The Solution of Systems of Linear Differential Equations حلول نظم المعادلات التفاضلية الخطية

Chapter · October 2018

Emil Shoukralla
Future University in Egypt

الباب
5

نظم المعادلات التفاضلية الخطية
Systems of Linear Differential Equations

في هذا الباب نتعامل مع نظم المعادلات التفاضلية الخطية. حيث نقدم طريقتين للحل. الطريقة الأولى تعتمد على استخدام المؤثرات التفاضلية ***(Differential Operators)*** باعتبار أنه في نظم المعادلات التفاضلية تكون المجاهيل (الحلول) واقعة تحت تأثير المؤثرات التفاضلية، الأمر الذي يستدعي فك الارتباط بين المؤثرات التفاضلية والحلول وهذه الطريقة تسمى . أيضاً . طريقة هيفيسايد. في فصل (5.2) نقدم الطريقة الثانية، والتي تعتمد على استخدام ما يسمى بالقيم المميزة، ***(Eigenvalues)*** والمتجهات المميزة ***(Eigenvectors)*** المقابلة لها وذلك بالتنسيق مع مفاهيم قابلية المصفوفات لكي تكون مصفوفات قطرية ***(Diagonalizable)***.

5.1 الطريقة الأولى لحل نظم المعادلات التفاضلية الخطية باستخدام المؤثرات التفاضلية

تعتمد هذه الطريقة على استبدال المؤثر التفاضلي $\frac{d}{dx}$ والذي يؤثر على الحل المطلوب الحصول عليه بدرجات مختلفة بالرمز D. فيتحول بذلك نظام المعادلات التفاضلية إلى نظام من المعادلات الجبرية في D يتم حله بأية طريقة مع التخلص من تأثير المؤثر التفاضلي على الحل عن طريق فصل المتغيرات وإجراء التكامل. يمكن على سبيل المثال استبدال الكمية D^3y بالكمية $y^{(3)}$، كما يمكن . أيضاً . استبدال الكمية Dy بالكمية y'. وهكذا يمكن أن نعبر عن المشتقات التي تظهر في المعادلة التفاضلية من خلال المؤثرات التفاضلية بدرجات تقابل رتبة المشتقة. إليك الآن بعض الأمثلة التي توضح كيفية تطبيق هذه الطريقة.

مثال 5.1 أوجد حل النظام

$$x' + y' = e^t; \quad x = x(t)$$
$$x' + x + y = 1; \quad y = y(t)$$

الحل هذا نظام مكون من معادلتين تفاضليتين خطيتين من الرتبة الأولى في مجهولين، هما $x = x(t)$، $y = y(t)$. باستخدام المؤثرات التفاضلية يتحول النظام المعطى إلى الشكل

$$\begin{aligned} Dx + Dy &= e^t \\ (D+1)x + y &= 1 \end{aligned} \qquad \text{(i)}$$

للحصول على المجهول الأول $x = x(t)$ يتم ضرب المعادلة الثانية في $(-D)$، فيتحول النظام إلى

$$\begin{aligned} Dx + Dy &= e^t \\ -D(D+1)x - Dy &= D(1) = 0 \end{aligned}$$

بالجمع نجد أن

$$-D(D+1)x + Dx = e^t \quad \Rightarrow D^2 x = -e^t$$

وبالتالي فإن

$$x'' = -e^t \qquad \text{(ii)}$$

بالتأكيد يمكن اعتبار المعادلة (ii) معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية يمكن حلها بالطرق السابقة. لكن على أية حال بفصل المتغيرات، والتكامل نحصل على

$$x' = -e^t + c_1$$

وبالتكامل مرة اخرى، نحصل على

$$x = -e^t + c_1 t + c_2 \qquad \text{(iii)}$$

للحصول على المجهول الثاني $y = y(t)$ يتم ضرب المعادلة الأولى من النظام (i) في $(D+1)$، وضرب المعادلة الثانية في $(-D)$ فيتحول النظام (i) إلى النظام

$$D(D+1)x + D(D+1)y = (D+1)e^t$$

$$(-D)(D+1)x - Dy = 0$$

بالجمع نجد أن

$$D(D+1)y - Dy = (D+1)e^t = De^t + e^t$$

وبعد الاختصار

$$D^2 y = 2e^t$$

وهذه الأخيرة يمكن أن تأخذ شكل معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الثانية، أي يمكن أن تأخذ الشكل

$$y'' = 2e^t \qquad \text{(iv)}$$

بالتكامل مرة واحدة نحصل على

$$y' = 2e^t + k_1$$

وبالتكامل مرة أخرى نحصل على

$$y = 2e^t + k_1 t + k_2 \qquad \text{(v)}$$

للحصول على الثوابت k_1، k_2، c_1، c_2، نعوض من (iii)، (v) عن x, y في النظام (i) فنحصل على النظام

$$D\left(-e^{t}+c_1 t+c_2\right)+D\left(2e^{t}+k_1 t+k_2\right)=e^{t}$$

$$(D+1)\left(-e^{t}+c_1 t+c_2\right)+\left(2e^{t}+k_1 t+k_2\right)=1$$

أو النظام

$$-e^{t}+c_1+2e^{t}+k_1=e^{t}$$

$$-e^{t}+c_1-e^{t}+c_1 t+c_2+2e^{t}+k_1 t+k_2=1$$

وهكذا نحصل من المعادلة الأولى من هذا النظام على العلاقة بين الثابتين c_1، k_1 في الشكل

$$c_1+k_1=0 \;\;\Rightarrow\;\; k_1=-c_1$$

وبالتعويض في المعادلة الثانية نجد أن

$$k_2=1-c_1-c_2$$

وهكذا نجد أن حل النظام المعطى هو

$$x=-e^{t}+c_1 t+c_2,\;\; y=2e^{t}-c_1(t+1)-c_2+1$$

.✍

مثال 5.2 أوجد حل النظام

$$x''-2y=t+2$$
$$x'-3y'+2y=3t^{2}$$

الحل هذا نظام من معادلتين تفاضليتين خطيتين الأولى من الرتبة الثانية، والثانية من الرتبة الأولى في مجهولين $x = x(t)$، $y = y(t)$.
باستخدام المؤثرات التفاضلية يتحول إلى الشكل

$$D^2x - 2y = t + 2 \qquad \text{(i)}$$

$$Dx + (-3D + 2)y = 3t^2 \qquad \text{(ii)}$$

للحصول على $y = y(t)$، نتخلص من x، وذلك بضرب المعادلة (ii) في $(-D)$، والجمع مع المعادلة (i) فنحصل على

$$-2y + \left(3D^2 - 2D\right)y = 2 - 5t$$

أو

$$\left(3D^2 - 2D - 2\right)y = 2 - 5t$$

وهذه معادلة من الرتبة الثانية، الحل العام لها يمكن الحصول عليه باستخدام أيٍ من الطرق السابقة. إذاً

$$y = c_1 e^{\frac{1+\sqrt{7}}{3}t} + c_2 e^{\frac{1-\sqrt{7}}{3}t} + \frac{5}{2}t - \frac{7}{2}$$

للحصول على $x = x(t)$، نتخلص من y، وذلك بضرب المعادلة (ii) في العدد 2، وضرب المعادلة (i) في $(-3D + 2)$، ثم الجمع فنجد أن

$$\left(-3D^3+2D^2+2D\right)x=6t^2+2t+1$$

وهذه ـ أيضاً ـ معادلة من الرتبة الثانية، الحل العام لها يمكن الحصول عليه في الشكل

$$x=k_1e^{\frac{1+\sqrt{7}}{3}t}+k_2e^{\frac{1-\sqrt{7}}{3}t}+t^3-\frac{5}{2}t^2+\frac{29}{2}t+k_3$$

وبالتعويض في النظام المعطى عن كل من الحلين x، y يمكن الحصول على العلاقة بين الثوابت k_1، k_2، c_1،c_2.

5.2 الطريقة الثانية لحل نظم المعادلات التفاضلية الخطية باستخدام مفهوم القيم المميزة والمتجهات المميزة

هذه الطريقة تعتمد على استخدام بعض المفاهيم مثل مفهوم القيم المميزة والمتجهات المميزة المقابلة، ومفهوم قابلية المصفوفة لأن تكون قطرية، لذا دعنا نبدأ بتقديم بعض التعريفات والنظريات عن هذه المفاهيم.

تعريف 5.1 القيم والمتجهات المميزة للمصفوفة المربعة
Eigenvalues and Eigenvectors

تعرّف "القيمة المميزة" *(eigenvalue)* للمصفوفة المربعة **A** من الرتبة $n \times n$ على أنها تلك القيمة الحقيقية أو المركبة λ والتي تحقق المعادلة

$$\mathbf{AX} = \lambda \mathbf{X} \tag{5.1}$$

حيث **X** هي مصفوفة العمود من الرتبة $n \times 1$ والمقابلة للقيمة المميزة λ. تسمى المصفوفة **X** "المتجه المميز" *(Eigenvector)* للمصفوفة **A** والمقابل للقيمة المميزة λ.

تنويه يجب التنويه إلى أن كلمة *(Eigen)* كلمة ألمانية وتعني بالإنجليزية *(Proper)*.

نظرية 5.1 إذا كانت **A** هي المصفوفة

$$\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right] ; \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n} \tag{5.2}$$

فإن λ هي قيمة مميزة للمصفوفة A إذا كان وفقط إذا كان $\left| \lambda \mathbf{I_n} - \mathbf{A} \right| = \mathbf{0}$. والعكس فإذا كانت λ هي قيمة مميزة للمصفوفة A فإن أي حل غير صفري *(Nontrivial Solution)*، X،

للنظام $\left(\lambda \mathbf{I_n} - \mathbf{A}\right) X = \mathbf{O}$ حيث $\mathbf{O}$ هي المصفوفة الصفرية هو متجه مميز مقابل للقيمة المميزة λ.

هذا، وللحصول على القيم المميزة، $\left\{\lambda_i\right\}_{i=1}^{n}$، للمصفوفة (5.1) يتم فك المحدد

$$\left|\lambda \mathbf{I_n} - \mathbf{A}\right| = 0 \qquad (5.3)$$

فنحصل على معادلة كثيرة حدود من الدرجة n في القيمة المميزة λ.

بحل هذه المعادلة نحصل على عدد n من القيم المميزة $\left\{\lambda_i\right\}_{i=1}^{n}$.

وبما أنه في مقابل كل قيمة مميزة، λ_i، يوجد متجه مميز، X_i، بحيث أن

$$\mathbf{AX_i} = \lambda_i \mathbf{X_i} \qquad \forall \quad i = \overline{1,n} \qquad (5.4)$$

إذاً فللحصول على المتجه المميز X_i المقابل للقيمة المميزة λ_i، علينا بحل نظام المعادلات الجبرية الخطية المتجانس

$$\left(\lambda_i \mathbf{I_n} - \mathbf{A}\right) X_i = \mathbf{O} \qquad \forall \quad i = \overline{1,n} \qquad (5.5)$$

بما أن المصفوفة $\left(\lambda_i \mathbf{I_n} - \mathbf{A}\right)$ مصفوفة شاذة ***(Singular)*** حسب التعريف فمن المعروف عندئذٍ أن حل هذا النظام ليس متجهاً مميزاً واحداً، $\mathbf{X}_i$، بل هو فراغ من المتجهات المميزة، الأمر الذي يعني إنه

في مقابل كل قيمة مميزة λ_i يوجد عدد لانهائي من المتجهات المميزة $\mathbf{X}_i$.

مثال 5.3 أوجد القيم المميزة، وكذلك المتجهات المميزة المقابلة لكل قيمة مميزة للمصفوفة

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل المصفوفة $\mathbf{A}$ مربعة من الرتبة الثانية، أي أن $n = 2$ إذاً توجد قيمتان مميزتان. المعادلة المميزة للمصفوفة $\mathbf{A}$ هي

$$\left|\lambda \mathbf{I}_2 - \mathbf{A}\right| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -4 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$$

أو

$$(\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$$

إذاً القيم المميزة هي

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3$$

للحصول على المتجهات المميزة في مقابل القيمة المميزة $\lambda_1 = -1$ نوجد حل النظام

$$\left(\lambda_1 I_n - A\right) X_1 = 0$$

أو النظام

$$\left(-1 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو النظام

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

والذي يمكن أنْ يستبدل بالنظام

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث تم استبدال المصفوفة المختزلة ***(Reduced Matrix)*** بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ حسب طريقة جاوس . جوران والتي تقول . أيضاً . أن المتغير x_2 هو متغير تابع بينما المتغير x_1 هو متغير مستقل. ولنفرض أن $x_1=\alpha\neq 0$ ، حيث α تأخذ قيماً اختيارية ما عدا الصفر. بما أن

$$0x_1+x_2=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=0$$

إذاً فإن

$$X_1=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \alpha\neq 0$$

واضح أن المتجه المميز X_1 ما هو إلا فراغ لانهائي من المتجهات المميزة، وذلك لأن α تأخذ قيماً اختيارية ماعدا الصفر. للحصول

على المتجهات المميزة المقابلة للقيمة المميزة $\lambda_2 = 3$ نوجد حل النظام

$$\left(\lambda_2 \mathbf{I_n} - \mathbf{A}\right)\mathbf{X_2} = \mathbf{0}$$

أو

$$\left(3 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو النظام

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث تم استبدال المصفوفة المختزلة $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ حسب طريقة جاوس . جوران. كذلك نرى أن x_1 هو متغير تابع، بينما x_2 هو متغير مستقل. لنفرض أن $x_2 = \beta \neq 0$ حيث β تأخذ قيماً اختيارية ماعدا الصفر. بما أن

$$x_1 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \beta$$

إذاً فإن

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;;\quad \beta \neq 0$$

واضـح أن المتجـه المميـز X_2 يكّـون فراغـاً لانهائيـاً مـن المتجهـات المميزة، وذلك لأن β تأخذ قيماً اختيارية ما عدا الصفر.

✍.

نقـدم الآن تعريـف المصفوفة القطرية *(Diagonal Matrix)* وبعض خصائصـها ثم نـدرس شـروط وكيفيـة تحويـل أيـة مصـفوفة مربعـة إلى مصفوفة قطرية.

تعريف 5.2 المصفوفة القطرية Diagonal Matrix

يقـال لأيـة مصـفوفة مربعـة، $\mathrm{D}=\left(d_{ij}\right)$، مـن الرتبـة $n\times n$ أنهـا مصـفوفة قطريـة إذا كانـت كـل عناصـرها *(Entries)* أصـفاراً ماعـدا عناصـر القطـر الرئيسـي *(Main Diagonal)*، حيـث يوجـد . علـى الأقل . عنصر واحد غير صفري ضمن عناصر القطر الرئيسي.

✍.

بلغـة الرياضـيات فـإن هـذا يعـني أن المصـفوفة $\mathrm{D}=\left[d_{ij}\right]$ تكـون مصـــفوفة قطريـــة إذا كـــان $d_{ij}=0\ \forall\ i\neq j$. إذاً فـــإذا كانـــت $\mathrm{D}=\left[d_{ij}\right]$ هي مصفوفة قطرية فإنها يجب أن تأخذ الشكل

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}$$

انتبه !

القيم المميزة لأية مصفوفة قطرية هي عبارة عن عناصر القطر الرئيسي. على سبيل المثال فإن القيم المميزة للمصفوفة

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

هي $\lambda_1=1,\quad \lambda_2=2,\quad \lambda_3=10$

والسؤال المطروح الآن هو هل يمكن لأية مصفوفة أن تتحول إلى مصفوفة قطرية؟ هل توجد شروط لذلك؟ وكيف يتم تحويل المصفوفة إلى الشكل القطري؟ الإجابة عن هذه الأسئلة تقدمها النظريات الآتية.

نظرية 5.2 قابلية المصفوفة لكي تكون قطرية

لتكن $\mathbf{A}$ أية مصفوفة مربعة من الرتبة $n\times n$. لنفرض أن الفئة $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ هي فئة القيم المميزة لهذه المصفوفة. لنفرض أن

المتجهات المميزة المقابلة لهذه القيم المميزة هي الفئة $\left\{X_i\right\}_{i=1}^{n}$ وهى ـ جميعها ـ من الرتبة $n\times 1$.

ولنفرض ـ أيضاً ـ أن P هي المصفوفة التي تتكون من عدد n من الأعمدة، كل عمود فيها هو أحد المتجهات المميزة. إذا كانت وفقط إذا كانت هذه المتجهات المميزة، $\left\{X_i\right\}_{i=1}^{n}$، غير مرتبطة خطياً فإن المصفوفة A تكون قابلة لأن تكون قطرية، بحيث يكون

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{bmatrix} \tag{5.2}$$

.✍

نظرية 5.3

لتكن A أية مصفوفة مربعة من الرتبة $n\times n$. إذا كانت القيم المميزة $\left\{\lambda_i\right\}_{i=1}^{n}$ لهذه المصفوفة كلها مختلفة وغير مكررة، فإن المتجهات المميزة $\left\{\mathrm{X}_i\right\}_{i=1}^{n}$ من الرتبة $n\times 1$ والمقابلة لهذه القيم المميزة جميعها تكون غير مرتبطة خطياً وتكون المصفوفة A قابلة لأن تكون مصفوفة قطرية.

سنحاول الآن استخدام المفاهيم السابقة في حل نظم المعادلات التفاضلية العادية في حالة قابلية مصفوفة المعاملات في نظام المعادلات التفاضلية لأن تكون مصفوفة قطرية. المثال الآتي يوضح هذه الفكرة.

مثال 5.4 أوجد حل نظام المعادلات التفاضلية

$$y_1' = y_1 - y_2 + 2y_3$$
$$y_2' = 3y_1 + 4y_3$$
$$y_3' = 2y_1 + y_2$$

الحل نضع النظام في الشكل $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}$ ، حيث

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix}, \ \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ويكون المطلوب الآن هو إيجاد مصفوفة العمود $\mathbf{Y}$ (الحل المطلوب).

المعادلة المميزة للمصفوفة $\mathbf{A}$، هي

$$\left|\lambda \mathbf{I}_3 - \mathbf{A}\right| = 0$$

أو

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & -2 \\ -3 & \lambda & -4 \\ -2 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

بفك هذا المحدد نحصل على

$$(\lambda - 1)\left[\lambda^2 - 4\right] - [-3\lambda - 8] - 2[3 + 2\lambda] = 0$$

حل هذه المعادلة الأخيرة يعطي القيم المميزة للمصفوفة **A**. وبالتالي نجد أن

$$\lambda_1 = 2 \; ; \quad \lambda_2 = \frac{\left(-1 - \sqrt{13}\right)}{2} \; ; \quad \lambda_3 = \frac{\left(-1 + \sqrt{13}\right)}{2}$$

أما المتجهات المميزة المقابلة فهي

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} -5 - \sqrt{13} \\ -2\sqrt{13} \\ 7 + \sqrt{13} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} -5 + \sqrt{13} \\ 2\sqrt{13} \\ 7 - \sqrt{13} \end{bmatrix}$$

وبما أن المتجهات المميزة كلها مختلفة، إذاً فهى مستقلة خطياً حسب النظرية (5.5) ويمكن للمصفوفة **A** أن تتحول إلى مصفوفة قطرية بواسطة المصفوفة **P**، حيث

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & -5-\sqrt{13} & -5+\sqrt{13} \\ 2 & -2\sqrt{13} & 2\sqrt{13} \\ 1 & 7+\sqrt{13} & 7-\sqrt{13} \end{bmatrix}$$

الآن بالتعويض عن

$$\mathbf{Y} = \mathbf{P}\ \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Y}' = \mathbf{P}\ \mathbf{Z}'$$

حيث

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}' = \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{bmatrix}$$

في النظام الأصلي $\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}$ نجد أنه يتحول إلى نظام جديد فيه المصفوفة $\mathbf{Z}$ هي مصفوفة المجاهيل بدلاً من المصفوفة $\mathbf{Y}$ ويأخذ الشكل

$$\mathbf{P}\ \mathbf{Z}' = \mathbf{AP}\ \mathbf{Z}$$

بضرب طرفي هذا النظام من اليسار في المصفوفة العكسية P^{-1} نحصل على

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}\ \mathbf{Z}$$

لاحظ أن

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\ \mathbf{Z}' = \mathbf{I}\ \mathbf{Z}' = \mathbf{Z}'$$

حيث I هي مصفوفة الوحدة *(Unit Matrix)* من نفس الرتبة كما أن $\mathbf{P^{-1}P = I}$. بما أن

$$\mathbf{P^{-1}AP} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1-\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \end{bmatrix}$$

إذاً فإن

$$\mathbf{Z'} = \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1-\sqrt{13}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z_1 \\ \frac{-1-\sqrt{13}}{2} z_2 \\ \frac{-1+\sqrt{13}}{2} z_3 \end{bmatrix}$$

وهكذا نجد أن

$$z_1' = 2z_1,\ z_2' = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} z_2,\ z_3' = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} z_3$$

وهذه معادلات تفاضلية انفصالية من الرتبة الأولى يمكن حلها بفصل المتغيرات وإجراء عملية التكامل لنحصل على

$$z_1 = ae^{2t}\,,\ z_2 = be^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}t}\,,\ z_3 = ce^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}t}$$

حيث a، b، c ثوابت اختيارية. يمكن ـ أيضاً ـ الحصول على المصفوفة Z في الشكل المصفوفي

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{2t} \\ be^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}t} \\ ce^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}t} \end{bmatrix}$$

وبما أن $\mathbf{Y} = \mathbf{PZ}$ ، إذاً

$$\mathbf{Y} = \mathbf{PZ} = \begin{bmatrix} 0 & -5-\sqrt{13} & -5+\sqrt{13} \\ 2 & -2\sqrt{13} & 2\sqrt{13} \\ 1 & 7+\sqrt{13} & 7-\sqrt{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ae^{2t} \\ be^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}t} \\ ce^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}t} \end{bmatrix}$$

الآن، بوضع

$$\beta_1 = e^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}t}\,,\ \ \beta_2 = e^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}t}$$

نجد أن الحل العام للنظام المعطى هو

$$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \left(-5-\sqrt{13}\right)\left(b\beta_1\right)+\left(-5+\sqrt{13}\right)\left(c\beta_2\right) \\ 2\left(ae^{2t}\right)+\left(-2\sqrt{13}\right)\left(\beta\lambda_1\right)+\left(2\sqrt{13}\right)\left(c\beta_2\right) \\ \left(ae^{2t}\right)+\left(7+\sqrt{13}\right)\left(b\beta_1\right)+\left(7-\sqrt{13}\right)\left(c\beta_2\right) \end{pmatrix}$$

✍.

5.3 مسائل

بـيِّن مـا اذا كانـت المصـفوفات الآتيـة قابلـة لأن تكـون مصـفوفات قطرية، فإذا كانت كذلك فأوجد المصفوفة غير الشاذة P التي تحولها إلى مصفوفة قطرية.

(1) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	(2) $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$
(3) $\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$	(4) $\mathbf{D}=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$
(5) $\mathbf{E}=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	(6) $\mathbf{G}=\begin{bmatrix} 8 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

أوجد حلول نظم المعادلات التفاضلية الآتية

(7)	$y_1' = 3y_1 + 2y_2$ $y_2' = y_1 + 4y_2$	(8)	$x' + y' - x = \sin(t)$ $x' - 3y = 2$
(9)	$y_1' = y_2 + y_3$ $y_2' = 2y_1 - 3y_3$ $y_3' = y_1 + y_2$	(10)	$y_1' = 5y_1 - y_2$ $y_2' = -2y_2$ $y_3' = 8y_1 + 7y_2$
(11)	$y_1' = -4y_1 + 3y_2$ $y_2' = 2y_1 - 3y_2$	(12)	$y_1' = 5y_1 - 4y_2 + 4y_3$ $y_2' = 12y_1 - 11y_2 + 12y_3$ $y_3' = 4y_1 - 4y_2 + 5y_3$
(13)	$2x' + y' - x + 4y = 6e^{2t}$ $x' - y' = 0$	(14)	$x' + y' - x = \ln t$ $x' - 3y = 2$

****