16. {3, 7, 9, 12}
17. O
18. {الأشخاص أصحاب الشعر الأحمر}
19. {أعداد من 10 أرقام}
20. أي من المجموعات الواردة في التمارين 13–19 ليست محددة جيدًا؟

10-2 المجموعات الجزئية والمجموعات من المجموعات

بالنسبة إلى التمارين 21–24، حدد ما إذا كانت العبارة صوابًا أم خطأً.

21. {80, 100, 120, . . .} ⊆ {40, 80, 120, . . .}
22. {6} ⊂ {6, 12, 18}
23. {5, 6, 7} ⊆ {5, 7}
24. {a, b, c} ⊂ {a, b, c}
25. جد جميع المجموعات الجزئية للمجموعة $\{r, s, t\}$.
26. كم عدد المجموعات الجزئية والمجموعات الجزئية الفعلية التي تتضمنها المجموعة $\{a, e, i, o, u, y\}$؟

وقع اختبار موقع ويب للاختبار التلقائي 11 سيارة لإجراء ثلاثة أنواع من اختبارات السلامة: اختبار انتفاخ الوسادة الهوائية وقوة الهيكل عند الانقلاب واختبار تصادم بسرعة 20 ميل في الساعة. تم إدراج السيارات التي حصلت على تصنيف استثنائي في انتفاخ الوسادة الهوائية في المجموعة A. وتضمنت المجموعة B السيارات التي حصلت على تصنيف استثنائي في قوة الهيكل عند الانقلاب وتضمنت المجموعة C السيارات التي حصلت على تصنيف استثنائي في اختبار التصادم. استخدم هذه المجموعات للتمارين 27–38.

U = {شيفروليه، فورد، بي إم دبليو، مرسيدس، تويوتا، هوندا، لكزس، أكيورا، هيونداي، تسلا، دودج}

A = {شيفروليه، بي إم دبليو، تويوتا، هوندا، لكزس}

B = {تويوتا، هوندا، لكزس، هيونداي، تسلا}

C = {مرسيدس، أكيورا، دودج}

جد كل مجموعة.

27. $A \cap B$
28. $B \cup C$
29. $(A \cap B) \cap C$
30. B'
31. $A - B$
32. $B - A$
33. $(A \cup B)' \cap C$
34. $B \cap$
35. $B \cup C$
36. $A \cup B \cap C$
37. $(A \cap C) \cup A'$
38. $(A' \cap B) \cup C$
39. إذا كان $K = \{x | x \in N, x > 25\}$ و$L = \{x | x \in E, x > 10\}$، فجد $L - K$ و$K \cup L$ و$(K \cup L)'$.
40. بالنسبة إلى كل رقم تبرين وارد أدناه، كتب وصفًا لفظيًا لما تمثله المجموعة التي يتضمنها ذلك التمرين.

(a) 27
(b) 28
(c) 29
(d) 30
(e) 31
(f) 32
(g) 34
(h) 35

almanahj.com/ae

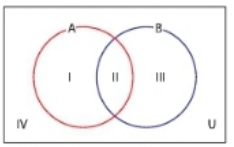
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

655

الوحدة 10 تمارين المراجعة

10-3 استخدام مخططات فن Venn لدراسة العمليات على المجموعات

بالنسبة إلى التمارين 41–46. استخدم مخطط فن Venn التالي. صف المنطقة أو المناطق المقدمة في كل مسألة، باستخدام عمليات المجموعات على A وB. ربما توجد أكثر من إجابة صحيحة.



41. المنطقة I
42. المنطقة II
43. المنطقة III
44. المنطقة IV
45. المنطقتان I وIII
46. المنطقتان I وIV

بالنسبة إلى التمارين 47–50. ارسم مخطط فن Venn وظلل المنطقة المناسبة لكل تمرين.

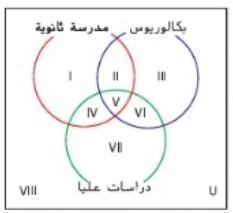
47. $A \cap B$
48. $(A \cup B)'$
49. $(A' \cap B') \cup C$
50. $A \cap (B \cup C)'$

51. إذا كان $n(A) = 15$، $n(B) = 9$، $n(A \cap B) = 4$، فأوجد $n(A \cup B)$.
52. إذا كان $n(A) = 24$، $n(B) = 20$، $n(A \cap B) = 14$، فأوجد $n(A \cup B)$.

يستخدم الجدول ومخطط فن Venn التالي في التمرينات 53–56. يوضح الجدول أعلى خمس ولايات في 2014 من حيث نسبة السكان الذين بلغوا مستوى محددًا من التعليم على الأقل. بالنسبة إلى كل سؤال، اكتب المنطقة في مخطط فن Venn التي تتضمن الولاية المذكورة.

شهادة الدراسات العليا	شهادة البكالوريوس	متخرج من مدرسة ثانوية
أركنساس	ويست فرجينيا	تكساس
ويست فرجينيا	أركنساس	ميسيسيبي
داكوتا الشمالية	ميسيسيبي	كاليفورنيا
لويزيانا	كنتاكي	كنتاكي
ميسيسيبي	لويزيانا	ألاباما

المصدر: ويكيبيديا



53. كنتاكي
54. ميسيسيبي
55. لويزيانا
56. أوهايو

10-4 استخدام المجموعات لحل المسائل

57. قبيل إحدى الانتخابات شارك 250 ناخبًا في الاقتراع: صوت 155 لصالح المرشح A، و140 لصالح المرشح B، وصوت 120 لصالح كلا المرشحين.
   (a) كم عدد الذين لم يصوتوا لكلا المرشحين من ضمن من شملهم الاقتراع؟
   (b) كم عدد من صوتوا لصالح المرشح B فقط؟
58. أجرى متخصص في السمع دراسة على فقدان السمع عند ترددات محددة بين مجموعة مرضى في إحدى دور رعاية بالمسنين. من بين 94 مقيمًا خضعوا للاختبار، عانى 70 من فقدان السمع بدرجة كبيرة عند الترددات المنخفضة وليست المرتفعة، وعانى 40 من فقدان السمع بدرجة كبيرة عند الترددات المرتفعة وليست المنخفضة، بينما لم يظهر 26 أي فقدان في السمع بدرجة كبيرة على الإطلاق.
   (a) كم عدد المقيمين الذين عانوا من فقدان السمع عند الترددات المنخفضة والمرتفعة على حد سواء؟
   (b) ما نسبة الذين يعانون من فقدان في السمع عند ترددات مرتفعة؟
59. سُئل ثلاثة وخمسون متصلًا بمحطة راديو الجامعة عن الذي يستمعون إليه عادةً عند الذهاب إلى الكلية بالسيارة. من بين من طرح عليهم السؤال، 22 استمعوا إلى محطة راديو محلية و18 استمعوا إلى محطة راديو فضائية و33 استمعوا إلى موسيقى عبر الإنترنت و8 استمعوا إلى محطة راديو محلية ومحطة راديو فضائية و13 استمعوا إلى محطة راديو فضائية وموسيقى عبر الإنترنت و11 استمعوا إلى محطة راديو محلية وموسيقى عبر الإنترنت و6 استمعوا إلى الثلاثة جميعًا.
   (a) كم عدد من استمعوا إلى محطة راديو فضائية فقط؟
   (b) كم عدد من استمعوا إلى محطات راديو محلية وموسيقى عبر الإنترنت لكن لم يستمعوا إلى محطة راديو فضائية؟
   (c) كم عدد من لم يستمعوا إلى أي من تلك الأشياء؟
60. وجد مدير مكتبة الجامعة أنه قبل أربع ساعات من الإغلاق، اشترى 41 طالبًا كتابين دراسيين أو أكثر. من بين هؤلاء، دفع 4 فقط نقدًا واستخدم 5 قسيمة المساعدة المالية فقط واستخدم 5 بطاقة السحب الفوري فقط. استخدم سبعة بطاقة السحب الفوري وقسيمة المساعدة المالية من دون نقد؛ واستخدم ثلاثة النقد وبطاقة السحب الفوري من دون قسيمة المساعدة المالية. استخدم عشر طالبًا إجمالًا بطاقة السحب الفوري في جزء من عملية على الأقل، بينما لم يستخدم 9 أيًا من أشكال الدفع هذه.
   (a) كم عدد الطلاب الذين استخدموا أشكال الدفع النقدي وبطاقة السحب الفوري وقسيمة المساعدة المالية جميعًا؟
   (b) هل استخدم عدد طلاب أكثر النقد أم قسائم المساعدة المالية؟
   (c) كم تبلغ النسبة المئوية للطلاب الذين لم يستخدموا قسيمة المساعدة المالية؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

almanahj.com/ae

10-5 المجموعات غير المنتهية

61. جِد حدًّا عامًا للمجموعة {. . . ,−13, −11, −9, −7, −5}
62. وضِّح أن المجموعة {. . . ,12, 24, 36, 48, 60} هي مجموعة غير منتهية.
63. وضح أن المجموعة في التمرين 62 قابلة للعد.

almanahj.com/ae

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

657

الوحدة 10 اختبار على الوحدة

بالنسبة إلى التمارين 1–4، اكتب كل مجموعة بذكر العناصر.

1. المجموعة P هي مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية بين 90 و100.
2. المجموعة K هي مجموعة الحروف التي تتضمنها الكلمة *سلسبيل*.
3. $X = \{x | x \in N \text{ و } x < 80\}$
4. المجموعة J هي مجموعة اسماء الأشهر التي تبدأ بالحرف "ي".

بالنسبة إلى التمرينين 5 و6، اكتب كل مجموعة باستخدام رمز بناء المجموعة.

5. {12, 14, 16, 18}
6. {4, 8, 16, . . . 128}

بالنسبة إلى التمارين 7–11، حدد ما إذا كانت المجموعة منتهية أم غير منتهية.

7. $\{x | x \in N, x$ وx مضاعف 6$\}$
8. $\{a, b, c, \ldots, s, t\}$
9. المجموعة V هي مجموعة أشخاص يشعر رائع.
10. اشرح لماذا المجموعة الواردة في التمرين 9 ليست محددة جيدًا. يجب كتابة إجابتك بحيث يفهمها الشخص الذي ليست لديه أدنى فكرة عن معنى "محددة جيدًا".
11. جد جميع المجموعات الجزئية وجميع المجموعات الجزئية الفعلية لمجموعة الولايات المتاخمة لكاليفورنيا. كيف تعرف عدد المجموعات الجزئية التي تبحث عنها؟

بالنسبة إلى التمارين 12–16، بفرض أن $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$، $A = \{a, b, d, e, f\}$، $B = \{a, g, i, j, k\}$، $C = \{e, h, j\}$. جد كل مما يلي:

12. $(A \cap B) \cup C$
13. $(A \cup B)'$
14. $A - B$
15. $(A - B) - C$
16. ارسم مخطط Venn مستقلاً وظلله لكل مجموعة: $B - A$، B'، $A \cap B \cup C$
17. جد كلا من حاصلي الضرب الديكارتيين اللذين يمكن تكوينهما باستخدام المجموعة الواردة في التمرين 11 والمجموعة C في التمارين 12–16.

بالنسبة إلى التمارين 18–20، ارسم مخطط Venn لكل مجموعة.

18. $A \cap B$
19. $(A \cap B)'$
20. $(A \cup B') \cap C$
21. إذا كان $n(A) = 1{,}500$، $n(B) = 1{,}150$، $n(A \cap B) = 350$، فجد $n(A \cup B)$.
22. طالب يذاكر للحصول على درجة الماجستير في إدارة الألعاب الرياضية يعمل على فرضية عن انتشار الألعاب الرياضية للنساء في الكليات منذ أن أمر القانون التاسع بمنح فرص مكافئة للنساء. قام بتجميع بيانات عن 119 كلية تمتلك فرق كرة قدم تنافس في دوري الجامعات لكرة القدم (الذي لا يزال الكثير من المشجعين يطلقون عليه القسم الأول) ووجد أن 69 منها لديها فريق جولف نسائي و63 منها لديها فريق هوكي الحقل و83 لديها فريق سباحة نسائي. ثمة 28 كلية لديها فرق حقل في جميع الألعاب الرياضية الثلاث. ستة وأربعون منها لديها فرق نسائية للجولف والسباحة و40 لديها فرق نسائية للسباحة وهوكي الحقل و47 منها لديها فرق نسائية للجولف وهوكي الحقل.
   (a) كم عدد الكليات التي لديها فريق جولف نسائي، لكن ليس لديها فريق سباحة أو هوكي الحقل نسائي؟
   (b) ما النسبة المئوية للفرق التي لديها رياضتان على الأقل من الألعاب الرياضية الثلاث؟
   (c) إذا اخترت إحدى المدارس الواردة في الدراسة عشوائيًا، ما النسبة المئوية لاحتمال ألا يكون لديها أي من الألعاب الرياضية الثلاث؟
23. جد حدًّا عامًّا للمجموعة $\{15, 30, 45, 60, 75, \ldots\}$.
24. وضّح أن المجموعة $\{1, 2, 3, 4, \ldots\} \cup \{-1, -2, -3, -4, \ldots\}$ مجموعة غير منتهية عدية. (*إرشاد:* ثمة سؤالان منفصلان بالفعل بحاجة إلى إجابة!)

بالنسبة إلى التمارين 25–30، حدد ما إذا كانت كل عبارة صوابًا أم خطأ.

25. $\{s, a, m, e\}$ تكافئ $\{s, e, s, a, m, e\}$.
26. $\{4, 8, 12, 16, \ldots\} \subseteq \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$
27. $\{15\} \subset \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$
28. $9 \notin \{2, 4, 5, 6, 10\}$
29. $\{a, e, i, o, u, y\} \subseteq \{a, e, i, o, u\}$
30. $\{12\} \in \{12, 24, 36, \ldots\}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

almanahj.com/ae

الوحدة 10 المشاريع

1. اطلب من الطلاب في الصف الدراسي ملء هذا الاستبيان:

   A. الذهاب إلى المدرسة بالسيارة: نعم _____ لا _____
   B. العمر: أقل من 15 _____ 15 أو أكبر _____
   C. يساعد أسرته في العمل: نعم _____ لا _____

   ارسم مخطط فن *Venn*. ومن المعلومات أجب عن هذه الأسئلة:

   (a) كم عدد الطلاب الذين لا يذهبون بالسيارة إلى المدرسة؟
   (b) كم عدد الطلاب الذي يقل عمرهم عن 15 عامًا؟
   (c) كم عدد الطلاب الذين يساعدون أسرهم في العمل؟
   (d) كم عدد الطلاب الذي يقل عمرهم عن 15 عامًا ويساعدون أسرهم في العمل؟
   (e) كم عدد الطلاب الذين يذهبون بالسيارة إلى المدرسة ولا يساعدون أسرهم في العمل؟
   (b) كم عدد الطلاب الذين أعمارهم 15 عامًا أو أكبر ويساعدون أسرهم في العمل؟
   (g) كم عدد الطلاب الذين لا يذهبون بالسيارة إلى المدرسة ويساعدون أسرهم في العمل وأقل من 15 عامًا؟

2. إذا تكونت لديك فكرة عن هذه الوحدة ككل، فستعرف أن عمليات المسح تلعب دورًا كبيرًا في طريقة استخدام مخططات فن *Venn* لتنظيم المعلومات. والآن حان الوقت لتصميم مسح خاص بك وحدك. يجب عليك جعل موضوع المسح شيئًا تجده مثيرًا للاهتمام وتصميم المسح بحيث يمكن تلخيص النتائج ودراستها باستخدام مخطط فن *Venn* بثلاث مجموعات. يمكنك إنجاز هذه المهمة بطرح ثلاثة أسئلة منفصلة أو بتصميم اقتراع من سؤال واحد حيث يمكن للمستجيبين اختيار أي من الإجابات أو جميعها أو لا شيء منها.

   وبمجرد تصميم المسح الخاص بك وكتابته وإجرائه، قم بتنظيم النتائج باستخدام مخطط فن *Venn* ثم اكتب تقريرًا عن النتائج التي توصلت إليها. لا تقم بتضمين أعداد أولية فحسب—غالبًا ما يكمن الجزء الأهم من المسح في تلخيص معنى نتائج المسح وتفسيرها. ربما تريد وضع هذا الأمر الضروري في الحسبان عند تصميم المسح—من الصعب جدًا كتابة تفسير ذكي إذا كانت الأسئلة غير مترابطة تمامًا.

3. ربما تساءلت لماذا ذكرنا في الدرس 5 أن مجموعة الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد، لكننا لم نقدم ما يدعم ذلك. الإجابة المختصرة هي أن إثبات تلك النتيجة عملية معقدة إلى حد ما. إنها ليست بتلك الصعوبة، لكنها عملية بارعة للغاية وتنطوي على نوع من حدة الذهن. الأخبار الجيدة هو أنه يمكنك العثور على الإثبات على عشرة آلاف صفحة وبب مختلفة تقريبًا حيث عن "حجة كانتور القطرية". ابحث عن الصفحة التي تصف حجة كانتور القطرية بالطريقة التي يمكنك فهمها ثم كون عرضًا توضيحيًا لزملائك الطلاب لمساعدتهم على فهم لماذا تكون الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد. تصديق *إضافي*: قم بتضمين مناقشة للحقيقة التي تفيد أن مجموعة الأعداد الحقيقية هي المجموعة الرئيسة نفسها التي تتضمنها الأعداد الحقيقية بين الصفر والواحد.

4. إذا كنت مهتمًا بأفكار عدد المجموعات غير المنتهية بالفعل، فستجد إثارة في هذا المشروع. تعرف إحدى أغرب المجموعات التي تم تقديمها وأكثرها جاذبية على الإطلاق باسم مجموعة كانتور. تبدأ بمجموعة تضم جميع الأعداد الحقيقية بين الصفر والواحد وتزيل تسلسل الأجزاء. قم بإجراء بحث عبر الإنترنت أو في المكتبة عن مجموعة كانتور وأجب عن الأسئلة التالية عنها:

   (a) كيف يمكنك التأكد من وجود شيء ما على الأقل في مجموعة كانتور؟ (*تلميح*: فكر في الخطوة الأولى أن المجموعة قد تبدو خالية.)
   (b) كيف تعرف أن مجموعة كانتور ليست غير خالية فقط، لكنها غير منتهية كذلك؟
   (c) هل مجموعة كانتور قابلة للعد أم غير قابلة للعد؟ كيف تعرف ذلك؟
   (d) ما إجمالي طول جميع الفواصل التي يتم تجاهلها عند تعريف مجموعة كانتور؟ لماذا تلك النتيجة الصادمة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

almanahj.com/ae

مجموعة التمارين 1

9. T = {ت، ف، ك، ي، ر}
10. A = {أ، ل، ب، م}
11. P = {51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59}
12. R = {12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38}
13. C = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
14. F = {101, 102, 103, 104, 105, . . .}
15. G = {11, 12, 13, . . . }
16. B = {101, 102, 103, . . . }
17. Y = {2,001, 2,002, 2,003, . . . , 2,999}
18. Z = {501, 502, 503, . . . , 5,999}
19. C = {أبيض، أحمر، أزرق، أخضر، رمادي، بني، أسود، أصفر}
20. تختلف هذه المجموعة بمرور الوقت؛ ابحث عنها عبر الإنترنت!
21. L = {الجانبي الإنسي، الجانبي الوحشي، المتصالب الأمامي، المتصالب الخلفي}
22. A = {أبوظبي، دبي، الشارقة، رأس الخيمة، عجمان، أم القيوين، الفجيرة}
23. صائبة
24. خاطئة
25. صائبة
26. خاطئة
27. صائبة
28. خاطئة
29. مجموعة مضاعفات العدد 5
30. مجموعة مضاعفات العدد 4 من 4 إلى 16
31. مجموعة مضاعفات العدد 13 من 13 إلى 52
32. مجموعة مضاعفات العدد 7
33. مجموعة الحروف في اسم Steven
34. مجموعة الحروف في كلمة August
35. مجموعة الأعداد الطبيعية من 100 إلى 199
36. مجموعة الأعداد الطبيعية من 21 إلى 30

يمكن أن تختلف الإجابات حسب الأوصاف البديلة.

37. {$x|x$ من مضاعفات العدد 10}؛ مجموعة الأعداد الموجبة التي تنتهي بصفر
38. {$x|x$ من مضاعفات العدد 3}؛ مجموعة الأعداد التي يمكن قسمتها على 3 من دون باقٍ
39. {$x|x$ عددٌ فرديٌّ وx > 16}؛ مجموعة الأعداد الفردية من 1 إلى 15.
40. {$x|x$ عددٌ طبيعيٌّ وx بين 70 و76}؛ مجموعة الأعداد الطبيعية من 71 إلى 75.
41. {$x|x$ أحد ألوان العلم الأمريكي} هي إحدى الإجابات المحتملة؛ مجموعة الألوان في علم فرنسا
42. {$x|x$ أحد الألوان في التدرج الرمادي} هي إحدى الإجابات المحتملة؛ مجموعة الألوان الموجودة في جريدة نموذجية مطبوعة من دون حبر ملون
43. لا توجد أعداد طبيعية أقل من صفر، لذلك $H = \varnothing$.
44. {71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79}
45. {الربيع، الصيف، الخريف، الشتاء}
46. {y}
47. {102, 104, 106, 108, 110, 112, 114, 116, 118}
48. {91, 93, 95, 97, 99}
49. محددة جيدًا
50. محددة جيدًا
51. ليست محددة جيدًا
52. ليست محددة جيدًا
53. ليست محددة جيدًا
54. محددة جيدًا
55. خاطئة
56. خاطئة
57. صائبة
58. صائبة
59. صائبة
60. صائبة
61. غير منتهية
62. منتهية
63. منتهية
64. منتهية
65. غير منتهية
66. منتهية
67. منتهية
68. غير منتهية
69. متساوٍ
70. متكافئ
71. لا هذا ولا ذاك
72. لا هذا ولا ذاك
73. متكافئ
74. متساوٍ

75. {10, 20, 30, 40}
↕ ↕ ↕ ↕
{40, 10, 20, 30}

76. {w, x, y, z}
↕ ↕ ↕ ↕
{1, 2, 3, 4}

77. {1, 2, 3, 4, 5, ...}
↕ ↕ ↕ ↕ ↕
{4, 8, 12, 16, 20, ...}

78. {1, 3, 5, 7, 9}
↕ ↕ ↕ ↕ ↕
{2, 4, 6, 8, 10}

79. 4
80. 11
81. $n(C) = 7$
82. $n(D) = 12$
83. $n(E) = 1$
84. $n(F) = 4$
85. $n(G) = 0$
86. $n(H) = 0$

87. صائبة
88. خاطئة
89. خاطئة
90. خاطئة
91. صائبة
92. صائبة
93. (a) {كاليفورنيا، نيويورك، فلوريدا}
(b) {نيو جيرسي، إلينوي، ماساشوستس، فيرجينيا، جورجيا، بنسلفانيا}
(c) {كاليفورنيا، نيويورك، فلوريدا، تكساس، نيو جيرسي}
(d) {تكساس، نيو جيرسي، إلينوي}
94. (a) {قطاع الأعمال، المهن الصحية، العلوم الاجتماعية والتاريخ، علم النفس، العلوم البيولوجية والطبية، الفنون المرئية والاستعراضية، الهندسة، التواصل، الأمن الداخلي/إنفاذ القانون/مكافحة الحرائق}
(b) {التعليم}
(c) {الهندسة، الفنون المرئية والاستعراضية، التعليم، العلوم البيولوجية والطبية، علم النفس}
(d) {قطاع الأعمال، المهن الصحية، العلوم الاجتماعية والتاريخ، علم النفس، العلوم البيولوجية والطبية، الفنون المرئية والاستعراضية، الهندسة، التواصل، الأمن الداخلي/إنفاذ القانون/مكافحة الحرائق}
(e) {المهن الصحية، الأمن الداخلي/إنفاذ القانون/مكافحة الحرائق}
95. (a) {التوظيف، الخروج}
(b) {40-49، 50-59، 60 فأكثر}
(c) {الوثائق/المنافع الحكومية، بطاقة الائتمان، غير ذلك}
(d) {20%، 24%، 21%}
(e) {بطاقة الائتمان، غير ذلك}
(f) 106.8%؛ قد تندرج بعض التقارير ضمن فئتين، أو ربما يتم الحصول على المعلومات من مصادر مختلفة.
96. (a) Ø
(b) {2014, 2015}
(c) {2012, 2013, 2014}
(d) 1,091.4 مليون، 1,204.8 مليون، 1,569 مليون
97. (a) {2013, 2014, 2015, 2016}
(b) {2009, 2012}
(c) {2012, 2013, 2014, 2015, 2016}
(d) {2010, 2011}
98. نعم
99. [illegible]
100. تختلف لأنه إذا كانت المجموعتان متساويتين، فإنهما تتضمنان العناصر نفسها بالضبط، لذا يجب أن تتضمنا عدد العناصر نفسه.
101. (a) يبدو أن A تضم عددًا أكثر.
(b) {1, 3, 5, 7, 9, ...}
↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕
{2, 4, 6, 8, 10, 12, ...}
توضح مقابلة واحد بواحد هذه أن المجموعتين تتضمنان عدد العناصر نفسه.
102. (a) {2, 4, 6}, {2, 4}, {2, 6}, {4, 6}, {2}, {4}, {6}, Ø
(b) إنه من الشائع نسيان المجموعة الخالية.
103. (a) من يُعد "أوروبيًا" غير محدد بوضوح.
(b) من يقرر ما المقصود بـ "السيارة الفاخرة"؟
(c) "الفرصة المشروعة" تختلف من شخص إلى آخر.
(d) ما الذي يحدد ما يتقاضاه الشخص تحديدًا؟ الراتب؟ الراتب والاستحقاقات؟ هل يتضمن ذلك ساعات العمل الإضافية؟
(e) الأمهات البيولوجيات؟ الأمهات بالتبني؟ الأمهات المرضعات؟
104. ستختلف الإجابات. بعض نماذج الإجابات:
(a) مجموعة تضم جميع مواطنين الإمارات العربية المتحدة المشرعين
(b) مجموعة سيارات 2017 التي يتجاوز ثمنها AED 50,000
(c) مجموعة جميع الكليات التي لها فرق تحتل التصنيف 8 أو أعلى في دوري الجامعات
(d) مجموعة الوظائف التي يتجاوز راتبها الأساسي AED 50,000 سنويًا، دون حساب الاستحقاقات
(e) مجموعة النساء الأثرياء أنجبن

almanahj.com/ae

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مجموعة التمارين 2

11. $A' = \{2, 3, 17, 19\}$ **12.** $B' = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
13. $C' = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ **14.** $D' = \{7, 11, 13, 17, 19\}$
15. $A' = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\}$
16. $B' = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

ملاحظة: بالنسبة إلى التمارين 24–17، تُعد قائمة المجموعات الجزئية الفعلية هي قائمة المجموعات الجزئية نفسها باستثناء المجموعة الأصلية.

17. {كرة المسلة، كرة القدم، الكرة الطينية}، {كرة المسلة، الكرة الطينية}، {كرة القدم، الكرة الطينية}، {كرة المسلة}، {كرة القدم}، {الكرة الطينية}، Ø
18. {الإلقاء، الصحافة، التخطابة}، {الإلقاء، الصحافة}، {الإلقاء، التخطابة}، {الصحافة، التخطابة}، {الإلقاء}، {الصحافة}، {التخطابة}، Ø
19. {الراديو، التلفاز}، {الراديو}، {التلفاز}، Ø
20. {الكتروني، ورقي}، {الكتروني}، {ورقي}، Ø
21. Ø **22.** { }
23. {التحمي، الارتجاف، التغشيان، التصداع}، {التحمي، الارتجاف، التغشيان}، {التحمي، الارتجاف، التصداع}، {التحمي، التغشيان، التصداع}، {الارتجاف، التغشيان، التصداع}، {التحمي، الارتجاف}، {التحمي، التغشيان}، {التحمي، التصداع}، {الارتجاف، التغشيان}، {الارتجاف، التصداع}، {التغشيان، التصداع}، {التحمي}، {الارتجاف}، {التغشيان}، {التصداع}، Ø
24. {نوبات مرضية، تنمل، شلل، أحم}، {نوبات مرضية، تنمل، شلل}، {نوبات مرضية، تنمل، أحم}، {نوبات مرضية، شلل، أحم}، {تنمل، شلل، أحم}، {نوبات مرضية، تنمل}، {نوبات مرضية، شلل}، {نوبات مرضية، أحم}، {تنمل، شلل}، {تنمل، أحم}، {شلل، أحم}، {نوبات مرضية}، {تنمل}، {شلل}، {أحم}، Ø
25. صائبة **26.** خاطئة **27.** خاطئة **28.** خاطئة
29. خاطئة **30.** صائبة **31.** خاطئة **32.** صائبة
33. صائبة **34.** خاطئة
35. 8 مجموعات جزئية، 7 مجموعات جزئية فعلية
36. 67, 108, 864; 67, 108, 863
37. مجموعة جزئية واحدة، لا توجد مجموعات جزئية فعلية
38. مجموعتان جزئيتان، مجموعة جزئية فعلية واحدة
39. 4 مجموعات جزئية، 3 مجموعات جزئية فعلية
40. 32, 768; 32, 767
41. $U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$
42. $A = \{1, 5, 9, 11, 17\}$
43. $B = \{5, 11, 13, 15\}$ **44.** $A \cap B = \{5, 11\}$
45. $A \cup B = \{1, 5, 9, 11, 13, 15, 17\}$
46. $A' = \{3, 7, 13, 15, 19\}$
47. $B' = \{1, 3, 7, 9, 17, 19\}$ **48.** $(A \cup B)' = \{3, 7, 19\}$
49. $(A \cap B)' = \{1, 3, 7, 9, 13, 15, 17, 19\}$
50. $A \cap B' = \{1, 9, 17\}$
51. $A \cup C = \{12, 14, 15, 16, 17, 19, 20\}$
52. $A \cap B = \{15, 17\}$
53. $A' = \{11, 12, 13, 18, 19, 20\}$
54. $(A \cap B) \cup C = \{12, 14, 15, 17, 19, 20\}$
55. $A' \cap (B \cup C) = \{11, 12, 13, 19, 20\}$
56. $(A \cap B) \cap C = \{15\}$ **57.** $(A \cap B)' \cap C = \{12, 20\}$
58. $A \cap B' = \{14, 16\}$ **59.** $(B \cup C) \cap A' = \{11, 12, 13, 19, 20\}$
60. $(A' \cup B)' \cup C' = \{11, 13, 14, 16, 17, 18\}$
61. $W \cap Y = \emptyset$
62. $X \cup Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11\}$
63. $W \cup X = \{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$
64. $(X \cap Y) \cap Z = \emptyset$ **65.** $W \cap X = \{6, 8\}$
66. $(Y \cup Z)' = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$
67. $(X \cup Y) \cap Z = \emptyset$ **68.** $(Z \cap Y) \cup W = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$
69. $W' \cap X' = \{1, 3, 5, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$
70. $(Z \cup X)' \cap Y = \{21, 22, 23, 24\}$ **71.** $A \cap B = B$
72. $A' \cap C = \{$كل الأعداد الطبيعية الزوجية التي ليست مضاعفات العدد 3$\}$ = { 2, 4, 8, 10, 14, . . . }
73. $\{x | x = A \cap (B \cup C')\}$ = {مضاعف فردي للعدد 3 أو مضاعف زوجي للعدد 9} = { 3, 9, 15, 18, 21, 27, 33, 36, 39, . . . }
74. $A \cup B = A$ **75.** $C - B = \{p\}$
76. $A - C = \{q, s\}$ **77.** $B - C = \{s, u\}$
78. $B - A = \{u, v\}$ **79.** $B \cap C' = \{s, u\}$
80. $C \cap A' = \{v\}$ **81.** $D - M = \{11, 13, 15, 17, \ldots\}$
82. $T - D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
83. $(D - M) - T = \emptyset$
84. $(T - D) - M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
85. B' **86.** $A \cup B$ **87.** $(A \cup B) - (A \cap B)$ **88.** $(A \cup B)'$
89. {جهاز لوحي، كمبيوتر محمول، هاتف ذكي}، {جهاز لوحي، كمبيوتر محمول}، {جهاز لوحي، هاتف ذكي}، {كمبيوتر محمول، هاتف ذكي}، {جهاز لوحي}، {كمبيوتر محمول}، {هاتف ذكي}، Ø
90. $2^5 = 32$ **91.** $2^7 = 128$ **92.** $2^6 = 64$ **93.** $2^4 = 16$
94. {جهاز الحسير، الخراجة، جهاز ستير ستيير}، {جهاز الحسير، الخراجة}، {جهاز الحسير، جهاز ستير ستيير}، {الخراجة، جهاز ستير ستيير}، {جهاز الحسير}، {الخراجة}، {جهاز ستير ستيير}
95. مجموعة الأشخاص الذين يتمتعون بمهارات إدارية قوية ومجموعة الأشخاص الجيدين في العمل كجزء من فريق ومجموعة الأشخاص الذين يمتلكون خبرة 5 سنوات في مشروع مماثل
96. A = الأشخاص الذين يبدون افعال شريرة على غير العادة، B = أشخاص يظهرون الخداع القطري والمكر، C = أشخاص بارعون في الحصارة غير الواضحة، D = أشخاص يتقنون الضحك الحشرير، E = أشخاص يتكلمون لهجات بريطانية؛ $A \cap B \cap C \cap (D \cup E)$
97. (a) مجموعة من الأشخاص الذين أدينوا بجناية
(b) مجموعة الأشخاص الذين أدينوا بجناية وتم إطلاق سراحهم، أو اتُهموا بارتكاب جناية ولم يثبت أنهم مذنبون
(c) مجموعة الأشخاص الذين وجهت إليهم تهم بارتكاب جناية ولم يثبت أنهم مذنبون أو أسقطت تهمهم قبل المحاكمة
98. (a) مجموعة الأشخاص الذين وجهت إليهم تهم بارتكاب جناية وقفلوا بالفعل أمام المحكمة ، أو أسقطت التهم قبل المحاكمة
(b) مجموعة الأشخاص الذين وجهت إليهم تهم بارتكاب جناية ولم [illegible] أو أدينوا وما زالوا في السجن
(c) مجموعة الأشخاص الذين وجهت إليهم تهمة جناية وهم إما قيد المحاكمة أو في انتظار المحاكمة أو سبق محاكمتهم
99. (a) مجموعة الأشخاص الذين أدينوا بجناية وتم إطلاق سراحهم من السجن
(b) مجموعة الأشخاص الذين سبق أن أدينوا بارتكاب جناية ، وينتظرون حاليًا المحاكمة بتهمة جناية أخرى
(c) لا يوجد أحد في هذه المجموعة
100. $A \times B$ = {(شوكولاتة، مغطاة بالخشوكولاتة)، (شوكولاتة، مغطاة بالمجبن الكريمية)، (كريمة صفراء، مغطاة بالمجبن الكريمية)، (فراولة، مغطاة بالخشوكولاتة)، (فراولة، مغطاة بالمجبن الكريمية)}. بمثل هذا كل الكعك الممكن الذي يمكن صنعه بالاختيار من الكعك بالشوكولاتة والكريمة الصفراء والفراولة ومن الكعك بالخشوكولاتة والمغطى بالمجبن الكريمية.
101. $A \times B$ = {(قميص، أخضر)، (معطف، أخضر)، (قميص، أصفر)، (معطف، أصفر)، (قميص، أحمر)، (معطف، أحمر)، وهذه كلها نتائج ممكنة.
102. $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$. في كل حالة، نأخذ كل عنصر من عناصر المجموعة الأولى ونقوم بموافقته مع كل عنصر من عناصر المجموعة الثانية. لذلك نصل في النهاية إلى العدد الذي تتضمنه المجموعة الأولى وقد تمت إعادة نسخه عددًا محددًا من المرات؛ يتوافق عدد المرات مع عدد العناصر في المجموعة الثانية.
103. انظر التمرين 103! تكمن العلاقة في أن عدد العناصر في الضرب الديكارتي يكون دائمًا ناتج ضرب عدد العناصر في المجموعات الأصلية.

almanahj.com/ae

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

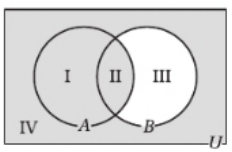
104–107. تختلف الإجابات.

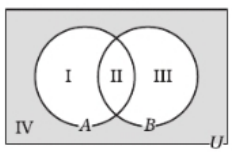
108. بالنسبة إلى $A \cap B = A$، يجب أن تكون A مجموعة جزئية من B. بالنسبة إلى $B \cap A = B$، يجب أن تكون B مجموعة جزئية من A.

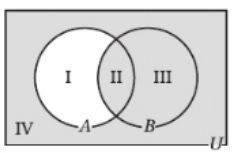
109. يجب أن تكون المجموعتان متساويتين.

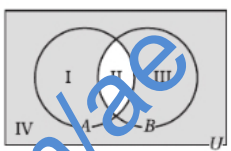
110. بافتراض أن عدد العناصر n، يكون لكل عنصر خياران: إما ضمن المجموعة الجزئية أو لا. لذلك إذا حاولنا إنشاء مجموعة جزئية، فإنه يوجد $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2$ من الطرق لاختيار، حيث يوجد n من عوامل العدد 2. وتلك طريقة طويلة لقول 2^n.

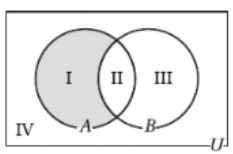
مجموعة التمارين 3

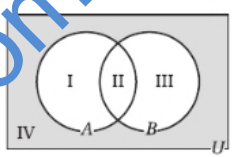
7. 

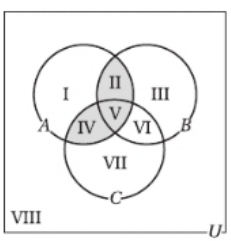
8. 

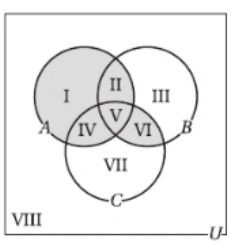
9. 

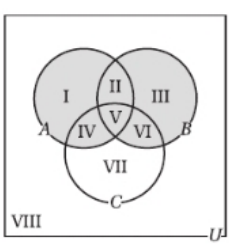
10. 

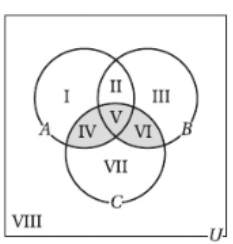
11. 

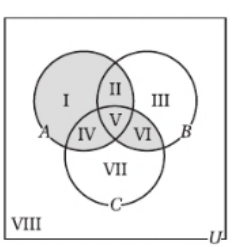
12. 

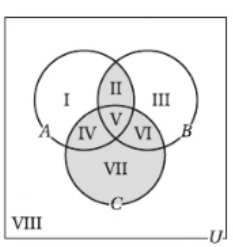
13. 

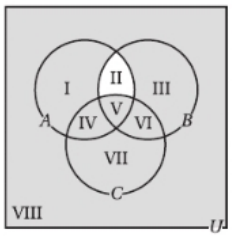
14. 

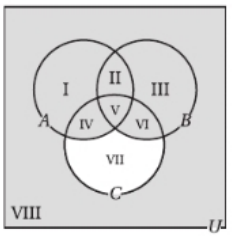
15. 

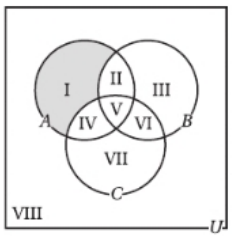
16. 

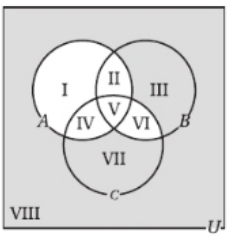
17. 

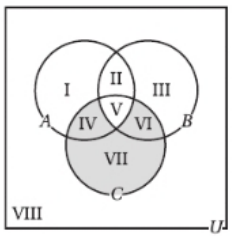
18. 

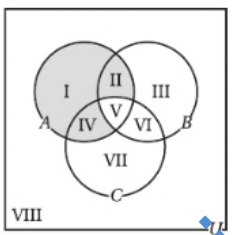
19. 

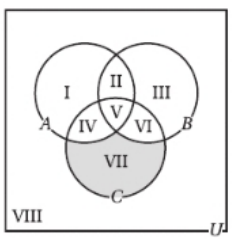
20. 

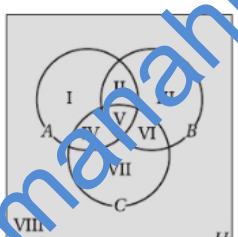
21. 

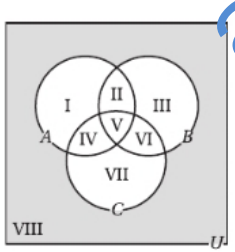
22. 

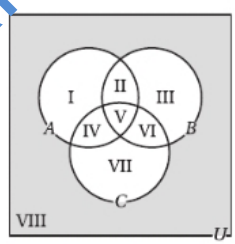
23. 

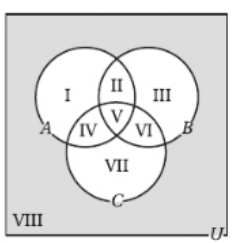
24. 

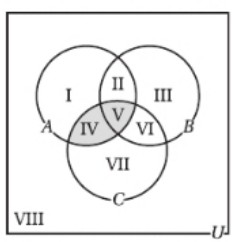
25. 

26. 

27. 

28. 

29. 

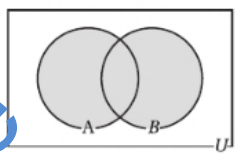
30. 

almanahj.com/ae

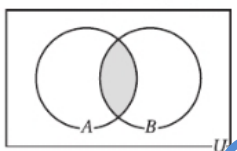
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

31. متساويتان 32. غير متساويتين 33. متساويتان
34. متساويتان 35. غير متساويتين
36. غير متساويتين 37. غير متساويتين 38. غير متساويتين
39. $n(A) = 10$
40. $n(B) = 11$ 41. $n(A \cap B) = 4$ 42. $n(A \cup B) = 17$
43. $n(A') = 13$ 44. $n(B') = 12$ 45. $n(A' \cap B') = 6$
46. $n(A' \cup B') = 19$ 47. $n(A - B) = 6$ 48. $n(B - A) = 7$
49. $n(A \cap (B - A)) = 0$ 50. $n(B' \cup (B - A)) = 19$
51. $n(A) = 8$ 52. $n(B) = 5$ 53. $n(A \cap B) = 3$
54. $n(A \cup B) = 10$ 55. $n(A \cap B') = 5$ 56. $n(A' \cup B) = 14$
57. $n(A') = 11$ 58. $n(B') = 14$
59. $n(A - B) = 5$ 60. $n(B' - A) = 9$

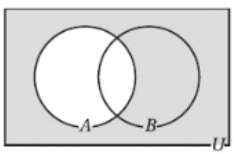
61. الأشخاص الذين يقودون سيارة رياضية متعددة الأغراض أو سيارة هجين



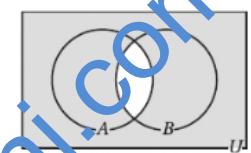
62. الأشخاص الذين يقودون سيارة رياضية متعددة الأغراض هجين



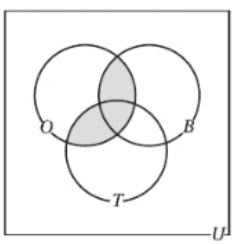
63. الأشخاص الذين لا يقودون سيارة رياضية متعددة الأغراض



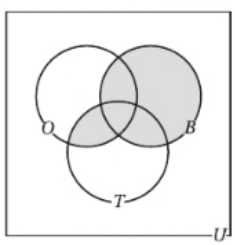
64. الأشخاص الذين لا يقودون سيارة رياضية متعددة الأغراض هجين



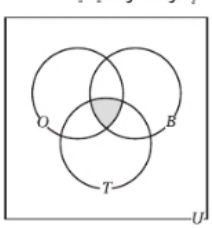
65. الطلاب في دورات تدريبية عبر الإنترنت ودورات تدريبية متنوعة أو تقليدية



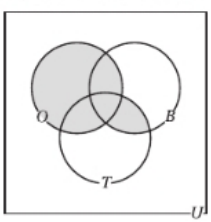
66. الطلاب المشاركون في دورات تدريبية متنوعة أو في دورات تدريبية عبر الإنترنت وتقليدية معًا



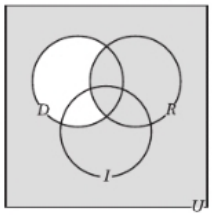
67. الطلاب المشاركون في دورات تدريبية متنوعة وعبر الإنترنت وتقليدية



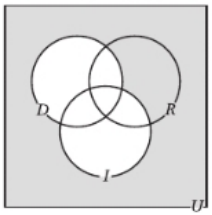
68. الطلاب المشاركون في دورات تدريبية متنوعة أو عبر الإنترنت والمشاركون في دورات تدريبية تقليدية أو عبر الإنترنت



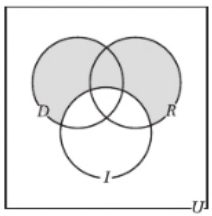
69. الطلاب الذين ليسوا من الرياض أو جدة



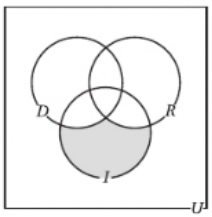
70. الطلاب الذين ليسوا من الرياض أو لا من هذه ولا تلك



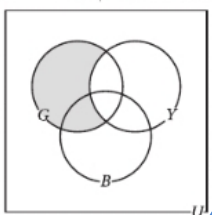
71. الطلاب الذين من الرياض أو جدة ولكن ليسوا من هذه ولا تلك



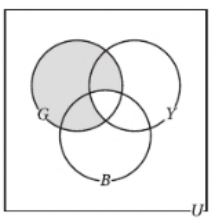
72. الطلاب الذين لا من هذه ولا تلك لكن ليسوا من الرياض أو جدة



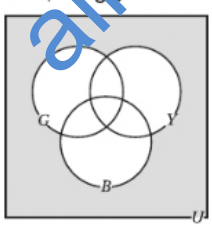
73. الأشخاص الذين يستخدمون Google بانتظام وليس Yahoo!



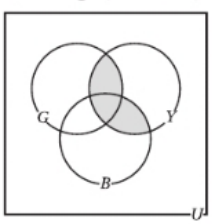
74. الأشخاص الذين يستخدمون Google بانتظام وليس Yahoo! وBing



75. الأشخاص الذين لا يستخدمون Google أو Yahoo! أو Bing بانتظام



76. الأشخاص الذين يستخدمون Yahoo! وBing أو Yahoo! وGoogle بانتظام



almanahj.com/ae

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مجموعة التمارين 4

1. (a) 10 (b) 51 (c) 3
2. (a) 11 (b) 13 (c) 2
3. (a) 22 (b) 36
4. (a) 11 (b) 10 (c) 20
5. (a) 50% (b) 90%
6. (a) 53% (b) 47.5%
7. (a) 2 (b) 9 (c) 35
8. (a) 14 (b) 11 (c) 8
9. (a) 16 (b) 7 (c) 14 (d) 3
10. (a) 90 (b) 76 (c) 1
11. (a) 192 (b) 6 (c) 87
12. (a) 36 (b) 3 (c) 45
13. (a) 18 (b) 30 في كل دوري
14. (a) 10
(b) باستخدام المعلومات المعطاة، لم نعرف عدد الكتب المتاحة على Amazon وiTunes ولكن ليست متاحة على Google. لذا لا يمكننا معرفة العدد الذي كان متاحًا على خدمة واحدة على الأقل من الخدمات الثلاث.
(c) 48 (d) 59
15. (a) 52 لا يستمعون إلى أي نوع، 51 يستمعون إلى الراديو الافتراضي.
(b) 13 (c) 30
16. (a) 43.9% (b) 34 (c) 34.3%
17. بلغ إجمالي المناطق الثماني 39 لكن الباحث أجرى مسحًا على 40 شخصًا.
18. من بين 40 مستلمًا، اطلع 3 فقط على جميع رسائل البريد الإلكتروني.
19. (a) سنحتاج إلى معرفة عدد من يشاهدون الاثنين ولا يشاهدون أيًا من الرياضتين الأخريين.
(b) 1,000
(c) كرة القدم فقط: 205؛ كرة السلة فقط: 110
(d) دائرتان: 4؛ 3 دوائر: 8. الخمسة: 4 دوائر ستضم 16 منطقة.
(e) يمكنك الحصول على مناطق كافية عندما تتقاطع دائرتان (لكن ليس أبدًا من الدوائر).
(f) من الممكن أنه توجد 16 منطقة.

مجموعة التمارين 5

5. $7n$ 6. n^3 7. 4^n 8. n^2 9. -2 10. $22n$ 11. $\frac{n}{4}$ 12. $\frac{n}{6}$
13. $4n-2$ 14. $3n-2$ 15. $\frac{n+1}{2}$ 16. $\frac{1}{n^3}$ 17. $100n$
18. $50n$ 19. $-3n-1$ 20. $2n-1$

بالنسبة إلى 21 حتى 30، سنوضح أن كل مجموعة هي مجموعة غير منتهية بوضعها في مقابلة واحد بواحد مع مجموعة جزئية فعلية من نفسها.

21. $\{3, 6, 9, 12, 15, \ldots, 3n, \ldots\}$
$\updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \quad \updownarrow$
$\{6, 12, 18, 24, 30, \ldots, 6n, \ldots\}$

22. $\{10, 15, 20, 25, 30, \ldots, 5n+5, \ldots\}$
$\updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \quad \updownarrow$
$\{15, 25, 35, 45, 55, \ldots, 10n+5, \ldots\}$

23. $\{9, 18, 27, 36, 45, \ldots, 9n, \ldots\}$
$\updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \quad \updownarrow$
$\{18, 36, 54, 72, 90, \ldots, 18n, \ldots\}$

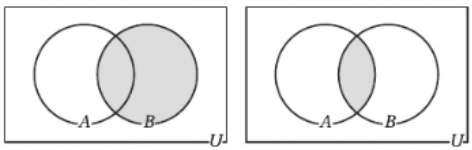
24. $\{4, 10, 16, 22, 28, \ldots, 6n-2, \ldots\}$
$\updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \quad \updownarrow$
$\{10, 22, 34, 46, 58, \ldots, 12n-2, \ldots\}$

77. II 78. IV 79. I 80. III 81. VI 82. VIII

83. لا، تختلف الإجابات. 84. لا، تختلف الإجابات.

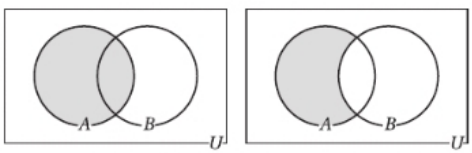
85 و86. تختلف الإجابات.

87. (a)



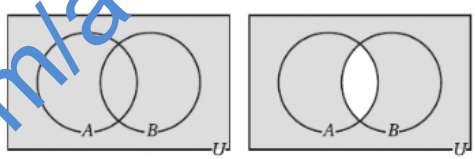
(b) تختلف الإجابات. (c) $B \subseteq A$

88. (a)



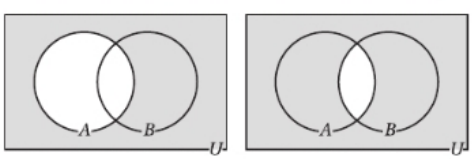
(b) تختلف الإجابات. (c) A وB منفصلتان

89. (a)



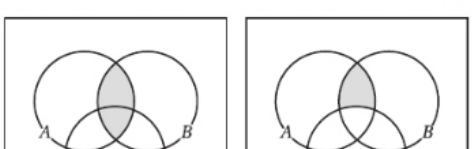
(b) تختلف الإجابات. (c) A وB منفصلتان

90. (a)



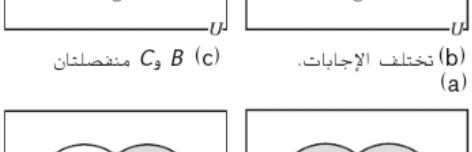
(b) تختلف الإجابات. (c) $A \subseteq B$

91. (a)



(b) تختلف الإجابات. (c) B وC منفصلتان

92. (a)



(b) تختلف الإجابات. (c) $C \subseteq A \subseteq B$

almanahj.com/ae

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

25. {2, 5, 8, 11, ..., $3n - 1$, ...}
↕ ↕ ↕ ↕ ↕
{5, 11, 17, 23, ..., $6n - 1$, ...}

26. {20, 24, 28, ..., $16 + 4n$, ...}
↕ ↕ ↕ ↕
{24, 28, 32, ..., $20 + 4n$, ...}

27. {10, 100, ..., 10^n, ...}
↕ ↕ ↕
{100, 10,000, ..., 10^{2n}, ...}

28. {100, 200, 300, 400, ..., $100n$, ...}
↕ ↕ ↕ ↕ ↕
{200, 400, 600, 800, ..., $200n$, ...}

29. $\left\{\frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \ldots, \frac{5}{n}, \ldots\right\}$
↕ ↕ ↕ ↕
$\left\{\frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{5}{n+1}, \ldots\right\}$

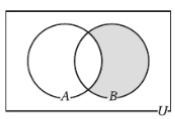
30. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$
↕ ↕ ↕ ↕ ↕
$\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots, \frac{1}{2^{n+1}}, \ldots\right\}$

31. استخدم المقابلة $n \to 5n$.
32. استخدم المقابلة $n \to -3n$.
33. استخدم المقابلة $n \to (n-1)^2$. (توضح المقابلة أن n الأعداد الطبيعية قابلة للعد، ولكن الأعداد الكلية تشمل الصفر كذلك.)
34. استخدم المقابلة $1 \to \frac{1}{5}, 2 \to -\frac{1}{7}, 3 \to -\frac{2}{5}, 4 \to -\frac{2}{7}, 5 \to -\frac{3}{5}, 6 \to -\frac{3}{7}, \ldots$.
35. يمكن وضع الأعداد النسبية في مقابلة واحد بواحد مع الأعداد الطبيعية. **36.** لا
37. أثبتنا أن المجموعة في التمرين 2 قابلة للعد.
38. (a) خطأ (b) صواب
39. (a) قابل كل عدد بالمعدد الأقل بواحد.
(b) $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$
40. (a) أحد الاحتمالات هو $1 \to 1, 2 \to -1, 3 \to 2, 4 \to -2, 5 \to 3, 6 \to -3, \ldots$
(b) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$، أو $2\aleph_0 = \aleph_0$
41. $\aleph_0$ **42.** $\aleph_0$ **43.** 15 **44.** 12 **45.** $\aleph_0$ **46.** $\aleph_0$

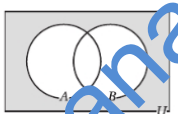
تمارين المراجعة

1. $D = \{52, 54, 56, 58\}$ **2.** $F = \{5, 7, 9, \ldots, 39\}$
3. $L = \{$خ، ط، ا، ب، ت$\}$ **4.** $A = \{$أ، ر، ك، ن، س$\}$
5. $B = \{501, 502, 503, \ldots\}$ **6.** $C = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
7. {بز أفدرين، نيل أرمسترونج، ألان بين، جين سيرنان، بت كونراد، تشارلز دوك، جيمس إروين، إدجار ميتشيل، هاريسون شميت، ديفيد سكوت، ألان بارتليت شيبارد، جون يونج}
8. $\{\ \}$ **9.** $\{x \mid x$ زوجية و$16 > x > 26\}$
10. $\{x \mid x$ من مضاعفات العدد 5 بين 0 و$25\}$
11. $\{x \mid x$ عدد طبيعي فردي أكبر من 100$\}$
12. $\{x \mid x$ مضاعف موجب لـ8 أقل من 73$\}$ **13.** غير منتهية
14. غير منتهية **15.** منتهية **16.** منتهية **17.** منتهية **18.** منتهية
19. منتهية **20.** {الإعلانات التجارية المزعجة} و{الأشخاص أصحاب الشعر الأحمر}
21. خاطئة **22.** صائبة **23.** خاطئة **24.** خاطئة
25. $\emptyset$; {r}; {s}; {t}; {r, s}; {r, t}; {s, t}; {r, s, t}

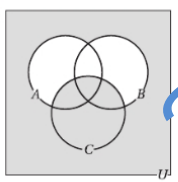
26. $2^6 = 64$ مجموعة جزئية؛ 63 مجموعة جزئية فعلية
27. $A \cap B =$ {توبوتا، هوندا، نكزس}
28. $B \cup C =$ {مرسيدس، توبوتا، هوندا، نكزس، أكيورا، هيونداي، تسلا، دودج}
29. $(A \cap B) \cap C = \emptyset$
30. $B' =$ {شيفروليه، فورد، بي إم دبليو، مرسيدس، أكيورا، دودج}
31. $A - B =$ {شيفروليه، بي إم دبليو} $B - A =$ **32.** {هيونداي، تسلا}
33. $(A \cup B)' \cap C =$ {مرسيدس، أكيورا، دودج}
34. $B' \cap C' =$ {شيفروليه، فورد، بي إم دبليو}
35. $(B \cup C) \cap A' =$ {مرسيدس، أكيورا، هيونداي، تسلا، دودج}
36. $(A \cup B) \cap C' =$ {شيفروليه، بي إم دبليو، توبوتا، هوندا، نكزس، هيونداي، تسلا}
37. $(B' \cap C') \cup A' =$ {شيفروليه، فورد، بي إم دبليو، مرسيدس، أكيورا، هيونداي، تسلا، دودج}
38. $(A' \cap B) \cup C =$ {مرسيدس، أكيورا، هيونداي، تسلا، دودج}
39. $K \cap L = \{x \mid x \in E, x > 25\}$; $K \cup L = \{12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 27, 28, 29, 30, \ldots\}$; $L - K = \{12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}$
40. (a) مجموعة العناصر في كلتا المجموعتين A وB
(b) مجموعة العناصر في المجموعة B أو C، أو كليتيهما
(c) مجموعة العناصر في كلتا المجموعتين A وB، وفي C
(d) مجموعة العناصر غير الموجودة في المجموعة B
(e) مجموعة العناصر في المجموعة A، وليست في المجموعة B
(f) مجموعة العناصر في المجموعة B، وليست في المجموعة A
(g) مجموعة العناصر التي ليست في المجموعة B وليست في المجموعة C
(h) مجموعة العناصر في مجموعة واحدة على الأقل من المجموعتين B وC، وليست في المجموعة A
41. $A - B$ **42.** $A \cap B$ **43.** $B - A$ **44.** $(A \cup B)'$
45. $(A \cup B) - (A \cap B)$ **46.** B'
47.



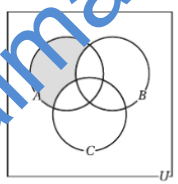
48.



49.



50.



51. 20 **52.** 30 **53.** II **54.** V **55.** VI **56.** VIII
57. (a)75 (b) 20
58. (a)18 (b) 61.7%
59. (a)3 (b) 5 (c) 6
60. (a) 1 (b) استخدم 15 المتحد. استخدم 20 المتقاطع (c) 51.2%
61. $-3 - 2n$
62. {12, 24, 36, ..., $12n$, ...}
↕ ↕ ↕ ↕
{24, 48, 72, ..., $24n$, ...}
63. استخدم المقابلة $n \to 12n$.

almanahj.com/ae
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

25. $\{2, 5, 8, 11, \ldots, 3n-1, \ldots\}$
$\updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\qquad\updownarrow$
$\{5, 11, 17, 23, \ldots, 6n-1, \ldots\}$

26. $\{20, 24, 28, \ldots, 16+4n, \ldots\}$
$\updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\qquad\updownarrow$
$\{24, 28, 32, \ldots, 20+4n, \ldots\}$

27. $\{10, 100, \ldots, 10^n, \ldots\}$
$\updownarrow\quad\updownarrow\quad\updownarrow$
$\{100, 10{,}000, \ldots, 10^{2n}, \ldots\}$

28. $\{100, 200, 300, 400, \ldots, 100n, \ldots\}$
$\updownarrow\quad\updownarrow\quad\updownarrow\quad\updownarrow\qquad\updownarrow$
$\{200, 400, 600, 800, \ldots, 200n, \ldots\}$

29. $\left\{\frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \cdots, \frac{5}{n}, \cdots\right\}$
$\updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\qquad\updownarrow$
$\left\{\frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \cdots, \frac{5}{n+1}, \cdots\right\}$

30. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots\right\}$
$\updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\qquad\updownarrow$
$\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \cdots, \frac{1}{2^{n+1}}, \cdots\right\}$

31. استخدم المقابلة $n \to 5n$.

32. استخدم المقابلة $n \to -3n$.

33. استخدم المقابلة $n \to (n-1)^2$. (توضح المقابلة $n \to n^2$ أن الأعداد الخطبيعية قابلة لتعد، ولكن الأعداد الكلية تشمل الصفر كذلك).

34. استخدم المقابلة $1 \to -\frac{1}{5}$, $2 \to -\frac{1}{7}$, $3 \to -\frac{2}{5}$, $4 \to -\frac{2}{7}$, $5 \to -\frac{3}{5}$, $6 \to -\frac{3}{7}$, . . .

35. يمكن وضع الأعداد النسبية في مقابلة واحد بواحد مع الأعداد الخطبيعية. **36.** لا

37. أثبتنا أن المجموعة في التمرين 2 قابلة لتعد.

38. (a) خطأ (b) صواب

39. (a) قابل كل عدد بالتعدد الأقل بواحد.
(b) $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$

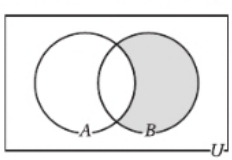
40. (a) أحد الاحتمالات هو $1 \to 1,\ 2 \to -1,\ 3 \to 2,\ 4 \to -2,\ 5 \to 3,\ 6 \to -3,\ \ldots$
(b) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$، و $2\aleph_0 = \aleph_0$

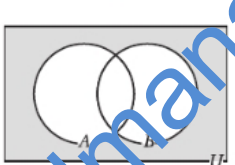
41. $\aleph_0$ **42.** $\aleph_0$ **43.** 15 **44.** 12 **45.** $\aleph_0$ **46.** $\aleph_0$

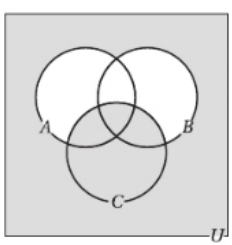
تمارين المراجعة

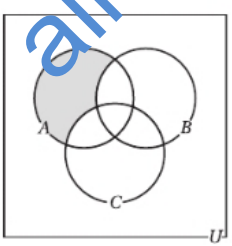
1. $D = \{52, 54, 56, 58\}$ **2.** $F = \{5, 7, 9, \ldots, 39\}$
3. $L = \{$خ، ط، ا، ب، ت$\}$ **4.** $A = \{$أ، ر، ك، ن، س$\}$
5. $B = \{501, 502, 503, \ldots\}$ **6.** $C = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
7. {بز أخدرين، نيل أرمسترونج، ألان بين، جين سيرنان، بت كونراد، تشارلز دوك، جيمس إروين، إدجار ميتشيل، هاريسون شميت، ديفيد سكوت، ألان بارتليت شيبارد، جون يونج}
8. $\{\ \}$ **9.** $\{x \mid x$ زوجية و$16 > x > 26\}$
10. $\{x \mid x$ من مضاعفات العدد 5 بين 0 و$25\}$
11. $\{x \mid x$ عدد طبيعي فردي أكبر من $100\}$
12. $\{x \mid x$ مضاعف موجب للعدد 8 أقل من $73\}$ **13.** غير منتهية
14. غيرمنتهية **15.** منتهية **16.** منتهية **17.** منتهية **18.** منتهية
19. منتهية **20.** {الإعلانات التجارية المزعجة} و{الأشخاص أصحاب الشعر الأحمر}
21. خاطئة **22.** صائبة **23.** خاطئة **24.** خاطئة
25. $\varnothing$; {r}; {s}; {t}; {r, s}; {r, t}; {s, t}; {r, s, t}

26. $2^6 = 64$ مجموعة جزئية؛ 63 مجموعة جزئية فعلية
27. $A \cap B =$ {تويوتا، هوندا، لكزس}
28. $B \cup C =$ {مرسيدس، تويوتا، هوندا، لكزس، أكيورا، هيونداي، تسلا، دودج}
29. $(A \cap B) \cap C = \varnothing$
30. $B' =$ {شيفروليه، فورد، بي إم دبليو، مرسيدس، أكيورا، دودج}
31. $A - B =$ {شيفروليه، بي إم دبليو} **32.** $B - A =$ {هيونداي، تسلا}
33. $(A \cup B)' \cap C =$ {مرسيدس، أكيورا، دودج}
34. $B' \cap C' =$ {شيفروليه، فورد، بي إم دبليو}
35. $(B \cup C) \cap A' =$ {مرسيدس، أكيورا، هيونداي، تسلا، دودج}
36. $(A \cup B) \cap C' =$ {شيفروليه، بي إم دبليو، تويوتا، هوندا، لكزس، هيونداي، تسلا}
37. $(B' \cap C') \cup A' =$ {شيفروليه، فورد، بي إم دبليو، مرسيدس، أكيورا، هيونداي، تسلا، دودج}
38. $(A' \cap B) \cup C =$ {مرسيدس، أكيورا، هيونداي، تسلا، دودج}
39. $K \cap L = \{x \mid x \in E,\ x > 25\}$; $K \cup L = \{12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 27, 28, 29, 30, \ldots\}$; $L - K = \{12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}$
40. (a) مجموعة العناصر في كلتا المجموعتين A وB
(b) مجموعة العناصر في المجموعة B أو C، أو كلتيهما
(c) مجموعة العناصر في كلتا المجموعتين A وB، وفي C
(d) مجموعة العناصر غير الموجودة في المجموعة B
(e) مجموعة العناصر في المجموعة A، وليست في المجموعة B
(f) مجموعة العناصر في المجموعة B، وليست في المجموعة A
(g) مجموعة العناصر التي ليست في المجموعة B وليست في المجموعة C
(h) مجموعة العناصر في مجموعة واحدة على الأقل من المجموعتين B وC، وليست في المجموعة A
41. $A - B$ **42.** $A \cap B$ **43.** $B - A$ **44.** $(A \cup B)'$
45. $(A \cup B) - (A \cap B)$ **46.** B'

47.


48.


49.


50.


51. 20 **52.** 30 **53.** II **54.** V **55.** VI **56.** VIII
57. (a)75 (b) 20
58. (a)18 (b) 61.7%
59. (a)3 (b) 5 (c) 6
60. 1(a) استخدم 15 المتحد، استخدم 20 (b) المتقاطع (c) 51.2%
61. $-3 - 2n$
62. $\{12, 24, 36, \ldots, 12n, \ldots\}$
$\updownarrow\ \updownarrow\ \updownarrow\qquad\updownarrow$
$\{24, 48, 72, \ldots, 24n, \ldots\}$

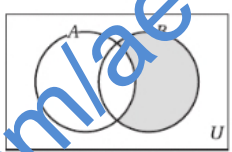
63. استخدم المقابلة $n \to 12n$.

almanahj.com/ae

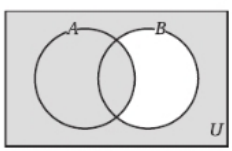
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

اختبار على الوحدة

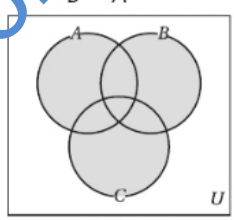
1. $P = \{92, 94, 96, 98\}$ 2. $K = \{س، ل، ب، ي\}$
3. $X = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 79\}$ 4. $J = \{بنابر، يونيو، يوڤيو\}$
5. $\{E \ni x | x > 10$ و $x < 20\}$
6. $\{x | x = 2^{n+1}$ عندما يكون n عددًا طبيعيًّا أقل من $7\}$
7. غير منتهية 8. منتهية 9. منتهية
10. تختلف صفة "الشعر الرائع" من شخص إلى آخر، لذا بالتحظر إلى بعض الأشخاص، ثم نتمكن من تحديد ما إذا كانوا ضمن المجموعة أم لا.
11. جميع المجموعات الجزئية: $\varnothing$، {أريزونا}، {نيفادا}، {أوريجون}، {أريزونا، نيفادا}، {أريزونا، أوريجون}، {نيفادا، أوريجون}، {أريزونا، نيفادا، أوريجون}؛ المجموعات الجزئية الفعلية: كل المجموعات باستثناء المجموعة الأخيرة. توجد 3 ولايات متاخمة لكاليفورنيا، لذلك توجد $2^3 = 8$ مجموعات جزئية.
12. $(A \cap B) \cup C = \{a, e, h, j\}$
13. $(A \cup B)' = \{c, h\}$
14. $A - B = \{b, d, e, f\}$
15. $(A - B) - C = \{b, d, f\}$
16.



$B - A$



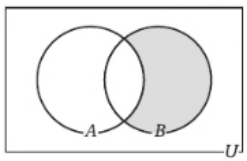
$B' \cup A$



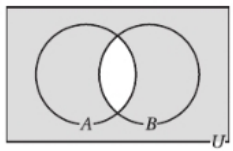
$A \cup B \cup C$

17. {(أريزونا، e)، (نيفادا، e)، (أوريجون، e)، (أريزونا، h)، (نيفادا، h)، (أوريجون، h)، (أريزونا، j)، (نيفادا، j)، (أوريجون، j)} و{(e، أريزونا)، (h، أريزونا)، (j، أريزونا)، (e، نيفادا)، (h، نيفادا)، (j، نيفادا)، (e، أوريجون)، (h، أوريجون)، (j، أوريجون)}

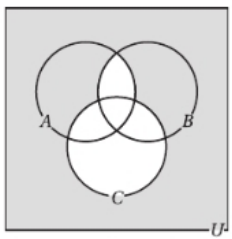
18.



19.



20.



21. $n(A \cup B) = 2{,}300$ 22. (a) 4 (b) 64.7% (c) 7.6% 23. $15n$
24. استخدم المقابلة $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow -1, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow -2, 5 \rightarrow 3, 6 \rightarrow -3, \ldots$ لتوضيح ما يلي: أنها مقابلة بين الأعداد الطبيعية والمجموعة، فضلًا عن أنها مقابلة بين مجموعة جزئية فعلية والمجموعة نفسها.
25. صائبة 26. صائبة 27. صائبة
28. صائبة 29. خاطئة 30. خاطئة

almanahj.com/ae

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

وتيرة التقدم المقترحة			
الفترات الزمنية	إعطاء الدرس	المراجعة والتقويم	الإجمالي
45 دقيقة	13 يومًا	يومان	15 يومًا
90 دقيقة	5 أيام	يوم واحد	6 أيام

	التوسع 11-3 45 min: 0.5 يوم 90 min: 0.25 يوم	الدرس 11-4 45 min: 1.5 يوم 90 min: 0.5 يوم
	مختبر الهندسة: عبارات ثنائية الشرط	**التبرير الاستنتاجي**
	■ تحديد العبارات ثنائية الشرط واستخدامها والحكم على صحتها.	■ استخدام قانون الفصل. ■ استخدام قانون القياس المنطقي.
	العبارات ثنائية الشرط	التبرير الاستنتاجي صحة قانون الفصل قانون القياس المنطقي

almanahj.com/ae

almanahj.com/ae

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مخطط الوحدة

	التقويم التشخيصي تدريب سريع		
	الدرس 11-1 45 min: 1 يوم 90 min: 0.5 يوم	الدرس 11-2 45 min: 1 يوم 90 min: 0.5 يوم	الدرس 11-3 45 min: 1.5 يوم 90 min: 0.5 يوم
العنوان	التبرير الاستقرائي والتخمين	المنطق	العبارات الشرطية
الأهداف	■ صياغة تخمينات مبنية على تبرير استقرائي. ■ إيجاد الأمثلة المضادة.	■ تحديد قيم الصواب لأدوات النفي والربط والفصل. ■ تمثيل عبارات الربط والفصل باستخدام مخططات فن *Venn*.	■ تحليل العبارات المتضمنة أداة الربط «إذا كان–فإن». ■ كتابة نفي ومعكوس ومكافئ إيجابي للعبارات الشرطية «إذا كان–فإن»..
المفردات الأساسية	التبرير الاستقرائي التخمين المثال المضاد	العبارة قيمة الصواب النفي العبارة المركبة عبارة الربط عبارة الفصل جدول الصواب	العبارة الشرطية عبارة إذا كان–فإن الاستنتاج المفاهيم ذات الصلة النفي المعكوس المعكوس الإيجابي المكافئ المنطقي

almanahj.com/ae

Chapter Sourced From 11 Reasoning and Proof, from Geometry Chapter 2 © 2014 McGraw-Hill Education مؤسسة محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

مخطط الوحدة

ما يتضمنه البحث...

استخدم نشاط العصف الذهني لتنشيط الخلفية المعرفية وبنائها قبل بدء وحدة الدراسة. كما يمكن كذلك أن يقدم تقويمًا لما يعرفه الطالب عن المفهوم ويشير إلى الجوانب التي تكون الحاجة فيها إلى التدريس أكثر إلحاحًا (تابا، 1967)

- توجد مفردات كثيرة، مثل النفي والفصل، التي يمكن أن يكون الطلاب على دراية بها. اطلب منهم إجراء العصف الذهني وتوقع تعريفاتها قبل تقديم التعريفات الفعلية إليهم.
- سيُقدَّم مفهوم الإثباتات ثنائية الأعمدة في الدرس 6–11. رتّب الطلاب في مجموعات صغيرة واطلب منهم تكوين إثبات هندسي قبل تقديم الإثباتات الهندسية في الكتاب المدرسي إليهم. واطلب منهم تبرير إثباتاتهم.

معلم إلى معلم

نانسي لي كين، معلمة
مدرسة مارتينسفيل الثانوية
مارتينسفيل، إنديانا

للاستخدام مع الدرس 3–11

لتطوير مفهوم العبارات الشرطية، قمت بتصميم ملصقات لكل من العبارات الشرطية الأربع المرتبطة. وكتبت الفرضيات على لوحة الملصقات الصفراء والاستنتاجات على لوحة الملصقات الزرقاء وعبارات "ليس" على لوحة الملصقات الحمراء. ومع تقديم كل نوع من العبارات الشرطية، كنت أضع الملصقات في الترتيب الصحيح.

القراءة والكتابة في الرياضيات

مهارة دراسية

مشروع CRISS

يمكن تمثيل العديد من المفردات الواردة في الوحدة 11 باستخدام الرموز. كما يمكن أن تمثل الملاحظات الرباعية الأعمدة طريقة مفيدة للطلاب لتنظيم المفردات الجديدة. ولتعزيز الفهم، يستطيع الطلاب كتابة شرح كل مفردة بعباراتهم الخاصة وتقديم الرمز المناسب. يعرض الجدول التالي ملاحظات للدرس 2–11. يستطيع الطلاب الإضافة إلى هذه العينة بمفردات أخرى من الوحدة 11.

المفردة	الشرح	الرمز	أمثلة
النفي	عكس العبارة المقدمة	$\sim$	لا توجد مدرسة اليوم
عبارة الربط	عبارة مركبة تتكون باستخدام حرف العطف "و"	$p \wedge q$	اليوم هو الاثنين ولا توجد مدرسة
عبارة الفصل	عبارة مركبة تتكون باستخدام حرف العطف "أو"	$p \vee q$	اليوم هو الاثنين أو لا توجد مدرسة اليوم

تكوين الاستقلال من خلال إستراتيجيات يضعها الطلاب (CRISS)

almanahj.com/ae

التقويم والتدخل التقويمي

SE =كتاب الطالب، TE =كتاب المعلم

التشخيص	سبل الحل
التقويم التشخيصي	
بداية الوحدة 11	
الاستعداد للوحدة 11	الاستجابة للتدخل التقويمي TE
بداية كل درس	
السابق، الحالي، لماذا؟ SE شرائح الاختبار السريع 5 Min	كتاب الطالب SE
التقويم التكويني	
أثناء/ بعد كل درس	
تمرين موجه SE، كل مثال تحقق من فهمك SE مسائل مهارات التفكير العليا SE مراجعة شاملة SE أمثلة إضافية TE انتبه! TE الخطوة 4، التقويم TE	التدريس المتمايز TE؛ خيارات الواجب المنزلي المتمايزة TE؛ دليل الدراسة والتدخل التقويمي
منتصف الوحدة	
اختبار منتصف الوحدة SE	
اختبار ما قبل الوحدة	
دليل الدراسة والمراجعة للوحدة SE تدريب على الاختبار SE تدريب على الاختبار المعياري SE	
التقويم الختامي	
بعد الوحدة 11	
اختبارات الاختيار من متعدد، النماذج 1، 2A، 2B **المواد الرئيسة لموارد الوحدة**، اختبارات الإجابات المفتوحة، النماذج 2C، 2D، 3 **المواد الرئيسة لموارد الوحدة**، ص اختبار المفردات **المواد الرئيسة لموارد الوحدة**. اختبار الإجابة الموسعة **المواد الرئيسة لموارد الوحدة**. تدريب على الاختبار المعياري **المواد الرئيسة لموارد الوحدة**. eAssessment McGraw-Hill	

almanahj.com/ae

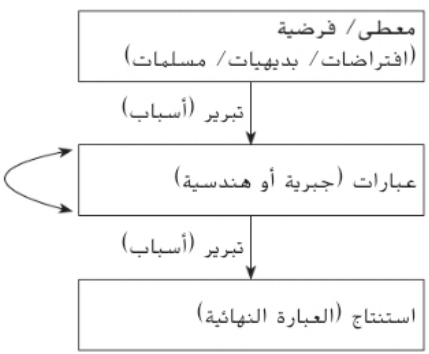
الخيار 1 الوصول إلى مستوى المتعلمين كافة

بصري اطلب من الطلاب استكشاف جمع القطع المستقيمة والزوايا من خلال قياس الأجسام التي في غرفة الصف. استخدم المسطرة لإيجاد نقطة المنتصف في غرفة الصف واستخدم المنقلة لتوضيح أن الزاويتَين القائمتين تكوّنان خطًّا مستقيمًا.

حركي اكتب عدة عبارات إذا كان–فإن على أوراق مقسَّمة إلى أشكال مختلفة. اكتب الشروط الكافية لكل عبارة إذا كان–فإن على ورقة مقسَّمة إلى أشكال تطابق عبارة إذا كان–فإن ذات الصلة. وبالمثل، اكتب الشروط الضرورية على ورقة مقسَّمة إلى أشكال متشابهة وحجمها أكبر من الأشكال الأصلية. اطلب من الطلاب ترتيب الأشكال لتوضيح الشروط الضرورية والكافية لعبارات إذا كان–فإن.

الخيار 2 قريب من المستوى

بيّن للطلاب كيف تبدأ الإثباتات من فرضيات إلى استنتاجات باستخدام المخطط الانسيابي. تؤدي الشروط المقدمة إلى عبارات الإثبات مع تضمين كل خطوة تبريرًا، بحيث يكون الاستنتاج هو العبارة النهائية في الإثبات.



الخيار 4 أعلى من المستوى

اطرح المسألة التالية على الطلاب:
تقع الثلاث نقاط التي ليست على استقامة واحدة في مستوى منفرد. فكم عدد المستويات التي تحددها 4 نقاط ليست على استقامة واحدة؟ و5 نقاط ليست على استقامة واحدة؟ هل توجد إجابة فريدة؟ يوجد مستوى واحد على الأقل و4 مستويات على الأكثر لـ 4 نقاط ليست على استقامة واحدة. يوجد مستوى واحد على الأقل و10 مستويات على الأكثر لـ 5 نقاط ليست على استقامة واحدة.

almanahj.com/ae

التخطيط الرأسي

قبل الوحدة 11

الموضوعات ذات الصلة

- توصيل الأفكار الرياضية باستخدام اللغة والأدوات الفعالة والوحدات الملائمة والنماذج التمثيلية البيانية أو الرقمية أو الفيزيائية أو الجبرية.
- إثبات صحة الاستنتاجات باستخدام الخواصّ والعلاقات الرياضية.

الوحدة 11

الموضوعات ذات الصلة

- استخدام الاستنتاج الاستقرائي لصياغة تخمين.
- استخدام التبرير المنطقي لإثبات العبارات الصائبة وإيجاد الأمثلة المضادة لرفض العبارات الخاطئة.
- تحديد مدى صحة العبارة الشرطية وعكسها ومعكوسها ومعكوسها الإيجابي.
- استخدام التبرير الاستنتاجي لإثبات العبارة.

بعد الوحدة 11

التحضير

- مقارنة الحلول الجبرية والبيانية للمعادلات التربيعية وترجمتها.
- تحليل المواقف التي تمت نمذجتها بدوال الجذر التربيعي، وصياغة المعادلات أو المتباينات، وتحديد طريقة، وحل المسائل.

معاينة درس تلو الآخر

11–1 التبرير الاستقرائي والتخمين

إنّ *التخمين* عبارة عن تخمين مدروس على أساس معلومات معروفة. ويُطلق على دراسة عدة مواقف محددة للوصول إلى تخمين *التبرير الاستقرائي*. فإذا تعارض مثال واحد مع التخمين، فيكون التخمين غير صائب. ويُسمى المثال الخاطئ *المثال المضاد*.

11–2 المنطق

إن *العبارة* هي جملة تكون إما صائبة أو خاطئة، لكن ليست كليهما. ويُسمى صواب العبارة أو خطؤها *قيمة الصواب*. يتضمن نفي العبارة المعنى المضاد بالإضافة إلى قيمة صواب عكسية. أي أنه إذا تم تمثيل العبارة بـ p، فإن *ليس* p هو نفي العبارة. يمكنك كذلك كتابة *ليس* p على الصورة $\sim p$.

يمكن ربط عبارتَين أو أكثر معًا لتكوين عبارة مركبة. وعبارة الربط هي عبارة مركبة تكونت عن طريق الجمع بين عبارتين أو أكثر باستخدام حرف العطف *و* أو الرمز $\wedge$. كما يمكن الجمع بين عبارتَين أو أكثر لتكوين عبارة فصل. وعبارة الفصل هي عبارة مركبة تكونت عن طريق الجمع بين عبارتين أو أكثر باستخدام *أو* ويُستخدم الرمز $\vee$ بدلًا من *أو*. يمكن توضيح عبارات الربط والفصل باستخدام مخططات فِن *Venn*.

- **مخطط فِن *Venn***

كما يمكن أيضًا أن تكون جداول الصواب مفيدة في تقييم قيَم الصواب للعبارات.

- **جدول الصواب**

p	$\sim p$
T	F
F	T

في النفي، إذا كانت p صائبة، فإن $\sim p$ تكون خاطئة. وإذا كانت p خاطئة، فإن $\sim p$ تكون صائبة.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
F	T	T
F	F	F
T	F	T

تكون عبارة الفصل خاطئة فقط عندما يكون كل من p وq خاطئتَين.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
F	T	F
F	F	F
T	F	F

تكون عبارة الربط صائبة فقط عندما تكون p وq صائبتَين.

يوضح جدول الصواب أن عبارة الربط تكون صائبة فقط عندما تكون كلتا العبارتَين صائبتَين. بينما تكون عبارة الفصل صائبة مالم تكن كلتا العبارتَين خاطئتَين.

almanahj.com/ae

11-3 العبارات الشرطية

العبارة الشرطية هي عبارة يمكن كتابتها بصيغة إذا كان-فإن. *إذا كان* p، *فإن* q. ويُسمى التعبير الذي يلي *إذا كان* مباشرة *الفرضية*. ويُسمى التعبير الذي يلي *فإن* مباشرة *الاستنتاج*. وتكون العبارة الشرطية صائبة في كل الحالات باستثناء ما إذا كانت الفرضية صائبة والاستنتاج خاطئًا. والعبارات الشرطية المرتبطة هي العبارات التي تتكون من عبارة إذا كان-فإن. تتكون عبارة العكس عن طريق التبديل بين الفرضية والاستنتاج: *إذا كان* q، *فإن* p. وتتكون عبارة المعكوس عن طريق نفي كل من الفرضية والاستنتاج في العبارة الأصلية. *إذا كان* $\sim p$، *فإن* $\sim q$. وتتكون عبارة المعكوس الإيجابي عن طريق نفي كل من الفرضية والاستنتاج في عكس العبارة الشرطية: *إذا كان* $\sim q$، *فإن* $\sim p$.

11-4 التبرير الاستنتاجي

يستخدم التبرير الاستنتاجي الحقائق أو القواعد أو التعريفات أو الخواص للوصول إلى استنتاجات منطقية. ويُسمى نموذج التبرير الاستنتاجي الذي يُستخدم للخلوص إلى استنتاجات من العبارات الشرطية الصائبة قانون الفصل. وينص هذا القانون على أنه إذا كانت $p \rightarrow q$ صائبة وp صائبة، فإن q تكون صائبة أيضًا. بينما يمثل قانون القياس المنطقي أحد قوانين المنطق الأخرى. وينص على أنه إذا كانت $p \rightarrow q$ و$q \rightarrow r$ صائبتَين، فإن $p \rightarrow r$ تكون صائبة أيضًا.

almanahj.com/ae