ملخص مادة..

المعادلات التفاضلية

لجنة الميكانيك

Polytechnic

0789434018

Mech.MuslimEngineer.Net

MechFet

FB.com/Groups/Mid.Group

بسم الله الرحمن الرحيم

اللهم علمنا ما ينفعنا، وانفعنا بما علمتنا، وزدنا علماً يا رب العالمين ....

- هذا الملخص يحتوي على شرح مبسّط لمادة المعادلات التفاضلية (ديف). حيث نذكر فيه طريقة الحل على كل قاعدة وكيفية اختيار القاعدة المناسبة لحل المسائل، سائلين المولى عز وجل أن يمُنّ علينا بالقبول والسداد.

مواضيع المادة :-

→ Introduction

→ First order D.E

→ Higher order D.E

→ linear system of D.E

→ power series

→ Laplace and Laplace inverse

" خدمتكم عبادة نتقرب بها الى الله "

لجنة_الميكانيك

الاتجاه_الاسلامي

← في البداية هناك متطابقات لابد من أن نعرفهما... -

$$\sin^2 t = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2t) \qquad \cos^2 t = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2t)$$

$$\sin^2 t = \tfrac{1}{2}(1-\cosh 2t) \qquad \cosh^2 t = \tfrac{1}{2}(1+\cosh 2t)$$

$$\sec(t) = \frac{1}{\cos(t)} \qquad \csc(t) = \frac{1}{\sin t}$$

$$\sinh at = \frac{e^{at}-e^{-at}}{2} \qquad \cos at = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

مشتقة الزاوية

$$(\sinh(at))' = (\cosh(at)) * a \qquad \int(\cosh(at)) = \sinh(at) * \frac{1}{a}$$

← مشتقة الزاوية

$$(\cosh(at))' = (\sinh(at)) * a \qquad \int(\sinh(at)) = \cosh(at) * \frac{1}{a}$$

$$(\sin(at))' = (\cos(at)) * a \qquad \int(\cos(at)) = \sin(at) * \frac{1}{a}$$

$$(\cos(at))' = -(\sin(at)) * a \qquad \int(\sin(at)) = -\cos(at) * \frac{1}{a}$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t \qquad \cosh 2t = \cosh^2 t + \sinh^2 t$$

$$\int \sec(t)\,dt = \ln|\sec t + \tan t| + \underline{\underline{c}}$$ ثابت

$$\int \csc(t)\,dt = \ln|\csc(t) - \cos(t)| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}\,dt = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

← يمكن استخدام رمز (t) أو (x)

$$*\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

← ركز على الأخيرة

← هناك عدّة معلومات يجب معرفتها قبل البدء بالحل، منها :

$y = f(x) \longrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$ $y = f(x,y) \longrightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = f'(x,y)$

- عندما يكون الاقتران بدلالة أكثر من رمز ونريد اشتقاقه نضع حرف (d) بميلان ويسمى (∂) (partial)

اما اذا كان الاقتران بدلالة رمز واحد فنضع (d) وتسمى (ordinary)

- تصنف المعادلات التفاضلية بناءً على أربعة أمور سنذكرها وهي :

- 1] Type :

a) ordinary b) partial وسبق ذكر هذا الأمر في الأعلى

- 2] order : الرتبة

هو أعلى تفاضل موجود في المعادلة التفاضلية

- 3] Degree :

هو القوة المرفوعة لأعلى تفاضل موجود في المعادلة التفاضلية

- 4] Linear and non-Linear

حيث تكون المعادلة التفاضلية (Linear) إذا

1) كانت مشتقات (y) مرفوعة لقوة واحد

2) كانت مشتقات (y) مضروبة بثوابت فقط بدون متغيرات مثل (x)

← وغير ذلك تكون non-Linear

E.X $(y''')^3 + (y')^4 + y'' = 5 \longrightarrow 3^{rd}$ order, 1^{st} Degree, non-linear

E.X $\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + x^3 = 3 \longrightarrow 2^{nd}$ order, 1 Degree, Linear

← القوة المرفوع لثابت أو متغير اذا كانت بين قوسين فهي ليست قوة بل مقدار المشتقة :

$$y'' = y^{(2)} \neq y^2$$

← المعادلة التفاضلية : معادلة اي طرف يعادل طرف ، تفاضلية أي فيها مشتقة أو أكثر

← يعطينا في السؤال معادلة تفاضلية فإن كانت أعلى مشتقة فيها هي المشتقة الأولى فالحل على طرق (First order) أما إن كانت أعلى مشتقة هي المشتقة الثانية أو الثالثة أو أكثر فالحل على طرق (Higher order) .

← يطلب منا في العادة ايجاد الـ (general solution) (g.s) ، وهي المعادلة الأساسية والتي عند اشتقاقها حصلنا على المعادلة المعطاة في السؤال ، ولإيجاد (g.s) نحتاج أن نكامل المعادلة التفاضلية

*First Order : - يوجد فيها تسعة طرق لإيجاد (g.s) وسنبدأ الآن بكل طريقة

1] seperable Differential Equation :
(D.Es)

" كل رمز مع دالة " ← هذا مفتاح الطريقة

← ملاحظة : .... ، $\acute{y} = \frac{dy}{dx}$ ، $\acute{\acute{y}} = \frac{d^2y}{dx^2}$

اي جد (g.s)

E.X: solve $\acute{y} = \frac{x}{y}$

نلاحظ هنا أن (x) مع d(x) و (y) كذلك

sol: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \rightarrow (y)\,dy = (x)\,dx \rightarrow \int (y)\,dy = \int (x)\,dx$

← بدنا نتفق : أي عدد مضروب بـ (c) أو مجموع لـ (c) أو قوة (c) فالناتج هو بالتأكيد (c) ثابت

$$\frac{y^2}{2} + c_1 = \frac{x^2}{2} + c_2 \qquad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \;(*2) \qquad y^2 = x^2 + c$$

$$y = \sqrt{x^2 + c} \quad \text{-----} \; (g.s)$$

← يمكن أن يطلب إيجاد (Partical solution) P.s ، أو IVP (initial value problem) ونقصد بها أنه يريد ايجاد (g.s) مع ايجاد قيمة الثابت (c) في المعادلة ، ويعطينا معطى في السؤال لإيجاده .

E.X: $\acute{y} = \frac{x^2y + x^2 + y+1}{xy + x}$, $y(1) = 2$, Find the IVP and find $y(2)$??

sol: $\acute{y} = \frac{x^2(y+1) + (y+1)}{x(y+1)}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{x}$ $\quad dy = \left(\frac{x^2+1}{x}\right) dx$

$\int dy = \int \left(x + \frac{1}{x}\right) dx \rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x + C$

@ $y(1) = 2$: $\frac{(2)^2}{2} = \frac{(1)^2}{2} + \ln 1 + C$ $\quad 2 = \frac{1}{2} + C$ $\quad C = \frac{3}{2}$

$\therefore$ the IVP is $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x + \frac{3}{2} \rightarrow y = \sqrt{\left(\frac{x^2}{2} + \ln x + \frac{3}{2}\right) * 2}$ ... P.s

$y(2) = \sqrt{\left(\frac{(2)^2}{2} + \ln 2 + \frac{3}{2}\right) * 2} = \sqrt{4 + 2\ln 2 + 3}$ - - - - -

EX: $e^{x+y} \acute{y} = e^{2x}$, If $y(0) = 1$, Find the P.s :

sol : $e^x . e^y \frac{dy}{dx} = e^{2x}$ $\quad e^y dy = e^x dx \xrightarrow[\text{الطرفين}]{\text{تكامل}} e^y = e^x + C$

$\ln(e^y) = \ln(e^x + c)$ $\quad y = \ln(e^x + c)$

@ $y(0) = 1$: $1 = \ln(e^0 + c)$ $\quad e^1 = e^{\ln(1+c)}$ $\quad e = 1 + c \rightarrow c = e - 1$

$\therefore y = \ln(e^x + e - 1)$ - - - - - P.s

← اذا لم نستطع وضع كل رمز مع دالة فعلينا إيجاد طريقة أخرى للحل

← اذا وجدنا في السؤال $\left(\frac{x}{y}\right)$ أو $\left(\frac{y}{x}\right)$ فغالبا الحل بالطريقة التالية :

2] Reduction to seperable form (Homogeneous DEs)

متجانس

(سنشرح لاحقا)

نستبدل $\left(\frac{y}{x}\right)$ or $\left(\frac{x}{y}\right)$ ثم نحل بطريقة (seperable)

Ex: $\acute{y} = \frac{y}{x} + e^{y/x}$

(الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول)

sol: $\boxed{u = \frac{y}{x}}$ {نريد ايضا ايجاد $(\acute{y})$ بدلالة (u,x) كي نستبدلها ايضا} $\rightarrow y = ux \xrightarrow{\text{نشتق}} \acute{y} = u + x\acute{u}$

(نعوض في المعادلة)

$\cancel{u} + x\acute{u} = \cancel{u} + e^{u}$ $\qquad x\frac{du}{dx} = e^{u}$ $\qquad x\,du = e^{u}dx$

$\left\{\frac{1}{e^{u}}\right\} du = \frac{1}{x}dx \xrightarrow[\text{الطرفين}]{\text{تكامل}} -e^{-u} = \ln x + c \rightarrow -e^{-\frac{y}{x}} = \ln x + c$

$= e^{-u}$

← نقسم في البداية على $(2xy)$ عشان نزبط شكل المعادلة

Ex: Solve $2xy\acute{y} = y^2 - x^2$

$\boxed{u = \frac{y}{x}}$: حيث $u^{-1} = \frac{x}{y} = \frac{1}{u}$

$y = xu \rightarrow \acute{y} = x\acute{u} + u$

sol: $\acute{y} = \frac{y^2}{2xy} - \frac{x^2}{2xy} = \frac{y}{2x} - \frac{x}{2y}$

$x\acute{u} + u = \frac{u}{2} - \frac{u^{-1}}{2}$ $\qquad x\acute{u} = -\frac{1}{2}u - \frac{1}{2u}$

$x\acute{u} = \frac{-u^2-1}{2u}$ $\qquad x\frac{du}{dx} = \frac{-u^2-1}{2u}$ $\qquad \frac{2u}{-(u^2+1)}du = \frac{1}{x}dx$

$$\int \frac{2u}{-(u^2+1)}du = \int \frac{1}{x}dx \qquad -Ln(u^2+1) = Ln|x| + c$$

$$\underset{\text{سالب الثابت تعطينا ثابت}\ \therefore\ -c=c}{-c} = Ln|x| + Ln|u^2+1| = Ln(x(u^2+1)) \qquad c = Ln(x(u^2+1))$$

$$e^{c} = e^{Ln\, x(u^2+1)} \qquad c = x(u^2+1) = x\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) = \frac{y^2}{x} + x$$

بشكل مختلف $\quad c = (y^2+x^2)\frac{1}{x} \qquad cx = y^2+x^2 \quad ----\ g.s$

← اذا لم نستطع الحل على ما سبق نحاول الحل بالطريقة التالية

3] Transform to Seperable form

- ويجب ان تكون (x) و (y) في المعادلة مرفوعة لقوة واحد كي نحل بهذه الطريقة

- ننظر للمعادلة فإن وجدنا $(x \pm y)$ أو $(4x-y)$ أو $(x+3y)$ أو أي شكل مشابه فإننا نستبدله ونحل بنفس الطريقة السابقة

Ex: solve $(x+y)dx + dy = 0$, $y(0)=3$, find $y(1)$?

Sol: $dy = -(x+y)dx \qquad \frac{dy}{dx} = -(x+y)$

$$\left\{\begin{array}{l} Z = x+y \\ y = Z - x \rightarrow \frac{dy}{dx} = Z' - 1 \end{array}\right.$$

$$Z' - 1 = -Z \qquad \frac{dZ}{dx} = 1 - Z$$

$$dx = \frac{1}{1-Z}dZ \xrightarrow[\text{الطرفين}]{\text{تكامل}} x = -Ln|1-Z| + c$$

$$Ln|1-Z| = c - x \qquad e^{Ln|1-Z|} = e^{c-x} \qquad 1-Z = e^{c}.e^{-x}$$

$$1-(x+y) = c.e^{-x} \qquad @\ y(0)=3 \longrightarrow 1-(0+3) = c.e^{0} \rightarrow c=-2$$

$$1-x-y = -2e^{-x} \qquad \therefore y(1) \Rightarrow 1-(1)-y = -2e^{-1}$$

$$y = 2e^{-1} = \frac{2}{e} \quad \#$$

Ex: $\acute{y} = \sin(x-y)$ find the g.s:

sol: $Z = x - y$, $y = x - Z \rightarrow \acute{y} = 1 - \acute{Z}$ } $1 - \acute{Z} = \sin Z$ $\quad \acute{Z} = 1 - \sin Z$

$\frac{dz}{dx} = 1 - \sin Z \qquad \underbrace{\frac{1}{1-\sin Z}}_{\text{طريقة التكامل}} dz = dx \xrightarrow{\text{تكامل}} \tan Z + \sec Z + C = X$

$\tan(x-y) + \sec(x-y) + c = X$ g.s

ضرب مرافق

$\int \frac{1}{1-\sin Z} dZ * \frac{1+\sin Z}{1+\sin Z} = \int \frac{1+\sin Z}{1-\sin^2 Z} dz = \int \frac{1+\sin Z}{\cos^2 Z} dZ$

$= \int (\sec^2 Z + \frac{\sin Z}{\cos Z} * \frac{1}{\cos Z}) dz = \int (\sec^2 Z + \tan Z \sec Z) dZ = \tan Z + \sec Z$

4] orthognal Trajectories: المسارات المتعامدة

← نميز الحل بهذه الطريقة من خلال: ١) يطلب منا في السؤال ايجاد arth. Traj.

٢) يعطينا في السؤال معادلة غير تفاضلية

* خطوات الحل:

١) نشتق لإيجاد معادلة تفاضلية

٢) نجعل ($\acute{y}$) موضعا للقانون

٣) نقلب ونضرب بسالب للطرف الآخر

٤) نستخدم طريقة (seperable) لإيجاد g.s

Ex: $y = \frac{c}{x}$, find the orth. traj.:

sol: $yx = c \qquad \boxed{1}\ y(1) + X\acute{y} = 0 \qquad \boxed{2}\ \acute{y} = \frac{-y}{x} \qquad \boxed{3}\ \acute{y} = \frac{x}{y} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

$\boxed{4}\ y\,dy = X\,dx \xrightarrow{\text{نكامل}} \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \; \ldots\ldots \; y^2 - x^2 = c$

Ex: $y^2+x^2=c$ find the orth. traj. :

Sol : $2yy'+2x=0$ $\quad y'=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{y}$ $\quad y'=\frac{y}{x}$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$

$\frac{1}{y}dy=\frac{1}{x}dx \xrightarrow{\text{تكامل}} \ln y=\ln x+c$ $\quad c=\ln y-\ln x=\ln\frac{y}{x}$

$e^c=e^{\ln\frac{y}{x}}$ $\quad c=\frac{y}{x} \Rightarrow y=cx$

5] Clairaut's DEs : ← نميز الحل على هذه الطريقة من خلال أمور عدة منها:

* ١) وجود أكثر من (y') في المعادلة
٢) تكون (y') مرفوعة لقوة أكبر من واحد (مش دايما).
٣) يطلب منا في السؤال ايجاد (singular Solution) (s.s).

* خطوات الحل :
1] نضع (P) بدل كل (y') في المعادلة
2] نجد قيمة (x) من خلال القانون $\boxed{x=-F(P)'}$
حيث $F(P)$: هي الاقتران اللي مش مع (x) وبدلالة (P).
3] نعوض قيمة (x) بالمعادلة لينتج (s.s)

- اذا أراد (s.s) بدلالة (x,y) علينا أن نجد علاقة بين (x) و(P) ونعوضها بالمعادلة.

Ex: Solve $y=xy'+(y')^3$

Sol: $y=\overset{1]}{x}P+P^3$ $\quad x=\overset{2]}{-}F(P)'\ :f(P)$ $\quad x=-(P^3)'=-3P^2$

xP: اقتران بدلالة (P) مع (x)

P^3: اقتران بدلالة (P) مش مع x $f(P)$

اذا نظرنا إلى الخيارات ووجدنا الحل بدلالة (x,y)
وليس بدلالة (x , P) نجد علاقة بين (x) و(P)

$y=-3P^2*P+P^3=-3P^3+P^3$ $\quad y=-2P^3$ ----- s.s

$(y=-2P^3)^2$ $\quad (x=-3P^2)^3$

$y^2=4P^6$ $\quad x^3=-27P^6$ $\quad P^6=P^6$

$\boxed{\frac{y^2}{4}=P^6}$ $\quad \boxed{\frac{x^2}{-27}=P^6}$ $\quad \frac{x^3}{-27}=\frac{y^2}{4} \rightarrow y=\sqrt{\frac{-4}{27}x^3}$ ---- s.s

E.x: $y = xy' + \cos y'$, find the S.S:

Sol: $y = xP + \cos P$ $\qquad x = -f'(P) = -(\cos P)' = \sin P \therefore x = \sin P$

$y = (\sin P)P + \cos P \ldots SS$ $\qquad \because x = \sin P \quad \therefore P = \sin^{-1} x$

ـ لكن تبقيت (cosP) بدون استبدال لذلك نقوم بالتالي:

$\therefore y = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$ $\qquad \because \sin P = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{1} = x$

$\therefore \cos P = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}$

$u = \sqrt{1-x^2}$

من فيثاغورس .... $(1)^2 = u^2 + x^2$

$u = \sqrt{1-x^2}$

6] Exact D.Es:

← إذا لم تكن طرق الحل على ما سبق وكانت المعادلة على الشكل التالي $(M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0)$ عندما يكون الحل إما (exact) أو (not exact) ونحدد الطريقة من خلال القانون التالي $\left[\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\right] \rightarrow$ exact

اي نشتق الأول M بالنسبة للثاني dy ونبحث هل يساوي مشتقة الثاني N بالنسبة للأول dx فإذا تساوى الطرفان اذن (exact) وغير ذلك (not exact)

not exact ← $\left[\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}\right]$

E.x: Solve, $(2x+3y)dx + (3x+e^y)dy = 0$

مشتقتها بالنسبة لـ(y) = 0 $\qquad$ مشتقتها بالنسبة (x) = 0

Sol: $\frac{\partial(2x+3y)}{\partial y} \; ?? \; \frac{\partial(3x+e^y)}{\partial x}$ $\qquad 3 \overset{??}{=} 3 \checkmark \therefore$ exact

خطوات الحل:

1] $F = \int (2x+3y)dx + g(y) = x^2 + 3xy + g(y)$

1] $F = \int M dx + g(y)$ ، وبعد أن نكامل (M) نريد ايجاد g(y)

$\frac{\partial F}{\partial y} = N \Rightarrow \frac{\partial[x^3 + 3xy + g(y)]}{dy} = 3x + e^y$

2] نشتق المعادلة بالنسبة لما داخل (g) وهو (y) ثم نساوي المعادلة بـ (N)

$\cancel{3x} + g'(y) = \cancel{3x} + e^y \rightarrow g'(y) = e^y$

3] نجد قيمة $g'(y)$ ثم نكاملها لنجد g(y)

$g(y) = \int e^y dy = e^y$

4] نعوض g(y) بالمعادلة مع استبدال الرمز (F) بالرمز (c) ثابت

$C = x^2 + 3xy + e^y$ ---- g.s

E.X: Solve, $(\underbrace{\cos y \sinh x + 1}_{M})dx - (\underbrace{\sin y \cosh x}_{N})dy = 0$, $y(0) = \pi$, and find the IVP:

* نلاحظ اذا اشتققنا بالنسبة لـ (x) فإننا نعامل (y) كثابت والعكس صحيح

$\frac{\partial M}{\partial y} \overset{??}{=} \frac{\partial N}{\partial x}$ $(-\sin y \sinh x) \overset{??}{=} -\sin y \sinh x$

$\therefore$ exact

" وكذلك عند التكامل "

$F = \int (\cos y \sinh x + 1)dx + g(y)$

$F = \cos y \cosh x + x + g(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = N \Rightarrow -\sin y \cosh x + g'(y) = -\sin y \cosh x \rightarrow g'(y) = 0$

انتبه (موجوده بالسؤال) $\therefore g(y) = 0$

تكامل الصفر يعطينا ثابت (c) لكن اذا عوضنا (c) بالمسألة ماراح يؤثر على المسألة الأني ما بأثر الصفر لما نحطه، لذلك نضع صفر

$C = \cos y \cosh x + x + 0$ --- g.s

(جرب حط (c) وتأكد وديربالك عحالك)

عند $y(0) = \pi \rightarrow C = \cos(\pi)\cosh(0) + 0$ $\quad C = -1$

$-1 = \cos y \cosh x + x$ ---- P.S #

" كل (seperable) هي (exact) لكن ليس كل (exact) هو (seperable) "

اي كل مسألة نستطيع حلها على (seper.) فيمكن حلها على الطريقة (exact) لكن ليس كل مسألة نحلها على (exact) يمكن حلها على طريقة (seper.)

لاتخشى أحد ومعك أحد

اسعى لإرضاء ربّ الناس ... يرضى عنك ويُرضي عنك الناس...

7] Not exact: ← في حال $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ فإننا ننتقل الحل بالطريقة التالية

← هنا الحل كالتالي :

١) نجد قيمة معامل التكامل ((M) integral Factor)

٢) نضرب (M) بالمعادلة لتصبح المعادلة (Exact) وليس (Not exact)

٣) نكمل الحل بطريقة (Exact) لإيجاد (g.s)

← قد يطلب في السؤال ايجاد (M) فنقف بعد الخطوة الأولى لأننا وجدنا المطلوب

← في (Not exact) نجد (M) بثلاث طرق نجرب أول طريقة فإن لم تحل المسألة ننقل الثانية وهكذا :

- الطريقة الأولى: ١) نجد ناتج طرح (مشتقة الأول بالنسبة للثاني) من المشتقة الثانية بالنسبة للأول

$$\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} = \text{(ناتج)}$$

٢) نبحث فيما اذا كان الناتج يقبل القسمة على (P) أو (Q)
ونقصد بذلك اننا اذا قسمناها على (P) أو (Q)
هل يوجد اختصار ، ان كان نعم نكمل وإن كان لا ننتقل للطريقة الثانية .

← إن كان نعم ،
- ويقسم على (P) ← $\frac{\text{(ناتج)}}{P} = f(y)$ ← $M = e^{-\int f(y)dy}$
- ويقسم على (Q) ← $\frac{\text{(ناتج)}}{Q} = F(x)$ ← $M = e^{\int f(x)dx}$

E.x: $(\underbrace{2x^2+y}_{P})dx + (\underbrace{x^2y-x}_{Q})dy = 0$, find the integral factor:

← أولاً نتأكد هل هو (Exact) أم (not exact) كما تعلمنا سابقاً ، وبطلع not exact

$$\frac{\partial P}{dy} - \frac{dQ}{dx} = 1-(2xy-1) = 2-2xy \rightarrow$$

- $\frac{2-2xy}{2x^2+y}$ ← لا يوجد اختصار
- $\frac{2-2xy}{x^2y-x} = \frac{-2(\cancel{xy-1})}{x(\cancel{xy-1})} = \frac{-2}{x} = f(x)$ (لأننا قسمنا على Q)

$$M = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{-2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$$

$$M = x^{-2}$$

- الطريقة الثانية: قبل البدء بها يجب أن نعرف كيف نعلم أن الاقتران متجانسه أم لا، وماهي درجة تجانسة .

← بنوزع (t) على كل x أو y في الاقتران

← نعمل لـ (t) عامل مشترك أو اختصار أو كليهما

← اذا رجع الاقتران كما كان يكون متجانس وإلا فهو غير متجانس

← اذا كان متجانس نحدد درجة تجانسه من خلال قوة (t)

E.X: $f(x,y) = x^2+y^2$

Sol:

$f(tx,ty) = tx*tx*ty*ty$

$= t^2x^2 + t^2y^2 = t^{2}(x^2+y^2)$

عاد الاقتران كما كان اذن هو متجانس من الدرجة الثانية

$t^0 = 1$

E.X: $\frac{x+y}{x-y} \rightarrow \frac{tx+ty}{tx-ty} = \frac{t(x+y)}{t(x-y)} = \frac{(x+y)}{(x-y)} t^{0}$ متجانس من الدرجة الصفرية

E.X: $x^2\cos\left(\frac{x}{y}\right)+y \rightarrow t^2\cos\left(\frac{tx}{ty}\right)+ty = t^2\cos\left(\frac{x}{y}\right)+ty$ لم يرجع كما كان اذن غير متجانس

E.X: $ye^{y/x}+x \rightarrow tye^{ty/tx}+tx = t(ye^{y/x}+x)$ متجانس من الدرجة الأولى

E.X: $\sin\left(\frac{y}{x}\right)+3 \rightarrow \sin\left(\frac{ty}{tx}\right)+3 = \sin\left(\frac{y}{x}\right)+3$ متجانس من الدرجة الصفرية

← شرح الطريقة الثانية

← اذا كان (P) و (Q) متجانسان ومن نفس درجة التجانس، اذن مباشرة فإن $M = \frac{1}{xP+yQ}$

E.X: $(x+3y)dx + (2x-y)dy = 0$, find M :

← بعد أن تأكدنا أنها (not exact) وجربنا الحل على الطريقة الأولى فلم تنفع ننتقل الى الطريقة الثانية :

$x+3y \rightarrow tx+3ty = t(x+3y)$ متجانس من الدرجة الأولى

$2x-y \rightarrow 2tx-ty = t(2x-y)$ متجانس من الدرجة الأولى

$\therefore M = \frac{1}{xP+yQ} = \frac{1}{x(x+3y)+y(2x-y)} = \frac{1}{x^2+3xy+2xy-y^2} = \frac{1}{x^2-y^2+5xy}$ #

← الطريقة الثالثة : اذا ما نفعت أول طريقتين بننتقل للثالثة :

← نخرج من (P) الـ (y) كعامل مشترك ونخرج من Q الـ (x) كعامل مشترك .

← اذا لم يتساوى ما بقي من (P) مع ما بقي من Q إذن فإن :

$$M = \frac{1}{xy(f-g)}$$

ما بقي من (P) ← (F)، ما بقي من Q ← (g)

E.X: $(2xy^2+y)\,dx + (x+2x^2y - x^4y^3)\,dy = 0$, find the (I.F) :

I.F ← integral factor

Sol : ← بعد التأكد بأنها not exact ولم نستطع حلها على أول طريقتين ننتقل للثالثة :

$$y(\underbrace{2xy+1}_{f})\,dx + x(\underbrace{1+2xy-x^3y^3}_{g})\,dy = 0$$

$$f \neq g$$

بما أن $\because f \neq g$ إذن $\therefore M = \frac{1}{xy(f-g)} = \frac{1}{xy(2xy+1-(1+2xy-x^3y^3))} = \frac{1}{xy(x^3y^3)}$

$$M = \frac{1}{x^4y^4} \ \#$$

ملاحظة ← اذا كان $(f=g)$ فنخرجهم كعامل مشترك لتصبح المعادلة $=0$: $f(y\,dx + x\,dy) = 0$ ← or (g)

وبما ان (f) or (g) لا تساوي صفراً إذن $(y\,dx + x\,dy = 0)$ ونكمل الحل بطريقة (seperable) لنجد g.s حيث في مثل هذه الاسئلة فإنه لا يطلب (M) بل يطلب ايجاد g.s

---

اجعل همك الآخرة . . . . . . –

افعل كل شيء لكن في طاعة الله ولتنجو من العذاب وتنعم بالجنة . . .

(وابتغ فيما آتاك الله الدار الآخرة ولا تنس نصيبك من الدنيا)

EX: Solve. $(3x^2y^4+2xy)\,dx+(2x^3y^3-x^2)\,dy=0$

Sol: $\dfrac{\partial(3x^2y^4+2xy)}{dy} \overset{??}{=} \dfrac{\partial(2x^3y^3-x^2)}{dx}$ $\quad 12x^2y^3+2x \overset{??}{=} 6x^2y^3-2x$

$\neq$ $\therefore$ Not exact

$$\frac{\partial P}{dy}-\frac{dQ}{dx}=12x^2y^3+2x-(6x^2y^3-2x)=6x^2y^3+4x$$

$$6x^2y^3+4x \rightarrow \frac{6x^2y^3+4x}{3x^2y^4+2xy}=\frac{2(\cancel{x^2y^3+2x})}{y(\cancel{x^2y^3+2x})}=\frac{2}{y}=f(y)$$

لانها عندما قسمناها على (P) اعطت اختصار

$$M=e^{-\int f(y)dy}=e^{-\int \frac{2}{y}dy}=e^{-2\ln y}=\cancel{e}^{\cancel{\ln}\, y^{-2}}$$

$\boxed{M=y^{-2}}$ $\rightarrow$ نضرب M بالمعادلة لتصبح exact

$$y^{-2}(3x^2y^4+2xy)\,dx+y^{-2}(2x^3y^3-x^2)\,dy=0$$

$$\left(3x^2y^2+\frac{2x}{y}\right)dx+\left(2x^3y-\frac{x^2}{y^2}\right)dy=0$$

$F=\int\left(3x^2y^2+\frac{2x}{y}\right)dx+g(y)$ ---→ ثم نكمل لايجاد g.s

---

← ضل طريقتين ، هانت ان شاء الله ☺

← اذا كانت المعادلة على الشكل التالي: $y'+P(x)y=Q(x)y^n$

وكان $(n=0)$ ∴ الحل بطريقة Linear $\xleftarrow{\text{تصبح المعادلة}}$ $y'+P(x)y=Q(x)$

$(n\neq0)$ ∴ الحل بطريقة Bernolli's

8] Linear D.Es:

* خطوات الحل

١- بنرتّب شكل المعادلة لتصبح على شكل معادلة (Linear) وهي $y' + P(x)y = Q(x)$
مع مراعاة أن يكون معامل أكبر مشتقة (المشتقة الاولى) يساوي واحد

٢- نجد M حيث تساوي $\boxed{M = e^{\int P(x)dx}}$: $P(x)$ هي الاقتران بدلالة (x) اللي مع (y) مش اللي بعد المساواة

٣- نطبق على القانون التالي لايجاد g.s

$$y = \frac{\left(\int (M \cdot Q(x))dx + c\right)}{M}$$

g.s

ملاحظة ← اذا (y) مش موجود بالمعادلة إذن معاملو هو صفر اذن P(x) تساوي صفر

E.x: solve $\frac{1}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = x\cos x$, $x>0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$:
and find P.S :

sol: $y' - \underbrace{\frac{2}{x}}_{P(x)}y = \underbrace{x^2\cos x}_{Q(x)}$ (ضربنا بـ (x) كي يصبح معامل y' واحد) : $P(x) = \frac{-2}{x}$

$$M = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{-2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$$

$$y = \frac{\int (x^{-2} \cdot x^2\cos x)\,dx + c}{x^{-2}}$$

انتبه : (+c) موجود مع البسط ومش مفصوله عن الكسر

$$y = \frac{\sin x + c}{x^{-2}} = x^2\sin x + x^2 c \quad , \quad @\, y(\tfrac{\pi}{2}) = 0 \therefore 0 = (\tfrac{\pi}{2})^2\sin\tfrac{\pi}{2} + (\tfrac{\pi}{2})^2 c$$

$$(\tfrac{\pi}{2})^2 c = -(\tfrac{\pi}{2})^2$$

$$c = -1$$

$\therefore$ P.S is $y = x^2\sin x - x^2$

E.X: $\cos^2 x\, y' + y = \tan x$, find the g.s :

sol : $y' + \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{P(x)} y = \underbrace{\frac{\tan x}{\cos^2 x}}_{Q(x)}$: $P(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

$$M = e^{\int \sec^2 x\, dx} = e^{\tan x}$$

$$y = \frac{\left(\int (e^{\tan x} \cdot \tan x \sec^2 x)\, dx + c\right)}{e^{\tan x}}$$

$Z = \tan x$ $\quad \frac{dZ}{dx} = \sec^2 x$

$dx = \frac{dZ}{\sec^2 x}$

"تكامل بالأجزاء"

$$y = \frac{\left(\int (e^{Z} \cdot Z \cdot \cancel{\sec^2 x}) \frac{dZ}{\cancel{\sec^2 x}} + c\right)}{e^{\tan x}} = \frac{\int (e^{Z} \cdot Z)\, dZ + c}{Z}$$

$$y = \frac{(Ze^{Z} - e^{Z} + c)}{e^{\tan x}} = \frac{\tan x\, e^{\tan x} - e^{\tan x} + c}{e^{\tan(x)}}$$

$$y = \tan x - 1 + c e^{-\tan x}$$

9] Bernolli's Equations:

١- بنرتّب شكل المعادلة ليصبح على شكل معادلة (Ber.) مع مراعاة ان أكبر مشتقة معاملها واحد

٢- نفرض على جنب ($u = y^{1-n}$)

٣- نقوم ثلاث خطوات في نفس الوقت :

A - نحذف (y^n)

B - نضع (u) بدل (y) في المعادلة

C - نضرب الاقترانين $P(x)$ و $Q(x)$ بـ ($1-n$)

٤- عند قيامي بما سبق تصبح المعادلة (Linear) ثم نكمل الحل بطريقة (Linear).

← نلاحظ أن مبدأ (Ber. ← Linear) يشبه مبدأ (not exact ← exact)

E.x: $2\acute{y} - 10y = -5xy^3$, find the g.s:

Sol: $\div 2$

$$\acute{y} - 5y = \frac{-5}{2}x\,y^3 \qquad y^n \therefore n=3 \qquad \therefore (1-n) = -2$$

$P(x)$, $Q(x)$

$$U = y^{1-n} = y^{-2}$$

$$\acute{U} + 10U = 5x \;\dashrightarrow\; \text{Linear equ.}$$

$$M = e^{\int P(x)dx} = e^{\int 10dx} = e^{10x}$$

نريد المعادلة بدلالة (x,y) لذلك تستبدل (u) بـ(y) من خلال الفرض في بداية الحل ----

$$U = \frac{\int (e^{10x} \cdot 5x)\,dx + c}{e^{10x}} = \frac{\frac{1}{2}xe^{10x} - \frac{1}{20}e^{10x} + c}{e^{10x}}$$

$$\therefore \left(y = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}x - \frac{1}{20} + ce^{-10x}}} \right) \text{ ---- g.s}$$

E.x: $y(6y^2 - x - 1)\,dx + 2x\,dy = 0$ find the g.s:

عندما حاولنا لحل هذه المسألة على not exact فاننا نجد صعوبة بالغة في الحل لذلك نغير شكل المعادلة إلى Ber. أو Linear ان استطعنا

Sol: $2x\,dy = -y(6y^2 - x - 1)\,dx$

(لان هنه (y) مرفوعة لقوة أكبر من واحد اذن y^n لذلك نجعلها في طرف وباقي الحدود في طرف)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6y^3 + xy + y}{2x} = \frac{-3}{x}y^3 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2x}y$$

(بعدما سحبنا عامل مشترك (y) ووحدنا المقامات)

$$\acute{y} - y\left(\frac{x+1}{2x}\right) = \frac{-3}{x}y^3$$

$U = y^{-2}$: $\acute{U} - U\,\frac{-2(x+1)}{2x} = \frac{6}{x}$ $\qquad \acute{U} + U\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{6}{x}$ .... Linear equ.

$$M = e^{\int \frac{x+1}{x}dx} = e^{\int 1 + \frac{1}{x}dx} = e^{x + \ln x} = e^x \cdot e^{\ln x} = e^x$$

$$U = \frac{\int xe^x \cdot \frac{6}{x}dx + c}{xe^x} = \text{-------}$$

First order D.Es

- **Seperable D.Es**
  اذا قدرت إفصل كل رمز مع دالة
- **Homog. D.Es**
  وجود $\frac{y}{x}$ أو $\frac{x}{y}$ جاهزة او بعد ترتيب شكل المعادلة
- **Transform**
  معادلة بسيطة فيها اقتران خطي بسيط يسهل استبداله
- **orthognal Trajectories**
  معادلة السؤال ليس تفاضلية
- **Clairaut's**
  تكرار لـ $(\acute{y})$
- **Exact**
  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
- **NoT exact**
  $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$
- **Linear**
  $\acute{y} + P(x)y = Q(x)$
- **Bernolli's**
  $\acute{y} + P(x)y = Q(x)y^n$

18

ضل فكرة صغيرة بدنا أنبه عليها ← بخصوص orth. Traj.

E.x: $y = \dfrac{1+cx}{1-cx}$, find the orth. Traj.:

Sol: (ضرب تبادلي لنتخلص من الكسر):

$y - \underset{\text{الأول}}{c}\underset{\text{الثاني}}{xy} = 1 + cx$

(الأول * مشتقة الثاني + الثاني * مشتقة الأول)

$y' - (cxy' + yc) = c$

هام ← بعد الاشتقاق وقبل اكمال الحل فيجب التأكد بعد الاشتقاق من أن المعادلة لا يوجد فيها رموز الا (x و y) فإن وجدنا غيرها نستبدله من خلال المعادلة المعطاة في السؤال

$y - cxy = 1 + cx \rightarrow y - 1 = cxy + cx$

$y - 1 = c(xy - x) \rightarrow \boxed{c = \dfrac{y-1}{x+xy}}$

$y' - \dfrac{y-1}{x+xy} \cdot x \cdot y' - \dfrac{y-1}{x+xy} y = \dfrac{y-1}{x+xy}$

$y' - \dfrac{y-1}{\cancel{x}(1+y)} \cdot \cancel{x} \cdot y' = \dfrac{(y-1)}{x+xy} + \dfrac{(y-1)y}{x+xy}$

$y'\left(1 - \dfrac{y-1}{1+y}\right) = \dfrac{(y-1)\cancel{(1+y)}}{x\cancel{(1+y)}}$ $\qquad y'\left(\dfrac{1+y}{1+y} - \dfrac{y-1}{1+y}\right) = \dfrac{y-1}{x}$

$y'\left(\dfrac{2}{1+y}\right) = \dfrac{y-1}{x}$ $\qquad y' = \dfrac{(y+1)(y-1)}{2x} = \dfrac{y^2-1}{2x}$

الآن نكمل الحل بالخطوات : نقلب ونضرب بالسالب

$y' = \dfrac{-2x}{y^2-1} = \dfrac{dy}{dx}$ $\qquad (-2x)dx = (y^2-1)dy$

نكمل بطريقة seperable

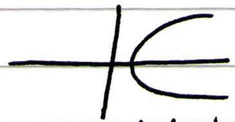
(واستعينوا بالصبر والصلاة)

سؤال مكون كل فصل تقريباً ، يعطينا معادلة ويسأ لنا عن نوعها :

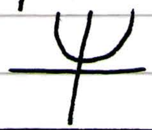
1] Parabolla : قطع مكافئ

← معادلة فيها x موضع للقانون و(y) مرتبعة أو العكس

$x = Ay^2 + - - - -$



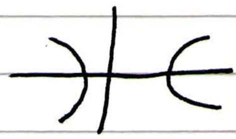
$y = Ax^2 + - - - -$



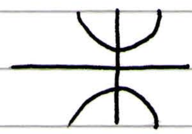
2] hyperbolla : قطع زائد

(تربيعين بينهم ناقص وبعد المساواة واحد)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$



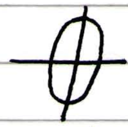
3] ellips : قطع ناقص

مختلفة

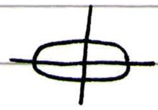
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad : a \neq b$ (حيث مابعد المساواة واحد)

تربيعين بيناتهم موجب والمعاملات

if $b>a$ ∴



but if $a>b$ ∴



4] Circles : دائرة

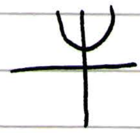
متساوية

(حيث مابعد المساواة نصف قطر الدائرة تربيع c^2)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2 \quad : \quad a = b$

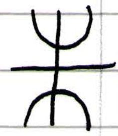
← حدّد نوع كل معادلة من المعادلات التالية

1) $y = 3x^2 - 5x + 1$ ------→ Parabolla



2) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 2 \xrightarrow[\text{(1)}]{\text{يجب أن تساوي}} \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{8} = 1$ ----→ ellips

3) $\frac{y^2}{2} - 3x^2 = 6 \longrightarrow \frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{\underbrace{\frac{1}{3} * 6}_{=2}} = 1$ ----→ hyperbolla



4) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 3 \longrightarrow$ circles

← ممكن يطلب منك الرسمة للمعادلة أو يجيبلك رسمة ويسألك لأي نوع معادلة،
ديـو بالك

← في معادلة الدائرة، ممكن يطلب نصف القطر أو القطر وعندها يجب الانتباه إلى أنّ:

ما بعد المساواة هو c^2 عندما تكون معاملات (x^2 و y^2) هي واحد لذلك نقسم في البداية على المعامل ليصبح واحد ثم نعتبر ما بعد المساواة هو c^2

← جد القطر:

E.X: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 3$

sol: $x^2 + y^2 = 6 \longrightarrow c^2 = 6$

$c = \sqrt{6}$

$d = 2\sqrt{6}$

* Higher order DEs:

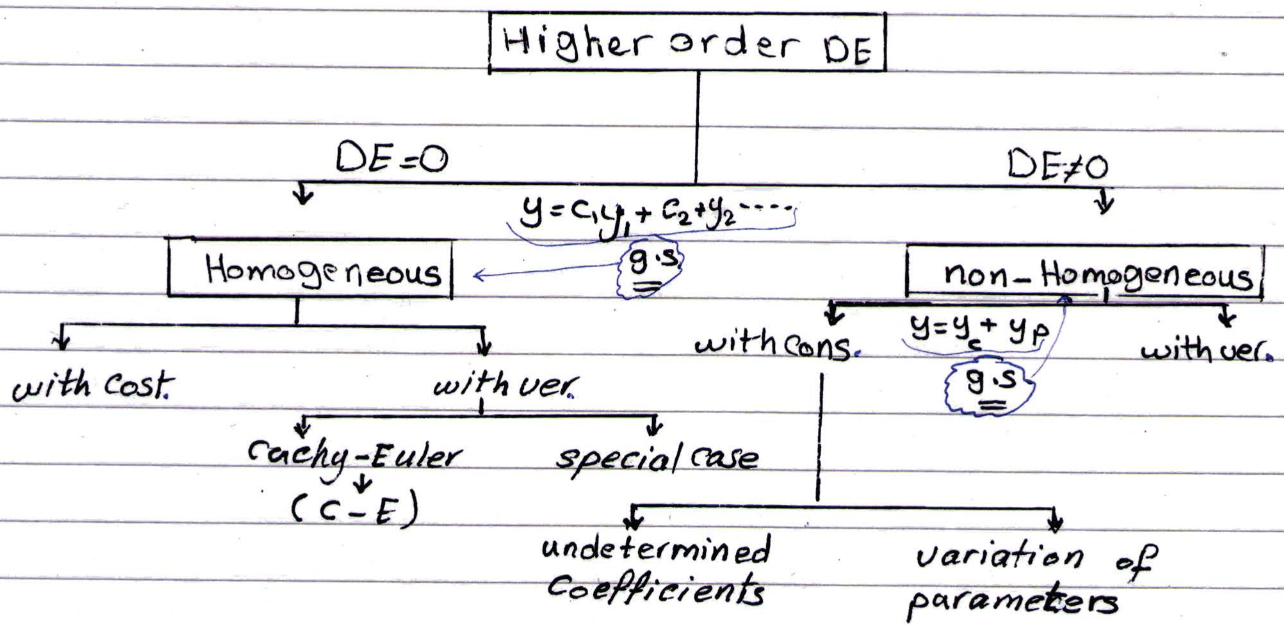
← اذا كانت أعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية هي المشتقة الثانية أو الثالثة أو أكثر فالحل على طرق (مخطط) Higher.

← اذا كانت المعادلة التفاضلية (Higher) فإننا في البداية نقوم بتصنيفها كالتالي:

- ننظر إلى ما بعد المساواة فإن كان صفراً فالمعادلة (Homogeneous) متجانس وإن كان ليس صفراً فالمعادلة (non-Homoge) غير متجانس

- بعدها ننظر إلى الذي مع مشتقات (y) فإن كانت ثوابت فقط فالمعادلة (with constant) مع ثوابت، وإن وجد متغيرات فالمعادلة (with veriable) مع متغيرات

- بعدها تصبح طريقة الحل واضحة



- نلاحظ من المخطط أن g.s هو $(y = c_1y_1 + \cdots)$ أما الغير متجانس مع ثوابت هو $(y = y_c + y_p)$ حيث $(y_c = c_1y_1 + \cdots)$

- ما سنشرحه الآن باستثناء أن تكون المعادلة غير متجانسة مع متغيرات اذ لها حل مختلف كلياً. (non-Homog . with veriable)

⇐ طريقة الحل في حالة .Homog مع ثوابت :

- نحول y ومشتقاتها في المعادلة إلى λ كالتالي :

$(y \to \lambda^0 = 1)\ (y' \to \lambda^1)\ (y'' \to \lambda^2)\ (y''' \to \lambda^3)\ (y^{(4)} \to \lambda^4)$

- نجد أصفار الاقتران قيم λ التي تجعل الاقتران يساوي صفر

- نجد بالاعتماد على الجدول في الصفحة التالية قيم y_1 و y_2 و ---- ثم نجد $\underline{\underline{g.s}}$ باستخدام القانون .

⇐ طريقة الحل في حالة .Homog مع متغيرات :

- نحول y ومشتقاتها في المعادلة إلى (m) كالتالي :

$(y = m^0 = 1)\ (xy' \to m)\ (x^2 y'' \to \underbrace{m^2 - m}_{m(m-1)})\ (x^3 y''' \to \underbrace{m^3 - 3m^2 + 2m}_{m(m-1)(m-2)})$ -----

- نجد أصفار الاقتران وهي قيم m التي تجعل الاقتران يساوي صفر

- نجد بالاعتماد على الجدول في الصفحة التالية قيم y_1 و y_2 و .... ثم نجد $\underline{\underline{g.s}}$ باستخدام القانون .

ملاحظة هامة :

⇐ عدد y_1 و y_2 و y_3 و ---- هو بعدد اصفار الاقتران للمعادلة ونسمي y_1 و y_2 و ... بجذور المعادلة

بجوز انفجعت بس هاي الطريقة بس تفهمها بتريحك كثيييير ، واحكي منيح ، أيوه

التكامل مع الجذور

نوع الأصفار / الحالة	with veriable	with constant
distand (جذور مختلفة)	$y_1 = x^{m_1}$, $y_2 = x^{m_2}$, $y_3 = x^{m_3}$	$y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$, $y_3 = e^{\lambda_3 x}$
repeated (جذور متشابهة)	$y_1 = x^{m_1}$, $y_2 = (\ln x)\, x^{m_1}$, $y_3 = (\ln x)^2 x^{m_1}$ (كل مرة بتكرر العدد نضربه بـ $(\ln x)$)	$y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$, $y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x}$ (كل مرة بتكرر العدد نضرب بـ x)
Complex conjugate (عندما يكون المميز سالب)	$y_1 = x^{\alpha}\cos(B\ln x)$, $y_2 = x^{\alpha}\sin(B\ln x)$ $y_3 = (\ln x)\, x^{\alpha}\cos(B\ln x)$, $y_4 = (\ln x)\sin(B\ln x)$ (عند وجود تكرار للقيمة)	$y_1 = e^{\alpha x}\cos(Bx)$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin(Bx)$ $y_3 = (x)\, e^{\alpha x}\cos(Bx)$, $y_4 = (x)\, e^{\alpha x}\sin(Bx)$ (عند وجود تكرار للقيمة)

← اذا وجد تكرار للأصفار ← في حالة with const. : نضرب بـ (x)

في حالة with veriable : نضرب بـ $(\ln x)$

Ex: $\ddot{\ddot{y}} - 3\dot{y} + 2y = 0$, Find the g.s :

* لاتنسى : أول إشي صنف المعادلة ؛

Sol: هذه المعادلة (Higher → Homog. → with cons.)

$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$

← نضع المعادلات

نضع هنا ما يجعل الاقتران يساوي صفر

↑ ونجرب (1) اذا ما زبط (1-) اذا ما زبط (2) ← (2-)

و (3) -- ---

(الشرح للتحليل موجود بالفيديو وممكن تسأل

اي طالب عن هاي الطريقة وبفهمك اياها)

	λ^3	λ^2	λ	ثابت
$\boxed{1}$	1	0	-3	2
		1	1	-2
	1	1	-2	0

$(\lambda^2 + \lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$

$\lambda = -2 , 1 , 1$

repeated

distand

$\therefore y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{-}$ $\quad y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{x}$ $\quad y_3 = x e^{\lambda_2 x} = x e^{x}$

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} + c_3 x e^{x}$

Ex: $\ddot{y} + 4y = 0$, Find the IVP, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = -1$:

Sol: $\lambda^2 + 4 = 0$ $\quad \lambda^2 = -4$ $\quad \lambda = \sqrt{-4}$ $\quad \lambda = \sqrt{4} = \pm 2i$ $\quad \alpha \pm Bi$ $\quad : \alpha = 0$, $B = 2$

لا يوجد تربيع يعطي سالب ∴ لا يحل

نعتبر ما داخل الجذر موجب ونكمل الحل على انها (complex conjugate)

نضعها كي تصبح على شكل ($\alpha \pm Bi$)

$y_1 = e^{\alpha x} \cos Bx = e^{0} \cos 2x = \cos 2x$ $\quad y_2 = e^{\alpha x} \sin Bx = \sin 2x$

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ ---- g.s

partical solution

لسا ، بدو P.s مالنا !!

$@\, y(0) = 1 \rightarrow 1 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) \rightarrow c_1 = 1$

$\dot{y} = c_1 * -2\sin 2x + c_2 * 2\cos 2x$ $\quad @\, \dot{y}(0) = -1 \rightarrow -1 = \overset{=1}{c_1} * -2\sin(0) + c_2 * 2\cos(0)$

$-1 = 2c_2 \rightarrow c_2 = \frac{-1}{2}$

$\therefore$ The p.s is $\quad y = \cos 2x + \left(\frac{-1}{2}\right) \sin 2x$

#

Ex: $y''' - 3y'' + 5y' - 3y = 0$, Find the g.s:

Sol:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 3 = 0$$

$\boxed{1}$	1	−3	5	−3
		1	−2	3
	1	−2	3	0

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda - 1 = 0 \longrightarrow \lambda = 1$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0)$$

قانون المميز $B^2 - 4ac = (-2)^2 - 4*1*3 = -8$

المميز سالب: لاتحلل ، في هذه الحالة نجد (λ) من خلال القانون التالي:

$$\lambda = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-8}}{2*1} = \overset{\alpha \pm Bi}{1 \pm \sqrt{2}i}$$

$\therefore \alpha = 1$

$B = \sqrt{2}$

حيث اعتبرنا ما داخله موجب وأكملنا بحالة Comp.conj

$$\frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2}{2} \pm \frac{\sqrt{2} * \sqrt{4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

حيث $\sqrt{8} = \sqrt{2} + \sqrt{4} = \sqrt{2} * \sqrt{4}$

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cos Bx = e^x \cos \sqrt{2} x$$

$$y_3 = e^{\alpha x} \sin Bx = e^x \sin \sqrt{2} x$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^x \cos \sqrt{2} x + e^x \sin \sqrt{2} x$$

#

← في حالة Homog مع متغيرات فالحل على cachy - Euler (C-E) ، إلا في حالة خاصة

← الحالة الخاصة هي اذا كانت المعادلة من المشتقة الثانية وأعطانا قيمة لـ (y) في السؤال غير المعادلة الأصلية .

Ex: Solve . $4x^2 y'' + 8xy' + y = 0$:

التصنيف

Higher → Homog → with veriable

الحل بـ (C-E)

sol: $4(x^2 y'') + 8(xy') + y = 0$

$$4(m^2 - m) + 8m + 1 = 0$$

$$4m^2 + 4m + 1 = 0$$

$$(2m+1)(2m+) = 0$$

$2m + 1 = 0$

$m_1 = -\frac{1}{2}$

$2m + 1 = 0$

$m_2 = -\frac{1}{2}$

$\therefore m_1 = m_2 = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ ---→ repeated

$$y_1 = x^{m_1} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y_2 = (x^m) Ln x = (Ln x) x^{-\frac{1}{2}} = \frac{Ln x}{\sqrt{x}}$$

$$y = \frac{c_1}{\sqrt{x}} + \frac{c_2 Ln x}{\sqrt{x}} \dashrightarrow g.s$$

Ex: Solve : $x^2 y'' - 2y = 0$ such that $y = \frac{1}{x}$ is a solution

← المعادلة من المشتقة الثانية واعطانا قيمة (y) في السؤال اذن على الحالة الخاصة والحل كالتالي:

١- يجب ان يكون معامل اكبر مشتقة (الثانية) بيساوي واحد (مهم).

٢- نعتبر (y) المعطاة في السؤال هي y_1

٣- نجد قيمة (y_2) من خلال القانون التالي:

$$\boxed{y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(t)\,dx}}{y_1^2}\, dx}$$

← حيث P هي الاقتران اللي بدلالة (x) اللي مع y' وليس مع y

٤- نجد g.s من خلال قانونه

Sol: $y = \frac{1}{x}$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\, dx$$

$P(x) = 0$

لانه لا يوجد y'

"تكامل الصفر قلنا قبل شوي ليش بنعتبره صفر"

$$= \frac{1}{x} \int \frac{e^{-\int (0)\,dx}}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}\, dx = \frac{1}{x} \int x^2 e^{c}\, dx = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{x^2}{3}$$

$$y = c_1 * \frac{1}{x} + c_2 * \frac{x^2}{3} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{3} x^2$$

Ex: Solve : $(x^2+1) y'' - 2x y' + 2y = 0$ such that $y = x$ is a solution

Sol: $y_1 = x$

لا تنسى في البداية

← نقسم على معامل (y'') كي يصبح واحد.

(اذا نسيت هالخطوة طار السؤال)

$$y'' - \frac{2x}{x^2+1} y' + \frac{2y}{x^2+1} = 0$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\, dx = x \int \frac{e^{-\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx}}{x^2}\, dx = x \int \left(x^{-2} \cdot e^{\ln x^2+1}\right) dx$$

$$= x \int \frac{x^2+1}{x^2}\, dx$$

$$= x \int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = x \left(x + \left(\frac{-1}{x}\right)\right) = x^2 - 1$$

$$\therefore y = c_1 x + c_2 (x^2 - 1)$$

EX: Solve: $x^3 y''' + 5x^2 y'' + 7x y' + 8 = 0$:

Sol: $m^3 - 3m^2 + 2m + 5m^2 - 5m + 7m + 8 = 0$

$m^3 + 2m^2 + 4m + 2 = 0$

$\boxed{-2}$	1	2	4	8
		-2	0	-8
	1	0	4	0

$(m^2+4)(m+2)=0$

$m^2+4=0 \rightarrow m^2=-4 \rightarrow m=\sqrt{-4}$

$m=\pm 2i$

$m+2=0 \rightarrow m-2$

$\therefore m=-2 \,,\, \pm 2i$

$y_1 = x^{m_1} = x^{-2}$

$y_2 = x^{\alpha}\cos(B\ x) = x^{0}\cos 2\ x = \cos 2\ln x$

$y_3 = x^{\alpha}\sin(B\ln x) = \sin 2\ln x$

$\therefore y = c_1 x^{-2} + c_2\cos(2\ln x) + c_3\sin(2\ln x)$

\# هاي معناها (وهو المطلوب).

الطريقة العكسية في المتجانس

- الوضع الطبيعي

$\boxed{DE} \longrightarrow \boxed{roots} \longrightarrow \boxed{g.s}$

المعطى or $\boxed{roots} \longrightarrow \boxed{g.s}$

المطلوب

- الطريقة العكسية

$\boxed{g.s} \longrightarrow \boxed{roots} \longrightarrow \boxed{DE}$

or المعطى المطلوب

$\boxed{roots} \longrightarrow \boxed{DE}$

Ex: IF the roots of characteristic equation a H.L.DE are 1) 1, 2, -1 2) $2\pm 3i$ 3) 1, $\pm 3i$, Find the DE:

ننتبه للمطلوب، لو طلب g.s الحل خطوة واحدة

Sol:

*هام: اذا ذكر في السؤال ال (C-E) فالحل بدلالة (m) لانه with ver.

اما اذا لم يذكرها فالحل بدلالة (λ) لانه with const

1) $\lambda = 1, 2, -1$

هذه الاصفار المأخوذة من اقواس عندما ضربتها ببعضها اعطتني هذه القيم

$(\lambda - (\text{الاول}))(\lambda - (\text{الثاني}))(\lambda - (\text{الثالث})) = 0 \longrightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)=0$

$(\lambda^2 - 2\lambda - \lambda + 2)(\lambda+1) = 0 \longrightarrow (\lambda^2 - 3\lambda + 2)(\lambda+1) = 0$

$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$

$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \rightarrow DE$ #

تذكر

$\lambda^3 \rightarrow y'''$ $\lambda^2 \rightarrow y''$ $\lambda \rightarrow y'$

$\lambda^0 = 1 \rightarrow y$

2) $\lambda = 2 \pm 3i$ $\quad (\alpha \pm Bi)$

← في حالة Comp. Conj. هناك قانون لإيجاد المعادلة التي حصلنا منها على قيم λ وهذا القانون هو : $\boxed{(\lambda-\alpha)^2+B^2=0}$

$$(\lambda - \alpha)^2 + B^2 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 + (3)^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 + 9 = 0 \qquad \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \qquad y'' - 4y' + 13y = 0 \quad \#$$

3) $\lambda = 1,\ \pm 3i$ $\quad (\alpha \pm Bi)$

$$(\lambda - 1)\left((\lambda - \alpha)^2 + B^2\right) = 0 \longrightarrow (\lambda - 1)\left((\lambda - 0)^2 + 3^2\right) = 0,$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 9) = 0 \longrightarrow \lambda^3 + 9\lambda - \lambda^2 - 9 = 0 \longrightarrow \lambda^3 - \lambda^2 + 9\lambda - 9 = 0$$

$$y''' - y'' + 9y' - 9y = 0 \quad \#$$

* Non_Homog. L.D.Es

المعاملات غير المحددة

-with constant : A) Undetermined Coefficients

B) Variation of parameters التغير في الثوابت

← تذكير الـ (g.s) هنا كالتالي $y = y_c + y_p$ ، حيث (y_c) هي g.s في حالة (Homog.) اي اننا نجد (y) عندما نساوي المعادلة بالصفر ثم نجد الجذور كما تعلمنا سابقا ، لكن الجديد هنا هو كيفية ايجاد (y_p) حيث نجدها بطريقتين هما B and A

A) Undetermined coefficients

← الطريقة :

1- نحدد $R(x)$ وهي الاقتران الموجود بعد المساواة

2- نجد قيم λ للـ $R(x)$ واسمها $(\acute{\lambda})$ ثم نجد (λ^*) كما سنذكر أثناء الحل

3- نجد جذور λ^* ثم نضربها بالرموز (A و B و C ...) على عدد الجذور فنستنتج لدينا معادلة تسمى suitable form وهي y_p .

4- نعوض في المعادلة لنجد قيم الرموز (A و B و ....) فنجد مجاهيل معادلة (y_p) ثم نجمعها مع y_c لنجد g.s للسؤال

*ملاحظة : قد يطلب في السؤال ان نجد (suitable Form) وعندها نقف عند نهاية الخطوة الثالثة

⇐ كيفية ايجاد $\acute{\lambda}$ للـ $R(x)$

- كل ثابت قيمة $(\acute{\lambda})$ له هي صفر (إلا اذا كان مع sin او cos) ، و (x) هي للتكرار فمثلاً

$1 \rightarrow \acute{\lambda} = 0$ $\quad 2x \rightarrow \acute{\lambda} = 0, 0$ $\quad x^3 \rightarrow \acute{\lambda} = 0,0,0,0$

$-5 \rightarrow \acute{\lambda} = 0$ $\quad -3x^2 \rightarrow \acute{\lambda} = 0,0,0$ $\quad 1 * x^3$

- $e^{\lambda x}$: قيمة $(\acute{\lambda})$ هنا هي معامل (x) في القوة أيضا (x) الموجودة في البسط للتكرار :

$e^{2x} \rightarrow \acute{\lambda} = 2$ $\quad x^2 e^{-3x} = \acute{\lambda} = -3, -3, -3$

$x e^{2x} = \acute{\lambda} = 2, 2$

- $e^{\alpha x} \cos Bx + e^{\alpha x} \sin Bx$: هنا $(\acute{\lambda})$ هي $\alpha \pm Bi$ وأيضا (x) الموجودة خارج الزاوية للتكرار :

$3e^x \cos 2x + 5e^x \sin 2x \rightarrow \acute{\lambda} = 1 \pm 2i$ $\quad \alpha = 0$

لايهم في هذه الحالة وجود ثابت ، فلا يؤخذ بعين الاعتبار

$e^0 = 1$

$-3 \sin 2x \rightarrow \acute{\lambda} = 0 \pm 2i$

$x e^x \cos x \rightarrow \acute{\lambda} = 1 \pm i, 1 \pm i$

- عند وجود أكثر من حد لـ R(x) فإننا نأخذ ($\acute{\lambda}$) كما ذكرنا لكن اذا تكررت قيمة معينة فإننا نأخذ اكبر تكرار لها ونحذف باقي التكرارات لها:

$3+2x \longrightarrow \acute{\lambda} = \cancel{0}, 0, 0 = 0, 0$

$3x^2+2x+5 \longrightarrow \acute{\lambda} = 0,0,0\ , 0, 0, \cancel{0} = 0,0,0$

هذا التكرار أكبر لذلك نأخذه ونحذف باقي التكرارات الصفر

$\sin x + 2x \longrightarrow \acute{\lambda} = \pm i\ , 0, 0$

$\frac{\cos x}{e^{-3x}} + 2x^2 + 5x + xe^{3x} \longrightarrow 3 \pm i, 0,0,0, 3,3$

Ex: If the roots of the charact. equ. of a C-H H.L.DE are
① 2, -1 ② $3 \pm 5i$, Find the D.E:

Sol: ① $m = 2, -1$

$(m - (\text{الاول})) (m - (\text{الثاني})) = 0$

$(m-2)(m+1) = 0 \qquad m^2 - m - 2 = 0$

$x^2 y'' - 2y = 0$ #

* تذكير: $m^0 = 1 \rightarrow y$

$m \longrightarrow x y'$

$m^2 - m \rightarrow x^2 y''$

$m^3 - 3m^2 + 2m \rightarrow x^3 y'''$

$\alpha \pm Bi$

② $3 \pm 5i$

$\boxed{(m-\alpha)^2 + B^2 = 0}$

$(m-3)^2 + 5^2 = 0 \qquad m^2 - 6m + 9 + 25 = 0 \qquad m^2 - 6m + 34 = 0$

$m^2 - m - 5m + 34 = 0 \qquad x^2 y'' - 5xy' + 34y = 0$ #

جعلناها بهذا الشكل كي استطيع تحويلها من الأشكال المتعارف عليها مثل $m^2 - m$

Ex: If the g.s of a C-E H.L.DE is: $y = x^3(c_1 \cos \ln x^3 + c_2 \sin \ln x^5)$
Find D.E:

Sol: نزلنا (3) عشان تسير عالشكل الرئيسي للمعادلة

$y = x^3 c_1 \cos 3 \ln x + x^3 c_2 \sin 5 \ln x$

$x^{\alpha} \qquad \cos B \ln x$

$m = \alpha \pm Bi = 3 \pm 5i$

ونكمل الحل كما ذكرنا في السؤال السابق

Ex: If the Charact. equ. of a C-E H.L.DE is $m^3 - m^2 + 3m + 1 = 0$
Find the D.E :

سويت حيلة عشان
وترجع زي ما كان بالسؤال $(-3m^2 + 2m^2 = -m^2)$

Sol: $m^3 - m^2 + 3m + 1 = 0$ $\quad$ $\underbrace{m^3 - 3m^2 + 2m} + m + 2m^2 + 1 = 0$

(جبنا نخليها $-3m^2$ وبدنا البعد يلي يكون $+2m$ علشان أقدر أحول)

عشان اسحب (2) عامل مشترك وتسير $2(m^2 - m)$ $\quad$ عشان ما اكون غيرت بالسؤال

$$m^3 - 3m^2 + 2m + 2m^2 - 2m + 3m + 1 = 0$$

$$m^3 - 3m^2 + 2m + 2(m^2 - m) + 3m + 1 = 0$$

$$x^3 y''' + 2x^2 y'' + 3xy' + y = 0$$

How ⟵ واجب حل السؤال السابق اذا كان المطلوب هو ايجاد g.s $\quad L(y_c)$

⟵ حيث إذا وجد قيم مشتركة λ مع $\acute{\lambda}$ فإننا نجد أخذها وتحويلها $\quad$ قيم λ^* المشتركة $\lambda^* \to \acute{\lambda} + \lambda$ مع $\lambda \to R(x)$

إلا جذور نقوم بحذف المكرر (المشترك) بالترتيب مثلاً :

Ex: $\lambda = 0, 0, 1$

$\acute{\lambda} = 0, 0, 0, -2$

$\therefore \lambda^* = 0, 0, 0, \underset{\text{المشترك}}{0, 0}, -2$

$y = e^0 = 1 \quad xe^0 = x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4 \quad e^{-2x}$

يوجد قيمتان مشتركتان (جذران) له $\quad$ لذا نحذف أول قيمتان
هذا ما قصدناه بالترتيب

$$y = x^2, x^3, x^4, e^{-2x}$$

suitable form ⟵ $y_p = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + De^{-2x}$

Ex: $\lambda = 0, -1$

$\acute{\lambda} = 0, 0, -1$

$\lambda^* = 0, 0, 0, -1, -1$

$y = 1 \quad x \quad x^2 \quad e^{-x} \quad xe^{-x}$

$$y_p = Ax + Bx^2 + Cxe^{-x}$$

Ex: $y'' + 2y' + y + 8$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, find the P.s ??

* أولاً نجد y_c كالتالي

$$y'' + 2y' + y = 0 \qquad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \qquad (\lambda+1)(\lambda+1) = 0 \qquad \lambda = -1, -1$$

$$y_1 = e^{-x} \qquad y_2 = xe^{-x} \qquad y = y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} x$$

* نجد نجد y_p بطريقة undet.:

$$R(x) = 8 \longrightarrow \lambda' = 0 \qquad \therefore \lambda^* = 0 \qquad \therefore y_p = A * 1 = A$$

$$y = e^0 = 1$$

← نعوض الآن في المعادلة y_p بدلاً y و y_p' بدل y' و y_p'' بدل y'' وهكذا . . . .

$$y_p'' + 2y_p' + y_p = 8 \qquad 0 + 0 + A = 8 \quad \therefore A = 8$$

$$y_p = A \rightarrow y_p' = 0 \longrightarrow y_p'' = 0$$

$$y_p = A = 8$$

$$\therefore y = y_c + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} x + 8 \quad \text{-----} \quad g.s$$

$$@\ y(0) = 1 \ : \quad 1 = c_1 e^0 + c_2 * 0 * e^0 + 8 \longrightarrow c_1 = -7$$

$$y' = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} x c_2 e^{-x} \qquad @\ y'(0) = 2 : \ 2 = (-7) e^0 + c_2 e^0 - 0 * c_2 * e$$

$$= -7 \qquad\qquad 2 = 7 + c_2 \longrightarrow c_2 = -5$$

$\therefore$ The partical solution is $y = -7e^{-x} - 5xe^{-x} + 8$ #

خطوات وطبق . . . .

مع الممارسة بتسير سهلة ، بس لازم توخذ إيدك عالحل . . . .

EX: solve: $y'' + y' = 2x + 4 + 5e^{-x}$ لا تنسى التصنيف مالنا !!

sol:

$y'' + y' = 0 \quad \lambda^3 + \lambda = 0 \quad \lambda(\lambda+1) = 0 \quad \lambda = 0, -1 \quad y_1 = 1 \quad y_2 = e^{-x}$

$y = y_c = c_1 + c_2 e^{-x}$

$R(x) = 2x + 4 + 5e^{-x} \longrightarrow \lambda' = \underline{\underline{0}}, 0, \cancel{0}, -1 = 0, 0, -1$ حاول حل لحالك

تذكير: نأخذ التكرار الأعلى ونهمل باقي التكرارات لنفس القيمة

$\therefore \lambda^* = 0, 0, 0, -1, -1 \longrightarrow y_p = Ax + Bx^2 + Cxe^{-x} \ldots$ suitable form

$\cancel{1} \quad x \quad x^2 \quad \cancel{e^{-x}} \quad xe^{-x}$ "اذا طلب السؤال ايجاد suitable form فهذا هو الحل"

حذفنا قيم λ المشتركة مع λ' لكن بعد أن كتبنا الجذور

لكن هنا طلب g.s ، يلا نكمل

$y_p' = A + 2Bx - Cxe^{-x} + Ce^{-x}$

$y_p'' = 2B + Cxe^{-x} - Ce^{-x} - Ce^{-x} = 2B + Cxe^{-x} - 2Ce^{-x}$

نعوض الآن في المعادلة:

$y_p'' + y_p' = 2x + 4 + 5e^{-x} \qquad 2B + Cxe^{-x} - 2Ce^{-x} + A + 2Bx - Cxe^{-x} + Ce^{-x} = 2x + 4 + 5e^{-x}$

$\underbrace{-Ce^{-x}}_{e^{-x}\text{ معامل}} + \underbrace{2Bx}_{x\text{ معامل}} + \underbrace{2B + A}_{\text{ثابت}} = \underbrace{2x}_{x\text{ معامل}} + \underbrace{4}_{\text{ثابت}} + \underbrace{5e^{-x}}_{e^{-x}\text{ معامل}}$

← هنا نساوي المعاملات ببعض، يعني:

الثابت قبل المساواة مع الثابت بعدها، ومعامل e^{-x} قبل المساواة مع معامل e^{-x} بعد المساواة وهكذا....

$2B + A = 4 \quad : 2(1) + A = 4 \longrightarrow A = 2$

$2B = 2 \longrightarrow B = 1$

$-C = 5 \longrightarrow C = -5$

$\therefore y_p = 2x + x^2 - 5xe^{-x}$

$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 e^{-x} + 2x + x^2 - 5xe^{-x} = c_1 + 2x + x^2 + e^{-x}(c_2 - 5x)$

B) Variation of parameters:

- أولاً وقبل كل شيء يجب جعل معامل أكبر مشتقة يساوي واحد

- طريقة الحل هنا كما ذكرنا سابقاً لكن الاختلاف في كيفية ايجاد y_p بهذه الطريقة حيث نجدها مباشرة باستخدام القانون التالي : $\boxed{y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots}$ ، حيث (y_1) و (y_2) و ... هي جذور (y_c) أما u_1 ، u_2 ، ... ، فنجدها باستخدام القانون التالي: $\boxed{u_n = \int \frac{R(x) \cdot w_n}{w} d(x)}$ ، حيث (w) نجده من خلال : وضع مصفوفة نضع كل جذور (y_c) في الصف الأول منها ثم بعدد الأعمدة الناتجة نريد الحصول على صفوف حيث كل مرة بننزل صف بنشتق مرة كالتالي: (عمودان اذن اريد صفان، لدي الصف الأول واحتاج إلى آخر)

(اذا كان جذران) $w = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$

(ثلاث أعمدة اذن نريد ثلاث صفوف حيث لدينا صف)

(اذا كان ثلاث جذور) $w = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{bmatrix}$

← أما بالنسبة لـ w_1 و w_2 و ... في القانون فنجدها كالتالي:

$w_1 = w$ ، $w_2 = w$ ، $w_3 = \dots$

لكن نصفر العمود الأول عدا الأخير نضعه واحد

لكن نصفر العمود الثاني عدا الأخير نضعه واحد

اذا كان (w) فيها جذران : $w_1 = \begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & y_2' \end{bmatrix}$ $w_2 = \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & 1 \end{bmatrix}$

اذا كان (w) فيها ثلاث جذور $w_1 = \begin{bmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ 1 & y_2'' & y_3'' \end{bmatrix}$ $w_2 = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & 1 & y_3'' \end{bmatrix}$ $w_3 = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & 1 \end{bmatrix}$

← ضل نحكي عن آلية حساب المصفوفة إذا كانت $(\underset{\text{صف عمود}}{2 \times 2})$ و $(\underset{\text{صف وعمود}}{3 \times 3})$

$2\times2 : \begin{bmatrix} (1) & (2) \\ (3) & (4) \end{bmatrix} = (1)*(4) - (2)*(3) = \text{-----}$

$Ex: \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ x & y \end{bmatrix} = 5y - 3x$

$$3\times3: \begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) \\ () & () & () \\ () & () & () \end{bmatrix} = \underset{\text{الجزء الأول}}{\overset{\text{مصفوفة}}{\begin{bmatrix} () & () \\ () & () \end{bmatrix}}} - \underset{\text{الجزء الثاني}}{\overset{\text{مصفوفة}}{\begin{bmatrix} () & () \\ () & () \end{bmatrix}}} + \underset{\text{الجزء الثالث}}{\overset{\text{مصفوفة}}{\begin{bmatrix} () & () \\ () & () \end{bmatrix}}}$$

← حيث نقصد بمصفوفة كل جزء أي المصفوفة الثنائية الناتجة عند تغطيتنا على الصف والعمود لهذا الجزء في المصفوفة الأصلية مثلاً:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ x & y & z \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} y & z \\ -3 & -5 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} x & z \\ -2 & -5 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} x & y \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

للتوضيح

هذه الرسمات لتوضيح الفكرة ⇐

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ x & \boxed{y \quad z} \\ -2 & \boxed{-3 \quad -5} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ \boxed{x} & y & \boxed{z} \\ \boxed{-2} & -3 & \boxed{-5} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ \boxed{x \quad y} & z \\ \boxed{-2 \quad -3} & -5 \end{bmatrix}$$

وهيك بنكون حكينا عن كووول اشي بتعلّق بالطريقة ضل التطبق ، اذكر الله

Ex: $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}}$, find the g.s:

sol: أولاً نجد y_c:

$y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad (\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \qquad \lambda = 1, 2$

$y_1 = e^x , \; y_2 = e^{2x} \qquad y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

y_p ثانياً نجد — صارو بعرفنا نوصل u_1 و u_2

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 \longrightarrow u_1 = \int \frac{\overset{R(x)}{\frac{1}{1+e^{-x}}} \cdot w_1}{w} dx = \int \frac{\frac{1}{1+e^{-x}} \cdot -e^{2x}}{e^{3x}} dx$$

$$= -\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = Ln(1+e^{-x})$$

بالإستبدال

$\boxed{u = e^{-x}}$

$\boxed{du = -e^{-x}}$

$\boxed{dx = \frac{du}{-e^{-x}}}$

$$R(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \longrightarrow u_2 = \int \frac{\frac{1}{1+e^{-x}} \cdot e^{x}}{e^{3x}} dx = \int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} dx \longrightarrow$$

$$w = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{bmatrix} = e^x * 2e^{2x} - e^{2x} * e^x = e^{3x}$$

$$= \int \frac{u^2}{1+u} \cdot \frac{du}{-u} = \int \frac{u}{1+u} du = \int \left(1 - \frac{1}{1+u}\right) du \qquad (+1-1)$$

$$= -u + Ln(u+1) = -e^{-x} + Ln|e^{-x}+1| = u_2$$

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0 & e^{2x} \\ 1 & 2e^{2x} \end{bmatrix} = 0 - e^{2x} = -e^{2x}$$

$$w_2 = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 1 \end{bmatrix} = e^x - 0 = e^x$$

$$\therefore y_p = \underbrace{(Ln|1+e^{-x}|)}_{u_1}\underbrace{e^x}_{y_1} + \underbrace{(-e^{-x} + Ln|e^{-x}+1|)}_{u_2}\underbrace{e^{2x}}_{y_2}$$

$$\therefore y = y_c + y_p = ----- \; \#$$

$$3\times3: \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} (1) & (2) & (3) \\ (\ ) & (\ ) & (\ ) \\ (\ ) & (\ ) & (\ ) \end{bmatrix} \end{array} = \underbrace{\begin{bmatrix} (\ ) & (\ ) \\ (\ ) & (\ ) \end{bmatrix}}_{\text{الجذر الأول}}^{\text{مصفوفة}} - \underbrace{\begin{bmatrix} (\ ) & (\ ) \\ (\ ) & (\ ) \end{bmatrix}}_{\text{الجذر الثاني}}^{\text{مصفوفة}} + \underbrace{\begin{bmatrix} (\ ) & (\ ) \\ (\ ) & (\ ) \end{bmatrix}}_{\text{الجذر الثالث}}^{\text{مصفوفة}}$$

← حيث نقصد بمصفوفة كل جذر أي المصفوفة الثنائية الناتجة عند تغطيتنا على الصف والعمود لهذا الجذر في المصفوفة الأصلية مثلاً:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ x & y & z \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} y & z \\ -3 & -5 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} x & z \\ -2 & -5 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} x & y \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

للتوضيح

هذه الرسمات لتوضيح الفكرة

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ x & y & z \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ x & y & z \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ x & y & z \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

وهيك بنكون حكينا عن كوول اشي بتعلق بالطريقة، ضل التطبيق، اذكر الله

Ex: $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}}$, find the g.s:

sol: أولاً نجد y_c

$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad (\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \quad \lambda = 1, 2$

$y_1 = e^x , \quad y_2 = e^{2x} \qquad y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

ثانياً نجد y_p صارو نعناوض u_1 و u_2

$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 \longrightarrow u_1 = \int \frac{\overbrace{\frac{1}{1+e^{-x}}}^{R(x)} \cdot w_1}{w} dx = \int \frac{\frac{1}{1+e^{-x}} \cdot -e^{2x}}{e^{3x}} dx$

$= -\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = Ln(1+e^{-x})$

$R(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \longrightarrow u_2 = \int \frac{\frac{1}{1+e^{-x}} \cdot e^{x}}{e^{3x}} dx = \int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} dx \rightarrow$

بالإستبدال

$u = e^{-x}$

$du = -e^{-x}$

$dx = \frac{du}{-e^{-x}}$

$w = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{bmatrix} = e^x * 2e^{2x} - e^{2x} * e^x = e^{3x}$

$= \int \frac{u^2}{1+u} \cdot \frac{du}{-u} = \int \frac{u}{1+u} du = \int (1 - \frac{1}{1+u}) du$ (+1 -1)

$= -u + Ln(u+1) = -e^{-x} + Ln|e^{-x}+1| = u_2$

$w_1 = \begin{bmatrix} 0 & e^{2x} \\ 1 & 2e^{2x} \end{bmatrix} = 0 - e^{2x} = -e^{2x}$

$w_2 = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 1 \end{bmatrix} = e^x - 0 = e^x$

$\therefore y_p = \underbrace{(Ln(1+e^{-x})}_{u_1}\underbrace{e^x}_{y_1} + \underbrace{(-e^{-x} + Ln|e^{-x}+1|)}_{u_2}\underbrace{e^{2x}}_{y_2}$

$\therefore y = y_c + y_p = \text{-----} \#$

→ Higher order - non Homog. - with veriable :

← في هذا النوع من المعادلات بطلب (the Largest possible interval) والحل كالتالي :

1) نحدد عوامل y' و y'' و .... ونحدد أيضا $R(x)$ حيث نحدد العوامل باستخدام الرموز P فمثلا :

$$x\dddot{y} - 3\cos 2x\,\dot{y} - x^2 y = \ln(x+6) \rightarrow \underbrace{P_3 = x}_{\text{معامل } \dddot{y}} \quad P_2 = 0 \quad \underbrace{P_1 = -3\cos 2x}_{\text{معامل } \dot{y}} \quad \underbrace{P_0 = -x^2}_{\text{معامل } y}$$

$$R(x) = \ln(x+6)$$

2) نجد فترات الاتصال (المجال) لكل ما تم تحديده :

- تذكير $\boxed{A}$ كثير الحدود مجاله R : (R) هي جميع الأعداد. $\boxed{B}$ الكسر مجاله R عدا ما يجعل المقام يساوي صفر.

$\boxed{C}$ الجذور الزوجية مجالها R عدا ما يجعل ما داخلها سالب أما الجذور الفردية فمجالها R فمثلا : $\sqrt{-4} = x$ (أي خطأ) / $\sqrt[3]{-8} = -2$

$\boxed{D}$ النسب المثلثية ($\cos / \sin$) مجالها R، لكن اذا كانت في كسر وموجودة بالمقام فاتمشى على نقطة (B)

$\boxed{E}$ ($\log$ & $\ln$) مجاله R عدا ما يجعل ما داخله يساوي صفراً وسالب.

3) نرسم خط الأعداد ننزيل منه فترات عدم الاتصال مما سبق.

4) نحدد صفر الاقتران لأكبر (P) موجودة في السؤال وننزيله أيضا من خط الأعداد

5) نسقط الرقم المطلوب على خط الأعداد حيث تكون الفترة الواقع فيها هي الفترة المطلوبة $\boxed{x_0 = (\ ) \in I = (\ ,\ )}$

Ex: find the Largest possible interval at which the DE

$$x\ddot{y} + \csc x\,\dot{y} = \ln(x+6), \quad y(-5) = 3, \quad \dot{y}(-5) = 2$$

(هام : العدد الذي داخل y و $\dot{y}$ هو العدد المطلوب حساب الفترة له)

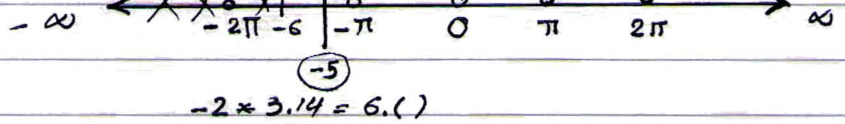
sol:

$\boxed{1}$ $P_2 = x$ ↓ المجال $\qquad P_1 = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ ↓ عدا صفر المقام $\qquad P_0 = 0$ ↓ R $\qquad R(x) = \ln(x+6)$ عدا ما يجعله صفر وسالب $(x+6) > 0 \therefore x > -6$

$\boxed{2}$ R $\qquad \sin x = 0 \rightarrow x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi \ldots$ في هذه الحالة نأخذ فقط قيمتان عن يمين الصفر وقيمتان عن شماله

$\therefore x = \pm n\pi \quad : n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$

$\boxed{3}$



$-2 \times 3.14 = 6.(\ )$

(اذا هي أول أقل من (-6))

$\boxed{4}$ $P_2 = x \rightarrow x = 0 \longrightarrow$ هو بالاصل مفتوح ولو لم يكن كذلك فنحتاج لنزيله من خط الأعداد

$\boxed{5}$ $x_0 = -5 \in I = (-6, -\pi)$

يقع ضمن هذه الفترة المفتوحة حيث نبدأ الفترة بالعدد الأصغر

Ex: find the Largest possible interval at which the DE

$(x^2-4)y'' + \tan x\, y' = \frac{1}{x}$, $y(-3) = 7$, $y'(-3) = -2$: في السؤال لطلب واحده فقط لكن

& $y(-1.9) =$, $y'(-1.9) =$ اعطيتكو ثلاث

& $y(1) =$, $y'(1) =$ للتدريب

Sol: $P_2 = x^2 - 4$ $\xrightarrow{\text{المجال}}$ R

$P_1 = \tan x$ → $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\xrightarrow{\text{مجاله}}$ $R - \{\text{صفر المقام}\}$

$P_0 = 0$ → R

$R(x) = \frac{1}{x}$ → $R - \{\text{صفر المقام}\}$ عدا $\Rightarrow R - \{0\}$

$\cos x = 0 \longrightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} , \pm\frac{3\pi}{2} , \pm\frac{5\pi}{2} , \ldots\ldots = \frac{\pm n\pi}{2} : n = 1, 3, 5, \ldots$

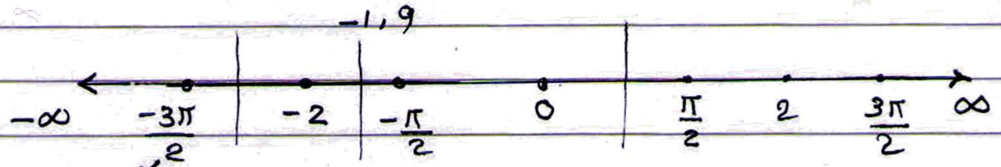
← معلومة ، وادعيلي آخر:

للتسهيل: اللي على محور (x) الـ (sin) لإله

دائماً صفر مثل $\sin 0 = 0$ ، $\sin -3\pi = 0$ ، ......

واللي على محور (y) الـ (cos) لإله دائماً صفر

مثل $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ، $\cos\frac{-3\pi}{2} = 0$ ، ......



$-2 > -3 * \frac{3.14}{2}$ $\qquad$ $-2 < \frac{-3.14}{2}$

$P_2 = x^2 - 4 = 0$ $\qquad$ $x^2 = 4$ $\qquad$ $x = \pm 2$

$x_0 = -3 \in I = \left(\frac{-3\pi}{2}, -2\right)$ #

$x_0 = -1.9 \in I = \left(-2, -\frac{\pi}{2}\right)$

$x_0 = 1 \in I = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

* Power series solutions

- The Taylor series : of $f(x)$ at $x = x_0$ is:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0) = \frac{F(x_0)}{0!} + \frac{F'(x_0)(x + x_0)}{1!} + \frac{F''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \cdots$$

← علما بأن المضروب (!) هو ان تضرب العدد بالعدد الأقل منه درجة ودرجتان و ..... الى الواحد مثل :

$3! = 3*2*1 \qquad 2! = 2*1 \qquad 1! = 1 \qquad \underset{\text{دائمًا}}{0! = 1} \qquad 10! = 10*9* \cdots *1$

- The Maclaurine series of $F(x)$ is : (at $x = 0$)

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!}(x - 0)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!}x^2 = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

Ex: Find the Macl. Ser. of $f(x) = e^x$:

sol: $f(x) = e^x = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} \cdots$

$f(0) = e^0 = 1 \quad f'(x) = e^x \to F'(0) = 1 \quad f''(x) = e^x \to f''(0) = 1 \cdots$

$\therefore f(x) = e^x = 1 * x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$

$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n}$

The macl. ser. to partial function

Ex: $f(x) = \frac{1}{1-x}$, find the Macl. ser. :

sol: $F(0) = 1 \quad f'(x) = \frac{-1 * -1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \to f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{-1(-2(1-x))}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3} \to f''(0) = 2$

$f'''(x) = \frac{-2(-3(1-x))}{(1-x)^6} = \frac{6}{(1-x)^5} \to f'''(0) = 6$

$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{3x^3}{3!} + \cdots = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots$

$\boxed{\therefore \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n}$

← من الآخر: موضوعنا مقسم لقسمين: الأول إيجاد (Macl. ser.) للإقتران والثاني إيجاد g.s باستخدام (Power ser.)

- القسم الأول: بدنا نستخدم القانونين اللي استنتجناهم سابقاً بالإضافة لقانونين ثانيين لإيجاد Macl. ser. للاقتران

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$	$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\sin x = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Ex: find the Macl. ser. of $f(x) = e^{-x}$:

ملاحظة: اذا تغيرت قوة (e) بتتغير الأساس داخل المتتالية

sol: $e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-x)^n \qquad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$

$: (-x)^n = (-1 * x)^n = -1^n * x^n$

Ex: $f(x) = e^{x^2}$

sol: $e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}$

Ex: $F(x) = e^{3x+2}$

sol: $e^{3x+2} = e^{3x} \cdot e^2 = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$

Ex: $f(x) = e^{-x^2}$

sol: $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$: $(-x^2)^n = (-1 * x^2)^n = -1^n * x^{2n}$

$(-x^2)^2 \neq ((-1)^2 * x^2)^n$

Ex: $f(x) = \frac{1}{1+x}$ احاول ايصالها الى الشكل التالي $\frac{1}{1-x}$

sol: $\frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

* نلاحظ اذا تغيرت (x) بتغير الأساس داخل .ser لذلك نحاول وضع الاقتران بالشكل $\frac{1}{1-(\ )}$

Ex: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

sol: $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ حيث: $(-x^2)^n = (-1)^n (x)^{2n} = (-1 * x^2)^n$

$f(x) = \dfrac{9}{2-3x}$ (يمكن للثابت ان يدخل الـ ser. أو أن يخرج منه)

sol: $\dfrac{9}{2-3x} = \dfrac{9}{2(1-\frac{3}{2}x)} = \dfrac{9}{2}\left(\dfrac{1}{1-\frac{3}{2}x}\right) = \dfrac{9}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{3}{2}x\right)^n = \dfrac{3^2}{2^1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{2^n}x^n$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^{n+2}}{2^{n+1}}x^n$

$f(x) = xe^{3x}$ (ويمكن للمتغير ايضا الدخول)

sol:

$xe^{3x} = x\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{n!}x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{n!}x^{n+1}$

$\boxed{f(x)} = \tan^{-1}(x)$ هنا ($\tan^{-1}$) ما مر معنا شكله لذلك بدي أغير شكله: لاقتران آخر يعطي نفس النتيجة وذلك من خلال مشتقته

sol: $\tan^{-1}(x) = \int\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx = \int\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right)dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\left((-1)^n x^{2n}\right)dx$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

(يمكن للـ ser. ان يدخل داخل التكامل أو أن يخرج منه)
(وكذلك بالنسبة للمشتقة كما في السؤال التالي)

$\boxed{f(x)} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ * هنا اذا فككنا التربيع ما بنفع (جرّب)، بدي أفكر بهيك وضع بالاشتقاق والتكامل، وما من الشكل بذكّرنا بمشتقة $\left(\dfrac{\text{الثابت}}{\text{الاقتران}}\right)$ والتي تساوي بعد الاشتقاق $\left(\dfrac{\text{سالب الثابت} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}\right)$ لذلك الحل كالتالي:

sol: $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{d}{dx}(x^n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}$

Ex: $f(x) = \cos(2x)$:

تذكير — مرتبطان

Sol: $\cos x = (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{2n}$ $\cos(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (2)^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$

Ex: $\sin(x^2)$:

Sol: $\sin x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$

*انتبه فقط مكان (x) الي بتغير فقط

H.W: $f(x) = x\cos x \longrightarrow$ Sol: $= \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n)!}$

- القسم الثاني: اذا طلب g.s باستخدام (Power ser.) فالحل كالتالي:

① نعوض في المعادلة من خلال القانون التالي $\boxed{y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$ ومشتقاته مثل

$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

← ونلاحظ انه عندما اشتق أزيد لبداية الفترة واحد (وذلك في كل مرة أشتق فيها)

$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

② نساوي قوة (x) في كل حد مع بعضها كالتالي: مثال:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 6 a_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 0$$

لتصبح المعادلة كالتالي

$m = $ (القوة) $= n+1$ $m = n-1$

$n \to$ (بداية القوة) $\to 0$ $n \to 1$ $m \to 0$

$m \to$ (ناتج تعويض قيمة (n) بالمعادلة السابقة) $\to 1$ $n = m+1$

$n = m-1$ ← لنجعلها موضعا للقانون

$$\sum_{m=1}^{\infty} 6 a_{m-1} x^m + \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m$$

حيث عوضنا في كل حد قيمة (n) بدلالة (m) ونلاحظ تساوي القوة بعد ذلك

③ نساوي فترات المتتالية من خلال تعويض حد أو أكثر للمتتالية ذات البداية الأقل حتى تتساوى بدايتها مع أكبر بداية في المعادلة مثل:

$$\sum_{m=1}^{\infty} 6 a_{m-1} x^m + \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m = \sum_{m=1}^{\infty} 6 a_{m-1} x^m + a_1 \sum_{m=1}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m$$

نعوض (0) لتصبح البداية من (1)

④ نسحب (ser.) كعامل مشترك ونساوي المعاملات ببعض لنجد ما نحتاجه، التوضيح في المثال التالي:

EX: Solve by Using Power Series : $y' + 2xy = 0$

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ← معلومة : g.s بإستخدام الـ (power ser.) هو ناتج التعويض في المتتالية

ونحتاج لايجاد g.s و a و a_1 و a_2 و a_3 ... لكن بدلالة a_0 و a_1 فقط

Sol: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ لذلك نقوم بالخطوات المذكورة سابقا.

$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ نعوض $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^{n+1} = 0$

$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m + \sum_{m=1}^{\infty} 2 a_{m-1} x^m = 0$

$m = n-1$, $n \to 1$, $m = 0$, $n = m+1$; $m = n+1$, $n \to 0$, $m \to 1$, $n = m-1$

$a_1 + \sum_{m=1}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m + \sum_{m=1} 2 a_{m-1} x^m = 0$

$a_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left((m+1) a_{m+1} + 2 a_{m-1}\right) x^m = 0$

$\therefore a_1 = 0$ ← تساوي المعاملات : الثابت = الثابت

$(m+1) a_{m+1} + 2 a_{m-1} = 0$ معامل x^m = معامل x^m

- هنا نجعل a (الأكبر) هي موضع القانون

$a_{m+1} = \dfrac{-2 a_{m-1}}{m+1}$ at عند $m \geq (1)$ ← نعوض من بداية هذا العدد إلى ∞ حيث نعوض خمسة حدود تقريبا وبعدها نحط (الخ) مالنا ؟ (الي مع (m) قبل المساواة)

@ $m=1$: $a_2 = \dfrac{-2a_0}{2} = -a_0$

@ $m=2$: $a_3 = \dfrac{-2}{3} a_1 = 0$

@ $m=3$: $a_4 = -\dfrac{2 a_2}{4} = \dfrac{1}{2} a_0$

@ $m=4$: $a_5 = \dfrac{-2}{5} a_3 = \dfrac{-2}{5} \times 0 = 0$

@ $m=5$: $a_6 = \dfrac{-2 a_4}{6} = \dfrac{-1}{6} a_0$

$\therefore$ g.s is $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 \cdots$

$= a_0 + (-a_0) x^2 + \frac{1}{2} a_0 x^4 + \left(\frac{-a_0}{6}\right) x^6 \pm \cdots$

$y = a_0 \left(1 - x^2 + \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{6} x^6 \pm \cdots\right)$

c_1 $\quad$ $y_1 = e^{-x^2}$

← الحل مش صعب ، حله كمان مرة وفرجينا وشوفنا

Ex: $y'' + xy' + (x^2+2)y = 0$

sol: $y'' + xy' + x^2 y + 2y = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^n = 0$$

$m = n-2$, $n \to 2$, $m \to 0$, $n = m+2$ | $m = n$, $n \to 1$, $m \to 1$, $n = m$ | $m = n+2$, $n \to 0$, $m \to 2$, $n = m-2$ | $m = n$, $n \to 0$, $m \to 0$, $n = m$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m + \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^m + \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^m + \sum_{m=0}^{\infty} 2 a_m x^m = 0$$

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{m=2}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m + a_1 x + \sum_{m=2}^{\infty} m a_m x^m + \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^m + 2a_0 + 2a_1 x + \sum_{m=2}^{\infty} 2 a_m x^m = 0$$

$\rightarrow 2a_2 + a_0 = 0 \rightarrow a_2 = \frac{-1}{2} a_0 \qquad \rightarrow 6a_3 + 3a_1 = 0 \rightarrow a_3 = -\frac{1}{2} a_1$

$\rightarrow (m+2)(m+1) a_{m+2} + (m+2) a_m + a_{m-2} = 0 \qquad a_{m+2} = \frac{-(m+2)a_m - a_{m-2}}{(m+2)(m+1)} \ \forall\, m \geq 2$

$= \frac{-1}{2} a_0$

@ $m=2$: $a_4 = \dfrac{-4a_2 - a_0}{12} = \dfrac{1}{4} a_0$ @ $m=4$: $a_6 =$ -----

@ $m=3$: $a_5 = \dfrac{-5a_3 - a_1}{5 * 4} = \dfrac{3}{40} a_1$ @ $m=5$: $a_7 =$ ----

$\therefore y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$

$= a_1 + a_1 x + (-a_0) x^2 + (\frac{-1}{2} a_1) x^3 + (\frac{1}{4} a_0) x^4 + (\frac{3}{40} a_1) x^5 + \cdots$

$$y = \underbrace{a_0}_{C_1} \underbrace{\left(1 - x^2 + \frac{1}{4} x^4 + \cdots\right)}_{y_1} + \underbrace{a_1}_{C_2} \underbrace{\left(x - \frac{1}{2} x^3 + \frac{3}{40} x^5 \cdots\right)}_{y_2} \quad \#$$

* Linear System of DEs:

← المطلوب هنا ايجاد g.s ، ومن خلال شكل ومعطيات السؤال نعرف ان الحل بهذه الطريقة :

* خطوات الحل:

١- $(A-\lambda I)$: I هي identity وهي $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ ، أما λ فهي بدون مصفوفة ، أما A فهي تعطى في السؤال ، وهناك ثلاث حالات : هي الجذور المختلفة والمتشابهه والمميز السالب.
(حيث نساوي $(A-\lambda I)$ بالصفر لايجاد قيم λ)

٢- نجد قيم $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$ من خلال قيم (λ) كما سنشرح لاحقاً

A , B

٣- ← في حالة الجذور المختلفة :
$$\boxed{\begin{aligned}X_1&=Ae^{\lambda_1 t}\\X_2&=Be^{\lambda_2 t}\end{aligned}}$$

← اذا كانت الجذور متشابهة :
$$\boxed{\begin{aligned}X_1&=Ae^{\lambda t}\\X_2&=Ate^{\lambda t}+Be^{\lambda t}\end{aligned}}$$

← اذا كان المميز سالب
$$\boxed{\begin{aligned}X_1&=e^{\alpha t}\left[Re_A\cos\beta t-Im_A\sin\beta t\right]\\X_2&=e^{\alpha t}\left[Im_A\cos\beta t+Re_A\sin\beta t\right]\end{aligned}}$$

← وسنشرحه لاحقا في الأمثلة

- عند ضرب أو قسمة مصفوفتين

← يجوز ضرب المصفوفات اذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية .

- عند ضرب ثابت بمصفوفة

← يجوز ضرب الثابت بمصفوفة دون شروط إذ أضرب الثابت بكل عدد بالمصفوفة مثل :
$$\lambda I=\lambda\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix}$$

← في حالة الجمع والطرح للمصفوفات فإننا نقوم بذلك مباشرة اذ نقوم بالجمع أو الطرح لعدد من المصفوفة الأولى مع العدد الموجود في نفس الموقع من المصفوفة الثانية ، لكن يجب في جمع المصفوفات وطرحها أن يكون عدد أعمدة وصفوف المصفوفة الأولى يساوي عدد أعمدة وصفوف المصفوفة الثانية مثل

$$\begin{bmatrix}2&5\\-1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&5\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&10\\1&6\end{bmatrix}$$

روق يا فاروق ، وخليك روق ، وادعيلي ...

هسا بتشوف مع حل الأمثلة إنو الموضوع بسيط بس بدك تحل بإيدك

Ex: Solve: $\acute{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (case 1)

إذلم يعطنا إياها في السؤال فيجب أن نكتبها (نفرضها) في قانون (g.s)

← قد يكتب المعطيات بالشكل التالي، وعندها يجب إيجاد قيمة (مصفوفة) A في البداية :

$$\left.\begin{aligned} \acute{x}(t) &= 4x - y \\ \acute{y}(t) &= -4x + 4y \end{aligned}\right] \rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{or } \begin{pmatrix} \acute{x} \\ \acute{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- [من لا يجيد ضرب المصفوفات يرجى مراجعة فيديو الشرح على ذلك أو طلب المساعدة من زميلك حول ذلك]

Sol: $A - \lambda I = 0$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -4 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(4-\lambda) - (-1 * -4) = 0 \qquad 16 + \lambda^2 - 8\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0 \qquad (\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0 \qquad \lambda = 2, 6 \text{.... distand}$$

For $\lambda = 2$:

$$\underset{\downarrow \lambda = 2}{[A - \lambda I]} * \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$2a_1 - a_2 = 0 \rightarrow a_1 = \frac{1}{2} a_2$

$-4a_1 + 2a_2 = 0 \rightarrow a_1 = \frac{1}{2} a_2$

موجودة في الأعلى ←

(دائمًا المعادلتان تعطيان نفس الناتج لذلك نأخذ معادلة فقط)

$a_1 = \frac{1}{2} a_2 \rightarrow @\ a_2 = 2 \quad \therefore a_1 = \frac{1}{2} * 2 = 1 \quad \therefore \bar{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

← نجد من قيمة λ الأولى الجذر الأول وهكذا بالنسبة للثاني (نحن في حالة الجذور المختلفة)

$$X_1 = Ae^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}$$

هنا أريد أن افترض قيمة لـ (a_2) لتعطي قيمة a_1 لكن يجب ان يكون العدد المفروض أبسط ما يمكن فإن افترضنا $a_2 = 4$ فإن $a_1 = 2$ ومنه فإن $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ وهذا لا نريده بل نريد (A) بأبسط صورة ممكنة .

For $\lambda = 6$: $[A - \lambda I] * \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad -2b_1 - b_2 = 0 \Rightarrow b_1 = -\frac{1}{2} b_2$$

$@\ b_2 = 2 \rightarrow b_1 = -1$

هنا أيضا نفرض بحيث نجد (B) بأبسط صورة

$$\therefore X_2 = Be^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{6t}$$

g.s is $\boxed{X=\binom{x}{y}}=c_1X_1+c_2X_2=c_1\binom{1}{2}e^{2t}+c_2\binom{-1}{2}e^{6t}$

← حيث g.s لـ (x) هي ناتج المعادلة عندما نأخذ من الصف الأول اما عندما نأخذ الصف الثاني فالناتج هو g.s لـ (y).

$\therefore$ g.s is $x=c_1*1*e^{2t}+c_2*-1*e^{6t}$

← قد يطلب g.s لـ (x) أو لـ (y)

g.s is $y=c_1*2*e^{2t}+c_2*2*e^{6t}$

EX: solve: $\acute{X}=AX$, $A=\begin{bmatrix}0&1\\-4&4\end{bmatrix}$ and $X=\binom{x}{y}$: Case 2

Sol: $(A-\lambda I)=\begin{bmatrix}0&1\\-4&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda&1\\-4&4-\lambda\end{bmatrix}\Rightarrow 0$

$-\lambda(4-\lambda)-(1*-4)=0 \quad \lambda^2-4\lambda+4=0$ $\quad (\lambda-2)(\lambda-2)=0$

$\underbrace{\lambda=2,2}_{\text{repeated}}$

For $\lambda=2$

$(A-\lambda I)_{\lambda=2}\binom{a_1}{a_2}=\binom{0}{0} \qquad \begin{pmatrix}-2&1\\-4&2\end{pmatrix}\binom{a_1}{a_2}=\binom{0}{0} \quad -2a_1+a_2=0$

$a_1=\frac{1}{2}a_2$

@ $a_2=2$: $a_1=1$

$X_1=Ae^{\lambda t}=\binom{1}{2}e^{2t}$ $\qquad \therefore A=\binom{a_1}{a_2}=\binom{1}{2}$

← هنا الجذور متشابهة حيث ان طبقنا $(A-\lambda I)_{\lambda=2}\binom{b_1}{b_2}=\binom{0}{0}$ فإن الناتج لقيم B هو نفس قيم A لذلك نطبق القانون التالي:

$\therefore (A-\lambda I)_{\lambda=2}\binom{b_1}{b_2}=\binom{a_1}{a_2} \qquad \begin{pmatrix}-2&1\\-4&2\end{pmatrix}\binom{b_1}{b_2}=\binom{1}{2}$

$(A-\lambda I)_{\lambda=??}\binom{b_1}{b_2}=\binom{a_1}{a_2}$

$-2b_1+b_2=1 \qquad @\ b_1=0 : b_2=1 \quad \therefore B=\binom{0}{1}$

$X_2=Ate^{\lambda t}+Be^{\lambda t}=\binom{1}{2}te^{2t}+\binom{0}{1}e^{2t}$ (هنا الاختلاف في الجذور المتشابهة عن قانون الجذور المختلفة)

$\therefore$ g.s is $X=\binom{x}{y}=c_1\binom{1}{2}e^{2t}+c_2\left(\binom{1}{2}te^{2t}+\binom{0}{1}e^{2t}\right)$

$\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}c_1e^{2t}+c_2te^{2t}\\2c_1e^{2t}+2c_2te^{2t}+c_2e^{2t}\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}\rightarrow \text{g.s for } (x)\\ \rightarrow \text{g.s for } (y)\end{matrix}$

EX: $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ {case 3}

Sol: $(A - \lambda I) = 0$ $\begin{pmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 2 & -4-\lambda \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow (2-\lambda)(-4-\lambda) - (-5 * 2) = 0$

$-8 - 2\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 10 = 0$ $\quad \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 * 1 * 2) = -4$

(المميز)

$\lambda = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{-2 \pm i\sqrt{4}}{2} = -1 \pm i$ $\quad \therefore$ Complex Conj.

For $\lambda = -1 + i$

نأخذ الموجب

$(A - \lambda I)_{\lambda = -1+i} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 2-(-1+i) & -5 \\ 2 & -4-(-1+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3-i & -5 \\ 2 & -3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad (3-i)a_1 - 5a_2 = 0$ $\quad a_1 = \left(\dfrac{5}{3-i}\right) a_2$

← هنا ان فرضنا a_2 تساوي صفر فإن a_1 ستساوي صفر لذلك نريد أن نفرض عدد آخر لافتراضه، وهنا الأفضل ان نفرض (a_2) هي مقام الكسر كي ينتج اختصار

@ $a_2 = 3 - i \longrightarrow a_1 = 5$

$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix}$

← هنا نقوم بالتالي: نحاول أن نكتب A على شكل التالي:

$A = (Re.) + (Im.)i$

Real part A — الجزء الحقيقي لـ A

Imagent part A — الجزء الوهمي لـ A

$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + (0)i \\ 3 + (-1)i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}_{Re_A} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{Im_A} i$ → هنا لم يتغير الا شكل المعادلة لو جمعنا (Re.) مع (Im.) سينتج لدينا $\begin{pmatrix} 5 \\ 3-i \end{pmatrix}$

تذكير

In Case 3: $X_1 = e^{\alpha t}\left[Re_A \cos Bt - Im_A \sin Bt\right]$: $\lambda = \alpha \pm Bi = -1 \pm i$

$\alpha = -1$ and $B = 1$

$= e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin t\right)$

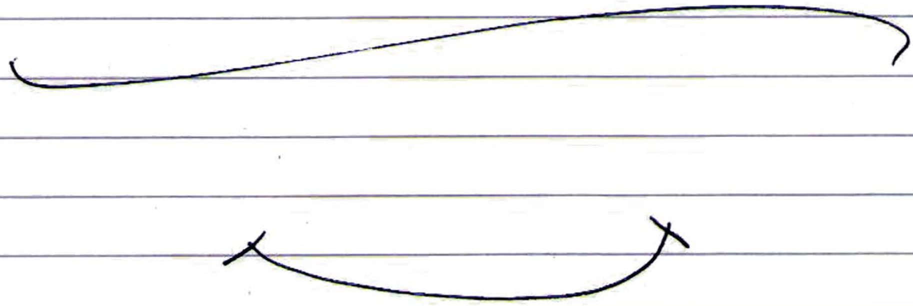
$X_2 = e^{\alpha t}\left[Im_A \cos Bt + Re_A \sin Bt\right] = e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \sin t\right)$

g.s is $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = c_1 X_1 + c_2 X_2$

$$= c_1\left(e^{-t}\left(\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\sin t\right)\right) + c_2\left(e^{-t}\left(\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}\sin t\right)\right)$$

g.s for x is $= 5c_1 e^{-t}\cos t + 5c_2 e^{-t}\sin t$

g.s for y is $= 3e^{-t}c_1\cos t + c_1 e^{-t}\sin t - c_2 e^{-t}\cos t + 3c_2 e^{-t}\sin t$



تبسمك في وجه أخيك صدقة...

ابتسامتك لها أثر يصعب وصفه في نفوس من حولك ..

وشكلك من كشرتنا ميتنا هههه

{من تواضع لله كفاه الله على تواضعه بالرفعة}

*Laplace transforms:

لا (Laplace) لاقتران هو التكامل المحدود من الصفر إلى ∞ لاقتران بدلالة (t) مضروب بـ e^{-st} حيث يعطينا الناتج اقتران بدلالة (s) يسمى F(s)

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} (e^{-st} \cdot f(t))\, dt = F(s)$$

← في البداية هناك سبعة قواعد على هذا الموضوع ، سنذكر في المثالين التاليين من أين أتت أول قاعدتين من القواعد السبعة ، حيث (a) هي ثابت .

E.X: $\mathcal{L}(a) = \int_0^{\infty} (e^{-st} \cdot a)\, dt = a \int_0^{\infty} (e^{-st})\, dt$

$$= a \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{a}{-s} \left(e^{-s*\infty} - e^{-s*0} \right) = \frac{a}{-s} \left(e^{-\infty} - e^{0} \right) = \frac{a}{s}$$

$s>0$

← حيث أنه إن كانت (s) أقل أو يساوي صفر سيختلف الناتج لذلك هذه القاعدة مشروطة بأن (s>0)

E.X: $\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^{\infty} (e^{-st} \cdot e^{at})\, dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t}\, dt$

$$= \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a-s} \left(e^{(a-s)\infty} - e^{(a-s)0} \right)$$

$s>a$

$$= \frac{1}{a-s} \left(e^{-\infty} - 1 \right) = \frac{-1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$$

← كذلك فإن هذه القاعدة مشروطة بأن (s>a) وغير ذلك فإن الناتج مختلف

← كذلك اكتشفوا باقي القواعد

← يرجى العلم بأن : $e^{\infty} = \infty$ (عدد نيبيري لا يساوي صفر)

$$e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} \approx \frac{0}{\infty} = 0$$

← القواعد السبعة :

$\boxed{1}\ \mathcal{L}[a] = \frac{a}{s} \ : \ s>0$

$\boxed{2}\ \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$, $s>a$

$\boxed{3}\ \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$

$\boxed{4}\ \mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}$

$\boxed{6}\ \mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$

$\boxed{5}\ \mathcal{L}[\sinh at] = \frac{a}{s^2-a^2}$

$\boxed{7}\ \mathcal{L}[\cosh at] = \frac{s}{s^2-a^2}$

← ونلاحظ فى القواعد الأربع الأخيرة أنه فى sin فإن (a) فى البسط وفي cos فإن (s) فى البسط

ونلاحظ أيضا أنه إذا وجد $\frac{\sin}{\cos}h$ فإن مابعد التربيع فى المقام سالب وإذا لم يوجد (h) فهو موجب

← هذه الملاحظات السابقة لتسهيل حفظ القواعد

Ex:

1) $\mathcal{L}(\overset{(a)}{5}) = \frac{5}{s}$

2) $\mathcal{L}[-6] = \frac{-6}{s}$

3) $\mathcal{L}[e^{2t}] = \frac{1}{s-2}$

4) $\mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s-(-1)} = \frac{1}{s+1}$

5) $\mathcal{L}[\sin 3t] = \frac{3}{s^2+9}$

6) $\mathcal{L}[\cos 4t] = \frac{s}{s^2-16}$

7) $\mathcal{L}[\sin^2 t] = \mathcal{L}[\frac{1}{2}(1-\cos 2t)] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[1] - \mathcal{L}[\cos 2t]\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{4}{s(s^2+4)} = \frac{2}{s(s^2+4)} = F(s)$$

← بما أن (Laplace) هو تكامل فإنه يوزّع على الجمع والطرح ولا يوزّع على الضرب والقسمة .

$* \sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$ $\qquad$ $* \cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$

واجب: اثبت القاعدتين الخامسة والسابعة عن خلال ماسبق .

E.x:

$$8)\ L[\sinh^2 t] = L\left[\left(\frac{e^{t} - e^{-t}}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4} L\left[e^{2t} - 2 + e^{-2t}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{s-2} - \frac{2}{s} + \frac{1}{s+2}\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{s^2+2s-2s^2+8+s^2-2s}{s(s^2-4)}\right)$$

$$= \frac{2}{s(s^2-4)}$$

$$9)\ L[t^2] = \frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{2}{s^3} \qquad 10)\ L t^3 = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}$$

← مع العلم بأن مضروب العدد هو أن أضرب العدد بالقيمة الأقل منه بواحد ثم القيمة الأقل منه باثنان ثم ..... إلى الوصول إلى واحد

فمثلا مضروب الخمسة $5! = 5*4*3*2*1$ ومضروب الثلاث $3! = 3*2*1$ وهكذا

$$11)\ L\left[\frac{t^3+t^2-1}{t} + \frac{1}{t}\right] = L\left[\frac{t^3+t^2-1+1}{t}\right] = L\left[\frac{\cancel{t}(t^2+t)}{\cancel{t}}\right]$$

$$= L[t^2] + L[t] = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} = \frac{2s^2+s^3}{s^5} = \frac{2+s}{s^3}$$

← إذا جاءنا سؤال أعطانا فيه معادلة تفاضلية وطلب $Y(s)$ نقوم بالتالي:
* نقوم بوضع (L) على كل حد من حدود المعادلة ونجد قيمة (L) لكل حدٍّ على حدة:

$$L(y) = Y(s)$$
$$L(y') = sY(s) - y(0)$$
$$L(y'') = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$
$$L(y''') = s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)$$

← مفتاح لتسهيل حفظ السابق: نلاحظ في كل مرة نبدأ بـ $Y(s)$ ثم $y(0)$ ثم $y'(0)$ ثم..
ونلاحظ أن (s) في البداية مرفوعة لقوة مقدارها هو رقم المشتقة التي قبل المساواة
ثم في كل حد تنزل قوة (s) بمقدار واحد إلى أن نصل إلى $s^0 \Rightarrow 1$ فعندها نتوقف
مثلاً $L(y) = s^0Y(s) = Y(s)$ لأن المشتقة صفرية أي لا يوجد مشتقة)
$$L(y') = s^1Y(s) - s^0y(0) = sY(s) - y(0)$$

E.X: If $L[y(t)] = Y(s)$, and $y'' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$
find $Y(s)$? and find $Y(6)$?

$$Ly'' - Ly = L0 \qquad s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - (Y(s)) = \frac{0}{s} = 0$$

$$s^2Y(s) - Y(s) - s*0 - (-1) = 0 \qquad Y(s)(s^2-1) = -1 \rightarrow Y(s) = \frac{-1}{s^2-1}$$

$$Y(6) = \frac{-1}{36-1} = \frac{-1}{35}$$

E.X: $y'' - y' + y = t^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ find Ys?

$$Ly'' - Ly' + Ly = Lt^2 \rightarrow \text{-----} \rightarrow Y(s) = \frac{s^3+2}{s^3(s^2-s+1)}$$

← حل السؤال، لا تشلفق 6 هتبعلك ......ك

⇒ First Shifting Theorem:

تبقى لدينا قواعد ثلاث للحديث عنها وهي إذا طلب (L) لاقتران بدلالة (t) مضروب بـ e^{at} أو t^n ، أو إذا طلب (L) لتكامل اقتران بدلالة غير (t)

$\boxed{1}$ $L[e^{at} \cdot f(t)] = F(s-a)$

$\boxed{2}$ $L[t^n \cdot f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$

ملاحظة: اذا كانت القوة بين قوسين فهو ليست قوة وانما مقدار المشتقة أي أن

$y'' = y^{(2)}$

$y'' \neq y^2$

$y^{(2)} \neq y$

$\boxed{3}$ $L\left[\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right] = \dfrac{F(s)}{s}$

اي يرمز غير t حيث يمكن أن نضع رمز u أو Z أو ....

E.X: $L[\underbrace{e^{2t}}_{e^{at}:\, a=2} \cdot \underbrace{\sin 3t}_{f(t)}] = F(s-2)$

في البداية نجد $F(s)$ ثم نضع بدل (s) قيمة ($s-a$) وهي هنا ($s-2$)

$F(s) = L[f(t)] = L[\sin 3t] = \dfrac{3}{s^2+9}$ $\quad F(s-2) = \dfrac{3}{(s-2)^2+9}$

E.X: $L[e^{-3t} \cdot \cosh 4t] = F(s-(-3)) = F(s+3)$

$F(s) = L[\cosh 4t] = \dfrac{s}{s^2-16} \xrightarrow{\text{ومنه}} F(s+3) = \dfrac{s+3}{(s+3)^2-16}$

How: $L[e^{-t} \cdot t^4] \rightarrow = \dfrac{24}{(s+1)^5}$

هنا يمكن اعتبار أي من الطرفين هو $f(t)$ لكن في هذه الحالة نعتقد $f(t)$ هو t^4 لأن الحل على القاعدة الأولى اسهل من الحل على الثانية فالقاعدة الثانية فيها اشتقاق ..... ح

[2]

E.X: $L[t.\cos 3t] = (-1)^n F^{(n)}(s) = -1 * F'(s)$

$t : n=1$, $\cos 3t \rightarrow F(t)$

$F(s) = L[\cos 3t] = \frac{2}{s^2+9} \rightarrow F'(s) = \frac{(s^2+9) - 2s^2}{(s^2+9)^2}$

$F'(s) = \frac{9-s^2}{(s^2+9)^2}$ $\therefore L[t.\cos 3t] = -1 * F'(s) = \frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}$

[3]

E.X: $L[\int_0^t (\sin 2\tau) d\tau] = \frac{F(s)}{s}$

$f(\tau)$ ← مهما كان الرمز فإننا نحوله الى (t)

← حيث هنا فإن $F(s)$ هي (L) للاقتران الموجود داخل التكامل لكني أضعه بدلالة (t) مباشرة

$F(s) = L[f(t)]$

$F(s) = L(\sin 2t) = \frac{2}{s^2+4}$

$\therefore L[\int_0^t (\sin 2\tau) d\tau] = \frac{F(s)}{s} = \frac{2}{s(s^2+4)}$

E.X: $L[\int_0^t (e^{2\tau} \cosh \tau) d\tau] = \frac{F(s)}{s}$

$e^{2\tau}\cosh\tau \rightarrow F(\tau)$

← ننتبه هنا: نمشي بالخطوات كما تعلمناها وفكك من العجقة ، ماشي....

$F(s) = L[e^{2t} . \cosh t] = F_1(s-a) = F_1(s-2)$

$e^{2t} \rightarrow e^{at}$, $\cosh t \rightarrow F(t)$

$F_1(s) = L[\cosh t] = \frac{s}{s^2-1} \longrightarrow F_1(s-2) = \frac{s-2}{(s-2)^2-1} = F(s)$

$F_1(s) \rightarrow F(s)$ كي نميز صاعن الرئيسية

$L[\int_0^t (e^{2\tau} \cosh \tau) d\tau] = \frac{F(s)}{s} = \frac{s-2}{s((s-2)^2-1)}$

* Laplace Inverse :

← من الآخر: عكس القواعد اللي أخذناها في (Laplace) فمثلاً :

$L[a] = \frac{a}{s} \rightarrow L^{-1}\left[\frac{a}{s}\right] = a$ وكذلك $\cos\pi = -1 \rightarrow \cos^{-1}(-1) = \pi$

تعني (ما هو الاقتران الذي عندما نضع له (L) يكون الناتج $\left(\frac{a}{s}\right)$)

$\boxed{1}$ $L^{-1}\left[\frac{a}{s}\right] = a$ E.x: $L^{-1}\left[\frac{5}{s}\right] = 5$ $L^{-1}\left[\frac{-3}{s}\right] = -3$

$\boxed{2}$ $L^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$ E.x: $L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] = e^{2t}$ $L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s-\underbrace{(-1)}_{(a)}}\right] = e^{-t}$

$\boxed{3}$ $L^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right] = \sin at$ Ex: $L^{-1}\left[\frac{5}{s^2+25}\right] = \sin 5t$

$\boxed{4}$ $L^{-1}\left[\frac{a}{s^2-a^2}\right] = \sinh at$ $\boxed{5}$ $L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos at$

$\boxed{6}$ $L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-a^2}\right] = \cosh at$ $\boxed{7}$ $L^{-1}\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right] = t^n$

E.x: $L^{-1}\left[\frac{s+3}{s^2-9}\right] = L^{-1}\left[\frac{\cancel{(s+3)}}{\cancel{(s+3)}(s-3)}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] = e^{3t}$

E.x: $L^{-1}\left[\frac{s}{s-1} - 1\right] = L^{-1}\left[\frac{s-(s-1)}{s-1}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] = e^{t}$

E.x: $L^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2+2}\right] = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2} + \frac{1}{s^2+2}\right] = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2}\right] + L^{-1}\left[\frac{1 * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{s^2+2}\right]$

$a^2 = 2 ; a = \sqrt{2}$ قمنا بذلك لأننا نريد وضع $\sqrt{2}$ في البسط كي نحل على القاعدة وقسمنا بعدها على $\sqrt{2}$ كي لا نغير من المسألة

$$= \cos\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}} L^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right] = \cos\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\sqrt{2}t$$

E.X: $L^{-1}\left[\frac{5}{s^2-3}\right] = L^{-1}\left[\frac{5*\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{s^2-3}\right] = \frac{5}{\sqrt{3}} \sinh\sqrt{3}t$

$a^2=3 \therefore a=\sqrt{3}$

E.X: $L^{-1}\left[\frac{6}{s^4}\right] = L^{-1}\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right] = t^3$

$3!=6$

$n+1=4$

$\therefore n=3$

E.X: $L^{-1}\left[\frac{5}{s^4}\right] = L^{-1}\left[\frac{5*\frac{6}{6}}{s^4}\right] = \frac{5}{6} L^{-1}\left[\frac{6}{s^4}\right] = \frac{5}{6}t^3$

$n+1=4$

$\therefore n=3$

لذلك لا يجب ان نضع في البسط مضروب بـ (3)

وهو $3!=(6)$

E.X: $L^{-1}\left[\frac{s+1}{s^5}\right] = L^{-1}\left[\frac{\cancel{s}}{s^{\cancel{5}4}} + \frac{1}{s^5}\right] = L^{-1}\left[\frac{1*\frac{6}{6}}{s^4}\right] + L^{-1}\left[\frac{1*\frac{24}{24}}{s^5}\right] =$

$\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4$

$= \frac{1}{6}t^3(1+\frac{1}{4}t)$

$= \frac{1}{24}t^3(4+t)$

اشكال مختلفة للناتج إحداها يضعه في الخيارات لذلك ننتبه أننا عند الوصول إلى الناتج فإننا قد نحتاج الى تغيير شكل المعادلة

← بالنسبة للقواعد الثلاث التي أخذناها في (Laplace) فالمطلوب معنا في (L^{-1}) هو القاعدة الأولى فالتركيز في الأسئلة عليها

$L[e^{at} \cdot F(t)] = F(s-a) \longrightarrow L^{-1}F(s-a) = e^{at} \cdot F(t)$

E.X: $L^{-1}\left[\frac{3}{(s-1)^2+9}\right] = \sin 3t \cdot e^{(1)t}$

بدونها يكون الحل $\sin 3t$

لأن كل (s) في السؤال طرحنا منها (1) $\therefore F(s-1)$ هو الحل

حيث تساوي $e^{(1)t}F(t)$

E.X: $L^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2-3}\right] = \cosh\sqrt{3}t \cdot e^{-2t}$

$-(-2)$ (a)

" نريد أن نجعلها كما في المقام "

$$E.X: \; L^{-1}\left[\frac{s-1}{(s+2)^2+9}\right] = L^{-1}\left[\frac{s-1+3-3}{(s+2)^2+9}\right] = L^{-1}\left[\frac{(s+2)-3}{(s+2)^2+9}\right]$$

$$= L^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+9}\right] - L^{-1}\left[\frac{3}{(s+2)^2+9}\right] = \cos 3t \cdot e^{-2t} - \sin 3t \cdot e^{-2t}$$

$$E.X: \; L^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^3}\right] = F(s-1) : F(s) = L^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\right] = t^2 \; \therefore F(s-1) = t^2 \cdot e^t$$

$$n+1=3$$
$$\therefore n=2$$

$$E.X: \; L^{-1}\left[\frac{5}{(s+2)^4}\right] = L^{-1}\left[\frac{5 * \frac{6}{6}}{(s-(-2))^4}\right] = \frac{5}{6} L^{-1}\left[\frac{6}{(s-(-2))^4}\right] = \frac{5}{6} t^3 \cdot e^{-2t}$$

$$E.X: \; L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s-1)^6}\right] = L^{-1}\left[\frac{s+1-2+2}{(s-1)^6}\right] = L^{-1} \frac{(s-1)+2}{(s-1)^6}$$

$$= L^{-1}\left[\frac{\cancel{(s-1)}}{(s-1)^{\cancel{6}\,5}}\right] + L^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^6}\right] = \frac{1}{24} t^4 \cdot e^t + \frac{2}{120} t^5 \cdot e^t$$

$$E.X: \; L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+6s+9}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)^2}\right]$$

$$= L^{-1} F(s-(-3)) = t \cdot e^{-3t}$$

في مثل هذه المسائل نحلل المقام
كي نغير شكل الاقتران كي نجد الحل
بناءً على أحد القواعد السابقة

$$E.x: \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4s-5}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+5)(s-1)}\right]$$

← اذا نتج لدينا قوسين مختلفين بعد التحليل نقوم باستخدام طريقة تعطينا شكل آخر لنفس الاقتران كي أجد الناتج

× خطوات الطريقة

1) أولا نتأكد أن المقام محلّل لعوامله الأولية أي لا يحلّل أكثر من ذلك

2) نضع كل عامل أولي في مقام كسر ونفصل بين الكسور بالجمع

3) نضع في بسط كل مقام رموز لمعادلة حيث هذه المعادلة أقل من درجة المقام بدرجة واحدة فمثلا $\frac{\text{ثابت}}{\text{خطي}}$ ، $\frac{\text{خطي}}{\text{تربيعي}}$ ، . . . .

$$\underset{\text{أولا } 1}{\frac{1}{(s+5)(s-1)}} = \overset{3 \text{ ثالثا}}{\frac{A}{s+5}} \underset{\text{ثانيا } 2}{+} \overset{3}{\frac{B}{s-1}}$$

$$\frac{1}{(s+5)(s-1)} = \frac{A(s-1)}{(s+5)(s-1)} + \frac{B(s+5)}{(s-1)(s+5)}$$

← بعد توحيد المقام بروح مقام الطرفين مع بعض

$$1 = A(s-1) + B(s+5)$$

← بدي أعوّض قيمة (س) بحيث تصفّر حد علشان أجد قيمة الثابت في الحد الآخر

$$@\ s=1 \Rightarrow 1 = A*(1-1) + B(1+5) \longrightarrow \boxed{B=\frac{1}{6}}$$

$$@\ s=-5 \Rightarrow 1 = A(-5-1) + B(-5+5) \longrightarrow \boxed{A=\frac{-1}{6}}$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+5)(s-1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{-1}{6}}{s+5} + \frac{\frac{1}{6}}{s-1}\right] = \frac{-1}{6}e^{-5t} + \frac{1}{6}e^{t}$$

$$E.x: \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3+s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right]$$

على شكل خطي لأن المقام تربيعي

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{(Bs+C)}{s^2+1} \xrightarrow[\text{المقام}]{\text{بعد توحيد}} 1 = A(s^2+1) + Bs^2 + Cs$$

$$@\ s=0 \Rightarrow 1 = A+0+0 \longrightarrow \boxed{A=1} \xrightarrow[\text{المعادلة}]{\text{تصبح}} 1 = s^2+1+Bs^2+Cs$$

$$@\ s=1 \Rightarrow 1 = 2+B+C \longrightarrow -1 = B+C \text{ ..... } 1$$

$$+$$

$$@\ s=-1 \Rightarrow 1 = 2+B-C \longrightarrow -1 = B-C \text{ ..... } 2$$

$$-2 = 2B+0 \text{ ....}$$

$$\boxed{B=-1} \text{ from } -1 = -1 + C$$

$$\boxed{C=0}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{-1*s+0}{s^2+1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = 1 - \cos t$$

E.x: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+2s+10}\right]$

← هنا المقام لايحلل لذا نقوم بمايلي :

* نأخذ من قيمة الثابت (واحد) وندمجه مع (s^2+2s) لتصبح المعادلة $s^2+2s+1+9$

ثمّ نحلل المعادلة بعد أن أخذنا قيمة (١) من الثابت ← $((s+1)^2+9)$

وهكذا نكون غيّرنا شكل الاقتران كي نجيد التعامل معه بناءً على إحدى القواعد

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2+9}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2*\frac{3}{3}}{(s-(-1))^2+9}\right] = \frac{2}{3}\sin 3t \cdot e^{-t}$$

إن أحسنّا فمن الله. وإن أخطأنا أو قصرنا فمن أنفسنا

لاتنسونا من الدعاء .... .

(ومن أعرض عن ذكري فإنّ له معيشةً ضنكا)

وصيّتي لكم : لاتَنْسُوْ ذِكر الله