محاضرات في الجبر المجرد

لطلاب السنة الثانية احصاء رياضي

العام الدراسي 2012 / 2013

د. وسام طلب

الفهرس

الموضوع	الصفحة

الموضوع **الصفحة**

المقدمة :

في هذا المقرر لطلاب السنة الثانية إحصاء رياضي (وهو مقرر الجبر المجرد الوحيد الذي سيدرسه طلاب الإحصاء الرياضي خلال سنواتهم الأربعة) حاولت عرض بعض المفاهيم الأساسية في الجبر المجرد، والتي لا غنى للطالب عنها، بأسلوبٍ مبسطٍ ما أمكن. فحاولت إغناء المادة بالأمثلة التوضيحية و الشروح الخاصة المبسطة لتسهيل المفاهيم المجردة، والتي في كثيرٍ من الأحيان لا يعي الطالب القصد من ورائها.

الفصل الأول يهتم بالمنطق الرياضي.

الفصل الثاني مخصص لمبادئ نظرية المجموعات. من المعلوم أن نظرية المجموعات هي حجر الأساس في علم الرياضيات عامةً وفي فرعي الاحصاء والاحتمالات خاصةً. حيث سنتعرض في هذا الفصل للمفاهيم الأساسية على المجموعات، و العمليات عليها (تقاطع، اجتماع، فرق، متممة)، وبعض خواص هذه العمليات، وأساليب البرهان على صحة متطابقة على المجموعات، كما سنتعرض لمفهومي التغطية و التجزئة لمجموعة.

الفصل الثالث مخصص لدراسة العلاقات الثنائية، و علاقات التكافؤ و الترتيب.

الفصل الرابع مخصص لدراسة التوابع وصفاتها (متباين، غامر تقابل)، و بعض خواصها الأساسية.

الفصل الخامس يتعرض لمفهوم قدرة مجموعة، و المجموعات القابلة للعد.

الفصل السادس حول خوارزمية القسمة و الأعداد الأولية.

وفي الفصل السابع والأخير تجدون مدخلاً بسيطاً لنظرية الزمر.

إن هذا العمل المتواضع يحتاج إلى المزيد من الإضافة و التنقيح، فهو قد لا يخلو من الأخطاء، و ينقصه المزيد من التوسع (و خصوصاً في بحث الزمر) و التمارين.

فأشكر لكم أي اقتراحات أو تصويبات يمكن ارسالها عبر البريد الالكتروني التالي

Wesam.talab@gmail.com

و الله من وراء القصد

دمشق 5 شباط 2013

د. وسام طلب

الفصل الأول

مبادئ جبر المنطق

1-1- القضايا
1-2- جداول الحقيقة
1-3- أدوات الربط المنطقي
1-3-1- النفي ~
1-3-2- الوصل ∧
1-3-3- الفصل ∨
1-3-4- الإقتضاء ⇐
1-3-5- التكافؤ ⇔

1-1- القضايا :

القضية هي جملة أو عبارة مفيدة (سواءً كانت جملة لغوية أو رياضية) تتصف بالصحة فقط أو الخطأ فقط ولا يمكن أن تكون صحيحة وخاطئة بنفس الوقت. كما أن نعتها بالصحة أو الخطأ لا يرتبط بأي رأيٍ شخصي أو ظرفٍ زماني أو مكاني.

أمثلة:

إن كل من العبارات التالية ليست قضية :

1. " الساعة الآن التاسعة صباحاً " ليست قضية لأنها قد تكون صحيحة أحياناً و خاطئة في أحيانٍ أخرى كون العبارة اللغوية السابقة ترتبطٌ بظرفٍ زماني.
2. " إذا كان x ينتمي إلى المجموعة A " ليست قضية لأنها ليست جملة مفيدة.
3. " أنا على بعد خمسة كيلومترات عن العاصمة دمشق " ليست قضية لأن الجملة المفيدة السابقة قد تكون صحيحة وقد تكون خاطئة وفقاً لمكان قارئها، وبالتالي فهي تتعلق بظرفٍ مكاني.
4. " الطقس جميل " عبارة مفيدة لكن ليست قضية لأنها تتعلق برأيٍ شخصي، فمن الممكن أن تكون صحيحة بالنسبة لشخصٍ ما وخاطئة من وجهة نظر شخصٍ آخر.
5. " $x + 1 = 2$ " ليست قضية لأنها صحيحة من أجل إحدى قيم x فقط.

إن كل من العبارات التالية هي قضية :

1. " $2 < 1$ " هي قضية خاطئة لنرمز لها P_1.
2. " $2 > 1$ " هي قضية صحيحة وهي نفي القضية السابقة P_1، و سنرمز لها $\sim P_1$.
3. "$3 + 4 = 7$" هي قضية صحيحة لنرمز لها P_2.
4. " $3 + 4 = 7$ و $2 < 1$" هي قضية خاطئة وسنرمز لها $P_1 \wedge P_2$.
5. " $3 + 4 = 7$ أو $2 < 1$" هي قضية خاطئة وسنرمز لها $P_1 \vee P_2$.

ملاحظة:

الكتابة التالية "$\forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$" خاطئة لأن العبارة "$\forall x \in \mathbb{N}$" ليست قضية، و أداة الربط $\Rightarrow$ يجب أن تربط بين قضيتين.

1-2- جداول الحقيقة

لتكن A, B مجموعتين جزئيتين (مثبَّتتين) من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$، و لتكن القضيتين

$$P \;:\; 2 \in A \qquad , \qquad Q \;:\; 3 \in B$$

عندئذٍ فإن كل من القضيتين السابقتين قد تكون صحيحة أو خاطئة وذلك وفق اختيار المجموعتين المثبتتين A, B .

كما أنه من الواضح أنه لدينا أربع حالات ممكنة

- P صحيحة و Q صحيحة.
- P صحيحة و Q خاطئة.
- P خاطئة و Q صحيحة.
- P خاطئة و Q خاطئة.

ويمكن أن نلخص المعلومات السابقة بالجدول التالي

Q	P
صحيحة	صحيحة
خاطئة	صحيحة
صحيحة	خاطئة
خاطئة	خاطئة

فإذا استبدلنا (اختصاراً) في الجدول السابق كلمة صحيحة بالرقم 1 وكلمة خاطئة بالرقم 0 ، نحصل على الجدول التالي والذي سندعوه جدول الحقيقة للقضيتين Q , P

Q	P
1	1
0	1
1	0
0	0

ومن أجل ثلاث قضايا R , Q , P فإن جدول الحقيقة (مؤلف من ثمان أسطر لقيم الحقيقة) هو

P	Q	R
1	1	1
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

وفي الحالة العامة فإن جدول الحقيقة لمجموعة منتهية من القضايا عددها n، سيكون مؤلفاً من 2^n سطراً (علّل ذلك !) .

1-3- أدوات الربط المنطقي

في هذه الفقرة سنتعرف على أدوات الربط المنطقي التالية

$\sim$ النفي، $\wedge$ الوصل وهي رمز الحرف "و"، $\vee$ الفصل و هي رمز "أو"، $\Rightarrow$ الاقتضاء، $\Leftrightarrow$ التكافؤ.

1-3-1- النفي $\sim$

من أجل أي قضية P، توجد قضية وحيدة " نفي P" سنرمز لها $P\sim$، وإذا كانت القضية P صحيحة فإن القضية $\sim P$ ستكون خاطئة، وإذا كانت القضية P خاطئة فإن القضية $\sim P$ ستكون صحيحة.

و بالتالي فإن جدول الحقيقة للقضيتين P , $\sim P$ هو

P	$\sim P$
1	1
0	0

فمثلاً لتكن القضية

$$P \; : \; "2 \in \mathbb{N}"$$

من الواضح أن هذه القضية صحيحة. إن نفيها هو القضية الخاطئة التالية

$$\sim P \; : \; "2 \notin \mathrm{N}" .$$

1-3-2- الوصل $\wedge$ "و"

لتكن P , Q قضيتين ما، عندئذٍ فإننا سنرمز القضية الجديدة " P و Q " كالتالي $P \wedge Q$، وتكون هذه القضية الأخيرة صحيحة فقط وفقط عندما تكون كلتا القضيتين P , Q صحيحتين، مما يعني أنه إذا كانت إحدى هاتين القضيتين (أو كلاهما) P , Q خاطئة فإن القضية $P \wedge Q$ ستكون خاطئة.

ويكون جدول الحقيقة للقضية $P \wedge Q$ هو

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

فمثلاً ليكن المستقيمان في المستوي الديكارتي

$$\Delta = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0 \} \quad , \quad \Delta' = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1 \}$$

ولنعرّف القضيتين P , P' كما يلي

P : المستقيم Δ يمر بمبدأ الاحداثيات $(0,0)$

P' : المستقيم Δ' يمر بمبدأ الاحداثيات $(0,0)$

عندئذٍ فمن الواضح أن القضية P صحيحة بينما القضية P' خاطئة. وكنا قد رمزنا للقضية " المستقيم Δ يمر بمبدأ الاحداثيات $(0,0)$ و المستقيم Δ' يمر بمبدأ الاحداثيات $(0,0)$" بالرمز $P \wedge P'$، و هذه القضية خاطئة.

1-3-3- الفصل $\vee$ "أو"

لتكن P , Q قضيتين ما، عندئذٍ فإننا سنرمز القضية الجديدة " P أو Q " كالتالي $P \vee Q$، وتكون هذه القضية الأخيرة خاطئة فقط وفقط عندما تكون كلتا القضيتين P , Q خاطئتين، مما يعني أنه إذا كانت إحدى هاتين القضيتين (أو كلاهما) P , Q صحيحة فإن القضية $P \vee Q$ ستكون صحيحة.

ويكون جدول الحقيقة للقضية $P \vee Q$ هو

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

لنأخذ المثال السابق. ليكن المستقيمان في المستوي الديكارتي

$$\Delta = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0 \} \quad , \quad \Delta' = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1 \}$$

و القضيتين P , P' المعرفتين كما يلي

P : المستقيم Δ يمر بمبدأ الاحداثيات $(0,0)$

P' : المستقيم Δ' يمر بمبدأ الاحداثيات $(0,0)$

عندئذٍ فالقضية P صحيحة بينما القضية P' خاطئة. لنرمز للقضية

" المستقيم Δ يمر بمبدأ الاحداثيات $(0,0)$ أو المستقيم Δ' يمر بمبدأ الاحداثيات $(0,0)$"

بالرمز $P \vee P'$ ، و هذه القضية صحيحة.

1-3-4- الاقتضاء $(\Rightarrow)$

لتكن P , Q قضيتين ما، عندئذٍ فإننا سنرمز القضية الجديدة "إذا P فإن Q" كالتالي $P \Rightarrow Q$،

وتكون هذه القضية صحيحة دوماً إلا في حالة واحدة فقط عندما تكون القضية P صحيحة و القضية Q خاطئة. أي أنه إذا كانت القضيتين صحيحتين فإن الاقتضاء سيكون صحيحاً، و إذا كانت القضية P خاطئة فإن الاقتضاء سيكون صحيحاً (سواءً كانت Q صحيحة أو خاطئة).

ويكون جدول الحقيقة للقضية $P \Rightarrow Q$ هو

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

قد يعتقد القارئ للوهلة الأولى أن السطر الثالث في الجدول السابق غير منطقي، لكن في الحقيقة هذا غير صحيح، فمثلاً لو أخذنا القضيتين التاليتين

$$P: \ (\forall n \in \mathbb{N}: n + n = n^2)$$

$$Q: \ (2 + 2 = 4)$$

لوجدنا أن القضية P خاطئة، والقضية Q صحيحة، و الاقتضاء $P \Rightarrow Q$ صحيح.

مثال:

اكتب جدول الحقيقة للقضية التالية

$$P \wedge (Q \vee R) \Rightarrow \sim Q \wedge R$$

ثم استنتج متى تكون القضية السابقة خاطئة.

الحل:

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$\sim Q$	$\sim Q \wedge R$	$P \wedge (Q \vee R) \Rightarrow \sim Q \wedge R$
1	1	1	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	0	1

من الجدول السابق، وبملاحظة السطرين الأول و الرابع نستنتج أنه ستكون القضية
$$P \wedge (Q \vee R) \Rightarrow \sim Q \wedge R$$

خاطئة فقط في إحدى الحالتين التاليتين

الحالة الأولى: القضايا الثلاث صحيحة.

الحالة الثانية: القضية R خاطئة، و القضيتين P, Q صحيحتين.

تمرين :

اكتب جدول الحقيقة لكلٍ من القضايا التالية

1- $P \wedge \sim Q$
2- $(\sim P \vee Q) \wedge P$
3- $(P \Rightarrow \sim Q) \wedge \sim P$
4- $\sim (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \vee P)$

1-3-5- التكافؤ $\Leftrightarrow$

لتكن P, Q قضيتين ما، عندئذٍ فإننا سنرمز القضية $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ كما يلي $P \Leftrightarrow Q$.

ويكون جدول الحقيقة للقضية $P \Leftrightarrow Q$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

نتيجة:

تكون القضيتان P, Q متكافئتان، إذا كانتا صحيحتين معاً أو خاطئتين معاً.

مثال:

تحقق من صحة التكافؤ التالي $P \Rightarrow \sim Q \quad \Leftrightarrow \quad Q \Rightarrow \sim P$

الحل:

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \Rightarrow \sim Q$	$Q \Rightarrow \sim P$	$Q \Rightarrow \sim P \quad \Leftrightarrow \quad P \Rightarrow \sim Q$
1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

ومنه فإن التكافؤ السابق صحيح دوماً.

تمرين :

ناقش صحة أو خطأ كلٍ مما يلي

1- $P \quad \Leftrightarrow \quad P \wedge (P \vee Q)$

2- $P \Leftrightarrow Q \quad \Rightarrow \quad P \wedge Q$

3- $[\ (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)\ ] \quad \Rightarrow \quad (P \Rightarrow Q)$

4- $P \quad \Rightarrow \quad [\ (P \Rightarrow Q) \Rightarrow P\ ]$

5- $P \Rightarrow Q \quad \Leftrightarrow \quad \sim P \vee Q$

$$[(P \vee Q) \Rightarrow R] \quad \Leftrightarrow \quad [(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)]$$ -6

$$[(P \wedge Q) \Rightarrow R] \quad \Leftrightarrow \quad [(P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)]$$ -7

ملاحظات هامة :

1- لإثبات صحة مبرهنة ما فيجب اثبات أن الاقتضاء التالي صحيح

$$P \Rightarrow Q$$

حيث القضية P هي الفرض والقضية Q هي الطلب. وبما أن القضيتين

$$P \Rightarrow Q \ , \qquad \sim Q \Rightarrow \sim P$$

متكافئتين، أي أن القضية

$$(P \Rightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad (\sim Q \Rightarrow \sim P)$$

صحيحة دوماً (متطابقة)، فإنه لإثبات صحة مبرهنة يكفي إثبات أن عدم تحقق الطلب يقتضي عدم تحقق الفرض ، وهذه الطريقة معروفة و تسمى طريقة نقض الفرض.

2- لإثبات تكافؤ قضيتين (أو شرطين)، يكفي إثبات أن كل منهما تقتضي الأخرى. ولإثبات تكافؤ ثلاث قضايا P, Q, R يكفي إثبات صحة القضية التالية

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow P)$$

و ذلك لأن علاقة الاقتضاء علاقة متعدية[1] (تحقق من ذلك !) ، أي أنه اذا كانت القضية التالية صحيحة $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$ فإن القضية $P \Rightarrow R$ ستكون صحيحة، وبالتالي فإنه إذا كانت القضية التالية صحيحة $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow P)$ فإن التكافؤ التالي محقق

$$P \Leftrightarrow R$$

3- بشكلٍ عام لإثبات تكافؤ عدد منتهي من القضايا $P_1, P_2, \dots, P_n$ فإنه يكفي إيجاد تبديل $S_n \ni \pi$ ، يحقق

$$\left(P_{\pi_1} \Rightarrow P_{\pi_2}\right) \wedge \left(P_{\pi_2} \Rightarrow P_{\pi_3}\right) \wedge \cdots \wedge \left(P_{\pi_n} \Rightarrow P_{\pi_1}\right)$$

[1] عند دراسة العلاقات سنتعرف على صفات علاقة على مجموعة، حيث نقول عن علاقة $\mathcal{R}$ معرفة على مجموعة A إنها متعدية إذا كان من أجل أي ثلاث عناصر $x, y, z \in A$ بحيث $x \,\mathcal{R}\, y$ و $y \,\mathcal{R}\, z$ فإن $x \,\mathcal{R}\, z$.

الفصل الثاني

مبادئ نظرية المجموعات

2-1- مفهوم المجموعة
2-2- الانتماء
2-3- الاحتواء
2-4- تساوي مجموعتين
2-5- المجموعات المنتهية و المجموعات غير المنتهية
2-6- طرق كتابة مجموعة
2-7- المجموعة الخالية و المجموعة الشاملة نسبياً
2-8- العمليات على المجموعات
2-9- خواص العمليات على المجموعات
2-10- طرق إثبات صحة متطابقة على المجموعات
2-11- أسرة المجموعات
2-12- مجموعة أجزاء مجموعة

2-1-مفهوم المجموعة:

إن للتعاريف أهمية كبيرة جداً في العلوم كافة، فقبل البدء بدراسة أي فرع من فروع العلوم يجب تثبيت التعاريف الأساسية المعتمدة فيه، وقبل بدء النقاش بين شخصين حول موضوعٍ ما، يجب تثبيت التعاريف الأساسية المتعلقة بهذا الموضوع، و إلا فقد يختلف المتناقشان ويكون كلاهما على صواب بسبب اختلافٍ في تعريفيهما لموضوعٍ ما. كما أن **كل تعريف هو تكافؤ**، أي أن كلمة "إذا" عند ورودها بالتعريف يقصد بها "إذا و فقط إذا" (if and only if) .

قاعدة : كل تعريف هو تكافؤ (إذا و فقط إذا)

فمثلاً إذا عرَّفنا الزاوية الحادة (في الهندسة المستوية للمرحلة الإعدادية) كما يلي: نقول عن الزاوية θ، في مثلثٍ ما، إنها حادة إذا كان قياسها أصغر من 90 درجة، فكلمة **إذا** هنا يقصد بها **إذا و فقط إذا**. أي أنه :

إذا كانت الزاوية θ حادة فإن قياسها أصغر من 90 درجة

و إذا كان قياس الزاوية θ أصغر من 90 درجة فإنها حادة.

ويمكن اختصار التعريف السابق بالتكافؤ التالي:

الزاوية θ حادة $\Leftrightarrow$ $\theta < 90°$

هناك حقيقة هامة جداً و هي أنه لا يمكن تعريف كل شيء في علمٍ ما. فهناك مفاهيم أولية لا تُعَرَّف، و لنأخذ، على سبيل الذكر لا الحصر، مفهومي النقطة و المجموعة. فإن قال أحدهم إن النقطة هي الأثر الذي يتركه القلم على الورقة، فهذا وصفٌ توضيحيٌ وليس تعريفاً. وقد يقال هذا الوصف عادةً للطلاب في المراحل الدراسية الأولى لتوضيح مفهوم النقطة بالنسبة لهم ليس إلا. وإن قال أحدهم لنعرّف المجموعة بأنها فئة من العناصر المختارة و المعينة تعييناً تاماً، لكان السؤال البديهي: وما تعريف الفئة، فإن قلنا تأتي هنا كلمة فئة بمعنى ثُلّة، لقيل وما معنى ثلّة، فسنقول ثلّة بمعنى عُصبة، ومن ثم عُصبة بمعنى شعبة، و هكذا...

ولما كانت المرادفات اللغوية لكلمةٍ ما (في أي لغةٍ كانت) عددها منتهي[2] فسنصل لمرحلة نعود فيها للمرادفة "مجموعة" و من هنا يتبين استحالة تعريف كلمة مجموعة.

إذاً، إن مفهوم المجموعة هو مفهومٌ بسيط، لا يُعَرَّف، يمكن إدراكه (حدسياً) في كثيرٍ من المواقف التي نصادفها في حياتنا اليومية، فمثلاً عند الحديث عن صفٍ من الطلاب، أو فريقٍ لكرة القدم، أو أسطولٍ من السفن، فمن الواضح أن في كل ما سبق، نحن نتحدث عن شيء يتألف من عدة مكونات، و قد **اصطُلِحَ علمياً** على تسمية هذا الشيء مجموعة، وعلى تسمية مكوناته عناصر هذه المجموعة.

المجموعة مفهوم أولي لا يُعرَّف

[2] لإثبات ذلك يكفي ملاحظة أن عدد كل الكلمات في لغةٍ ما سيكون منتهي. لنفرض ان لغة ما عدد أحرفها m و أن أطول كلمة فيها مؤلفة من 10 أحرف، فيكون العدد الكلي لكلمات هذه اللغة لا يتجاوز 10^m.

تستعمل عادةً الأحرف الكبيرة $A, B, X, Y, \ldots$ لترميز المجموعات، والأحرف الصغيرة[3] $a, b, x, y, \ldots$ لترميز العناصر.

وقد تم الاتفاق بين الرياضيين على وضع عناصر المجموعة بين قوسين من الشكل $\{\ldots\}$، مع ذكر عناصر المجموعة ضمن القوسين دون تكرار، ولا أهمية لترتيب العناصر بين هذين القوسين.

قاعدة: في المجموعة تكرار العناصر ممنوع، و لا أهمية لترتيب العناصر في المجموعة.

مثال:

لتكن المجموعة A هي مجموعة حروف كلمة "رياضيات"، عندئذ فإن

$$A = \{ \text{ض} , \text{أ} , \text{ت} , \text{ي} , \text{ر} \}$$

و نلاحظ أنه رغم تكرار كل من حرفي الياء و الألف مرتين في كلمة "رياضيات" إلا أنه لا يجوز تكرار أي منهما في المجموعة A، كما أنه لا أهمية لترتيب الأحرف ضمن المجموعة رغم أهمية ترتيب الأحرف ضمن الكلمة ! .

2-2- الانتماء :

إذا كان العنصر a أحد عناصر المجموعة A، فسنرمز ذلك

$$a \in A \qquad \text{أو} \qquad A \ni a$$

وسنقرأ الرمز السابق كما يلي " العنصر a ينتمي إلى المجموعة A " .

أما إذا لم يكن العنصر a أحد عناصر المجموعة A، فسنرمز ذلك

$$a \notin A \qquad \text{أو} \qquad A \not\ni a$$

وسنقرأ الرمز السابق كما يلي " العنصر a لا ينتمي إلى المجموعة A " .

كما يجب أن تكون أي مجموعة A، معينة تعييناً تاماً (أو معرّفة جيداً)، بمعنى أنه، من أجل أي عنصر x، فإن واحدة و واحدة فقط من القضيتين التاليتين تكون محققة

$$x \notin A \qquad , \qquad x \in A$$

[3] سنرى لاحقا في فقرة أسرة أجزاء مجموعة، أن العناصر ستكون مجموعات وبالتالي سنرمز للعناصر بأحرف كبيرة.

2-3- الاحتواء :

سنقول عن مجموعة ما A إنها محتواة في مجموعة أخرى B (أو A جزء من B) إذا كان كل عنصر من A ينتمي إلى B، أي إذا تحقق الاقتضاء التالي:

$$x \in A \;\Rightarrow\; x \in B$$

وفي هذه الحالة سنرمز ذلك بأحد الرمزين التاليين

$$A \subset B \qquad \text{أو} \qquad B \supset A$$

والذي يُقرأ، A محتواه في B ، أو B تحوي A .

إن الرمز السابق لا يعني أن $A \neq B$، حيث أن القضية "A محتواه في B" تكافئ القضية التالية:

$$(A = B) \qquad \vee \qquad (B \text{ محتواه تماماً في } A)$$

وفي حال كانت A محتواه تماماً في B فإننا سنرمز ذلك $A \subset_{\neq} B$.

وتكون المجموعة A غير محتواة في المجموعة B إذا وُجِدَ عنصر $a \in A$ يحقق $a \notin B$.

سنرمز ذلك

$$A \not\subset B \quad \text{أو} \quad B \not\supset A$$

2-4- تساوي مجموعتين :

نقول عن مجموعتين A , B إنهما متساويتان وسنرمز ذلك $A = B$، إذا كان لهما نفس العناصر، أي إذا كان التكافؤ التالي صحيحاً من أجل كل $x \in M$ (M المجموعة الشاملة نسبياً)

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

لبرهان تساوي مجموعتين يكفي اثبات أن كل منهما محتواه في الأخرى. ذلك لأن إثبات أن

$A \subset B$ يكافئ إثبات صحة الاقتضاء التالي $x \in A \;\Rightarrow\; x \in B$.

و إثبات الاحتواء الآخر $A \supset B$ يكافئ إثبات صحة الاقتضاء التالي $x \in A \;\Leftarrow\; x \in B$.

و بالتالي فإن إثبات أن كلاً من المجموعتين A, B محتواه في الأخرى، يكافئ إثبات صحة التكافؤ التالي

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

2-5- المجموعات المنتهية و المجموعات غير المنتهية[4] :

تعريف:

نقول عن مجموعةٍ ما A إنها منتهية إذا كانت مؤلّفة من عدد منتهي من العناصر، و في خلاف ذلك سنقول إن المجموعة A غير منتهية. سنرمز لعدد عناصر مجموعة منتهية A بالرمز $|A|$ أو $Card(A)$ وسندعوه قدرة $(cardinal)$ المجموعة A.

من أهم المجموعات غير المنتهية المجموعات التالية (والتي نذكِّر القارئ بها)

مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N} = \{\ 0\,,1\,,2\,,3\,,\ldots,n\,,\ldots\}$

مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z} = \{\ldots,-n\,,\ldots,-2\,,-1\,,0\,,1\,,2\,,\ldots,n\,,\ldots\}$

مجموعة الأعداد العادية $\mathbb{Q} = \left\{\ \frac{a}{b} :\ a\in\mathbb{Z}\ ,\ b\in\mathbb{Z}\,,b\neq 0\ \right\}$

مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$.

من الواضح أن كل من المجموعات السابقة محتواه تماماً في المجموعة التي تليها، أي أن

$$\mathbb{N} \subset_{\neq} \mathbb{Z} \subset_{\neq} \mathbb{Q} \subset_{\neq} \mathbb{R} \subset_{\neq} \mathbb{C}$$

2-6- طرق كتابة مجموعة:

يمكن عادة كتابة أي مجموعة بأحد الطريقتين التاليتين:

2-6-1- طريقة القائمة:

وذلك بذكر عناصر المجموعة بين قوسين، و تستخدم هذه الطريقة في حال كانت المجموعة منتهية وذلك بذكر جميع عناصرها إما دون استخدام نقاط بالشكل "..."، أو باستخدام النقاط في حال كان ذكر بعض العناصر المتصفة بصفة أو خاصة مشتركة يكفي لاستنتاج باقي العناصر.

فمثلاً لتكن A هي مجموعة الأعداد الأولية الأصغر من 10، B مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية الأصغر من 99 ، C مجموعة قوى[5] العدد 2، عندئذٍ فيمكن كتابة كل من المجموعات السابقة بطريقة القائمة كما يلي

$$A = \{2,3,5,7\}$$

$$B = \{2,4,6,8,\ldots,94,96,98\ \}$$

---

[4] سندرس في فقرةٍ لاحقة (بعنوان قدرة مجموعة) المجموعات غير المنتهية بمزيدٍ من التفصيل.

[5] من أجل أي عددين طبيعيين مغايرين للصفر m,n ندعو العدد m^n قوة للعدد m أسها n .

$$C = \{1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots\}$$

2-6-2- طريقة القاعدة :

وذلك بكتابة أي مجموعة بالشكل التالي { القضية $P(x)$ صحيحة : x } = A

أي مجموعة العناصر التي تحقق قضية معينة فالمجموعات السابقة A, B, C يمكن كتابتها باستخدام طريقة القاعدة كما يلي

$$A = \left\{ x : (0 < x < 10) \wedge \left(x \text{ عدد أولي} \right) \right\}$$

$$B = \left\{ x : (0 < x < 99) \wedge \left(x \text{ عدد زوجي} \right) \right\}$$

$$C = \{ x : \exists\, n \in \mathbb{N} ;\; x = 2^n \}$$

أو

$$C = \{ 2^n : \; n \in \mathbb{N} \}$$

مثال :

لتكن المجموعة A هي مجموعة قواسم العدد 12، المجموعة B هي مجموعة الأعداد الطبيعية المضاعفة للعدد 3، عندئذٍ فإن A منتهية بينما B غير منتهية، حيث

$$A = \{1,2,3,4,6,12\}, \quad B = \{0,3,6,9,12,\dots,3n,\dots\}$$

كما يمكن أن نكتب المجموعة B بالطريقة التالية

$$B = \{ n \in \mathbb{N} : n \text{ مضاعف للعدد } 3 \}$$

حيث تقرأ الكتابة الأخيرة كما يلي:

المجموعة B تساوي مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث n مضاعف للعدد 3 .

2-7- المجموعة الخالية و المجموعة الشاملة نسبياً:

ليكن c عدد حقيقي مثبت ، و لتكن B مجموعة حلول المعادلة $x^2 - 2x + c = 0$ في $\mathbb{R}$ ، إن المجموعة السابقة معرفة جيداً، لكن قد تكون المجموعة السابقة خالية من العناصر (في حال $c > 1$)، وهذا ما يبرر لنا تعريف المجموعة الخالية والتي سنرمز لها $\emptyset$ أو { }، و هي مجموعة لا تحوي أي عنصر (أي مجموعة خالية من العناصر). كما سنرمز M للمجموعة الشاملة نسبياً، أي يمكن اعتبار كل المجموعات التي نتعامل معها مجموعات جزئية من المجموعة الشاملة نسبياً M . وعندئذٍ فإن القضية

$$x \in M$$

ستكون صحيحة دوماً، والقضية

$$x \in \emptyset$$

ستكون خاطئة دوماً، وذلك مهما يكن العنصر x .

مبرهنة:

1- إن المجموعة الخالية محتواه في أي مجموعة أخرى.
2- المجموعة الخالية وحيدة.

الإثبات:

1- لنفرض جدلاً أن المجموعة الخالية ليست محتواه في مجموعة ما B، وبالتالي يوجد $x \in \emptyset$ بحيث $x \notin B$، وهذا مستحيل. إذا الفرض الجدلي خاطئ وبالتالي المجموعة الخالية محتواه في أي مجموعة.
2- لنفرض وجود مجموعتين خاليتين $\emptyset, \emptyset'$ ، عندئذٍ بالاعتماد على الفقرة 1 من هذه المبرهنة، المجموعة الخالية محتواه في أي مجموعة و منه $\emptyset \subset \emptyset'$ و $\emptyset' \subset \emptyset$ ، إذاً $\emptyset = \emptyset'$. ■

2-8- العمليات على المجموعات:

لنعرّف كلاً مما يلي

- **تقاطع** المجموعتين A, B، ورمزه $A \cap B$، بأنه مجموعة العناصر التي تنتمي إلى كلٍ من المجموعتين A, B بآنٍ واحد، أي أن
$$A \cap B := \{ x \in M : \ (x \in A) \wedge (x \in B) \}$$
- **اجتماع** المجموعتين A, B ، ورمزه $A \cup B$، بأنه مجموعة العناصر التي تنتمي إلى إحدى المجموعتين A, B (أو كليهما)، أي أن
$$A \cup B := \{ x \in M : \ (x \in A) \vee (x \in B) \}$$
- **فرق** المجموعتين A و B (أو المجموعة A فرق المجموعة B) ، ورمزه $A \setminus B$، بأنه مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A ولا تنتمي إلى المجموعة B، أي أن
$$A \setminus B := \{ x \in M : \ (x \in A) \wedge (x \notin B) \}$$
- **الفرق التناظري** للمجموعتين A, B ، ورمزه $A \Delta B$، بأنه مجموعة العناصر التي تنتمي إلى إحدى المجموعتين A, B دون أن تنتمي إلى المجموعة الأخرى، أي أن
$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
- **الجداء الديكارتي** للمجموعتين A, B، ورمزه $A \times B$ ، هو مجموعة الثنائيات والتي مسقطها الأول من المجموعة A ومسقطها الثاني من المجموعة B ، أي أن
$$A \times B := \{ (x, y) : \ (x \in A) \wedge (y \in B) \}$$
- **متممة** (complement) المجموعة A في المجموعة الشاملة نسبياً M، ورمزها A^c، بأنه مجموعة عناصر M التي تقع خارج A ، أي أن
$$A^c := M \setminus A = \{ x \in M : x \notin A \}$$
- **الجداء الديكارتي لعدد منته من المجموعات** $A_1, A_2, \dots, A_n$، يعرّف كما يلي
$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{ (x_1, \dots, x_n) \ : \ x_i \in A_i \, ; \forall \, i \in \{1,2, \dots, n\} \}$$

ملاحظات:

1- سنرمز للجداء الديكارتي للمجموعة A بنفسها k مرة بالرمز A^k. فمثلاً الجداء الديكارتي لمجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بنفسها ثلاث مرات سنرمز له $\mathbb{R}^3$ بدلاً من $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2- إن المجموعات التالية غير متساوية

$$(A \times B) \times C , \qquad A \times (B \times C) , \qquad A \times B \times C$$

3- من أجل أي مجموعة A فإن

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

4- من أجل أي مجموعتين غير خاليتين A , B فإن

$$A \times B = B \times A \quad \Leftrightarrow \quad A = B$$

5- نقول عن مجموعتين A , B إنهما **منفصلتان** إذا كان تقاطعهما خال، أي أن

$$A \cap B = \emptyset$$

مثال:

لتكن المجموعتين $A = \{1,2,4,5\}$, $B = \{2,3,4\}$ عندئذٍ فإن

$$A \cap B = \{ 2, 4 \}, \qquad A \cup B = \{1,2,3,4,5\},$$

$$A \setminus B = \{1,5\}, \qquad B \setminus A = \{3\}, \qquad A \Delta B = \{1,3,5\},$$

$$A \times B = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(4,2),(4,3),(4,4),(5,2),(5,3),(5,4)\}$$

تمرين:

لتكن المجموعتين A, B المعطتين بالمثال السابق، ولتكن المجموعة $C = \{ 1, 4 \}$ ، أوجد المجموعتين

$$A \cap (B \cap C) , \qquad (A \cap B) \cap C$$

ثم تحقق أن

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

تمرين :

ليكن المجالين المغلقين $[2,4]$, $[1,3]$ ، ارسم المجموعة التالية في المستوي الديكارتي

$$[1,3] \times [2,4]$$

2-9- خواص العمليات على المجموعات:

من أجل أي مجموعتين A, B يمكن إثبات أن

$$A \cap B = B \cap A$$

و سنقول إن التقاطع تبديلي.

لإثبات ذلك[6] يكفي ملاحظة أن التكافؤ التالي صحيح دوماً (نعلم ذلك من الفصل السابق)

$$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$$

وبالتالي فإن

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B) \Leftrightarrow (x \in B) \wedge (x \in A) \Leftrightarrow x \in B \cap A$$

سنلخّص جميع خواص العمليات على المجموعات بالمبرهنة التالية، والتي سندعوها المبرهنة الأساسية في جبر المجموعات.

مبرهنة:

لتكن A, B, C أي ثلاث مجموعات من المجموعة الشاملة نسبياً M، عندئذٍ فإن الخواص التالية محققة

1- اللانمو :

$$A \cap A = A \ , \ A \cup A = A$$

2- التبديلية :

$$A \cup B = B \cup A \ , \ A \cap B = B \cap A$$

3- التجميعية :

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

4- التوزيع :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

5- المحايد :

$$A \cap M = A \ , \qquad A \cup \emptyset = A$$

6- الماص :

$$A \cup M = M \ , \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$$

7- الإتمام :

$$A \cap A^c = \emptyset, \qquad A \cup A^c = M, \qquad M^c = \emptyset, \qquad \emptyset^c = M$$

8- الارتداد :

$$(A^c)^c = A$$

9- دومرغان :

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \ , \ \ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

[6] تدعى هذه الطريقة طريقة العناصر في الاثبات على صحة متطابقة بين المجموعات.

إثبات هذه المبرهنة يترك كتمرين للقارئ، حيث يمكن التحقق من صحة المتطابقات السابقة باستخدام جداول الحقيقة أو باستخدام العناصر، و الفقرة التالية تشرح ذلك

10-2- طرق إثبات صحة متطابقة على المجموعات:

يمكن برهان صحة متطابقة بين المجموعات بإحدى الطرق الثلاث التالية

- باستخدام جداول الحقيقة.
- باستحدام طريقة العناصر (الطريقة الكلاسيكية).
- باستخدام قوانين جبر المجموعات (القواعد الواردة في المبرهنة الأخيرة).

سنقوم الآن بحل مثال توضيحي باستخدام الطرق الثلاثة

مثال:

أثبت أنه من أجل أي مجموعتين A, B فإن

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$$

الحل :

الطريقة الأولى باستخدام جداول الحقيقة

من أجل أي عنصر x من المجموعة الشاملة نسبياً M، إذا كان العنصر x ينتمي إلى المجموعة A سنضع 1 في جدول الحقيقة و إذا كان لا ينتمي سنضع 0.

مهما يكن العنصر x من M، ومهما تكن المجموعتين A, B . لدينا أربع حالات ممكنة :

- الحالة الأولى (تمثل السطر الأول في جدول الحقيقة) : $(x \in A) \wedge (x \in B)$
- الحالة الثانية (تمثل السطر الثاني في جدول الحقيقة) : $(x \in A) \wedge (x \notin B)$
- الحالة الثالث (تمثل السطر الثالث في جدول الحقيقة) : $(x \notin A) \wedge (x \in B)$
- الحالة الرابعة (تمثل السطر الرابع في جدول الحقيقة) : $(x \notin A) \wedge (x \notin B)$

A	B	$A \cap B$	$A \setminus B$	$(A \setminus B) \cup (A \cap B)$
1	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	0	0	0
0	0	0	0	0

بمقارنة العمودين الأول و الأخير نستنتج أنه من أجل كل $x \in M$ فإن

$$x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A$$

وبالتالي فإن

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$$

الطريقة الثانية باستخدام العناصر (الطريقة الكلاسيكية)

لنبرهن صحة التكافؤ التالي

$$x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B) \iff x \in A$$

لدينا

$$x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B) \iff (x \in A \setminus B) \vee (x \in A \cap B)$$

$$\iff (x \in A \wedge x \in B^c) \vee (x \in A \wedge x \in B)$$

$$\iff (x \in A) \wedge (x \in B^c \vee x \in B)$$

(وذلك يعود لخواص الوصل و الفصل بين القضايا[7])

$$\iff (x \in A) \wedge (x \in B^c \cup B)$$

$$\iff (x \in A) \wedge (x \in M)$$

$$\iff x \in A \cap M$$

$$\iff x \in A$$

الطريقة الثالثة باستخدام قوانين جبر المجموعات

تعتمد هذه الطريقة على استخدام خوص العمليات على المجموعات الواردة في المبرهنة الأخيرة (مثل الخاصة التبديلية، التجميعية، التوزيع، دومرغان،...ألخ)

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$$

$= A \cap (B^c \cup B)$ خاصة توزيع التقاطع على الاجتماع

$= A \cap M$ خواص الاتمام

$= A$ لأن M هو حيادي التقاطع

[7] هذه الخطوة تعتمد على التكافؤ التالي بين القضايا

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \iff P \wedge (Q \vee R)$$

2-11- أسرة المجموعات:

نقول عن مجموعة ما X إنها أسرة مجموعات (أو مجموعة مجموعات أو جماعة مجموعات)، إذا كان كل عنصر من عناصر X هو مجموعة.

فمثلاً المجموعة $A = \{ \{1,2\}, \emptyset \}$ هي أسرة مجموعات، بينما المجموعة $B = \{ \{1,2\}, 3 \}$ ليست كذلك. وفي هذه الحالة قد يكون لدينا $B \in X$ حيث X, B مجموعتين !

2-12- مجموعة أجزاء مجموعة:

لتكن A مجموعة ما، نعرّف مجموعة أجزاء المجموعة A، ونرمز لها $P(A)$ أو 2^A، بأنها أسرة المجموعات الجزئية من A، أي أن

$$P(A) = \{ B : \ B \subset A\}$$

فمثلاً إذا كانت $A = \{1,2,3\}$ فإن

$$P(A) = \{ \ \emptyset , \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \ \}$$

إن قدرة المجموعة السابقة (أي عدد عناصرها) هو $|P(A)| = 8 = 2^3$.

وسنرى لاحقاً أنه بشكلٍ عام إذا كانت المجموعة A منتهية وعدد عناصرها n ، فإن عدد أجزائها 2^n ، أي أن

$$A \text{ منتهية } \Rightarrow \quad |p(A)| = 2^{|A|}$$

مبرهنة:

لتكن A مجموعة منتهية عدد عناصرها n ، وليكن k أي عدد طبيعي بحيث $0 \le k \le n$ ، عندئذٍ

1- إن عدد المرتبات في A من الحجم k هو $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$، أي أن

$$Card\{(x_1, \dots x_k) \in A^k : \ 1 \le i \neq j \le k \Rightarrow \ x_i \neq x_j\} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

2- إن عدد أجزاء المجموعة A والتي يحوي كل منها k عنصراً، هو

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \ \ (n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

3- إن عدد المجموعات الجزئية من $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ هو 2^n ، أي أن $|p(A)| = 2^{|A|}$.
وهذا ما يبرر ترميز أسرة أجزاء A بالرمز 2^A، وعندها سيكون

$$|\ 2^A\ | = 2^{|A|}$$

الإثبات:

1- لإيجاد عدد المرتبات من الحجم k ، أي عدد عناصر المجموعة

$$\{(x_1, \dots x_k) \in A^k : x_i \neq x_j \; ; \; \forall \; 1 \leq i \neq j \leq k\}$$

يكفي ملاحظة أن عدد طرق اختيار المسقط الأول x_1 هو n (عدد عناصر A)، ومن ثم عدد طرق اختيار المسقط الثاني x_2 هو $n-1$ (عدد عناصر $\{x_1\} \setminus A$)، و عدد طرق اختيار المسقط الثالث x_3 هو $n-2$ (عدد عناصر $\{x_1 , x_2\} \setminus A$) ، وهكذا... حتى نجد عدد طرق اختيار المسقط الأخير x_k هو $n-(k-1) = n-k+1$ (عدد عناصر $\{x_1, x_2 , \dots , x_{k-1}\} \setminus A$). إذاً حسب المبدأ الأساسي في العد، يكون عدد طرق اختيار المرتبة $(x_1, \dots x_k)$ من المجموعة A هو

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

2- إن كل مجموعة جزئية من A تحوي k عنصر ستقابل $k!$ مرتبة من الحجم k .

فإذا رمزنا C_n^k لعدد المجموعات الجزئية من A التي تحوي k عنصر، نجد أن

$$|\{(x_1, \dots x_k) \in A^k : x_i \neq x_j \; ; \; \forall \; 1 \leq i \neq j \leq k\}| = k! \times C_n^k$$

و بالتالي فإن عدد المجموعات الجزئية من المجموعة A والتي تحوي k عنصر هو

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

3- حسب الفقرة 2 من هذه المبرهنة، عدد المجموعات الجزئية من مجموعة مكونة من n

عنصر والتي تحوي i عنصر هو $\binom{n}{i}$ ، حيث $0 \leq i \leq n$، من أجل $i = 0$ نحصل على المجموعة الخالية، ومن أجل $i = n$ نحصل على A.

و بالتالي فإن العدد الكلي للمجموعات الجزئية من مجموعة مكونة من n عنصر هو $\sum_{0 \leq i \leq n} \binom{n}{i}$

لكن نعلم من منشور الكرخي- نيوتن أن

$$(a+b)^n = \sum_{0 \leq i \leq n} \binom{n}{i} a^i \, b^{n-i}$$

ومنه فإن

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{0 \leq i \leq n} \binom{n}{i} 1^i \, 1^{n-i} = \sum_{0 \leq i \leq n} \binom{n}{i}$$

أي أن عدد المجموعات الجزئية من مجموعة مكونة من n عنصر هو 2^n . ■

الفصل الثالث

العلاقات الثنائية

1-3- العلاقة الثنائية بين مجموعتين:

تمهيد:

لتكن A مجموعة سكان الكرة الأرضية و B مجموعة بلدان الكرة الأرضية (معرفتين في لحظة مثبّتة[8]).
إذا كان شخصٌ ما من المجموعة A له جنسية[9] إحدى الدول فسنقول إن هناك علاقة تربط بين هذا الشخص و تلك الدولة، فمثلاً إذا كان للشخص $x \in A$ الجنسية الفرنسية و المصرية فسنقول إن هناك علاقة ثنائية (تدعى ثنائية لأنها تربط بين اثنين من العناصر) تربط بين العنصر x والدولة التي يملك جنسيتها، أي هناك علاقة بين العنصر x من المجموعة A والعنصرين فرنسا ومصر من المجموعة B .

مثال آخر، لنأخذ مجموعة طلاب مدرسة ما و لتكن A ، ومجموعة مدرسي تلك المدرسة ولتكن B ، من الواضح أن هناك علاقة بين المجموعتين السابقتين، حيث أنه يرتبط كل طالب والأساتذة التي تدرِّسه، فالطالب x يرتبط به المعلم y إذا و فقط إذا كان المعلم y يدرِّس الطالب x مادة ما في تلك المدرسة و سنرمز لذلك $x \mathcal{R} y$.

وفي هذه الحالة سندعو مجموعة الطلاب منطلق العلاقة، ومجموعة المدرسين مستقر العلاقة، وسندعو المجموعة $G = \{ (x,y) \in A \times B : \quad x \mathcal{R} y \}$ بيان العلاقة.

فبمعرفة المجموعة G تصبح العلاقة $\mathcal{R}$ **بيِّنةً** واضحة و معرَّفةً بشكلٍ تام (لذلك دعونا G بيان العلاقة).

كل ما سبق يمهد لوضع التعريف العام لمفهوم العلاقة الثنائية بين مجموعتين.

تعريف:

لتكن A, B أي مجموعتين غير خاليتين، سندعو أي ثلاثية $\mathcal{R} = (A, B, G)$، حيث $G \subset A \times B$، علاقة ثنائية بين عناصر المجموعة A وعناصر المجموعة B (أو اختصاراً: علاقة بين A و B)،
سندعو A منطلق العلاقة، B مستقر العلاقة، G بيان العلاقة أو قاعدة ربطها.

وإذا كان $(x, y) \in G$ فإننا سنرمز ذلك $x \mathcal{R} y$ ، و سنقول أحد العبارات التالية (المتكافئة) :

- العنصر y يقابل العنصر x وفق العلاقة $\mathcal{R}$.

---
[8] من الضروري جداً أن تكون اللحظة مثبّتة لكي تكون A مجموعة ! و إلا فسيكون هناك عناصر جديدة تظهر في المجموعة (المواليد الجدد على سطح الكرة الأرضية) وعناصر أخرى تختفي من المجموعة (الوفيات الجدد).
[9] في الواقع قد يكون هناك أشخاص على هذه الكرة الأرضية بدون جنسية وفي هذه الحالة فإنهم لن ترتبط بهم أية دولة وفق هذه العلاقة.

- العنصر y يرتبط [10] بالعنصر x وفق العلاقة $\mathcal{R}$.
- العنصر x يرتبط به العنصر y وفق العلاقة $\mathcal{R}$.

و سنمثل ذلك بالرسم بخروج سهم من x إلى y. أما إذا لم تكن القضية $x\,\mathcal{R}\,y$ محققة، فإننا سنقول إن y لا يقابل x وفق العلاقة $\mathcal{R}$، أو x لا يرتبط به y، و سنرمز ذلك $x \sim \mathcal{R} \;\; y$.

تتساوى علاقتان إذا كان لهما نفس المنطلق و المستقر والبيان (أي نفس قاعدة الربط).

فمثلاً لنعرّف العلاقة التالية[11] $\mathcal{R} = (\,\mathbb{N}\,,\ \mathbb{R}\,,\ \{(n,\sqrt{n}\,) : n \in \mathbb{N}\ \}\ )$، إذاً من أجل كل عدد طبيعي x وكل عدد حقيقي y فإن

$$x\,\mathcal{R}\,y \;\Leftrightarrow (x,y) \in G \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x} = y$$

فسيكون على سبيل المثال $9\,\mathcal{R}\,3\,,\;\; 7\,\mathcal{R}\,\sqrt{7}\,,\;\; 4\,\mathcal{R}\,2$ لكن $2\;\; \sim \mathcal{R}\;\; 3$.

لنأخذ مثالاً آخر، لنزود مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، بالعلاقة التالية

$$\forall\, x\,, y \in \mathbb{R} :\;\; x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow y = x^2$$

عندئذٍ فإن بيان هذه العلاقة هو

$$G = \{\;(x,y) \in \mathbb{R} :\;\; y = x^2\;\}$$

أي أن المجموعة G هي مجموعة نقاط **المنحني البياني** للقطع المكافئ الذي معادلته $y = x^2$.

كذلك إذا زودنا مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بعلاقة المساواة، فإننا نجد أن بيان هذه العلاقة هو مجموعة نقاط المستقيم $y = x$ منصف الربع الأول في المستوي الديكارتي.

[10] قد يعتقد القارئ للوهلة الأولى أن هذه القراءة خاطئة، لكنها صحيحة تماماً، فالقاعدة اللغوية تقول "الباء يلحق بالمتروك" و دليل ذلك قوله تعالى: "أتستبدلون الذي هو أدنى بالذي هو خير".

[11] سنرى لاحقاً أن هذه العلاقة هي نوع خاص من العلاقات، حيث كل عنصر من المنطلق يخرج منه سهم وحيد، سندعو هذا النوع من العلاقات توابع. وهذه العلاقة تمثل تابع الجذر $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\ ;\ n \mapsto \sqrt{n}$.

2-3 تمثيل العلاقات الثنائية (Representation of binary relations)

يمكن تمثيل أي علاقة ثنائية $\mathcal{R} = (A, B, G)$ بأحد الطريقتين التاليتين

1-2-3 ديكارتياً :

حيث نمثل منطلق العلاقة A بمحور أفقي $\overrightarrow{ox}$، ومستقر العلاقة B بمحور شاقولي $\overrightarrow{oy}$، ومن ثم إذا كان $x \in A , y \in B$ يحققان $x \, \mathcal{R} \, y$، فإننا سنرسم النقطة (x, y) في المستوي الديكارتي، وبالتالي فإن المنحني البياني الناتج عن رسم جميع النقاط (x, y) التي تحقق $x \, \mathcal{R} \, y$ هو G بيان هذه العلاقة.

2-2-3 باستخدام مخططات فن (Venn diagrams):

فيمكننا تمثيل العلاقة $\mathcal{R} = (A, B, G)$ باستخدام مخططات Venn، بأن نرسم المجموعتين A , B و من ثم نرسم سهماً موجهاً من العنصر $x \in A$ إلى العنصر $y \in B$ في حال كان $x \, \mathcal{R} \, y$.

وفي حال كان منطلق العلاقة هو مستقرها، فيكفي رسم مجموعة واحدة ورسم الأسهم ضمنها.

3-3- علاقات ثنائية خاصة:

1-3-3- علاقة المساواة:

يمكن تزويد أي مجموعة غير خالية A بالعلاقة $\mathcal{R}_=$ المعرفة كما يلي :

$$\forall \, x , y \in A : (\, x \, \mathcal{R}_= \, y \iff x = y \,)$$

سندعو هذه العلاقة علاقة المساواة على المجموعة A ، و بتمثيل هذه العلاقة ديكارتياً نجد أن بيانها يقابل نقاط منصّف الربع الأول في المستوي. وبتمثيلها باستخدام مخططات فن فإن كل عنصر سيرتبط وفقط سيرتبط بنفسه (أي سيشكل عقدة).

2-3-3- العلاقة الخالية:

العلاقة الخالية التي منطلقها المجموعة A، ومستقرها المجموعة B، هي العلاقة التالية

$$\mathcal{R}_{\emptyset} := (A, B, \emptyset)$$

أي أن $G = \emptyset$، وبالتالي فإنه من أجل كل $x \in A , y \in B$ فإن x لا يرتبط به y .

3-3-3- العلاقة التامة:

العلاقة التامة التي منطلقها المجموعة A، ومستقرها المجموعة B، هي العلاقة التالية

$$\mathcal{R}_c := (A, B, A \times B)$$

أي أنه من أجل كل $x \ni A$, $y \ni B$ فإن $x \mathcal{R} y$.

3-4- صفات العلاقة الثنائية على مجموعة:

لتكن $\mathcal{R} = (A, A, G)$ علاقة معرّفة على مجموعة غير خالية A ، أي أن منطلق العلاقة هو مستقرها A، عندئذٍ قد تتصف العلاقة بأحد الصفات التالية

3-4-1- الصفة الانعكاسية (Reflexive)

نقول عن العلاقة $\mathcal{R} = (A, A, G)$ ، المعرّفة على المجموعة A، إنها انعكاسية إذا كان كلُّ عنصرٍ من المجموعة A يرتبط بنفسه وفق تلك العلاقة، أي إذا تحقق الشرط التالي

$$\forall\, x \in A : x \,\mathcal{R}\, x$$

بمعنى آخر، عند تمثيل العلاقة الانعكاسية باستخدام مخططات Venn وبرسم مجموعة واحدة، فإن كل عنصر سيخرج منه سهم و ينعكس عائداً إليه. وعند تمثيل العلاقة الانعكاسية ديكارتياً فيجب أن يحوي بيان العلاقة جميع نقاط منصف الربع الأول، أي جميع النقاط من الشكل (x, x) حيث $x \ni A$.

3-4-2- الصفة التناظرية (Symmetric)

نقول عن العلاقة $\mathcal{R} = (A, A, G)$ ، إنها تناظرية إذا كان ارتباطُ أيِّ عنصرٍ أول من المجموعة A بعنصرٍ ثانٍ (وفق العلاقة $\mathcal{R}$) سيقتضي ارتباط العنصر الثاني بالعنصر الأول (وفق تلك العلاقة). أي أنه تكون العلاقة $\mathcal{R}$ تناظرية إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي

$$\forall\, x, y \in A : (\, x \,\mathcal{R}\, y \;\Rightarrow\; y \,\mathcal{R}\, x \,)$$

و الشرط السابق يكافئ (وضوحاً) الشرط التالي

$$\forall\, x, y \in A : (\, x \,\mathcal{R}\, y \;\Leftrightarrow\; y \,\mathcal{R}\, x \,)$$

بكلامٍ مكافئ فإنه من أجل أي عنصرين مختلفين، يجب أن تتحقق واحدة فقط من الحالتين التاليتين: إما أن لا يخرج أي سهم بين العنصرين و بأي اتجاهٍ كان، أو أن يخرج سهمين بين العنصرين.

عند تمثيل العلاقة التناظرية باستخدام مخططات Venn وبرسم مجموعة واحدة، فإنه إذا خرج سهم من العنصر x إلى العنصر y، فيجب أن يخرج سهم من y إلى x. وعند تمثيل العلاقة التناظرية ديكارتياً فيجب أن يكون بيان العلاقة متناظراً بالنسبة إلى منصف الربع الأول، أي أنه إذا كان بيان العلاقة G يحوي النقطة (x,y)، فإنه يجب أن يحوي نظيرتها (y,x) بالنسبة لمنصف الربع الأول.

3-4-3- الصفة المتعدية (Transitive)

نقول عن العلاقة $\mathcal{R} = (A,A,G)$ ، إنها متعدية إذا تحقق ما يلي من أجل أي ثلاث عناصر من المجموعة A :

إذا كان العنصر الأول يرتبط به العنصر الثاني و العنصر الثاني يرتبط به العنصر الثالث، فإن العنصر الأول سيرتبط به العنصر الثالث (دوماً وفق العلاقة $\mathcal{R}$). أي إذا تحقق ما يلي

$$\forall\, x,y,z \in A : (\, x\,\mathcal{R}\,y \;\wedge\; y\,\mathcal{R}\,z \;\Rightarrow\; x\,\mathcal{R}\,z\,)$$

بمعنى آخر، عند تمثيل العلاقة المتعدية باستخدام مخططات Venn، فإنه إذا خرج سهم من العنصر x إلى العنصر y، و خرج سهم من العنصر y إلى العنصر z، فيجب أن يخرج سهم من x إلى z. وعند تمثيل العلاقة المتعدية ديكارتياً فيجب أن يحقق بيان العلاقة G مايلي:

من أجل كل نقطتين $M(x,y)\,, N(y,z) \in G$ فإن النقطة الناتجة عن تقاطع المستقيمين D_M, D'_N ستنتمي إلى G، حيث D_M هو المستقيم المار بالنقطة M والموازي للمحور $\overrightarrow{oy}$ ، D'_M هو المستقيم المار بالنقطة N والموازي للمحور $\overrightarrow{ox}$.

4-4-3- الصفة التخالفية (Antisymmetric)

نقول عن العلاقة $\mathcal{R} = (A,A,G)$ ، إنها تخالفية إذا كان ارتباطُ أيِّ عنصرٍ أول من المجموعة A بعنصرٍ ثانٍ مختلف عنه (وفق العلاقة $\mathcal{R}$) سيقتضي عدم ارتباط العنصر الثاني بالعنصر الأول (وفق تلك العلاقة). أي أنه تكون العلاقة $\mathcal{R}$ تخالفية إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي

$$\forall\, x,y \in A : (\, x\,\mathcal{R}\,y \;\wedge\; x \neq y \;\Rightarrow\; y \sim\mathcal{R}\; x\,)$$

والذي يكافئ الشرط التالي

$$\forall\, x,y \in A : \;(\, x\,\mathcal{R}\,y \;\wedge\; y\,\mathcal{R}\,x \;\Rightarrow\; x = y\,)$$

بمعنى آخر، عند تمثيل العلاقة التخالفية باستخدام مخططات Venn، فإنه إذا خرج سهم من العنصر x إلى العنصر y (الذي لا يساويه)، فيجب أن لا يخرج سهم من y إلى x. بكلامٍ مكافئ فإنه من أجل أي عنصرين مختلفين، يجب أن تتحقق واحدة فقط من الحالتين التاليتين: إما أن لا يخرج أي سهم بين العنصرين و بأي اتجاهٍ كان، أو أن يخرج سهم واحد فقط من أحد العنصرين إلى العنصر الآخر.

عند تمثيل العلاقة التخالفية ديكارتياً فيجب أن تكون أي مجموعة جزئية غير خالية (باستثناء النقاط الواقعة على منصف الربع الأول) من بيان العلاقة غير متناظرة بالنسبة إلى منصف الربع الأول، وهذا يكافئ ما يلي:

إذا كان بيان العلاقة التخالفية G يحوي نقطة ما (x, y) حيث $x \neq y$، فإنه لن يحوي نظيرتها (y, x) بالنسبة لمنصف الربع الأول.

ملاحظة هامة:

1 - قد يعتقد القارئ للوهلة الأولى أن شرط التخالفية هو عكس شرط التناظرية، أي أنه قد يعتقد أن العلاقة إذا لم تكن تناظرية فهي تخالفية، أو إذا كانت تناظرية فلن تكون تخالفية. ومما قد يعزز اعتقاده هو كلمتي تناظرية و تخالفية باللغة الانكليزية (Symmetric, Antisymmetric). لكن في الحقيقة يكفي ملاحظة أنه إذا كانت المجموعة A مكونة من عنصرين فقط x, y ، و كان لا يرتبط أي منهما بالآخر، فإن شرط التناظرية و شرط التخالفية محققين. فمثلاً العلاقة

$$\mathcal{R} = (\ \{x, y\}\ ,\quad \{x, y\}\ ,\quad \{\ (x, x), (y, y)\ \}\ \ )$$

هي انعكاسية و تناظرية و تخالفية و متعدية.

2 - من أجل علاقة ما $\mathcal{R} = (A, A, G)$ ، إذا وُجِدَ عنصران مختلفان $x, y \in A$ يحققان

$$(x\,\mathcal{R}\,y\,)\ \vee\ (\,y\,\mathcal{R}\,x)$$

فإن العلاقة لن تكون تخالفية وتناظرية بآنٍ واحد، وهذا يكافئ قولنا إن واحدة فقط من الحالات الثلاث التالية ستكون محققة :

الحالة الأولى : العلاقة $\mathcal{R}$ تخالفية و غير تناظرية.

الحالة الثانية : العلاقة $\mathcal{R}$ تناظرية و غير تخالفية.

الحالة الثالثة : العلاقة $\mathcal{R}$ غيرتخالفية و غير تناظرية.

3 - إذا كانت العلاقة $\mathcal{R} = (A, A, G)$ تناظرية و تخالفية بآنٍ واحد فإنه

$$\forall x, y \in A : (x \sim \mathcal{R}\ y) \wedge (y \sim \mathcal{R}\ x)$$

3-5- أمثلة:

مثال 1 :

لتكن العلاقة $\mathcal{R}$ المعرفة على المجموعة $A = \{x, y, z\}$ والتي بيانها $G = \{(z, x), (z, y)\}$.

إن العلاقة $\mathcal{R}$ تتمتع بالصفات التالية :

1- غير انعكاسية لأن $x \sim \mathcal{R}\, x$ (أي x لا يرتبط بنفسه) .

2- غير تناظرية لأن $(z\, \mathcal{R}\, x) \wedge (x \sim \mathcal{R}\ z)$.

3- متعدية.

4- تخالفية.

مثال 2 :

لتكن العلاقة $\mathcal{R}$ المعرفة على المجموعة $A = \{1,2,3,4\}$ والتي بيانها

$$G = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,4)\}$$

إن العلاقة $\mathcal{R}$ تتمتع بالصفات التالية (تحقق من ذلك)

1- انعكاسية .

2- تناظرية .

3- متعدية.

4- ليست تخالفية.

نلاحظ أن العناصر 1,2,3 كل منها يرتبط بالآخر، بينما العنصر 4 لا يرتبط إلا بنفسه. سندعو مجموعة العناصر التي ترتبط بالعنصر 1، أي المجموعة $\{1,2,3\}$ صف تكافؤ العنصر 1 وسنرمز لها $[1]$. كما سندعو مجموعة العناصر التي ترتبط بالعنصر 2، أي المجموعة $\{1,2,3\}$ صف تكافؤ العنصر 2 وسنرمز لها $[2]$. و سندعو مجموعة العناصر التي ترتبط بالعنصر 3، أي المجموعة $\{1,2,3\}$ صف

تكافؤ العنصر 3 وسنرمز لها $[3]$. سنرمز لمجموعة العناصر التي ترتبط بالعنصر 4، أي المجموعة $\{4\}$، بالرمز $[4]$. أخيراً لاحظ أن أسرة المجموعات

$$\{\,[x] : x \in \{1,2,3,4\}\,\} = \{\,[1],[4]\} = \{\,\{1,2,3\},\{4\}\}$$

تشكل تجزئة للمجموعة $\{\,1\,,2\,,3\,,4\,\}$.

مثال 3:

لنزود المجموعة $A = \{\,1,2,3\,\}$ بالعلاقة $\mathcal{R}$ التي بيانها $G = \{\,(1,2),(2,1)\,\}$، عندئذٍ فإن العلاقة $\mathcal{R}$ ليست انعكاسية لأن العنصر 1 لم يرتبط بنفسه كون $(1,1) \notin G$ ، وهي تناظرية وغير تخالفية، كما أنها **غير متعدية** لأن

$$(1,2) \in G \;\; \wedge \;\; (2,1) \in G$$

لكن

$$.\ (1,1) \notin G$$

3-6- علاقات التكافؤ و علاقات الترتيب:

تعاريف أساسية:

لتكن المجموعة غير الخالية A، و المزودة بالعلاقة $\mathcal{R} = (A,A,G)$

1- سنقول عن عنصرين ما $x,y \in A$ إنهما **متقارنان** إذا خرج سهم من أحدهما إلى الآخر. أي إذا كان $x\,\mathcal{R}\,y$ أو $y\,\mathcal{R}\,x$.

2- سندعو العلاقة $\mathcal{R} = (A,A,G)$ **علاقة تكافؤ** على المجموعة A إذا كانت انعكاسية وتناظرية ومتعدية.

3- لتكن $\mathcal{R} = (A,A,G)$ علاقة تكافؤ على المجموعة A، من أجل كل $x \in A$، نعرّف **صف تكافؤ العنصر x**، ونرمز له $[x]$، بأنه مجموعة عناصر A التي يرتبط بها x (وبالتالي تلك العناصر ترتبط به أيضاً كون العلاقة تناظرية). أي أن

$$[x] = \{\,y \in A \;\;/\;\; x\,\mathcal{R}\,y\,\}$$

ينتج من التعريف السابق أن كل عنصر من $A \setminus [x]$ لن يرتبط بالعنصر x كما لن يرتبط به العنصر x. أي أن

$$\forall\, y \in A \setminus [x] :\;\; (x\; \sim \mathcal{R}\;\; y) \wedge (\,y\;\; \sim \mathcal{R}\;\; x)$$

سنرمز لمجموعة صفوف تكافؤ عناصر A وفق العلاقة $\mathcal{R}$ بالرمز $A/\mathcal{R}$ ، وسندعوها **مجموعة خارج قسمة A على $\mathcal{R}$**، أي أن

$$A/\mathcal{R} = \{\ [x]:\ x \in A\ \}$$

وعندها فإن التطبيق التالي سيكون غامراً

$$\pi:\ A \to A/\mathcal{R}\ ;\ x \mapsto [x]$$

وسندعوه تطبيق الغمر القانوني للمجموعة A على مجموعة الخارج $A/\mathcal{R}$.

حيث صورة كل عنصر وفق هذا التطبيق هو مجموعة العناصر المرتبطة به وفق العلاقة $\mathcal{R}$.

4- سندعو العلاقة $\mathcal{R} = (A, A, G)$ **علاقة ترتيب** على المجموعة A إذا كانت انعكاسية وتخالفية ومتعدية. و عندها سندعو المجموعة A **مجموعة مرتبة** وفق علاقة الترتيب $\mathcal{R}$ وسنرمز ذلك $(A\ ,\mathcal{R})$.

وسندعو علاقة الترتيب هذه **علاقة ترتيب كلي** (أو المجموعة A **مرتبة كلياً**) إذا كان كل عنصرين فيها متقارنين. وفي خلاف ذلك سنقول إن هذه العلاقة هي **علاقة ترتيب جزئي** (أو المجموعة A **مرتبة جزئياً** (Partially orderd set := Poset).

5- لتكن $\mathcal{R} = (A, A, G)$ علاقة ترتيب ما، وليكن $A \ni y, x$

- إذا كان $x\ \mathcal{R}\ y$، فإننا سنقرأ ما سبق كما يلي (أي $\mathcal{R}$ تقرأ كما $\leq$)

" x أصغر من y "   أو   " y أكبر من x "

- إذا كان $x\ \mathcal{R}\ y$ و $x \neq y$، فإننا سنقرأ ما سبق كما يلي (أي $\mathcal{R}$ تقرأ كما $<$)

" x أصغر تماماً من y "   أو   " y أكبر تماماً من x "

6- لتكن $\mathcal{R} = (A, A, G)$ علاقة ترتيب ما عندئذٍ

- سندعو العنصر $A \ni a$ عنصر **أصغر** في المجموعة المرتبة A إذا كان a أصغر من أي عنصر آخر في A . أي إذا كان العنصر a يخرج منه أسهم إلى جميع عناصر المجموعة A، مما يعني أن

$$\forall\ y \in A\ :\ \ y\ \mathcal{R}\ a$$

وينتج عن ذلك أن أي عنصر مختلف عن a لن يكون أصغر منه (لأن علاقة الترتيب تخالفية).

- سندعو العنصر $A \ni b$ عنصر **أعظم** في المجموعة المرتبة A إذا كان b أكبر من أي عنصر آخر في A . أي إذا كان العنصر b يصله أسهم من جميع عناصر المجموعة A، أي أن

$$\forall\ y \in A\ :\ \ y\ \mathcal{R}\ b$$

وينتج عن ذلك أن أي عنصر مختلف عن b لن يكون أكبر منه (لأن علاقة الترتيب تخالفية).

- سندعو العنصر $c \in A$ عنصر **أصغري** في المجموعة المرتبة A إذا كان لا يوجد في A أي عنصر أصغر تماماً من c (وهذا يكافئ قولنا: لا يوجد أي عنصر في A مختلف عن c وأصغر منه). أي إذا كان العنصر c لا يصله اي سهم من أي عنصر مختلف عنه في A. مما يعني أن

$$\forall\, y \in A \setminus \{c\} : \;\; y \sim \mathcal{R} \;\; c$$

أي

$$\forall\, y \in A : (\; y \neq c \quad \Rightarrow \quad y \;\; \sim \mathcal{R} \;\; c\;)$$

وهذا يكافئ أن (لأن القضيتين التاليتين متكافئتين: $P \Rightarrow Q\,, \quad \sim Q \Rightarrow \sim P$)

$$\forall\, y \in A : (\; y\, \mathcal{R}\, c \quad \Rightarrow \quad c = y\;)$$

- سندعو العنصر $d \in A$ عنصر **أعظمي** في المجموعة المرتبة A إذا كان لا يوجد في A أي عنصر أكبر تماماً من d (وهذا يكافئ قولنا: لا يوجد أي عنصر في A مختلف عن d وأكبر منه). أي إذا كان العنصر d لا يخرج منه أي سهم تجاه أي عنصر مختلف عنه في A. مما يعني أن

$$\forall\, y \in A \setminus \{d\} : \;\; d \;\sim \mathcal{R} \;\; y$$

وهذا يكافئ أن

$$\forall\, y \in A : (\; d\, \mathcal{R}\, y \Rightarrow d = y\;)$$

ملاحظات وأمثلة :

1- في مجموعة مرتبة ما، العنصر الأعظم (أو الاصغر) وحيد إن وُجِد.

ذلك لأنه إذا كان هناك عنصران أعظمان a, a' في المجموعة المرتبة A فإن $a\, \mathcal{R}\, a'$ لأن a' عنصر أعظم، كما أن $a'\, \mathcal{R}\, a$ لأن a عنصر أعظم، ومنه فإن $a = a'$ (لأن العلاقة $\mathcal{R}$ تخالفية).

2- كل عنصر أعظم هو أعظمي لكن العكس غير صحيح بالضرورة.

إذا كان a عنصر أعظم في المجموعة المرتبة A فإن كل عنصر $x \in A \setminus \{a\}$ سيخرج منه سهم ليرتبط بالعنصر a، وبما أن العلاقة $\mathcal{R}$ تخالفية، فإنه لن يخرج سهم من a إلى x ، مما يعني أن العنصر a أعظمي.

3- كل عنصر أصغر هو أصغري لكن العكس غير صحيح بالضرورة (الإثبات يتم بشكل مشابه).

4- إذا كانت مجموعة ما مرتبة كلياً، فسيتطابق مفهومي العنصر الأعظمي والعنصر الأعظم، كما سيتطابق مفهومي العنصر الأصغري والعنصر الأصغر.

5- المجموعة $\mathbb{N}$ مزودةً بالعلاقة $\leq$ هي مجموعة مرتبة كلياً (تحقق من ذلك)، و لا تملك عناصر أعظمية ولا تملك عنصر أعظم، لكنها تملك عنصر أصغري وحيد و عنصر أصغر وحيد هو 0.

6- المجموعة $\mathbb{R}$ مزودةً بالعلاقة $\leq$ هي مجموعة مرتبة كلياً (تحقق من ذلك)، و لا تملك عناصر أعظمية أو أصغرية .

7- لتكن A مجموعة ما غير خالية، ولنزود مجموعة أجزائها $P(A)$ بعلاقة الاحتواء $\subset$، عندئذ فإن $(P(A), \subset)$ مجموعة مرتبة جزئياً (تحقق من ذلك)، المجموعة A هي العنصر الأعظم والأعظمي الوحيد فيها، و المجموعة الخالية هي العنصر الأصغر و الأصغري الوحيد فيها .

8- لنزود المجموعة $A = \{1,2,3, \dots, 10\}$ بالعلاقة التالية

$$\forall\, x, y \in A : \qquad x\, \mathcal{R}\, y \;\;\Leftrightarrow\;\; y \text{ يقسم } x$$

عندئذٍ فإن العلاقة السابقة هي علاقة ترتيب (تحقق من ذلك)، وهي تملك عنصر أصغري وحيد (و أصغر) هو 1، ولا تملك عنصر أعظم، لكن كل من العناصر التالية هي عناصر أعظمية فيها

$$6\,,7\,,8\,,9\,,10$$

9- لتكن العلاقة $\mathcal{R}$ المعرفة على المجموعة $A = \{a, b, c\}$ والتي بيانها

$$G = \{(a,a), (b,b)\,, (c,c), (b,c)\,\}$$

عندئذٍ فإن $\mathcal{R}$ علاقة ترتيب على A (تحقق من ذلك)، وهي علاقة ترتيب جزئي لأن العنصرين a, b غير متقارنين. وهي لا تملك أي عنصر أعظم أو أصغر.

بالمقابل العناصر الأصغرية a, b ، و العناصر الأعظمية a, c .

10 - لتكن العلاقة $\mathcal{R}$ المعرفة على المجموعة $A = \{a, b, c\}$ والتي بيانها

$$G = \{\,(b,c), (c,b), (a,a), (b,b), (c,c)\,\}$$

عندئذٍ فإن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على A (تحقق من ذلك).

صفوف التكافؤ هي

$$[a] = \{a\}$$

$$[b] = \{b, c\} = [c]$$

و الأسرة $A/\mathcal{R} = \{\ \{a\},\ \{b,c\}\ \}$ تشكل تجزئة للمجموعة $A = \{a, b, c\}$.

سنرى في مبرهنة لاحقة أن صفوف التكافؤ دوماً تشكل تجزئة للمجموعة المزودة بعلاقة التكافؤ.

11- لنزود مجموعة مستقيمات المستوي بعلاقة توازي المستقيمات، فنجد أن هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ (تحقق من ذلك)، صف تكافؤ أي مستقيم هو مجموعة مستقيمات المستوي التي توازيه.

12- لنزود مجموعة مثلثات المستوي بعلاقة تشابه المثلثات، فنجد أن هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ(تحقق من ذلك)، و صف تكافؤ أي مثلث هو مجموعة مثلثات المستوي التي تشابهه.

13 - لتكن A مجموعة ما من القضايا، ولنزودها بعلاقة تكافؤ القضايا، أي أن قضية ما ترتبط بقضية أخرى اذا كانتا متكافئتين، عندئذٍ فإن هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ(تحقق من ذلك)، وصف تكافؤ أي قضية هي مجموعة القضايا التي تكافئها.

14 - لنزود مجموعة أشعة المستوي بعلاقة تساير الأشعة، فنجد أن هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ (تحقق من ذلك)، صف تكافؤ أي شعاع سندعوه الشعاع الطلق الممثل لذلك الشعاع أي أنه مجموعة أشعة المستوي التي تسايره.

15 – لنزود مجموعة نقاط المستوي الديكارتي بالعلاقة التالية : ترتبط نقطتان من المستوي الديكارتي ببعضهما إذا كان لهما نفس البعد عن مبدأ الاحداثيات. فنجد أن هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ (تحقق من ذلك)، صف تكافؤ أي نقطة M هي الدائرة التي مركزها مبدأ الاحداثيات والمارة بالنقطة M .

تمرين:

لتكن A مجموعة غير خالية مزودة بعلاقة $\mathcal{R}$ بحيث أن كل عنصرين مختلفين من A متقارنين وفق تلك العلاقة. أثبت أنه إذا كانت هذه العلاقة تناظرية وغير انعكاسية، فلن تكون متعدية.

3-7- التطابق بالمقاس n على $\mathbb{Z}$:

ليكن $n \neq 0$ عدد طبيعي مثبّت، و لنزود مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$، بالعلاقة $\mathcal{R}$ المعرفة كما يلي

$$\forall\ x,y \in \mathbb{Z} :\quad x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow x-y \in n\mathbb{Z}$$

حيث $n\mathbb{Z}$ هي مجموعة المضاعفات الصحيحة للعدد n، أي أن

$$n\mathbb{Z} := \{\, n.z \ :\ z \in \mathbb{Z} \,\}$$

أي أنه من أجل كل عددين صحيحين x,y فإن $x\,\mathcal{R}\,y$ إذا و فقط إذا كان العدد الصحيح $x-y$ يقبل القسمة على n في $\mathbb{Z}$ (أي $x-y$ مضاعف للعدد n في $\mathbb{Z}$ أو العدد n يقسم في $\mathbb{Z}$ العدد $x-y$).

و لنبرهن أن العلاقة $\mathcal{R}$ هي علاقة تكافؤ ثم لنوجد صفوف التكافؤ.

1 – الصفة الانعكاسية:

$$\forall\, x \in \mathbb{Z} \;:\; x - x = 0 = n \times 0 \in n\mathbb{Z}$$

2 – الصفة التناظرية:

$$x\,\mathcal{R}\,y \;\Rightarrow\; \exists k \in \mathbb{Z} :\; x - y = n.k \;\Rightarrow\; y - x = n(-k) \;\Rightarrow\; y\,\mathcal{R}\,x$$

3 – الصفة المتعدية:

$$x\,\mathcal{R}\,y \;\wedge\; y\,\mathcal{R}\,z \;\Rightarrow\; \exists k, k' \in \mathbb{Z} :\; x - y = n.k \;\wedge\; y - z = nk'$$

$$\Rightarrow x - z = (x - y) + (y - z) = nk + nk' = n(k + k') \in n\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x\,\mathcal{R}\,z\,.$$

ومنه فالعلاقة $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ.

من أجل كل $a \in \mathbb{Z}$، فإن صف تكافؤه هو

$$[a] := \{\, z \in \mathbb{Z} \;:\; z\,\mathcal{R}\,a \,\} = \{\, z \in \mathbb{Z} \;:\; z - a \in n\mathbb{Z} \,\}$$

$$= \{\, z \in \mathbb{Z} \;: z = a + n\mathbb{Z} \,\} = a + n\mathbb{Z}$$

$$= \{ \dots \;, a - 2n \,,\quad a - n,\quad a,\quad a + n,\quad a + 2n,\; \dots \}$$

إذاً

$$\boxed{\forall a \in A \;:\; [a] = \{ \dots \;, a - 2n \,,\quad a - n,\quad a,\quad a + n,\quad a + 2n,\; \dots \}}$$

ونلاحظ أن

$$\cdots = [a - 2n] = [a - n] = [a] = [a + n] = [a + 2n] = \cdots$$

ومنه فإن مجموعة كل صفوف التكافؤ هي

$$\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\; [0], [1], [2], \dots , [n - 1] \;\}$$

إن العلاقة السابقة على مجموعة الأعداد الصحيحة هي علاقة شهيرة وهامة تدعى علاقة التطابق بالمقاس n على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$، و نكتب عادةً $x \equiv y\ (n)$ بدلاً من $x\,\mathcal{R}\,y$ وتقرأ x يطابق y بالمقاس n . أي أنه

$$\boxed{\forall\, a,b \in \mathbb{Z} \quad : \quad a \equiv b\ (mod\ n) \ \Leftrightarrow \ a-b \in n\mathbb{Z}}$$

وسنرمز لمجموعة صفوف التكافؤ $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$ بالرمز $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

فمثلاً من أجل $n = 3$ نجد أن $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\,[0],[1],[2]\,\}$، حيث

$$[0] = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$$

$$[1] = \{\dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$$

$$[2] = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$$

والمجموعات الثلاث السابقة هي صفوف تكافؤ العلاقة $\mathcal{R}$ المعرفة كما يلي

$$\forall\ x,y \in \mathbb{Z} : \quad x\,\mathcal{R}\,y \ \Leftrightarrow \ x-y \in 3\mathbb{Z}$$

ونلاحظ أن صفوف التكافؤ الثلاث السابقة تشكل تجزئة للمجموعة $\mathbb{Z}$، لأن المجموعات الثلاث كل منها غير خالية، و منفصلة مثنى مثنى، و اجتماعها هو $\mathbb{Z}$. في الحقيقة إن ما سبق ليس حالة خاصة، و المبرهنة التالية تبين أنه عند تزويد أي مجموعة غير خالية A بعلاقة تكافؤ فإن صفوف تكافؤها ستشكل تجزئة للمجموعة A .

مبرهنة:

لتكن A مجموعة ما غير خالية، عندئذٍ فإن

أولاً: كل علاقة تكافؤ على A صفوف تكافؤها ستشكل تجزئة للمجموعة A .

ثانياً: انطلاقاً من أي تجزئة للمجموعة A يمكن تعريف علاقة تكافؤ $\mathcal{R}$ على المجموعة A بحيث تكون صفوف تكافؤ العلاقة $\mathcal{R}$ هي التجزئة السابقة.

الاثبات:

أولاً: لتكن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على المجموعة A ، ولنُثبِت أن المجموعة

$$A/\mathcal{R} = \{ [a] \ : \ a \in A \}$$

تشكل تجزئة للمجموعة A. نُذَكِّر بأن شروط التجزئة هي:

- **الشرط الأول:** $[a] \neq \emptyset \ ; \ \forall \, a \in A$

وهذا محقق لأن $a \in [a]$ ، كون العلاقة انعكاسية.

- **الشرط الثاني:** $\forall \, x , y \in A \ : \ (\ [x] \neq [y] \ \Rightarrow \ [x] \cap [y] = \emptyset \ )$

لإثبات ذلك نفرض جدلاً وجود $z \in [x] \cap [y]$ عندئذٍ فإن

$$z \in [x] \cap [y] \ \Rightarrow \ z \in [x] \ \wedge \ z \in [y] \ \Rightarrow \ x \, \mathcal{R} \, z \ \wedge \ z \, \mathcal{R} \, y \ \Rightarrow \ x \, \mathcal{R} \, y$$

والاقتضاء الأخير ينتج من كون العلاقة $\mathcal{R}$ متعدية، ومن ثم

$$x \, \mathcal{R} \, y \ \Rightarrow \ [x] = [y]$$

وهذا يناقض الفرض بأن $[x] \neq [y]$ ، فالفرض الجدلي بأنه يوجد $z \in [x] \cap [y]$ خاطئ، إذاً $[x] \cap [y] = \emptyset$.

- **الشرط الثالث:** $\bigcup_{x \in A} \ [x] = A$

من الواضح أن

$$\bigcup_{x \in A} \ [x] \subset A$$

و لنثبت أن

$$\bigcup_{x \in A} \ [x] \supset A$$

بما أنه من أجل كل $x \in A$ فإن $x \in [x]$ ، نستنتج أن $\{x\} \subset [x]$ ، و بالتالي

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} [x]$$

ومنه فإن $\bigcup_{x \in A} \ [x] = A$.

ثانياً: لتكن

$$X = \{ B_i \ : \ i \in I \ \}$$

تجزئة ما للمجموعة A ، و المطلوب إيجاد علاقة $\mathcal{R}$ على المجموعة A بحيث تكون $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ ومجموعة صفوف تكافؤها هي X . نذكِّر بأنه من تعريف التجزئة، فإن كل مجموعة B_i ستكون غير خالية، وكل مجموعتين مختلفتين B_i, B_j ستكونان منفصلتين (أي تقاطعهما خالي)، وأخيراً فإن اجتماع كل المجموعات B_i سيساوي A ، أي أن

$$A = \bigcup_{i \in I} B_i$$

لنزود المجموعة A بالعلاقة $\mathcal{R}$ التي تحقق الشرطين التاليين

الشرط الأولً: مقصور العلاقة $\mathcal{R}$ على كل مجموعة B_i من X هو العلاقة التامة (أي أنه من أجل كل $i \in I$ فإن كل عنصرين من نفس المجموعة B_i سيكون كل منهما مرتبط بالآخر). . أي أن

$$\forall \, i \in I : \ \ (\, x, y \in B_i \Rightarrow \ x \, \mathcal{R} \, y \ \wedge \ \ y \, \mathcal{R} \, x \ )$$

الشرط الثاني: كل عنصرين من مجموعتين مختلفتين من X لن يكونا متقارنين، أي أن

$$(\, i, j \in I \ \wedge \ \ i \neq j) \quad \Rightarrow \quad (\, x \in B_i \wedge \ \ y \in B_j \ \ \Rightarrow \ \ x \ \sim \mathcal{R} \ \ y \quad \wedge \quad y \ \sim \mathcal{R} \ \ x \ )$$

عندئذٍ فإن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ لأنها:

1 – انعكاسية:

$$x \in A \Rightarrow \exists \, i \in I : x \in B_i \ \Rightarrow \ x \in B_i \wedge \ x \in B_i \ \Rightarrow \ \ x \, \mathcal{R} \, x$$

2 – تناظرية:

$$x \, \mathcal{R} \, y \ \Rightarrow \ \exists \, i \in I \, : \, x, y \in B_i \ \Rightarrow \exists \, i \in I \ : \, y, x \in B_i \ \Rightarrow \ \ y \, \mathcal{R} \ \ x$$

3 – متعدية:

$$x \, \mathcal{R} \, y \ \Rightarrow \ \exists \, i \in I \, : \ x, y \in B_i$$

$$y\,\mathcal{R}\,z \;\Rightarrow\; \exists\, j \in I \;:\; y, z \in B_j$$

ومنه $y \in B_i \cap B_j$ ، وبما أن $X = \{\, B_i \;:\; i \in I \,\}$ تشكل تجزئة للمجموعة A فإن $B_i = B_j$.

إذاً $z\,,x \in B_i = B_j$ ومنه $x\,\mathcal{R}\,z$.

من تحقق الشروط الثلاثة السابقة نستنتج أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على A .

من أجل كل $a \in A$ فإنه يوجد عدد وحيد $i \in I$ يحقق $a \in B_i$ ، من طريقة تعريف العلاقة $\mathcal{R}$ نستنتج أن $[a] = B_i$. ■

تمارين:

ادرس صفات العلاقة $\mathcal{R}$ في كلٍ مما يلي و بين فيما إذا كانت علاقة تكافؤ أو ترتيب (سواء ترتيب كلي أو جزئي)، و إذا كانت علاقة ترتيب فابحث عن العناصر الأعظمية والأصغرية والعنصر الأعظم والأصغر فيها، و إذا كانت علاقة تكافؤ فابحث عن صفوف التكافؤ

1- $\forall\; x, y \in \mathbb{R} \;:\; x\,\mathcal{R}\,y \;\Leftrightarrow\; x \le y$

2- $\forall\; x, y \in \mathbb{R} \;:\; x\,\mathcal{R}\,y \;\Leftrightarrow\; x < y$

3- $\forall\; x, y \in \mathbb{R} \;:\; x\,\mathcal{R}\,y \;\Leftrightarrow\; x - y \in 2\mathbb{Z}$

4- $\forall\, m, n \in \mathbb{N}^* \;:\; m\,\mathcal{R}\,n \;\Leftrightarrow m \mid n$ (أي m يقسم n)

5- $\forall\; x, y \in \mathbb{Z}^* \;:\; x\,\mathcal{R}\,y \;\Leftrightarrow\; x \mid y$

6- $\forall\; x, y \in \mathbb{R} \;:\; x\,\mathcal{R}\,y \;\Leftrightarrow\; \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$

7- $\forall\, (a,b),(c,d) \in \mathbb{N}^2 \;:\; (a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \Leftrightarrow\; a - b = c - d$

8- $\forall\, (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \;:\; (a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

الفصل الرابع

التوابع

1-4- مفهوم التابع

تعريف:

نقول عن العلاقة $f = (A, B, G)$ إنها تابع[12] إذا كان من أجل كل $x \in A$ يوجد عنصر **وحيد** $y \in B$ يحقق $x\, f\, y$، أي يحقق $(x, y) \in G$.

بمعنى آخر، وعند تمثيل التابع f سهمياً (نفس طريقة تمثيل العلاقات سهمياً باستخدام مخططات Venn) فيجب أن يخرج من كل عنصر $x \in A$ سهم واحد فقط ليصل إلى العنصر $y \in B$. ندعو العنصر y صورة العنصر x وفق التابع f، و سنرمز ذلك $y = f(x)$ بدلاً من $x\, f\, y$.

و بالتالي فإنه من أجل أي عنصرين $x_1, x_2 \in A$ بحيث $f(x_1) \neq f(x_2)$ فإن $x_1 \neq x_2$.فيكون

شرط التابع:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A \ : \ \big(\ \ f(x_1) \neq f(x_2) \ \ \Rightarrow \ \ x_1 \neq x_2 \ \ \big)$$

والذي يكافئ[13] الشرط التالي

$$\forall\, x_1, x_2 \in A \ : \ \big(\ \ x_1 = x_2 \ \ \Rightarrow \ \ f(x_1) = f(x_2) \ \ \big)$$

إذا كانت العلاقة $f = (A, B, G)$ تابعاً، حيث

$$G = \big\{\ \big(x, f(x)\big) \ : \ x \in A \big\}$$

فسنرمّز ذلك كما يلي

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

و سنقول إن التابع f منطلقه[14] A و مستقر B، و قاعدة ربطه $y = f(x)$.

وسندعو المجموعة

$$G = \{\ (x, y) \in A \times B \ : \ y = f(x)\ \}$$

بيان التابع f.

[12] تستخدم كلمة تابع أو دالة كترجمة للكلمة الانكليزية fonction ، وتستخدم أيضاً كلمة تطبيق كترجمة لكلمة application، و في أغلب الكتب الرياضية نجد أن لهذه الكلمات الثلاث (تابع ، دالة ، تطبيق) نفس المعنى الرياضي، ما لم يُشِر المؤلِّف لخلاف ذلك.

[13] لأن $(P \Rightarrow Q) \ \Leftrightarrow \ (\sim Q \Rightarrow \sim P)$

[14] كما تدعى في التحليل مجموعة تعريف التابع.

4-2- تساوي تابعين:

يكون التابعان $f_1 = (A_1, B_1, G_1)$ ، $f_2 = (A_2, B_2, G_2)$ متساويان إذا كان لهما نفس المنطلق و نفس المستقر ونفس قاعدة الربط (أو نفس البيان). أي إذا كان

$$A_1 = A_2\,, \qquad B_1 = B_2, \qquad G_1 = G_2$$

بعبارةٍ أخرى، يكون التابعان

$$f_1 : A_1 \longrightarrow B_1 \qquad\qquad f_2 : A_2 \longrightarrow B_2$$
$$x \longmapsto f_1(x) \qquad\qquad x \longmapsto f_2(x)$$

متساويان إذا تحققت الشروط الثلاث التالية

أولاً : $A_1 = A_2$ (تساوي المنطلقين)

ثانياً : $B_1 = B_2$ (تساوي المستقرين)

ثالثاً : $f_1(x) = f_2(x)$: $\forall\, x \in A_1 = A_2$ (تساوي قاعدتي الربط)

4-3- أمثلة:

1- لتكن A مجموعة ما غير خالية، عندئذٍ فإن العلاقة الخالية (التي بيانها $G = \emptyset$) ليست تابعاً. كما أن العلاقة التامة (التي بيانها $G = A^2$) ليست تابعاً (إلا إذا كانت المجموعة A وحيدة العنصر). بالمقابل فإن علاقة المساواة على المجموعة A هي تابع يدعى التابع المطابق على المجموعة A، و سنرمز له id_A أي أن

$$id_A : A \longrightarrow A$$
$$x \longmapsto id_A(x) = x$$

2- لتكن $\emptyset \neq B \subset A$ ، عندئذٍ فإن التطبيق التالي

$$i_B : B \longrightarrow A$$
$$x \longmapsto i_B(x) = x$$

يدعى التباين القانوني للمجموعة B في A.

3- لتكن A, B أي مجموعتين غير خاليتين، وليكن $b \in B$. إن التطبيق

$$Fix_b : A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto Fix_b(x) = b$$

يدعى التطبيق الثابت ذي القيمة b .

4- علاقة القسمة على المجموعة $\mathbb{N}^*$ ليست تابعاً، لأن $2|6$ و $2|4$، أي أن العنصر 2 خرج منه سهمين (إحداهما إلى 4 والآخر إلى 6).

5- لنزود المجموعة $\mathbb{N}^*$ بالعلاقة $\mathcal{R}$ المعرفة كما يلي:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : \qquad x \,\mathcal{R}\, y \;\Leftrightarrow\; x \text{ يلي مباشرةً } y$$

عندئذٍ نجد أن هذه العلاقة هي تطبيق، حيث صورة العنصر $\mathbb{N} \ni x$ هو العنصر $\mathbb{N} \ni y = x + 1$.

6- لتكن العلاقة $\mathcal{R}$ التي منطلقها X مجموعة الدوائر في المستوي الديكارتي و مستقرها Y مجموعة نقاط المستوي الديكارتي و المعرفة كما يلي:

$$\forall\, x \in X \,, y \in Y : \qquad x \,\mathcal{R}\, y \;\Leftrightarrow (\, y \text{ الدائرة } x \text{ مركزها النقطة })$$

عندئذٍ فإن هذه العلاقة هي تابع وصورة كل دائرة هو مركزها.

7- يمكن النظر لعملية جمع الأعداد الحقيقية في $\mathbb{R}$ و كأنها التابع[15] التالي

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto x + y$$

8- لنزود مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بالعلاقة $\mathcal{R}$ المعرفة كما يلي:

$$\forall\, a \,, b \in \mathbb{R} : \qquad a \,\mathcal{R}\, b \;\Leftrightarrow\; a = b^2$$

عندئذٍ فإن العلاقة $\mathcal{R}$ ليست تابعاً، لأن $(9 \,\mathcal{R}\, 3) \wedge (9 \,\mathcal{R} - 3)$.

9- لنزود مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بالعلاقة $\mathcal{R}$ المعرفة كما يلي:

$$\forall\, a \,, b \in \mathbb{R} : \qquad a \,\mathcal{R}\, b \;\Leftrightarrow\; b = a^2$$

عندئذٍ فإن العلاقة $\mathcal{R}$ تابع، لأنه

$$\forall\, a \in \mathbb{R} : \quad (\, \exists!\, b \in \mathbb{R} : \; b = a^2 \,)$$

حالة خاصة هامة:

ليكن $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع ما ($\mathbb{R}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية)، عندئذٍ فإن G بيان التابع f هو مجموعة نقاط المنحني البياني للتابع f في المستوي $\mathbb{R}^2$.

4-4- مقصور تابع على مجموعة:

ليكن التابع $f : A \longrightarrow B$ ولتكن $A \supset C \neq \emptyset$، نعرّف مقصور التابع f على المجموعة C بأنه التابع $f_C : C \longrightarrow B$ المعرف كما يلي $\quad \forall\, x \in C : \; f_C(x) := f(x)$

[15] سنرى في الفقرة 7-1 في الفصل السابع و التي بعنوان "قانون التشكيل الداخلي والعملية الداخلية على مجموعة" أن هذا التابع "+" هو قانون تشكيل داخلي على $\mathbb{R}$.

كما سندعو التابع f في هذه الحالة ممدود التابع f_C .

4-5- المستقر الفعلي لتابع:

ليكن التابع $f : A \longrightarrow B$ سندعو المجموعة

$$f(A) := \{ f(x) \in B \ : \ x \in A \ \}$$

مجموعة قيم[16] التابع f، أو المستقر الفعلي للتابع f، أو صورة منطلق التابع f.

فعلى سبيل المثال إن المستقر الفعلي للتابع $sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ هو المجال $[-1\,,+1]$.

4-6- الصورة المباشرة والصورة العكسية لمجموعة وفق تابع:

نعرّف الصورة المباشرة وفق $f : A \longrightarrow B$ لمجموعة جزئية X من A كما يلي:

$$f(X) := \{ f(x) : \ x \in X \ \}$$

كما نعرّف الصورة العكسية وفق f لمجموعة جزئية Y من B كما يلي:

$$f^{-1}(Y) := \{ \ x \in A \ : \ (\exists \, y \in B \ : \ f(x) = y \ ) \ \}$$

مثال:

ليكن التابع

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^2$$

عندئذٍ فإن

$$f(\{5\}) = \{25\}\,, \qquad f(\{2,3,4\}) = \{4,9,16\}, \qquad f(\{7,-7\}) = \{49\},$$

$$f(\emptyset) = \emptyset, \qquad f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$$

$$f^{-1}(\{4\}) = \{2,-2\}, \qquad f^{-1}(-4) = \emptyset,$$

$$f^{-1}(\{9,7,0\}) = \{3,-3,\sqrt{7},-\sqrt{7},0\},$$

$$f^{-1}([4,9]) = [-3,-2] \cup [2,3],$$

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \qquad f^{-1}(\mathbb{R}^{-*}) = \emptyset.$$

[16] نقول عن تابع ما إنه تابع حقيقي (أو صحيح أو...) إذا كانت قيمه أعداد حقيقية (أو صحيحة أو ...). كما أن أغلب الصفات التحليلية التي نطلقها على التابع تكون صفات مرتبطة بمجموعة قيم التابع، كالمحدودية و الاستمرارية وغيرها.

مبرهنة:

ليكن التابع $f : A \longrightarrow B$ ، ولتكن A_1, A_2 أي مجموعتين جزئيتين من A، ولتكن B_1, B_2 أي مجموعتين جزئيتين من B، عندئذٍ فإن كلاً من الخواص التالية محققة

1 - $A_1 \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad f(A_1) \neq \emptyset$

2 - $A_1 \subset A_2 \quad \Rightarrow \quad f(A_1) \subset f(A_2)$

3 - $B_1 \subset B_2 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

4 - $f(A_1 \cup A_2) \;=\; f(A_1) \cup f(A_2)$

5 - $f^{-1}(B_1 \cup B_2) \;=\; f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

6 - $f(A_1 \cap A_2) \;\subset\; f(A_1) \cap f(A_2)$

7 - $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \;=\; f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

8 - $f(A_1 \setminus A_2) \;\supset\; f(A_1) \setminus f(A_2)$

9 - $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) \;=\; f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

10 - $f^{-1}(\, f(A_1)\,) \;\supset\; A_1$

11 - $f(\, f^{-1}(B_1)\,) \;\subset\; B_1$

الإثبات :

الخاصة 1 : $\boxed{\boldsymbol{A_1 \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad f(A_1) \neq \emptyset}}$

$$A_1 \neq \emptyset \;\Rightarrow\; \exists\, x \in A_1 \;\Rightarrow\; f(x) \in f(A_1) \;\Rightarrow\; f(A_1) \neq \emptyset.$$

الخاصة 2 : $\boxed{\boldsymbol{A_1 \subset A_2 \quad \Rightarrow \quad f(A_1) \subset f(A_2)}}$

$y \in f(A_1) \;\Rightarrow\; \exists\, x \in A_1 : \; y = f(x)$

$\Rightarrow\; \exists\, x \in A_2 : \; y = f(x)$ (لأن $A_1 \subset A_2$)

$\Rightarrow\; y \in f(A_2)$

ومنه $f(A_1) \subset (A_2)$.

الخاصة 3 : $\boxed{\boldsymbol{B_1 \subset B_2 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)}}$

$$x \in f^{-1}(B_1) \Rightarrow f(x) \in B_1 \Rightarrow f(x) \in B_2 \left(B_1 \subset B_2 \text{ لأن} \right) \Rightarrow x \in f^{-1}(B_2).$$

ومنه $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

الخاصة 4 : $\boxed{\boldsymbol{f(A_1 \cup A_2) \ = \ f(A_1) \cup f(A_2)}}$

لنبرهن أن $y \in \ f(A_1 \cup A_2) \Leftrightarrow \ y \in f(A_1) \cup f(A_2)$

$$\begin{aligned} y \in \ f(A_1 \cup A_2) &\Leftrightarrow (\ y = f(x)\ ) \ \wedge \ (\ x \in A_1 \cup A_2 \ ) \\ &\Leftrightarrow (\ x \in A_1 \ \vee \ x \in A_2\ ) \wedge (\ y = f(x)\ ) \\ &\Leftrightarrow (\ x \in A_1 \ \wedge \ y = f(x)\,) \ \vee \ (\ x \in A_2 \ \wedge \ y = f(x)\,) \\ &\Leftrightarrow (\ y \in f(A_1)\ ) \vee (\ y \in f(A_2)\ ) \\ &\Leftrightarrow \ y \in f(A_1) \cup f(A_2)\,. \end{aligned}$$

الخاصة 5 : $\boxed{\boldsymbol{f^{-1}(B_1 \cup B_2) \ = \ f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)}}$

لنبرهن أن $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \Leftrightarrow \ x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\Leftrightarrow \ f(x) \in B_1 \cup B_2 \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \ \vee \quad f(x) \in B_2 \\ &\Leftrightarrow \ \ x \in f^{-1}(B_1) \ \vee \quad x \in f^{-1}(B_2) \\ &\Leftrightarrow \ x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)\,. \end{aligned}$$

الخاصة 6 : $\boxed{f(A_1 \cap A_2) \ \subset \ f(A_1) \cap f(A_2)}$

لنفرض أن $x \in A_1 \cap A_2$ و لنبرهن أن $f(x) \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

$$\begin{aligned} x \in A_1 \cap A_2 \quad &\Rightarrow \ f(x) \in f(A_1 \cap A_2) \\ &\Rightarrow x \in A_1 \quad \wedge \quad x \in A_2 \\ &\Rightarrow f(x) \in f(A_1) \quad \wedge \quad f(x) \in f(A_2) \\ &\Rightarrow f(x) \in f(A_1) \cap f(A_2). \end{aligned}$$

الخاصة 7 : $\boxed{f^{-1}(B_1 \cap B_2) \;=\; f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)}$

لنبرهن أن

$$x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \quad \wedge \quad f(x) \in B_2 \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \quad \wedge \quad x \in f^{-1}(B_2) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)\,. \end{aligned}$$

الخاصة 8 : $\boxed{\boldsymbol{f(A_1 \setminus A_2) \;\supset\; f(A_1) \setminus f(A_2)}}$

$$\begin{aligned} y \in f(A_1) \setminus f(A_2) &\Rightarrow y \in f(A_1) \quad \wedge \quad y \notin f(A_2) \\ &\Rightarrow (\; \exists\, x \in A_1 : y = f(x)\;) \;\wedge\; (\; \forall\, z \in A_2 : y \neq f(z)\;) \\ &\Rightarrow \quad y = f(x) \quad \wedge \quad x \in A_1 \setminus A_2 \\ &\Rightarrow \quad y = f(x) \;\in\; f(A_1 \setminus A_2). \end{aligned}$$

الخاصة 9 : $\boxed{\boldsymbol{f^{-1}(B_1 \setminus B_2) \;=\; f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)}}$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \setminus B_2 \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \quad \wedge \quad f(x) \notin B_2 \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \quad \wedge \quad x \notin f^{-1}(B_2) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)\,. \end{aligned}$$

الخاصة 10 : $\boxed{\boldsymbol{f^{-1}(\,f(A_1)\,) \;\supset\; A_1}}$

لتكن $B_1 := f(A_1)$ ، لدينا بالتعريف

$$f^{-1}(B_1) = \{\, x \in A \;:\; f(x) \in B_1 \,\}$$

ومنه

$$x \in A_1 \;\Rightarrow\; f(x) \in f(A_1) = B_1 \;\Rightarrow\; x \in f^{-1}(B_1) = f^{-1}\big(f(A_1)\big)$$

إذاً $A_1 \subset f^{-1}\big(f(A_1)\big)$.

الخاصة 11 : $\boxed{\boldsymbol{f(\,f^{-1}(B_1)\,)\ \subset\ B_1}}$

$$y \in f\left(f^{-1}(B_1)\right) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(B_1) : y = f(x) \Rightarrow y = f(x) \in B_1$$

حيث الاقتضاء الأخير ينتج من تعريف الصورة العكسية للمجموعة B_1 . ■

تمرين:

هات مثالاً يحقق $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$

الحل:

ليكن التابع

$$f : \{1,2\} \longrightarrow \{3\}\ ; 1 \mapsto 3\,, 2 \mapsto 3$$

و لنأخذ $A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}$، عندئذٍ فإن

$$\emptyset = f(\emptyset) = f(\{1\} \cap \{2\}) \neq f(\{1\}) \cap f(\{2\}) = \{3\} \cap \{3\} = \{3\}$$

تمرين:

هات مثالاً يحقق $f(A_1 \setminus A_2) \neq f(A_1) \setminus f(A_2)$

الحل:

ليكن التابع

$$f : \{1,2\} \longrightarrow \{3\}\ ; 1 \mapsto 3\,, 2 \mapsto 3$$

و لنأخذ $A_1 = \{1,2\}, A_2 = \{1\}$، عندئذٍ فإن

$$\{3\} = f(\{2\}) = f(\{1,2\} \setminus \{1\}) \neq f(\{1,2\}) \setminus f(\{1\}) = \{3\} \setminus \{3\} = \emptyset$$

تمرين:

هات مثالاً يحقق $f^{-1}\left(f(A_1)\right) \neq A_1$

الحل:

ليكن التابع

$$f : \{1,2\} \longrightarrow \{3\}\ ; 1 \mapsto 3\,, 2 \mapsto 3$$

و لنأخذ $A_1 = \{1\}$، عندئذٍ فإن

$$f^{-1}\big(f(A_1)\big) = f^{-1}(f\{1\}) = f^{-1}(\{3\}) = \{1,2\} \neq \{1\} = A_1$$

تمرين:

هات مثالاً يحقق $f\big(f^{-1}(B_1)\big) \neq B_1$

الحل:

ليكن التابع

$$f : \{1,2\} \longrightarrow \{3,4\} \ ; 1 \mapsto 3 \,, 2 \mapsto 3$$

و لنأخذ $B_1 = \{3,4\}$، عندئذٍ فإن

$$f\big(f^{-1}(B_1)\big) = f(f^{-1}\{3,4\}) = f(\{1,2\}) = \{3\} \neq \{3,4\} = B_1$$

4-7- تركيب التوابع:

ليكن التابعان $g : B \longrightarrow C$، $f : A \longrightarrow B$ نعرف تركيب التطبيقين f و g ونرمز له $g \circ f$ (يُقرَأ g يلي f) بأنه التطبيق $g \circ f : A \longrightarrow C$ المعرّف كما يلي

$$\forall \, x \in A : \quad (g \circ f)(x) := g(\,f(x))$$

لاحظ أن عملية تركيب التوابع ليست ممكنة دوماً، وحتى تكون ممكنة يجب أن يكون مستقر التابع الأول (أي f) هو منطلق التابع الثاني (أي g).

وفي حالة خاصة إذا كان التطبيقان f, g لهما نفس المنطلق والمستقر، فيكون التركيبان $f \circ g, \ g \circ f$ ممكنان دوماً ، لكنهما غير متساويين بشكلٍ عام، كما يبين ذلك مثال لاحق.

من أجل أي تابع $f : A \longrightarrow A$ سنرمِّز

$$f \circ f = f^2 \,, \qquad f \circ f \circ f = f^3, \ldots$$

و بشكلٍ عام من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ($f^0 := id_A$) فإن

$$\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ مرة}} = f^n$$

من أجل كل تابع $f : A \longrightarrow B$ فإن التابعان المطابقان

$$id_A : A \longrightarrow A \qquad , \qquad id_B : B \longrightarrow B$$

سيحققان

$$f \circ id_A = f \quad , \quad id_B \circ f = f$$

للتحقق مثلاً من أن التابعان f , $f \circ id_A$ متساويان، يكفي ملاحظة أن لهما نفس المنطلق A، و نفس المستقر B.

كما أن قاعدة الربط ذاتها لأن

$$\forall\, x \in A : (f \circ id_A)(x) = f\big(id_A(x)\big) = f(x)$$

و بطريقة مشابهة يمكن التحقق من أن التابعان f , $id_B \circ f$ متساويان.

مثال:

ليكن التابعان

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \longmapsto f(x) = x^2$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \longmapsto g(x) = x + 1$$

فيكون لدينا $f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ، ومن أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن

$$(g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big) = g(x^2) = x^2 + 1$$

$$(f \circ g)(x) := f\big(g(x)\big) = f(x + 1) = (x + 1)^2$$

نلاحظ أن $g \circ f \neq f \circ g$.

نتائج:

1 - تركيب التوابع ليس عملية تبديلية.

2 – تركيب التوابع عملية تجميعية، أي أنه من أجل كل ثلاث توابع

$$f : A \longrightarrow B \quad , \quad g : B \longrightarrow C \quad , \quad h : C \longrightarrow D$$

فإن

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

وهذا محقق لأن كلا التابعين

$$h \circ (g \circ f) \quad , \quad (h \circ g) \circ f$$

لهما نفس المنطلق A، ونفس المستقر D، كما أنه من أجل كل $x \in A$ فإن

$$\big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = h\big(\,(g \circ f)(x)\big) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)$$

$$\big((h\circ g)\circ f\big)(x) = (h\circ g)\big(f(x)\big) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)$$

4-8- التابع المتباين:

نقول عن تابعٍ ما إنه متباين إذا كان تبايُنُ[17] عناصر المنطلق سيؤدي إلى تباين صورها. أي أنه نقول عن التابع $f : A \longrightarrow B$ إنه متباين إذا تحقق **شرط التباين** التالي

$$\forall\, x_1, x_2 \in A \;:\; (\quad x_1 \neq x_2 \quad\Rightarrow\quad f(x_1) \neq f(x_2)\quad)$$

والذي يكافئ[18] الشرط التالي

$$\forall\, x_1, x_2 \in A \;:\; (\quad f(x_1) = f(x_2) \quad\Rightarrow\quad x_1 = x_2\quad)$$

بمعنى آخر، فإن **كل عنصر من المستقر هو صورة لعنصر واحد على الأكثر من المنطلق**، أي أنه من أجل كل $y \in B$، فإنه إما أن يوجد عنصر واحد فقط x من A يحقق $y = f(x)$، أو لا يوجد أي عنصر يحقق ذلك.

أمثلة:

- التابع الثابت الذي منطلقه يحوي أكثر من عنصرين ليس تابعاً متبايناً.
- التابع المطابق متباين.
- التابع التالي غير متباين (علل) $\quad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \longmapsto f(x) = x^2$
- التابع التالي متباين (علل) $\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \longmapsto g(x) = 7x + 5$
- التابع التالي غير متباين (علل) $\quad + : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad (x,y) \longmapsto x + y$

تمرين:

لتكن A, B أي مجموعتين منتهيتين بحيث $|A| > |B| > 0$. أثبت أن أي تطبيق $f : A \longrightarrow B$ لن يكون متبايناً، ثم استنتج أنه إذا كان التطبيق $f : A \longrightarrow B$ متباين، فإن $|A| \leq |B|$.

4-9- التابع الغامر:

نقول عن تابعٍ ما إنه غامر إذا غمرت أسهم التابع عناصر المستقر (عند تمثيله سهمياً)، بمعنى أنه كل عنصر في المستقر سيصله سهم على الأقل من المنطلق. و بكلامٍ رياضي أكثر دقة، نقول عن التابع $f : A \longrightarrow B$ إنه غامر إذا تحقق **شرط الغمر** التالي

$$y \in B \quad\Rightarrow\quad (\ \exists\, x \in A : f(x) = y\ )$$

و الذي يكافئ $f(A) = B$.

بمعنى آخر، فإن **كل عنصر من المستقر هو صورة لعنصر واحد على الأقل من المنطلق**، أي أن

---

[17] التبايُنُ لُغَةً هو الاختلاف.

[18] لأن $(\sim Q \Rightarrow \sim P) \;\Leftrightarrow\; (P \Rightarrow Q)$

$$\forall\, y \in B \;:\; f^{-1}(\{y\}) = \{\, x \in A \;:\; f(x) = y \,\} \neq \emptyset$$

أمثلة:

- التابع الثابت الذي مستقره يحوي أكثر من عنصرين ليس تابعاً غامراً.
- التابع المطابق غامر.
- التابع التالي غير غامر $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \longmapsto f(x) = x^2$
- التابع التالي غامر $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \longmapsto g(x) = 7x + 5$
- التابع التالي غامر $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;\; ; \;\; (x, y) \longmapsto x + y$

تمرين:

لتكن A, B أي مجموعتين منتهيتين بحيث $|A| < |B|$. أثبت أن أي تطبيق $f : A \longrightarrow B$ لن يكون غامراً. ثم استنتج أنه إذا كان التطبيق $f : A \longrightarrow B$ غامر، فإن $|A| \geq |B|$.

4-10- التابع التقابل:

نقول عن تابعٍ ما إنه تقابل إذا كان متبايناً وغامراً بآنٍ واحد. أي أنه إذا كان كل عنصر من المستقر يقابل عنصر واحد فقط من المنطلق (أو كل عنصر من المستقر هو صورة لعنصر واحد فقط في المنطلق).

أي أنه نقول عن التابع $f : A \longrightarrow B$ إنه تقابل إذا تحقق **شرط التقابل** التالي

$$y \in B \;\Rightarrow\; (\; \exists!^{19} \;\; x \in A \;\;:\;\; f(x) = y \;)$$

أمثلة:

- التابع الثابت الذي مستقره يحوي أكثر من عنصرين ليس تابعاً غامراً و بالتالي فهو ليس تقابل.
- التابع المطابق متباين وغامر فهو تقابل.
- التابع التالي غير متباين و غير غامر فليس تقابل

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \longmapsto f(x) = x^2$$

- التابع التالي غامر ومتباين فهو تقابل

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad x \longmapsto g(x) = 7x + 5$$

- التابع التالي غامر لكن ليس متباين فهو ليس تقابل

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;\; ; \;\; (x, y) \longmapsto x + y$$

تمرين:

لتكن A, B أي مجموعتين منتهيتين بحيث $|A| \neq |B|$. أثبت أن أي تطبيق $f : A \longrightarrow B$ لن يكون تقابلاً، ثم استنتج أنه إذا كان التطبيق $f : A \longrightarrow B$ تقابل، فإن $|A| = |B|$.

[19] الرمز $\exists!$ يعني يوجد و وحيد.

مبرهنة :

ليكن $f : A \longrightarrow B$ تابع ما، بيانه

$$G = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

عندئذٍ فإن العلاقة $f^{-1} := (B, A, G^{-1})$ حيث

$$G^{-1} := \{(f(x), x) : x \in A\}$$

تكون تابعاً إذا و فقط إذا كان التابع f تقابلاً. وعندها فإن

$$f \circ f^{-1} = id_B \ , \qquad f^{-1} \circ f = id_A$$

الإثبات:

لنفرض أن $f : A \longrightarrow B$ تقابل، عندئذٍ فإنه من تعريف التقابل نجد أنه من أجل كل عنصر من المستقر $y \ni B$ يوجد عنصر وحيد $x \ni A$ يحقق $y = f(x)$. مما يبين أن العلاقة

$$f^{-1} := (B, A, G^{-1})$$

والتي صورة أي عنصر $y \ni B$ وفقها هو العنصر الوحيد $x \ni A$ الذي يحقق $y = f(x)$ ، ستكون تابعاً.

وبالعكس إذا فرضنا أن العلاقة $f^{-1} := (B, A, G^{-1})$ حيث $G^{-1} := \{(f(x), x) : x \in A\}$

هي تابع، فإن كون كل عنصر من منطلق التابع f^{-1} سيخرج منه سهم، هذا يقتضي أن f غامر.

و بما أنه لن يخرج سهمين من أي عنصر من منطلق التابع f^{-1} ، فالتابع f متباين، و منه فالتابع f تقابل.

كما أنه ينتج من تعريف التابع f^{-1} أن

$$\forall\, x \in A \ : \ f^{-1}(f(x)) = x$$

$$\forall\, y \in B \ : \ f(f^{-1}(y)) = y$$

مما يعني أن

$f \circ f^{-1} = id_B \ , \ f^{-1} \circ f = id_A$ وهو المطلوب إثباته. ■

تعريف:

من أجل كل تابع تقابل f سندعو التابع الوحيد f^{-1} (الوارد في المبرهنة السابقة) التابع العكسي (أو التقابل العكسي) للتابع f أو مقلوب[20] التابع f.

تمهيدية:

ليكن $g : B \longrightarrow C \,,\ f : A \longrightarrow B$ تابعان ما، عندئذٍ فإن:

1 - $\left(f \text{ متباين} \right) \wedge \left(g \text{ متباين} \right) \Rightarrow g \circ f \text{ متباين}$

2 - $\left(f \text{ غامر} \right) \wedge \left(g \text{ غامر} \right) \Rightarrow g \circ f \text{ غامر}$

3 - $\left(f \text{ تقابل} \right) \wedge \left(g \text{ تقابل} \right) \Rightarrow g \circ f \text{ تقابل}$

4 - $g \circ f \text{ متباين} \Rightarrow f \text{ متباين}$

5 - $g \circ f \text{ غامر} \Rightarrow g \text{ غامر}$

6 - $g \circ f \text{ تقابل} \Rightarrow \left(f \text{ متباين} \right) \wedge \left(g \text{ غامر} \right)$

الإثبات:

1 – لنفرض أن التابعين f, g متباينين ولنبرهن أن $g \circ f$ متباين . أي لنبرهن صحة الاقتضاء التالي

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big)$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \qquad \text{(لأن التابع } g \text{ متباين)}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \qquad \text{(لأن التابع } f \text{ متباين)}$$

2 – لنفرض أن التابعين f, g غامرين ولنبرهن أن $g \circ f$ غامر . أي لنبرهن صحة الاقتضاء التالي

$$z \in C \Rightarrow \exists\, x \in A : \ z = (g \circ f)(x)$$

$$z \in C \Rightarrow \exists\, y \in B : \ z = g(y) \qquad \text{(لأن التابع } g \text{ غامر)}$$

$$z \in C \Rightarrow (\exists\, y \in B : z = g(y)) \wedge (\exists x \in A : \ y = f(x)) \qquad \text{(لأن التابع } f \text{ غامر)}$$

---

[20] إذا كان $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f$ تقابل فإنه بشكلٍ عام $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$ ، أي أن $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$. لكن استخدام كلمة مقلوب مبرر لأنه إذا زودنا المجموعة

$$S(A) := \{\, f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ \ / \ \ f \text{ تقابل} \,\}$$

بعملية تركيب التوابع $\circ$ ، فإن البينة $(S(A), \circ)$ تشكل زمرة (راجع الفصل السابع، فقرة 4-7) ومقلوب كل تقابل f هو تقابله العكسي f^{-1} .

$$\Rightarrow \ \exists\, y \in B\,, \qquad \exists x \in A \ : \ z = g(y) = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x).$$

3 – إذا كان كل من التابعين f, g تقابل فإن كل منهما متباين و بالتالي حسب الفقرة 1 من هذه المبرهنة فإن $g \circ f$ متباين. وكذلك بما أن كل من التابعين غامر فبالاعتماد على الفقرة 2 من المبرهنة فإن $g \circ f$ غامر. إذاً $g \circ f$ تقابل.

4 – لنفرض أن $g \circ f$ متباين، و لنبرهن أن f متباين.

لنفرض جدلاً أن $f: A \longrightarrow B$ غير متباين عندئذٍ فإنه يوجد عنصرين **مختلفين** $A \ni x_1, x_2$ بحيث $f(x_1) = f(x_2)$. وبما أن g تابع فإن $g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big)$ ، أي أن

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

و هذا يناقض الفرض بأن التابع $g \circ f$ متباين. إذاً الفرض الجدلي بأن f غير متباين خاطئ، إذاً f متباين.

5 – لنفرض أن $g \circ f$ غامر، و لنبرهن أن g غامر.

ليكن $C \ni c$ ولنبرهن أنه يوجد $B \ni b$ يحقق $g(b) = c$.

بما أن التابع $g \circ f: A \longrightarrow C$ غامر فإنه يوجد $A \ni a$ يحقق $g\big(f(a)\big) = (g \circ f)(a) = c$

ومنه فإن العنصر $b := f(a)$ $B \ni$ يحقق $g(b) = c$. إذاً g غامر.

6 – ينتج مباشرةً من الفقرتين 4 ، 5 من هذه المبرهنة . ■

مبرهنة :

ليكن $f : A \longrightarrow B \ , \ g : B \longrightarrow A$ تابعان يحققان

$$f \circ g = id_B \ , \qquad g \circ f = id_A$$

عندئذٍ فإن كلاً من التابعين f, g تقابل وكل منهما مقلوب الآخر.

الإثبات:

بالاعتماد على الفقرة 6 بالتمهيدية السابقة نجد

$$g \circ f = id_A \quad \Rightarrow \quad (f \text{ متباين}) \ \wedge \ (g \text{ غامر})$$ تقابل

$$f \circ g = id_B \quad \Rightarrow \quad (g \text{ متباين}) \ \wedge \ (f \text{ غامر})$$ تقابل

ومنه كلاً من g, f تقابل.

و نلاحظ أن التابعان f^{-1}, g لهما نفس المنطلق B، و نفس المستقر A، و لنتحقق أن لهما نفس قاعدة الربط. من أجل كل $b \in B$ فإن

$$g(b) = g\big(id_B(b)\big) = g\big((f \circ f^{-1})(b)\big) = \big((g \circ f) \circ f^{-1}\big)(x)$$
$$= (id_A \circ f^{-1})(x) = f^{-1}(x)$$

إذاً $g = f^{-1}$، و بطريقة مشابهة نثبت أن $f = g^{-1}$. ■

نتيجة:

إذا كان التابع f تقابلاً، فإن $(f^{-1})^{-1} = f$.

مبرهنة:

ليكن $f : A \longrightarrow B$ تابعاً ما، عندئذٍ الشرطين التاليين متكافئين:

1- f متباين .
2- من أجل أي تابعين $g : X \longrightarrow A$ ، $g' : X \longrightarrow A$ فإن
$$f \circ g = f \circ g' \quad \Rightarrow \quad g = g'$$

(الشرط الثاني يدعى شرط قابلية اختصار f من اليسار).

الاثبات:

لنفرض أن f متباين ولنبرهن أنه قابل للاختصار من اليسار.

لنفرض أن $f \circ g = f \circ g'$ ولنبرهن أن $g = g'$.

$$f \circ g = f \circ g' \;\Rightarrow\; \forall\, x \in X :\; (f \circ g)(x) = (f \circ g')(x)$$
$$\Rightarrow \forall\, x \in X \quad f\big(g(x)\big) = f\big(g'(x)\big) \;\Rightarrow\; g(x) = g'(x).$$

و بالعكس لنفرض أن f قابل للاختصار من اليسار، ولنبرهن أن f متباين.

ليكن $x_0, y_0 \in A$ عنصرين كيفيين مثبتين و يحققان $f(x_0) = f(y_0)$ ولنبرهن أن $x_0 = y_0$.

لنعرف التابعان الثابتان $g, g' : A \longrightarrow A$ ، حيث

$$\forall\, \mathrm{a} \in A \;:\quad g(a) = x_0 \quad \wedge \quad g'(a) = y_0$$

فنجد أن

$$f(x_0) = f(y_0) \Rightarrow (f \circ g)(a) = (f \circ g')(a) \;;\; \forall\, a \in A$$
$$\Rightarrow f \circ g = f \circ g' \;\Rightarrow\; g = g' \;\Rightarrow\; x_0 = y_0.$$

مبرهنة:

ليكن $f : A \longrightarrow B$ تابعاً ما، عندئذٍ الشرطين التاليين متكافئين:

1- f غامر .

2- من أجل أي تابعين $h : B \longrightarrow Y$ ، $h' : B \longrightarrow Y'$ فإن

$$h \circ f = h' \circ f \quad \Rightarrow \quad h = h'$$

(الشرط الثاني يدعى شرط قابلية اختصار f من اليمين).

الاثبات:

لنفرض أن f غامر، و أن التابعان $h : B \longrightarrow Y$ ، $h' : B \longrightarrow Y'$ يحققان $h \circ f = h' \circ f$ ولنبرهن أن $h = h'$.

ليكن $b \in B$، و لنبرهن أن $h(b) = h'(b)$.

بما أن f غامر فإنه يوجد $a \in A$ يحقق $f(a) = b$. و بالتالي فإن

$$h \circ f = h' \circ f \Rightarrow (h \circ f)(a) = (h' \circ f)(a)$$

$$\Rightarrow h\big(f(a)\big) = h'\big(f(a)\big) \Rightarrow h(b) = h'(b)$$

وذلك من أجل أي $b \in B$، ومنه $h = h'$.

و بالعكس لنفرض أن f قابل للاختزال من اليمين ولنبرهن أن f غامر.

لنفرض جدلاً أن f غير غامر (و بالتالي مستقر التابع سيحوي عنصرين على الأقل)، عندئذٍ فإنه يوجد $b \in B$ يحقق $\forall x \in A : f(x) \neq b$.

ولنعرِّف التابعان $h := id_B$، و $h' : B \longrightarrow B$ الذي يثبت جميع عناصر B باستثناء العنصر b فيصوره بعنصر آخر مختلف عنه مثل $b' \in B$. عندئذٍ فإن

$$\forall x \in B : \quad (h' \circ f)(x) = f(x) \quad \wedge \quad (h \circ f)(x) = f(x)$$

ومنه $h \circ f = h' \circ f$ لكن $h \neq h'$. فالفرض الجدلي بكون f غير غامر خاطئ، إذا f غامر. ■

نتيجة:

الشرطين التاليين متكافئين:

1 - التابع f تقابل.

2 - التابع f قابل للاختصار من اليمين و من اليسار.

الفصل الخامس

قدرة مجموعة

مقدمة:

إن مفهوم المجموعتين المتساويتين بالقدرة أو اللتين تملكان نفس عدد العناصر، هو مفهومٌ قديم، حتى أنه يمكن ادراكه دون استخدام مفهوم الأعداد.

ففي العصور القديمة و قبل أن يتعرف الإنسان على الكتابة وعلى الأعداد، كان الراعي عندما يخرج صباحاً لرعي خرافه، يأخذ معه مجموعة من الحصاة، فيضع في جيبه حصاة واحدة مقابل كل خروف يخرج معه للرعي، وعند العودة من الرعي يتفقد قطيعه بأن يخرج من جيبه حصاة واحدة مقابل كل خروف يعود من الرعي، فإذا انتهى ما في جيبه من الحصاة عند عودة آخر خروف من الرعي، تأكد أن عدد الخراف كاملاً ولم ينقص منهم شيء. إن ما يقوم به هذا الراعي هو إنشاء تابع تقابل بين مجموعة الخراف لديه ومجموعة الحصاة التي في جيبه. إن وجود مثل هذا التقابل يعني أن للمجموعتين نفس العدد من العناصر. و بالتالي عند تأكد الراعي من أن عدد الخراف في الصباح هو نفسه عدد الحصاة التي في جيبه و هو كذلك نفس عدد الخراف في المساء، استنتج الراعي أن عدد الخراف هو ذاته فلم تزد و لم تنقص.

5-1- قدرة مجموعة منتهية

تعريف:

نعرِّف قدرة مجموعة منتهية A بأنه عدد عناصرها، ونرمز له $card(A)$ أو $|A|$.

فمثلاً

$$Card\ \{4,7,\pi\} = |\{4,7,\pi\}| = 3\,, \qquad Card\ (\emptyset) = 0$$

خواص أساسية :

لتكن A, B أي مجموعتين منتهيتين عندئذٍ فإن

1 – إذا كانت المجموعتين A, B منفصلتين (أي تقاطعهما خالي) فإن

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

2 – لدينا بشكلٍ عام

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

3 – لدينا

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

4 – من أجل أي ثلاث مجموعات منتهية A, B, C فإن

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

5 – من أجل أي مجموعات منتهية $A_1, A_2, \dots, A_n$ فإن

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$+ \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + \cdots +$$

$$(-1)^n \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1} \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_{n-1}}| + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

و يمكن اختصار المجاميع التالية كما يلي

$$\boxed{|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \le k \le n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|}$$

6 – إذا كانت الأسرة $\{A_i \ : \ i \in I\}$ تشكل تجزئة للمجموعة X فإن

$$|X| = \sum_{i \in I} |A_i|$$

7 – إن عدد عناصر الجداء الديكارتي لمجموعتين يساوي جداء عددي عناصرهما، أي أن

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

8 – إن عدد عناصر مجموعة منتهية[21] ما هو أصغر تماماً من عدد مجموعاتها الجزئية، أي أن

$$|A| < |P(A)| = 2^{|A|}$$

يمكن باستخدام الاستقراء الرياضي إثبات أن $\forall n \in \mathbb{N} : n < 2^n$.

سؤال:

هل يمكن إيجاد تطبيق متباين منطلقه $\{1,2,3\}$ و مستقره $\{a, b\}$ ؟

هل يمكن إيجاد تطبيق غامر منطلقه $\{a, b\}$ و مستقره $\{1,2,3\}$ ؟

الجواب في كلتا الحالتين لا (لماذا !؟)

[21] سنرى في فقرة قدرة مجموعة غير منتهية أن هذه الخاصة تبقى صحيحة من أجل المجموعات غير المنتهية.

نتائج[22]:

لتكن A, B أي مجموعتين منتهيتين غير خاليتين، وليكن $f : A \longrightarrow B$ تطبيق ما، عندئذٍ

1 – $|A| > |B| \Leftarrow f$ غير متباين .

2 – f متباين $\Leftarrow |A| \leq |B|$.

3 – $|A| < |B| \Leftarrow f : A \longrightarrow B$ غير غامر.

4 – $f : A \longrightarrow B$ غامر $\Leftarrow |B| \leq |A|$.

5 – $f : A \longrightarrow B$ تقابل $\Leftarrow |A| = |B|$.

7 – إذا وُجِدَ تطبيقين $g : A \longrightarrow B$ ، $h : B \longrightarrow A$ متباينين فإن[23] $|A| = |B|$.

8 – إذا كان التطبيق $f : A \longrightarrow A$ متبايناً فإنه سيكون تقابلاً .

ذلك لأن $|f(A)| = |A|$، و $f(A) \subset A$، وبالتالي فإن $f(A) = A$ ، فالتابع f غامر.

بإمكاننا تفسير ذلك بطريقة أخرى، بما أن التابع متباين فكل عنصر من المستقر سيصله سهم واحد على الأكثر، ولدينا عدد عناصر المستقر $|A|$. وبما أن عدد الأسهم يساوي عدد عناصر المنطلق (حسب شرط التابع) ، أي عدد الأسهم هو $|A|$. نستنتج أن كل عنصر سيصله سهم وحيد. ، وبالتالي فالتابع تقابل.

9– إذا كان التطبيق $g : A \longrightarrow A$ غامراً، فإنه سيكون تقابلاً .

بما أن التابع غامر فإن كل عنصر من المستقر سيصله سهم واحد على الأقل، أي على الأقل عدد الأسهم هو $|A|$ (لأن عدد عناصر المستقر $|A|$)، وبما أن عدد الأسهم يساوي عدد عناصر المنطلق (حسب شرط التابع)، أي عدد الأسهم هو $|A|$. فإن كل عنصر من المستقر سيصله سهم وحيد، وبالتالي فالتابع تقابل.

ملاحظة:

1 – إذا كانت A مجموعة منتهية ما، فإنه من أجل أي مجموعة B محتواه تماماً في A، لا يوجد أي تقابل بين المجموعتين A, B.

2 – إذا كانت المجموعة A تحقق أنه من أجل أي مجموعة B محتواه تماماً في A، لا يوجد أي تقابل بين المجموعتين A, B، عندئذٍ فإن المجموعة A منتهية.

[22] التحقق من خاصة ما بذكر الأمثلة لا يعتبر برهاناً، لذلك فإن التساؤل السابق قبل النتائج هو تمهيد للنتائج الأربعة الأولى وليس اثباتاً لها.
[23] هذه الخاصة تبقى صحيحة من أجل المجموعات غير المنتهية، و تدعى مبرهنة كانتور- برنشتاين .

3 – إذا كانت A مجموعة ما، وإذا وُجِدَ تقابل بين المجموعة A و مجموعة B محتواه تماماً في A ، فإن المجموعة A غير منتهية.

4 – إذا كانت A مجموعة ما غير منتهية، فإنه يوجد تقابل بين المجموعة A و مجموعة B محتواه تماماً في A (المجموعة B هنا ليست كيفية ولكن مختارة باختيار مناسب).

فمثلاً يوجد تقابل (تحقق من ذلك) بين مجموعة الأعداد الصحيحة ومجموعة الأعداد الزوجية الصحيحة و هو التابع التالي

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z} \;\; ; \;\; x \mapsto 2x$$

5-2- قدرة مجموعة غير منتهية

تعاريف:

- نقول عن مجموعتين غير منتهيتين A, B إن لهما نفس القدرة إذا وُجِدَ تقابل بينهما مثل
$$f : A \longrightarrow B$$
و سنرمز ذلك
$$|A| = |B| \qquad \text{أو} \qquad Card(A) = Card(B)$$
و في خلاف ذلك فإننا سنقول إنه ليس للمجموعتين A, B نفس القدرة، وسنرمز ذلك $|A| \neq |B|$ ، وفي هذه الحالة فإن كل تطبيق $f : A \longrightarrow B$ لن يكون تقابلاً.
- نقول إن قدرة المجموعة A أصغر أو تساوي قدرة المجموعة B، وسنرمز ذلك $|A| \leq |B|$ ، إذا وُجِدَ تابع متباين مثل $g : A \longrightarrow B$.
- نقول إن قدرة المجموعة A أصغر تماماً من قدرة المجموعة B، وسنرمز ذلك $|A| < |B|$ ، إذا تحقق ما يلي
$$(\,|A| \neq |B|\,) \quad \wedge \quad (\,|A| \leq |B|\,)$$

نتيجة:

1 – من أجل أي مجموعتين A, B بحيث $A \subset B$ فإن $|A| \leq |B|$. ذلك لوجود تابع التباين القانوني $i_A : A \longrightarrow B \; ; \;\; x \mapsto x$ ، هو تابع متباين. و بالتالي

$$|A| \leq |B|$$

2 – إذا كانت A, B مجموعتين غير منتهيتين و تحققان $|A| \leq |B|$ ، فإنه يوجد تطبيق متباين

$$f : A \longrightarrow B$$

و بالتالي فإن التطبيق $g : A \longrightarrow f(A) \, ; x \mapsto g(x) := f(x)$ تقابل. و بما أن $f(A) \subset B$

فإننا أحياناً نطابق بين المجموعتين $A, f(A)$. فمثلاً التطبيق التالي

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \;\; ; \;\; x \mapsto g(x) = (x, 0)$$

متباين، لذلك وبالمطابقة بين المجموعتين $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}$ فإننا نعتبر أن $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$

و نمثل ذلك هندسياً بالقول إن محور الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ محتوى في المستوي الديكارتي $\mathbb{R}^2$.

3-5- المجموعات القابلة للعد :

تعريف:

نقول عن مجموعة A إنها قابلة للعد إذا وجد تقابل بينها و بين مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ [24].

أي إذا كان

$$|\,\mathbb{N}\,| = |A|$$

و في هذه الحالة فإنه يمكن عدّ عناصر المجموعة A، ذلك لأنه إذا كان

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow A$$

تقابل ما، و بوضع

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad a_n \coloneqq f(n)$$

فإن

$$A = \{a_1,\, a_2\,, a_3, \dots\}$$

نتيجة:

إذا أمكن كتابة المجموعة A بالشكل التالي (أو بعبارةٍ أخرى: إذا أمكن عدّ عناصر المجموعة A)

$$A = \{a_1,\, a_2\,, a_3, \dots\}$$

فإن المجموعة A ستكون قابلة للعد.

مثال (1):

إذا كانت X مجموعة جزئية منتهية من $\mathbb{N}$، فإن المجموعة $\mathbb{N} \setminus X$ ستكون قابلة للعد. كما أنه إذا كانت X مجموعة غير منتهية و جزئية من $\mathbb{N}$ و بحيث أن المجموعة $\mathbb{N} \setminus X$ غير منتهية أيضاً، فإن المجموعة $\mathbb{N} \setminus X$ ستكون قابلة للعد.

---

[24] بعض المؤلفين يعرف المجموعة القابلة للعد بأنها مجموعة يوجد تقابل بينها و بين مجموعة الأعداد الطبيعية المغايرة للصفر $\mathbb{N}^*$ ، و هذين التعريفين متكافئين وذلك لوجود التقابل التالي $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^* \,;\, x \mapsto f(x) \coloneqq x + 1$.

مثال (2):

المجموعة $m\mathbb{N} = \{mk : k \in \mathbb{N}\}$ (حيث $m \in \mathbb{N}^*$) قابلة للعدّ وذلك لأن

$$m\mathbb{N} = \{0, m, 2m, 3m, \dots\}$$

كما يمكن تفسير ذلك بطريقة أخرى، وهي وجود التقابل التالي

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow m\mathbb{N} \; ; \;\; x \mapsto f(x) = mx$$

مثال (3):

مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ قابلة للعد لأن

$$\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\dots\}$$

كما يمكن تفسير كون $\mathbb{Z}$ قابلة للعد بالاعتماد على التقابل التالي

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \;\; f(2n) \coloneqq -n \;\; , \;\; f(2n+1) \coloneqq n+1$$

لاحظ أن : $f(\{0,1,2,3,4,5,6\}) = \{0,1,-1,2,-2,3,-3\}$

نتائج:

1 – كل مجموعة جزئية غير منتهية من مجموعة قابلة للعد ستكون قابلة للعد.

2 – ليكن $f : A \longrightarrow B$ تابعاً متبايناً بين مجموعتين غير منتهيتين، عندئذٍ إذا كانت B قابلة للعدّ فإن A كذلك.

ذلك لأن $|f(A)| = |A|$ ، كما أن $f(A)$ مجموعة جزئية غير منتهية من B، و بالتالي حسب 1 فإن $f(A)$ قابلة للعد ، وبالتالي A كذلك.

3 – المجموعة $\mathbb{N}^2$ قابلة للعد.

ذلك لأنه يمكن كتابة المجموعة $\mathbb{N}^2$ كما يلي

$$\mathbb{N}^2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(0,2),(1,1),(2,0),\dots,$$
$$(0,n),(1,n-1),(2,n-2),\dots,(n-1,1),(n,0),\dots\}$$

3 – الجداء الديكارتي لمجموعتين قابلتين للعد هو مجموعة قابلة للعد.

لأنه إذا كانت A, B مجموعتين قابلتين للعد فإنه يوجد تقابلين

$$f:\mathbb{N}\longrightarrow A \quad , \quad g:\mathbb{N}\longrightarrow B$$

وبالتالي فإن التابع التالي سيكون تقابل

$$h:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow A\times B \;;\; (x,y)\mapsto h(x,y):=\big(f(x),g(y)\big)$$

وبما أن $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ قابلة للعد (حسب 2) فإن $A\times B$ كذلك.

مبرهنة:

مجموعة الأعداد العادية $\mathbb{Q}$ قابلة للعد.

الاثبات:

التطبيق التالي متباين

$$f:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Z}^2 \;;\frac{a}{b}\mapsto f\left(\frac{a}{b}\right):=(a,b)$$

وبما أن $\mathbb{Z}^2$ قابلة للعد (حسب 3 من النتيجة السابقة) و التابع السابق متباين فحسب 2 من النتيجة السابقة فإن $\mathbb{Q}$ قابلة للعد. ■

مثال:

المجموعات التالية قابلة للعد

$$A_1=\left\{\frac{n+7}{n-1}:n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\right\},A_2=\{\sqrt{n}\;:n\in\mathbb{N}\},A_3=\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$$

سنقبل المبرهنة التالية دون برهان

مبرهنة:

لا يوجد أي تقابل بين مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ و مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

مثال (4):

التابع

$$f:\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow\mathbb{R}\;;x\mapsto f(x):=tgx$$

تقابل لأنه غامر و مستمر ومتزايد لكون

$$f'(x)=1+tg^2x>0 \;\;;\;\; \forall\,x\in\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$$

و بالتالي $|\mathbb{R}| = |\,]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[\,|$.

نتائج:

1 – من أجل كل $a < b, c < d$ فإن التابع التالي تقابل

$$f : [a,b] \longrightarrow [c,d]\,; x \mapsto f(x) \coloneqq c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)$$

لأنه مستمر و متزايد (حيث $f'(x) = \frac{d-c}{b-a} > 0$) كما أن $f(a) = c\,, f(b) = d$.

إذاً أي مجالين مغلقين لهما نفس القدرة.

2 – من أجل كل $a < b, c < d$ فإن التابع التالي تقابل

$$f :]a,b[\longrightarrow]c,d[\,; x \mapsto f(x) \coloneqq c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)$$

ومنه

$$|\,]a,b[\,| = |]c,d[\,|\,, \qquad \forall\ a < b, c < d$$

لكن وجدنا في المثال السابق أن

$$|\mathbb{R}| = |\,]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[\,|$$

و منه

$$|\mathbb{R}| = |\,]a,b[\,| \quad , \ \forall\ a < b$$

3 – من أجل كل $a < b$ فإن

$$|\mathbb{R}| = |\,]a,b[\,| = |\,[a,b]|$$

مبرهنة :

من أجل أي مجموعة A فإن

$$|A| < |P(A)|$$

الاثبات:

نعلم أن

$$|A| \leq |P(A)|$$

و ذلك لأن التابع التالي متباين

$$f : A \longrightarrow P(A); x \mapsto f(x) := \{x\}$$

والآن لنبرهن أنه لا يوجد أي تقابل بين $A , P(A)$.

لنفرض جدلاً وجود تقابل

$$g : A \longrightarrow P(A)$$

ولنعرّف المجموعة

$$B := \{ x \in A : x \notin g(x) \} \in P(A)$$

عندئذٍ بما أن g غامر فيوجد عنصر b يحقق $g(b) = B$ ، و بالتالي لنميز حالتين:

الحالة الأولى : $b \in B$

$$b \in B \Rightarrow b \notin g(b) = B$$

مستحيلة.

الحالة الثانية : $b \notin B$

$$b \notin B \Rightarrow b \in g(b) = B$$

مستحيلة.

إذاً نستنتج أن الفرض الجدلي بوجود تطبيق ما تقابل $g : A \longrightarrow P(A)$ هو فرض خاطئ.

إذا لا يوجد أي تقابل بين المجموعتين $A, P(A)$ وبما أن $|A| \leq |P(A)|$ فإن $|A| < |P(A)|$. ■

الفصل السادس

خوارزمية القسمة والأعداد الأولية

6-1- القسمة في $\mathbb{Z}$:

مقدمة:

لقد تعلم الطالب منذ مراحل الدراسة الابتدائية أنه من أجل أي عددين طبيعيين مغايرين للصفر، مثل 17 و 5، لإيجاد ناتج قسمة 17 على 5، فإننا نطرح من العدد 17 العدد 5 بشكل متكرر لنجد أنه بعد تكرار العملية ثلاث مرات يبقى لدينا 2.

أي أن

$$17 - 3 \times 5 = 2$$

و هذا يعني أن

$$17 = 3 \times 5 + 2$$

أو بعبارةٍ أُخرى

$$\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$$

وعندها نقول إن ناتج قسمة 17 على 5 هو 3، و باقي قسمة 17 على 5 هو 2.

إن ما قمنا به في المثال السابق يدعى خوارزمية قسمة العدد 17 على العدد 5، و المبرهنة التالية تبين بشكلٍ عام خوارزمية القسمة لعددين طبيعيين مختلفين (خوارزمية قسمة العدد الكبير على العدد الصغير)

مبرهنة:

من أجل كل $m, n \in \mathbb{N}^*$ بحيث $m < n$ ، يوجد عددين طبيعيين وحيدين q, r يحققان

$$\frac{n}{m} = q + \frac{r}{m} \quad ; \quad 0 \leq r < m$$

أي أن

$$n = mq + r \quad ; \quad 0 \leq r < m$$

سندعو : q ناتج قسمة n على m ، r باقي قسمة n على m .

الإثبات:

أولاً: إثبات الوجود

لنبرهن أنه من أجل كل $m, n \in \mathbb{N}^*$ بحيث $m < n$ ، يوجد عددين طبيعيين q, r يحققان

$$\frac{n}{m} = q + \frac{r}{m} \quad ; \quad 0 \leq r < m$$

إذا كان n مضاعف للعدد m فإنه يوجد $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ يحقق $n = mk$، وبالتالي

$$\exists\, q := k \,, r := 0 \quad : \quad n = qm + r$$

و الآن لنفرض أن n ليس مضاعفاً للعدد m و بالتالي فإن

$$n \in \mathbb{N}^* \setminus \{m, 2m, 3m, \dots\}$$

ومنه يوجد $k \in \mathbb{N}^*$ يحقق

$$km < n < (k+1)m$$

و بالتالي فإن

$$0 < n - km < m$$

ومنه

$$n = km + (n - km) = qm + r$$

حيث

$$q := k\,, \qquad r := n - km$$

كما أن $0 < r < m$ ، و بهذا يتم اثبات الوجود.

ثانياً: إثبات الوحدانية

لنفرض أنه من أجل $0 < m < n$ أمكن كتابة n بطريقتين كما يلي

$$n = qm + r = q'm + r'$$

ولنفرض أن $r \leq r'$ (دون انقاص العمومية ، حيث الحالة المعاكسة تعامل معاملة مشابهة) عندئذٍ فإن

$$(q - q')\, m = r' - r$$

$$r' - r \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; q - q' \geq 0$$

فإذا فرضنا جدلاً أن $q - q' > 0$ ، فنجد أن

$$r' \geq r' - r = (q - q')m \geq m$$

و هذا يناقض كون $0 \leq r' < m$، إذاً الفرض الجدلي بكون $q - q' > 0$ خاطئ،

و بالتالي فإن $q - q' = 0$ أي $q = q'$ ، و $r = r'$. ■

ملاحظة:

المبرهنة السابقة تبقى صحيحة من أجل $n \leq m$.

حيث في هذه الحالة فإن الكتابة

$$n = mq + r \ ; \quad 0 \leq r < m$$

ستكون تافهة . ففي حالة $n \neq m$ (أي $n < m$) نجد

$$n = m \times 0 + n \ ; \quad 0 \leq n < m$$

أو

$$\frac{n}{m} = 0 + \frac{n}{m}$$

و في حالة $n = m$ فإن

$$n = m \times 1 + 0 \quad ; \quad 0 \leq \ r := 0 \ < m$$

من هذه الملاحظة و المبرهنة السابقة نستنتج صحة المبرهنة التالية

مبرهنة:

من أجل كل $m, n \in \mathbb{N}^*$، يوجد عددين طبيعيين وحيدين q, r يحققان

$$n = mq + r \quad ; \quad 0 \leq r < m$$

سندعو : q ناتج قسمة n على m ، r باقي قسمة n على m .

تعريف:

إذا كان باقي قسمة n على m هو 0 ، أي أنه يوجد $q \in \mathbb{N}^*$ يحقق $n = qm$ ، فإننا سنقول إن m يقسم n، أو m قاسم للعدد n، أو m هو من عوامل n، و سنرمز ذلك $m \mid n$. وكذلك سنقول إن العدد n مضاعف للعدد m.

نتيجة:

إذا كان $m, n, d \in \mathbb{N}^*$ ، بحيث

$$d \mid m \quad \wedge \quad d \mid n$$

فإن

$$d \mid m + n \quad , \quad d \mid m - n \quad , \quad d \mid \alpha.m + \beta.n \quad ; \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}$$

سنقبل دون برهان المبرهنة التالية و التي تدعى مبرهنة خوارزمية القسمة في $\mathbb{Z}$، و التي تعمم خوارزمية القسمة في $\mathbb{N}$

مبرهنة: (خوارزمية القسمة في $\mathbb{Z}$)

من أجل كل $m,n \in \mathbb{Z}^*$، يوجد عددين صحيحين وحيدين q,r يحققان

$$n = mq + r \quad ; \quad 0 \leq r < |m|$$

فمثلاً

$$\frac{-17}{5} = (-4)(5) + \frac{3}{5}$$

$$\frac{17}{-5} = (4)(-5) + \frac{3}{5}$$

$$\frac{-17}{-5} = (-3)(-5) + \frac{2}{5}$$

6-2- القاسم المشترك الأكبر لعددين

تعريف:

نقول عن العدد $d \in \mathbb{N}^*$ إنه قاسم مشترك أكبر للعددين $m,n \in \mathbb{N}^*$، إذا تحقق الشرطين:

1 – العدد d هو قاسم مشترك للعددين m,n ، أي أن $d \mid m \ \wedge \ d \mid n$.

2 – العدد d يقبل القسمة على (وبالتالي أكبر من) أي قاسم مشترك آخر للعددين m,n، أي أن

$$d' \mid m \ \wedge \ d' \mid n \Rightarrow d' \mid d \Rightarrow \mathrm{d}' \leq \mathrm{d}$$

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين مغايرين للصفر m,n موجود و وحيد، وسنرمز له $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$.

أما مسألة وجود القاسم المشترك الأكبر لعددين فتنتج من كون مجموعة القواسم المشتركة لهذين العددين مجموعة جزئية منتهية من $\mathbb{N}$.

كما أن وحدانية القاسم المشترك الأكبر تنتج من تعريف القاسم المشترك الأكبر.

حيث أنه إذا كان d_1, d_2 كل منهما قاسم مشترك أكبر لعددين ما، فإنه من الشرط الثاني لتعريف القاسم المشترك الأكبر نجد أن

$$d_1 \leq d_2 \ \wedge \ d_2 \leq d_1$$

و بالتالي $d_1 = d_2$.

3-6- خوارزمية قسمة اقليدس لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

نعلم حسب مبرهنة سابقة أنه من أجل كل $m, n \in \mathbb{N}^*$ بحيث $m < n$ ، يوجد عددين طبيعيين وحيدين q_1, r_1 يحققان

$$0 < m < n \quad \Rightarrow \quad n = mq_1 + r_1 \quad ; \quad 0 \leq r_1 < m$$

فإذا كان[25] $r_1 \neq 0$ فإنه بتطبيق خوارزمية القسمة على العددين $r_1, m \in \mathbb{N}^*$ نجد

$$0 < r_1 < m \quad \Rightarrow \quad m = r_1 q_2 + r_2 \quad ; \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

و إذا كان[26] $r_2 \neq 0$ ، فإنه بتطبيق خوارزمية القسمة على العددين $r_1, r_2 \in \mathbb{N}^*$ نجد

$$0 < r_2 < r_1 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 q_3 + r_3 \quad ; \quad 0 \leq r_3 < r_2$$

فإذا كان $r_3 \neq 0$ نتابع العملية

$$0 < r_3 < r_2 \quad \Rightarrow \quad r_2 = r_3 q_4 + r_4 \quad ; \quad 0 \leq r_4 < r_3$$

و هكذا... وبشكلٍ عام في المرحلة رقم k فإن

$$0 < r_k < r_{k-1} \Rightarrow \quad r_{k-1} = r_k q_{k+1} + r_{k+1} \quad ; \quad 0 \leq r_{k+1} < r_k$$

وبما أن

$$0 \leq r_{k+1} < r_k < \cdots < r_2 < r_1 < m$$

فإنه بعد عدد منتهي من المراحل (عددها لا يتجاوز m ، لأن $\forall i ; r_i \leq m - i$) سيكون $r_l = 0$ من أجل اختيار مناسب للعدد l ، حيث $l \geq 1$.

لنفرض مثلاً أن $r_4 = 0$ (للتوضيح فقط وتسهيل الحساب، والحالة العامة تعالج بشكل مشابه)، عندئذٍ فإن

$$\begin{aligned}
&0 < m < n \quad \Rightarrow \quad n = mq_1 + r_1 \quad ; \quad 0 < r_1 < m \ (1\\
&0 < r_1 < m \quad \Rightarrow \quad m = r_1 q_2 + r_2 \quad ; \quad 0 < r_2 < r_1 \ (2\\
&0 < r_2 < r_1 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 q_3 + r_3 \quad ; \quad 0 < r_3 < r_2 \ (3
\end{aligned}$$

---

[25] إذا كان $r_1 = 0$ فإن $n = mq_1$ و بالتالي m هو القاسم المشترك الأكبر للعددين m, n .

[26] إذا كان $r_2 = 0$ فإن $m = r_1 q_2$ و بالتالي r_1 هو القاسم المشترك الأكبر للعددين m, n . ذلك لأن r_1 يقسم m و بالتالي r_1 يقسم $n = mq_1 + r_1$ ، إذاً r_1 قاسم مشترك للعددين m, n. كما أنه من أجل أي قاسم آخر مشترك مثل d' للعددين m, n فإن $d' \mid n - mq_1 = r_1$ و بالتالي $d' \leq r_1$.

$$0 < r_3 < r_2 \quad \Rightarrow \quad r_2 = r_3 q_4 \qquad (4$$

عندئذٍ فإن

$\boxed{r_3 \text{ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين } m,n}$

كما أنه

$\boxed{\text{يوجد عددين}^{27} \text{ صحيحين } \alpha,\beta \text{ يحققان } r_3 = (m,n) = \alpha.m + \beta.n}$

لإثبات أن r_3 هو القاسم المشترك الأكبر للعددين m,n، يكفي ملاحظة أن

$$r_3 \left| r_2 \xRightarrow{\text{حسب } 3)} r_3 \right| r_1 = r_2 q_3 + r_3 \xRightarrow{\text{حسب } 2)} r_3 \left| m = r_1 q_2 + r_2 \xRightarrow{\text{حسب } 1)} r_3 \right| n = m q_1 + r_1$$

إذاً r_3 قاسم مشترك للعددين m,n . كما أنه إذا كان d أي قاسم مشترك للعددين m,n فإنه من 1) نستنتج أن $d \mid r_1$ ، ومن ثم من 2) نستنتج أن $d \mid r_2$، ومن 3) نستنتج أن $d \mid r_3$، ومنه $d \le r_3$.

و الآن لنثبت أنه يوجد عددين صحيحين α,β يحققان

$$r_3 = (m,n) = \alpha.m + \beta.n$$

$$(3 \Rightarrow \quad r_3 = r_1 - r_2 q_3 \xRightarrow{\text{حسب } 2)} r_2 = m - r_1 q_2 \Rightarrow r_3 = r_1 - q_3(m - r_1 q_2)$$

$$\Rightarrow r_3 = (1 + q_2 q_3) r_1 - q_3 m \xRightarrow{r_1 = n - m q_1 \ \ (1} r_3 = (1 + q_2 q_3)(n - m q_1) - q_3 m$$

$$\Rightarrow r_3 = (1 + q_2 q_3) n - (q_1 + q_3 + q_1 q_2 q_3) m = \alpha.m + \beta.n$$

تمرين:

أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 1000 ، 48.

ثم أوجد α,β الذين يحققان

$$(1000,48) = 1000\,\alpha + 48\,\beta$$

الحل:

$$48 < 1000 \Rightarrow 1000 = (48)(20) + 40 \ ; \quad 40 < 48 \qquad (1$$

$$40 < 48 \quad \Rightarrow \quad 48 = (40)(1) + 8 \ ; \quad 8 < 40 \qquad (2$$

$$8 < 40 \quad \Rightarrow \quad 40 = (8)(5) \qquad (3$$

---

[27] العددين الصحيحين α,β الذين يحققان $(,n) = \alpha.m + \beta.n$ ليسا وحيدين بالضرورة، فمثلاً $(2,3) = 1$ ، كما أن $(2,3) = 1 = (1)(3) + (-1)(2) = (-1)(3) + (2)(2) = (3)(3) + (-4)(2)$

ومنه $8 = (1000,48)$.

لإيجاد α, β الذين يحققان

$$(1000,48) = 1000\,\alpha + 48\,\beta$$

من (2) نجد

$$8 = 48 - 40$$

بالاستفادة من (1) نجد

$$8 = 48 - (1000 - 20 \times 48) = (-1)1000 + (21)48$$

ومنه $\alpha = -1\,, \beta = 21$.

4-6- العددان الأوليان فيما بينهما

تعريف:

نقول عن عددين $m, n \in \mathbb{N}^*$ إنهما أوليان فيما بينهما إذا كان القاسم المشترك الأكبر لهما 1 .

وعندها فإنه يوجد عددين صحيحين α, β يحققان

$$\alpha.m + \beta.n = 1$$

تدعى هذه المساواة مساواة بيزو (Bezout).

فمثلاً العددين 9 و 14 أوليان فيما بينهما لأن القاسم المشترك الأكبر لهما 1، كما أن

$$1 = (2)(14) + (-3)(9) = (-7)(14) + (11)(9)$$

لكن العددين 10 و 14 غير أوليين فيما بينهما لأن القاسم المشترك الأكبر لهما 2، كما أن

$$2 = (3)(10) + (-2)(14) = (3)(14) + (-4)(10)$$

ملاحظة:

وجدنا سابقاً أن الاقتضاء التالي صحيح

$$d = (m,n) \Rightarrow \exists\ \alpha,\beta \in \mathbb{Z}\ :\ \alpha.m + \beta.n = d$$

لكن عكس هذا الاقتضاء غير صحيح، أي أن التكافؤ التالي غير صحيح

$$d = (m,n) \Leftrightarrow \exists\ \alpha,\beta \in \mathbb{Z}\ :\ \alpha.m + \beta.n = d$$

ذلك لأن أي مضاعف d للعدد (m,n) سيحقق العلاقة في الطرف الأيمن دون أن يحقق الشرط في الطرف الأيسر.

في حالة خاصة إذا كان $d = 1$ فإن التكافؤ السابق يصبح صحيح، فإذا فرضنا أنه

$$\exists \ \alpha,\beta \in \mathbb{Z} \ : \ \alpha.m + \beta.n = 1$$

فمن أجل كل d' قاسم مشترك للعددين m,n نجد

$$d'|m \ \wedge \ d'|n \ \Rightarrow d'|\alpha.m + \beta.n = 1 \ \Rightarrow d' \leq 1 \Rightarrow d' = 1$$

ومنه $(m,n) = 1$.

وبهذا نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة التالية

مبرهنة: (مبرهنة بيزو Bezout)

يكون العددان m,n أوليان فيما بينهما إذا و فقط إذا وُجِدَ عددان صحيحان α,β يحققان

$$\alpha.m + \beta.n = 1$$

تمرين:

أثبت أن العددين 125، 144 أوليان فيما بينهما، ثم أوجد العددين الصحيحين α,β الذين يحققان

$$\alpha\ 144 + \beta 125 = 1$$

5-6- الأعداد الأولية

تعريف :

نقول عن العدد $p \in \mathbb{N}^*$ إنه أولي إذا كان عدد قواسمه 2، أي إذا كان له قاسمان بالضبط و هما 1، p.

وبعبارةٍ أخرى فإنه من أجل كل $k \in \{2,3,\dots,p-1\}$ فإن $(p,k) = 1$.

و بالتالي يكون العدد p غير أولي إذا وُجِدَ قاسم له مختلف عن 1، p.

فمثلاً: الأعداد التالية أولية 2,3,5,19 ، و الأعداد التالية غير أولية 1,4,10 .

كما أن العدد 2 هو العدد الزوجي الوحيد الأولي.

نتيجة:

كل عدد غير أولي سيقبل القسمة على عدد أولي ما.

الإثبات:

ليكن $m \in \mathbb{N}^*$ عدد غير أولي عندئذٍ فإنه يوجد عدد $k_1 \in \mathbb{N}^* \setminus \{m,1\}$ يقسم m ، فإذا كان k_1 غير أولي فيوجد $k_2 \in \mathbb{N}^* \setminus \{k_1,1\}$ يقسم k_1 ، وهكذا نحصل على متتالية متناقصة تماماً من الأعداد الطبيعية و التي ستنتهي حتماً و بعد عدد منتهي من الخطوات بأحد الأعداد الأولية مثل k_l (حيث l هو عدد الخطوات، و $l \leq m-2$)

$$0 < k_l < k_{l-1} < \cdots < k_2 < k_1 < m$$

و ذلك لأن

$$\forall\, i \in \{1,2,\dots,l\} :\ \ k_i \leq m - i$$

إذاً يوجد عدد أولي مثل k_l يقسم k_{l-1}، و k_{l-1} يقسم k_{l-2}، و هكذا...، حتى k_2 يقسم k_1، و k_1 يقسم m، و بالتالي فالعدد الأولي k_l يقسم m.

مبرهنة:

كل عدد طبيعي $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ يكتب بشكل **وحيد** كجداء لأعداد أولية (بغض النظر عن ترتيب المضاريب[28]) ، أي أنه توجد أعداد أولية $p_1, p_2, \dots, p_n$ تحقق

$$m = p_1 p_2 \dots p_n$$

الإثبات:

لنبرهن ذلك بالاستقراء الرياضي على m، لنفرض أن كل عدد طبيعي مغاير للصفر و أصغر تماماً من m يكتب بشكل وحيد كجداء لأعداد أولية ولنبرهن أن m كذلك.

إذا كان m عدد أولي فقد تم المطلوب، لذلك لنفرض أن m غير أولي، و بالتالي حسب النتيجة السابقة يوجد عدد أولي p يقسم m ، وبما أن $\frac{m}{p}$ أصغر تماماً من m، فهو حسب الفرض الاستقرائي يكتب بشكل وحيد كجداء لأعداد أولية مثل $p_1, p_2, \dots, p_n$ ، ومنه

$$m = p.p_1.p_2 \dots p_n$$

و وحدانية كتابة m كجداء لأعداد أولية تنتج من وحدانية كتابة $\frac{m}{p}$ كجداء لأعداد أولية (علّل !). ■

---

[28] أي أننا سنعتبر مثلاً الكتابات التالية متطابقة $100 = 2^2 \times 5^2 = 2 \times 5^2 \times 2 = 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 5^2 \times 2^2 = 5 \times 2 \times 5 \times 2$

مبرهنة:

مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية.

الإثبات:

لنفرض جدلاً أن مجموعة الأعداد الأولية منتهية، و لتكن

$$X = \{p_{1,}p_2, \dots , p_n\}$$

هي مجموعة كل الأعداد الأولية، عندئذٍ فإن العدد الطبيعي $1 < m = 1 + p_1p_2 \cdots p_n$ أكبر من جميع عناصر المجموعة X، و منه $m \notin X$، و بالتالي حسب النتيجة السابقة فإن m سيقبل القسمة على عدد أولي ما $p_i \in X$، وبالتالي فإن

$$p_i \mid m \quad \wedge \quad p_i | m - 1 = p_1 p_2 \dots p_n$$

و بالتالي $p_i \mid m - (m - 1) = 1$، وهذا يناقض كون العدد p_i أولي، إذاً الفرض الجدلي بكون مجموعة الأعداد الأولية منتهية خاطئ، و بالتالي مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية. ■

الفصل السابع

مدخل بسيط إلى نظرية الزمر

7-1- قانون التشكيل الداخلي و العملية الداخلية على مجموعة:

تعريف:

لتكن A مجموعة ما غير خالية، سندعو أي تطبيق

$$*: A \times A \to A$$

$$(x,y) \mapsto *(x,y)$$

قانون تشكيل داخلي على A ، وعندئذٍ فإن صورة الثنائية (x,y) وفق $*$، هو العنصر $*(x,y)$ من A، والذي سنرمز له $x * y$.

إذا كان $*$ قانون تشكيل داخلي على A، فإننا سندعو أيضاً $*$ عملية داخلية على A، و سنقول في هذه الحالة إن المجموعة A مغلقة بالنسبة للعملية $*$، وسندعو الثنائية $(A,*)$ بنية جبرية[29] (أو بنية اختصاراً).

أي أن

$$(\ x,y \in A \ \Rightarrow \ x*y \in A\ ) \ \Leftrightarrow\ (\text{العملية } * \text{ داخلية على } A)$$

وبالتالي

$$(\ \exists\, x,y \in A \ :\ x*y \notin A\ ) \ \Leftrightarrow\ (\text{العملية } * \text{ غير داخلية على } A)$$

فمثلاً إن عملية الجمع $(+)$ على $\mathbb{N}$ هي عملية داخلية لأنه

$$x,y \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ x+y \in \mathbb{N}$$

إذاً المجموعة $\mathbb{N}$ مغلقة بالنسبة لعملية الجمع، أي أن $(+)$ هو قانون تشكيل داخلي على $\mathbb{N}$ وهو التابع التالي

$$+: A \times A \to A$$

$$(x,y) \mapsto\ +(x,y) := x+y$$

أي أن $(\mathbb{N},+)$ بنية جبرية (أو بنية اختصاراً).

بالمقابل فإن عملية الطرح $(-)$ على $\mathbb{N}$ ليست عملية داخلية لأنه

$$\exists\, x,y \in \mathbb{N} \ \ :\ \ x-y \notin \mathbb{N}$$

فمثلاً من أجل $x=0, y=1$ ، نجد $x-y=-1 \notin \mathbb{N}$.

[29] تُعرَّف البنية الجبرية، بشكلٍ عام، بأنها مجموعة غير خالية مزودة بعدد منتهي من قوانين التشكيل (الداخلية أو الخارجية). فالفضاء الشعاعي، مثلاً، هو بنية جبرية مزودة بقانون تشكيل داخلي و آخر خارجي. لكن في كل ما يرد في دراستنا للزمر، البنية الجبرية (أو البنية اختصاراً) يقصد بها مجموعة غير خالية مزودة بقانون تشكيل داخلي واحد فقط.

إذاً المجموعة $\mathbb{N}$ غيرمغلقة بالنسبة لعملية الطرح، أي أن $(-)$ ليس قانون تشكيل داخلي على $\mathbb{N}$ ، أي أن $(\mathbb{N},-)$ ليست بنية جبرية (أو ليست بنية اختصاراً).

2-7- أمثلة:

1- كل مما يلي هو بنية جبرية (تحقق من ذلك):

$$(\mathbb{N},+),\quad (\mathbb{Z},+),\quad (\mathbb{Q},+),\quad (\mathbb{R},+),\quad (\mathbb{C},+)$$
$$(\mathbb{N},\times),\quad (\mathbb{Z},\times),\quad (\mathbb{Q},\times),\quad (\mathbb{R},\times),\quad (\mathbb{C},\times)$$
$$(\mathbb{Q}^*,\times),\quad (\mathbb{R}^*,\times),\quad (\mathbb{C}^*,\times),\quad (\mathbb{Q}^*,\div),\quad (\mathbb{R}^*,\div),\quad (\mathbb{C}^*,\div)$$
$$(\{1,-1\},\times),\quad (\{1,0\},\times),\quad (\{1,-1\},\div)$$
$$(\{1,-1,i,-i\},\times),\quad \left(\left\{e^{ix}\in\mathbb{C} : x\in\mathbb{R}\right\},\times\right),\quad (n\mathbb{Z},+)$$

حيث $n\in\mathbb{N}^*$، و المجموعة $n\mathbb{Z}$ هي مجموعة المضاعفات الصحيحة للعدد n، أي أن

$$\mathrm{n}\mathbb{Z} := \{\mathrm{nk} : \mathrm{k}\in\mathbb{Z}\} = \{\dots,-3n,-2n,-n,0,n,2n,3n,\dots\}$$

2- كل مما يلي ليس بنية جبرية(علل ذلك):

$$(\mathbb{N},-),(\mathbb{Z},\div),(\mathbb{Q},\div),(\{1,2,3\},+)$$

3- من أجل أي مجموعة غير خالية A فإن $(P(A),\cap)$ هي بنية.

4- إن $(\mathbb{R}^n,+)$ بنية، حيث الجمع على $\mathbb{R}^n$ معرف كما يلي:

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$$

5- إن $(M_n(\mathbb{R}),+)$ بنية، حيث $M_n(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة n و بأمثال من $\mathbb{R}$، والجمع المعرف عليها هو جمع المصفوفات المألوف.

6- إن $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ بنية، حيث المجموعة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ هي مجموعة صفوف تكافؤ علاقة التطابق بالمقاس n ، المعرفة كما يلي:

$$x\equiv y\ (mod\ n)\ \Leftrightarrow\ x-y\in n\mathbb{Z}$$

حيث عملية الجمع على صفوف التكافؤ معرّفة كما يلي (يجب التحقق من كونها معرّفة جيداً[30])

$$[x]+[y]:=[x+y]$$

7- مجموعة الأشعة في الفراغ $\mathbb{R}^3$ مع عملية الجداء الخارجي للأشعة تشكل بنية جبرية.

8- مجموعة الأشعة في الفراغ $\mathbb{R}^3$ مع عملية الجداء الداخلي للأشعة لا تشكل بنية جبرية.

9- لتكن X مجموعة ما من القضايا، عندئذٍ فإن $(X,\vee)$ بنية ، حيث $\vee$ هي أداة الربط المنطقي "أو"، حيث من أجل أي قضيتين p,q تكون القضية $p\vee q$ خاطئة بحالة واحدة فقط إذا كانت كلتا القضيتين p,q خاطئتين بآنٍ واحد.

10- إن مجموعة الأعداد الأولية مزودة بعملية الجمع ليست بنية.

11- إن $(S_n,\circ)$ بنية، حيث S_n هي مجموعة تباديل (تقابلات) المجموعة $\{1,\dots,n\}$ وهي مزودة بالعملية $\circ$ (تُقرَأ "يلي")، وهي عملية تركيب التوابع.

12- لتكن $A\neq\emptyset$ ، ولتكن S_A مجموعة التوابع التقابل من A إلى A، فإن $(S_A,\circ)$ بنية.

---

[30] حيث أننا في هذه الحالة نعرّف حاصل جمع المجموعتين $[x],[y]$ بأنه المجموعة $[x+y]$. يجب التحقق من أنه إذا كان $x'\neq x$, $y'\neq y$ و بحيث $[x]=[x'],[y]=[y']$ فإن $[x+y]=[x'+y']$.

13- لتكن $GL_n(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة n (المؤلفة من n سطر و n عمود) و القلوبة و بأمثال من $\mathbb{R}$. عندئذٍ فإن $(GL_n(\mathbb{R}),.)$ بنية ، حيث $(.)$ هو ضرب المصفوفات المألوف.

3-7- صفات العملية الداخلية على مجموعة:

تعاريف:

لتكن A مجموعة ما غير خالية مزودة بالعملية الداخلية $*$، أي أن $(A,*)$ بنية

1- نقول عن العملية $*$ إنها **تبديلية** على A (أو $(A,*)$ بنية تبديلية) إذا تحقق

$$\boxed{\forall\, x,y \in A:\ \ x*y = y*x}$$

فمثلاً، عملية الجمع على $\mathbb{Z}$ (وهي عملية داخلية على $\mathbb{Z}$) تبديلية لأن

$$\forall\, x,y \in \mathbb{Z} : x+y = y+x$$

لكن عملية الطرح (وهي عملية داخلية على $\mathbb{Z}$) ليست تبديلية على $\mathbb{Z}$ لأن

$$\exists\ 1,2 \in \mathbb{Z} : 1-2 \neq 2-1$$

2- نقول عن العملية $*$ إنها **تجميعية** على A (أو $(A,*)$ بنية تجميعية) إذا تحقق

$$\boxed{\forall\, x,y,z \in A\ :\ \ (x*y)*z = x*(y*z)}$$

و في هذه الحالة سنرمز للعنصرين المتساويين $x*(y*z)$ ، $(x*y)*z$ كما يلي

$$x*y*z$$

في البنية التجميعية $(A,*)$ سنرمز

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \forall x \in A:\ \underbrace{x*x*\cdots*x}_{n\ \text{مرة}} = x^n$$

فمثلاً في البنية $(\mathbb{Z},+)$ الجمع عملية تجميعية لأن

$$\forall\, x,y,z \in \mathbb{Z}\ :(x+y)+z = x+(y+z)$$

لكن في البنية $(\mathbb{Z},-)$ الطرح ليس عملية تجميعية لأنه

$$\exists\, x,y,z \in \mathbb{Z}\ :(x-y)-z \neq x-(y-z)$$

فمثلاً

$$-2 = (1-1)-2 \neq 1-(1-2) = 2$$

كما أنه في البنية $(\mathbb{Q}^*,\div)$ عملية القسمة ليست تجميعية، لأنه

$$\exists\, x,y,z \in \mathbb{Q}^*\ :(x\div y)\div z \neq x\div(y\div z)$$

فمثلاً

$$\frac{1}{2} = (8\div 8)\div 2 \neq 8\div(8\div 2) = 2$$

3- نقول إن البنية $(A,*)$ تملك عنصر **حيادي** $e \in A$ إذا تحقق

$$\boxed{\forall\, x \in A:\ x*e = e*x = x}$$

فمثلاً البنية $(\mathbb{Z},\times)$ تملك حيادي هو 1، بينما البنية $(\mathbb{N}^*,+)$ لا تملك حيادي.

إذا كانت البنية $(A,*)$ تبديلية ، فلإثبات أن العنصر $e \in A$ حيادي يكفي التحقق من إحدى العلاقتين التاليتين (من اجل كل $x \in A$)

$$e * x = x \quad ، \quad x * e = x$$

بينما إذا لم تكن البنية تبديلية فيجب إثبات كلتا العلاقتين.

4- لنفرض أن البنية $(A,*)$ تملك حيادي e. نقول إن العنصر $x' \in A$ هو **نظير العنصر** $x \in A$ إذا تحقق

$$\boxed{x * x' = x' * x = e}$$

فمثلاً في البنية $(\mathbb{Z},\times)$ ، الحيادي هو 1 ، و العنصرين $1, -1 \in \mathbb{Z}$ لكل منهما نظير و نظير كل عنصر منهما هو العنصر نفسه ، بينما العنصر $2 \in \mathbb{Z}$ ليس له نظير.

في البنية $(\mathbb{Q}^*,\times)$ الحيادي هو 1 ، و لكل عنصر $a \in \mathbb{Q}^*$ نظير $\frac{1}{a} \in \mathbb{Q}^*$ ، لأنه

$$\forall\, a \in \mathbb{Q}^* \;:\; \frac{1}{a} \times a = a \times \frac{1}{a} = 1$$

إذا كانت البنية $(A,*)$ تبديلية ، فلإثبات أن العنصر $x' \in A$ هو نظير العنصر $x \in A$ يكفي التحقق من إحدى العلاقتين التاليتين

$$x' * x = e \quad ، \quad x * x' = e$$

بينما إذا لم تكن البنية تبديلية فيجب إثبات كلتا العلاقتين.

ملاحظة:

1 – أحياناً نستعمل الرمز (.) بدلاً من (*) للاختصار فقط. وعندها سنرمز للبنية $(A,*)$ كما يلي $(A,.)$، و سندعو العنصر $x.y = x * y$ (أو اختصاراً xy) جداء (وهو ليس الجداء المألوف للأعداد) العنصرين x, y . وسنرمز x^{-1} لنظير العنصر x . و في حال كانت العملية (.) تجميعية سنرمز x^n لناتج تشكيل العنصر x مع نفسه n مرة.

2 – أحياناً نستعمل الرمز (+) بدلاً من (*) للاختصار فقط (وخاصةً إذا كانت العملية $*$ تبديلية). وعندها سنرمز للبنية $(A,*)$ كما يلي $(A,+)$، و سندعو العنصر $x + y = x * y$ مجموع (وهو ليس المجموع المألوف للأعداد) العنصرين x, y . وسنرمز $-x$ لنظير العنصر x . و في حال كانت العملية $(+)$ تجميعية سنرمز nx لناتج تشكيل العنصر x مع نفسه n مرة.

نتائج:

لتكن $(A,*)$ بنية جبرية ما، عندئذٍ

1- الحيادي وحيد إن وُجِدْ.

الإثبات:

إذا فرضنا وجود حياديين e, e' فإن

$$e \overset{\text{لأن } e' \text{ حيادي}}{=} e * e' \overset{\text{لأن } e \text{ حيادي}}{=} e'$$

2- إذا كانت البنية $(A,*)$ تجميعية و تملك حيادي، فإن نظير أي عنصر x (عند وجوده) سيكون وحيد.

الإثبات:

إذا فرضنا وجود نظيرين x'', x' للعنصر x ، فإن

$$x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''$$

3- من أجل كل $A \ni y, x$ ، فإن $(x * y)' = y' * x'$.

ونعبر عن ذلك بالكتابة الضربية كما يلي: $(x.y)^{-1} = y^{-1}.x^{-1}$

ونعبر عن ذلك بالكتابة الجمعية كما يلي : $-(x + y) = (-y) + (-x)$

الإثبات:

$$(x * y) * (y' * x') = \big((x * y) * y'\big) * x' = \big(x * (y * y')\big) * x'$$

$$= (x * e) * x' = x * x' = e$$

وكذلك

$$(y' * x') * (x * y) = \big((y' * x') * x\big) * y = \big(y' * (x' * x)\big) * y$$

$$= (y' * e) * y = y' * y = e$$

4- إذا كانت البنية $(A,*)$ تملك حيادي، فإن نظير العنصر الحيادي e هو e نفسه، و ذلك لأن

$$e * e = e$$

5- إذا كانت البنية $(A,*)$ تملك حيادي ، و إذا كان للعنصر x' نظير x فإن $(x')' = x$، أي أن x هو نظير x'، و بعبارةٍ أخرى نظير نظير x هو x.

وفي الكتابة الضربية نعبِّر عما سبق كما يلي : $(x^{-1})^{-1} = x$.

وفي الكتابة الجمعية نعبِّر عما سبق كما يلي : $-(-x) = x$.

4-7- مفهوم الزمرة

تعريف:

نقول عن البنية $(G,*)$ إنها زمرة إذا كانت تجميعية وتملك حيادي و لكل عنصر منها نظيرٌ فيها. أي إذا تحقق:

1- $\forall\, x, y, z \in G : (x * y) * z = x * (y * z)$

2- $\exists\, e \in G : \quad (x * e = e * x = x \,, \forall x \in G)$

3- $x \in G \Rightarrow \;(\exists x' \in G : \; x * x' = x' * x = e)$

Niels Henrik Abel (1802-1829)

و إذا كانت الزمرة تحقق شرط التبديلية ، أي

$$\forall x, y \in G : x * y = y * x$$

سندعو $(G,*)$ زمرة تبديلية أو تبادلية أو آبلية، نسبةً إلى الرياضي النروجي Abel.

و سنقول إن الزمرة $(G,*)$ غير تبديلية، إذا وُجِدَ عنصران

$$G \ni x, y$$

يحققان

$$. \ x * y \neq y * x$$

وفي حال الكتابة الضربية سندعو $(G,.)$ زمرة ضربية، سنرمز:

$x.y$ لناتج تشكيل العنصرين x, y ، 1 للحيادي، x^{-1} لنظير x .

وفي حال الكتابة الجمعية (وتستخدم غالباً للزمر التبديلية) سندعو $(G,+)$ زمرة جمعية، سنرمز:

$x + y$ لناتج تشكيل العنصرين x, y ، 0 للحيادي، $-x$ لنظير x .

وسنقول إن الزمرة G منتهية إذا كانت مؤلفة من عدد منتهي من العناصر، و في خلاف ذلك سندعوها زمرة غير منتهية.

7-5- أمثلة:

1- كل من المجموعات العددية التالية و المزودة بالعملية المرفقة تشكل زمرة (تحقق من ذلك):

$$(\mathbb{Z},+), \quad (\mathbb{Q},+), \quad (\mathbb{R},+), \quad (\mathbb{C},+), \quad (n\mathbb{Z},+)$$

$$(\mathbb{Q}^*,\times), \quad (\mathbb{R}^*,\times), \quad (\mathbb{C}^*,\times),$$

$$(\{1,-1\},\times), \quad (\{1,-1,i,-i\},\times), \quad (\{e^{ix} \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}\},\times)$$

حيث $n \in \mathbb{N}$، و المجموعة $n\mathbb{Z}$ هي مجموعة المضاعفات الصحيحة للعدد n، أي أن

$$\mathrm{n}\mathbb{Z} \coloneqq \{\mathrm{nk} : \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \dots\}$$

2- كل من البنى الجبرية التالية ليست زمرة (علل ذلك):

$$(\mathbb{N},+), (\mathbb{N},\times), (\mathbb{Z},\times), (\mathbb{Q},\times), (\mathbb{R},\times), (\mathbb{C},\times), (\mathbb{Q}^*,\div), (\mathbb{R}^*,\div), (\mathbb{C}^*,\div)$$

$$(\{1,0\},\times), (\{1,-1\},\div), (\{1,0\},\div),$$

3- من أجل أي مجموعة غير خالية A (بحيث $|A| > 1$) فإن البنية $(P(A),\cap)$ تبديلية و تجميعية و تملك حيادي هو A ، لكنها ليست زمرة، لأنه من أجل أي $P(A) \ni \{x\}$ فإنه لا توجد أي $P(A) \ni B$ تحقق $B \cap \{x\} = A$ ، أي أن العنصر $P(A) \ni \{x\}$ لا يملك نظير.

4- إن البنية $(\mathbb{R}^n, +)$ زمرة، حيث الجمع على $\mathbb{R}^n$ معرف كما يلي:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

هو تجميعي (تحقق من ذلك)، العنصر الحيادي هو $(0,0, \dots ,0)$، و نظير كل عنصر $\mathbb{R}^n \ni (x_1, x_2, \dots, x_n)$ هو

$$\mathbb{R}^n \ni (-x_1 -, x_2, \dots, -x_n)$$

5- إن البنية $(M_n(\mathbb{R}), +)$ زمرة، حيث $M_n(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة n و بأمثال من $\mathbb{R}$، والجمع المعرف عليها هو جمع المصفوفات المألوف.

6- إن $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ زمرة، حيث المجموعة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ هي مجموعة صفوف تكافؤ علاقة التطابق بالمقاس n ، المعرفة كما يلي:

$$x \equiv y \ (mod\ n) \ \Leftrightarrow \ x - y \in n\mathbb{Z}$$

حيث عملية الجمع على صفوف التكافؤ معرّفة كما يلي

$$[x] + [y] \coloneqq [x + y]$$

لنتحقق أولاً من كون الجمع معرَّف جيداً، أي لنتحقق أن $+: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ تطبيق، شرط التطبيق

$$([x],[y]) = ([x'],[y']) \ \Rightarrow \ +([x],[y]) = +([x'],[y'])$$
$$\Rightarrow \ [x] + [y] = [x'] + [y'] \ \Rightarrow \ [x + y] = [x' + y']$$

لنفرض أن $([x],[y]) = ([x'],[y'])$ ومنه $[x] = [x'], [y] = [y']$ و بالتالي

$$\exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{Z} : x - x' = nk_1, y - y' = nk_2$$
$$\Rightarrow \ (x + y) - (x' + y') = nk_1 + nk_2 = n(k_1 + k_2)$$
$$\Rightarrow \ [x + y] = [x' + y']$$

إذاً الجمع معرّف جيداً. و بالتالي $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ بنية.

يمكن بسهولة التحقق من أن عملية الجمع تبديلية وتجميعية في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

إن الحيادي هو $[0]$ ، لأن

$$\forall\, x \in \mathbb{Z} : [x] + [0] = [0] + [x] = [x]$$

كما أن نظير كل $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ni [x]$ هو $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ni [-x]$ لأن

$$[x] + [-x] = [-x] + [x] = [0]$$

فالبنية $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ زمرة تبديلية .

7- لنزود المجموعة $\mathbb{Z}_4 \coloneqq \{0,1,2,3\}$ بالعملية $(+)$ المعرَّفة كما يلي :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Z}_4 \ : \ x + y \coloneqq (\text{باقي قسمة } x + y \text{ على } 4)$$

فمثلاً

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 0 + 2 = 2, \quad 0 + 3 = 3$$
$$1 + 1 = 2, \quad 1 + 2 = 3, \quad 1 + 3 = 0,$$
$$2 + 2 = 0, \quad 2 + 3 = 1, \quad 3 + 1 = 0, \quad 3 + 3 = 2$$

إن العملية $(+)$ تبديلية وتجميعية على $\mathbb{Z}_4$ (تحقق من ذلك)، و تقبل عنصر حيادي 0، و لكل عنصر $x \in \mathbb{Z}_4$ نظير $x' \in \mathbb{Z}_4$، حيث: $0' = 0, 1' = 3, 2' = 2, 3' = 1$. إذاً $(\mathbb{Z}_4, +)$ زمرة.

8- إن $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{[0]\}, .)$ زمرة (حيث p عدد أولي).

حيث عملية الضرب على صفوف التكافؤ معرّفة كما يلي

$$\forall\, [x], [y] \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{[0]\} \quad : \quad [x].[y] := [x.y]$$

لنتحقق أولاً من كون الضرب معرَّف جيداً، أي لنتحقق من كون

$$\cdot : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{[0]\} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{[0]\} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{[0]\}$$
$$([x], [y]) \mapsto [x.y]$$

تطبيق، شرط التطبيق:

$$([x], [y]) = ([x'], [y']) \;\Rightarrow\; \cdot([x], [y]) = \cdot([x'], [y'])$$
$$\Rightarrow\; [x].[y] = [x'].[y'] \;\Rightarrow\; [x.y] = [x'.y']$$

من الفرض لدينا

$$([x], [y]) = ([x'], [y'])$$

ومنه

$$[x] = [x'], [y] = [y']$$

و بالتالي

$$\exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{Z} : x = x' + nk_1, y = y' + nk_2$$
$$\Rightarrow x.y - x'.y' = (x' + nk_1)(y' + nk_2) - x'y'$$
$$= n(x'k_2 + y'^{k_1} + nk_1k_2)$$
$$\Rightarrow\; [x.y] = [x'.y']$$

إذاً الضرب معرّف جيداً على $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. و بالتالي $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, .)$ بنية.

يمكن بسهولة التحقق من أن عملية الضرب تبديلية وتجميعية في $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

إن الحيادي هو $[1]$ ، لأن

$$\forall\, x \in \mathbb{Z} : [x].[1] = [x.1] = [x]$$

و من أجل كل $[x] \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{[0]\}$، فإن $x \in \mathbb{Z}$ و x ليس مضاعف للعدد p. و منه العددان x, p أوليان فيما بينهما (لأن p عدد أولي)، و بالتالي حسب مساواة بيزو، يوجد $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ يحققان

$$\alpha.x + \beta.p = 1$$

ومنه $[\alpha].[x] = [1]$ ومنه فللعنصر $[x] \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{[0]\}$ نظير هو

$$[\alpha'] \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{[0]\}$$

ومنه $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{[0]\}, .)$ زمرة .

9- إن $(S_n, \circ)$ زمرة، حيث S_n هي مجموعة تباديل (تقابلات) المجموعة $\{1, \dots, n\}$ وهي مزودة بالعملية $\circ$ (تُقرَأ "يلي")، وهي عملية تركيب التوابع.

أولاً إن $(S_n, \circ)$ بنية لأن تركيب تقابلين هو تقابل، وهي تجميعية لأن تركيب التوابع عملية تجميعية، و الحيادي هو التابع المطابق (و هو تقابل) على $\{1, \dots, n\}$، و لكل تقابل f نظير

وفق عملية التركيب هو تقابله العكسي f^{-1} ويحقق
$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_{\{1,\dots,n\}}$$
وتركيب التوابع عملية غير تبديلية (من أجل $n \geq 3$)، علل ذلك!، ومنه $(S_n,\circ)$ زمرة غير تبديلية (من أجل $n \geq 3$).

-10 لتكن $A \neq \emptyset$ ، ولتكن S_A مجموعة التوابع التقابل من A إلى A، فإن $(S_A,\circ)$ زمرة.

-11 لتكن $GL_n(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من المرتبة n (المؤلفة من n سطر و n عمود) و القلوبة و بأمثال من $\mathbb{R}$. عندئذٍ فإن $(GL_n(\mathbb{R}),.)$ زمرة غير تبديلية (من أجل $n \geq 2$)، حيث (.) هو ضرب المصفوفات المألوف.

لنعالج الحالة $n = 2$، و الحالة العامة تُعالج بشكل مشابه.

أي لنبرهن أن $(GL_2(\mathbb{R}),.)$ زمرة غير تبديلية، حيث
$$GL_2(\mathbb{R}) \coloneqq \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ \det A = ad - bc \neq 0 \ \}$$
و الضرب هو ضرب المصفوفات المألوف المعرَّف كما يلي
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

نعلم أن ضرب المصفوفات هو عملية تجميعية وغير تبديلية، و تقبل عنصر حيادي هو $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

لأنه من أجل أي مصفوفة $A \in GL_2(\mathbb{R})$ فإن $A.I_2 = I_2.A = A$. كما أن نظير كل مصفوفة $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ هي المصفوفة

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

حيث

$$A^{-1}.A = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$
$$\frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

و بحسابٍ مشابه نجد أن $A^{-1}.A = I_2$، ومنه $(GL_2(\mathbb{R}),.)$ زمرة غير تبديلية.

-12 من أجل أي زمرتين $(H,*), (K,\circ)$ فإن $(H \times K, \Delta)$ زمرة، حيث $H \times K$ هو الجداء الديكارتي للمجموعتين H, K ، و العملية Δ معرّفة كما يلي:
$$\forall \ (h,k)\,,(h',k') \in H \times K \ :$$
$$(h,k)\ \Delta\ (h',k') \coloneqq (h * h', k \circ k')$$
يمكن بسهولة التحقق من كون العملية Δ تجميعية لأن كل من العمليتين $\circ,*$ تجميعية، كما أن حيادي الزمرة $H \times K$ هو (e_H, e_K) حيث e_H هو حيادي الزمرة $(H,*)$، e_K حيادي الزمرة

$(K,\circ)$، ونظير كل عنصر $(x,y) \in H \times K$ هو $(x',y') \in H \times K$، حيث $x' \in H$ هو نظير $x \in H$ بالنسبة للعملية $*$، و $y' \in K$ هو نظير $y \in K$ بالنسبة للعملية $\circ$.

نتائج:

1- في الزمرة الحيادي وحيد (وجدنا سابقاً أنه في أي بنية جبرية الحيادي وحيد إن وُجِدْ).
2- في الزمرة لكل عنصر نظير وحيد (وجدنا سابقاً أنه في أي بنية جبرية تجميعية النظير وحيد إن وُجِدْ).
3- في أي زمرة $(G,.)$ لدينا

$$\forall\, x \in G : (x^{-1})^{-1} = x$$

4- في أي زمرة $(G,.)$ لدينا

$$\forall\, x_1, x_2, \dots, x_n \in G : (x_1.x_2 \dots x_{n-1}.x_n)^{-1} = x_n^{-1}.x_{n-1}^{-1} \dots x_2^{-1}.x_1^{-1}$$

5- كل زمرة $(G,*)$ تتمتع بخاصية الاختصار، أي أن

$$\forall\, x,y,z \in G : (\, x*y = x*z \quad \Rightarrow \quad y = z)$$
$$\forall\, x,y,z \in G : (\, y*x = z*x \quad \Rightarrow \quad y = z)$$

لإثبات ذلك يكفي ملاحظة أن

$$x*y = x*z \quad \Rightarrow \quad x'*(x*y) = x'*(x*z) \quad \Rightarrow$$
$$(x'*x)*y = (x'*x)*z \quad \Rightarrow \quad e*y = e*z \quad \Rightarrow \quad y = z$$

وبشكل مشابه يمكن اثبات الخاصة

$$\forall\, x,y,z \in G : (\, y*x = z*x \quad \Rightarrow \quad y = z)$$

7-6- جدول كيلي لزمرة منتهية

مبرهنة:

إذا كانت المجموعة المنتهية $A = \{x_1 = e, x_2, \dots, x_n\}$ مزودة بالعملية $*$، فإننا سنشكل جدول (سندعوه جدول كيلي) مكون من n سطر و n عمود حيث، من أجل كل $i\,, j \in \{1,2,\dots,n\}$، سنضع في السطر رقم i و العمود رقم j العنصر $x_i * x_j$. وعندئذٍ:

1- إذا كانت $(A,*)$ بنية جبرية فإن جميع العناصر في جدول كيلي تنتمي إلى A.
2- في جدول كيلي للزمرة $(A,*)$ كل عنصر من عناصر A مكرر في كل سطر وكل عمود من الجدول مرة واحدة فقط.
3- تكون البنية $(A,*)$ تبديلية إذا و فقط إذا كان جدول كيلي متناظر بالنسبة للقطر الرئيسي.

الإثبات:

إن الفقرتين 1،3 من المبرهنة واضحتين و بديهيتين.

إن الفقرة 2 تنتج من كون الزمرة تحقق شرط قابلية الاختصار. لفرضنا أن هناك عنصر ما $A \ni a$ مكرر في سطر العنصر x_i مرتين، مرة في عمود كل من العنصرين x_k , x_j، ولنبرهن أن $k = j$.
لدينا من الفرض

$$a = x_i * x_j = x_i * x_k$$

و بالتالي حسب خاصية الاختصار في الزمرة نجد أن $x_j = x_k$، أي $j = k$.

مثال(1):

لنأخذ المثال رقم 7 في سلسلة الأمثلة السابقة على الزمر، حيث زودنا المجموعة $\mathbb{Z}_4 := \{0,1,2,3\}$ بالعملية $(+)$ المعرَّفة كما يلي : $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}_4 \;:\; x + y :=$ (باقي قسمة $x + y$ على 4)

فمثلاً

$$2 + 2 = 0, \qquad 2 + 3 = 1, \qquad 3 + 1 = 0, \qquad 3 + 3 = 2$$

و يمكن تشكيل جدول كيلي للزمرة $(\mathbb{Z}_4, +)$، فنجد أنه يعطى كما في الشكل المجاور

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

فمثلاً العنصر 3 (باللون الأحمر الداكن) و الواقع في السطر الثالث و العمود الثاني ينتج عن تشكيل العنصر في السطر الثالث (و هو 2 باللون الأحمر الداكن) مع العنصر في العمود الثاني (و هو 1 باللون الأحمر الداكن) مع مراعاة الترتيب دوماً (2 أولاً ومن ثم 1 لأنه بشكلٍ عام قد لا تكون العملية تبديلية)، فيكون لدينا $2 + 1 = 3$.

مثال(2):

إن جدول كيلي للزمرة $(\{1, -1, i, -i\}, \times)$ هو

$\times$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

مثال(3):

لنزود المجموعة

$$U(\mathbb{Z}_{10}) := \{\, k \in \mathbb{Z}_{10}^{*} : (k,10) = 1\} = \{\, 1,3,7,9\}$$

بعملية الضرب بالمقاس 10 ، أي أنه

$$\forall\, a\,, b \in X \;:\quad a.b \coloneqq (\text{باقي قسمة } a.b \text{ على } 10\,)$$

فمثلاً:

$$1.1 = 1, \qquad 1.3 = 3\,, \qquad 1.7 = 7, \qquad 3.3 = 9, \qquad 3.7 = 1$$

$$3.9 = 7, \qquad 7.7 = 9, \qquad 7.9 = 3, \qquad 9.9 = 1$$

ومنه فإن نظير كل عنصر يعطى كما يلي:

$$1' = 1, \qquad 3' = 7, \qquad 7' = 3, \qquad 9' = 9$$

وجدول كيلي يعطى كما يلي:

·	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

مثال(4):

لنزود المجموعة

$$U(\mathbb{Z}_7) := \{\, k \in \mathbb{Z}_7^{*} : (k,7) = 1\} = \{\, 1,2,3,4,5,6\}$$

بعملية الضرب بالمقاس 7 ، أي أنه: $\forall\, a\,, b \in X \;:\quad a.b \coloneqq (\text{باقي قسمة } a.b \text{ على } 7)$

فمثلاً:

$$3.2 = 6, 3.3 = 2\,, 3.4 = 5, 3.5 = 1, 3.6 = 4$$

$$4.4 = 2, 4.5 = 6, 4.6 = 3, 5.5 = 4,$$

$$5.6 = 2, \qquad 6.6 = 1$$

$$\Rightarrow 1' = 1, 2' = 4, 3' = 5$$

$$4' = 2, \qquad 5' = 3, \quad 6' = 6$$

·	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

وجدول كيلي يعطى كما في الشكل المجاور.

الزمرة الجزئية من زمرة:

تعريف:

لتكن $(G,.)$ زمرة ما، و لتكن H مجموعة جزئية غير خالية من G، نقول إن H زمرة جزئية من G إذا كانت العملية $(.)$ داخلية على H (أي $\forall\, x,y \in H : x.y \in H$) وكانت المجموعة H مزودةً بالعملية الداخلية $(.)$ تشكل زمرة (بكلامٍ أكثر دقة، فإنه يجب أن يكون مقصور التابع $(.)$ على H هو قانون تشكيل داخلي على H يجعل من H زمرة بحد ذاتها).

أمثلة:

1- $(\mathbb{Z},+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R},+)$.

2- الزمرة $(\{1,-1\},.)$ ليست زمرة جزئية من $(\mathbb{R},+)$ رغم أن $\{1,-1\} \subset \mathbb{R}$ ، وكل منهما زمرة مزودة بالعملية المرفقة.

3- $(\mathbb{Z},+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Q},+)$.

4- $(\mathbb{Q}^*,.)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}^*,.)$.

5- $(\mathbb{R}^*,.)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{C}^*,.)$.

6- $(\{1,-1,i,-i\},.)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{C}^*,.)$.

7- من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، فإن $n\mathbb{Z}$ زمرة جزئية[31] من $(\mathbb{Z},+)$.

8- $(M_n(\mathbb{R}),+)$ زمرة جزئية من $(M_n(\mathbb{C}),+)$.

9- لتكن $(G,*)$ زمرة تبديلية ما، لنرمز للحيادي فيها e، ولتكن
$$H := \{x \in G : x^2 = e\}$$
عندئذٍ فإن H زمرة جزئية من G .

10- $(\{1,9\},.)$ زمرة جزئية من $(\{1,3,7,9\},.)$ حيث $(.)$ هو الضرب بالمقاس 10.

11- $(\mathbb{R}\times\{0\},+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}^2,+)$، حيث الجمع على $\mathbb{R}^2$ معرَّف كما يلي
$$\forall\,(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad (x,y)+(x',y') = (x+x',y+y')$$

ملاحظات:

1- إذا كانت $(G,.)$ زمرة ما، فإن أي مجموعة جزئية غير خالية A من G ستحقق
$$\forall\, x,y,z \in A \ : \ (x.y).z = x.(y.z)$$
ونعبر عن ذلك بقولنا إن الصفة التجميعية صفة وراثية، أي أن أي مجموعة جزئية من الزمرة ستحقق (سترث) الصفة التجميعية. و الكلام أيضاً صحيح من أجل الصفة التبديلية، أي أن الصفة التبديلية صفة وراثية أيضاً.

2- كل زمرة $(G,.)$ تملك زمرتين جزئيتين على الأقل وهما $G,\{1\}$ ، حيث 1 هو الحيادي.

3- إذا كانت H مجموعة جزئية من G ، و كانت $(G,*)$ زمرة. فإنه تكون H زمرة جزئية من G إذا و فقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

---

[31] زد على ذلك فإن أي زمرة جزئية من $\mathbb{Z}$، ستكون من الشكل $n\mathbb{Z}$ (أثبت ذلك!!).

$$1- \quad x,y\in H \quad \Rightarrow \quad x.y\in H$$

$$2- \quad x\in H \quad \Rightarrow \quad x^{-1}\in H$$

الإثبات:

من الواضح أنه إذا كانت $(H,.)$ زمرة فإن الشرطين السابقين محققين.

و الآن لنفرض تحقق الشرطين، و لنثبت أن H زمرة جزئية من $(G,.)$.

من تحقق الشرط

$$x,y\in H \quad \Rightarrow \quad x.y\in H$$

نجد أن الضرب داخلي على H.

حسب الملاحظة 1، فإن H تحقق الصفة التجميعية، كما أنه من الشرطين 1 و 2 معاً نستنتج أن

$$x,y\in H \quad \Rightarrow \quad x.y^{-1}\in H$$

ومنه بأخذ $y = x$ نجد

$$x\in H \Rightarrow 1 = x.x^{-1}\in H$$

ومنه H تملك حيادي. و لكل عنصر منها نظيرٌ فيها، ومنه $(H,.)$ زمرة، و بالتالي حسب التعريف فإن H زمرة جزئية من $(G,.)$.

نتيجة:

لتكن $(G,.)$ زمرة ما، و لتكن H مجموعة جزئية غير خالية من G، تكون H زمرة جزئية من G إذا و فقط إذا تحقق أحد الشرطين المتكافئين :

-1 $$x,y\in H \quad \Rightarrow \quad (x^{-1}\in H)\wedge(x.y\in H)$$

-2 $$x,y\in H \quad \Rightarrow \quad x.y^{-1}\in H$$

نتيجة:

تقاطع زمرتين جزئيتين هو زمرة جزئية.

الإثبات:

سهل و يترك كتمرين للقارئ يمكن حله بالاعتماد على النتيجة السابقة.

ملاحظة:

اجتماع زمرتين جزئيتين ليس بالضرورة زمرة جزئية.

فمثلاً $(2\mathbb{Z},+),(3\mathbb{Z},+)$ زمرتين جزئيتين من $(\mathbb{Z},+)$، لكن $(2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z},+)$ ليست زمرة جزئية من $(\mathbb{Z},+)$، لأن $2,3\in 2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z}$، لكن $2+3=5\notin 2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z}$.

تمرين:

لتكن $(G,.)$ زمرة تبديلية، أثبت أن $H := \{x^2 : x \in G\}$ زمرة جزئية من G.

تعريف:

لتكن $(G,*)$ زمرة ما، و لتكن $A,B \neq \emptyset$، $G \supset A,B$، $G \ni a$، نعرف جداء المجموعتين A,B وفق العملية $*$ كما يلي :

$$A * B = \{a * b : \ (a \in A) \ \wedge \ (b \in B) \ \}$$

و نعرف جداء العنصر a بالمجموعة B وفق العملية $*$ كما يلي:

$$a * B = \{a\} * B = \{a * b \ : \ b \in B \ \}$$

تمهيدية:

لتكن $(G,*)$ زمرة ما، عندئذٍ فإنه من أجل كل $G \ni a$، ومن أجل أي مجموعة جزئية غير خالية $G \supset H$ فإن التطبيقين التاليين تقابلين

$$L_a : H \to a * H \qquad , \qquad R_a : H \to H * a$$

$$x \mapsto a * x \qquad\qquad x \mapsto x * a$$

الإثبات:

لنثبت أن التابع L_a تقابل، و بشكل مشابه يمكن إثبات أن R_a تقابل.

التابع L_a غامر لأن

$$y \in a * H \ \Rightarrow \exists h \in H \ : y = a * h \ \Rightarrow \exists h \in H \ : \ y = L_a(h)$$

التابع L_a متباين لأن

$$L_a(x) = L_a(y) \ \Rightarrow \ a * x = a * y \ \Rightarrow \ x = y$$

وذلك حسب خاصية الاختصار في الزمرة.

نتيجة:

لتكن $(G,.)$ زمرة ما، ولتكن H أي مجموعة جزئية **منتهية** و غير خالية من G، عندئذٍ فإنه تكون H زمرة جزئية من G، إذا كانت مغلقة بالنسبة للعملية $*$، أي إذا تحقق

$$x, y \in H \Rightarrow x.y \in H$$

الإثبات:

نعلم أنه لإثبات أن H زمرة جزئية من G، يكفي تحقق الشرطين التاليين:

$$1- \quad x, y \in H \quad \Rightarrow \quad x.y \in H$$

$$2- \quad x \in H \quad \Rightarrow \quad x^{-1} \in H$$

فالشرط الأول محقق من الفرض و يكفي إثبات أنه إذا كانت المجموعة H منتهية فإن الشرط الأول سيقتضي الشرط الثاني.

لنفرض أن H منتهية ولنبرهن أنه من أجل كل $a \ni H$ فإن $a^{-1} \ni H$.

ليكن $a \ni H$، من الواضح أن

$$A \coloneqq \{a^n : n \in \mathbb{N}^*\} \subset H$$

و بما أن المجموعة H منتهية فإن A منتهية كذلك ومنه، يوجد عددين مختلفين $k, l \ni \mathbb{N}^*$ يحققان $a^k = a^l$ ، و لنفرض أن $k > l$، عندئذٍ فإن

$$e = a^k.(a^k)^{-1} = a^k.(a^l)^{-1} = a^k.a^{-l} = a^{k-l} \in A \subset H$$

إذاً نستنتج أن

$$\boxed{e \in H}$$

و بما أن $k > l$، فإن $k - l - 1 \geq 0$، ومنه

$$a^{-1} = e.a^{-1} = a^{k-l}.a^{-1} = a^{k-l-1} \in A \cup \{e\} \subset H$$

ومنه H زمرة جزئية من $(G, .)$. ■

مبرهنة:

لتكن $(G, .)$ زمرة منتهية، و لتكن H زمرة جزئية من G، عندئذٍ فإن:

1- $\{x.H : x \in G\}$ تشكل تجزئة للمجموعة G.
2- $\forall x \in G : Card(x.H) = Card(H)$
3- $Card(H) \mid Card(G)$.

الإثبات :

1- شروط التجزئة هي:

$$1- \quad \forall x \in G : \quad x.H \neq \emptyset$$
$$2- \quad x.H \neq y.H \quad \Rightarrow \quad x.H \cap y.H = \emptyset$$
$$3- \quad G = \cup_{x \in G} \quad x.H$$

من أجل كل $G \ni x$ فإن

$$x = x.e \in x.H$$

ومنه

$$\forall x \in G : \quad x.H \neq \emptyset$$

لنفرض أن

$$x.H \neq y.H$$

و لنفرض جدلاً أن

$$x.H \cap y.H \neq \emptyset$$

ومنه يوجد

$$\begin{aligned} z \in \ x.H \cap y.H \quad &\Rightarrow \quad \exists\, h, h' \in H : z = xh = yh' \\ &\Rightarrow (x = yh'h^{-1}) \ \wedge (y = xhh'^{-1}) \\ &\Rightarrow (x \in y.H\ ) \wedge \ \ (y \in x.H) \\ &\Rightarrow x.H \subset y.H \ \wedge \ \ y.H \subset x.H \ \Rightarrow x.H = y.H \end{aligned}$$

وهذا يناقض الفرض بكون

$$x.H \neq y.H$$

فالفرض الجدلي بكون

$$x.H \cap y.H \neq \emptyset$$

خاطئ، ومنه

$$x.H \neq y.H \quad \Rightarrow \quad x.H \cap y.H = \emptyset$$

و الآن لنبرهن أن

$$G = \cup_{x \in G} \ \ x.H$$

من الواضح أن $\cup_{x \in G} \ \ x.H \ \subset G$

كما أن

$$G = \cup_{x \in G} \ \ \{x\} \subset \cup_{x \in G} \ \ x.H$$

ومنه

$$G = \cup_{x \in G} \ \ x.H$$

2- نعلم حسب تمهيدية سابقة أن التطبيق التالي تقابل

$$\begin{aligned} L_a : H &\to a.H \\ x &\mapsto a.x \end{aligned}$$

ومنه فإن $Card(a.H) = Card(H)$ ، و ذلك مهما يكن العنصر $G \ni a$.

3- لنفرض أن $Card\ \{x.H \ : x \in G\ \} = k$ ، و لنفرض أن

$$\{x.H \ : x \in G\} = \{x_1.H, x_2.H, \dots, x_k.H\} \Rightarrow$$
$$G = \cup_{x\in G} \ x.H = x_1.H \cup x_2.H \cup \dots \cup x_k.H$$
$$Card(G) = \sum_{1\le i\le k} Card(x_i.H) = \sum_{1\le i\le k} Card(x_i.H) = k.Card(H)$$

ومنه $Card(H) \mid Card(G)$. ■

نتيجة:

1- إذا كانت $(G,.)$ زمرة منتهية عدد عناصرها n، و H مجموعة جزئية غير خالية من G ومؤلفة من k عنصر، عندئذٍ فإنه إذا كان k لا يقسم n فإن H ليست زمرة جزئية من G.

2- كل زمرة عدد عناصرها عدد أولي، ستحوي زمرتين جزئيتين فقط هما الزمرة نفسها والزمرة المكونة من الحيادي فقط.

7-8- التشاكلات الزمرية:

ستدعو تشاكل زمري بين الزمرتين $(G,*), (G',\circ)$ أي تطبيق $f : G \to G'$ يحقق

$$\forall\, x,y \in G : \quad f(x*y) = f(x)\circ f(y)$$

وإذا كان التشاكل الزمري f تقابل فإننا سندعوه تمائل زمري، و سنقول إن الزمرتين G, G' متماثلتين.

و في هذه الحالة فإن الزمرتين المتماثلتين ستتمتعان بنفس الخواص و سيكون لهما نفس الصفات و لن تختلفا إلا في رموز عناصرهما !

مثال(1):

إن $(\mathbb{R},+)$، $(\mathbb{R}^*,.)$ زمرتين، و التطبيق التالي

$$f : (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}^*,.)$$
$$x \mapsto e^x$$

هو تشاكل زمري لأن

$$\forall\, x,y \in \mathbb{R} : f(x+y) = e^{x+y} = e^x.e^y = f(x).f(y)$$

مثال(2):

إن $(GL_n(\mathbb{R}),.)$، $(\mathbb{R}^*,.)$ زمرتين، و التطبيق التالي

$$det : (GL_n(\mathbb{R}),.) \to (\mathbb{R}^*,.)$$
$$A \mapsto \det A$$

هو تشاكل زمري لأن

$$\forall A, B \in GL_n(\mathbb{R}) \ : \det(A.B) = \det(A).\det(B)$$

مثال(3):

لتكن $(G,*), (G',.)$ زمرتين ما وليكن e' حيادي G'، عندئذٍ فإن التطبيق التالي تشاكل زمري

$$f : \ (G,*) \to (G',.)$$

$$x \mapsto e'$$

نتائج:

لنفرض أن $f : (G,*) \to (G',\circ)$ تشاكل زمري ما، عندئذٍ :

1- إذا كان $f : (G,*) \to (G',\circ)$ تماثل زمري، فإن تقابله العكسي $f^{-1} : G' \to G$ سيكون تشاكل زمري أيضاً.

الإثبات:

لدينا

$$x', y' \in G' \Rightarrow \ \exists\, x, y \in G \ : \ x' = f(x), \qquad y' = f(y)$$

$$\Rightarrow \ f^{-1}(x' \circ y') = f^{-1}\big(f(x) \circ f(y)\big) =$$

$$f^{-1}\big(f(x * y)\big) = x * y = f^{-1}(x) * f^{-1}(y)$$

2- صورة حيادي المنطلق وفق تشاكل زمري هو حيادي المستقر.

الإثبات:

ذلك لأنه إذا كان e حيادي الزمرة G، e' حيادي الزمرة G'، فإن

$$\forall\, x \in G : f(x) \circ e' = f(x) = f(x * e) = f(x) \circ f(e)$$

و حسب خاصية الاختصار في الزمرة G'، فإن $e' = f(e)$.

3- $f(x^{-1}) = \big(f(x)\big)^{-1}$.

الإثبات:

لدينا $\big(f(x)\big)^{-1}$ هو نظير العنصر $f(x)$ في الزمرة $(G',\circ)$، x^{-1} هو نظير العنصر x في الزمرة $(G,*)$. ذلك لأن

$$f(x^{-1}) \circ f(x) = f(x^{-1} * x) = f(e) = e'$$

$$f(x) \circ f(x^{-1}) = f(x \circ x^{-1}) = f(e) = e'$$

4- $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall x \in G \ : \ f(x^n) = \big(f(x)\big)^n$.

يمكن برهان ذلك بالاستقراء الرياضي على n.

5- $Img(f) \coloneqq f(G)$ هي زمرة جزئية من G'.

الإثبات:

من الواضح أن $e' = f(e) \in f(G) \neq \emptyset$ ، و لنتحقق من شرط الزمرة الجزئية التالي

$$x, y \in f(G) \Rightarrow x \circ y^{-1} \in f(G)$$

$$x, y \in f(G) \Rightarrow \exists\, x_1, y_1 \in G : x = f(x_1), \quad y = f(y_1)$$

$$\Rightarrow x \circ y^{-1} = f(x_1) \circ \left(f(y_1)\right)^{-1} = f(x_1) \circ f(y_1^{-1}) = f(x_1 * y_1^{-1}) \in f(G)$$

6- $Ker(f) \coloneqq f^{-1}\{e'\}$ هي زمرة جزئية من G.

الإثبات:

لدينا $e \in Ker(f)$، ومنه $Ker(f) \neq \emptyset$، لنتحقق من شرط الزمرة الجزئية التالي

$$x, y \in Ker(f) \Rightarrow x.y^{-1} \in Ker(f)$$

$$x, y \in Ker(f) \Rightarrow f(x) = f(y) = e'$$

$$\Rightarrow f(x * y^{-1}) = f(x) \circ \left(f(y)\right)^{-1} = e' \circ e'^{-1} = e' \Rightarrow x * y^{-1} \in Ker(f)$$

7- الصورة المباشرة، وفق تشاكل زمري، لزمرة جزئية من المنطلق هي زمرة جزئية من المستقر.
أي أنه إذا كان $f : (G,*) \to (G',\circ)$ تشاكل زمري، و كانت H زمرة جزئية من $(G,*)$،
فإن $f(H)$ هي زمرة جزئية من $(G',\circ)$.

الإثبات:

ليكن $x, y \in f(H)$ ولنبرهن أن $x \circ y' \in f(H)$ (حيث y' هو نظير y في G').

$$x\,, y \in f(H) \Rightarrow \exists\, a, b \in H : x = f(a)\,, y = f(b)$$

$$\Rightarrow x \circ y' = f(a) \circ \left(f(b)\right)' = f(a) \circ f(b') = f(a * b') \in f(H)$$

8- الصورة العكسية وفق تشاكل زمري لزمرة جزئية من المستقر هي زمرة جزئية من المنطلق.
أي أنه إذا كان $f : (G,*) \to (G',\circ)$ تشاكل زمري، و كانت K زمرة جزئية من $(G',\circ)$،
فإن $f^{-1}(K)$ هي زمرة جزئية من $(G,*)$.

الإثبات:

ليكن $x, y \in f^{-1}(K)$ ولنبرهن أن $x * y' \in f^{-1}(K)$ (حيث y' هو نظير y في G).

$$x\,, y \in f^{-1}(K) \Rightarrow \exists\, a, b \in K : a = f(x)\,, b = f(y)$$

$$\Rightarrow f(x * y') = f(x) \circ \left(f(y)\right)' = a \circ b' \in K$$

$$\Rightarrow x * y' \in f^{-1}(K)$$

ومنه $f^{-1}(K)$ زمرة جزئية من $(G,*)$.

تمرين:

ليكن $f : (G,*) \to (G',\circ)$ تشاكل زمري غامر، أثبت أنه إذا كانت الزمرة G تبديلية فإن G' كذلك.

الحل:

$$x', y' \in G' \Rightarrow \exists\, x, y \in G : x' = f(x), y' = f(y)$$

$$\Rightarrow x' \circ y' = f(x) \circ f(y) = f(x * y) = f(y * x) = f(y) \circ f(x) = y' \circ x'$$

تمرين:

أثبت أنه إذا كان $f : (G,*) \to (G',\circ)$ تماثل زمري، فإنه تكون الزمرة G تبديلية إذا و فقط إذا كانت الزمرة G' تبديلية.

المراجع

1 – Arnaudiès et Fraysse, Cours de mathématiques 1, Algèbre, Dunod 1992.

2 – David S. Dummit, Richard M. Foote, Abstract Algebra, 3rd Edition, Wiley(2003).

3 – Fraleigh Victor, J. Katz, A first course in abstract algebra, Addison Wesley(2003).

4 – Godement R., Algebra (Translation of : Cours d'algèbre) Houghton Mifflin ompany(1968).

5 – Gallian, Contemporary Abstract Algebra, 7 ed 2010.

6 – Hungerford, Algebra, Vol 73, Edition 12, Springer 2003.

7 – Quinet Jean, tome 1, Algebre 6^{e} edition.

8 – E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux Cours de mathématiques spéciales tome 1 algèbre, 2ed.

9 – Serg Lang, algebra 3ed, Springer 2002.

10 – Tauvel P. , Algèbre pour l'Agrégation, Licence 3^{e} année et Master, 2ed, Dunod, Paris, 2005.

11 – د. عبد الواحد أبو حمدة ، الجبر المجرد، جامعة دمشق 1995

12 – د. عمران قوبا، الجبر، 2002