المتميز

إعداد : مولود أوراغ
مفتش التربية الوطنية

بطاقات منهجية

في

الفيزياء

رقم
3

Hard_equation

حركات جسم صلب خاضع لقوى ثابتة

3 AS

Physique

BAC

دار الكتاب العلمية

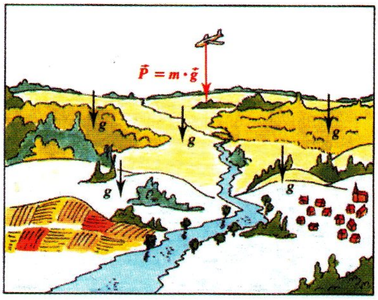
50 DA

حركات جسم صلب خاضع لقوى ثابتة

1. حقل الجاذبية المنتظم :

يخضع الجسم الموضوع بجوار الأرض إلى قوى الجذب العام و التي تكافئ إلى قوة وحيدة تسمى قوة الثقالة أو ثقل جسم، عبارة هذه القوة تعطى بالعلاقة :

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$$



حيث $\vec{g}$ هو حقل الجاذبية في نقطة تواجد الجسم.

يتميز شعاع حقل الجاذبية $\vec{g}$ بالخصائص التالية :

- الحامل : معين بشاقول المكان.
- الجهة : من الأعلى نحو الأسفل.
- القيمة : هي شدة حقل الجاذبية في المكان المعتبر.

ملاحظة : يتغير حقل الجاذبية بتغير المكان و بتغير الارتفاع، لكنه يمكن اعتبار أن المجال الذي لا تتعدى فيه الأبعاد رتبة بضعة كيلومترات أن حقل الجاذبية فيه متماثل في الحامل، الجهة و الشدة. فنقول عن الحقل أنه منتظم .

تبلغ شدة حقل الجاذبية بجوار سطح الأرض القيمة $9,8\ N.kg^{-1}$.

2. القوى المؤثرة على جسم صلب في حالة سقوط شاقولي:

يخضع الجسم الصلب الذي يسقط شاقوليا في مائع (هواء أو سائل) إلى تأثير القوى التالية :

- **ثقل الجسم :** قوة شاقولية ، موجهة نحو الأسفل، قيمتها ثابتة، تعطى عبارة هذه القوة بالعلاقة : $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$

- **دافعة أرخميدس :** هي القوة التي يؤثر بها المائع ذي الكتلة الحجمية ρ_0 على جسم حجمه V مغمور كليا في المائع.

تنمذج دافعة أرخميدس بقوة شاقولية موجهة نحو الأعلى ، قيمتها ثابتة تساوي إلى ثقل حجم المائع المزاح : $\vec{\pi} = -\rho_0 \cdot V \cdot \vec{g}$

- **قوة الاحتكاك الناتجة عن المائع:** هي قوة شاقولية، موجهة دائما في عكس جهة الحركة، قيمتها تتغير خلال الحركة لأنها تتعلق بسرعة الجسم.

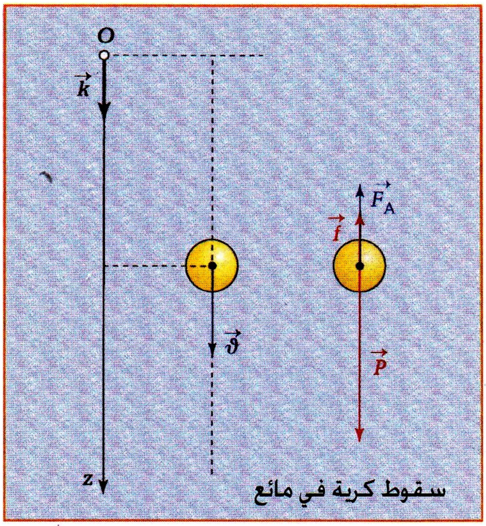
تتعلق عبارة هذه القوة بالمائع و بمجال السرعة.

فعندما تكون قيم السرعة ضعيفة (أقل من السنتيمتر في الثانية) ، تعطى عبارة قوة احتكاك المائع بالعلاقة : $\vec{f} = -k.\vec{v}$

و عندما تكون قيم السرعة متوسطة (تتراوح من بضعة سنتيمترات في الثانية إلى بضعة عشرات من الأمتار في الثانية)، تعطى عبارة قوة احتكاك المائع في هذه الحالة بالعلاقة:

$$\vec{f} = -k.v^2.\vec{u}$$

حيث $\vec{u}$ هو شعاع الوحدة الموجه في اتجاه الحركة.



سقوط كرية في مائع

3. السقوط الشاقولي بوجود الاحتكاك :

- حالة قوة احتكاك المائع من الشكل : $f = k.v$

بتطبيق قانون نيوتن الثاني على مركز عطالة الجسم الساقط في المائع، نكتب : $\vec{P}+\vec{\pi}+\vec{f} = m.\vec{a}$

بإسقاط هذه العلاقة على المحور Oz الشاقولي

و الموجه نحو الأسفل : $P - \pi - f = m.a$

$$m.g - \rho_0.V.g - k.v = m.a$$

و حيث أن : $a = \dfrac{dv}{dt}$ ، $m = \rho.V$ مع ρ هي الكتلة الحجمية للجسم.

و منه : $$g.\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right) - \frac{k}{m}.v = \frac{dv}{dt}$$

و هي المعادلة التفاضلية للحركة.

فإذا كانت مدة سقوط الجسم كافية، تبلغ السرعة قيمتها الحدية v_ℓ عندما يكون : $\dfrac{dv}{dt} = 0$

أي أن : $$v_\ell = m.\frac{g}{k}.\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

المعادلة التفاضلية الموجودة هي من نفس نمط المعادلات التفاضلية التي صادفناها في دراسة ثنائيات القطب (R,C) و (R,L)، فهي تقبل حلا من الشكل :

$$v = v_\ell.\left(1 - e^{-\frac{k}{m}.t}\right)$$

و هنا أيضا يمكننا تعريف ثابت الزمن τ، حيث نضع : $\tau = \dfrac{m}{k}$

فتصبح بذلك عبارة السرعة من الشكل :

$$v = v_\ell\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

و بالمثل فإن المدة $t_{1/2}$ هي المدة الزمنية التي من أجلها تبلغ السرعة القيمة $\dfrac{v_\ell}{2}$.

بالتعويض في عبارة السرعة، نجد : $t_{1/2}=\tau.ln2$

و باشتقاق عبارة السرعة بالنسبة للزمن، نحصل على عبارة التسارع :

$$a = \frac{v_\ell}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} = g.\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right).e^{-\frac{k}{m}.t}$$

يتعلق التسارع بالكتلتين الحجميتين للجسم و للمائع.

ففي اللحظة $t = 0$ ، فإن : $a_0 = g.\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)$

و تنتهي قيمة التسارع نحو الصفر عندما يصبح t كبيرا أمام τ.

- حالة قوة احتكاك المائع من الشكل : $f = k.v^2$

في هذه الحالة تكون عبارة المعادلة التفاضلية للحركة هي : $m.g - \rho_0.V.g - k.v^2 = m\frac{dv}{dt}$

أي أن : $g.\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right) - \frac{k}{m}.v^2 = \frac{dv}{dt}$

و يتم بلوغ السرعة الحدية v_ℓ عندما يكون : $\frac{dv}{dt} = 0$

إذن : $$v_\ell = \sqrt{\frac{m.g.\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)}{g}}$$

4. دراسة حركة السقوط الشاقولي الحر :

السقوط الحر لا يحدث إلا في الفراغ، لكنه من أجل أجسام كثيفة (كرة معدنية مثلا) و ارتفاعات سقوط ضعيفة من رتبة المتر، يمكننا أن نقبل أن تأثيري قوة احتكاك الهواء و دافعة أرخميدس مهملان.

و بذلك تكون القوة الوحيدة المؤثرة على الجسم هي ثقله $\vec{P}$.

بتطبيق قانون نيوتن الثاني على الجملة (الجسم) في المرجع الأرضي الذي نعتبره غاليليا، نكتب : $\vec{P} = m.\vec{a} \Rightarrow m.\vec{g} = m.\vec{a}$

أي أن : $\vec{a} = \vec{g}$

بالإسقاط على المحور الشاقولي Oz الموجه نحو الأسفل، نجد : $a=g$

نستنتج من ذلك أن تسارع الجسم لا يتعلق بكتلته.

و بما أن التسارع ثابت، فإن الحركة المستقيمة لمركز عطالة الجسم هي متسارعة بانتظام.

- السقوط الحر بدون سرعة ابتدائية :

لدينا من العلاقة الأخيرة : $a= \frac{dv}{dt} = g$

و بإجراء التكامل على هذه المعادلة، نحصل على المعادلة الزمنية للسرعة : $v = g.t + v(0)$

لكن، نعلن أن : $v(0)=0$ ، إذن : $v=g.t$

و بإجراء التكامل مرة أخرى على العبارة الأخيرة، نحصل على المعادلة الزمنية للحركة :

$$z = \frac{1}{2}g.t^2 + z(0)$$

لكن : $z(0)=0$ على اعتبار أن الجسم انطلق من المبدأ O في اللحظة $t=0$.

و منه :

$$z=\frac{1}{2}g.t^2$$

- السقوط الحر بسرعة ابتدائية نحو الأسفل :

المحور Oz هو دائما موجه نحو الأسفل.

طبقا لهذا التوجيه فإن الشروط الابتدائية تكون على النحو التالي :

$$z(0)=0 \quad و \quad v_z(0)=v_0>0$$

إذن : $v_z=g.t+v_0$. و كذلك : $z=\frac{1}{2}g.t^2+v_0.t$

السرعة و ارتفاع السقوط يتزايدان خلال الحركة.

- السقوط الحر بسرعة ابتدائية نحو الأعلى :

مع الاحتفاظ بنفس التوجيه للمحور Oz، تتغير الشروط الابتدائية المتعلقة بالسرعة و تكون على النحو التالي :

$$z(0)=0 \quad ، \quad v_z(0)=-v_0<0$$

إذن : $v_z=g.t-v_0$

و كذلك : $z=\frac{1}{2}g.t^2-v_0.t$

تتناقص سرعة الجسم أثناء الصعود حتى تنعدم عندما يبلغ الجسم ارتفاعه الأعظمي.

فإذا كانت t_1 هي اللحظة الموافقة لانعدام السرعة، نكتب : $g.t_1-v_0=0 \Rightarrow t_1=\frac{v_0}{g}$

و بذلك يكون الارتفاع الأعظمي هو : $z_{\max}=\frac{1}{2}g.\left(\frac{v_0}{g}\right)^2-v_0.\left(\frac{v_0}{g}\right)$

و منه : $z_{\max}=-\frac{v_0^2}{2g}$

ملاحظة : عندما يبلغ الجسم الذروة (النقطة الموافقة للارتفاع الأعظمي) ينزل الجسم و يمر من جديد بنقطة المبدأ O بالسرعة $v_z=v_0$ بدلا من $v_z=-v_0$ أثناء الصعود.

5 - حركة قذيفة في حقل الجاذبية الأرضية :

- المعادلات الزمنية :

ندرس حركة قذيفة (كرة حديدية مثلا) في المرجع الأرضي الذي نعتبره غاليليا.

قذفت الكرة بسرعة $\vec{v_0}$ يصنع حاملها زاوية α مع المستوي الأفقي.

تخضع الكرة، بعد قذفها، إلى قوة وحيدة هي ثقلها $\vec{P}$ و ذلك بإهمال الاحتكاكات الناتجة عن الهواء.

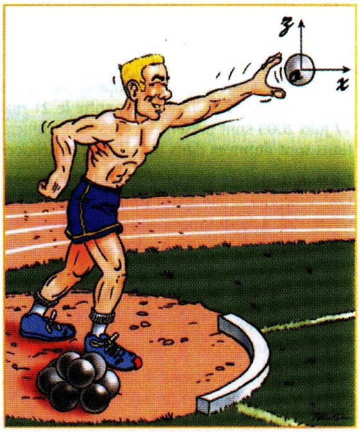
ندرس حركة موضع مركز عطالة الكرة في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ الذي مبدؤه O ينطبق على موضع مركز عطالة الكرة في لحظة القذف $t=0$.

يتحرك مركز عطالة الكرة في المستوي (xOz) الحاوي على شعاع السرعة $\vec{v_0}$ و محوره الشاقولي $(O,\vec{k})$ موجه نحو الأعلى.

بتطبيق قانون نيوتن الثاني على مركز عطالة الكرة في معلم الدراسة، نكتب :

$$\sum \vec{F} = \vec{P} = m.\vec{a_G}$$

$$m.\vec{g} = m.\vec{a_G} \Rightarrow \vec{a_G} = \vec{g}$$



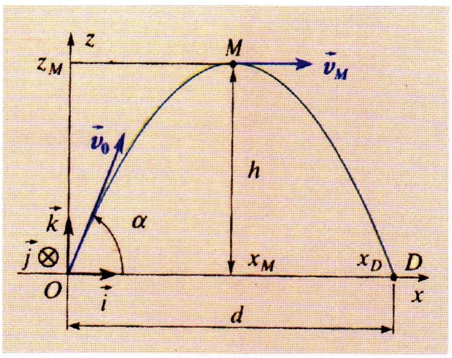
إذن مركبات التسارع هي :

$$\vec{a_G}\begin{cases} a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} = 0 \\ a_z = \dfrac{d^2z}{dt^2} = -g \end{cases}$$

بإجراء التكامل، نحصل على مركبات شعاع السرعة :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = c_1 \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = c_2 \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = -g.t + c_3 \end{cases}$$

و تعيّن قيم الثوابت c_1، c_2 و c_3 من الشروط الابتدائية، حيث مركبات شعاع السرعة الابتدائية $\vec{v_0}$ في اللحظة $t=0$ هي :



$$\vec{v_0}\begin{cases} v_{ox} = v_o.\cos\alpha \\ v_{oy} = 0 \\ v_{oz} = v_o.\sin\alpha \end{cases}$$

و منه :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = v_o.\cos\alpha \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = 0 \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = -g.t + v_o.\sin\alpha \end{cases}$$

و بإجراء التكامل مرة أخرى بالنسبة للزمن، نحصل على المعادلات الزمنية الوسيطية للحركة :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_o.\cos\alpha.t + c_4 \\ y = 0 + c_5 \\ z = -\dfrac{1}{2}g.t^2 + v_o.\sin\alpha.t + c_6 \end{cases}$$

لكن مركز عطالة الكرة موجود عند المبدأ $O(0,0,0)$ في اللحظة $t=0$.

إذن : $c_4 = c_5 = c_6 = 0$

و منه :

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = (v_o.\cos\alpha).t..................(1) \\ y = 0..............................(2) \\ z = -\dfrac{1}{2}g.t^2 + (v_o.\sin\alpha).t........(3) \end{cases}$$

تبيّن هذه المعادلات الزمنية أن :

- حركة مركز عطالة الكرة G تتم في المستوي الشاقولي (xOz) الحاوي على شعاع السرعة $\overrightarrow{v_0}$ ، لأن $y=0$.
- مسقط الحركة وفق المحور الأفقي (Ox) هي حركة منتظمة.
- مسقط الحركة وفق المحور الشاقولي (Oz) هي حركة متغيرة بانتظام.

- معادلة المسار :

نحصل على معادلة مسار مركز عطالة الكرة $y=f(x)$ بحذف عامل الزمن من المعادلتين الزمنيتين (1) و (3).

من المعادلة (1)، لدينا : $t = \dfrac{x}{v_o.\cos\alpha}$

و بالتعويض عن t في المعادلة (3)، ينتج : $z = -\dfrac{1}{2}g.\left(\dfrac{x}{v_o.\cos\alpha}\right)^2 + (v_o.\sin\alpha)\dfrac{x}{v_o.\cos\alpha}$

أي أن : $z = -\dfrac{1}{2}.\dfrac{g}{v_o^2.\cos^2\alpha}.x^2 + (\tan\alpha).x$

فالمسار هو عبارة عن جزء من قطع مكافئ موجود في المستوي الشاقولي الحاوي على $\overrightarrow{v_o}$.

- حساب الذروة : La flèche

الذروة هي الارتفاع الأعظمي h الذي تبلغه الكرة.

يكون شعاع السرعة المحمول على المماس للمسار أفقيا عند النقطة M الموافقة لأعظم ارتفاع.

و بالتالي فإن المركبة الشاقولية لشعاع السرعة عند ذلك الموضع تكون معدومة : $v_z=0$

و يحدث ذلك في اللحظة t_1، حيث يكون :

$$O = -g.t_1 + v_o.\sin\alpha \Rightarrow t_1 = \frac{v_o.\sin\alpha}{g}$$

و يكون الارتفاع الأعظمي الموافق هو : $z_M=h$

$$h=-\frac{1}{2}g.\left(\frac{v_o.\sin\alpha}{g}\right)^2+(v_o.\sin\alpha)\left(\frac{v_o.\sin\alpha}{g}\right)$$

$$\boxed{h=\frac{v_o^2.\sin^2\alpha}{2g}}$$

- حساب المدى : La portée

هي الفاصلة $x_D=d$ للنقطة D من المسار ، الواقعة في المستوي الأفقي المار بالنقطة O.

أي أن : $z_D=0$

إذن : x. $O=-\frac{g}{2v_0^2.\cos^2\alpha}.x^2+(\tan\alpha).x$

و بوضع x عاملا مشتركا، نجد : $O=x.\left(-\frac{g}{2v_0^2.\cos^2\alpha}.x+\tan\alpha\right)$

الحـــل $x=0$ يوافق إلى موضع نقطة قذف الكرة من O ، أما الحل الآخر فيعطي فاصلة النقطة D الموافقة لنقطة المدى :

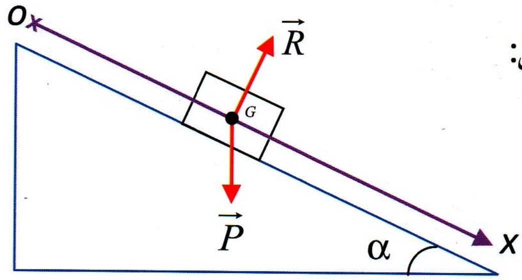
$$x_D=d=\frac{2v_0^2.\cos^2\alpha.\tan\alpha}{g}=\frac{2v_0^2.\cos\alpha.\sin\alpha}{g}$$

أي : $\boxed{d=\frac{v_0^2.\sin 2\alpha}{g}}$

ملاحظة : يكون المدى أعظميا إذا كان : $sin2\alpha = 1$ ، أي : $\boxed{\alpha=45°}$

6 - حركة مركز عطالة جسم على مستوي مائل :

نترك جسما صلبا مركز عطالته G و كتلته m ليتحرك دون احتكاك انطلاقا من السكون على طول خط الميل الأعظمي لمستوي مائل يصنع زاوية α مع المستوي الأفقي.



يخضع الجسم أثناء حركته إلى تأثير قوتين: ثقله $\vec{P}$ و فعل المستوي $\vec{R}$ على الجسم.

بتطبيق قانون نيوتن الثاني على مركز عطالة الجسم في المرجع الأرضي الذي نعتبره غاليليا : $\vec{P}+\vec{R}=m.\vec{a_G}$

باسقاط هذه العلاقة على المحور (Ox)،

نجد : $mg.\sin\alpha=m.a_G \Rightarrow \boxed{a_G=g.\sin\alpha}$

في غياب الاحتكاكات، تكون حركة الجسم على المستوي المائل مستقيمة متسارعة بانتظام تسارعها : $a_G=g.\sin\alpha$

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي و للمؤلف بالخير

و النجاح و المغفرة

Hard_equation