المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

د. المنجي بلال

16 سبتمبر 2019

المحتويات

1 مقدمة في المعادلات التفاضليةالعادية 5

1.1 مقدمة في المعادلات التفاضلية العادية 6

1.2 معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى 8

1.2.1 مقدمة 8

1.2.2 مسألة كوشي 9

1.2.3 إنتظام الحلول 9

1.2.4 نظرية الوجود المحلي (Local Existence Theorem) . . 10

1.3 معادلات تفاضلية تامة و عامل التكامل 10

1.3.1 معادلات تفاضلية تامة 10

1.3.2 عامل التكامل 12

1.4 معادلات قابلة للفصل 13

1.5 المعادلات المتجانسة 17

1.6 اختزال معادلة تفاضلية إلى الأنواع المعروفة 20

1.6.1 الاختزال إلى نموذج قابل للفصل (طريقة الاستبدال) . . . 20

1.6.2 الاختزال إلى الشكل المتجانس 22

1.7 معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الأولى 23

1.7.1 حل للمعادلة المتجانسة 23

1.7.2 حل للمعادلة الغير متجانسة 24
1.7.3 معادلة برنولي 27

الباب الأول
مقدمة في المعادلات التفاضليةالعادية

1.1 مقدمة في المعادلات التفاضلية العادية

تعريف 1

1. الشكل العام للمعادلة التفاضلية العادية برتبة n هو:

$$F(x, y(x), y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0. \qquad (1.1)$$

2. أعلى مشتق يظهر في معادلة تفاضلية عادية هو رتبة (order) المعادلة التفاضلية العادية.

3. إذا كانت المعادلة التفاضلية العادية 1.1 على الصورة التالية:

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + \ldots + a_n(x)y(x) = f(x) \qquad (1.2)$$

تعريف 2

فالمعادلة التفاضلية تسمى خطية. و إذا كان هذا التمثيل غير ممكن، فنقول أن المعادلة التفاضلية غير خطية.

4. إذا كانت الدالة $f = 0$ في المعادلة 1.2، فإن المعادلة في هذه الحالة تسمى معادلة تفاضلية خطية متجانسة.

5. إذا كانت الدوال $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ثابتة، فإن المعادلة 1.2 تسمى معادلة تفاضلية عادية خطية ذات معاملات ثابتة.

6. كذلك إذا كانت الدوال $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ثابتة و الدالة $f = 0$، فإن المعادلة 1.2 تسمى معادلة تفاضلية خطية متجانسة ذات معاملات ثابتة.

1.2 معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى

1.2.1 مقدمة

تعريف 3

1. لتكن Ω مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^2$ و $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة. المعادلات التفاضلية التالية تسمى معادلات تفاضلية عادية من الرتبة الأولى على الصورة الطبيعية أو الصورة القياسية:

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \qquad (1.3)$$

2. نقول أن $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ حل للمعادلات التفاضلية 1.3 على فترة $I \subset \mathbb{R}$ إذا كانت الدالة y قابلة للاشتقاق و تحقق ما يلي

أ) $\forall\, x \in I$، $(x, y(x)) \in \Omega$،

ب) $\forall\, x \in I$، $y'(x) = f(x, y(x))$.

أمثلة 1. 1. $y = e^{-x}$ حل للمعادلة التفاضلية $y' = -y.$

2. $y = \dfrac{c}{1-x}$، $c \in \mathbb{R}$ حل للمعادلة التفاضلية $(1-x)y' - y = 0.$

1.2.2 مسألة كوشي

تعريف 4

ليكن $(x_0\ y_0) \in \Omega$، مسألة كوشي للمعادلة 1.3 عند النقطة $(x_0\ y_0)$ هي إيجاد حل $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ للمعادلة حيث x_0 هي نقطة داخلية للفترة I و $y(x_0) = y_0$.
نقول أن $(x_0\ y_0)$ هي الشروط الأولية لمسألة كوشي.

1.2.3 إنتظام الحلول

تعريف 5

نقول أن دالة f لعدة متغيرات قابلة للمفاضلة باتصال للدرجة k، (أو نقول أنها من درجة C^k) إذا كانت المشتقات الجزئية للدالة f إلى الحد k متصلة.

نظرية 1:

ذا كانت $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ من الدرجة C^k، فإن كل الحلول للمعادلة $y' = f(x, y)$ هي من الدرجة C^{k+1}.

1.2.4 نظرية الوجود المحلي (Local Existence Theorem)

نظرية 2

إذا كانت الدالة f من الدرجة C^k، $k \geq 1$، بالنسبة للمتغير y و متصلة على المجموعة المفتوحة Ω، فإن لكل $(x_0, y_0) \in \Omega$ يوجد حل وحيد حسب الشروط المحلية $y' = f(x, y)$ و $y(x_0) = y_0$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي على x_0.

1.3 معادلات تفاضلية تامة و عامل التكامل

1.3.1 معادلات تفاضلية تامة

تعريف 6

نقول أن مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$ هي نطاق إذا كانت مفتوحة و مترابطة.

تعريف 7

نقول أن المعادلة التفاضلية

$$M(x, y)y' + N(x, y) = 0$$

تامة على نطاق Ω إذا وجدت دالة $F(x, y)$ معرفة على Ω بحيث

$$\frac{\partial F}{\partial x} = N(x, y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = M(x, y).$$

في هذه الحالة، إذا كانت الدالتان M, N قابلتان للإشتقاق باتصال على Ω، فإن

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}. \tag{1.4}$$

أمثلة 2. 1. إذا كان النطاق Ω مستطيلا، فالشرط 1.4 هو شرط كافٍ.

2. إذا كانت المعادلة تامة، نجد ما يلي:
$$M(x,y(x))y'+N(x,y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y' = \frac{d}{dx}F(x,y(x)) = 0.$$
و بالتالي فإن $F(x,y(x)) = c$، حيث $c \in \mathbb{R}.$
و هذا حل ضمني.

مثال 1.
لتكن المعادلة التفاضلية $2x^2yy' + 2xy^2 + 1 = 0$.
$M = 2x^2y$، $N = 2xy^2 + 1$ و $\Omega = \mathbb{R}^2$.
المعادلة التفاضلية تامة على Ω.
$$\frac{\partial N}{\partial y} = 4xy = \frac{\partial M}{\partial x}.$$
لإيجاد F نجد:
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^2 + 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2y.$$
نكامل بالنسبة للمتغير x مع ترك المتغير y ثابت، نحصل على ما يلي:
$$F(x,y) = x^2y^2 + x + f(y).$$
نشتق هذه المعادلة بالنسبة للمتغير y، و نجد ما يلي:
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2y + f'(y) = 2x^2y$$
باستخدام المعادلة الثانية فإن: $f'(y) = 0$ و بالتالي فإن $f(y)$ دالة ثابتة. حلول المعادلة التفاضلية في صيغة ضمنية هي: $x^2y^2 + x = c$.

لتكن المعادلة التفاضلية $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$. نكتب هذه المعادلة على صيغة التالية:
$y - x + (x+y)y' = 0$ وهي معادلة تامة. في هذه الحالة، حل المعادلة في صيغة ضمنية $x(y-x) + y(x+y) = c$، أي: $y^2 + 2xy - x^2 = c$.

1.3.2 عامل التكامل

إذا كانت المعادلة التفاضلية $My' + N = 0$ ليست تامة يمكن في بعض الأحيان جعلها تامة بضربها بمعامل قابل للإشتقاق باتصال و يسمى عامل التكامل.

إذا كانت g عامل التكامل، فإن $\frac{\partial(gN)}{\partial y} = \frac{\partial(gM)}{\partial x}$ و يمكن كتابته في صيغة

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) g = -M\frac{\partial g}{\partial x} + N\frac{\partial g}{\partial y}.$$

1. إذا كانت g دالة للمتغير x فقط، فإن

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right) = A(x)$$

دالة للمتغير x فقط و $g' = Ag$.

2. إذا كانت g دالة للمتغير y فقط، فإن

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) = B(y)$$

دالة للمتغير y فقط و $g' = Bg$.

لتكن المعادلة التفاضلية $(x^2y - x)y' + 2x^2 + y = 0$.

في هذه الحالة $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) = \frac{2xy-2}{x^2y-x} = \frac{2}{x}$. و بالتالي فإن $g = -\frac{1}{x^2}$ عامل التكامل و الحل العام للمعادلة التفاضلية

$2x - \frac{y}{x} + \frac{1}{2}y^2 = c$ أو $2x^2 - y + \frac{1}{2}xy^2 = cx$.

لتكن المعادلة التفاضلية: $y + (2x - ye^y)y' = 0$.

في هذه الحالة $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{-1}{y}$ و بالتالي يوجد عامل تكامل كدالة للمتغير y فقط و يحقق $\frac{g'}{g} = \frac{1}{y}$.

إذًا y عامل تكامل للمعادلة و المعادلة $y^2+(2xy-y^2e^y)y'=0$ تامة و الحل العام هو $xy^2+(-y^2+2y-2)e^y=c$.

يجب أن نحذر من أن بعض الحلول للمعادلة التامة قد تكون ليست حلول للمعادلة الأصلية. (أنظر المثال السابق)

1.4 معادلات قابلة للفصل

تعريف 8

نقول أن المعادلة التفاضلية العادية $y'=f(x,y)$ قابلة للفصل إذا كانت الدالة $f(x,y)$ هي ضرب دالتين أحداهما دالة للمتغير x و الثانية دالة للمتغير y. أي أن المعادلة التفاضلية تأخذ الصيغة التالية:

$$y'=g(x)h(y).$$

يمكن إعادة كتابة هذه المعادلة على الصيغة

$$A(x)dx+B(y)dy=0.$$

معادلات تفاضلية ذاتية $y'=f(x)$

لتكن المعادلات التفاضلية الذاتية $y'=f(x)$
حيث $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ متصلة دالة.
$y(x)=F(x)+c$ حلول لهذه المعدلة التفاضلية، حيث $c\in\mathbb{R}$ و F دالة أصلية للدالة f.

مثال 2.
لتكن المعادلة اللوجستية $y'=y(1-y)$.
$y=0$ و $y=1$ هي حلول شاذة للمعادلة التفاضلية.
إذا كان $y\neq0$ و $y\neq1$، المعادلة التفاضلية متكافئة مع المعدلة التالية: $\frac{y'}{y(1-y)}=1$.

نكامل كلا الجانبين بالنسبة للمتغير x، نحصل على ما يلي: $\ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = x + c$ أو $\frac{y}{1-y} = \lambda e^x.$

العدد $\lambda \in \mathbb{R}$ يمكن تحديده من الشرط الأولي $y(0) = y_0$. ($\lambda = \frac{y_0}{1-y_0}$).

إذًا. $y = \frac{y_0 e^x}{(1-y_0) + y_0 e^x}$

الحالة الأولى: $0 < y_0 < 1$: $\lambda > 0$. الحل $y(x) \in (0,1)$، لكل $x \in \mathbb{R}$، $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 1$ و $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$.

الحالة الثانية: $y_0 > 1$: $\lambda < 0,$, $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 1$.

الحالة الثالثة: $y_0 < 0$: $\lambda < 0,$, $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$.

مثال 3.

لتكن المعادلة $y' = xy$.

$y = 0$ حل.

إذا كان $y \neq 0$، المعادلة تصبح $\frac{dy}{dx} = xy$.

و بالتالي $\ln|y| = \frac{x^2}{2} + c,$ أو $y = \lambda e^{\frac{x^2}{2}}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

مثال 4.

من الواضح أننا قد نتعثر أحيانًا حتى لو تمكنا من القيام بالتكامل. على سبيل المثال، خذ المعادلة القابلة للفصل

$$y' = \frac{xy}{y^2+1}.$$

نفصل المتغيرات و نحصل على

$$\frac{y^2+1}{y}\,dy = \left(y + \frac{1}{y}\right)\,dy = x\,dx.$$

بعد التكامل نحصل على ما يلي: $y^2 + 2\ln|y| = x^2 + c$.
ليس من السهل العثور على الحل بشكل صريح لأنه من الصعب حله و إيجاد y. لذلك، نترك الحل على هذه الصيغة ونسميه الحل الضمني.

مثال 5.
لتكن المعادلة التفاضلية: $y' = \frac{2x-1}{y^2}$. بعد تكامل الطرفين نحصل على ما يلي: $\frac{1}{3}y^3 = x^2 - x + c$، و بالتالي

$$y = \left(3x^2 - 3x + 3c\right)^{\frac{1}{3}}.$$

مثال 6.

لتكن المعادلة التفاضلية: $y' = \frac{y-1}{x+1},$ حيث $(x > -1)$.
$y = 1$ هو حل شاذ.
إذا كان $y \neq 1$، نقسم طرفي المعادلة التفاضلية بـ $y - 1$، و نحصل على

$$\frac{y'}{y-1} = \frac{1}{x+1}.$$

و بالتالي $\ln|y-1| = \ln(x+1) + c$.
إذًا $y = 1 + \lambda(x+1)$، $\lambda \in \mathbb{R}$.

مثال 7.
لتكن المعادلة التفاضلية: $x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$، $y(1) = 0$.
هذه المعادلة متكافئة مع المعادلة التالية:

$$x^2y' = (1-x^2)(1+y^2).$$

نفصل المتغيرات و نكامل الطرفين و نحصل على

$$\tan^{-1}(y) = \frac{-1}{x} - x + c,$$

$$y = \tan\left(\frac{-1}{x} - x + c\right)$$

و بذلك يصبح حل المعادلة حسب الشرط الأولي . $y = \tan\left(\frac{-1}{x} - x + 2\right)$

مثال 8.
لتكن المعادلة التفاضلية $y' = \frac{-xy^2}{3}$.
$y = 0$ حل شاذ.
لنفرض أن $y \neq 0$،

$$\frac{-3}{y^2}y' = x, \iff \frac{3}{y} = \frac{x^2}{2} + c, \iff y = \frac{3}{\frac{x^2}{2} + c} = \frac{6}{x^2 + 2c}.$$

مثال 9.
لتكن المعادلة التفاضلية: $y' = \frac{x-5}{y^2}$.
لحل هذه المعدلة باستخدام الطريقة أعلاه، نضرب طرفي المعادلة بـ y^2 لتحصل على

$$y^2y' = (x - 5).$$

نكامل الطرفين و نحصل على $\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}x^2 - 5x + c$.
إذًا

$$y = \left[\frac{3}{2}x^2 - 15x + c_1\right]^{\frac{1}{3}}.$$

مثال 10.
لتكن المعادلة التفاضلية: $y' = \dfrac{y-1}{x+3}$، حيث $x \in (-3, +\infty)$.
$y = 1$ حل شاذ.
إذا كان $y \neq 1$، $\frac{y'}{y-1} = \frac{1}{x+3}$.
نكامل الطرفين و نحصل على

$$\int \frac{y'}{y-1}\mathrm{dx} = \int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}+3},$$

و بالتالي $\ln|y - 1| = \ln(x + 3) + c$.
إذًا الحل العام هو $y = 1 + c(x + 3)$، حيث $c \in \mathbb{R}$.

مثال 11.
لتكن المعادلة التفاضلية: $y' = \frac{y\cos x}{1+2y^2}$. بعد تحويلها للنموذج القياسي ودمج الجانبين نحصل على ما يلي:

$$\int \frac{(1+2y^2)}{y}\mathrm{dy} = \int \cos\mathrm{x}\,\mathrm{dx},$$

و بالتالي حلول المعادلة تحقق ما يلي:

$$\ln|y| + y^2 = \sin x + 1.$$

1.5 المعادلات المتجانسة

تعريف 9

نقول إن معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى متجانسة إذا كانت على الشكل التالي

$$y' = f(\frac{y}{x}), \qquad (1.5)$$

حيث $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة.

إذا كانت g حلا للمعادلة 1.5 معرف على فترة I يجب أن يحقق ما يلي:

1. $0 \notin I$، $\frac{g(x)}{x} \in J$، $\forall\, x \in I$.
2. $g'(x) = f(\frac{g(x)}{x})$، $\forall\, x \in I$.

ليكن $z = \frac{y}{x}$ أو $y = xz$، نحصل على $y' = z + xz' = f(z)$، و بالتالي فإن z تحقق المعادلة التفاضلية التالية $z' = \frac{f(z) - z}{x}$.
ليكن $\{z_j\}$ مجموعة الحلول للمعادلة $f(z) = z$. نحصل على ما يلي: $z = z_j$ و $y(x) = z_j x$ حلول. (معادلة المستقيمات التي تمر من 0)

في المجموعة المفتوحة $\{z;\ f(z)\neq z\}$ المعادلة متكافئة مع المعادلة التالية:
$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{f(z)-z}$، و هي كذلك متكافئة مع: $F(z)=\ln|x|+c=\ln|\lambda x|$،
$\lambda\in\mathbb{R}$ و F دالة أصلية للدالة $\frac{1}{f(z)-z}$ على المفتوح $]z_j,z_{j+1}[$.
نستنتج أن $z=F^{-1}(\ln\lambda x)$ حيث عائلة الحلول $C_\lambda\ y=xF^{-1}(\ln\lambda x)$ معرفة عل المجموعة $z_j<\frac{y}{x}<z_{j+1}$، $\lambda x>0$.

مثال 12.
لتكن المعادلة التفاضلية: $xy'(2y-x)=y^2$ أو $y'=\dfrac{y^2}{x(2y-x)}$.
إذا كان $x\neq 0$ و $y\neq\frac{x}{2}$، فإن $y'=\dfrac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{2y}{x}-1}$.
لتكن $z=\frac{y}{x}$، فإن $y'=xz'+z=\frac{z^2}{2z-1}$ و $xz'=\dfrac{z(1-z)}{2z-1}$.

$z=0$، $z=1$، $y=0$، $y=x$ حلول شاذة.
إذا كان $z\neq 0$ و $z\neq 1$، المعادلة متكافئة مع $\dfrac{2z-1}{z(1-z)}z'=\dfrac{1}{x}$.
إذًا $\ln|z(1-z)|=-\ln|x|+c$، $z(1-z)=\dfrac{\lambda}{x}$ و $y(x-y)=\lambda x$ أو $(y-\lambda)(x-y-\lambda)=\lambda^2$.
إذا كان $X=x-y-\lambda$ و $Y=y-\lambda$، نحصل على

$$XY=\lambda^2.$$

هذه معادلة قطع زائد و $y=\lambda$، $y=x-\lambda$ معادلات المماس.
حل ثان
ليكن $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$، حيث $r>0$ و $\theta\in\mathbb{R}$.
إذًا $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\tan\theta dr+rd\theta}{dr-r\tan\theta d\theta}$.
المعادلة التفاضلية $y'=f(\frac{y}{x})$ متكافئة مع

أو $\tan\theta dr + rd\theta = f(\tan\theta)(dr - r\tan\theta d\theta)$

$$\frac{dr}{r} = \frac{1+\tan\theta f(\tan\theta)}{f(\tan\theta)-\tan\theta}d\theta.$$

هذه المعادلة التفاضلية قابلة للفصل r و θ. الحلول الشاذة: المستقيم $\theta = \theta_j$، حيث $f(\tan\theta_j) = \tan\theta_j$.

مثال 13.
لتكن المعادلة التفاضلية $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.
إذا كان $y = xz$. المعادلة متكافئة مع $xz' = \dfrac{1+z^2}{1-z} \iff xz' + z = \dfrac{1+z}{1-z}$.
إذًا $\ln|x| + c = \tan^{-1} z - \dfrac{1}{2}\ln(1+z^2)$ أو $\tan^{-1}(\dfrac{y}{x}) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = c.$
بالستعمال الطريقة الثانية، نحصل على $\dfrac{dr}{r} = d\theta$. و بالتالي $\ln r = \theta + c$.

مثال 14.
لتكن المعادلة التفاضلية $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$.
إذا كان $y = zx$، المعادلة التفاضلية تصبح

$$xz' + z = \frac{1-z}{1+z}$$

و بالتالي

$$xz' = \frac{1-z}{1+z} - z = \frac{1-2z-z^2}{1+z}.$$

و نحصل على

$$\int \frac{(1+z)dz}{1-2z-z^2} = \ln|x| + c$$

أو $-\frac{1}{2}\ln|1-2z-z^2| = \ln|x| + c$ و $\dfrac{1}{\sqrt{|1-2z-z^2|}} = \lambda|x|.$

و نستنتج $\frac{\lambda}{x^2}$. $= z^2 + 2z - 1$ و نحل هذه المعادلة لنحصل على

$$z = -1 + \sqrt{2 + \frac{7}{x^2}}.$$

إذًا

$$y = -x + x\sqrt{2 + \frac{7}{x^2}} = -x + \sqrt{2x^2 + 7}$$

هو الحل للقيمة الأولية

$$y' = \frac{x - y}{x + y}, \quad y(1) = 2$$

إذا كان $x > 0$ و يمكن أن نثبت أن حل لكل قيمة x. و باستعمال أحادية الحل علاوة على ذلك، نثبت أن الحل الوحيد لكل قيمة x.

بالستعمال الطريقة الثاتية، نحصل على $d\theta$ $\frac{dr}{r} = \frac{\cos(2\theta) - \sin(2\theta)}{\cos(2\theta) + \sin(2\theta)}$. و بتكامل الطرفين، نحصل على $r = \frac{\lambda}{\sqrt{\cos(2\theta) + \sin(2\theta)}}$. وهي متكافئة مع $x^2 - y^2 + 2xy =$ c. ???

1.6 اختزال معادلة تفاضلية إلى الأنواع المعروفة

في بعض الأحيان يمكن عن طريق تغيير المتغير بتحويل المعادلة التفاضلية إلى أحد الأنواع المعروفة.

1.6.1 الاختزال إلى نموذج قابل للفصل (طريقة الاستبدال)

- لتكن المعادلة التفاضلية $y' = f(ax + by + c)$.

إذا كان $b = 0$ المعادلة قابلة للفصل.
إذا كانت $b \neq 0$. الاستبدال $z = ax + by + c$ يحول المعادلة إلى معادلة قابلة للفصل $z' = bf(z) + a$.

مثال 15.

لتكن المعادلة التفاضلية $y' = 1 + \sqrt{y-x}$. الاستبدال $z = y - x$، يحول المعادلة إلى $z' = \sqrt{z}$. و بالتالي $z = \left(\frac{1}{2}x + c\right)^2$ أو $y = x + \left(\frac{1}{2}x + c\right)^2$.

مثال 16.

لتكن المعادلة التفاضلية $y' = (2x + y + 1)^2$.

إذا حددنا متغير جديد $z = 2x + y + 1$. المعادلة تصبح $z' = -2 + z^2$.

نحل هذه المعادلة بطريقة المعادلات القابلة للفصل.

نلاحظ أن $z = \sqrt{2}$ و $z = -\sqrt{2}$ هما حلان للمعادلة التفاضلية.

إذا كان $z \neq \pm\sqrt{2}$، فإن $\ln\left|\frac{\sqrt{2}+z}{\sqrt{2}-z}\right| = 2\sqrt{2}x + c$ أو $\frac{\sqrt{2}+z}{\sqrt{2}-z} = \lambda e^{2\sqrt{2}x}$،

حيث $\lambda \in \mathbb{R}$. و بالتالي $z = \sqrt{2}\frac{\lambda e^{2\sqrt{2}x} - 1}{\lambda e^{2\sqrt{2}x} + 1}$.

باستخدام إلغاء الإستبدال، نحصل على $y = \sqrt{2}\frac{\lambda e^{2\sqrt{2}x} - 1}{\lambda e^{2\sqrt{2}x} + 1} - 2x - 1$، حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

- لتكن المعادلة التفاضلية

$$y' = \frac{y}{x} + g(x)h(\frac{y}{x}).$$

يمكن تحويل هذه المعادلة التفاضلية إلى معادلة قابلة للفصل بلاستبدال $z = \frac{y}{x}$.

مثال 17.

لتكن المعادلة التفاضلية $xyy' = y^2 + 2x^2$، $y(1) = 2$.

إذا كان $z = \frac{y}{x}$. فإن المعادلة تصبح على الشكل التالي: $xz' = \frac{2}{z}$ و بالتالي فإن $z^2 = 2\ln x^2 + c$ و $y^2 = 2x^2(\ln x^2 + c)$.

بما أن $y(1) = 2$، فإن $c = 1$. و بالتالي $y^2 = 2x^2(\ln x^2 + 1)$.

1.6.2 الاختزال إلى الشكل المتجانس

لتكن المعادلة التفاضلية

$$y' = \frac{ax + by + c_1}{cx + dy + c_2}, \quad ad - bc \neq 0.$$

المستقيمان ذا المعادلتان $ax + by + c_1 = 0$ و $cx + dy + c_2 = 0$ متقاطعان.
لتكن (x_0, y_0) نقطة تقاطعهما. يمكن كتابة المعادلة التفاضلية على النحو التالي:

$$y' = f\left(\frac{a(x - x_0) + b(y - y_0)}{c(x - x_0) + d(y - y_0)}\right).$$

مثال 18.

المعادلة التفاضلية

$$z' = f\left(\frac{at + bz}{ct + dz}\right) = f\left(\frac{a + b(\frac{z}{t})}{c + d(\frac{z}{t})}\right)$$

بعد التغيير $t = x - x_0$، $z = y - y_0$. هذه المعادلة متجانسة.

مثال 19.
لتكن المعادلة التفاضلية $y' = \frac{2x+y+1}{x-y+2}$.
المعادلة متكافئة مع $y' = \frac{2(x+1)+(y-1)}{(x+1)-(y-1)}$. لنأخذ الاستبدال $z = y - 1$ و $t = x + 1$.
المعادلة تصبح $z' = \frac{2t+z}{t-z} = \frac{2+(\frac{z}{t})}{1-(\frac{z}{t})}$.
إذا كان $w = \dfrac{2 + (\frac{z}{t})}{1 - (\frac{z}{t})}$، $z = t\dfrac{w-2}{w+1}$. المعادلة التفاضلية تصبح:
$\dfrac{w-2}{w+1} + \dfrac{3tw'}{(w+1)^2} = w.$ هذه المعادلة متكافئة مع:

$$\frac{3w'}{(w+1)(2+w^2)} = w'\left(\frac{1}{w+1} + \frac{1-w}{w^2+2}\right) = \frac{3}{t}.$$

إذًا

$$\ln|w+1| + \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\frac{w}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{2}\ln(w^2+2) - 3\ln|t| = c,$$

حيث $t = x+1$، $w = \dfrac{2x+y+1}{x-y+2}$.

1.7 معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الأولى

الصيغة العامة لمعادلة تفاضلية خطية برتبة أولى

$$a(x)y' + b(x)y = c(x).$$

حيث $a,\ b,\ c$ دوال متصلة على فترة I.
لنتحصل على الصيغة العادية أو الطبيعية $y' = f(x,y)$ نقسم طرفي المعادلة التفاضلية بالدالة a. و هذا خارج أصفار الدالة a.
لذلك نفرض أن الفترة I لا تحتوي على أي صفر من أصفار الدالة a. و بالتالي نحصل على الصيغة العامة أو الطبيعية لمعادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{1.6}$$

حيث a و b، دالتان متصلتان على فترة I.

1.7.1 حل للمعادلة المتجانسة

المعادلة المتجانسة للمعادلة 1.6 هي المعادلة التفاضلية التالية

$$y' = a(x)y. \tag{1.7}$$

$y=0$ حل للمعادلة. و إذا أخذنا حلا آخر ليس له أصفار نحصل على ما يلي:

$$\frac{y'}{y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\ln(y)=a(x).$$

نكامل الطرفين و نستنتج $\ln|y(x)|=A(x)+c,$ أو

$$y=\lambda e^{A(x)},$$

حيث $\lambda\in\mathbb{R}$ و A دالة أصلية للدالة a.

$\lambda e^{A(x)}$) يسمى الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة 1.7.

1.7.2 حل للمعادلة الغير متجانسة

لحل المعادلة التفاضلية 1.6، نقترح حلين

طريقة تغيير الثوابت

نظرية 3

إذا كان y_0 حلا معينا للمعادلة 1.6 و z، الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة، فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية 1.6 تكون على النحو التالي: $y=y_0+z$.

نبحث عن حل خاص للمعادلة 1.6 على الشكل التالي: $y=\lambda(x)e^{A(x)}.$

بعد الإشتقاق نجد أن $\lambda'(x)=b(x)e^{-A(x)}$ وبعد تكامل الجانبين نحصل على

$$\lambda(x)=\int_{x_0}^{x}b(t)e^{-A(t)}dt+c\quad x_0\in I.$$

إذًا $y_0=e^{A(x)}\int_{x_0}^{x}b(t)e^{-A(t)}dt$ حل خاص و الحل العام للمعادلة

$$y(x)=\lambda e^{A(x)}+e^{A(x)}\int_{x_0}^{x}b(t)e^{-A(t)}dt.$$

طريقة عامل التكامل

نضرب جزئي المعادلة التفاضلية 1.6 بدالة $c(x) \neq 0$. تصبح المعادلة $c(x)y'(x) = c(x)a(x)y(x) + c(x)b(x)$ وهي متكافئة مع المعادلة 1.6، (أي لها نفس الحلول). نختار الدالة c بحيث تكون المعادلة تامة أي:

$$c(x)y'(x) - c(x)a(x)y(x) = \frac{d}{dx}\big(c(x)y(x)\big)$$

و بالتالي الدالة c لا بد أن تحقق $c'(x) = -a(x)c(x)$ و $c(x) \neq 0$ لكل $x \in I$.
بعد تكامل هذه المعادلة الخطية المتجانسة، نحصل على $c(x) = e^{-A(x)}$، حيث A دالة أصلية للدالة a على الفترة I.
المعادلة 1.6 تصبح على النحو التالي:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\big(c(x)y(x)\big) = c(x)b(x).$$

بعد تكامل الطرفين، نحصل على

$$c(x)y(x) = \int c(x)b(x)dx + c = \int b(x)e^{-A(x)}dx + c,$$

حيث $c \in \mathbb{R}$.
الحل العام للمعادلة الخطية يصبح

$$y = e^{A(x)}\int c(x)b(x)dx + ce^{A(x)}$$

الجزئ الأول $y_0(x) = e^{A(x)}\int b(x)e^{-A(x)}dx$ يمثل حلا خاصا للمعادلة الغير المتجانسة، و الجزئ الثاني $y_1(x) = ce^{-A(x)}$ يمثل الحل العام للمعادلة المتجانسة.

مثال 20.
لتكن المعادلة التفاضلية $y' + 2xy = x$.
$c(x) = e^{x^2}$ يمثل عامل التكامل للمعادلة. و بالتالي بعد ضرب جانبي المعادلة بالدالة c،

نحصل على
$$\frac{d}{dx}(e^{x^2}y) = xe^{x^2}$$
و بعد التكامل، نجد
$$e^{x^2}y = \int xe^{x^2}dx + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + a.$$
و الحل العام للمعادلة $y = \frac{1}{2} + ce^{-x^2}$.

مثال 21.
لتكن المعادلة التفاضلية $xy' - 2y = x^3 \sin x$، $x \in (0, +\infty)$.
الصيغة الطبيعية لهذه المعادلة:
$$y' = \frac{2}{x}y + x^2 \sin x.$$
عامل التكامل لهذه المعادلة $c(x) = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$. و بالتالي تصبح المعادلة التفاضلية على النحو التالي: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{y}{x^2}\right) = x \sin x$.
إذاً $y = -x^3 \cos x + x^2 \sin x + cx^2$.

مثال 22.
لتكن المعادلة التفاضلية: $y' = 3yx^2 + x^5$، $y(0) = 1$. $y = 0$ حل خاص للمعادلة $y' = 3yx^2$.
إذا كان $y \neq 0$، و بعد التكامل، نحصل $\ln|y| = x^3 + c$ و بالتالي $y = \lambda e^{x^3}$.
باستعمال طريقة تغيير الثوابت، نحصل على $\lambda' = x^5 e^{-x^3}$.
إذاً $\lambda = -\frac{1}{3}(x^3 + 1)e^{-x^3} + c$ و الحل العام للمعادلة
$$y = -\frac{1}{3}(1 + x^3) + \lambda e^{x^3}.$$

1.7.3 معادلة برنولي

الصيغة العامة لمعادلة برنولي

$$y' + p(x)y(x) + q(x)y^{\alpha}(x) = 0, \qquad (1.8)$$

حيث $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$، $p, q \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ دالتين متصلتين.
المجموعة المفتوحة حيث تكون المعادلة التفاضلية معرفة

$$\Omega = \mathbb{R}\times]0, +\infty[= \{(x, y);\ y > 0\}.$$

بعد ضرب جانبي المعادلة بالدالة $y^{-\alpha}$، نحصل على

$$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-\alpha}(x) + q(x) = 0.$$

إذا كان $z = y^{1-\alpha}$، المعادلة متكافئة مع

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{dz}{dx}(x) + p(x)z(x) + q(x) = 0.$$

هذه المعادلة خطية بالنسبة للدالة z.

مثال 23.
لتكن المعادلة التفاضلية $y' - xy + y^2 = 0$.
يكن $z = \frac{1}{y}$، و تصبح المادلة $z' - z - 1 = 0$.
إذًا $z = \lambda e^x - 1$ و $y = \frac{1}{\lambda e^x - 1}$.

معادلة ريكاتي

الصيغة العامة لمعادلة ريكاتي هي:

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), \qquad (1.9)$$

حيث $a, b, c \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ دوال متصلة.

نفرض أن لدينا حلا خاصا y_0 للمعادلة 1.9.
ليكن $y = y_0 + z$.
تكون y حل للمعادلة 1.9 إذا و إذا فقط

$$\begin{aligned} y_0' + z' &= a(x)(y_0+z)^2 + b(x)(y_0+z) + c(x) \\ &= a(x)y_0^2 + a(x)z^2 + 2y_0a(x)z + b(x)y_0 + b(x)z + c(x). \end{aligned}$$

هذه المعادلة متكافئة مع

$$z' = a(x)z^2 + (2y_0(x)a(x) + b(x))z.$$

و هي معادلة برنولي حيث $\alpha = 2$.

مثال 24.
لتكن المعادلة التفاضلية:

$$(1-x^3)y' + x^2y + y^2 - 2x = 0.$$

نلاحظ أن $y_0(x) = x^2$ حلا خاصا للمعادلة.
ليكن $y = x^2 + z$. المعادلة التفاضلية بالنسبة للدالة z تصبح

$$(1-x^3)z' + 3x^2z + z^2 = 0.$$

إذا كان $w = \frac{1}{z}$،

$$(1-x^3)w' + 3x^2w + 1 = 0$$

أو $w' = \frac{3x^2}{1-x^3}w + \frac{1}{1-x^3}$، إذا كان $x \neq 1$.
المعادلة الخطية المتجانسة للمعادلة $\frac{w'}{w} = \frac{3x^2}{1-x^3}$.
إذًا $\ln|w| = -\ln|1-x^3| + c$ أو $w = \frac{\lambda}{1-x^3}$.
و باستعمال طريقة تغيير الثوابت، نحصل على $\frac{1}{1-x^3} = \frac{\lambda'}{1-x^3}$.
إذًا $\lambda' = 1$ و $\lambda(x) = x$.

الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية يصبح: $w(x) = \dfrac{x+\lambda}{1-x^3}$.
إذًا $y = x^2 + z = x^2 + \frac{1}{w} = x^2 + \frac{1-x^3}{x+\lambda}$ و

$$y(x) = \frac{\lambda x^2 + 1}{x+\lambda}.$$