ملخصات لجنة السنافر

ملخص لمادة

كالكولاس ١

لجنة السنافر

بسواعدنا نبنيها

خدمتكم عبادة نتقرب بها الى الله

www www.snafer.muslimengineer.net

/groups/Smurfs.On.The.Way

0785290297 | whats app

Sec (7.3): Inverse Function

- توضيح بسيط عن ال Inverse Function

* If f(x) and g(x) are such that

$g(f(x)) = x$ and $f(g(x)) = x$

then f(x) is Inverse for g(x) or g(x) is Inverse for f(x).

Ex=

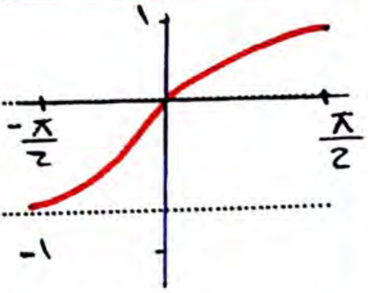
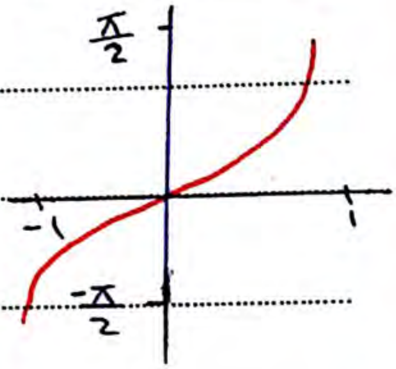
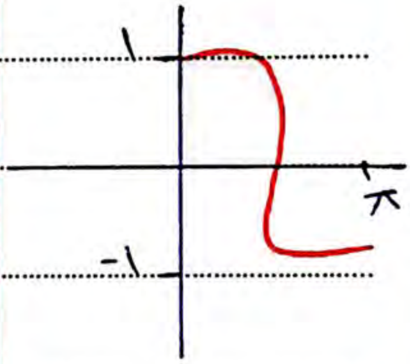
$f(x) = e^x$

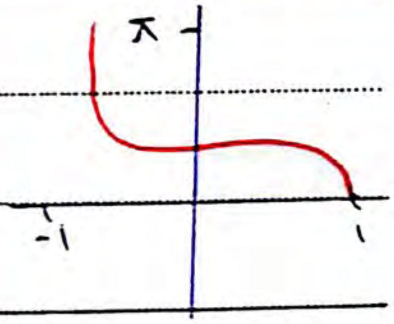
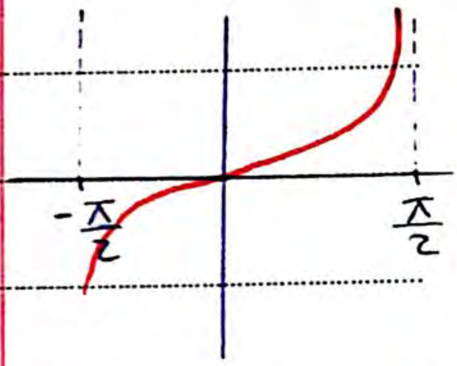
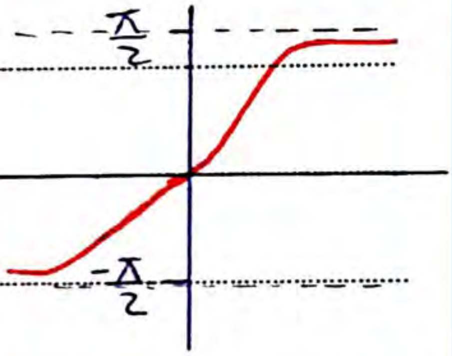
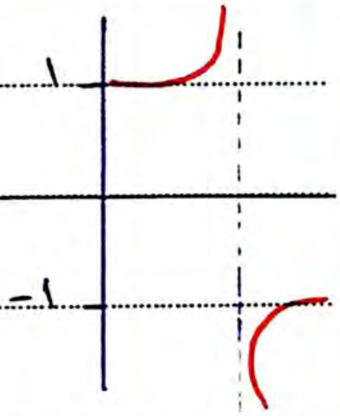
$g(x) = \ln x$

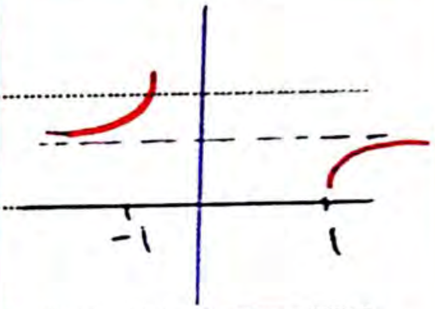
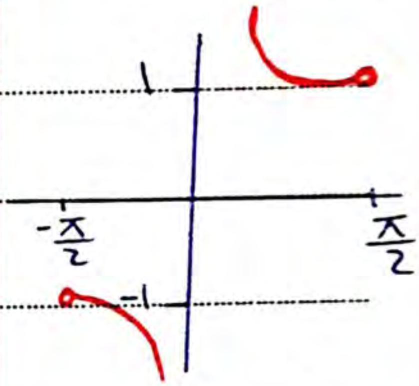
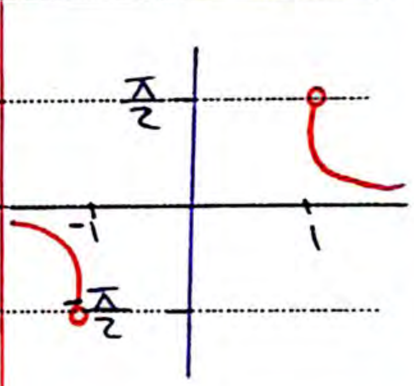
$f(g(x)) = e^{\ln x} = x$ then f(x) and g(x) are

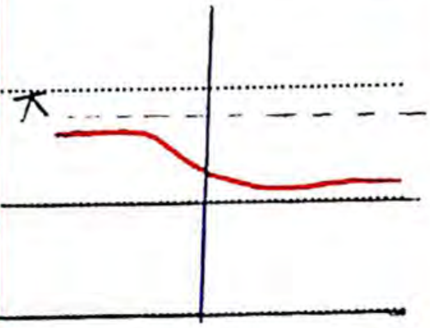
$g(f(x)) = \ln e^x = x$ Inverse for each other.

- والآن دراسة الاقترانات العكسية مجالها ومداها ومقارنتها مع بعضها البعض.

F (x)	Domain	range	graph.
$\sin x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[-1, 1]$	
$\sin^{-1} x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	
$\cos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$	

F(x)	Domain	range	graph.
$\cos^{-1}x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	
$\tan x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(-\infty,\infty)$	
$\tan^{-1}x$	$(-\infty,\infty)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	
$\sec x$	$[0,\pi]-\{\frac{\pi}{2}\}$	$\lvert x\rvert \geq 1$	

F (x)	Domain	range	graph.
$\sec^{-1} x$	$\lvert x \rvert \geq 1$	$[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$	
$\csc x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) - \{0\}$	$\lvert x \rvert > 1$	
$\csc^{-1} x$	$\lvert x \rvert > 1$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) - \{0\}$	
$\cot x$	$(0, \pi)$	$(-\infty, \infty)$	

F(x)	Domain	range	graph
$\cot^{-1}x$	$(-\infty, \infty)$	$(0, \pi)$	

Ex: Find $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. هنا المثال لمعرفة وظيفة الاقتران العكسي

sol:

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = x$ — طريقة الحل ، ركّب sin لِ $\sin^{-1}$

$\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \sin x$

$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

sec (0.5): Exponantial and logarithmic

- الإقتران الأسي واللوغاريتمي Function

- وضعت هذه الإقترانات التسهيل في العمليات الحسابية، والآن ندرس خصائص هذه الإقترانات:

1) Exponantial : الإقتران الأسي

Form:

$$F(X) = \underset{\text{base}}{b}^{\overset{\text{exponantial}}{x}} \quad : b > 0 \,,\ b \neq 1$$

base → القاعدة

ملاحظة مهمة جدًا: يجب أن تكون القاعدة عدد موجب ولا يساوي (1).

- properties :

1) $A^0 = 1$ ⇒ - أي عدد مرفوع للأس صفر = واحد

2) $A^n = A * A * A \dots * A$ n times

- أي عدد مرفوع للقوة ن يساوي: أ * أ * أ ... ن مرة

3) $A^n * A^m = (A)^{(n+m)}$

- الأسس تجمع في حالة الضرب في حالة تساوي الأساس

4) $\frac{A^n}{A^m} = A^{(n-m)}$

- الأسس تطرح في حالة القسمة ، في حالة تساوي الأساس

5) $(A^n)^m = A^{n*m}$

6) $A^{n/m} = \sqrt[m]{A^n} = (\sqrt[m]{A})^n$

7) $A^n = \frac{1}{A^{-n}}$

8) e^x $\longrightarrow$ $e = 2.71$ - هو العدد النيبري

* graph: - رسم الإقتران الأسي:

* Range $(0, +\infty)$ المجال

Domain $(-\infty, +\infty)$ المدى

ملاحظة : الإقتران الأسي لا يمس محور السينات أبدًا ، لذلك :

x-axis is a horizontal asym.

Ex:

1) Find the solution: P1 حل المعادلة التالية:

$X+1 = e^5$

Sol: $X = e^5 - 1$ → - من خلال الآلة الحاسبة .

2) simplify the following expression without using calculater:

* $-8^{2/3}$

Sol: $-(\sqrt[3]{8})^2 = -4$ - تذكر الخاصية .

* $(-8)^{2/3}$

Sol: $(\sqrt[3]{-8})^2 = 4$

* $8^{-2/3}$

Sol: $\frac{1}{8^{2/3}} = \frac{1}{4}$

* 2^{-4}

Sol: $\frac{1}{2^4}$

2) logarithmic Function:

★ Form:

$\log_b x$, $b > 0$, $b \neq 1$

- properties:

1) $\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y$.

2) $\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

3) $\log_b x^n = n \log_b x$

4) $\log_y x = \frac{\log_b x}{\log_b y}$

5) $b^{\log_b x} = x$

6) the natural log الإقتران الأسي الطبيعي :

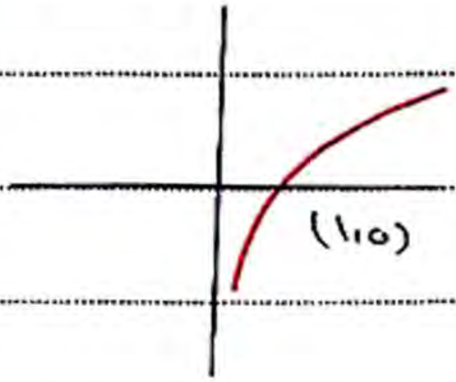
$\log_e f(x) = \ln f(x)$

- Range $(-\infty, \infty)$

- Domain $(0, \infty)$

- الإقتران لا يمس المحور الصادي، لذلك يسمى المحور الصادي - vertical asym.

* graph: - الرسمة :



- معنى اللوغاريتم :

1) $\log_b x$ ⇒ معناها إنه القاعدة إذا رفعنا لعدد تعطيني (X)

2) $\log_2 16$ ⇒ معناها أن الرقم (2) إذا رفع لقوة يعطي (16) ، والقوة هاي هي (4)

Ex: Find the exact value of the following :?

- طريقة الحل : بدي عدد إذا رفعته ل (2) يعطيني

sol : ?! $(\log_2(\frac{1}{32}))$! $\frac{1}{32}$

$2^{-5} = \frac{1}{32} \Rightarrow \log_2(\frac{1}{32}) = -5$

* $\log_4 4 = 1$

* $\log_{10}(10)^4 = 4\log_{10}10 = 4$

* Solve the following : !   أوجد قيمة (X) ؟ -

1) $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1$

Sol:

$e^x - e^{-x} = 2$

$e^x - \frac{1}{e^x} = 2$ ⇐ نوحد مقامات

$\frac{e^{2x} - 1}{e^x} = 2$

$e^{2x} - 1 = 2e^x$

$e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$ ولكن نحلها مثل أي معادلة

$u = e^x$ تربيعية على قانون المميز:

$\Rightarrow u^2 - 2u - 1 = 0$

$u = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4*-2*1}}{2}$

$= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$

$\frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$e^x = 1 \pm \sqrt{2}$ ⇐ إضافة (ln) ⇐ $\ln e^x = \ln + \sqrt{2}$

- ملاحظة : ($1 = \ln e$) $x \ln e = \ln(1+\sqrt{2})$

- ملاحظة : أخذنا الموجب $x = \ln(1+\sqrt{2})$

وأهملنا السالب، لأنه حسب

قوانين اللوغاريتمات، لا يجوز أن يكون

داخل اللوغاريتم سالب .

بسم الله الرحمن الرحيم ..

Chapter 2: limits and continuity.

section (2.2): computing Limits.

النهايات:

يوجد حالتين للنهايات: ١) النهاية موجودة: أن النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار

٢) النهاية غير موجودة: أن النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار

* مراجعة لقواعد الرياضيات:

١) تحليل كثير حدود:

$$f(x)=x^2-2x+3 \Rightarrow f(x)=\underbrace{(x-3)(x+1)}_{-3x\,+x\,=\,-2x}$$

٢) الفرق بين مربعين:

$$f(x)=x^2-4 \Rightarrow f(x)=(x-2)(x+2)$$

٣) الفرق بين مكعبين:

$$f(x)=x^3-8 \Rightarrow f(x)=(x-2)(x^2+2x+4)$$

له عكس الإشارة .

$$=\left(\text{الأول}^3-\text{الثاني}^3\right)\left((\text{الأول})^2+\text{الأول}\times\text{الثاني}+(\text{الثاني})^2\right)$$

٤) مجموع مكعبين:

$$f(x) = x^3 + 8 \Rightarrow f(x) = (x+2)\,(x^2 - 2x + 4)$$

* المطلوب عند حساب النهاية هو الوصول للإختصار بين البسط والمقام.

* (خصائص النهايات):

- If $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ / $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$

النهاية موجودة

1) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$

2) $\lim\limits_{x \to a} (f(x)\, g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x)\ \lim\limits_{x \to a} g(x)$

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

4) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

5) $\lim\limits_{x \to a} K = K$.

* خطوات حساب النهاية :

١) (أهم خطوة) : التعويض المباشر

٢) نرى الناتج ، إذا كان ($\frac{0}{0}$ ، $\frac{\text{عدد}}{0}$ ، 0^0 ، 1^∞ ، $\infty-\infty$ ، $\frac{\infty}{\infty}$)

فنقوم هنا بحساب النهاية

* Examples :

1) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{2}{-2} = -1$ → لم نقم بحساب النهاية لأن الناتج من التعويض كان عدد وليس أحد الحالات .

2) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0}$ → هنا نقوم بحساب النهاية

* المطلوب من حساب النهاية هو الوصول إلى الاختصار بين البسط والمقام في حالة $\frac{0}{0}$.

Sol :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to 2} (x+2)$$

$$\Downarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} (2+2) = 4$ قمنا بالاختصار بعدها قمنا بالتعويض

- في هذه الحالة قمنا بعمل تحليل فرق بين مربعين

3) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$

علينا الوصول للاختصار، لذلك نقوم بالتحليل.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{(x-1)}} = 3$$

- هُنا قُمنا بتحليل فرق بين مكعبين

4) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2 - x + 1)}{\cancel{(x+1)}} = 3.$$

5) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{0}{0}$

المرافق التربيعي هو نفس الحدين ولكن بعكس الإشارة، الناتج دائما اشارة سالبة

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} * \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} + \cancel{1} - \cancel{1}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}$$

* عند وجود الجذر التربيعي، نستخدم ما يسمى المرافق.

6) $\lim_{x\to 8} \frac{2-\sqrt[3]{x}}{x-8} = \frac{0}{0}$

المرافق التكعيبي : الأول تربيع عكس الإشارة الأول في الثاني + الثاني تربيع

$$\lim_{x\to 8} \frac{2-\sqrt[3]{x}}{x-8} * \frac{(4+2\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2)}{(4+2\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2)}$$

$$\lim_{x\to 8} \frac{\overset{-1}{\cancel{(8-x)}}}{\cancel{(x-8)}(4+2\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2)} =$$

$$\lim_{x\to 8} \frac{-1}{(4+2\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2)} = \frac{-1}{12}$$

- عند وجود الجذر التكعيبي نقوم باستخدام مرافق الجذر التكعيبي.

* Examples :

1) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

Sol : نأخذ النهاية من اليمين ومن اليسار

$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$ | $\lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$

$\underset{0}{-\quad|\quad+}$

$1 \neq -1$

إذاً النهاية غير موجودة / (doesn't exist (d.n.e))

2) $\lim_{x\to 0} \frac{(4+x)^2-16}{x} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0} \frac{((4+x)+4)((4+x)-4)}{x}$

$= \lim_{x\to 0} x+4+4 = 8.$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{(2+x)^3-8}{x} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0} \frac{((2+x)-2)((2+x)^2+2(2+x)+4)}{x}$

$\lim_{x\to 0} (2+x)^2+2(2+x)+4 = 12.$

4) $\lim_{x\to -4} \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{x+4} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ في هذه الحالة نقوم بتوحيد المقامات.

$\lim_{x\to -4} \frac{\frac{x+4}{4x}}{x+4} = \lim_{x\to -4} \frac{1}{4x} = \frac{1}{-16}.$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+x}$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x-x}{x(x^2+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^3+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(x+1)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1} = 1$

9) If $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$ and $\lim_{x\to 3} g(x) = 10$

Find $\lim_{x\to 3} 2f(x) + 3g(x)$

Sol:-

$2 * 4 + 3 * 10 = 38$

10) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} * \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+5}}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+5}}$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\overset{\nearrow \cancel{x-4}}{(2x+1) - (x+5)}}{\cancel{x-4}\,(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+5})} = \frac{1}{6}$$

11) $\lim_{x\to 5} \frac{|x-5|}{x-5}$

نعيد تعريف إقتران القيمة المطلقة كالتالي :

$$f(x) = \begin{cases} -(x-5), & x < 5 \\ x-5, & x \geq 5 \end{cases}$$

بعد التعريف نأخذ النهاية من اليمين و اليسار

$$\Rightarrow \lim_{x\to 5+} \frac{x-5}{x-5} = \lim_{x\to 5+} 1 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 5-} \frac{-(x-5)}{x-5}$$

$$= \lim_{x\to 5-} -1 = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 5+} f(x) \neq \lim_{x\to 5-} f(x)$$

❖ $\lim_{x\to 5} \frac{|x-5|}{x-5}$ $D.N.E$

6) $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x-4} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ نحصر الجذر التربيعي

هنا نستخدم المرافق التربيعي.

$= \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x-4} * \frac{\sqrt{x^2+9}+5}{\sqrt{x^2+9}+5}$

$\lim_{x \to 4} \frac{x^2+9-25}{(x-4)(\sqrt{x^2+9}+5)} = \lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{(x-4)(\sqrt{x^2+9}+5)}$

$\lim_{x \to 4} \frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x^2+9}+5)} = \frac{8}{10}$

7) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2+x-6} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-2)}{\cancel{(x-2)}(x+3)}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x+3} = \frac{0}{5} = 0.$

8) $\lim_{x \to 1} \frac{3x^2-x-2}{2x^2+x-3} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x \to 1} \frac{(3x+2)\cancel{(x-1)}}{(2x+3)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} \frac{3x+2}{2x+3} = \frac{5}{5} = 1.$

هذي العملية تسمى إنطاق مقام
بسبب ان المقام حد واحد وجذر. هنا لا
نستعمل ضرب مرافق لأنه حد واحد

$$9)\ \lim_{x\to1+}\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}*\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to1+}\frac{x^2-1*\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}=\lim_{x\to1+}\sqrt{x^2-1}=0$$

* second condition of limits.

- الحالة الثانية من النهايات

* $\frac{k}{0} \rightarrow$ constant - $\frac{\text{عدد}}{0}$

- when ($\frac{k}{0}$) apears we study the sign of the function.

- عندما تظهر $\frac{\text{عدد}}{0}$ نقوم بدراسة الإشارة.

* $\frac{k}{0}$ $\rightarrow +\infty$
$\rightarrow -\infty$
$\rightarrow$ d.n.e.

لا ندرس الإشارة الا عندما يكون الإقتران بأبسط صورة

Ex:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$

$- \quad | \quad +$
$\quad\ 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad \Big| \quad \lim\limits_{x \to 0^-} = -\infty$

$\therefore$ limit is d.n.e.

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

$++ \quad | \quad ++$
$\quad\ 0$

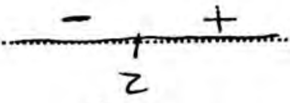
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty \quad \Big| \quad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty$

$\therefore$ limit is exist / $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty$

3) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)^3} = \frac{0}{0}$

$\Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0} \Rightarrow$ ندرس الإشارة



$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \infty$ | $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

$\therefore$ lim d.n.e.

* vertical asymptot : (V.A)

Ex:- * يكون للإقتران محور إقتراب عمودي

1) $f(X) = \frac{1}{X-1}$ - طريقة إخراج (V.A) :-

$\Rightarrow$

$\Downarrow$ 1) إخراج أبسط صورة للإقتران

f(x) has a vertical asymptot which is (1) 2) إيجاد أصفار المقام

- اصفار الإقتران محور إقتراب

2) $f(X) = \frac{X-1}{X^2-1}$ Find (V.A)? عمودي عند ($X=1$).

Sol:

$f(X) = \frac{\cancel{X-1}}{\cancel{(X-1)}(X+1)} = \frac{1}{X+1} \therefore (V.A) = -1.$

3) $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1), find\ (V.A)?$

نساوي ما داخل اللوغاريتم ب 0 لنجد V.A عند سالب الانهاية

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-1) = 0$$

$$x = 1 \qquad V.A\ at\ x = 1$$

4) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-4}{x}\right), find\ (V.A)?$

نساوي بسط اللوغاريتم ب 0 لنجد V.A عند سالب الانهاية. ونساوي المقام ب0 لنجد V.A عند المالانهاية.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}+2) = 0$$

$$x = \pm 2 \qquad V.A\ at\ x = \pm 2$$

$$x = 0 \qquad V.A\ at\ x = 0$$

$$\Rightarrow V.A\ at\ x = \pm 2\ , 0$$

5) $f(x) = 2\tan\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{2}\right)\ , find\ (V.A)?$

إذا كانت المسألة tan او sec دائما نضع ما داخله يساوي $n\pi + \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{3}x = n\pi$$

N اي عدد صحيح.

$$x = 3n\pi \qquad V.A\ at\ x = 3n\pi$$

اي عدد صحيح يعوض مكان n يعطينا V.A

6) $f(x) = -8\csc(4\pi x - 1) + 7$

إذا كانت المسألة cot او csc دائما نضع ما داخله يساوي $n\pi$

$$4\pi x - 1 = n\pi \Rightarrow 4\pi x - 1 = n\pi$$

N اي عدد صحيح.

$$4\pi x = n\pi + 1 \Rightarrow x = \frac{n\pi + 1}{4\pi}$$

$$V.A\ at\ x = \frac{n\pi + 1}{4\pi}$$

اي عدد صحيح يعوض مكان n يعطينا V.A

$$-\,if\ you\ know\ that\ f(x)=\frac{1}{x^2+2ax+1}$$

$$has\ 2\ vertical\ asymptote\ then\ find\ the\ values\ of\ a:-$$

ليكون للإقتران 2 V.A لابـد من وجود حلين للمعـادلـة التربيعة.نستخدم المميز لإيجاد الثابت.

$$b^2-4ac=0\Rightarrow\ (2a)^2-4=0$$

$$\Rightarrow 4a^2=4\Rightarrow a^2=1$$

$$\Rightarrow a=\pm 1$$

Sec (2.3): limits as X goes to the (∞)

- نهاية اللانهاية -

* Notes:

1) $\lim_{x \to +\infty} X^n = +\infty$

2) $\lim_{x \to -\infty} X^n = \begin{cases} -\infty, & n \text{ is odd} \\ +\infty, & n \text{ is even} \end{cases}$

3) $\lim_{x \to \infty} a_n X^n + a(n-1) X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$

↓

(كثير حدود)

Sol:

$\lim_{x \to \pm\infty} a_n X^n \Rightarrow$ - يعني نأخذ العدد الذي فيه أعلى قوة

4) $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + A_1 X + A_0}{B_m X^m + B_{m-1} X^{m-1} + \dots + B_1} =$

$\begin{cases} 0, & n < m \\ \dfrac{A_n}{B_m}, & n = m \\ \pm\infty, & n > m \end{cases}$

درجة البسط أقل من المقام

درجة البسط تساوي المقام

درجة البسط أعلى من المقام

5) If $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

and $\lim_{x \to -\infty} f(x) = m$

then $y = L$ and $y = m$ are called

horisantal asymptot

6) $A / \pm\infty =$ Zero

Ex :

1) $\lim_{x \to \infty} x = \infty$. القاعدة الأولى

2) $\lim_{x \to -\infty} = (-\infty)^3 = -\infty$ القاعدة الثانية

3) $\lim_{x \to \infty} 5x^3 - 7x^{100}$

$= \lim_{x \to \infty} -7x^{100} = -\infty$ القاعدة الثالثة

4) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 7x}{x^3 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$

$= \frac{1}{\infty} =$ صفر . القاعدة الرابعة .

- درجة المقام أعلى من البسط .

5) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{99}+x^{100}}{-x^{100}+x^{97}} = \frac{1}{-1} = -1.$

- القاعدة الرابعة.
- أخذنا أعلى قوة بالبسط وأعلى قوة من المقام.
- درجة البسط تساوي درجة المقام.

6) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{100}+x}{x^{98}-x^{99}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{100}}{-x^{99}} = -\infty$

- القاعدة الرابعة.
- درجة البسط أعلى من المقام

7) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{9}+x^{7}}{x^{7}-x^{3}} = \infty$ ⇒ - القاعدة الرابعة.

8) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x-7}$ - ناتج التعويض هو (∞-∞)

Sol: - خطوات الحل:

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}+x}{x-7}$ ١) نأخذ (x) داخل الجذر عامل مشترك.

٢) نأخذ من البسط عامل مشترك.

$\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}{x-7}$ ٣) نأخذ من المقام عامل مشترك

٤) نختصر.

٥) نعوّض.

2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)}{x-7}$ / 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)}{\cancel{x}(1-\frac{7}{x})} = 2$

الحل بعد التعويض.

9) $\lim_{x\to\infty} \frac{(2x+1)^5 - x^4 + 1}{3x^2 - (1+x)^5} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x)^5}{-(x)^5} = -32.$

10) $\lim_{x\to\infty} \frac{(2-3x)^3 - x^2}{2x^3 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(-3x^3)}{2x^3} = \frac{-27}{2}$

11) $\lim_{x\to\infty} \frac{(3-5x)^3 - (x+1)}{2x^2 + 6x + 9} = \lim_{x\to\infty} -5x^3 = -\infty$

12) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{5-3x}\right)^{-2} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \left(\frac{5-3x}{2x+3}\right)^2$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{25 + 30x + 9x^2}{4x^2 + 24x + 9} = \frac{9}{4}$

13) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{2+3x-5x^2}{1+8x^2}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to\infty} \frac{2+3x-5x^2}{1+8x^2}}$

$= \sqrt[3]{\frac{-5}{8}} = \frac{\sqrt[3]{-5}}{2}.$

14) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{5x^2-2}}{x+3} = \sqrt{5}$ توضيح $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{5}\cancel{x}}{\cancel{x}} = \sqrt{5}$

15) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{5-x} = \sqrt{5-(-\infty)} = \infty$

16) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+3} - x\right)$

Sol:-

* نضرب بالمرافق لجعلها (إقترانه/إقترانه)

- ثم نختصر.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+3} - x\right) \times \frac{\sqrt{x^2+3} + x}{\sqrt{x^2+3} + x}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3} + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+3} + x} = \frac{3}{\infty} = 0$$

17) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}$

Sol:-

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+9x} - \sqrt{x^2+bx} \times \frac{\sqrt{x^2+9x} + \sqrt{x^2+bx}}{\sqrt{x^2+9x} + \sqrt{x^2+bx}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+ax-x^2-bx}{\sqrt{x^2+9x} + \sqrt{x^2+bx}} = \lim_{x \to \infty} \frac{ax-bx}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{9}{x}\right)} + \sqrt{x^2\left(1+\frac{b}{x}\right)}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax-bx}{x\sqrt{1+\frac{9}{x}} + x\sqrt{1+\frac{b}{x}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x(a-b)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{9}{x}} + \sqrt{1+\frac{b}{x}}\right)} = \frac{a-b}{2}$$

Sec (2.6) (limits of trigonometric functions)

- النهايات المثلثية.

*** The trigonometric function is:**

1) $\sin x$ 2) $\cos x$ 3) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

4) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. 5) $\csc x = \frac{1}{\sin x}$.

6) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

*** Trigonometric Identities:** المتطابقات المثلثية.

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$.

3) $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$.

4) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

5) $\cos 2x =$
- 1) $\cos^2 x - \sin^2 x$.
- 2) $1 - 2\sin^2 x$.
- 3) $2\cos^2 x - 1$

11 ب

*** Rules :**

1) $\lim \sin x$ / $\lim \cos x$ / $\lim \tan x$ / $\lim \sec x$

$\lim \csc$ / $\lim \cot x$:- تعويض مباشر

2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sin x$ / $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \cos x$:- d.n.e.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

ركز عندما تؤول إلى صفر.

8) هاي مهم عندي :

حاول إفلص من الـ (cos) يا إمّا عمم طريقة متطابقات أو عمم طريقة المرافق وبالذات لما تشوف (1+cos) (1− cos)

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$

6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin bx} = \frac{1}{b}$

طريقة حل النهايات الدائرية

إذا كان جواب النهاية غير معرف

ننظر إلى ذيل النهاية إذا لم يكن صفراً نجعله صفراً بالإستبدال.

إستخدام متطابقات الدائري إذا لزم الأمر.

نضرب بالمرافق إذا كان ضرب المرافق يأتي بمتطابقة. مثل

$$1 \pm \cos x$$

عند الضرب بمرافق تصبح

$$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

Ex:

- نريد أن نوصلها إلى الصورة الموجودة في القواعد التي في $\lim \frac{\tan x}{x}$ / $\lim \frac{\sin x}{x}$

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x + \sin 2x}{5x}$

Sol: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{5x} + \frac{\sin 2x}{5x}$

- انتبه يجب أن تؤول النهاية إلى الصفر.

$= \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x \tan 2x}{7x^2}$

- مثل المثال السابق ولكن في حالة الضرب نقوم بتوزيع الإقترانات على بعضها.

Sol:

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{7x} * \frac{\tan 2x}{x}$

- انتبه يجب أن تؤول النهاية إلى صفر

$= \frac{5}{7} * \frac{2}{1} = \frac{10}{7}$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin 4x}{\sin x * \tan 3x} =$

Sol:

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} * \frac{\sin 4x}{\tan 3x} = 1 * \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^3 5x}{x\sin^2 5x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 5x}{x} * \dfrac{\tan 5x}{\sin 5x} * \dfrac{\tan 5x}{\sin 5x}$

$= 5 * 1 * 1 = 5$.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x + \tan 7x}{3x + \sin 2x}$

- نقوم بالقسمة على (x) التي تحمل أقل قوة بالحد

Sol:

$$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\sin 5x}{x} + \dfrac{\tan 7x}{x}}{\dfrac{3x}{x} + \dfrac{\sin 2x}{x}} = \dfrac{5+7}{3+2} = \dfrac{12}{5}$$

(مثال 5 ، مثال 7)

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 5x}{2x}$

- نقوم بالتوزيع (في هذه الحالة الناتج صفر)

- في النظرية: إذا لم تكفي الحدود للتوزيع يكون الناتج صفر.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{2} * \sin 5x = \dfrac{5}{2} * 0 = 0$.

" تَحْسَبُ أَنَّكَ جُرْمٌ صَغِيرٌ وَفِيكَ انْطَوَى العَالَمُ الأَكْبَرُ ..... "

:)

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin 5x + \tan^2 3x}{\sin^3 5x + \sin^2 4x}$

- نقسم على (X^2) لأن أقل حد بالقوة هو

Sol:

($X \sin 5X$) يعني تربيع $\sin^2 4X$ و $\tan^2 3X$ أما $\sin^3 5X$ فهي تكعيبة...

$$\lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x \sin 5x}{x^2} + \dfrac{\tan^2 3x}{x^2}}{\dfrac{\sin^3 5x}{x^2} + \dfrac{\sin^2 4x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x}{x} * \dfrac{\sin 5x}{x} + \dfrac{\tan 3x}{x} * \dfrac{\tan 3x}{x}}{\dfrac{\sin 5x}{x} * \dfrac{\sin 5x}{x} * \sin 5x + \dfrac{\sin 4x}{x} * \dfrac{\sin 4x}{x}}$$

$$= \frac{1 * 5 + 3 * 3}{5 * 5 * 0 + 4 * 4} = \frac{15}{16}.$$

8) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(\sin 5x)}{5x}$

1) نقوم بالقسمة على الزاوية.

2) نوزع النهاية.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\tan(\sin 5x)}{\sin 5x}}{\dfrac{5x}{\sin 5x}} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(\sin 5x)}{\sin 5x}}{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{\sin 5x}}$$

$$= \frac{1}{1}.$$

9) $\lim_{x\to1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$

- نقسم على الزاوية
- نوزع النهاية .

$$\lim_{x\to1} \frac{\frac{\sin(x-1)}{x-1}}{\frac{x^2-1}{x-1}} = \frac{\lim_{x\to1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \quad \boxed{1}}{\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1} \quad \boxed{2}}$$

1) $\lim_{x\to1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \Rightarrow$

يوجد لها حلين
حل رياضي وحل (هبل :p) .

الحل الرياضي :- $\lim_{x\to1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} \Rightarrow$

هنا الحل لأن في النظرية يجب أنه تؤول النهاية إلى صفر

$z = x-1$

$z \to 0 \qquad \lim_{z\to0} \frac{\sin z}{z} = 1.$

الحل الهبل :p : $\lim_{x\to1} \frac{(x-1)}{x-1} = 1$

2) $\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(\cancel{x-1})(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2$

$\therefore \frac{1}{2}$.

10) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} * \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$ - ضربنا بالمرافق

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} * \frac{\sin x}{1+\cos x} = 1 * \frac{0}{1+1} = 0$$

11) $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1-\cos x}$ - نضرب بالمرافق

sol:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1-\cos x} * \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x (1+\cos x)}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x (1+\cos x)}{\sin^{\cancel{2}} x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(1+\cos x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} * (1+\cos x)$$

$$= 1 * 2 = 2.$$

12) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos 3x-1} * \frac{1+\cos x}{1+\cos x} * \frac{1+\cos 3x}{1+\cos 3x}$

- نضرب بمرافقين

$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos^2 x)(1+\cos 3x)}{(\cos^2 3x-1)(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x(1+\cos 3x)}{-\sin^2 3x(1+\cos x)}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{-\sin^2 3x} * \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos 3x}{1+\cos x}$

نقسم على (x^2)

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{-\sin^2 3x} * \frac{2}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} * \frac{\sin x}{x}}{-\frac{\sin 3x}{x} * \frac{\sin 3x}{x}}$

$= \frac{-1}{9}$

* squeezing theorem : - إذا كان اقتران $f(x)$

If $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ محصور بين اقتران $g(x)$

with $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ واقتران $h(x)$

then $\lim_{x \to a} f(x) = L$ وكانت نهاية $g(x)$ و $h(x)$

متساوية، فهذا يعني أنه نهاية $f(x)$ تساويهم.

Ex :

1) $\lim_{x \to 0^+} x \cos \frac{1}{x}$

$x \left(-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1 \right) = -x \leq x \cos \frac{1}{x} \leq x$

أدخل $\left(\lim_{x \to 0^+} \right)$

$\lim_{x \to 0^+} -x \leq \lim_{x \to 0^+} x \cos \frac{1}{x} \leq \lim_{x \to 0^+} x$

$0 \leq \lim_{x \to 0^+} x \cos \frac{1}{x} \leq 0$

$\therefore \lim_{x \to 0^+} x \cos \frac{1}{x} = 0$

2) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$

$-1 \leq \sin x \leq 1 = \frac{-1}{x} \leq \sin x \leq \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{-1}{x} \leq \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$

$0 \leq \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} \leq 0 = \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow \quad x * \left(0 \le \ \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \le 1\right)$

$\Rightarrow \quad 0 \le x\sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \le x$ إدخال $\lim\limits_{x\to 0}$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0} 0 \le \lim\limits_{x\to 0} x\sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \le \lim\limits_{x\to 0} x \Rightarrow \quad 0 \le \lim\limits_{x\to 0} x\sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \le 0$

❖ $\lim\limits_{x\to 0} x\sin^2\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

4) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin^2\left(\cos\left(\frac{5}{x}\right)\right)$

$\Rightarrow \quad x^2 * \left(0 \le \ \sin^2\left(\cos\left(\frac{5}{x}\right)\right) \le 1\right)$

$\Rightarrow \quad 0 \le x^2\sin^2\left(\cos\left(\frac{5}{x}\right)\right) \le x^2$ إدخال $\lim\limits_{x\to 0}$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0} 0 \le \lim\limits_{x\to 0} x^2\sin^2\left(\cos\left(\frac{5}{x}\right)\right) \le \lim\limits_{x\to 0} x^2$

$\Rightarrow \quad 0 \le \lim\limits_{x\to 0} x^2\sin^2\left(\cos\left(\frac{5}{x}\right)\right) \le 0$

❖ $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin^2\left(\cos\left(\frac{5}{x}\right)\right) = 0$

3) $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

Sol: $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$

$-x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq x$

$\lim_{x\to 0} -x \leq \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} \leq \lim_{x\to 0} x$

* إذاً : $0 \leq \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} \leq 0$

$\therefore \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

نستخدم الـsqueezing في الحالات المذكورة في الأمثلة.

(أسئلة متنوعة على النهايات)

1) $\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\cos 0 = 1$

2) $\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{\pi x}{2-3x}\right) \Rightarrow \sin\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\pi x}{2-3x}\right)$

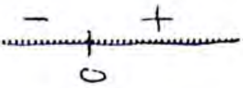
$= \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

- على خصائص النهايات.

⟶ (:

3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{|x|}$ - نقوم بتعريف المطلق .

Sol:



$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{-x} = -1$

$\therefore$ Lim does not exist.

4) $\lim_{x \to 2} \frac{x+c}{x-3} = 6$.

Find C !؟

$\frac{2+c}{2-3} = 6 \Rightarrow c = -8$.

5) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - \sqrt{x+c}}{x-2}$ Find (if you know that the lim is exist !؟)

Sol: - معنى أنه النهاية موجودة ، أنه ناتج التعويض فيها هو ($\frac{٠}{٠}$)

$4 - \sqrt{2+c} = 0$

$4 = \sqrt{2+c}$

$16 = 2+c$ $\boxed{c = 14}$

6) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{5\sqrt{x}}$ — نقوم بإنطاق المقام:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{5\sqrt{x}} * \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{5x} * \sqrt{x}$$

$$= \frac{1}{5} * 0 = 0.$$

7) $\lim_{x\to 2} \frac{A\sqrt{x^2+5}+Bx-4}{x-2} = \frac{7}{6}$

- خطوات الحل :-

1) ناتج التعويض بالبسط يساوي صفر

$$A\sqrt{9} + 2B - 4 = 0$$

2) نقوم بحل النهاية من خلال توزيع الجمع والطرح

$$\boxed{3A + 2B - 4 = 0 \ldots (1)}$$

$$\Rightarrow -4 = -3A - 2B$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{A\sqrt{x^2+5}-3A}{x-2} + \lim_{x\to 2} \frac{Bx-2B}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} A\left(\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} * \frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}\right) + \lim_{x\to 2} \frac{B(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}}$$

$$= \lim_{x\to 2} A\left(\frac{x^2+5-9}{x-2}\right) + \lim_{x\to 2} B$$

$$= \lim_{x\to 2} A\left(\frac{(\cancel{x-2})(x+2)}{(\cancel{x-2})(\sqrt{x^2+5}+3)}\right) + \lim_{x\to 2} B$$

تابع حل السؤال ⇐

$= \frac{4A}{6} + B = \frac{7}{6} \Rightarrow \boxed{4A + 6B = 7 \quad \text{---} \boxed{2}}$

3) نقوم بحل المعادلتين ونكون قيمة

$\boxed{B = \frac{1}{2}}$ و $\boxed{A = 1}$

8) If you know that f(x) is a polynoimal

and $\lim_{x \to 4} \frac{3 - f(x)}{x - 4} = 6$

Find :-

A) $\lim_{x \to 4} f^2 x + 2x$ | B) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 + f(x) - 19}{x - 4}$

Sol :

- بما أن النهاية موجودة

فهذا يعني أن البسط يساوي

صفر، والمقام يساوي صفر

$3 - f(4) = 0$

$\Rightarrow f(4) = 3.$

A) $\lim_{x \to 4} f^2(x) + 2x$

$\Rightarrow f^2(4) + 8 = 9 + 8 = \boxed{17}$

sec (2.5): Continuity.

Dec: f(x) is said to be continous at $x = c$, if:

1) $f(c)$ is defind.

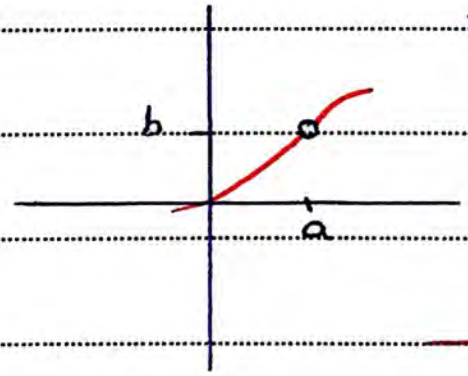
2) $\lim_{x \to c} f(x)$ is exist.

3) $f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$.

تعريف: يقال أن الإقتران متصل عند نقطة معينة إذا تحقق الشروط التالية: ١) الإقتران معرف عند هذه النقطة. ٢) النهاية موجودة عند النقطة. ٣) الصورة تساوي النهاية..

* Discus the continuity: مناقشة الإتصال.

1)

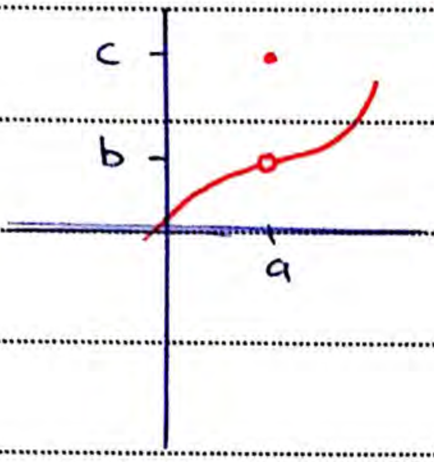


- not continous

f(a) is not defind..

غير متصل لأنه الإقتران غير معرّف عند هذه النقطة

2)

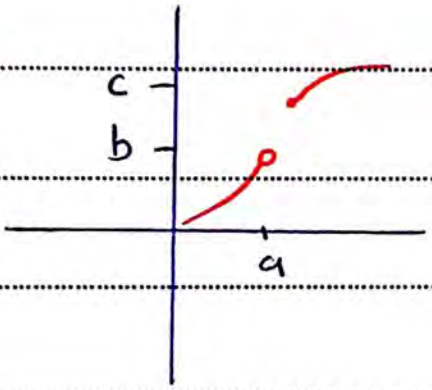


- not continous..

Because:

$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$..

3)

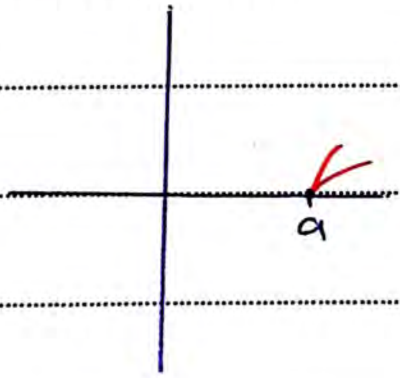


- not continous..

Because:

$\lim_{x \to a^+} \neq \lim_{x \to a^-}$

4)



- continous..

$\lim_{x \to a^+} = \lim_{x \to a^-} = f(a)$

* Discontinous points: نقاط الإنفصال

- هي النقاط التي يحصل عندها انفصال في الإقتران..

* important notes: " ملاحظات مهمة "

1) polynomials are always cont.

كثيرات الحدود دائمًا متصلة.

2) sin(x), cos(x) are always cont.

جا(س)، جتا(س)، متصلات دائمًا..

3) sec (x), csc (x), cot (x), tan (x), $\frac{f(x)}{g(x)}$:

are cont. on their domain.

قا(س)، قتا(س)، ظتا(س)، ظا(س)، $\frac{\text{ه(س)}}{\text{د(س)}}$: إقترانات

متصلة على مجالها، "أي متصلة عندما لا يكون مقامها صفر".

4) If f(x), g(x) both are cont. then f(x) + g(x), f(x). g(x) are cont. and $\frac{f(x)}{g(x)}$ cont. except g(x) = 0.

- إذا كان اقتران ه(س)، د(س) كلاهما متصل، فإن حاصل جمعهم وضربهم يكون إقتران متصل، أما حاصل قسمتهم يكون متصل بشرط ألا يكون المقسوم عليه يساوي صفر.

5) If $\lim_{x \to c} f(x)$ exist and $g(x)$ cont. at (c) then

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(\lim_{x \to c} f(x))$$

- بالنسبة للنقطة الخامسة: هاي النقطة بتشرح المثال رقم (2) في الأسئلة المتنوعة عن النهايات.

6) $f(x)$ cont. at c and $g(x)$ cont. at $f(c)$ then $g \circ f$ cont. at c.

Ex: مثال على النقطة السادسة:

$f(x) = \sqrt{x}$ / $g(x) = x^2$.

1) $f \circ g(-1) = f(g(-1)) = \sqrt{g(-1)} = 1$ cont.

2) $g \circ f(-1) = g(f(-1))^2 = (\sqrt{-1})^2$ = not cont.

Ex:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

study the continuity for $f(x)$ at $x = 1$?

⇒

خطوات الحل: | Sol:

١) نجد الصورة. | 1) $f(1) = 2$.

2) ندرس النهاية. | 2) $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1}$

$\lim_{x \to 1^+} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

$\therefore f(x) = \lim_{x \to 1} f(x)$, then $f(x)$ is cont.

Ex: find the value of k that makes the function cont. at $x=0$?!

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan kx}{2x} & , x \neq 0 \\ k^2 & , x=0 \end{cases}$$

* طريقة الحل: بما أنه الإقتران متصل يعني أنه النهاية تساوي الصورة

Sol:

$\lim_{x \to 0} \frac{\tan kx}{2x} = k^2$

$\frac{k}{2} = k^2$

$2k^2 - k = 0 \quad / \quad k(2k-1) = 0$

$k=0 \;,\; k=\frac{1}{2}$

Ex: Find the value of the constant A that makes the function cont. at $x=2$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+Ax+6 , & x \geq 2 \\ \dfrac{x^2-4}{2-x} , & x<2 \end{cases}$$

Sol:

1) $f(2) = 4+2A+6$

$= 10+2A$

2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{2-x}$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\overset{-1}{\cancel{(x-2)}}(x+2)}{\cancel{2-x}}$

$= -4$

$-4 = 10+2A$

$-14 = 2A$

$\boxed{A = -7}$

طريقة الحل:

١) نخرج الصورة من عند المساواة.

2) نأخذ النهاية من اليمين ومن اليسار.

اليمين ($x<2$) اليسار ($x \geq 2$)

وطبعًا بتطلع متساوية لأنه الاقتران متصل، ٣) نساوي النهاية بالصورة.

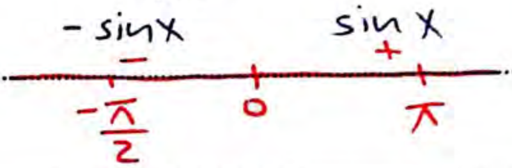
4) $f(x) = \begin{cases} \frac{|\sin x|}{x} & , x \neq 0 \\ 2 & , x = 0 \end{cases}$

- سؤال فيه نكشة صغيرة اللي هي، إعادة تعريف المطلق، منها يحتوي دائري.

Sol: بعد إعادة التعريف

الحل الطريقة

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$



$\lim_{x \to 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1$

$\therefore$ f(x) is not cont. at x=0.

* Study the continouity of a function on an interval.

- دراسة الإتصال على فترة.

- f(x) is cont. on [a, b]:

- طريقة الحل:

1) f cont. (a, b).

2) $f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

3) $f(b) = \lim_{x \to b^-} f(x)$

1) نرى إذا كان الإقتران متصل على الفترة بدون الأطراف.

2) يجب أن تساوي صورة الطرف الأول النهاية عنده من اليمين. 3) يجب أن تساوي صورة الطرف الثاني النهاية عنده من اليسار

Ex:

Does $f(x) = \frac{1}{x}$ cont. on $[0,1]$!?

Sol:

$\boxed{1}$ ✓ الشرط الأول متحقق

$\boxed{2}$ $f(0) \overset{?}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ ✗

$\therefore$ not cont. on $[0,1]$.

* Discontinuity points:

Ex: find the discontinuity points for the following functions:

1) $f(x) = \sqrt{x-1}$ — طبعًا لازم ما يكون في تحت

- Discont. points is $(-\infty, 1)$. الجذر سالب، مشان هيك

- cont. points is $[1, \infty)$. النقاط إلي يكون عندها

تحت الجذر سالب هي نقاط إنفصال، أما إلي يكون عندها

موجب هي نقاط إتصال.

→

2) $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

- في هذا الإقتران لازم ما يكون المقام صفر، وبنفس الوقت لازم ما يكون تحت الجذر سالب، مشان هيك بنضيف (1) لنقاط الإنفصال

- Dis.cont. $(-\infty, 1]$

- cont. $(1, \infty)$

3) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$

- في هذا الإقتران بدي أعمل دمج للمجاليين بحيث إنه بالبسط ما يكون تحت الجذر سالب وبالمقام ما يكون تحت الجذر سالب وما يكون المقام صفر

cont. : $[0, 1)$

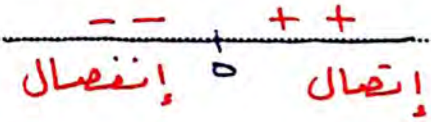
Dis.cont. : $R - [0, 1)$

⇓

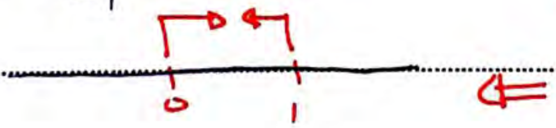
الأعداد الحقيقية كاملة هي نقاط إنفصال ماعدا نقاط الإتصال.

- طريقة الحل:

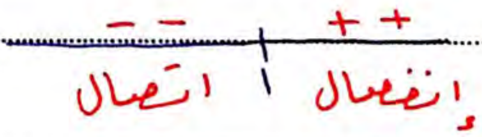
البسط



البسط والمقام مع بعض



المقام



4) sec x

- بما أن $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ فنقاط الإنفصال تكون عندما يكون $(\cos x = 0)$ وهي عند $(\dots, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Discont. $(\pm(2n+1)\frac{\pi}{2})$

$n = 0, 1, 2$

5) csc x

- بما أن $\csc = \frac{1}{\sin x}$ فنقاط الإنفصال تكون عندما يكون $(\sin x = 0)$ وهي عند $(\dots, 2\pi, \pi)$

Discont. $(\pm n\pi)$

$n = 0, 1, 2, \dots$

6) $f(x) = \frac{1}{\cos x - 1}$

- نقاط الإنفصال تكون عندما يكون المقام صفر، أي عندما تكون قيمة $(\cos x = 1)$ وهي عند $(\dots, 6\pi, 4\pi, 2\pi, 0)$

Discont. $(\pm n\pi)$

$n = 0, 2, 4, 6, 8, \dots$

7) $f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}$

- نقاط الإنفصال تكون عندما تتساوى $(\cos x , \sin x)$ أي عند $(\frac{\pi}{4})$

Discont. $(\frac{\pi}{4})$

إذا كان الإقتران متصل عند ذيل النهاية تستطيع إدخال النهاية إلى الإقتران.

8) $\lim\limits_{x\to 1} \sin\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$

$\Rightarrow \sin\left[\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)\right]$

$\Rightarrow \sin\left[\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right)\right]$

$\Rightarrow \sin\left[\lim\limits_{x\to 1}(x+1)\right]$

$\Rightarrow \sin[2]$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right), \qquad on \ \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \ln\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right]$

$\Rightarrow \ln\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right]$

$\Rightarrow \ln[1] = 0$

10) $\lim\limits_{x\to 4} |10-3x^2|$

$\Rightarrow \left|\lim\limits_{x\to 4} 10-3x^2\right| = |-38| = 38$

- Find where f(x) continuous :-

1) $f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$

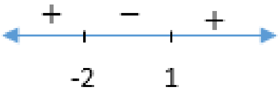
ما داخل اللوغاريتم يجب ان يكون اكبر من صفر ليكون الإقتران متصل.

$x^2 + x - 2 = 0$

نساوي الإقتران بصفر ونجد اين تكون موجبة واين سالبة (نبحث في الإشارة).

$(x - 1)(x + 2) = 0$

$x = 1, -2$



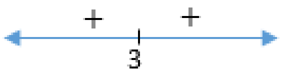
بما ان ما داخل الإقتران اكبر من صفر نأخذ الفترات الموجبة ولا ندخل الأطراف لأن الأطراف تساوي المعادلة بصفر.

$\Rightarrow f(x)\ continous\ on\ (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

2) $f(x) = \ln\left(\frac{|x - 3|}{x - 1}\right)$

نبحث في اشارة البسط واشارة المقام

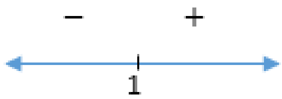
$|x - 3| \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 3, & x > 3 \\ 3 - x, & x \le 3 \end{cases}$



الفترة $\Rightarrow\ (-\infty, \infty)/\{3\}$

لاحظ ان اقتران القيمة المطلقة متصل ولا يحوي قيم سالبة . لذا نأخذ الفترة كاملة عدا عند 3 لأنها تساوي صفر.

$x - 1$



$\Rightarrow\ (1, \infty)$

نأخذ الفترة الموجبة فقط.

$\Rightarrow f(x)\ continous\ on\ (1,3) \cup (3, \infty)$

نأخذ المشترك بين الفترتين وتكون هي نقاط إتصال الإقتران الأصلي

3) $f(x) = \sqrt{|\ln(x^2 + 4x + 4)|}$

$x^2 + 4x + 4 \Rightarrow (x + 2)^2$

لاحظ ان الإقتران تربيع أي جميع قيمه موجب. نأخذ جميع القيم عدا 2- لأنها تساوي صفر.

$\Rightarrow f(x)\ continous\ on\ (-\infty, \infty)/\{-2\}$

* chapter (3): The Derivative

sec (3.1 - 3.5)

Def$_1$: $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

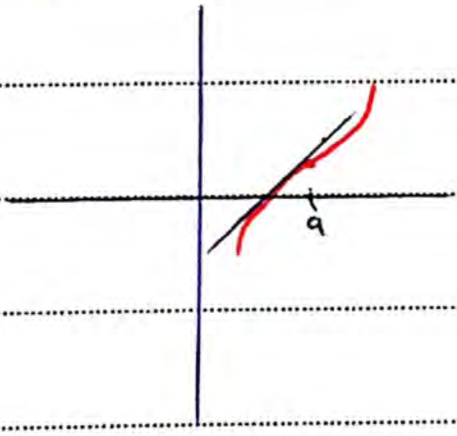
Def$_2$: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Note:

* $f'(a)$ is the slope of the tangent line of $f(x)$ at (a)

- تعتبر المشتقة هي ميل المماس عند نقطة تماس الإقتران.

Ex:



- في هذا المثال يكون ميل المماس الذي عند النقطة (a) هو المشتقة عند هذه النقطة :)

Ex: Find $f'(0)$ if $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ by Def $f(1)$

Sol:

$$F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x-1} - -1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x-1}+1}{x} * \frac{((\sqrt[3]{x-1})^2 - \sqrt{x-1} + 1)}{((\sqrt[3]{x-1})^2 - \sqrt{x-1} + 1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x-1+1}{x\,((\sqrt[3]{x-1})^2 - \sqrt{x-1} + 1)} = \frac{1}{3}$$

* The tangent line equation :-

معادلة الخط المستقيم.

$y - y_\circ = \text{slope}\ (x - x_\circ)$

\# $f(x)$ المشتقة عند ما نقطة التماس

نقطة التماس.

Ex: find the tangent line equation for

$f(x) = x^2 - 4$ at $(x_0 = 2)$

Sol:

$y - y_0 = \text{slope}\,(x - x_0)$

$$\text{slope} = f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4 - 0}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}\,(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = 4$$

$y_0 = f(2) = 0$

$y - 0 = 4(x-2) = y = 4x - 8$

* very important rules:

	f(x)	f'(x)
1)	a	مشتقة الثابت صفر (0)
2)	x^n	$n x^{n-1}$
3)	$af(x) \pm bg(x)$	$af'(x) \pm b\,g'(x)$
4)	$f(x) * g(x)$	$f(x) * g'(x) + g(x) * f'(x)$
		- مشتقة الضرب:
		الأول بمشتقة الثاني + الثاني بمشتقة الأول

$f(x)$	$f'(x)$
5) $\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)\, g(x) - g'(x)\, f(x)}{g^2(x)}$ مشتقة البسط * المقام - مشتقة المقام * البسط (المقام)^2
6) $\frac{1}{f(x)}$	$\frac{-1 * f'(x)}{(f(x))^2}$
7) $\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ - مشتقة الجذر: مشتقة ما داخل الجذر $2\sqrt{f(x)}$
8) $\sin x$	$\cos x$ * مشتقة الزاوية
9) $\cos x$	$-\sin x$ * مشتقة الزاوية
10) $\tan x$	$\sec^2 x$ * مشتقة الزاوية
11) $\sec x$	$\sec x \tan x$ * مشتقة الزاوية
12) $\csc x$	$-\csc x \cot x$ * مشتقة الزاوية
13) $\cot x$	$-\csc^2 x$ * مشتقة الزاوية

* how to write the Derivative:

$f'(X) = \frac{df}{dx} = \frac{d(f(X))}{dx}$ → المشتقة الأولى

$f''(X) = \frac{d^2x}{dx^2} = \frac{d^2(f(X))}{dx^2}$ → المشتقة الثانية

$f^{n}(X) = \frac{d^nf}{d^nx} = \frac{d^n(f(X))}{dx^n}$ → المشتقة النونية

* note: $\frac{df(x)}{dx}$ ⇒ هاي معناها إني بدي أشتق الإقتران بالنسبة للمتغير (X)

Ex: Find $f'(X)$:

1) $f(X) = 4 \Rightarrow f'(X) = 0$ القاعدة الأولى

2) $f(X) = X^3 \Rightarrow f'(X) = 3X^2$ القاعدة الثانية

3) $f(X) = 5X^4 + 3X^2 \Rightarrow 4*5X^3 + 3*2X^1$

$= 20X^3 + 6X$. القاعدة الثانية والثالثة

4) $f(X) = (X^2 - X)(3X-1)$

$f'(X) = (X^2 - X)*3 + (2X-1)(3X-1)$ القاعدة (4)

5) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$ القاعدة الخامسة

$f'(x) = \frac{(x^3+1) * 2x - (x^2-1) * (3x^2)}{(x^3+1)^2}$

6) $f(x) = \frac{1}{x^5}$

$f'(x) = \frac{-1 * 5x^4}{x^5} = \frac{-5}{x}$ القاعدة السادسة

7) $f(x) = \sqrt[2]{x^2 + x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x + 3x^2}{2\sqrt{x^2 + x^3}}$ القاعدة السابعة

8) $f(x) = x + \sin x$

$f'(x) = 1 + \cos x$.

9) $f(x) = x^2 + 3x + 1$

$f'(x) = 2x + 3$.

10) $f(x) = x \sin x$

$f'(x) = x \cos x + \sin x$.

11) $f(x) = \left(\frac{x}{\sin x + \sqrt{x}}\right)$

$$= f'(x) = \frac{(\sin x + \sqrt{x}) - x\left(\cos x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(\sin x + \sqrt{x})^2}$$

12) $f(x) = \frac{\sec x}{\tan x + 1}$

$$f'(x) = \frac{(\tan x + 1) * \sec x \tan x - \left(\overset{\overset{\sec^3 x}{\Uparrow}}{\sec x * \sec^2 x}\right)}{(\tan x + 1)^2}$$

13) $f(x) = \sqrt{\csc x}$

$$f'(x) = \frac{-\csc x \cot x}{2\sqrt{\csc x}}$$

14) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(x^2+1) + \cot x}\right) = \frac{-(2x - \csc^2 x)}{((x^2+1) + \cot x)^2}$$

* مشتقة القوس :

Find $\frac{d(f(x))^2}{dx}$?

$= 2f(x) * f'(x)$.

- يعني ننزل القوة ونضرب بنفس القوى المرفوع لـ $(n-1)$

وبعد ذلك نضرب بمشتقة ما داخل القوى.

Ex: Find $f'(x)$ for the following functions.

1) $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)^5$

$f'(x) = 5(x^3 + x^2 + x + 1)^4 * (3x^2 + 2x + 1)$

2) $f(x) = \sin^2 x$

$f'(x) = 2 \sin x * \cos x$.

3) $f(x) = \sin^2 2x \Rightarrow f'(x) = 2 \sin 2x * \cos 2x * 2$

4) $f(x) = \cos^3 x^2 \Rightarrow f'(x) = 3\cos^2 x^2 * -\sin x^2 * 2x$

توضيح // $\cos^2 x^2 = (\cos x^2)^2$ بنزل القوة ونكمل

5) $f(x) = \tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$f'(x) = \sec^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) * \frac{-1 * \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$

$= \sec^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) * \frac{-1}{2\sqrt{x} * x}$

6) $f(x) = \cos^3(\sec^2 x^2)$ — في هنا السؤال تكون زاوية

الـ cos هي $(\sec^2 x^2)$ — الحل :

$$f'(x) = 3\cos^2(\sec^2 x^2) * -\sin(\sec^2 x^2) * 2\sec x^2 \to$$

$$* (\sec x^2 * \tan x^2) * 2x$$

7) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{3/5}} \Rightarrow f(x) = (x^2+1)^{-3/5}$

$$f'(x) = \frac{-3}{5}(x^2+1)^{-8/5} * (2x)$$

8) $f(x) = x^2 \sin x$ / find $\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}$!?

- يقصد هنا // أخرج المشتقة الثانية وبعد ذلك عوض $(\frac{\pi}{2})$:)

$$f'(x) = x^2 \cos x + 2\sin x * x$$

$$f''(x) = -x^2 \sin x + 2x\cos x + 2x\cos x + 2\sin x$$

$$= -x^2 \sin x + 4x\cos x + 2\sin x.$$

الخطوة الثانية هي التعويض .. ولكن عند التعويض نحول $(\frac{\pi}{2})$ إلى رقم عند التعويض في الـ (x^2) وذلك لأنه الـ $(\frac{\pi}{2})$ بالنظام الدائري، أمّا عند تعويضها في $(\sin x)$ تبقى كما هي .. يتبع الحل ⇒

تابع سؤال (8)

طريقة التحويل من دائري إلى رقم

$\pi \Rightarrow \frac{22}{7}$

$\frac{\pi}{2} \Rightarrow x \Rightarrow x\pi = \frac{\pi}{2} * \frac{22}{7}$ / $x = \frac{22}{14}$

$f''(x) = f''(\frac{\pi}{2}) = -(\frac{22}{14})^2 * 1 + 0 + 2$.

" إنّ قمة الجبال تستحق الاجرام " .. :)

Sec (3.6) : " The chain Rule " :

يستخدم عند وجود إقترانات تعتمد على بعضها البعض..

Ex:

$f(y) = y^2 + 2y + 3 \quad , \quad y = x^3 + 2x$

- توضيح :

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r] \arrow[r, bend right, "\frac{df}{dy}"'] \arrow[rr, bend left, "df(x)"] & y \arrow[r] \arrow[r, bend right, "dy(x)"'] & x \end{tikzcd}$$

في هذا السؤال (f) تعتمد على (y) والـ(y)
تعتمد على (x) .. لذا عند الإشتقاق تكون القاعدة كالتالي :

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} * \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{df}{dx} = (2y + 2) * (3x^2 + 2)$$

$$= (2 * (x^3 + 2x) + 2) * (3x^2 + 2)$$

- بعد ذلك يعوض مكان كل (y) قيمتها ..

* Rules : * إشتقاق الإقترانات المركبة :

1) $\frac{d}{dx}(f \circ g(x)) = \frac{d}{dx} = (f(g(x)) = f'(g(x) * g'(x))$

2) $\frac{d}{dx}(f \circ g \circ h(x)) = \frac{d}{dx}(f(g(h(x)))$

$= f'(g(h(x))) * g'(h(x)) * h'(x)$

sec (3.7): implicit Differentiation الإشتقاق الضمني.

- خطوات الحل: نفرض أنه المطلوب هو إشتقاق بالنسبة لِ (x)

يعني المطلوب هو $\frac{dy}{dx}$.

1) نشتق كل (x) على حسب القواعد السابقة

2) نشتق كل (y) بـ ($\frac{dy}{dx}$).

3) نجعل ($\frac{dy}{dx}$) موضوع القانون (بجهة لحالها)

4) يعطيك العافية م:

Ex: Find $\frac{dy}{dx}$

1) $5 = x^2 + y$

Sol:

$$\underset{\text{مشتقة ثابت}}{\underset{\downarrow}{0}} = \underset{\text{إشتقاق عادي}}{\underset{\downarrow}{2x}} + \frac{dy}{dx} \rightarrow \text{مشتقة الـ (y)}$$

$\Rightarrow -2x = \frac{dy}{dx}$ ✓

2) $x^3 - 5xy + y^2 = -3$.

الحل :

مشتقة ضرب

$\nearrow$

$$3x^2 - (5x\frac{dy}{dx} + 5y) + 2y * \frac{dy}{dx} = 0$$

- بعد الإشتقاق بدي أخلي كل حد يحتوي على $\frac{dy}{dx}$ مع بعض .

$$\Rightarrow 3x^2 - 5x\frac{dy}{dx} - 5y + 2y * \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 5y = 5x\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx}$$

- نأخذ عامل مشترك

$$\Rightarrow 3x^2 - 5y = (5x - 2y)\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 5y}{5x - 2y}$$

3) Find $\frac{dy}{dx} \Big|$ If you know that $x=1$, $y=\frac{\pi}{4}$.

$x^2 = \sin(xy)$

Sol:

$2x = \cos(xy) * \left(x * \frac{dy}{dx} + y\right)$

$\frac{2x}{\cos(xy)} = x \frac{dy}{dx} + y$

$\frac{2x}{\cos(xy)} - y = x \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2x}{\cos(xy)} - y}{x}$

$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1, y=\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{2 * 1}{\cos(\frac{\pi}{4})} - \frac{22}{28}}{1} = 2\sqrt{2} - \frac{22}{28}$

- تحويل $\frac{\pi}{4}$ إلى رقم:

$\pi \rightarrow \frac{22}{7}$

$\frac{\pi}{4} \rightarrow x$

$x = \frac{22}{28}$

4) $Z^2 + K^3 = 6$

A) Find $\frac{dK}{dZ}$?!

Sol: $2Z + 3K^2 \cdot \frac{dK}{dZ} = 0.$

$$\frac{dK}{dZ} = \frac{-2Z}{3K^2}$$

B) Find $\frac{dZ}{dK}$?!

Sol:

$$2Z * \frac{dZ}{dK} + 3K^2 = 0$$

$$\frac{dZ}{dK} = \frac{-3K^2}{2Z}.$$

~ إشتقاق اللوغاريتم والأسي ~

- Rules :

1) $\frac{d}{dx}\left(b^{f(x)}\right) = f'(x) * b^{f(x)} * \ln b.$ لا تنسوها

لأن الحل بدونها غلط. ه

2) $\frac{d}{dx}\left(e^{f(x)}\right) = f'(x) * e^{f(x)}.$

3) $\frac{d}{dx}\left(\log_b f(x)\right) = \frac{f'(x)}{f(x) * \underline{\ln b}} \rightarrow$ لا تنسوها

4) $\frac{d}{dx}\left(\ln f(x)\right) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$

Ex : Find $\frac{dy}{dx}$.

1) $\frac{d}{dx}\left(\log_2\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(\log_2 \sin x - \log_2 x\right)$

$$= \left(\frac{\cos x}{\sin x * \ln 2} - \frac{1}{x * \ln 2}\right)$$

- استخدمنا خصائص اللوغاريتم للتسهيل.

2) $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{x^2 \sin x}{x+x^2}\right)\right)$

Sol:

$$\frac{d}{dx}\left(\ln x^2 \sin x - \ln\left(x+x^2\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(2\ln x + \ln \sin x - \ln\left(x+x^2\right)\right)$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1+2x}{x+x^2}$$

- فصلنا الإقتران باستخدام خواص اللوغاريتم للتسهيل

3) $\frac{d}{dx}\left(\log_2 (\sin x)^{\sec x}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sec x \log_2 \sin x\right)$$

$$= \sec x * \frac{\cos x}{\sin x * \ln 2} + \log_2 \sin x * \sec x * \tan x.$$

4) $\frac{d}{dx}\left(\ln 2^{e^x}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(e^x \ln 2\right) = e^x \ln 2$$

5) $\frac{d}{dx}\left(\log\left(\frac{\ln x}{\sec x}\right)\right)$

Sol:

$$\frac{d}{dx}(\log(\ln x) - \log \sec x)$$

$$= \frac{\frac{1}{x}}{\ln x \ \ln 10} - \frac{\sec x \tan x}{\sec x \ \ln 10}$$

$$= \frac{1}{x \ln x \ln 10} - \frac{\tan x}{\ln 10}.$$

6) $\frac{d}{dx}\left(2^{\ln x}\right) = 2^{\ln x} * \frac{1}{x} \ln 2$

7) $\frac{d}{dx}\left(2^{\log_2 x}\right)$

Sol: $\frac{d}{dx}(x) = 1.$

8) $\frac{d}{dx}\left(e^{\sin x}\right) = e^{\sin x} * \cos x.$

9) $\frac{d}{dx}\left(e^{x^2} \ 2^x\right)$

Sol: $e^{x^2} * 2^x \ln 2 + 2^x * 2x * e^{x^2}.$

10) $\frac{d}{dx}(xe^x) = xe^x + e^x$.

11) $\frac{d^{87}}{dx^{87}}(xe^x)$

Sol: $f'(x) = x e^x + e^x$

$f''(x) = xe^x + e^x + e^x = xe^x + 2e^x$.

$\Rightarrow \frac{d^{87}}{dx^{87}} = xe^x + 87e^x$.

12) $\frac{d}{dx}\left(\log_2\left(\frac{3^x \sin x}{4^x \; e^{\cos x}}\right)\right)$

$\frac{d}{dx}(x\log_2 3 + \log_2 \sin x - x\log_2 4 - \cos x \log_2 e)$

$= \log_2 3 + \frac{\cos x}{\sin x * \ln 2} - \log_2 4 + \sin x \log_2 e$.

13) $\frac{d}{dx}\left(\left(\cos x\right)^{\sin x}\right)$

- طريقة الحل لهذا النوع من الأسئلة:
- لا يمكن استخدام قواعد اللوغاريتم
لأن الاقتران لا يحتوي على لوغاريتم
فلتسهيل الحل ندخل اللوغاريتم

Sol:

1) $y = (\cos x)^{\sin x}.$

2) $\ln y = \ln (\cos x)^{\sin x}$

3) $\ln y = \sin x \ \ln \cos x.$

4) $\frac{y'}{y} = \sin x * \frac{-\sin x}{\cos x} + \ln \cos x * \cos x$

$$\acute{y} = y * \left(\frac{-\sin^2 x}{\cos x} + \ln \cos x * \cos x \right)$$

$$= (\cos x)^{\sin x} * \left(\frac{-\sin^2 x}{\cos x} + \ln (\cos x)^{\cos x} \right.$$

- ملاحظة: إذا أردنا حل الأسئلة التي مثل السؤال السابق ندخل (ln)

14) $\frac{d}{dx}\left(x^{x} \right)$

Sol:

$$y = x^{x}$$

$$\ln y = x \ln x$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = x * \frac{1}{x} + \ln x.$$

$$= (1 + \ln x) * x^{x}.$$

15) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^x \sin x \; e^x}{2^x \cot x \,(x^2+1)}\right)$

- إقترانه معقد وإشتقاقه زنخ ، وما فيه (log) فبندخله (log) :)

$$y = \frac{x^x \sin x \; e^x}{2^x \cot x \,(x^2+1)}$$

$$\ln y = x \ln x + \ln \sin x + x \ln e - x \ln 2 - \ln \cot x - \ln (x^2+1).$$

$$\frac{y'}{y} = x \frac{1}{x} + \ln x + \frac{\cos x}{\sin x} + 1 - \ln 2 + \frac{\csc^2 x}{\cot x} - \frac{2x}{x^2+1}.$$

$$y' = y * \left(1 + \ln x + \cot x + 1 - \ln 2 + \frac{\csc^2 x}{\cot x} - \frac{2x}{x^2+1}\right).$$

16) $\frac{d}{dx}\left(\log_{\cos x} \sin x\right)$

Sol:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln \sin x}{\ln \cos x}\right) = \frac{\ln \cos x * \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} \;\ln \sin x}{(\ln \cos x)^2}$$

$$= \cot x \; \ln \cos x + \tan x \; \ln \sin x$$

17) $\frac{d}{dx}\left(\frac{(\sin x)^{x}}{\sqrt[x]{\sec x}}\right)$ سؤال قوي =D

Sol : $y = \frac{(\sin x)^{x}}{\sqrt[x]{\sec x}}$

$\ln y = x \ln \sin x - \ln(\sec x)^{\frac{1}{x}}$

$\ln y = x \ln \sin x - \frac{\ln(\sec x)}{x}$

$\frac{y'}{y} = x * \frac{\cos x}{\sin x} + \ln \sin x - \frac{(x * \frac{\sec x \tan x}{\sec x} - (\ln(\sec x)))}{x^{2}}$

$y' = y * (x \cot x + \ln \sin x - \frac{x \tan x + (\ln(\sec x))}{x^{2}}$

* Inverse Diffrantiation:-

F (X)	F` (X)
$\sin^{-1} X$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ * مشتقة الزاوية
$\cos^{-1} X$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ * مشتقة الزاوية
$\tan^{-1} X$	$\frac{1}{x^2+1}$ * مشتقة الزاوية
$\cot^{-1} X$	$\frac{-1}{x^2+1}$ * مشتقة الزاوية

→

$F(x)$	$F'(x)$
$\sec^{-1} x$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$ * مشتقة الزاوية
$\csc^{-1} x$	$\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$ * مشتقة الزاوية

Ex:

1) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x^3)$

Sol: $\frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}} * 3x^2 = \frac{1}{\sqrt{1-x^6}} * 3x^2$

2) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}(e^x))$

Sol:

$$\frac{1}{\lvert e^x\rvert\sqrt{e^{2x}-1}} e^x = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$$

- شلنا القيمة المطلقة عن e^x لأنها دائمًا موجبة

3) $\frac{d}{dx}((\sin x)^{-1})$

Sol: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right) =$

$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

- انتبه: $(\sin x)^{-1} \neq \sin^{-1} x$

4) $\frac{d}{dx}\left(2^{\cos^{-1}x^{2}}\right)$

Sol:

$$\frac{-1}{\sqrt{1-x^{4}}} * 2x * 2^{\cos^{-1}x^{2}} * \ln 2.$$

5) $\frac{d}{dx}\left(\sin x^{\cos^{-1}x}\right)$

تذكر: حينما يكون الاقتران صعب اشتقاقه وما فيه لوغاريتم نقوم بإدخال "لوغاريتم" ..

Sol:

$$y = \sin x^{\cos^{-1}x}$$

$$\ln y = \cos^{-1}x \ \ln \sin x$$

$$\frac{y'}{y} = \cos^{-1}x * \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^{2}}} * \ln \sin x$$

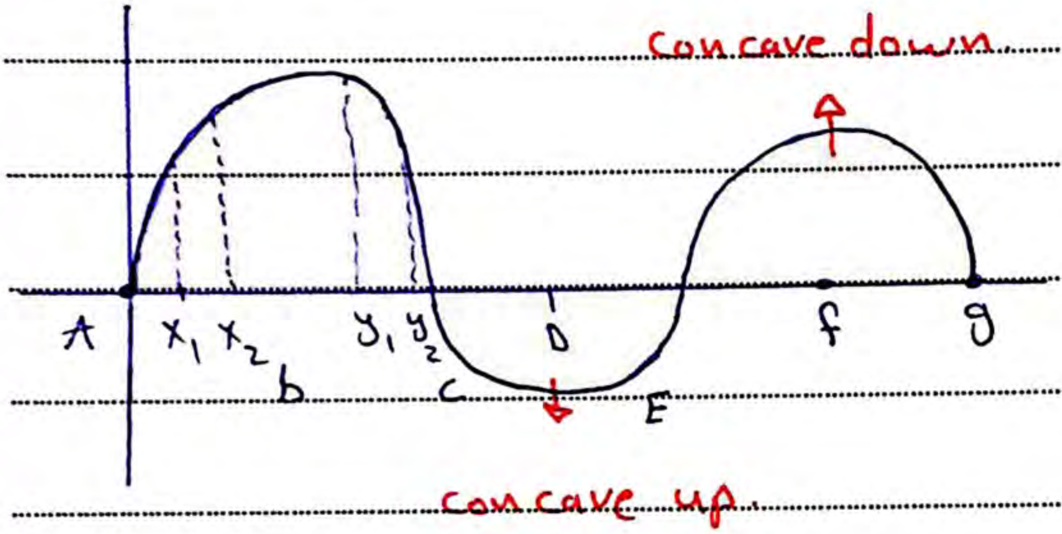
$$y' = \sin x^{\cos^{-1}x}\left(\cos^{-1}x * \cot x - \frac{\ln \sin x}{\sqrt{1-x^{2}}}\right)$$

ch. 4 : The Derivative integrating and application.

* تطبيقات التفاضل

sec (4.1) : Increasing, Decreasing and concavity.

* توضيح :



$$\left.\begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ f(x_1) < f(x_2) \end{array}\right] \Rightarrow \text{Increasing.}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_2 > y_1 \\ f(y_2) < f(y_1) \end{array}\right] \Rightarrow \text{Decreasing.}$$

* طريقة إخراج التزايد والتناقص والتقعر:

[1] $f(x)$ is Increasing if $f'(x) > 0$.

يكون الإقتران متزايد إذا كانت إشارة مشتقته موجبة.

[2] $f(x)$ is Decreasing if $f'(x) < 0$.

يكون الإقتران متناقص إذا كانت إشارة مشتقته سالبة.

[3] $f(x)$ is concave up if $f''(x) > 0$.

يكون الإقتران مقعر للأعلى إذا كانت إشارة المشتقة الثانية موجبة.

[4] $f(x)$ is concave down if $f''(x) < 0$.

يكون الإقتران مقعر للأسفل إذا كانت إشارة المشتقة الثانية له سالبة.

Ex:

* Find The intervals at wich the fun.

is: 1) increasing. 2) decreasing.

3) concave up. 4) concave down.

5) Inflection point → نقطة التحول

1) $F(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

→ Follow (:

* طريقة الحل:

لإخراج فترات التزايد والتناقص نقوم باشتقاق الاقتران وإخراج أصفار المقام، وفحص الإشارة حول الأصفار، ولإخراج فترات التقعر نقوم بإخراج المشتقة الثانية وإيجاد أصفارها وبحث الإشارة عندها،،،

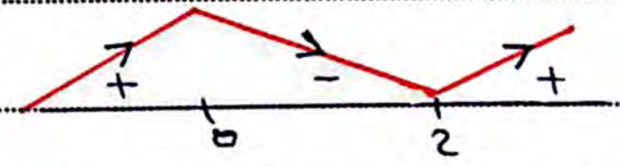
- ملاحظة: فحص الإشارة يتم عن طريق المشتقة عن طريق أخذ نقطة قبل الأصفار التي أخرجناها ونقطة بعد الأصفار وتعويضها بالمشتقة. :)

Sol:

$f'(x) = 3x^2 - 6x$ → * نساوي المشتقة بالصفر

$3x^2 - 6x = 0$ لإخراج أصفارها..

$3x(x-2)=0$ / $x=0$, $x=2$



1) increasing $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

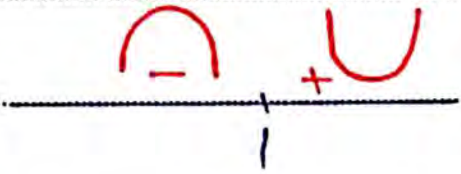
2) decreasing $[0, 2]$

→ Follow..

$f''(x) = 6x-6$

- ملاحظة: حدود الفترات في التزايد والتناقص تكون مغلقة، أما في التقعر تكون مفتوحة،

$6x - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$



- ملاحظة: inflection point هي النقطة التي تتغير عندها تقعر الإقتران.

3) concave up $(1, \infty)$

4) concave down $(-\infty, 1)$

5) inflection point $(1, f(1))$.

2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+x+1}$

Sol:

$f(x) = (x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{2}{3}} * (2x+1)$

$\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{2}{3}} * (2x+1) = 0$

$\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)^{\frac{2}{3}}} = 0 \Rightarrow 2x+1=0$

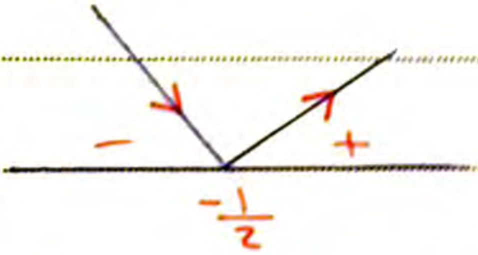
المقام ← ليس له أصفار

$\boxed{x = \frac{-1}{2}}$

→ Follow..

1) Increasing $[-\frac{1}{2}, \infty)$

2) Decreasing $(-\infty, -\frac{1}{2}]$



$$f''(x) = \frac{2}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} * \frac{2}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{2}{3}-1}(2x+1)^2$$

عامل مشترك

$$\frac{2}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{2}{3}}\left[1-\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-1} * (2x+1)^2 = 0\right.$$

$$\frac{2}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{2}{3}} = 0$$

ليس لها حل ..

$$1-\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-1} * (2x+1)^2 = 0$$

$$1 = \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-1} * (2x+1)^2$$

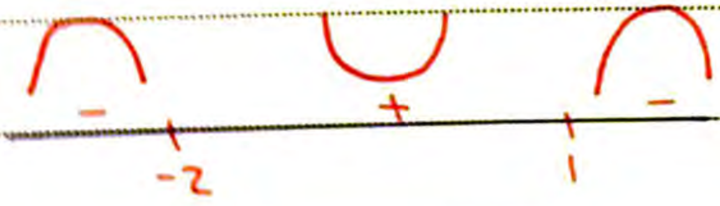
$$1 = \frac{(2x+1)^2}{3(x^2+x+1)}$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3x + 3 = 4x^2 + 9x + 1$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = -2 \quad | \quad x = 1$$



sec(4.2): Relative extrema, first and second derivation.

- القيم القصوى المحلية عن طريق فحص المشتقة الأولى والثانية

* انتبه مشان ما تخربط : في هذا الموضوع إحنا بدنا نطلع قيم قصوى محلية من خلال المشتقة الأولى أو الثانية، أما اللي قبل كنا نطلع فترات التزايد والتناقص.

* Relative extrema
  - Relative maxima قصوى محلية عظمى
  - Relative minima قصوى محلية صغرى

* The Relative extrema occures at the critical point.

- تكون القيم القصوى عند النقاط الحرجة.

* critical points :
  - أطراف فترات مغلقة
  - $f'(x)=0$
  - $f'(x)$ d.n.e

* يوجد شرط يجب جدًّا التأكد منه، ألا وهو وقوع النقاط الحرجة ضمن المجال الأصلي للإقتران، وإذا كانت غير موجودة ضمن المجال لا تكون نقاط حرجة

→

Ex: مثال توضيحي :)

$F(x) = \frac{1}{x}$

$F'(x) = \frac{-1}{x^2}$

$f'(x)$ d.n.e at $x=0$, but $(x=0) \notin$ dom.

So it is not critical point.

- في هذا المثال تكون المشتقة غير موجودة عندما تكون قيمة الـ $(x=0)$ ، والصفر ليست موجودة في مجال الإقتران لذلك لا تعتبر نقطة حرجة.

Ex:

what is the critical points For $F(x) = \sin x$.

Sol:

$F'(x) = \cos x$

$\cos x = 0$

$x = 2n + 1(\frac{\pi}{2})$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

* To find extrema we will use one of the following test.

- لإيجاد القيم القصوى نستخدم أحد الإختبارات التالية :

* First order derivation test   فحص المشتقة الأولى

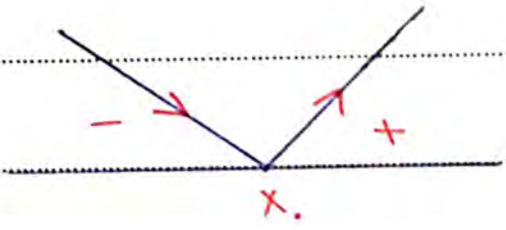
* طريقة الحل :

1) Find the critical values (points)   - إيجاد النقاط الحرجة

2) study the sign of f(x) about the critical values.

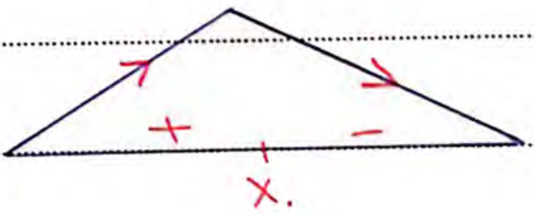
- فحص الإشارة حولها .

case (1) :



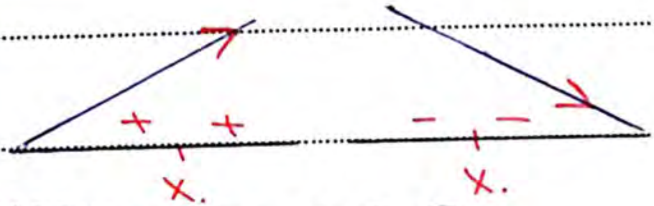
R. minima at X. = f (X.).

case (2) :



R. maxima at X. = f (X.)

case (3) :



No R. extrema.

Ex: locate the relative extrema.

$f(x) = 3x^{5/3} - 15x^{2/3}$

Sol:

critical point $\begin{cases} \rightarrow f'(x) = 0 \\ \rightarrow f'(x) \text{ d.n.e.} \end{cases}$

$f'(x) = 5x^{2/3} - 10x^{-\frac{1}{3}}$

$5x^{2/3} - 10x^{-1/3} = 0$

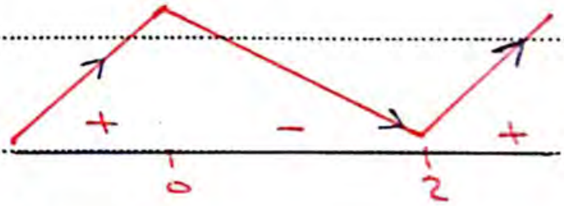
$5x^{2/3+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} - 10x^{-1/3} = 0$ ضفنا $(\frac{1}{3})$ وطرحنا $(\frac{1}{3})$ حتى

$5x^{-\frac{1}{3}}(x-2) = 0$ نأخذ عامل مشترك..

$x=0$ / $x=2$.

$\therefore$ $f'(x)=0$ at $x=2$. / $f'(x)$ d.n.e at $x=0$.

* The critical points are $\{0, 2\}$.



at $x=0$ $f(x)$ has R. max $= f(0) = 0$.

at $x=2$ $f(x)$ has R. min $= f(2) = -7.2$

- If $x_0 \in$ Dom $f(x)$ and $f'(x_0)=0$ then $(x_0, f(x_0))$ is called stationary point.

* إذا كانت (x_0) تنتمي لمجال الإقتران وكانت المشتقة عندها تساوي صفر نسميها نقطة مركزية ونستخدم لفحص المشتقة الثانية بالطريقة التالية.

Case (1) : $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ R. min.

case (2) : $f''(x_0) < 0 \rightarrow$ R. max.

Ex:

$f(x) = x^4 - 2x^2$, use the second derivation test to find R. extrema.'!?

1) $f'(x) = 4x^3 - 4x$ ١) نخرج النقاط المركزية.

$4x^3 - 4x = 0$ ٢) نخرج المشتقة الثانية

$4x(x^2 - 1) = 0$ ونستخدمها لفحص النقطة.

$x = 1$ / $x = -1$ / $x = 0$

→

2) $f''(x) = 12x^2 - 4$

$f''(0) = -4 \rightarrow$ R. max : $-4 < 0$

$f''(1) = 8 \rightarrow$ R. min : $8 > 0$

$f''(-1) = 8 \rightarrow$ R. min : $8 > 0$

* The study of Deffrantiation: دراسة الإشتقاق

* عند اشتقاق الإقترانات المتشعبة يجب علينا دراسة الإقتران إذا كان قابل للإشتقاق أو لا عند نقاط التحول.

* حتى يكون الإقتران قابل للإشتقاق:

1) يجب أن يكون الإقتران متصل عند النقطة
↓

$$\lim_{x \to A^+} = \lim_{x \to A^-} = F(A).$$

2) المشتقة من اليمين تساوي المشتقة من اليسار

* إذا لم يتحقق الشرطين السابقين يكون الإقتران غير قابل للإشتقاق عند تلك النقطة

→ Follow.. (:

Ex :

1) $F(X) = \begin{cases} x^3 , & -1 \leq x \leq 1 \\ 3x-2 , & 1 < x < 2 \\ x^3 , & x = 2 \\ \sqrt{x+4} , & x > 2 \end{cases}$

* طريقة الحل :

1) نشتق جميع قواعد الإقتران ونلغي المساواة.

2) المشتقة عند أطراف الفترة غير موجودة.

3) نبحث الإتصال والإشتقاق عند نقاط التحول.

Sol:

1) $F'(x) = \begin{cases} 3x^2 , & -1 < x < 1 \\ 3 , & 1 < x < 2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}} , & x > 2 \end{cases}$

2) $F'(x)$ d.n.e at $x = -1$ / $x = 2$

→

3) continuity

$x = 1$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$

$f(1) = 1$

at $x = 2$

$\lim_{x \to 2^+} \sqrt{x+4} = \sqrt{6}$

$\lim_{x \to 2^-} 3x - 2 = 4$

غير متصل عند $x=2$

لذلك لا يمكن اشتقاقه

Deffrantiation

$f'_{+}(1) = 3$

$f'_{-}(1) = 3$

* إذاً كل اقتران يمكن اشتقاقه هو اقتران متصل وليس كل اقتران متصل يمكن اشتقاقه..

2) $F(X)=|X^2-4|$, Find $F'(2)$ ؟!

الحل:

* في هذا السؤال نعيد تعريف المطلق وبعدها نخرج المشتقة كما في السؤال السابق...

$$X^2-4=0$$

$$(X-2)(X+2)=0$$

$$X=2 \quad / \quad X=-2$$

* خطوات إعادة التعريف:

نخرج أصفار الاقتران وبعدها ندرس إشارة الاقتران حول هذه الأصفار عن طريق تعويض أرقام ونضرب الاقتران بسالب عند الفترات السالبة وبموجب عند الفترات الموجبة.

x^2-4 $4-x^2$ x^2-4

$+$ -2 $-$ 2 $+$

$$F(X)=\begin{cases} x^2-4, & X\leq -2 \\ 4-x^2, & -2\leq X\leq 2 \\ x^2-4, & X\geq 2 \end{cases}$$

$$F'(X)=\begin{cases} 2X, & X<-2 \\ -2X, & -2<X<2 \\ 2X, & X<2 \end{cases}$$

* الخطوة الثانية بعد إعادة التعريف يكتب الاقتران على شكل اقتران متشعب ونبدأ بدراسة الاشتقاق عند الـ (2) التي هي نقطة تحول.

→

continuity

$x = 2$

$\rightarrow \lim_{x \to 2^+} x^2 - 4 = 0$

$\rightarrow \lim_{x \to 2^-} 4 - x^2 = 0$

$\rightarrow f(2) = 0$

Deffrantiation

$f'_+(2) = 4$

$f'_-(2) = -4$

$\therefore f'(x)$ d.n.e at $x = 2$.

- : أسئلة منوعة

1) $F(x) = \frac{g(x^2)}{h(3x)}$, $F(2)=1$, $h'(6) = 4$,

$g'(4) = 6$, $h(6) = 2$.

Find $F'(2)$!? * سؤال سنوات.

الحل:

$$F'(x) = \frac{(h(3x)) * g'(x^2) * 2x - g(x^2) * h'(3x) * 3}{h(3x)^2}$$

* توضيح:

بعد الاشتقاق نقوم بالتعويض وبما أنه كل المعطيات معنا ما عدا (g(4)) ، بنقوم بإخراجها من السؤال.

$$1 = \frac{g(4)}{h(6)} \rightarrow g(4) = 2.$$

والآن نعوض ونخرج الحل:

$$F'(2) = \frac{2*6*2*2-4*2*3}{(2)^2} = 6.$$

2) Find the Discontinuity points for

$$F(X) = \frac{\cot X}{\sqrt{x^2-4}-1},$$

- أسئلة سنوات :)

a) $\pm\sqrt{3}, \pm n\pi, (-2,2).$

b) $\pm\sqrt{3}, \pm\left(\frac{2n+1}{2n}\right)\pi, [-2, 2]$

c) $\pm\sqrt{5}, \pm n\pi, (-2, 2)$

D) $\pm\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi, (-2, 2)$

Sol:

1) $F(X) = \frac{\cos X}{\sin X\,(\sqrt{x^2-4}-1)}$

* انظر أول خطوة ، وبالذات إلى المقام.

* طريقة الحل :

نريد النقاط التي تجعل :

الجواب : $C: \pm\sqrt{5}, \pm n\pi, (-2, 2)$

1) $0 = \sin X$

2) $0 = \sqrt{x^2-4}-1$

يتبع توضيح الحل ..

3) الأرقام التي تجعل داخل الجذر سالب لذلك نختار (C).

1) $\pm\sqrt{5}$: يجعل $\sqrt{x^2-4}-1$ يساوي صفر

$\Rightarrow \sqrt{x^2-4}-1=0$

$\sqrt{x^2-4}=1$ / $x^2-4=1$ / $x^2=5$

$x=\pm\sqrt{5}$

2) $\pm n\pi$: - هي القيم التي تجعل $0=\sin x$

3) $(-2,2)$ - القيم من (-2) إلى (2) تجعل داخل الجذر سالب.

انتبه فترة مفتوحة ، يعني أنه $-2,2$ ليست ضمن الفترة.

3) Find F'(X) if you know that:

1) $F(X)=\sqrt[5]{\sin^3 x}$

Sol:

$F(X)=(\sin X)^{3/5}$

$F'(X)=3/5(\sin X)^{-2/5} * \cos X.$

2) $F(X) = \sqrt[6]{x}$.

Sol:

$$F(X) = x^{\frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow F'(X) = \frac{1}{6} * x^{\frac{-5}{6}} * 1.$$

3) $F(X) = \sqrt[x]{2}$

Sol:

$$F(X) = 2^{\frac{1}{x}}$$

$$F'(X) = \frac{-1}{x^2} * 2^{\frac{1}{x}} * \ln 2.$$

4) $F(X) = \frac{g(\cos X)}{h(\sec X)}$

$$F'(X) = \frac{h(\sec X) * g'(\cos X) * -\sin X - g(\cos X) * h'(\sec X) * \sec X.}{(h(\sec X))^2}$$

5) $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)+2}{2x-8}=5, \qquad Find\ f'(4)$

بما أن المقام صفر ، فالبسط صفر ومنه نستخدم قاعدة لوبيتال.

$$\lim_{x\to 4}\frac{f'(x)}{2}=5 \Rightarrow \frac{f'(4)}{2}=5$$

$$\Rightarrow f'(4)=5*2=10$$

Chapter (5): Integration التكامل

- في هذه الوحدة من المادة سنتناول موضوع التكامل اللّي هو لعبتكم الصغيرة، بس مع هيك بدنا نشرحه من أوّل بطريقة مفهومة - إن شاء الله - للجميع..!

للتذكير فقط: التكامل هو عكس الإشتقاق، يعني إعادة الإقتران البدائي من الإقتران المطلوب تكامله..

- إشارة التكامل: ($\int$)

Sec (5.2): The Indefinite Integral.

Rules: التكامل المحدود "النوع الأول من التكامل":

1) $\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx.$

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \boxed{c} \Rightarrow$ ثابت التكامل ويُضاف بعد أيّ تكامل محدود. ($n \neq -1$)

3) $\int f(x) \pm g(x)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$

يمكن توزيع التكامل على الجمع والطرح، أمّا على القسمة والضرب فلا. =)

4) $\int (ax+b)^{n}\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a * (n+1)} + c$

- قوس بداخله اقتران كثير حدود من الدرجة الأولى ، مرفوع لقوة يمكن تكامله كما سبق.

ملاحظة : (dx) تعني أننا نكامل بالنسبة لِ (x) وأن أي رمز غير (x) يُعامل معاملة الثابت.

5) $\int (ax+b)^{-1}\,dx = \frac{\ln|ax+b|}{a}$,

6) $\int a \; dx = ax + c$ تكامل الثابت

7) $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

8) $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

9) $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$.

10) $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$

11) $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x$.

12) $\csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$

13) $\int \sin (ax+b)\, dx = \frac{-\cos x \,(ax+b)\, dx}{a}$

* متطابقات مثلثية مهمة (حفظهم) :

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

3) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

4) $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

5) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

6) $2 \sin x \cos x = \sin 2x$

7) $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$

- ملاحظة:
(5، 6، 7) هم نفس
المتطابقة، فإذا
حفظت (5) وعرفت
تطبقها، مافي داعي تحفظ (6، 7)!.

8) $\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B))$

- يعني (جتا * جتا) بعطوني (جتا مع جتا) ⇐ ($\overrightarrow{++-}$)
أول زائد للجتا الأولى بنجمع فيها الزوايا، ثاني زائد بين الجتا
الأولى والثانية، والناقص يعني بنطرح الزوايا، والترتيب
مهم.

9) $\sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))$

تذكر: (جا * جا) بيعطيني (جتا مع جتا) بس بينهم $(\overrightarrow{- - +})$

10) $\cos A \sin A = \frac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B))$

تذكر: (جا * جتا) بيعطيني (جا مع جا) وبينهم $(\overrightarrow{+ + -})$

انتبه

المتطابقات (5،6،7،8،9،10)

تستخدم عند وجود ضرب بين الإقترانات cos، sin.

Ex:

1) $\int 2x^2 \, dx = \frac{2x^3}{3} + c$

2) $\int x^{-2} \, dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{x} + c$ القاعدة الثانية

3) $\int (x^2 + 2x + 1) \, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x + c$ القاعدة 2+3

4) $\int (x+1)^{100} \, dx = \frac{(x+1)^{101}}{101} + c$ القاعدة (4)

5) $\int (5x+1)^2 \, dx = \frac{(5x+1)^3}{5 \times 3} + c = \frac{(5x+1)^3}{15} + c$

6) $\int \frac{5}{\sqrt{x}} \, dx$

$\int \frac{5}{x^{1/2}} \, dx = \int 5x^{-1/2} \, dx = \frac{5x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c$

$= 10x^{1/2} + c$

7) $\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x}}\,dx$

Sol:

$\int x^{-1/2}(2x^2-3x)\,dx$

$\int 2x^{2-\frac{1}{2}} - 3x^{1-1/2}\,dx$

$= \int 2x^{3/2} - 3x^{1/2}\,dx$

$= \frac{2x^{5/2}}{\frac{5}{2}} - \frac{3x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{4x^{5/2}}{5} - 2x^{3/2} + c$

- تذكر قواعد الأسس

- ملاحظة مهمة:

الأسئلة التي تحتوي على كسور نقوم بتبسيطها كما فعلنا في السؤال السابق وهذا السؤال وإذا كان الكسر لا يبسط، نلجأ إلى طرق أخرى سنتعرف عليها لاحقًا - بإذن الله -!

8) $\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx$

Sol:

$\int x^{-2}(x^3+5x^2-4)\,dx = \int (x+5-4x^{-2})\,dx$

$= \frac{x^2}{2} + 5x + 4x^{-1} + c$

9) $\int (x+2)(4-2x)\,dx$

Sol: $\int (4x-2x^2+8-4x)\,dx$

$= \int -2x^2+8\,dx = \frac{-2x^2}{3} + 8x + c$

10) $\int x^3 \sqrt{x}\ dx$

Sol:

$\int x^3 \cdot x^{1/2} = \int x^{7/2}\ dx = \frac{x^{9/2}}{9/2} + c$

$= \frac{2x^{9/2}}{9} + c$

11) $\int x + \sin x\ dx$

$= \frac{x^2}{2} - \cos x + c$

12) $\int \sec^2 x\ dx$

$= \tan x + c$

13) $\int -\csc x \cot x\ dx$

$= -(-\csc x + c) = \csc x + c$

14) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\ dx$

Sol:

$\int \csc^2 x\ dx = -\cot x + c$

$\longrightarrow$ (=

15) $\int \sin(6x+7)\,dx$

$= \frac{-\cos(6x+7)}{6} + c.$

16) $\int \sec(6-2x)\tan(6-2x)\,dx$

$= \frac{\sec(6-2x)}{-2} + C$

17) $\int 4x^3 - \sin 6x + \cos 6x \; dx$

$= x^4 + \frac{\cos 6x}{6} + \frac{\sin 6x}{6} + c$

18) $\int \sin 4x - \cos 6x + 2\sec 3x \tan 3x \, dx$

$= \frac{-\cos 4x}{4} - \frac{\sin 6x}{6} + \frac{2\sec 3x}{3} + c.$

19) $\int \cos^2 5x \, dx$

$\Rightarrow \int \frac{1}{2}(1 + \cos 10x)\,dx = \frac{1}{2}(x + \frac{\sin 10x}{10}) + c.$

$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 10x}{20} + c$

"متطابقة (2)"

20) $\int \sin^2 \left(\frac{3x}{2}\right) dx$

$\Rightarrow \int \frac{1}{2}\left(1 - \cos(3x)\right) dx$ متطابقة (3) :-

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\cos(3x)}{3}\right) + c$

21) $\int \frac{1}{\sec^2 9x} dx$

Sol:

$\int \cos^2 9x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 18x)\, dx$

$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 18x}{18x}\right) + c$

22) $\int (\cos 2x)^4 dx$

$\Rightarrow \int (\cos^2 2x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right)^2 dx$

$= \frac{1}{4} \int (1 + \cos 4x)^2 dx \rightarrow$ نربع القوس ونخرج ناتجة :.

$= \frac{1}{4} \int 1 + 2\cos 4x + \cos^2 4x\, dx$ متطابقة (2) مرة أخرى ..

$= \frac{1}{4} \int \left(1 + 2\cos 4x + \frac{1}{2}(1 + \cos 8x)\right) dx$

$= \frac{1}{4}\left(x + \frac{2\sin 4x}{4} + \frac{x}{2} + \frac{\sin 8x}{16}\right) + c$

23) $\int \frac{1}{1-\cos 6x}\,dx$ تذكر متطابقة (3) ⇐

Sol: نفسها بس ادكاها

$$\int \frac{1}{2 * \sin^2 3x}\,dx = \int \frac{\csc^2 3x}{2}\,dx$$

$$= \frac{-\cot 3x}{3 * 2} + c$$

24) $\int \frac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x}\,dx$

Sol: تذكر متطابقة (2, 3).

$$\int \frac{2\sin^2 2x}{2\cos^2 2x}\,dx = \int \tan^2 x\,dx$$

$$= \int \sec^2 x - 1\,dx = \tan x - x + c$$

25) $\int (\sec x + \tan x)^2\,dx$. - نوزع التربيع ونكامل

$$\Rightarrow \int \sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x\,dx$$

نستخدم المتطابقة (4) نفك $\tan^2 x$.

$$\Rightarrow \int \sec^2 x + 2\sec x \tan x + \sec^2 x - 1\,dx$$

$$\Rightarrow \int 2\sec^2 x + 2\sec x \tan x - 1\,dx$$

$$\Rightarrow 2\tan x + 2\sec x - x + c.$$

26) $\int (\cos 4x - \sin 4x)^2 \, dx$

Sol:

$\int \cos^2 4x - 2\sin 4x \cos 4x + \sin^2 4x \, dx$

$= \int \cos^2 4x + \sin^2 4x - 2\sin 4x \cos 4x \, dx$

$= \int 1 - \sin 8x \, dx = x + \frac{\cos 8x}{8}$.

27) $\int \cos 3x \; ... \; \sin 4x \, dx$.   على متطابقة (١٥) .

$\Rightarrow \int \frac{1}{2} (\sin 7x + \sin -x) \, dx$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \int (\sin 7x + \sin -x) \, dx$

$= \frac{1}{2} * \left(\frac{-\cos 7x}{7} + \cos x \right) + c$

28) $\int \sin 6x \, \sin 4x \, dx$ على متطابقة (٩)

$\Rightarrow \int \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 10x) \, dx$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 10x}{10} \right) + c$

29) $\int \cos 3x \cos 7x \, dx$ على متطابقة (8)

$\Rightarrow \int \frac{1}{2} (\cos 10x + \cos -4x) \, dx$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 10x}{10} - \frac{\sin -4x}{4} \right) + c$

30) $\int \sin 4x \sin 2x \sin x \, dx$ توضيح :

$\Rightarrow \int \sin 4x * \frac{1}{2} (\cos x - \cos 3x) \, dx$ نأخذ ($\sin 2x$ و $\sin x$)

$\Rightarrow \frac{1}{2} \int \cos x \sin 4x - \cos 3x \sin 4x \, dx$ .. ونحلهم على المتطابقة

(9) بعد ذلك ندخل ($\sin 4x$)

على ناتج المتطابقة ونحل على

المتطابقة رقم (10)

$\Rightarrow \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} (\sin 5x + \sin 3x) - \frac{1}{2} (\sin 7x + \sin x) \, dx$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \int \sin 5x + \sin 3x - \sin 7x - \sin x \, dx$

$= \frac{1}{4} * \left(\frac{-\cos 5x}{5} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 7x}{7} + \cos x \right) + c$

31) $\int 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \, dx$

$\Rightarrow \int \sin x \, dx \Rightarrow - \cos x + c$

32) $\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos^2 x} dx$

$\Rightarrow \int \frac{\sin^3 x}{\sin^2 x} dx = \int \sin x \, dx$

$= -\cos x + c$

33) $\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x} dx$

$\Rightarrow \int \frac{1}{\tan^2 x} + \frac{\tan^2 x}{\tan^2 x} dx$

$= \int \cot^2 x + 1 \, dx = \int \csc^2 x - 1 + 1 \, dx$

$= \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$

34) $\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx$

توضيح:

نقوم بتبسيط المقام عن طريق المتطابقة ونوزع الناتج.

$= \int \frac{1-\sin^2 x}{(\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2})^2}$

$= \int \frac{1-\sin^2 x}{(\frac{\sin x}{2})^2} dx = 4\int \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} dx$

$\Rightarrow$

$= 4 \int \csc^2 x - 1 \, dx$

$= 4(-\cot x - x) + c.$

* قاعدة مهمة جداً :

القاعدة السادسة من قواعد التكامل :

مشتقة الاقتران

$$6)\ \int \frac{\overset{\uparrow}{f'(x)}}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + c$$

→ الاقتران

Ex :

$1)\ \int \tan x \, dx$

$\Rightarrow \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln |\cos x| + c$

$2)\ \int \cot x \, dx$

$\Rightarrow \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + c$

$3)\ \int \frac{4x^3 + 1}{x^4 + 5} \, dx$

يلاحظ أنه المشتقة

الاقتران

$\Rightarrow \ln |x^4 + 5| + c$

- في هذا السؤال: ٤) $\int \frac{9x^2}{5-6x^3}\,dx$

مشتقة المقام هي $(-12x^2)$

أما القيمة الموجودة في البسط $\Rightarrow \frac{-2}{-2} * \int \frac{9x^2}{5-6x^3}\,dx$

هي $(9x^2)$ لذلك نجعل $= \frac{-1}{2} \int \frac{-12x^2}{5-6x^3}\,dx$

البسط مشتقة للاقتران من

خلال ضرب التكامل بـ $= \frac{-1}{2} \ln|5-6x^3| + c$

$(\frac{-2}{-2})$.

* تلخيص للقاعدة السادسة :

لما يكون عندي مشتقة المقام موجودة في البسط أو بقدر أربطها وأخلي مشتقة المقام موجودة في البسط بنستخدم القاعدة السادسة.

* Intigration by substitution .

- التكامل بالتعويض.

* التكامل بالتعويض يستخدم عند وجود الحالات الثلاث التالية :

١) إقتران دائري زاويته ليست خطية $\qquad$ 1) $\int \sin(\sim\sim\sim)\,dx$

(مش درجة أولى). $\qquad$ 2) $\int e^{(\sim\sim)}\,dx$

٢) إقتران أسي قوته ليست خطية $\qquad$ 3) $\int (\sim\sim\sim)^n\,dx$

٣) إقتران غير خطي مرفوع لِ قوة

(قوس بداخله اقتران ليس من الدرجة الأولى وليس مربع كامل)

* بشكل عام : طريقة الحل :

$$\int f'(x)\,(g\,(f(x))\,dx$$

$$z = f(x)$$

$$\frac{dz}{dx} = f'(x)$$

$$dx = \frac{dz}{F'(x)}$$

$$\Rightarrow \int f'(x)\,g(z)\,\frac{dz}{f'(x)} = \int g(z)\,dz$$

توضيح:
في هذا السؤال القوس يحتوي على $(3 + 5\cos^2 x)$ وهو ليس اقتران خطي..

Ex:

1) $\int \sin x \, (3 + 5\cos^2 x)^2 \, dx$

Sol:

$z = \cos x$

$\frac{dz}{dx} = \sin x$

$\Rightarrow dx = \frac{dz}{-\sin x}$

$\Rightarrow \int \sin x (3 - 5z^2)^2 \frac{dz}{-\sin x}$

$\Rightarrow \int -(3 - 5z^2)^2 \, dz$

$= \int -(9 - 30z^2 + 25z^4) \, dz$

$= -(9z - \frac{30z^3}{3} + \frac{25z^5}{5}) + c$

$= (-9z - 10z^3 + 5z^5) + c$

$= -9\cos x - 10\cos^3 x + 5\cos^5 x + c$

* نعيد (z) إلى قيمتها الأصلية

2) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ - نستخدم التعويض لأن الزاوية في داخل الـ cos ليست خطية.

$z = \sqrt{x}$

$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ / $dx = 2\sqrt{x}\,dz$

$= \int \frac{\cos z\; 2dz\,\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \Rightarrow \int 2\cos z\,dz$

$= 2\sin z + c$

$= 2\sin\sqrt{x} + c.$

3) $\int \sin x\sqrt{1+\cos x}\,dx$

$\Rightarrow z = 1+\cos x$

$\frac{dz}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{dz}{-\sin x}$

$= \int \sin x\sqrt{z} * \frac{dz}{-\sin x}$

$= \int -\sqrt{z}\,dz$

$= \frac{-z^{3/2}}{3/2} = \frac{-2z^{3/2}}{3} = \frac{-2(1+\cos x)^{3/2}}{3} + c$

4) $\int 2x^2 e^{x^3} dx$

* توضيح: في هنا السؤال قوة الإقتران الأسي ليست أولى ،

Sol:

$z = x^3 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 3x^2$

$dx = \frac{dz}{3x^2}$

$= \int e x^2 e^z \frac{dz}{3x^2} = \frac{2}{3} \int e^z dz$

$= \frac{2}{3} e^z + c = \frac{2}{3} e^{x^3} + c$

5) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

Sol:

$z = \ln x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$

$dz = x \, dz$

$= \int \frac{\cos z}{x} dz \, x = \int \cos z \, dz$

$= \sin z + c$

6) $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$

توضيح: (e^x+1) هي قوس مرفوعة لقوة إللي هي (-1)

Sol:

$\int e^{2x}(e^x+1)^{-1} dx$

$z = e^x+1 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{dz}{e^x}$.

$= \int e^{2x} z^{-1} \frac{dz}{e^x} = \int e^x z^{-1} dz$

$= \int (z-1) z^{-1} dz = \int 1 - z^{-1} dz$

$= z - \ln z + c = e^x+1 - \ln(e^x+1) + c$

7) $e^x \sec^2 e^x dx$

توضيح: الزاوية داخل الإقتران الدائري ليست أولى.

Sol:

$z = e^x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = e^x$

$dx = \frac{dz}{e^x}$

$= \int e^x \sec^2 z \frac{dz}{e^x} dx$

$= \int \sec^2 z \, dz = \tan z + c$

$= \tan e^x + c$.

8) $\int 4x \sin^2 x^2 \, dx$

sol:

$z = x^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dz}{2x}$.

$\Rightarrow \int 4x \sin^2 z \, \frac{dz}{2x} = \int 2 \sin^2 z \, dz$

$= \int 2 * \frac{1}{2} (1 - \cos 2z) \, dz$

$= z - \frac{\sin 2z}{2} + c$

$= x^2 - \frac{\sin 2x^2}{2} + c.$

9) $\int \cos x \sec^2 (\sin x) \, dx$ الزاوية ليست درجة أولى.

Sol:

$z = \sin x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{dz}{\cos x}$

$\int \cos \sec^2 (z) \, \frac{dz}{\cos x}$

$= \int \sec^2 z \, dz = \tan z + c$.

$= \tan (\sin x) + c$.

١٥) $\int 2x^3 (1-x^2)^7 \, dx$

Sol:

$z = 1 - x^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -2x \Rightarrow dx = \frac{dz}{-2x}$

$\Rightarrow \int 2x^3 (z)^7 \frac{dz}{-2x}$

$= \int -x^2 (z)^7 dz = \int -(1-z) z^7 dz$

$= \int (z-1) z^7 dz = \int z^8 - z^7 dz$

$= \frac{z^9}{9} - \frac{z^8}{8} + c = \frac{(1-x^2)^9}{9} - \frac{(1-x^2)^8}{8} + c.$

=) اللهمّ ارزقنا العلامات العاليـة *

Sec (5.5): The Definite Integral

- التكامل المحدود: هو نفس طريقة حل التكامل غير المحدود لكن الفرق إنه بنعوض بالأخر بالأرقام.

* Let $f(x) = \int f(x)\,dx$

Then $\int_a^b F(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

* properties:

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2) $\int_a^b c\,dx = c\,(b-a)$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

4) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

يمكن تجزئة التكامل المحدود إلى أكثر من تكامل

5) $f(x) \geq g(x)$, For all x (a,b)

then $\int_a^b f(x) \geq \int_a^b g(x)$

6) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

Ex:

1) $\int_0^{\pi} \sin x - \cos x \; dx$

Sol:

$-\cos x - \sin x \; dx \Big]_0^{\pi}$ طريقة التعويض:

$\Downarrow$

$\Rightarrow (1-0) - (-1-0)$

تعويض العلوي — تعويض السفلي

$= 1 - -1 = \boxed{2}$ تعويض الرقم العلوي - تعويض الرقم السفلي.

$\Rightarrow$ ابتسم و تابع :)

2) If you know that: $\int_{1}^{10} f(x)\,dx = 15$,

$\int_{1}^{2} f(x)\,dx = 7$, then find $\int_{2}^{10} f(x)\,dx$!?

Sol: - نتذكر خاصية رقم (٦) من خاصية

الإقتران / لحدود.

$$\int_{1}^{10} f(x)dx = \int_{1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{10} f(x)\,dx.$$

$$15 = 7 + \int_{2}^{10} f(x)\,dx.$$

$$\Rightarrow \int_{2}^{10} f(x)\,dx = 8.$$

3) If you know that: $\int_{1}^{8} 2f(x)\,dx = 40$,

$\int_{1}^{3} f(x)\,dx = 4$, $\int_{7}^{5} 3f(x)\,dx = -6$,

$\int_{7}^{8} f(x)\,dx = 1$. // Find $\int_{3}^{5} f(x)\,dx$?!

Sol: طريقة الحل:

١) نرتب التكامل مثل الخاصية رقم (٦).

$$\int_{1}^{8} f(x)dx = \int_{1}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{5} f(x)dx + \int_{5}^{7} f(x)dx + \int_{7}^{8} f(x)dx.$$

$$\int_{1}^{8} 2\,f(x)\,dx = 40 \Rightarrow \int_{1}^{8} f(x) = 20. \Rightarrow$$

2) نجد قيمة التكامل كالتالي : ⇐

$\int_1^3 f(x) = 4$ / $\int_3^5 f(x)\,dx = ?!$

$\int_7^5 3f(x)\,dx = -6 \Rightarrow \int_5^7 = 2.$

$\int_7^8 f(x)\,dx = 1.$

3) نعوض مكان كل تكامل قيمته :

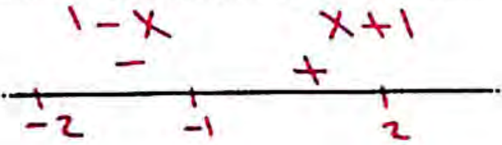
$20 = 4 + \int_3^5 f(x)\,dx + 2 + 1$

$\therefore \int_3^5 f(x)\,dx = 13.$

4) $\int_{-2}^{2} |x+1|\,dx \Rightarrow$ Find it !?

Sol: طريقة حل المعلم:

إعادة تعريفه إلى اقترانه متشعب، وذلك يتم حله على القاعدة رقم (4) من خلال تجزئته ..



$\therefore \int_{-2}^{2} |x+1|\,dx = \int_{-2}^{-1} 1-x\,dx + \int_{-1}^{2} x+1\,dx$

$= \boxed{8.5}$

5) If you know that $\int_{1}^{9} x\ F(x)\, dx = 8$

Find $\int_{1}^{81} f(\sqrt{x})\, dx$:

Sol: - طريقة الحل هو إنِّي بدي أستبدل

$z = \sqrt{x}$ ‏($\sqrt{x}$) الموجود داخل الإقتران

$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = dz\, 2\sqrt{x}$ باقتران آخر، ونستبدل معه.

حدود التكامل.. نستبدل حدود التكامل

$\Downarrow$

$\sqrt{81} = 9$

$\sqrt{1} = 1$

$\Rightarrow \int_{1}^{9} f(z)\ 2\sqrt{x}\ dz$ ‏* نعوض بدل (x) بدلالة (z)

$\Rightarrow \int_{1}^{9} 2\ z\ f(z)\ dz$ عن طريق الفرض

$\Rightarrow 2\int_{1}^{9} z\ f(z)\ dz$

$= 2 * 8 = 16$

sec (5.6): The fundamintal theorem of calculus:

part I:

* we say that $F(x)$ is an anti derivative of $f(x)$, If $F'(x) = f(x)$

$$\Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

part II:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = F(x)$$

Ex: Find:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt\right) = \frac{\sin x}{x}$$

part III :

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a}^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x)) * g'(x)\right.$$

Ex: If you know that $\frac{d}{dx}\left(\int_{1}^{kx}(t^{2}-1)\,dx\right)\Big|_{x=1}=0$

Find $\boxed{k}$?

Sol: مشتقة (kx).

$$((kx)^{2}-1) * \overset{\nearrow}{k} = 0$$

$$k=0,\quad k=1,\quad k=-1.$$

part IV :

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x)) * g'(x) - f(h(x)) * h'(x).\right.$$

Ex: Find $\frac{d}{dx}\left(\int_{\sin x}^{\cos x} \sin^{-1} t\,dt\right)$

$$= \sin^{-1}(\cos x) * -\sin x + \sin^{-1}(\sin x) * \cos x$$

$\Rightarrow$

Ex: part I : تذكر

1) Find $\frac{d}{dx}\left(\int_1^x \sin(t^2)\,dt\right)$

Sol:

$\sin x^2$

2) $\frac{d}{dx}\left(\int_x^0 t\sec t\,dt\right)$ part I : تذكر

Sol:

$= -x\sec x.$

3) Let $F(x)=\int_4^x \sqrt{t^2+9}\,dt.$

Find : A) $F(4)$ B) $F'(4)$ C) $F''(4).$

Sol:

A) $F(4)=\int_4^4 \sqrt{t^2+9}\,dt = 0.$

B) $F'(x)=\sqrt{x^2+9} = F'(4)= 5.$

C) $F''(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} \rightarrow F''(4) = \frac{4}{5}$

* أسئلة متنوعة من التكامل :

1) If you know that ($c \geq 0$) and :

$\int_{-1}^{5} c\,dx + \int_{1}^{c} (2x-5)\,dx = 16$, Find the value of c !?

Sol:

- لحل هذا السؤال، علينا حل التكامل.

$= c\,(5-(-1)) + x^2 - 5x \Big]_{1}^{c} = 16$.

$6c + \overset{\text{علوي}}{(c^2-5c)} - \overset{\text{سفلي}}{(1-5)} = 16$

$\Rightarrow 6c + c^2 - 5c + 4 = 16$

$c^2 + c - 12 = 0 \Rightarrow (c+4)(c-3) = 0$

$\boxed{c=-4}$ / $\boxed{c=3}$

2) $\int \frac{1}{x^2-2x+1}\,dx$

طريقة اولى :

- عند تحليل المقام نجد أنه $(x-1)(x-1)$ $= (x-1)^2$ ، لذلك نحصل على أنفسنا ولا نستخدم الكسور الجزئية ، ونرفع المقام

$= \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int (x-1)^{-2}\,dx$

$= \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c.$

3) If you know that $\int_1^3 f(x)\,dx = 4$. Find

$\int_0^2 f(x+1) - 2x + 4\,dx$ — طريقة الحل :

Sol: — تكون طريقة الحل من

$\int_0^2 f(\underline{x+1})\,dx + \int_0^2 -2x + 4\,dx$ — خلال فصل التكامل وإستبدال

$z = x+1$ — المركب الموجود في $f(\underline{\ \ })$

$\frac{dz}{dx} = 1 \Rightarrow dz = dx$ — وبعدها تغيير حدود التكامل .

$0 \to 1$

$2 \to 3$

$\Rightarrow \int_1^3 f(z)\,dz + \int_0^2 -2x+4\,dx$

$= 4 + (-4+8) - 0 = 4+4 = 8.$

4) $\int \sin\sqrt{4-2x}\,dx$ — بما أن الزاوية ليست درجة

$z = \sqrt{4-2x}$ — أولى ، نبدأ بالتعويض

$\frac{dz}{dx} = \frac{-2}{2\sqrt{4-2x}} \Rightarrow dx = dz * -\sqrt{4-2x}$

$\Rightarrow \int \sin z\,dz * -\underline{\sqrt{4-2x}} \to z$

$\Rightarrow \int -z\sin z\,dz =$ — تكامل أجزاء

5) $\int_1^2 \sqrt{x^4-x^2}\;dx$

$\int_1^2 |x|\sqrt{x^2-1}\;dx = \int_1^2 x\sqrt{x^2-1}\;dx$

$z = x^2-1$

$\frac{dz}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dz}{2x}$

$\Rightarrow \int x\sqrt{z}\;\frac{dz}{2x} = \frac{1}{2}\int \sqrt{z}\;dz$

$= \frac{1}{2} * \frac{(z)^{3/2}}{3/2} = \frac{z^{3/2}}{3} = \frac{(x^2-1)^{3/2}}{3}\Big]_1^2$.

6) $\int \ln(x^2+4)\;dx$ — طريقة الحل:

Sol: — تذكر تكاملات اللوغاريتم

$u = \ln(x^2+4) \Rightarrow du = \frac{2x}{x^2+4}$ — بما أنه مشتقة ليست

$dv = dx \Rightarrow v = x$ — معه نستخدم الاجزاء.

$\Rightarrow x\;\ln(x^2+4) - \int \frac{2x^2}{x^2+4}\;dx \Rightarrow$ — قسمة طويلة -

$$\begin{array}{r|l} & \;\;2 \\ x^2+4 & \;2x^2 \\ & -2x^2-8 \\ \hline & \;\;-8 \end{array}$$

$\Rightarrow x\ln(x^2+4) - \int 2\,dx - \int \frac{8}{x^2+4}\;dx \longrightarrow$

$$\Rightarrow x\ln(x^2+4) - \int 2\,dx + 8\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

لنحل هذا التكامل :

$$\Rightarrow 8\int \frac{1}{x^2+4} \Rightarrow$$ - نأخذ (4) عامل مشترك

$$\Rightarrow \frac{8}{4}\int \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+4}\,dx$$

$$z = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2dz = dx$$

$$\Rightarrow 2\int \frac{2}{z^2+1}\,dz \Rightarrow 4\tan^{-1}(z)$$

$$\Rightarrow 4\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

الحل النهائي $\Rightarrow x\ln(x^2+4) - 2x + 4\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c.$

7) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$

$$u = xe^x \Rightarrow du = xe^x + e^x$$

$$dv = \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{-1}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{-xe^x}{x+1} - \int \frac{-(xe^x+e^x)}{x+1}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{-xe^x}{x+1} + \int \frac{e^x(x+1)}{x+1}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{-xe^x}{x+1} + e^x + c$$

8) $\int \tan^{-1}x \, dx$

so: $u = \tan^{-1}x \rightarrow du = \frac{1}{x^2+1}$

$dv = dx \rightarrow v = x$

$\rightarrow x\tan^{-1}x - \int \frac{x}{x^2+1} dx$ $\rightarrow$ - لاحظ أن مشتقة اللي تحته فوقه (مشتقة المقام في البسط).

$\rightarrow x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c$

9) $\int \sin^{-1}x \, dx$.

$u = \sin^{-1}x \rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$dv = dx \rightarrow v = x$

$x\sin^{-1}x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \rightarrow$ استخدام التعويضات المثلثية

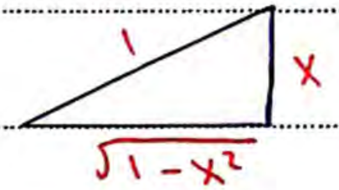
$\rightarrow \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$x = \sin\theta \;/\; dx = \cos\theta \, d\theta$

$\rightarrow \int \frac{\sin\theta \cos\theta \, d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} \rightarrow \int \frac{\sin\theta \cos\theta}{\cos\theta} d\theta$

$\rightarrow \int \sin\theta \, d\theta = -\cos\theta$

$= -\sqrt{1-x^2}$



$\rightarrow x\sin^{-1}x - (-\sqrt{1-x^2}) + c$.