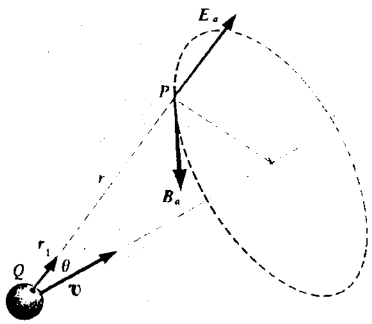
جامعة حلب
كلية العلوم

الإلكتروديناميك



الدكتور
سهيل باظة

الدكتور
جلال سودة

الدكتور
رياض خاروف

لطلاب السنة الثالثة
ف - رف - ر ف ك

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية
١٩٩٢ - ١٩٩٣

المقدمة

يغطي كتاب الالكتروديناميك مقررات السنة الثالثة فيزياء ومقرر الكهرطيسية لطلاب السنة الثالثة رف + رف ك وتتوافق معظم مواضيعه مع المفردات المقررة في الخطة الدراسية .

يتطلب فهم مواضيع هذا الكتاب أن يكون الطالب ملما بمنهاج الكهرباء والمغناطيسية . متمرسا في الجبر المتجه . وقد حاولنا من جهتنا الكتابة باسلوب مبسط وشرح وافر للعلاقات الرياضية ومحاولة تبسيطها قدر المستطاع .

يحتوي الكتاب على خمسة فصول وثلاث ملحقات اضافة الى المصطلحات العملية المراجع باللغتين العربية والاجنبية .

في الفصل الاول درسنا معادلات مكسويل مع شرح فيزيائي لها ثم درسنا مفهوم الكمونات الكهرطيسية والشروط الحدية التي يخضع لها الحقل الكهرطيسي عندما يصطدم بحاجز يفصل بين وسطين مختلفين بخواصهما الفيزيائية ، وقد عرضنا بعض التمارين المحلولة في نهاية الفصل . في الفصل الثاني درسنا معادلات انتشار الحقل الكهرطيسي في الاوساط المتجانسة والمتماثلة المناحي ، الخلاء ، النواقل والعوازل كما درسنا انتشار الحقل الكهرطيسي في الاوساط المتباينة المناحي كالايونوسفير والبلورات .

يبحث الفصل الثالث في دراسة انعكاس وانكسار الامواج الكهرطيسية المستوية على السطوح الفاصلة بين أوساط مادية مختلفة كما يدرس ظاهرة الانعكاس الكلي لهذه الامواج . يتضمن الفصل أيضا دراسة أدلة الموجة والامواج الموجهة من النوع كهربائية عرضية

وكهرطيسية عرضية. يتطرق الفصل الرابع الى دراسة ثنائيات ورباعيات الاقطاب الكهربائية والمغناطيسية والكمون المتولد عنها مع عرض بعض التطبيقات عليها.

درسنا بايجاز في الفصل الخامس نسبية نيوتن ثم نظرية اينشتاين في النسبية الخاصة والعامة، كما درسنا بالتفصيل تطبيقات تحويلات لورنتس على القوى والحقول واستنتاج معادلات مكسويل في الجملة S' المتحركة حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لجملة عطالية ساكنة S. واستعرضنا في نهاية الفصل المتجهات الرباعية لكثافة التيار والكمون مع اعطاء فكرة عن تنسور الحقل الكهرطيسي.

نرجو أن نكون قد وفقنا في وضع كتاب جيد يعود على الطالب بالمنفعة والفائدة العلمية وأن يكون مرجعا مفيدا في المكتبة العربية.

أخيرا ،نتوجه بالشكر والامتنان للزملاء الذين أفادونا بملاحظاتهم القيمه وعلى الجهد الذي بذلوه لانجا هذا الكتاب وهم: الدكتور جان شنكجي ،الدكتور عبد الوهاب دويدري والدكتور رياض آله رشي .

المؤلفون

الفصل الأول

معادلات الحقل الكهرطيسي في الفــــــــراغ

(معادلات مكسويــــــــــــل)

1 – 1– قانون غوص في الكهرباء الساكنة :

لنأخذ شحنة نقطية Q تقع في النقطة p' الواقعة داخل سطح مغلق s شكل (1– 1) . ولحساب تدفق الحقل الكهربائي $\vec{E}$ من خلال هذا السطح نقوم بحساب تدفق الحقل الكهربائي عبر عنصر السطح $\vec{ds}$ ومن ثم نجري عملية تكامل على السطح الكلي s .

ان تدفق الحقل $\vec{E}$ من خلال عنصر السطح $\vec{ds}$ يساوي :

$$d\phi = \vec{E}.\vec{ds} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{\vec{r}_1.\vec{ds}}{r^2} \qquad (1-1)$$

حيث $\vec{r}_1$ هو متجهة الواحدة، و $\vec{r}_1.\vec{ds}$ هو مسقط $\vec{ds}$ على مستــــوى عمودي على $\vec{r}_1$،

واذا كتبنا $\vec{ds}$ بدلالة $d\Omega$ الزاوية المجسمة التي نرى فيها عنصر السطح $\vec{ds}$ ابتداء من النقطة p' فان $\vec{ds}$ يساوي :

$$\vec{ds} = r^2.d\Omega\ \vec{r}_1 \qquad (1-2)$$

نعوض قيمة $\vec{ds}$ من العلاقة (2) في (1) فنحصل على :

$$\vec{E}.\vec{ds} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{\vec{r}_1.d\Omega.r^2.\vec{r}_1}{r^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\,d\Omega \qquad (1-3)$$

والتدفق الكلي للحقل $\vec{E}$ من خلال السطح الكلي s يساوي :

$$\phi = \oint_s \vec{E}.\vec{ds} = \oint_s \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}d\Omega = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\oint_s d\Omega = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}.4\pi = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (1-4)$$

اذا كانت الشحنة Q واقعة خارج السطح s فان التدفق الكلي يساوي الصفر لان الزاوية المجسمة التي نرى منها السطح s انطلاقا من هذه النقطة تكون معدومة ·

اذا احتوى السطح المغلق s على عدة شحنات بداخله فان التدفق يجمع جبريا ويكون التدفق الكلي للحقل $\vec{E}$ من خلال السطح المغلق s مساويا الشحنة الكلية مقسومة على ε_o أي :

$$\phi = \sum_i \phi_i = \frac{1}{\varepsilon_o} \sum_i Q_i = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad (1-5)$$

أما في الحالة التي تكون فيها الشحنات داخل السطح المغلق s موزعة بكثافة حجمية ρ في الحجم v المحدد بالسطح s فان Q تساوي :

$$Q = \int_v \rho dv \qquad (1-6)$$

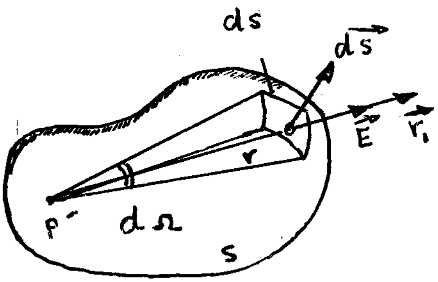
والتدق الكلي يساوي :

$$\phi = \oint_s \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{1}{\varepsilon_o} \int_v \rho dv \qquad (1-7)$$

يربط قانون غوص كما هو ملاحظ بين تدفق الحقل الكهربائي من خلال سطح مغلق s وبين الشحنة الكلية الموجودة داخله · يفيد هذا القانون في حساب الحقول الناجمة عن توزع الشحنات الكهربائية ولاسيما اذا كانت هذه الشحنات موزعة توزعا متناظرا · بتطبيق دعوى غوص - استروغرادسكي على الطرف الايسر من العلاقة (7) نجد :

$$\phi = \oint_s \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \int_v \text{div } \vec{E}.dv$$

$$= \int_v \frac{\rho}{\varepsilon_o} dv \qquad (1-8)$$



شكل (1 - 1)

وهذه العلاقة صحيحة مهما كان شكل السطح والكميات الموجودة تحت اشارة $\int$ يجب أن تتساوى في

كل نقطة من الفراغ ومنه فان :

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho \end{array}\right. \quad \text{أو:} \qquad (1-9)$$

حيث $\vec{D}$ هي متجهة حقل التحريض الكهربائي .

تمثل العلاقة (9 - 1) قانون غوص بشكله التفاضلي بينما تمثل العلاقة (7 - 1) قانون غوص بالشكل التكاملي. واعتمادا على المفهوم الفيزيائي للتفرق فان العلاقة (9 - 1) تدل على أن مصادر الحقل الكهربائي هي الشحنات الكهربائية وهي شحنات حقيقية تتواجد في الطبيعة . تدعى العلاقة (9 - 1) أيضا بمعادلة مكسويل من أجل تفرق $\vec{D}$.

2 - 1- قانون غوص في المغناطيسية :

من المعلوم أن الخاصة الاساسية للمادة قد بنيت من جراء تكميم الشحنة الكهربائية .وعلى الرغم من الدراسة النظرية التي وضعها العالم ديراك 1931 والتي تتنبأ بوجود جسيمات تمثل شحنة مغناطيسية من نوع واحد دعيت وحيدات القطب المغناطيسي ،الا أن التجارب حتى الآن لم تقدم أي دليل على وجود احادي القطب المغناطيسي ولذلك فان قوانين الكهرطيسية قد وضعت على اعتبار أنه لاتوجد شحنة مغناطيسية أساسية معزولة . واذا كان وحيد القطب المغناطيسي غير موجود فانه يوجد ثنائي القطب المغناطيسي (ديبول) وهو أصغر مؤثر عنصري مغناطيسي معروف . على الصعيد الماكروسكوبي ينشأ ثنائي القطب المغناطيسي من جراء مرور تيار مستمر في عروة أو حلقة ناقلة .وعلى الصعيد الميكروسكوبي أو الذري فان المعالجة الكوانتية ضرورية لابد

منها ،مع أن النموذج التقليدي للمغناطيسية الذرية يعزي منشأ الحقول المغناطيسية الى التيار الفعال الناتج عن دوران الالكترونات حول النواة .

وفي الحقيقة فانه بالاضافة الى المفعول المداري هذا فان الجسيمات العنصرية تملك عزما سبينيا أو عزما حركيا ذاتيا وعزما مغناطيسيا ذاتيا . فمثلا العزم السبيني للالكترون يساوي $s=\frac{1}{2}.\frac{h}{2\pi}=5,28\times10^{-35}\,Joule$ وعزم ثنائي القطب المغناطيسي للالكترون يساوي $m_B=9,27\times10^{-24}\,A.m^2$ والذي يدعى بمغنطون بور .

والآن لو طرحنا السؤال التالي : ماهو الاثر الناجم عن غياب وحيد القطب المغناطيسي على شكل خطوط الحقل المغناطيسي ؟ نذكر أنه في ثنائي القطب الكهربائي تبدأ خطوط الحقل من الشحنة الموجبة وتنتهي على الشحنة السالبة ، أما في ثنائي القطب المغناطيسي وبسبب عدم وجود شحنات مغناطيسية حقيقية كما هو الحال بالنسبة للشحنات الكهربائية فان خطوط الحقل المغناطيسي ليس لها بداية ونهاية وانما تنغلق على بعضها والشكل التالي (2 - 1) يبين خطوط الحقل الكهربائي والمغناطيسي الناجمة عن ثنائي قطب كهربائي وآخر مغناطيسي كما يبين سطح غوص s في كل منهما .

والتدفق اصطلاحا من خلال سطح مغلق يكون موجبا اذا كانت خطوط الحقل تخرج منه وسالبا اذا دخلت اليه ، وعدد خطوط حقل التحريض المغناطيسي ، (شكل 1-2.b) التي تدخل الجسم المحدد بالسطح المغلق s تساوي عدد خطوط الحقل التي تخرج منه وتدفق حقل التحريض المغناطيسي من خلال هذا السطح المغلق يساوي عندئذ الصفر .نعبر عن

النتيجة هذه العلاقة :

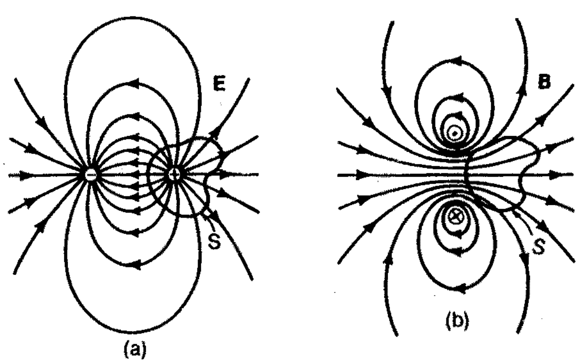
$$\oint_S \vec{B}.\overrightarrow{ds} = 0 \qquad (1-10)$$
$$\oint_S \vec{H}.\overrightarrow{ds} = 0$$

وبتطبيق دعوى غوص ـ استروغرادسكي فان العلاقة (10 - 1) تصبح على الشكل التالي :

$$\int_V \text{div}\ \vec{B}.dv = 0$$

ومنه فان : $\text{div}\ \vec{B} = 0$ أو: $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ (11 - 1)، وهو الشكل التفاضلي لقانون غوص في المغناطيسية وهذه العلاقة صحيحة مهما كان شكل السطح المغلق S الذي يحد الحجم V .

والمعنى الفيزيائي للعلاقة (11) يدل على عدم وجود شحنات مغناطيسية حقيقية حرة في الطبيعة ،ولذلك فان الحقل المغناطيسي تولده التيارات ولايتولد عن الشحنات المغناطيسية . تدعى العلاقة (11) أيضا بمعادلة مكسويل من أجل تفرق $\overrightarrow{B}$.



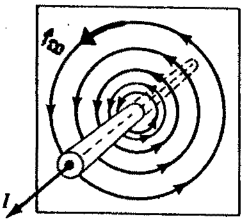
شكل (2 - 1)

3 – 1 – قانون أمبير:

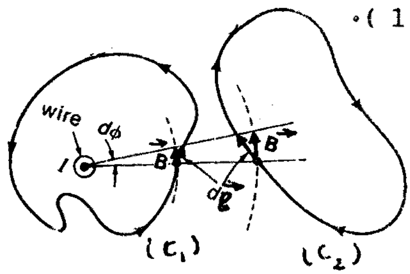
اذا مر تيار ثابت الشدة I في سلك ناقل طوله لانهائي فان حقل التحريض المغناطيسي المتولد عن مرور التيار في السلك في نقطة ما من الفراغ تبعد عن السلك مسافة r يعطى بالعلاقة التالية

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \tag{1-12}$$

أما جهته في تلك النقطة فتكون عمودية على المستو الذي يحوي السلك والنقطة ، وخطوط الحقل $\vec{B}$ تكون عبارة عن دوائر متمركزة حول السلك الشكل (3-1) ، لنحسب الان جولان حقل التحريض المغناطيسي $\vec{B}$ على محيط مغلق يحيط بالسلك السابق وآخر لايحيط به كما يظهره الشكل (4 - 1).



شكل (3 - 1)



شكل (4- 1)

ونظرا لكون حقل التحريض المغناطيسي $\vec{B}$ يملك مركبة زاوية فقط حول السلك المستقيم فان مسقط $\vec{d\ell}$ على $\vec{B}$ يساوي $r.d\phi$ في كلا الطريقين c_1 و c_1 ، ولذلك فان جولان الحقل $\vec{B}$ يساوي :

$$\oint \vec{B}.\vec{d\ell} = \oint B(r).r.d\phi \tag{1-13}$$

بتعويض قيمة $\vec{B}$ من (12) في (13) نجد :

$$\oint \vec{B}.\vec{d\ell} = \frac{\mu_o I}{2\pi} \oint d\phi$$

من أجل المحيط المغلق c_1 فان التكامل $\oint\limits_{c_1} d\phi = 2\pi$ ومن أجل c_2 يساوي الصفر . نعوض قيمة تكامل $d\phi$ في العلاقة الاخيرة فنجد

$$\left\{\begin{aligned} &\oint\limits_{c} \vec{B}.\overrightarrow{d\ell} = \mu_o I \\ &\text{أو:} \\ &\oint \vec{H}.\overrightarrow{d\ell} = I \end{aligned}\right. \qquad (1-14)$$

تدعى العلاقة (14) بقانون أمبير وينص على أن جولان الحقل المغناطيسي على منحن مغلق يساوي الى شدة التيار الكلي التي تخترق السطح الذي يستند عليه المحيط المغلق ، ويدعى التكامل $\oint \vec{H}.\overrightarrow{d\ell}$ بالقوة المحركة المغناطيسية أسوة بالقوة المحركة الكهربائية

$$\varepsilon = \oint\limits_{c} \vec{E}.\overrightarrow{d\ell}$$

واذا كتبنا شدة التيار I على شكل تكامل لكثافة التيار $\vec{j}$ على السطح s بأكمله أي :

$$I = \int\limits_{s} \vec{j}.\overrightarrow{ds} \qquad (1-15)$$

فان قانون أمبير يأخذ الشكل التالي (الشكل التكاملي) :

$$\oint\limits_{c} \vec{B}.\overrightarrow{d\ell} = \mu_o \int\limits_{s} \vec{j}.\overrightarrow{ds} \qquad (1-16)$$

حيث $\overrightarrow{ds}$ هي متجهة السطح منحاها منطبق على الناظم وموجه بالاتجاه الموجب للناظم الذي يتحدد بقاعدة اليد اليمنى . بتطبيق نظرية ستوكس على الطرف الايسر من المعادلة (16) نجد :

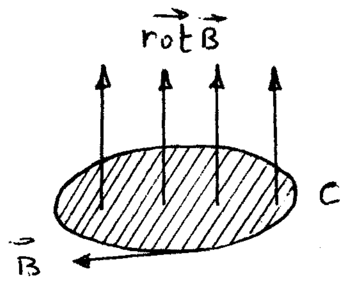
$$\oint\limits_{c} \vec{B}.\overrightarrow{d\ell} = \int\limits_{s} \overrightarrow{\text{rot } B}\ \overrightarrow{ds} = \int\limits_{s} \mu_o\vec{j}\ \overrightarrow{ds} \qquad (1-17)$$

ومنه فان:

$$\overrightarrow{\text{rot } B} = \mu_o\vec{j} \qquad (1-18)$$

وهذه العلاقة تمثل الشكل التفاضلي لقانون أمبير . يمثل الشكل

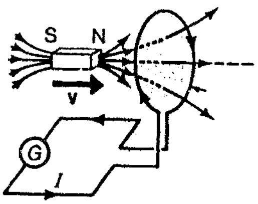
التالي (5 - 1) تدفق المتجهة $\overrightarrow{rot\ B}$ من خلال السطح s الذي يستند عليه المحيط أو المنحن المغلق c.



شكل (5 - 1)

4 -1- قانون فاراداي في التحريض الكهرطيسي :

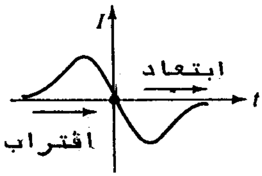
في عام 1831 اكتشف فاراداي بأنه يمكن الحصول على الحقل الكهربائي انطلاقا من حقل مغناطيسي متغير مع الزمن. وقد سميت هذه الظاهرة بظاهرة التحريض الكهرطيسي . والشكل (6 - 1) يبين التجربة التي استخدمها فارادي ،وهي تتألف من قضيب مغناطيسي ودارة تحوي حلقة سلكية متصلة مع مقياس غلفانومتر للدلالة على مرور التيار الكهربائي في الدارة. عندما يكون المغناطيسي في وضع ثابت بالنسبة للدارة



شكل (6 - 1)

فان ابرة مقياس الغلفانومتر لاتنحرف وهذا يدل على عدم وجود تيار كهربائي مار في الدارة. واذا قربنا المغناطيسي من جهة القطب الشمالي مثلا فان ابرة مقياس الغلفانومتر تنحرف دالة على مرورتيار كهربائي . ويبين الشكل (7 - 1) جهة مرور التيار الكهربائي . عند اقتراب المغناطيس من الحلقة وجريانه في الجهة المعاكسة بعد

عبوره للحلقة الناقلة والابتعاد عنها . واذا أعدنا العملية السابقة بتحريك القضيب المغناطيسي من طرفه الجنوبي باتجاه محور الحلقة فان ابرة مقياس الغلفانومتر تنحرف بجهة تخالف انحرافها في المرة السابقة أي أن جهة التيار الكهربائي المار في الدارة تخالف جهة التيار في المرة السابقة . يدعى التيار المار في الدارة بـ"التيار المتحرض" والمغناطيس بالمحرض .



شكل (7 - 1)

وصاغ فاراداي هذه النتيجة على النحو التالي :

" ان القوة المحركة الكهربائية المتحرضة (EMF) ε في الدارة المغلقة تكون تابعة لسرعة تغير تدفق الحقل المغناطيسي الذي يخترق سطح الحلقة مع الزمن" وهذه القوة المحركة هي التي تولد تيارا متحرضا في الدارة وتساوي :

$$\varepsilon = \oint \vec{E}.\vec{d\ell} \qquad (1-19)$$

حيث $\vec{E}$ هو الحقل الكهربائي المتحرض في كل نقطة من الدارة و$\vec{d\ell}$ هو عنصر الطول من الدارة الذي يتولد فيه الحقل الكهربائي . واذا اخترنا اتجاها موجبا لكل من جولان الحقل $\vec{E}$ على محيط الحلقة والناظم على السطح الذي تحصره الحلقة والذي يتحدد وفق قاعدة اليد اليمنى أي اذا كان الاتجاه الموجب للجولان باتجاه اصابع اليد فان الاتجاه الموجب للناظم يكون عموديا على مستوى السطح s الذي يحد الحلقة و قانون القوة المحركة الكهربائية المتحرضة يساوي عندئذ الى :

$$\varepsilon = \oint \vec{E}.\vec{d\ell} = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}.\vec{ds} = -\frac{d}{dt}\int_s \vec{B}.\vec{n}.ds \qquad (1-20)$$

حيث $\vec{n}$ هي متجهة الواحدة على $\vec{ds}$ ، $\vec{ds}$ هي متجهة السطح

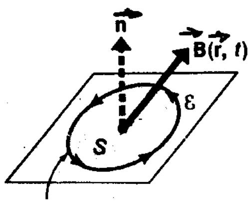
وُخذ بحيث يكون اتجاهها منطبقا على اتجاه الناظم
$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}\ ,\ t)$ هي متجهة حقل التحريض المغناطيسي حيث تكون
ابعة للموضع وللزمن ٠

ولكن الحد $\int_S \vec{B}.\vec{n}.ds$ يساوي الى تدفق حقل التحريض
لمغناطيسي عبر السطح S: $\phi_m = \int_S \vec{B}.\vec{n}.ds$ ومنه فان العلاقة
(20) تكتب على الشكل :

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} \qquad (1-21)$$

اذا قيس التدفق المغناطيسي بواحدة الويبر (wb) فان القوة
المحركة الكهربائية تقاس بالفولط (V) الاشارة (–) الموجودة
في العلاقتين (20)و(21) تعبر عن قانون لنز الذي ينص على أن.
اتجاه القوة المحركة الكهربائية المتحرضة يكون بحيث تعاكس تغير التدفق
المغناطيسي الذي كان سببا في توليد هذه القوة .

فمثلا اذا تناقص حقل التحريض المغناطيسي المبين على
الشكل (8 - 1) مع الزمن ٠ فان المقدار $\frac{d\phi_m}{dt}$ يكون سالبا
وتكون جهة القوة المحركة الكهربائية المتحرضة
هي الجهة التي تظهر على الشكل السابق حيث
تولد تيارا في الحلقة ينجم عنه حقل مغناطيسي
جهته تعاكس الجهة التي يتناقص بها الحقل
المغناطيسي الخارجي المطبق ٠ من جهة أخرى



شكل (8 - 1)

اذا كان $\vec{B}$ يتزايد مع الزمن فان ε تولد تيارا في الحلقة
الناقلة جهته تعاكس الجهة المرسومة في الشكل ،والحقل المغناطيسي
المتولد عن التيار المتحرض سوف يعاكس بالجهة تزايد الحقل
المغناطيسي الخارجي ٠

لنعتبر الآن سطحا مغلقا كما في الشكل (9 − 1) مؤلفا من سطحين s_1 و s_2، أغلق محيطهما المشترك بحلقة دائرية $\vec{n}_2$ ، $\vec{n}_1'$ هي متجهات الواحدة الناظمية على السطح s_1 و s_2 على الترتيب وتتوجه الى خارج السطحين، ولنعتبر أن هاتين المتجهتين موجهتان بالاتجاه الموجب. لنكتب تدفق حقل التحريض المغناطيسي $\vec{B}$ عبر هذين السطحين المغلقين s_1 و s_2 :

$$\oint_{s_1+s_2} \vec{B}.\vec{n}.ds = \int_{s_1} \vec{B}.\vec{n}_1'.ds + \int_{s_2} \vec{B}.\vec{n}_2.ds = 0$$

$$= -\int_{s_1} \vec{B}.\vec{n}_1.ds + \int_{s_2} \vec{B}.\vec{n}_2.ds = 0$$

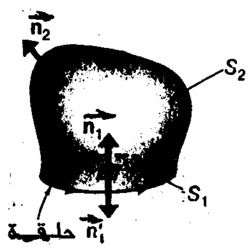
حيث : $\vec{n}_1' = -\vec{n}_1$

ومنه فان التدفق ϕ_m يساوي :

$$\phi_m = \int_{s_1} \vec{B}.\vec{n}_1.ds = \int_{s_2} \vec{B}.\vec{n}_2.ds$$

وهكذا فان التدفق الذي يجتاز دارة مغلقة يمكن حسابه من معرفة التكامل $\int \vec{B}.\vec{n}.ds$ على سطح مفتوح محيطه عبارة عن حلقة أو عروة مغلقة .

في بعض الحالات التي تكون فيها الوشيعة مؤلفة من N لفة تكافىء كل منها حلقة تحدد سطحا معينا ، شكل (10 − 1)، في هذه الحالة يكون التدفق المغناطيسي الكلي عبر الوشيعة ϕ_m مساويا الى N مرة من التدفق المغناطيسي عبر لفة واحدة :

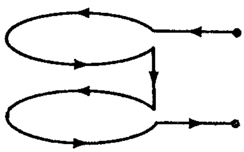


شكل (9 − 1)

$$\phi_{tot} = N\phi_m \qquad (1-22)$$

يمكن الحصول على التدفق المغناطيسي مع الزمن الذي يخترق الحلقة الناقلة اما من تحريك قضيب مغناطيسي بالنسبة للحلقة أو من تحريك الحلقة بالنسبة للمغناطيس

أو من تغيير شكل الدارة نفسها وهنا يجب أن يكون تغير الحقل مع الزمن بطيء أي لايكون ملموظ خلال فترة زمنية تساوي الى أبعاد الدارة مقسومة على سرعة الضوء وهذا يمكننا من اهمال التأثيرات المتعلقة بزمن انتشار الحقل الذي ينتشر بسرعة الضوء



شكل (10- 1)

بتطبيق نظرية ستكوس على الطرف الايسر من العلاقة (20) نجد :

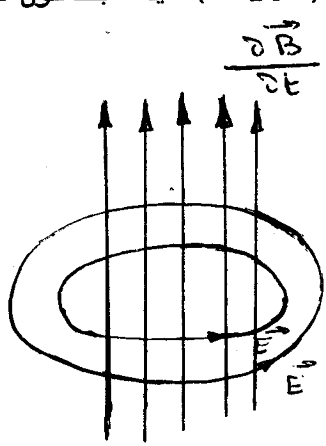
$$\oint_c \vec{E}.\overrightarrow{d\ell}=\int_s \overrightarrow{rot\ \vec{E}}.\overrightarrow{ds}=-\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\overrightarrow{ds} \quad (1-23)$$

ومنه فان :

$$\overrightarrow{rot\ \vec{E}} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1-24)$$

حيث $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r},\ t)$ يكون تابعا للموضع وللزمن ، وهذه العلاقة صحيحة من أجل أي دارة مغلقة تحد سطحا اختياريا s وتدل على أن تغير حقل التحريض المغناطيسي مع الزمن يولد حقلا كهربائيا دورانا واذا مثلت خطوط الحقل $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ بخطوط مستقيمة من الاسفل الى الاعلى فان خطوط الحقل الكهربائي تشكل دوائر متحدة المركز تضم داخلها هذه الخطوط كما في الشكل (11 - 1).

تدعى المعادلة (24) أيضا بقانون فاراداي المعمم أو بمعادلة ماكسويل من أجل دورا الحقل $\vec{E}$.

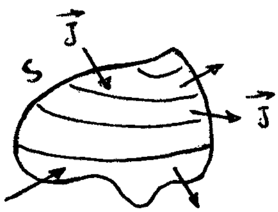


الشكل (11 - 1)

5 – 1 – معادلة الاستمرار :

نفرض أن سطحا مغلقا s كما في الشكل (12 - 1) تجتازه تيارات وبحيث يكون عدد مناطق السطح التي يخرج منها التيار أكبر من عدد مناطق السطح التي يدخل اليها التيار . وليكن $\vec{j}$ هو متجهة كثافة التيار في كل نقطة من السطح . ان التيار الكلي الخارج من السطح s يساوي :

$$I = \oint_s \vec{j}.\vec{ds} \tag{1-25}$$



شكل (12 - 1)

بما أن التيار الكلي الخارج من السطح أكبر من التيار الداخل اليه فان الشحنة الكهربائية Q داخل السطح سوف تتناقص مع الزمن ويعبر عن ذلك بالعلاقة :

$$-\frac{dQ}{dt}$$

واذا كانت الشحنة Q موزعة على الحجم المحدود بالسطح المغلق s بكثافة حجمية ρ فان :

$$-\frac{dQ}{dt} = -\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv \tag{1-26}$$

وحسب قانون مصونية الشحنة الكهربائية فان مقدار تناقص الشحنة خلال واحدة الزمن داخل السطح يجب أن يساوي مقدار الشحنة الخارجة منه خلال واحدة الزمن أي :

$$-\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv = \oint_s \vec{j}.\vec{ds} \tag{1-27}$$

وبتطبيق نظرية غوص – استروغرادسكي على الطرف الايمن للعلاقة (27) نجد :

$$-\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv = \int_v \operatorname{div} \vec{j}.dv \tag{1-28}$$

وهذه العلاقة صحيحة مهما كان الحجم الذي يحد السطح المغلق s وتدل على أن تدفق الشحنة خارج أي حجم لامتناه في الصغر تساوي الى تناقص الشحنة في هذا الحجم وهذا يعني أن الشحنة الكهربائية محفوظة لاتخلق ولاتفنى عند جريان التيار . ومن المساواة في العلاقة (28) نحصل على العلاقة التالية :

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (1-29)$$

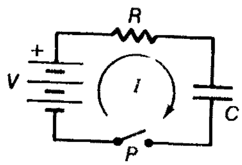
التي تعبر عن قانون انحفاظ الشحنة وتدعى أيضا بمعادلة الاستمرار. في حال التيار المستمر فان توزع الشحنات لايتغير مع الزمن أي: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ وتأخذ معادلة الاستمرار الشكل التالي :

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0 \qquad (1-30)$$

أي أن تدفق كثافة التيار تكون معدومة ولذلك لايوجد للتيار المستمر منابع وخطوط كثافة التيار تكون مغلقة ولذلك فان التيار الكهربائي المستمر لايمر في الدارة المفتوحة .

6 – 1 – تيار الانزياح أو تيار مكسويل :

يمثل الشكل التالي دارة شحن مكثف شكل (13 - 1). عند اغلاق القاطعة p يلاحظ أن تيارا يمر في الدارة ولكنه يتناقص حتى ينعدم عندما تصل شحنة المكثفة الى قيمتها العظمى أي أن التيار يمر خلال فترة شحن المكثفة فقط . كيف يمكن تفسير مرور التيار في دارة مفتوحة بمكثف كدارة الشكل (13 - 1) . يمكن تفسير ذلك اذا انطلقنا من قانون غوص وأخذنا سطحا مغلقا s



شكل (13 - 1)

يضم اللبوس العلوي للمكثف، كما في الشكل (14 - 1) . وتبعاً لقانون مصونية الشحنة فان مقدار الشحنة الداخلة الى السطح والتي تتمثل بمعدل توضع الشحنة على اللبوس العلوي للمكثف الذي يقع ضمن السطح s تساوي الى مقدار الشحنة الخارجة منه والتي تتمثل بالتيار I(t) الذي يجري في السطح s أي :

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \qquad (1-31)$$

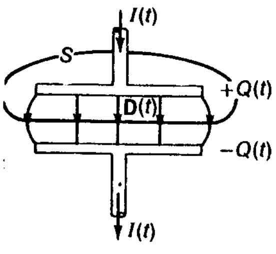
وباستخدام علاقة غوص التالية :

$$\oint_s \vec{D}(t).\overrightarrow{ds} = Q(t)$$

حيث) $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} + \vec{P}$ عندما يكون الفراغ بين لبوسي المكثفة مملوء١٠ بمادة عازلة، ويساوي $\vec{D} = \varepsilon_o\vec{E}$ عندما يكون العازل هو الفراغ بين اللبوسين) فان المعادلة (31) تكتب على الشكل:

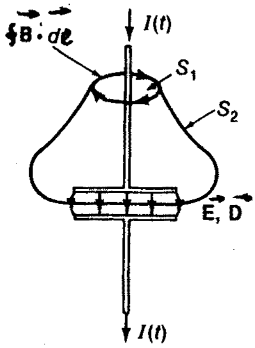
$$I(t) = \frac{d}{dt} \oint_s \varepsilon_o\vec{E}(t)\overrightarrow{ds} \qquad (1-32)$$

وهو التيار الذي يجري بين لبوسي المكثفة في دارة الشكل (13 - 1) ويعرف بتيار الانزياح أو تيار مكسويل الانتقالي وهو يظهر في العوازل ويختلف عن تيار الناقلية الناجم عن حركة الالكترونات في النواقل ، كما أنه يولد في المكثف نفس الاثار المغناطيسية التي يولدها تيار الناقلية المار في سلك في الفراغ المحيط بالسلك . وكان من أول نتائج اكتشاف تيار الانزياح هو تعديل قانون أمبير لانه يأخذ بعين الاعتبار فقط تيار الناقلية والمثال التالي يوضح ذلك : لنعتبر أن حقلا تحريضيا مغناطيسيا يتولد عن



شكل (14 - 1)

مرور تيار I(t) في دارة تحوي مكثف كما في الشكل(15- 1) . فحسب قانون أمبير يرتبط التكامل الخطي للحقل $\vec{B}$ حول الطريق المغلق أو المنحن المغلق مع التيار الكلي الذي يجري عبر أي سطح مفتوح محيطه هو الطريق المغلق . وهكذا فانه من أجل الطريق المغلق المبين على الشكل(15- 1) فان كلا السطحين s_1 و s_2 يمكن أن يستعملا في قانون أمبير على حين نجد أن التيار العادي يجري عبر السطح s_1 ولايجري عبر السطح s_2 وفي هذا تناقض واضح . ولذلك كان ضروريا تعديل قانون أمبير (18) بحيث يتم ادخال تيار الانزياح وهذا مافعله ماكسويل واصبح قانون أمبير على الشكل :



شكل (15 - 1)

$$\oint_c \vec{B}.\overrightarrow{d\ell} = \mu_o \int_s \vec{j}_d \overrightarrow{ds} + \mu_o \frac{d}{dt} \int_s \varepsilon_o \vec{E}.\overrightarrow{ds}$$

$$= \mu_o \int_s (\vec{j}_c + \varepsilon_o \frac{\overrightarrow{dE}}{dt}).\overrightarrow{ds} \qquad (1-33)$$

واذا طبقنا نظرية ستكوكس على الطرف الايسر من العلاقة (33)نجد :

$$\oint_c \vec{B}.\overrightarrow{d\ell} = \int_s \overrightarrow{\text{rot } B}.\overrightarrow{ds} = \mu_o \int_s (\vec{j}_c + \varepsilon_o \frac{\overrightarrow{dE}}{dt}).\overrightarrow{ds}$$

ومنه فان :

$$\overrightarrow{\text{rot } B} = \mu_o (\vec{j}_c + \varepsilon_o \frac{\overrightarrow{dE}}{dt}) \qquad (1-34)$$

حيث $\vec{j}_c$ هي كثافة تيار الناقلية . في الحالة العامة يكون $\vec{E}$ تابع للاحداثيات والزمن أي $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r},t)$ ولذلك يستبدل التفاضل الكلي

بتفاضل جزئي والعلاقة (34) تكتب على النحوالتالي :

$$\overrightarrow{\text{rot}\ \vec{B}} = \mu_0 \left(\vec{j}_c + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

أو على الشكل : (1-35)

$$\overrightarrow{\text{rot}\ \vec{H}} = \vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

تدعى المعادلة (35) بعلاقة ماكسويل – أمبير أو معادلة مكسويل من أجل دوار الحقل $\vec{H}$ أو $\vec{B}$ وهي ليست الا تعميما لقانون أمبير.

تدل هذه المعادلة على أن تغير الحقل الكهربائي مع الزمن يولد أيضاً بالاضافة الى تيار الناقلية حقلا مغناطيسيا دوارا. ولقد بين ماكسويل عن طريق تيار الانزياح أن الحقول الكهرطيسية تنتشر في الفراغ كأمواج وقد تنبأ بسرعة وخصائص هذه الامواج وفي عام 1881 نجح هرتز في اثبات وجود الامواج الكهرطيسية وبالتالي اثبات جود تيار الانزياح كما اثبت أن هذه الامواج تنتشر بسرعة تساوي سرعة الضوء . ولقد بين مكسويل وجود تناظر بين سلوك الحقل الكهربائي وحقل التحريض المغناطيسي فحسب قانون فارادای فان تغير حقل التحريض المغناطيسي مع الزمن يولد حقلا كهربائيا دواراً وبالتناظر (العلاقة 35) فان تغير الحقل الكهربائي يولد حقلاً مغناطيسياً دواراً.

لقد كان لماكسويل المبررات بعد اكتشافه لتيار الانزياح في تعديل قانون فارادي ،صحيح أن مراقبة الاثر المغناطيسي لتيار الانزياح هو من الصعوبة إلا أنه باستخدام تواترات عالية (تيار ذو تواتر عال) قد تم كشف الاثر المغناطيسي لتيار الانزياح في المكثف .

يسمى مجموع كثافتي تيار الانزياح وتيار الناقلية $\vec{j}_c$ بكثافة التيار

الكلي :

$$\vec{J}_{tot} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1-36)$$

وجدنا أن دائرة الشكل (14- 2) يمر فيها تياراً فقط عند لحظة اغلاق القاطعة والتيار المار في المكثف هو تيار الانزياح. واذا استبدلنا البطارية بمغذي تيار متناوب فان التيار المتناوب يمر بشكل متواصل في الدارة بسبب شحن وتفريغ المكثف باستمرار وانطلاقاً من معادلة الاستمرار (29) يمكن البرهان على أن :

$$\mathrm{div}(\vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = 0 \quad (1-37)$$

وهي معادلة الاستمرار في النظام اللامستقر (التيار المتاوب)وهذه المعادلة تدل على أن خطوط كثافة التيار الكلي $\vec{J}_{tot}$ تكون مغلقة وكأن التيار المتناوب (التيار الكلي) عمل على اغلاق الدارة التي كانت مفتوحة بوجود مكثف بواسطة تيار الانزياح المار في المكثف . وهذا مادفع ماكسويل الى الاعتقاد بأن كل التيارات الكهربائية في الطبيعة مغلقة .

7 – 1– متى يكون الوسط ناقلا ومتى يكون عازلا ؟:

تحدد طويلة نسبة كثافة تيار الانزياح الى كثافة تيار الناقلية طبيعة الوسط من حيث كونه ناقل أم عازل. فاذا انتشرت موجة كهرطيسية في وسط ما معادلة الحقل الكهربائي لها من الشكل: $\vec{E} = \vec{E}_o e^{i\omega t}$ فان نسبة طويلة تيار الانزياح الى تيار الناقلية تساوي :

$$\left| \frac{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}{\vec{J}} \right| = \frac{\omega \varepsilon}{\sigma} \quad (1-38)$$

حيث σ هي ناقلية الوسط ، ε سماحية الوسط.

تدعى النسبة السابقة أحياناً بعامل جودة الوسط وليس لها واحدة .

عندما تكون هذه النسبة أكبر بكثير من الواحد: $\frac{\omega\varepsilon}{\sigma} >> 1$ فان تيار الانزياح يكون الغالب وهو أكبر بكثير من تيار الناقلية والوسط يكون عازلاً .

وعندما تكون : $\frac{\omega\varepsilon}{\sigma} << 1$ فان تيار الناقلية هو الغالب ويكون أكبر بكثير من تيار الانزياح والوسط يكون عندئذ ناقلاً. تتعلق النسبة $\frac{\omega\varepsilon}{\sigma}$ بتردد الموجة الكهرطيسية، فاذا كانت المادة ناقلة عند تردد معين فقد تكون عازلة عند تردد آخر.

فمثلاً : النحاس، ناقليته $\sigma=5.8 \times 10^{7}\,(\Omega.m)^{-1}$ وسماحية الوسط $\varepsilon \approx \varepsilon_{o} \approx 9\times10^{-9}\,F/m$ فان $\frac{\omega\varepsilon}{\sigma} \approx 10^{-18}.\nu$ حيث ν هو تردد الموجة الكهرطيسية .

من أجل الترددات حتى القيمة $10^{16}Hz$ (تردد الاشعة فوق البنفسجية) حيث تكون النسبة : $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 10^{2}$ يبقى النحاس ناقلاً ولكن عند الترددات من مرتبة $10^{20}Hz$ (تردد الاشعة السينية) فان النسبة $\frac{\omega\varepsilon}{\sigma} \approx 10^{2}$ أي أن تيار الانزياح أكبر بمئة مرة من تيار الناقلية والنحاس يكون عندئذ عازلاً . وهنا يفسر سبب توغل الاشعة السينية لمسافات تبلغ عدة أطوال موجية في النحاس .

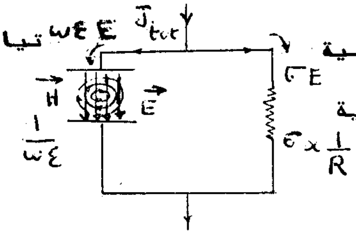
في العوازل المثالية حيث الناقلية σ تساوي :

$$\sigma \approx 10^{-15}\,(\Omega.m)^{-1} \quad و \quad \varepsilon \approx 10^{-11}\,F/m$$

فان النسبة : $\frac{\omega\varepsilon}{\sigma} \approx 10^{4}\,\omega$ وتيار الناقلية يهمل أمام تيار الانزياح مهما يكن تردد الموجة الكهرطيسية . وبين قيم النسبة $\frac{\omega\varepsilon}{\sigma}$ للنواقل والعوازل يوجد مجال لاشباه النواقل. حيث يقع

بعض أنصاف النواقل ضمن هذا المجال .

ويمكن فهم استجابة الوسط لموجة كهرطيسية من خلال تمثيله بالدارة التالية ، شكل (16 - 1).



شكل (16 - 1)

ينقسم التيار الكلي الى فرعين : الاول يمر بمكثف ممانعته $\frac{1}{\omega\varepsilon}$ والثاني يمر بمقاومة ناقليتها σ . فاذا كانت σ كبيرة فان المقاومة صغيرة وبالتالي فان معظم التيار يجري عبر فرع المقاومة ويكون هذا التيار هو تيار الناقلية والوسط ناقل . اما اذا كانت ممانعة المكثف $\frac{1}{\omega\varepsilon}$ صغيرة جدا فان معظم التيار يمر عبرها وهذا التيار هو تيار الانزياح والوسط يكون عندئذ عازل .

8 - 1 - معادلات ماكسويل العامة :

تدعى المعادلات الاربعة التالية التي تصف الحقل الكهرطيسي في الفراغ بمعادلات ماكسويل العامة وهي :

الشكل التفاضلي

قانون فاراداي $\quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad$ (1)

قانون غوص في المغناطيسية $\quad \vec{\nabla} . \vec{B} = 0 \quad$ (2)

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{قانون أمبير} \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} . \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \quad \text{قانون غوص في الكهراكدة} \tag{4}$$

الشكل التكاملي :

$$\oint_c \vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{B}.\overrightarrow{ds}$$

$$\oint_s \vec{B}.\overrightarrow{ds} = 0 \tag{1-39}$$

$$\oint_c \vec{H}.\overrightarrow{d\ell} = \int_s (\vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})\overrightarrow{ds}$$

$$\oint_s \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{1}{\varepsilon_o} \int_v \rho dv$$

فاذا علم توزع الشحنات $\rho(r , t)$ وكثافة التيار $\vec{j}_c(\vec{r} , t)$ فانه يمكن تحديد الحقل الكهربائي $\vec{E}(\vec{r} , t)$ وحقل التحريض المغناطيسي $\vec{B}(\vec{r} , t)$. تحوي المعادلات السابقة على ثمانية معادلات سلمية تكون ستة منها مستقلة عن بعضها . تعتبر المعادلتين (2)و (4) غير مستقلتين لانه لو أخذنا تفرق المعادلة (1) لحصلنا على المعادلة (2) ولو أخذنا تفرق المعادلة (3) لحصلنا على المعادلة (4) بعد الاخذ بعين الاعتبار معادلة الاستمرار. وعليه فان المعادلتين (1)و(3) مستقلتين عن بعضهما تماما.

يضاف عادة الى معادلات مكسويل علاقات الارتباط:

$$\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \mu_o \vec{H}$$

و $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ بالاضافة الى معادلة الاستمرار: $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

وعند جمع قوة لورنتس : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B})$ وقانون نيوتن

الثاني في التحريك فان جملة هذه المعادلات بأكملها تصف سلوك الحقول الكهرطيسية بدقة كما تصف ديناميكية التأثير المتبادل للشحنات (الجسيمات المشحونة) بشكل كلاسيكي . تطبق معادلات ماكسويل السابقة في الفراغ المتجانس والمتماثل المناحي حيث تكون الثوابت الفيزيائية $\sigma, \varepsilon_o, \mu_o$ مستقلة عن الزمن وعن قيم $\vec{H}$ و $\vec{D}$ و $\vec{E}$ و $\vec{B}$ كما يفترض أن يكون الفراغ خال من المغانط أو من الاجسام المغناطيسية الحديدية .

9 - 1 - كمونا الحقل الكهرطيسي في الفراغ :

بما أن تفرق الحقل $\vec{B}$ معدوم دوما فانه يمكننا أن نعرف $\vec{B}$ بدلالة دوار متجهة أخرى $\vec{A}(\vec{r}, t)$ تابعة للاحداثيات والزمن على الشكل :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}\ \vec{A}} \qquad (1-40)$$

تدعى المتجهة $\vec{A}$ بالكمون المتجه أو متجهة الكمون . وادخال هذه المتجهة لايغير من معادلة ماكسويل الثانية لان :

$$\text{div}\ \vec{B} = \text{div}\ \overrightarrow{\text{rot}\ \vec{A}} = 0$$

واذا عوضنا قيمة $\vec{B}$ من العلاقة (40) في المعادلة (1) من معادلات ماكسويل لحصلنا على :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$$

ومنه فان:

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}) = 0$$

وهذا يعني إن المقدار $\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$ مشتق من كمون سلمي أي أن:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}\ \phi} \qquad (1-41)$$

حيث φ هو تابع سلمي للاحداثي والزمن ويدعى بالكمون السلمي .

تدل العلاقة (41) على أن الحقل الكهربائي في النظام اللامستقر يساوي مجموع كمونين سلمي ومتجه :

$$\vec{E} = -\overline{\text{grad}\,\varphi} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (1-42)$$

أو:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

في حين أن الحقل الكهراكدي يكون مشتقا من كمون سلمي فقط. وفي النظام المستقر حيث تكون $\vec{A}$ ثابتة مع الزمن فان $0 = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ والحقل الكهربائي يشتق من كمون سلمي أيضا .

لتعيين الكمونين السلمي φ والمتجهي $\vec{A}$ نعوض قيمة $\vec{E}$ من العلاقة (42) في المعادلات (3) و (4) من المعادلات (39) على الترتيب فنجد:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \mu_o\vec{j} - \varepsilon_o\mu_o\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}.\varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t})$$

$$= \mu_o\vec{j} - \varepsilon_o\mu_o(\vec{\nabla}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2})$$

وبالاستفادة من المطابقة :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \equiv \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

فان المعادلة الاخيرة تساوي :

$$\nabla^2\vec{A} - \varepsilon_o\mu_o\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_o\vec{j} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A} + \varepsilon_o\mu_o\frac{\partial\varphi}{\partial t}) \qquad (1-43)$$

وبالنسبة لمعادلة الكمون السلمي نجد أن :

$$\vec{\nabla}.(-\vec{\nabla}.\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

$$-\nabla^2\varphi - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}.\vec{A}) = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

أو تكتب على الشكل :

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}.\vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (1-44)$$

وهكذا بادخال الكمونات الكهرطيسية فان معادلات ماكسويل الاربعة قد خفضت الى المعادلتين (43) و (44) . ان هاتين المعادلتين مرتبطتين ولذلك يجب ادخال بعض الشروط بحيث تصبح مستقلتان عن بعضهما ودون أن تتغيرا وعندئذ يمكن ايجاد الكمونين φ و $\vec{A}$.

بما أننا عرفنا $\vec{B}$ في العلاقة (40) انطلاقا من تابع كمون متجه اختياري $\vec{A}$ فانه يمكن اقتراح صيغة اخرى لـ $\vec{A}$ أعم بحيث يكتب بدلالة تدرج تابع اختياري $f(r\ ,\ t)$ ودون أن تتغير قيمة $\vec{B}$ وهذه الصيغة هي :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}f \qquad (1-45)$$

ويمكن التحقق أن الكمون المعدل $\vec{A}'$ يصف نفس الحقل $\vec{B}$ وذلك بأخذ دوار العلاقة (45) فنجد :

$$\overrightarrow{rot\ A'} = \overrightarrow{rot\ A} + \overrightarrow{rot}\ \vec{\nabla} = \overrightarrow{rot\ A} + 0 = \vec{B}$$

والحقل $\vec{B}$ اذن لايتغير عند التعبير عنه بدلالة الكمون $\vec{A}'$ ، وحتى لايتغير الحقل الكهربائي $\vec{E}$ المعطى بالعلاقة (45) . يجب ادخال صيغة جديدة للكمون السلمي φ من الشكل :

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial t} \qquad (1-46)$$

يدعى كل من φ' و $\vec{A}'$ بالكمونين المعياريين السلمي والمتجهي .

ان حرية اختيار الكمونين φ' و $\vec{A}'$ يعني أننا نستطيع اختيار مجموعة من الكمونات ($\vec{A}, \varphi$) بحيث أن :

$$\vec{\nabla}.\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \qquad (1-47)$$

والذي يسمى بشرط لورنتس وهو شرط تخضع له الكمونات ويحدد تفرق

المتجهـــة $\vec{A}$. بادخال شرط لورنتس بعين الاعتبار فان معادلـــة الكمونين المتجه (43) والسلمي ; 44) تؤول الى الشكل التالي:

$$\nabla^2\vec{A} - \varepsilon_o\mu_o \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_o\vec{j} \qquad (1-48)$$

$$\nabla^2\varphi - \varepsilon_o\mu_o \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad (1-49)$$

ان المعادلات (47)و(48)و(49) تشكل مجموعة معادلات تكافئ معادلات ماكسويل من كل الاوجه. تتيح المعادلات (48 - 49) بتعيين كل من $\vec{A}$ و φ وذلك اذا علم كل من توزع الشحنات $\rho(\vec{r}, t)$ وكثافة التيار $\vec{j}(\vec{r},t)$. وكما نلاحظ أنه بادخال الكمونين $\vec{A}$ و φ فـــان تعيين مركبات الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$ الستة يتم بداء من أربع معـــادلات سلمية . واحدة لـ φ وثلاث لـ $\vec{A}$ ، واذا أدخلنا مؤثر دالامبير:

$$\Box^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad (1-50)$$

فان المعادلتان (53)و(54) تأخذ الشكل :

$$\left.\begin{aligned} \Box^2\vec{A} + \mu_o\vec{j} &= 0 \\ \Box^2\varphi + \frac{\rho}{\varepsilon_o} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1-51)$$

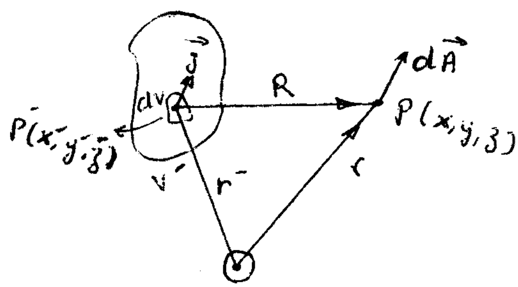
وتدعى هاتين المعادلتين بمعادلتي دالامبير . وتدلان على أن الكمونين السلمي φ والشعاعي $\vec{A}$ يوصفان بمعادلات موجة تنتشر بسرعة الضـــوء. وعندما تكون المنابع ساكنة فان الحدود المتغيرة مع الزمن تنعـدم وتتحول المعادلات (51) الى معادلة بواصون للكمون السلمي والمتجه ان حل المعادلات (51) يكون من الشكل :

$$\left.\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{v'} \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - R/c)}{R}\,dv' \\ \varphi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{v'} \frac{\rho(\vec{r}', t - R/c)}{R}\,dv' \end{aligned}\right\} \qquad (1-52)$$

وتدعى هذه الكمونات بالكمونات المتأخرة . راجع الملحق (٤).

يمكن أن نوجز فكرة الكمونين المتأخرين على الشكل التالي:

بفرض وجود توزع للشحنات والتيارات ضمن حجم ما صغير dv كما هو مبين في الشكل (17 - 1). ان الكمونين $\vec{A}$ و φ الملاحظان في النقطة p التي تبعد مسافة R عن حجم المنطقة الفاعلة وفي اللحظة t قد حدثا بفعل الشحنات والتيارات في dv في اللحظة



شكل (1-17)

$t' = t - R/c$، لان الكمون الذي ينتشر بسرعة c في اللحظة $t' = t - R/c$ فانه يصل p في اللحظة t أي متأخرا عن t' بالمقدار $\frac{R}{c}$. وكمثال مشابه لهذه الظاهرة هي أن رؤيتنا لنجم ما لاتمثل حالته في الوقت الحاضر وانما تمثل حالته بعد مضي الآلاف أو ملايين السنين بحسب بعده عنا .

1- 10 - شرط لورنتس :

ذكرنا سابقا أن اختيار صيغة جديدة للكمون السلمي φ وللكمون الشعاعي $\vec{A}$ من الشكل :

التحويلات المعيارية
$$\left\{ \begin{aligned} \varphi' &= \varphi - \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial t} \\ \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla} f(x, y, z, t) \end{aligned} \right.$$

لايغير من قيمة الحقل الكهربائي $\vec{E}$ المعطى بالعلاقة :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

ولامن قيمة الحقل $\vec{B}$. لنتحقق من العلاقة التي تعطي $\vec{E}$:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\left(\varphi' + \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}' - \vec{\nabla}f\right)$$

$$= -\vec{\nabla}\varphi' - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}f - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}f = -\vec{\nabla}\varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$$

وهكذا فان الحقل $\vec{E}$ لايتغير وتكون الكمونات φ و $\vec{A}$ قد تعينت بدقة التحويلات المعيارية .

لنبرهن الآن على صحة شرط لورنتس :

$$\vec{\nabla}.\vec{A} + \varepsilon_o\mu_o \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

لكي نرى أن الكمونات φ و $\vec{A}$ يمكن ايجادها دوما بحيث تحقق شرط لورنتس ، نفرض في البداية أن $\vec{A}$ و φ اللذين يحققان المعادلتين (43)و(44) لايحققان شرط لورنتس فنكتب :

$$\vec{\nabla}.\vec{A} + \varepsilon_o\mu_o \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \vec{\nabla}(\vec{A}' - \vec{\nabla}f) + \varepsilon_o\mu_o \frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi' + \frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

$$= \vec{\nabla}.\vec{A}' + \varepsilon_o\mu_o \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - \left(\nabla^2 f - \varepsilon_o\mu_o \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right) \qquad (1-53)$$

وبما أن f هو تابع كيفي فيمكن اختياره بحيث أن :

$$\nabla^2 f - \varepsilon_o\mu_o \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \left(\vec{\nabla}.\vec{A}' + \varepsilon_o\mu_o \frac{\partial \varphi'}{\partial t}\right) \qquad (1-54)$$

وبالتالي فان : $\vec{\nabla}.\vec{A} + \varepsilon_o\mu_o \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ أي أن الكمونين $\vec{A}$ و φ يحققان شرط لورنتس . واذا حقق $\vec{A}$ و φ شرط لورنتس فان الكمونين المعياريين $\vec{A}'$ و φ' يحققانه أيضا ويحققان المعادلتين (48) و (49).

11 - 1 - الشروط الحدية :

تحدد معادلات ماكسويل التفاضلية كما ذكرنا العلاقة بين متجهات الحقول $\vec{H}, \vec{D}, \vec{E}$ و $\vec{B}$ في أي نقطة من الفراغ ولكنها لاتعلمنا عن هذه العلاقة فيما لو اصطدمت الموجات الكهرطيسية بسطح فاصل بين وسطين مختلفين أي فيما لو وجد انقطاع في الوسط ،ومادامت الصيغ التفاضلية لاتفي بالغرض فان الصيغ التكاملية لهذه المعادلات يمكنها تحديد مايحدث على السطح الفاصل بين وسطين مختلفين بـ σ ، μ و ε . يقصد بالشروط الحدية : دراسة تغيرات الحقل الكهرطيسي قرب الحدود الفاصلة بين الاوساط.تسمح العلاقتان (2) و (4) بدراسة الشرط الحدي للمركبة الناظمية لحقل التحريض المغناطيسي $\vec{B}$ ولحقل التحريض الكهربائي $\vec{D}$ كما أن العلاقتان (1)و(3) تتيح لنا دراسة الشرط الحدي أي دراسة انقطاع المركبات المماسية للحقلين $\vec{E}$ و $\vec{H}$ على الحد الفاصل بين وسطين مختلفين .

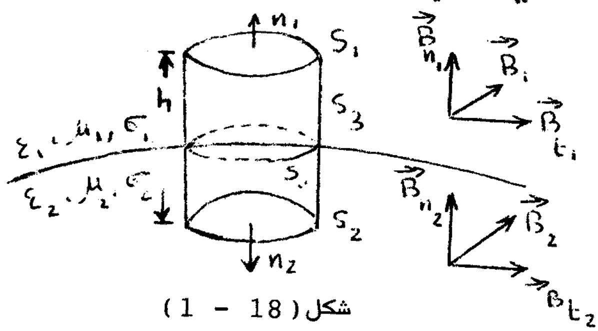
1-11 - 1 - دراسة الشرط الحدي للمركبة الناظمية لحقل التحريض المغناطيسي $\vec{B}$:

لدراسة الشرط الحدي للمركبة الناظمية للحقل $\vec{B}$ على السطح الفاصل بين وسطين يتميزان بالمقادير ε_1 ، σ_1 ، μ_1 و $\mu_2, \sigma_2, \varepsilon_2$ ،ننشيء غشاء اسطواني رقيق على الحد الفاصل كما في الشكل(18 - 1) ، ونعتبر أن الحقول الكهرطيسية تبقى مستمرة داخل هذا الغشاء وتعاني بنفس الوقت من تغير فجائي أو تغير سريع . نرمز بـ s_1 للسطح العلوي للغشاء الاسطواني في الوسط الاول ، s_2 لسطح القاعدة السفلي للغشاء في الوسط الثاني ، s_3 للسطح الجانبي للغشاء و s_o لسطح مقطع الغشاء على الحد الفاصل . بتطبيق معادلة

ماكسويل الثانية نجد :

$$\oint_S \vec{B}.\vec{ds} = \int_{s_1} \vec{B}.\vec{n}_1.ds + \int_{s_2} \vec{B}.\vec{n}_2 ds + \int_{s_3} \vec{B}.\vec{n}_3 ds = 0 \quad (1-55)$$

نختار الاتجاه الموجب للناظم على السطح الفاصل بحيث يكون موجهـا من الوسط الثاني الى الوسط الاول ولذلك فان $\vec{n}_1$ يكون في الاتجاه الموجب و $\vec{n}_2$ يكون في الاتجاه السالب ٠



شكل (1 - 18)

والعلاقة (55) تساوي :

$$\oint_S \vec{B}.\vec{ds} = B_{n_1}.s_1 - B_{n_2}.s_2 + \overline{B}.s_3 = 0$$

حيث $\overline{B}$ هي القيمة الوسطية لحقل التحريض المغناطيسي على السطح الجانبي ٠ للحصول على الشرط الحدي نجعل $h \longrightarrow 0$ فان

$s_1 = s_2 \rightarrow s_0$ و $s_3 \longrightarrow 0$ ومنه:

$(B_{n_1} - B_{n_2})s_0 = 0$ وبما أن $s \neq 0$ فان :

$$B_{n_1} = B_{n_2} \quad (1-56)$$

وهذه العلاقة تدل على أن المركبة الناظمية لحقل التحريض المغناطيسي تكون مستمرة على السطح الفاصل بين الوسطين المختلفين٠

ولكن $B_{n_1} = \mu_1 H_{n_1}$ و $B_2 = \mu_2 H_{n_2}$ ومنه فان :

$$\mu_1.H_{n_1} = \mu_2.H_{n_2}$$

أو:

$$\frac{H_{n_1}}{H_{n_2}} = \frac{\mu_2}{\mu_2} \qquad (1-57)$$

أي أن المركبة الناظمية للحقل المغناطيسي H على السطح الفاصل تعاني انقطاعا مقداره $\frac{\mu_2}{\mu_1}$.

2 – 11 – 1 – دراسة الشرط الحدي للمركبة الناظمية لحقل التحريض الكهربائي $\vec{D}$

نستخدم في هذه الحالة المعادلة (4) من معادلات ماكسويل لدراسة الشرط الحدي للمركبة الناظمية لـ $\vec{D}$:

$$\oint_s \vec{D}.\vec{ds} = \int_v \rho dv = q$$

نقوم باتباع خطوات مماثلة للخطوات في الفترة السابقة فنحصل على :

$$\oint_s \vec{D}.\vec{ds} = \int_{s_1} \vec{D}.\vec{n}_1 ds + \int_{s_2} \vec{D}.\vec{n}_2 ds + \int_{s_3} \vec{D}.\vec{n}_3 ds = q \qquad (1-58)$$

$$= D_{n_1}.s_1 - D_{n_2}.s_2 + \bar{D}.s_3 = q \qquad (1-59)$$

حيث q هي الشحنة الكلية الموزعة بكثافة حجمية في الغشاء المفروض .

$\bar{D}$ هي القيمة الوسطية لحقل التحريض الكهربائي على السطح الجانبي :

عندما $h \longrightarrow 0$ فان $s_1 = s_2 \to s_o$ و $s_3 \longrightarrow 0$ والعلاقة (59) تصبح على الشكل التالي :

$$(D_{n_1} - D_{n_2}) s_o = q$$

ومنه فان :

$$D_{n_1} - D_{n_2} = \frac{q}{s_o} = \sigma_s \qquad (1-60)$$

حيث σ_s هي الكثافة السطحية للشحنات على السطح الفاصل .

وهكذا نجد أن المركبة الناظمية لحقل التحريض الكهربائي منقطعة على السطح الفاصل بين الوسطين عندما تتواجد عليه شحنات بكثافة سطحية σ_s .

وبتعويض قيمة D_{n_1} : $D_{n_1} = \varepsilon_1 E_{n_1}$ و D_{n_2} : $D_{n_2} = \varepsilon_2 E_{n_2}$ في العلاقة

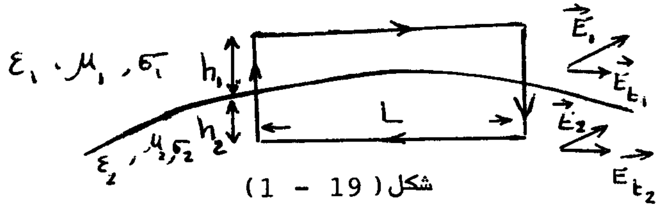
(60) نجد :

$$\varepsilon_1 E_{n_1} - \varepsilon_2 E_{n_2} = \sigma_s \qquad (1-61)$$

أي أن المركبة الناظمية للحقل الكهربائي تكون منقطعة .

3 – 11 – 1 – دراسة الشرط الحدي للمركبة المماسية للحقل الكهربائي $\vec{E}$:

ننشئ غشاء مستطيل على السطح الفاصل بين الوسطين، طوله L وعرضه h_1 في الوسط الاول و h_2 في الوسط الثاني ونأخذ الاتجاه الموجب للجولان كما هو موضح في الشكل (1-19) :



شكل (1 - 19)

ولايجاد الشرط الحدي للمركبة المماسية للحقل $\vec{E}$ نستخدم معادلة ماكسويل الاولى :

$$\oint_c \vec{E}.\vec{d\ell} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_s \vec{B}.\vec{ds} \qquad (1-62)$$

$$\oint_c \vec{E}.\vec{d\ell} = LE_{t_1} - LE_{t_2} + h_1E_{n_1} + h_2E_{n_2} - h_1E'_{n_1} - h_2E'_{n_2} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}L(h_1+h_2)$$

حيث $\bar{B}$ هو التدفق المغناطيسي الوسطي عبر سطح المستطيل Lh_1+Lh_2

عندما $h_2 \longrightarrow 0$ و h_1 فان الحدود الاربعة الاخيرة ومساحة المستطيل تتناهى نحو الصفر ومنه :

$$L(E_{t_1} - E_{t_2}) = 0$$

وباعتبار أن $L \neq 0$ فان :

$$E_{t_1} = E_{t_2} \qquad (1-63)$$

وهكذا فان المركبة المماسية للحقل الكهربائي $\vec{E}$ تكون مستمرة عبر السطح الفاصل . واذا عبرنا عن E_t بدلالة كثافة التيار j_t : $j_t = \sigma E_t$ نجد أن :

$$\frac{jt_1}{\sigma_1} = \frac{jt_2}{\sigma_2}$$ أو:

$$\frac{jt_1}{jt_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \qquad (1-64)$$

هذه العلاقة تدل على أن المركبة المماسية لكثافة التيار تعاني انقطاعا على السطح الفاصل مقداره $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$.

4 – 11 – 1 – دراسة الشرط الحدي للمركبة المماسية للحقل المغناطيسي $\vec{H}$:

نحصل على الشرط الحدي للمركبة المماسية للحقل المغناطيسي $\vec{H}$ وذلك باستخدام معادلة ماكسويل التالية :

$$\oint \vec{H}.\overrightarrow{d\ell} = \int_s (\vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})\overrightarrow{ds}$$

ننشئ غشاءً مستطيلاً على السطح الفاصل كما في الشكل السابق (1-21). والمعادلة السابقة نكتبها على الشكل :

$$\oint \vec{H}.\overrightarrow{d\ell} = LH_{t_1} - LH_{t_2} + h_1H_{n_1} + h_2H_{n_2} - h_1H'_{n_1} - h_2H'_{n_2} =$$

$$= (\frac{\partial D_n}{\partial t} + j_n)L(h_1 + h_2) \qquad (1-65)$$

عندما $h_1, h_2 \to 0$ فان الحدود الاربعة الاخيرة من الطرف الايسر تتناهى نحو الصفر . واذا كانت سرعة تغير حقل الانزياح الكهربائي $\frac{\partial D_n}{\partial t}$ محدودة وكذلك كثافة التيار j_n فان الطرف الايسر يتناهى أيضاً نحو الصفر ومنه :

$$L(H_{t_1} - H_{t_2}) = 0$$

وبما أن $L \neq 0$ فان :

$$H_{t_1} = H_{t_2} \qquad (1-66)$$

والمركبة المماسية للحقل المغناطيسي تكون مستمرة على السطح الفاصل .

واذا استبدلنا H_{t_1} بـ B_{t_1} و H_{t_2} بـ B_{t_2} فان العلاقة (66) تأخذ

الشكل التالي :

$$\frac{B_{t_1}}{\mu_1} = \frac{B_{t_2}}{\mu_2}$$

منـــــه :

$$\frac{B_{t_1}}{B_{t_2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (1-67)$$

لمركبة المماسية لحقل التحريض المغناطيسي تكون منقطعة على السطــح فاصل بالكمية $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ وفي الحقيقة فان العلاقة (66) تكون صحيحة ذا كانت الناقلية محدودة أي أن كثافة التيار السطحي تكون معدومــة ما اذا كانت الناقلية لانهائية كما في المواد الفائقة الناقليـــة فان $j_n \neq 0$ و $\lim\limits_{(h_1+h_2)\to 0} j_n \cdot (h_1 + h_2) = j_{sn} A/m$ و $D_n \cdot (h_1+h_2) = 0$

وبالتالي فان العلاقة (66) تساوي : $L(H_{t_1} - H_{t_2}) = j_{sn} \cdot L$ ومنه فان :

$$H_{t_1} - H_{t_2} = j_{sn} \quad (1-68)$$

حيث j_{sn} هي مركبة كثافة التيار السطحي العمودية على اتجاه مركبة الحقل $\vec{H}$ الملاءمة . ان فكرة كثافة التيار السطحي تشابه تقريبـــا مفهوم كثافة الشحنة السطحية حيث تمثل تيارا محدودا يجري في طبقـــة لامتناهية من الصغر على السطح.

في المواد الفائقة الناقلية يكون الحقل الكهربائـــي $\vec{E}$ معدوما من أجل أي قيمة معينة لكثافة التيار بسبب كون الناقليـــة $\sigma = \infty$. ان عمق ولوج الحقل الكهربائي المتناوب في هذه النواقـــل والتيار الناجم عنه يتناقص بازدياد الناقلية σ فاذا كان تردد التيار المار في هذه المواد عال فان التيار يجري ضمن طبقة رقيقة

قرب سطح وسماكة هذه الطبقة تقترب من الصفر عندما تقترب الناقلية من اللانهاية.

واذا كانت ناقلية الوسط الثاني هي لانهائية فان الحقل $\vec{E}_2$ ينعدم وبالتالي فان الحقل المغناطيسي $\vec{H}_2$ ينعدم أيضا كما يظهر من معادلة ماكسويل الاولى ولذلك فان الشرط الحدي للمركبة المماسية لـ $\vec{H}$ (العلاقة (68)) يصبح على الشكل التالي :

$$H_{t_1} = j_{sn} \tag{1-69}$$

تدل العلاقة (69) على أن التيار في واحدة العرض على سطح مادة فائقة الناقلية يساوي الى الحقل المغناطيسي H الخارجي. ان الحقل المغناطيسي والتيار السطحي يكونان موازيين للسطح ولكنهما متعامدان ويعبر عن ذلك بشكل متجهي بالعلاقة :

$$\vec{J}_s = \vec{n} \wedge \vec{H} \tag{1-70}$$

حيث $\vec{n}$ هي متجهة الواحدة على الناظم الموجه الى خارج السطح.

ويمكن تلخيص الشروط الحدية بالجدول التالي :

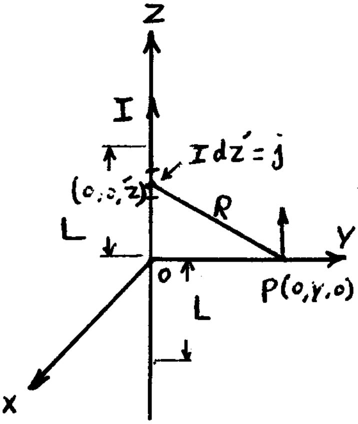
الناقلية (σ)	E_t	D_n	H_t	B_n
$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$	$E_{t_1} = E_{t_2}$	$D_{n_1} = D_{n_2}$	$H_{t_1} = H_{t_2}$	$B_{n_1} = B_{n_2}$
$\sigma = \infty$	$E_{t_2} = 0$	$D_{n_2} = 0$	$H_{t_2} = 0$	$B_{n_2} = 0$
	$E_{t_1} = 0$	$D_{n_1} = \sigma_s$ (كثافة الشحنات السطحية)	$H_{t_1} = j_{sn}$	$B_{n_1} = 0$
$\sigma_1, \sigma_2 \neq \infty$ أية قيمة كانت	$E_{t_1} = E_{t_2}$	$D_{n_1} - D_{n_2} = \sigma_s$	$H_{t_1} = H_{t_2}$	$B_{n_1} = B_{n_2}$

تمارين محلولة

- ليكن سلك مستقيم طوله لانهائي يمر فيه تيار ثابت الشدة I . كما في الشكل التالي ، أوجد حقل التحريض المغناطيسي $\vec{B}$ المتولد عن السلك في نقطة p انطلاقا من العلاقة العامة لمتجهة الكمون $\vec{A}$ التالية

$$\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{v'} \frac{\vec{j}\cdot dv'}{R}$$

الحل :



ان تكامل كثافة التيار $\vec{j}$ على سطح مقطع السلك تساوي شدة التيار I . وبما أن جهة التيار هي بالاتجاه z فان لـ $\vec{A}$ مركبة وحيدة هي A_z . نوجد أولا $\vec{A}$ من أجل طول محدد للسلك 2L ومن ثم عندما يكون $L>>y$.

ان A_z اذن تساوي :

$$A_z = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{-L}^{+L}\frac{Idz'}{R}$$

فاذا فرضنا أن النقطة p التي نحسب فيها $\vec{A}$ واقعة في المستوى (y - z) فان :

$$R = \sqrt{z'^2 + y^2}$$

نعوض قيمة R فنجد :

$$A_z = \frac{\mu_o}{2\pi} \int_0^L \frac{I}{\sqrt{y^2 + z'^2}} dz'$$

$$= \frac{\mu_o I}{2\pi}[\ln(z' + \sqrt{y^2 + z'^2})]_0^L$$

$$= \frac{\mu_o I}{2\pi}[\ln(L + \sqrt{y^2 + L^2}) - \ln y]$$

وعندما يكون $y << L$ فان A_z تساوي :

$$A_z \approx \frac{\mu_o I}{2\pi}(\ln 2L - \ln y)$$

$$\approx \frac{\mu_o I}{2\pi} \ln(\frac{2L}{y}) .$$

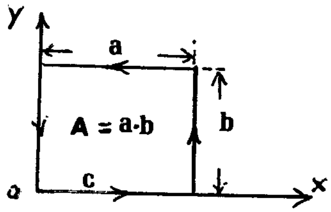
وحقل التحريض المغناطيسي $\vec{B}$ في النقطة p الواقعة في المستوى $z - y$ يساوي :

$$B_x = (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = - \frac{\mu_o I}{2\pi y}$$

وخطوط الحقل $\vec{B}$ تكون عبارة عن دوائر حول السلك .

٢ ـ هل الحقل الكهربائي المعطى بالعلاقة التالية $\vec{E} = \eta(-y\vec{i} + x\vec{j})$ هو حقل محفوظ أم لا .

احسب تكامل $\vec{E}.\overrightarrow{d\ell}$ على الطريق المبين في الشكل التالي :



الحـــــل: لمعرفة ماذا كان الحقل $\vec{E}$ محفوظا أم لا نحسب دواره:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \eta \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \eta(0 - \frac{\partial x}{\partial z})\vec{i} - \eta(0 + \frac{\partial y}{\partial z})\vec{j} + \eta(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y})\vec{k} = 2\eta\vec{k} \neq 0$$

والحقل $\vec{E}$ المعرف بالعلاقة السابقة يكون غير محفوظ ولذلـــك لايمكن تحديد تابع كموني له ∘

لنحسب الآن التكامـــل $\oint_C \vec{E}.d\vec{\ell}$ بالاعتماد على نظريـــة ستوكس :

$$\oint_C \vec{E}.d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})\,d\vec{s} = \int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})\vec{n}.dA$$

$$= 2\eta\int_S \vec{k}.\vec{n}\ dA = 2\eta ab$$

٣ ـ يعطى الكمون الكهربائي الناتج عن ثنائي أقطاب $\vec{p}$ في نقطة M تقع على مسافة كبيرة جدا منه بالعلاقة :

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_o r^3}$$

حيث $\vec{p} = 2q\ell\vec{j}$ و $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ انظر الشكل.

بين أن تدرج تابع الكمون السابق يساوي :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}(-\frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{3(p.\vec{r})\vec{r}}{r^5})$$

الحــــــل:

$$\phi(x, y, z) = \frac{2\ell q\, \vec{j}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_o r^3}$$

$$= \frac{2\ell q y}{4\pi\varepsilon_o (x^2+ y^2+ z^2)^{3/2}}$$

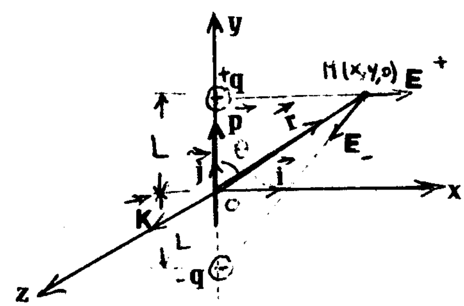
لنحسب الآن المشتقات الجزئية $-\frac{\partial\phi}{\partial x}$, $-\frac{\partial\phi}{\partial y}$ و $-\frac{\partial\phi}{\partial z}$ ،

$$-\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{2\ell q}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{3xy}{(x^2+ y^2+ z^2)^{5/2}} = \frac{2\ell q}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{3xy}{r^5}$$

$$-\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{2\ell q}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{3zy}{r^5}$$

$$-\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{2\ell q}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{3y^2(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - (x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{(x^2+ y^2+ z^2)^3}$$

$$= \frac{2\ell q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right).$$



ولكن الحقل الكهربائي $\vec{E}$ يساوي :

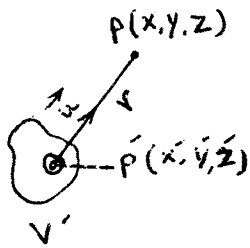
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}(\phi) = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$= \frac{2\ell q}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{\vec{j}}{r^3} + \frac{3y}{r^5}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\right]$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{3(\vec{p}.\vec{r})\vec{r}}{r^5}\right]$$

٤ ـ أثبت انطلاقا من قانون بيووسافار :

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{v'} \frac{\vec{j}\wedge\vec{u}}{r^2}\,dv'$$



أن $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ في كل نقطة من نقاط الفراغ المحيط بالجسم v' الذي يحوي مصدر التيار ، وحيث أن كثافة التيار $\vec{j}(x',y',z')$ لاتتعلق بالاحداثيات x, y, z .

الحل :

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{v'} \nabla\left(\frac{\vec{j}\wedge\vec{u}}{r^2}\right)dv$$

وبالاستفادة من المطابقة :

$$\vec{\nabla}.(\vec{A}\wedge\vec{B}) \equiv \vec{B}(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) - \vec{A}(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})$$

فان :

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{j}\wedge\frac{\vec{u}}{r^2}\right) = \frac{\vec{u}}{r^2}(\vec{\nabla}\wedge\vec{j}) - \vec{j}\left(\vec{\nabla}\wedge\frac{\vec{u}}{r^2}\right)$$

ان الحد الاول من اليمين يساوي الصفر لان $\vec{j}$ لاتتعلق بالاحداثيات (x, y, z) وانما فقط باحداثيات المنبع (x', y', z') والحد الثاني ايضا من اليمين يساوي الصفر لان :

$$\vec{\nabla}\wedge\frac{\vec{u}}{r^2} = \vec{\nabla}\wedge\frac{\vec{r}}{r^3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x-x'}{r^3} & \frac{y-y'}{r^3} & \frac{z-z'}{r^3} \end{vmatrix} = 0$$

وبالتالي فان $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ في كل نقطة من نقاط الفراغ .

تمارين غير محلولــــــــــة

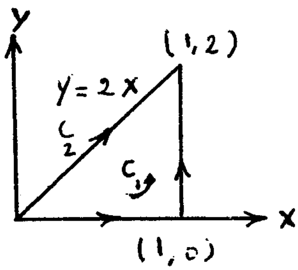
١ ـ لدينا حقل كهربائي معطى بالعلاقة .

$$\vec{E} = A[(xy^2 + x^2y)\vec{i} + x^2y\vec{j}]$$

حيث A ثابت ، والمطلوب .

A ـ احسب التكامل $\vec{E}.d\vec{\ell}$ على طول الطريق $C_1[(0,0)\to(1,0)\to(1,2)]$

كما هو موضح في الشكل .



B ـ احسب التكامل $\vec{E}.d\vec{\ell}$ على طول الطريق

$C_2(y = 2x)$ من النقطة $(0,0)$ الى

النقطة $(1, 2)$.

C ـ بالاعتماد على نتيجة الطلب الاول والثاني

بين هل الحقل $\vec{E}$ محفوظ أم لا ؟.

D ـ احسب $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$ ماذا تستنتج من الجواب .

E ـ احسب التكامل $\vec{E}.d\vec{\ell}$ على الطريق المغلق من النقطـــــــــة

$(0,0) \xrightarrow{C_1} (1,2)$ ومن $(1,2) \xrightarrow{C_2} (0,0)$

هل النتيجة تتفق مع نتيجة الطلب الرابع .

F ـ احسب التكامل $\int_s \vec{\nabla} \wedge \vec{E}.\vec{n}ds$ على السطح s في المستـــــوى

$(x - y)$ المحاط بـ C_1 و C_2 ، حيــــث $\vec{n}.ds = dx\ dy\ \vec{k}$

قارن هذه النتيجة مع النتيجة التي حصلت عليها في الطلب الخامس.

٢ ـ لدينا حقل تحريض مغناطيسي $\vec{B}$ معطى بالعلاقة :

$$\vec{B} = B_x(x, y)\vec{i} + B_y(x, y)\vec{j}$$

بين أن : -1 $\quad \dfrac{\partial B_x}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial y}$ وأن:

كثافة التيار $\vec{j} = \frac{1}{\mu_o}\left[\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right]\vec{k}$

٢ ـ اذا كان $\vec{j} = 0$ وكان $B_x(x,y)=axy$ حيث a هو مقدار ثابت . أوجد أفضل صيغة للحقل $B_y(x , y)$.

٣ ـ لدينا حقل كهربائي مركباته $E_x=\frac{E_o x^2}{a^2}$, $E_z=-2E_o(x+y)z/a^2$ بفرض أن E_y هو تابع فقط لـ y وأن $\rho = 0$ في كل مكان . عين :

١ ـ E_y

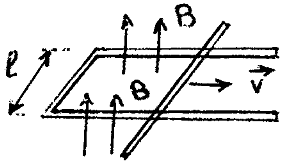
٢ ـ $\vec{B}(t)$ اللازمة للحصول على دوار الحقل الكهربائي .

٣ ـ تحديد كثافة التيار $\vec{j}$ وذلك بفرض أن كثافة تيار الانزياح معدوم .

٤ ـ تحقق أن $\operatorname{div} \vec{B}(t) = 0$

٥ ـ أثبت أن دوار الحقل الكهربائي $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\vec{r}}{r^3}$ المتولد عن شحنة نقطية يساوي الصفر في أي نقطة من الفراغ .

٤ ـ تنزلق قطعة ناقلة مستقيمة على اطار ناقل على شكل حرف U بسرعة قدرها $v = 15$ m/sec كما في الشكل . يخضع الاطار الى حقل تحريض مغناطيسي منتظم $\vec{B}$ مستقل عن الزمن وعمودي على مستوى الاطار ويساوي 800 G . عين القوة المحركة الكهربائية المتحرضة E.M.F في الاطار وذلك باستخدام قانون فاراداي .



الجواب: $\varepsilon = -0,96$ volt

٥ ـ لدينا حقل تحريض مغناطيسي منتظم $\vec{B}$ في منطقة من الفراغ :

١ ـ برهن أن متجهة الكمون في كل نقطة مثل $M(\vec{OM} = \vec{r})$ تساوي :

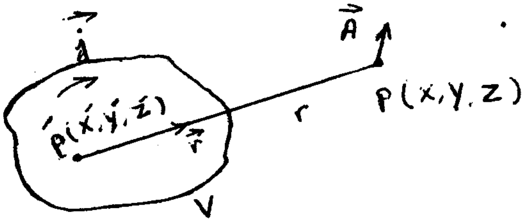
حيث $\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B} \wedge \vec{r})$ حيث o مبدأ الاحداثيات ثابت .

٢ – برهن أن $\vec{A}$ تحقق العلاقة $div\ \vec{A} = 0$ والذي يسمى بمعيار كولومب .

٦ – برهن اعتمادا على علاقة الكمون الشعاعي :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{j}(x',y',z')\,dv}{r}$$

أن: $div\ \vec{A} + \varepsilon_o\mu_o \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ (شرط لورنتس) . حيث r هو البعد بين p و p' .



٧ – في نقطة ما من ناقل يجري فيه تيار مستمر ،مركبات كثافة التيار هي :

$$j_x = 2ax \quad , \quad j_y = 3bz$$

حيث a و b ثوابت ،أوجد المركبة j_z.

٨ – اذا كانت مركبات الحقل الكهربائي $\vec{E}$ لموجة كهرطيسية في الفراغ هي:

$$E_x = E_z = 0 , \quad E_y = A \cos \omega(t - \frac{z}{C})$$

باستخدام معادلات ماكسويل في الفراغ أوجد الحقل المغناطيسي $\vec{H}$.

٩ – تبلغ الناقلية لوسط ما $\sigma = 10^{-1}(\Omega.m)^{-1}$ وسماحيته النسبية $\varepsilon_r = 50$ وهي ثابتة مع التواتر ، واذا كانت $\mu_r = 1$ لهذا الوسط بين هل هذا الوسط ناقل أم عازل عند التواترين التاليين:

أ – $\nu = 50$ MHz ب – $\nu = 10^4$ MHz . حيث $\varepsilon_o = (36\pi\times 10^9)^{-1}$ Farad/m

١٠– بين أن معادلة الاستمرار على سطح مادة فائقةالناقلية تصبح من الشكل :

$$\mathrm{div}\,\vec{j}_s + \frac{\partial \sigma_s}{\partial t} = 0$$

١١– برهن أن الكمون المتجهة $\vec{A} = \frac{\acute{g}(u)}{C\,r}\vec{k}$ هو حل للمعادلة $\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0$ حيث $\vec{k}$ هي متجهة الواحدة على المحور $g(u).z$ هو أي تابع لـ u : $u = t - \frac{r}{C}$ ، $\acute{g}(y)$, $r^2=x^2+y^2+z^2$ هو مشتق g بالنسبة لـ u . أوجد مركبات الحقل المغناطيسي $\vec{H}$ ، الكمون السلمي φ ، والحقل الكهربائي $\vec{E}$.

١٢– أوجد طويلة ومنحى كثافة تيار الانزياح في وسط غير مبدد في اللحظة $t = 0$ وذلك بوجود خقل مغناطيسي $\vec{H}$:

$$\vec{H} = 3\sin 2x\,\cos(kz - \omega t)\vec{j} + 4\cos 2x\,\sin(kz - \omega t)\vec{k}$$

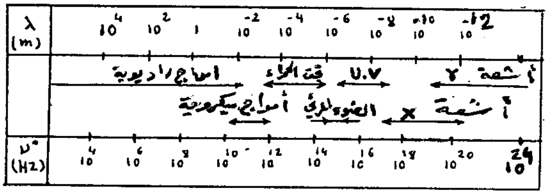
الفصل الثاني

انتشار الامواج الكهرطيسيـــــــــة

1 – 2 – انتشار الامواج الكهرطيسية في الاوساط المتجانسة والمتماثلـــــة المناحي :

الوسط المتجانس هو الوسط الذي تكون فيه المقاديـــر ε, μ و σ ثابتة في كل نقطة من هذا الوسط ، أما الوسط المتماثل المناحـــي فهو الوسط الذي تكون فيه ε أو μ أو σ كمية سلمية ثابتة ولذلك فان لكل من $\vec{E}$ و $\vec{D}$ ، $\vec{B}$ و $\vec{H}$ ، $\vec{J}$ و $\vec{E}$ نفس الاتجاه في أي نقطة من هذا الوســـط. أما اذا اختلفت قيم ε أو μ أو σ باختلاف المنحى أو الانجاه فعندئــذ نقول أن الوسط هو متباين المناحي ومركبات ε أو μ أو σ تمثل عندئـــذ بمصفوفة . ان معادلات ماكسويل لاتخص تواترا معينا من تواترات طيـف الامواج الكهرطيسية لان جميع هذه الامواج تبدي نفس الصفات الفيزيائية يبين الشكل (1 - 2) طيف الامواج الكهرطيسية المدروسة تجريبيـــا . يمتد هذا الطيف المستمر بدءا من الاطوال الموجية الكبيرة حتى أشعة γ ذات الاطوال الموجية القصيرة جدا ، أي ذات الطاقات العالية جـــدا الملاحظة في الاشعة الكونية . ان هذا الطيف يبدأ من التواترات التـــي من مرتبة 10^4 Hz (طول الموجة 3×10^4m) وينتهي عند تواترات مـــن مرتبة 10^{24}Hz (طوال الموجة يساوي 3×10^{-16}m وما دون) . يشمـــل طيف الامواج الكهرطيسية موجات الراديو والتلفزيون والامواج الميكروية والامواج الضوئية والاشعاع الحراري وأشعة x وأشعة غاما . وجميــــع هذه الامواج هي أمواج عرضية تنتشر في الخلاء بسرعة الضوء c .

سوف نبرهن في هذا الفصل على أن الحقول $\vec{E}$ و $\vec{B}$ في الخلاء تخضع لمعادلة انتشار لها نفس شكل معادلة انتشار الكمونين $\vec{A}$ و φ وسوف نقتصر في دراستنا على الامواج الكهرطيسية المستوية .



شكل (2-1)

2 – 1 – 2 انتشار الامواج الكهرطيسية المستوية في الخلاء:

في الخلاء تكون كثافة الشحنات الكهربائية معدومة ($\rho = 0$) وكذلك كثافة التيار ($\vec{j} = 0$) ويكون $\varepsilon = \varepsilon_0$ و $\mu = \mu_0$ ، أما معادلات ماكسويل فتأخذ الصيغ التالية :

$$(2-1)\quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad\qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2-3)$$

$$(2-2)\quad \vec{\nabla} . \vec{H} = 0 \qquad\qquad \vec{\nabla} . \vec{E} = 0 \quad (2-4)$$

بتطبيق المؤثر $\overrightarrow{rot}$ على طرفي العلاقة (1) نجد :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\mu_0 \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

ولكن :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{\nabla} (\mathrm{div}\, \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

وذلك لأن $\mathrm{div}\, \vec{E} = 0$. وبتعويض قيمة $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$ في الطرف الايسر من المعادلة السابقة نحصل على العلاقة التالية :

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

ومنه :

$$\nabla^2\vec{E} - \varepsilon_o\mu_o \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

وحيث أن $\varepsilon_o\mu_o c^2 = 1$ فان $\varepsilon_o\mu_o = \frac{1}{c^2}$ ومعادلة انتشار الحقل الكهربائي هي :

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (2-5)$$

وباتباع نفس الخطوات السابقة على المعادلة (3) نجد أن معادلة انتشار الحقل المغناطيسي $\vec{H}$ هي :

$$\nabla^2\vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0 \qquad (2-6)$$

نفرض حلا للمعادلات(5)و (6) على شكل موجة مستوية تنتشر وفق احد الاتجاهات وليكن ox مثلا وبالتالي فان مركبات: $\vec{E}$: E_x , E_y , E_z ومركبات $\vec{H}$: H_x , H_y , H_z لاتتعلق بـ y و z وانما بـ x فقط ،أي :

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

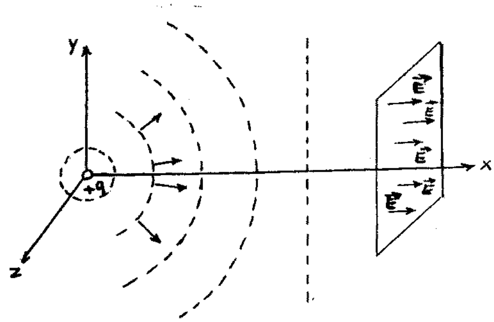
$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial H_x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial H_y}{\partial y} = \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0$$

ويمكن توضيح هذا الحل عن طريق المثال التالي :

اذا وضعنا شحنة نقطية $+q$ في مبدأ الاحداثيات فان سطوح تساوي الكمون $V = ct$ تكون كرات متمركزة حول O والحقل الكهربائي $\vec{E}$ يكون عموديا على هذه الكرات،شكل (2 - 2).

ان الحقل على بعد قريب من الشحنة يتعلق دون شك بكل من x و y و z . ولكن عندمانبتعد كثيرا عن الشحنة q في الاتجاه ox مثلا فان سطوح تساوي الكمون سوف تكون مستويات عمودية



شكل(2 - 2)

على ox والحقل الكهربائي $\vec{E}$ يكون له نفس الطويلة والمنحني في كل نقطة من نقاط هذه المستويات . والحقل الكهربائي لايتعلق عندئذ إلا بـ x .

من معادلة ماكسويل (4) نجد :

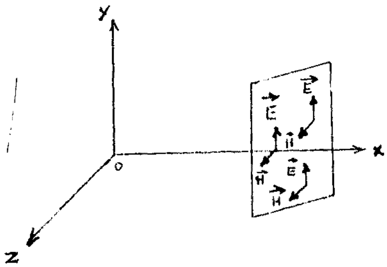
$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

أي أن المركبة E_x للحقل الكهربائي $\vec{E}$ ثابتة في كل لحظة على طول المحور ox ، ومن معادلة ماكسويل (3) نجد :

$$(\overrightarrow{\text{rot } H})_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon_o \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

أي أن $\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$ وبالتالي تكون المركبة E_x مستقلة عن الزمن. وبما أننا نهتم بدراسة الامواج وليس بدراسة الحقل المنتظم فاننا نعتبر أن $E_x = 0$ وباتباع نفس الاسلوب بالنسبة لـ $\vec{H}$ فاننا نجد أن $H_x = 0$ لانه ايضا ثابت مع الزمن ومنتظم على امتداد المحور ox . والنتيجة هي أن الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{H}$ في الموجة المستوية يكونان عموديان على اتجاه الانتشار ، واذا اكتفينا بهذا الحل فان لكل من $\vec{E}$ و $\vec{H}$ مركبات على المحورين oy و oz. واذا خصصنا أكثر الموجة المستوية التي ندرسها بقولنا : لنبحث عن حل لمعادلات الموجة بحيث أن $\vec{E}$ لايملك سوى مركبة واحدة على المحور oy ، ونقول في هذه

الحالة أن الموجة المستوية هي مستقطبة استقطابا مستقيما في الاتجاه oy، شكل (3 - 2) اذن فمركبات $\vec{E}$ هي: $E_x = E_z = 0, E_y \neq 0$. ولنرى في هذه الحالة ما اذا كان للحقل $\vec{H}$ مركبة على oy . واذا أخذنا المركبة على y لمعادلة ماكسويل (1) نجد:



شكل (3 - 2)

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{E})_y = -\mu_o \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

وهذا يساوي :

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = - \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0$$

أي أن H_y ثابتة مع الزمن. واذا أخذنا مسقط معادلة ماكسويل (3) على z نجد:

$$(\overrightarrow{rot\ H})_z = \varepsilon_o \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

أي أن :

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0$$

والمركبة H_y للحقل المغناطيسي $\vec{H}$ تكون منتظمة في كل نقطة من نقاط المحور x . ولذلك نعتبر أن H_y تساوي الصفر مادمنا نهتم بالامواج. اذن فمركبات الحقل $\vec{E}$ لايبقى منها سوى E_y ، $E_x = E_z = 0$ وبالمقابل نجد أن مركبات $\vec{H}$ تنعدم ماعدا المركبة H_z على المحور z . فالحقلين الكهربائي والمغناطيسي اذن متعامدان فيما بينهما وعموديان على جهة الانتشار ولذلك فان الموجة المستوية المفروضة هي عرضية . والموجة المستوية التي اخترناها لحل معادلات الموجة للحقل الكهربائيّ الذي يحوي فقط المركبة E_y تدعى بالموجة المستوية المستقطبة

استقطابا مستقيما في الاتجاه oy والمستوى الذي يحوي منحى الانتشار

والمتجهة $\vec{H}$ يدعى بمستوي الاستقطاب ومعادلات الموجة (5)و (6)

للحقلين الكهربائي والمغناطيسي تصبح على الشكل :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \qquad (2-7)$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0 \qquad (2-8)$$

ان الحل العام لهذه المعادلات هو:

$$E_y(x,\ t) = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$H_z(x,\ t) = f_2\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

حيث f_1 وf_2 هما تابعان اختياريان لـ $u=\left(t - \frac{x}{c}\right)$ وهما غير

مستقلين لان E_y و H_z يرتبطان مع بعضهما بالعلاقة :

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon_o \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

ولكن :

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{df_2}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{df_2}{du}$$

و :

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{df_1}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df_1}{du}$$

ومنه فان :

$$-\frac{1}{c}\frac{df_2}{du} = -\varepsilon_o \frac{df_1}{du}$$

وبالتكامل نجد:

$$f_2(u) = \varepsilon_o c\ f_1(u) + A$$

حيث A هي ثابتة تكامل تؤخذ مساوية للصفر لأن H_z ثابت ومنتظم

وهي ليست الحالة التي نريدها . اذن :

$$H_z(x,t) = \varepsilon_o c E_y(x,t) \qquad (2-9)$$

تدعى النسبة :

$$\frac{E}{H} = \frac{E_y}{H_z} = \frac{1}{\varepsilon_o c} = \mu_o c = \left(\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}\right)^{\frac{1}{2}} = 377\text{ohms} \qquad (2-10)$$

بالمقاومة المميزة للخلاء ، حيث $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7} H/m$ و

$\varepsilon_o = \dfrac{1}{36\pi \times 10^9}$ F/m .

يمكن تمثيل الموجة المستوية المستقطبة استقطابا مستقيما كما في الشكل (4 - 2) . ففي اللحظة $t = 0$ فان E_y و H_z يساويان :

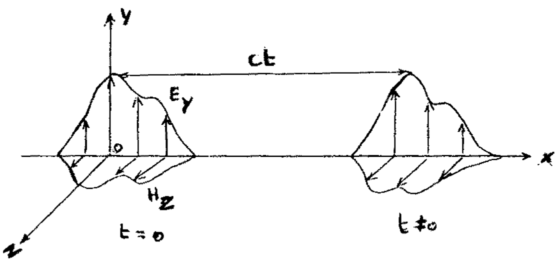
$$E_y = f_1(-\frac{x}{c})$$

$$H_z = f_2(-\frac{x}{c}) = \frac{1}{\mu_o c} f_1(-\frac{x}{c})$$

وفي اللحظة t تكون الموجة المستوية المنتشرة على طول المحول ox قد قطعت مسافة مساوية ct والحقلين E_y و H_z في اللحظة t يعطيان بالعلاقتين :

$$E_y(x, t) = f_1(t - \frac{x}{c})$$

$$H_z(x, t) = \frac{1}{\mu_o c} f_1(t - \frac{x}{c})$$



شكل (2 - 4)

3 - 1 - 2 - الامواج المستوية الجيبية المستقطبة استقطابا مستقيما :

عندما يكون f_1 تابعا جيبيا فان الموجة تدعى بالموجة الجيبية المستوية :

$$E_y(x, t) = E_o \cos(\omega t - kx) \qquad (2-11)$$

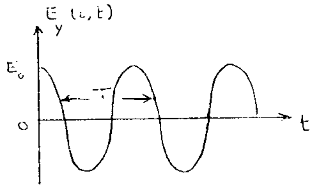
والحقل المغناطيسي يساوي :

$$H_z(x, t) = H_o \cos(\omega t - kx) \qquad (2-12)$$

حيث : $k = \frac{\omega}{c}$ هو العدد الموجي و $H_o = \frac{E_o}{\mu_o c}$

ـ تغير الحقل مع الزمن : في نقطة معينة من المحور ox ولتكن $x_1 = 0$ ، يكون تغير الحقل E_y مع الزمن من الشكل :

$$E_y(0, t) = E_o \cos \omega t$$



شكل (2 - 5)

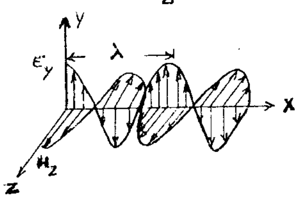
والشكل (5 - 2) يوضح تغير الحقل الكهربائي E_y مع الزمن . والحركة الجيبية هي حركة دورية دورها T :

$$\cos \omega(t + T) = \cos \omega t$$

والدور T يساوي : $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

ـ تغير الحقل مع المسافة : في لحظة معينة ، ولتكن $t = 0$ ، فإن تغير E_y و H_z مع المسافة x يمثله الشكل (6 - 2) . ومعادلة الحقلين E_y و H_z تكون عندئذ :

$$\left.\begin{aligned} E_y(x, 0) &= E_o \cos \frac{\omega x}{c} \\ H_z(x, 0) &= H_o \cos \frac{\omega x}{c} \end{aligned}\right\}$$



شكل (2 - 6)

والدورية في المكان تساوي :

$$\cos \omega\left(\frac{x + \lambda}{c}\right) = \cos \frac{\omega x}{c}$$

ومنه :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} c = c.T$$

وطول الموجة λ هو المسافة التي تقطعها الموجة خلال زمن يساوي الدور T . يمكن تمثيل المعادلتين (11) و (12) باستخدام الصيغة العقدية كمايلي :

$$E_y(x,\ t) = R_e(E_o e^{i\omega(t-x/c)})$$

حيث R_e تعني الجزء الحقيقي من العدد العقدي Z ويمكن كتابتها بشكل مختصر على الشكل :

$$E_y(x,\ t) = E_o e^{i\omega(t-x/c)}$$

وبشكل متجهي :

$$\vec{E} = E_o e^{i\omega(t-x/c)} . \vec{j}$$

والحقل المغناطيسي H يكتب بشكل مشابه بالصيغة :

$$H_z = H_o e^{i\omega(t-x/c)}$$

وبشكل متجهي :

$$\vec{H} = H_o e^{i\omega(t-x/c)} . \vec{k}$$

4 – 1 –2– انتشار موجة مستوية جيبية باتجاه ما :

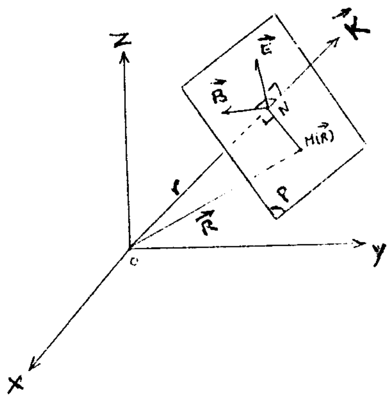
من أجل موجة مستوية جيبية تنتشر بالاتجاه الموجب للمحور ox يكون الطور هو نفسه في كل مستوى عمودي على ox أي على اتجاه الانتشار وسطوح تساوي الطور هي عبارة عن متسويات عمودية على ox . فاذا انتشرت هذه الموجة في اتجاه ما في الفراغ فان سطوح تساوي الطور ستكون عبارة عن مستويات عمودية على اتجاه الانتشار . الشكل(7– 2) يوضح ذلك . بفرض أن N هي نقطة تقاطع مستوى تساوي الطور p مع اتجاه الانتشار $\vec{K}$. ان الحقل الكهربائي في النقطة N يساوي :

$$\vec{E}(N) = \vec{E}_o \cos\ \omega(t - \frac{r}{c})$$

$$= \vec{E}_o \cos(\omega t - kr)$$

حيث $k = \frac{\omega}{c}$

وفي النقطة $M(\vec{R})$ من مستوى تساوي الطور يكون للحقل الكهربائي $\vec{E}$



حسب تعريف الموجة المستوية ،نفس الطويلة والمنحى :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_o \cos(\omega t - kr)$$

واذا كان R هو نصف القطر الشعاعي الواصل بين 0 و M فان: $k.r = \vec{k}-\vec{R}$ وذلك اذا كانت جهة متجهة الموجة $\vec{k}$ في جهة الانتشار في النقطة M

شكل (2 - 7)

فان الحقل الكهربائي $\vec{E}$ والمغناطيسي $\vec{H}$ يساويان:

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}(\vec{R}, t) &= \vec{E}_o \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{R}) \\ \vec{H}(\vec{R}, t) &= \vec{H}_o \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{R}) \end{aligned}\right\}$$

وباستخدام التمثيل العقدي تكتب هذه المعادلات على الشكل :

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}(\vec{R}, t) &= \vec{E}_o e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{R})} \\ \vec{H}(\vec{R}, t) &= \vec{H}_o e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{R})} \end{aligned}\right\} \qquad (2-13)$$

ملاحظة :

تأتي أهمية استخدام الامواج الحقيقية المستوية من امكانية ايجاد المحصلة النهائية لتراكيب عدة أمواج كهرطيسية مختلفة التواتر مستقطبة وفق oy مثلا وتنتشر وفق ox .

5 – 1 – 2 – استقطاب الامواج الكهرطيسية المستوية :

درسنا في فقرة سابقة الامواج الكهرطيسية المستوية والمستقطبة استقطابا مستقيما (خطيا) وهي حالة خاصة يكون للحقل الكهربائي $\vec{E}$ وللحقل المغناطيسي $\vec{H}$ مركبة واحدة فقط لكل منهما : E_y و H_z الا أنه في الحالة العامة عند انتشار موجة كهرطيسية مستوية (أحادية

اللون) في الاتجاه ox فان الحقل الكهربائي $\vec{E}$ يكون له مركبتين: مركبة على المحور oy هي E_y ومركبة E_z على المحور oz ويجب ألا يغيب عن بالنا بأن مركبة الحقل الكهربائي $\vec{E}$ والمغناطيسي $\vec{H}$ على المحور ox تكون معدومة لان الموجة المستوية هي عرضية وقد بينا ذلك سابقا.

تعطى مركبات الحقل الكهربائي $\vec{E}$ في الحالة العامة بالعلاقات:

$$E_x = 0 \;,\; E_y = E_{oy}\cos(kx-\omega t+\varphi_1) \;,\; E_z = E_{oz}\cos(kx-\omega t+\varphi_2) \qquad (2-14)$$

حيث E_{oy} و E_{oz} و φ_1 و φ_2 عبارة عن ثوابت و E_{oy} و E_{oz} تمثل مطال الحقل الكهربائي على المحور y وعلى المحور z ، φ_1 ، φ_2 هي الاطوار البدائية للحقل الكهربائي في الاتجاهين y و z . يمكن استنتاج مركبات الحقل المغناطيسي $\vec{H}$ من العلاقة $\vec{H} = \dfrac{1}{\mu_o c}[\vec{n}\wedge\vec{E})$

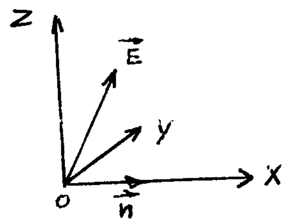
حيث $\vec{n}$ هي متجهة الواحدة على المور ox ، شكل (8- 2) واذا فرضنا أن الحقل $\vec{E}$ واقع في المستوى $x = 0$ فان مركباته تساوي عندئذ الى:

$$E_y = E_{oy}\cos(\omega t - \varphi_1) \;,\; E_z = E_{oz}\cos(\omega t - \varphi_2) \qquad (2-15)$$

وفي نقطة ما من المستوى $x = 0$ فان نهاية الحقل الكهربائي $\vec{E}$ تصف منحن واقع في مستطيل أضلاعه $2E_{oy}$ و $2E_{oz}$ وهذا المنحن سنوضحه الآن. لننظر في الحالات التالية:

1 - اذا كان $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ فان: $\dfrac{E_y}{E_z} = \dfrac{E_{oy}}{E_{oz}}$ والحقل الكهربائي يحتفظ بمنحى ثابت . والموجة هي عبارة عن موجة كهرطيسية مستقطبة استقطابا مستقيما . ويكون منحى الاستقطاب هو منحى الحقل الكهربائي $\vec{E}$.

2 - اذا كان : $\varphi_2 - \varphi_1 = \bar{n}$ فان $\dfrac{E_y}{E_z} = -\dfrac{E_{oy}}{E_{oz}}$



وهنا أيضاً يحتفظ الحقل $\vec{E}$ بمنحى ثابت والموجة الكهرطيسية أيضا مستقطبة استقطابا مستقيما .

3 - لنستعرض الحالة العامة التي لايكون فيها فرق الطور $\varphi_1 - \varphi_2$ مساويا الشكل (8 - 2) عددا صحيحا من π يمكن كتابة المعادلات (15) على الشكل :

$$\frac{E_y}{E_{oy}} = \cos(\omega t-\varphi_1)=\cos\omega t\ \cos\varphi_1+\sin\omega t\ \sin\varphi_1 \quad (2-16)$$

$$\frac{E_z}{E_{oz}} = \cos(\omega t-\varphi_2)=\cos\omega t\ \cos\varphi_2+\sin\omega t\ \sin\varphi_2 \quad (2-17)$$

ولحذف الزمن من هاتين المعادلتين نضرب المعادلة (16) بـ $\sin\varphi_2$ والمعادلة (17) بـ $\sin\varphi_1$ ثم نطرح الثانية من الاولى فنجد :

$$\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)\sin\varphi_2-\left(\frac{E_z}{E_{oz}}\right)\sin\varphi_1=\cos\omega t(\sin\varphi_2\cos\varphi_1-\cos\varphi_2\sin\varphi_1)=$$
$$= \cos\ \omega t\ \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (2-18)$$

وبضرب المعادلة (16) بـ $\cos\ \varphi_2$ و (17) بـ $\cos\varphi_1$ ثم طرح الاولى من الثانية نجد :

$$\left(\frac{E_z}{E_{oz}}\right)\cos\varphi_1-\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)\cos\ \varphi_2 = \quad (2-19)$$
$$\sin\omega t(\sin\varphi_2\cos\varphi_1-\cos\varphi_2\sin\varphi_1)=\sin\omega t\cdot\sin(\varphi_2-\varphi_1)$$

وبتربيع المعادلتين (18) و (19) ثم جمعهما نكون قد حذفنا الزمن t ، فنحصل على :

$$\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2+\left(\frac{E_z}{E_{oz}}\right)^2-2\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)\left(\frac{E_z}{E_{oz}}\right)\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin(\varphi_2-\varphi_1) \quad (2-20)$$

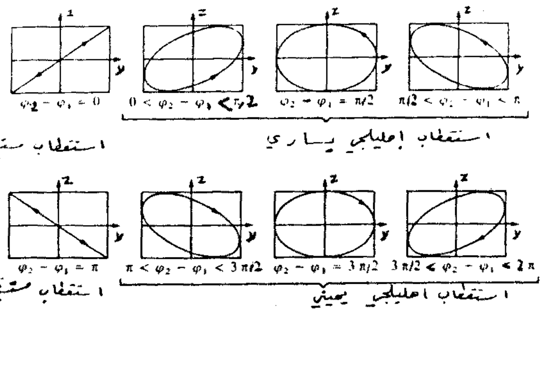
تمثل هذه المعادلة معادلة اهليلج ترسمه نهاية المتجهة $\vec{E}$.ونقول ان الموجة المستوية مستقطبة استقطابا اهليلجيا . يكون المحوران الرئيسيان للاهليلج مائلان عموما على المحورين y و z ولكنهما

ينطبقان عليهما عندما يكون فرق الطور $\varphi_2-\varphi_1$ مساويا :

$$\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{3\pi}{2}\ ,\ \frac{5\pi}{2},\dots$$

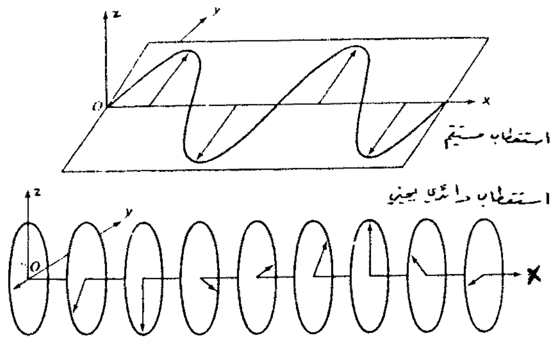
يبين الشكل (9 - 2) المنحنيات التي ترسمها نهاية المتجهة $\vec{E}$ من أجل قيم مختلفة لفرق الطور $\varphi_2-\varphi_1$ وذلك بالنسبة لمراقب يقف مقابل منحى الانتشار . في الحالة الخاصة التي يكون فيها فرق الطور مساويا : $\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\dots$ و $E_{oy}=E_{oz}$ فان الموجة تكون مستقطبة دائريا . اذا كانت جهة دوران الاهليليج بعكس عقارب الساعة سمي الاستقطاب عندئذ بالاستقطاب الاهليلجي اليساري (دائري يساري) واذا كانت جهة دوران الاهليليج مع عقارب الساعة سمي الاستقطاب بالاستقطاب الاهليلجي اليميني (أو الدائري اليميني) . وللتمييز بين جهة الدوران توجد اصطلاحات أسهلها هو التالي :

اذا كانت اشارة $\sin(\varphi_2-\varphi_1)$ موجبة فالدوران يكون بجهة اصابع اليد اليمنى (استقطاب يساري) اما اذا كانت اشارة $\sin(\varphi_2-\varphi_1)$ سالبة مثلا $\varphi_2-\varphi_1=\frac{3\pi}{2}$ فان الدوران يكون باتجاه أصابع اليد اليسرى (استقطاب يميني).



الشكل (9 - 2) الحالات المختلفة للاستقطاب

ولفهم فكرة الاستقطاب على نحو أفضل نوضح على الشكل (2 - 10) انتشار موجيتن بالاتجاه الموجب لـ ox في لحظةزمنية ما t . الاولى تمثل الاستقطاب المستقيم لموجة مستويةوالثانية الاستقطاب الدائري اليميني .



الشكل (2 - 10)

6- 1 - 2 - متجهة بوينتنغ :

لنوجد الجداء الخارجي $\vec{E} \wedge \vec{H}$ من أجل موجةكهرطيسية مستوية مستقطبة خطيا وفق oy وتنتشر بالاتجاه ox :

$$\vec{E} \wedge \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & E_y & 0 \\ 0 & 0 & H_z \end{vmatrix} = \vec{i} E_y H_z = H_z^2 \mu_o c \vec{i} = E_y^2 \varepsilon_o c \vec{i} \qquad (2\text{-}21)$$

فالموجةالكهرطيسيةالمستوية تنتشر اذن في الفراغ وفق منحى المتجهه $\vec{E} \wedge \vec{H}$. وبأخذ تفرق هذه المتجهة نجد :

$$\vec{\nabla} . (\vec{E} \wedge \vec{H}) = -\vec{E} . (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) + \vec{H} . (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \qquad (2\text{-}22)$$

$$= -\vec{E}.\varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{H}.\mu_o \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$= - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_o E^2}{2} + \frac{\mu_o H^2}{2}\right) \quad (2-23)$$

واذا كاملنا العلاقة (23) على حجم v يحد سطحا ما s ثم طبقنا نظرية غوص ـ اوستراغرادسكي على الطرف الايسر نحصل على العلاقة التالية :

$$\oint_s (\vec{E} \wedge \vec{H})\overrightarrow{ds} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_v \left(\frac{\varepsilon_o E^2}{2} + \frac{\mu_o H^2}{2}\right) dv \quad (2-24)$$

يمثل التكامل في الطرف الايمن مجموع الطاقتين الكهربائية والمغناطيسية أي يمثل طاقة الحقل الكهرطيسي ، والعلاقة (24) تدل على أن الطاقة الكهرطيسية الضائعة في واحدة الحجم وخلال واحدة الزمن تساوي الى تدفق الطاقة الكهرطيسية الكلية الخارجة من السطح s الذي يحد الحجم v خلال واحدةالزمن ، تدعى الكمية :

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H} \quad (2-25)$$

بمتجهة بوينتنغ ، وهذه المتجهة تكون عمودية على مستوى الموجة وموجهة وفق منحى انتشار الموجة ،شكل(11- 2) أما طويلتهافتساوي:

$$P = c\varepsilon_o E^2 = \mu_o c H^2$$

$$= c\left(\frac{1}{2} \varepsilon_o E^2 + \frac{1}{2} \mu_o H^2\right) \quad (2-26)$$

$$P = c.u \quad (2-27)$$

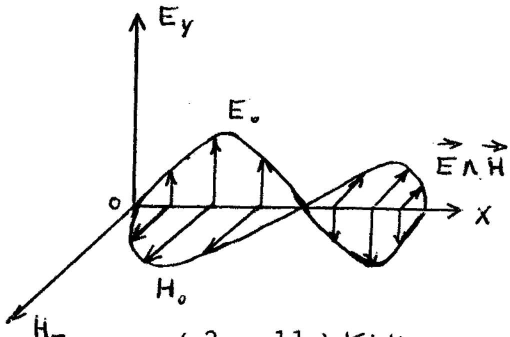
ومتجهة بوينتنغ تساوي اذن الى جداء سرعة الانتشار (السرعة الطورية) بكثافة الطاقة الكهرطيسية u . عندما تكون الموجة الكهرطيسية المستوية هي موجة جيبية فان القيمة الوسطى لمتجهة بوينتنغ تساوي:

$$\langle\vec{P}\rangle = c\varepsilon_o E_{eff}^2 \vec{i} = \frac{1}{2} .c\varepsilon_o E_i^2 \vec{i}$$

$$= 2,66 \times 10^{-3}.E_{eff}^{2}\vec{i}\ (w/m^2) \qquad (2-28)$$

(السرعة الطورية) x (متوسط كثافة الطاقة) =

يمكننا أن نعتبر دائما أن الطاقة الكهرطيسية (في الامواج الكهرطيسية الجيبية تعتبر متوسط كثافة الطاقة) تنتشر بسرعة مساوية الى سرعة انتشار الموجة الكهرطيسية . أما عند انتشار الامواج الكهرطيسية في الاوساط المختلفة المناحي فان سرعة انتشار الموجة لاتساوي عندئذ سرعة انتشار الطاقة . الشكل (2-11) متجهة بوينتنغ لموجة كهرطيسية جيبية مستقطبة استقطابا مستقيما .



الشكل (2 - 11)

ملاحظة (١) :

ان متجهة بوينتنغ التي تعطى بالجداء الخارجي للحقلين الكهربائي $\vec{E}$ والمغناطيسي $\vec{H}$ ليست تابعا خطيا للحقل الكهرطيسي .

ملاحظة (٢) :

ان الموجة المستوية من الناحية النظرية تكون لانهائية وتنقل طاقة لانهائية وهذا ليس له أي حقيقة فيزيائية .

ولكن هذا لايقلل من أهمية دراسة الموجة المستوية وللتذكير نقول بأن

الموجة المستوية تحقق هدفين :

- الاول : انها تمثل موضعيا حقل الاشعاع والمسألة المتعلقة بلانهائية الموجة المستوية تزول .

- الثاني: عند تراكب الامواج المستوية نحصل على حقول معقدة كثيرا والطاقة التي تنقلها هذه الحقول تبقى منتهية .

7 - 1 - 2 - انتشار الامواج الكهرطيسية المستوية في الاوساط الناقلة :

تتميز هذه الاوساط بوجود قيم للناقلية σ تختلف عن الصفر،

ان معادلات ماكسويل في هذه الاوساط تساوي :

$$\left.\begin{aligned} &\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}_c \\ &\operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ &\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ &\vec{\nabla} . \vec{E} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}29)$$

ان كثافة الشحنات ρ تنعدم داخل الناقل لان عدد الشحنات الموجبة والسالبة تتساوى بالعدد وسطيا من خلال أي حجم عنصري داخل الناقل.

وترتبط كثافة التيار $\vec{j}_c$ مع الحقل الكهربائي $\vec{E}$ بقانون أوم :

$$\vec{j}_c = \sigma \vec{E}$$

بأخذ دوار طرفي العلاقة الثالثة من المعادلات (29)نجد:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\mu \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$= -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ولكن :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{\nabla}\, \vec{\nabla}.\vec{E} - \nabla^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E}$$

نعوض قيمة الجداء المتجه في الطرف الايسر من المعادلة الاخيرة فنجد:

$$\nabla^2\vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0 \tag{2-30}$$

وهي معادلة الموجة للحقل الكهربائي في الوسط الناقل. واذا طبقنا المؤثر $\overrightarrow{rot}$ على طرفي العلاقة الاولى من (29) وباتباع نفس الخطوات السابقة نجد بأن معادلة الموجة للحقل المغناطيسي هي من الشكل:

$$\nabla^2\vec{H} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0 \tag{2-31}$$

واذا كانت الموجة المستوية مستقطبة استقطابا مستقيما وفق oy تنتشر وفق المحور ox فان المعادلات (30) و(31) تكتب على الشكل:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial E_y}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial H_z}{\partial t} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-32}$$

نأخذ حلا للمعادلة الاولى من (32) على الشكل:

$$E_y(x, t) = E(x)e^{-i\omega t} \tag{2-33}$$

نعوض هذا الحل في المعادلة الاولى لـ(32) فنجد:

$$\frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} + k^2 E(x) = 0 \tag{2-34}$$

حيث $k^2 = \varepsilon\mu\omega^2 + i\mu\sigma\omega$.

وهذه المعادلة تابعة لـ x فقط (تدعى بمعادلة هلمولتز حيث تكون $\vec{E}$ في الحالة العامة تابعة لـ $\vec{r}$) وحلها العام من الشكل:

$$E(x) = E_o . e^{ikx} \tag{2-35}$$

حيث اقتصرنا على الجذر التربيعي الموجب لـ k .

والحل العام للمعادلة الاولى من (32) يكون على الشكل :

$$E_y(x,t) = E_o . e^{ikx} . e^{-i\omega t} \tag{2-36}$$

ان العدد الموجي k هو عبارة عن عدد عقدي ،ويمكن كتابته على الشكل:

$$k = k_r + ik_i \tag{2-37}$$

حيث k_i و k_r كميات موجبة ،وتساوي الى :

$$k_r = \omega(\frac{\varepsilon\mu}{2})^{\frac{1}{2}} . \{(1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2})^{\frac{1}{2}} + 1\}^{\frac{1}{2}} \tag{2-38}$$

$$k_i = \omega(\frac{\varepsilon\mu}{2})^{\frac{1}{2}} . \{(1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2})^{\frac{1}{2}} - 1\}^{\frac{1}{2}} \tag{2-39}$$

وبالتالي فان k تساوي :

$$k = \omega(\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}} . (1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2})^{1/4} \exp[i \ \mathrm{arctg}(\frac{k_i}{k_r})] \tag{2-40}$$

نعرف مسافة التخامد δ أو مايسمى عمق التوغل بالعلاقة :

$$\delta = \frac{1}{k_i} = \frac{1}{\omega(\frac{\varepsilon\mu}{2})^{\frac{1}{2}} . \{(1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2})^{\frac{1}{2}} - 1\}^{\frac{1}{2}}} \tag{2-41}$$

كما نعرف السرعة الطورية وقرينة الانكسار بالعلاقتين :

السرعة الطورية $$v = \frac{\omega}{k_r} = \frac{1}{(\frac{\varepsilon\mu}{2})^{\frac{1}{2}} . \{(1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2})^{\frac{1}{2}} + 1\}^{\frac{1}{2}}} \tag{2-42}$$

قرينة الانكسار $$\hat{n} = \frac{c}{\omega} k = \frac{c}{\omega}(k_r + ik_i) = \frac{c}{\omega}\sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 + i\mu\sigma\omega}$$

$$= \sqrt{\varepsilon_r\mu_r + i\mu_r\sigma/\omega\varepsilon_o} = n + in' \tag{2-43}$$

وقرينة الانكسار كما نلاحظ هي عدد عقدي . من العلاقة (43) يمكن ايجاد كل من n و n' :

$$n = \left[-\frac{\varepsilon_r \mu_r}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2-44)$$

$$n' = \left[\frac{\varepsilon_r \mu_r}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2-45)$$

تظهر العلاقتين (44)و(45) تابعية قرينة الانكسار لتواتر الموجةالكهرطيسية ولذلك فان الوسط الناقل يعتبر وسطا مبددا .

وبتعويض قيمة k من (37)في المعادلة (36) نجد أن الحقل الكهربائي في الوسط الناقل يعطى بالعلاقة :

$$E_y(x,t) = E_o e^{ikx} . e^{-i\omega t}$$

$$= E_o . e^{i[kx-\omega t]} = E_o e^{i[(k_r+ik_i)x-\omega t]}$$

$$E_y(x,t) = E_o . e^{[i(k_r x-\omega t)-\frac{x}{\delta}]} \qquad (2-46)$$

وبحساب H نجد أن الحقل المغناطيسي يساوي :

$$H_z(x,\ t) = H_o e^{[i(k_r x-\omega t+\Theta)-\frac{x}{\delta}]}$$

حيث :

$$H_o = E_o\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right\}^{1/4}, \quad \Theta = \operatorname{arctg}\frac{k_i}{k_r}$$

Θتمثل فرق الطور بين $\vec{E}$ و $\vec{H}$.

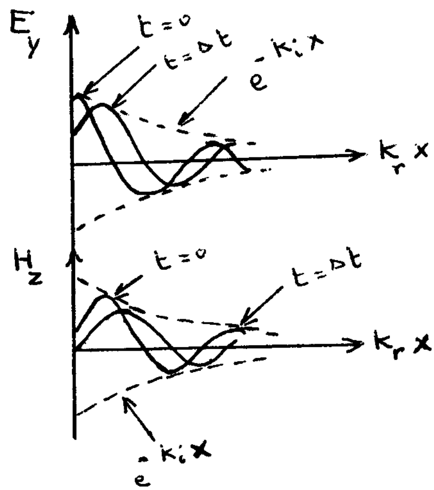
تدل المعادلتين (46)و(47) على أن سعة الحقل الكهربائي $\vec{E}$ والمغناطيسي $\vec{H}$ تتناقص وفق منحن أسي هو $e^{-\frac{x}{\delta}}$ ولتبيان تغير كل من الحقل الكهربائي والحقل المغناطيسي داخل الناقل مثل على الشكل التالي (12 - 2) تغير كل من E_y و H_z بدلالة $k_r x$ انطلاقا من العلاقتين التاليتين :

$$E_y(x,t) = R_e\{E_o \cdot e^{[i(k_r x-\omega t)-k_i x)]}\}$$

$$= E_o e^{-k_i x} . \cos(k_r x - \omega t) \qquad (2\text{-}48)$$

$$H_z(x,t) = R_e\{H_o \cdot e^{[i(k_r x-\omega t+\Theta)-k_i x]}\} =$$

$$= H_o e^{-k_i x} . \cos(k_r x - \omega t + \Theta) \qquad (2\text{-}49)$$



الشكل (2 - 12)

8 ـ 1 ـ 2 انتشار الامواج الكهرطيسيةالمستوية في النواقل الجيدة :

في هذه النواقل تكون الناقلية σ كبيرة والمقدار $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$ يكون أكبر بكثير من الواحد : $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1$ والمقدار k^2 يصبح مساويا الى :

$$k^2 = \varepsilon\omega^2\mu + i\mu\sigma\omega \simeq i\mu\sigma\omega \qquad (2\text{-}50)$$

ومنه فان:

$$k = (i\mu\sigma\omega)^{\frac{1}{2}} \qquad (2\text{-}51)$$

ولكن : $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ والعلاقة (51) تصبح على الشكل :

$$k = (i\mu\sigma\omega)^{\frac{1}{2}} = (\frac{\omega\sigma\mu}{2})^{\frac{1}{2}}(1 + i) \qquad (2-52)$$

ويكون لدينا أيضا في هذه الحالة :

$$k_r = k_i = (\frac{\omega\mu\sigma}{2})^{\frac{1}{2}} \qquad (2-53).$$

وعمق التوغل δ يساوي :

$$\delta = \frac{1}{k_i} = (\frac{2}{\omega\sigma\mu})^{\frac{1}{2}} \qquad (2-54)$$

وكما تبين العلاقة (53) فان k_i و k_r تكون تابعة للناقلية و لتردد الموجة الكهرطيسية • وفي النواقل الجيدة تكون قيمة σ كبيرة ولذلك فان لحجم k_i و k_r تكون كبيرة أيضا وهذا يعني أن الموجة تتخامد بسرعة عند انتشارها في الناقل • بتعويض قيمة k_r و δ في المعادلتين (46)و(47) فان الحقل الكهربائي والمغناطيسي في النواقل الجيدة يساوي :

$$\left.\begin{aligned} E_y(x,t) &= E_o \cdot e^{-(\frac{\omega\sigma\mu}{2})^{\frac{1}{2}} \cdot x} \cdot e^{i[(\frac{\omega\mu\sigma}{2})^{\frac{1}{2}} \cdot x - \omega t]} \\ H_z(x.t) &= H_o \cdot e^{-(\frac{\omega\sigma\mu}{2})^{\frac{1}{2}} \cdot x} \cdot e^{i[(\frac{\omega\mu\sigma}{2})^{\frac{1}{2}} \cdot x - \omega t + \frac{\pi}{4}]} \end{aligned}\right\} (2-55)$$

واذا حسبنا النسبة $\frac{E_y}{H_z}$ نجد أنها تساوي الى :

$$\frac{E_y}{H_z} = (\frac{\omega\mu}{\sigma})^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

أي أن الحقل الكهربائي يتأخر بالطور بمقدار $\frac{\pi}{4}$ عن الحقل المغناطيسي في النواقل الجيدة •

ان عمق التوغل δ كما تبينه العلاقة (54) يتناسب عكسا مع الجذر التربيعي لتردد الموجة الكهرطيسية فمن أجل الترددات العالية تتوغل الموجة داخل الناقل الجيد لمسافة قصيرة جدا ويعرف عمق التوغل بأنه المسافة التي تتناقص فيها سعة الحقل بمقدار

$\frac{1}{e}$ أي بمقدار 37% من قيمتها البدائية. فمن أجل النحاس حيث $\mu \approx \mu_o$ و $\sigma = 5.8 \times 10^7 (\Omega.m)^{-1}$ وعند التردد 60 Hz فان $\delta \simeq 9 \times 10^{-3} m$

اما عند التردد 1 MHz فان $\delta \approx 6.6 \times 10^{-5}$ m وعند التردد 3×10^4 MHz فان $\delta \approx 3.8 \times 10^{-7} m$ وهكذا فان الامواج الكهرطيسية العالية التردد تنتشر فقط الى مسافة صغيرة جدا في النواقل، والحقل الكهربائي تبعا لذلك ينحصر في منطقة صغيرة جدا على سطح الناقل وفي هذه المنطقة يجري تيار الناقلية ومقاومة الناقل ستزداد وعندئذ بازدياد تردد الموجة الكهرطيسية ، ومما تقدم نخلص الى نتيجة مفادها ان النواقل تعمل على حجب الامواج الكهرطيسية.

وكما وجدنا أن عمق التوغل δ والعدد الموجي k_i يتبعان تردد الموجة الكهرطيسية فان السرعة الطورية v تتعلق أيضا بتردد الموجة الكهرطيسية. ومن تعريف السرعة الطورية نجد أنها تساوي :

$$v = \frac{\omega}{k_r} = \frac{\omega}{\left(\frac{\omega\sigma\mu}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \omega\delta = \left(\frac{2\omega}{\mu\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2-56)$$

أما قرينة الانكسار في النواقل الجيدة فتساوي :

$$n' = n = \left(\frac{\sigma\mu_r}{2\varepsilon_o\omega}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{c}{v} \qquad (2-57)$$

فعندما تكون δ صغيرة فان السرعة الطورية v تكون كذلك وقرينة الانكسار n للناقل تكون كبيرة جدا وهذا مايشرح كون الناقل الجيد عاكسا قويا للضوء. وبما أن السرعة الطورية هي تابع التردد فان النواقل الجيدة تعتبر أوساطا مبددة شاذة نظرا لكون $\frac{\partial v}{\partial \lambda} < 0$ ، ولذلك فان السرعة المجموعية تكون أكبر من السرعة الطورية (أو السرعة الموجية).

نبين في الجدول التالي قيم كل من δ و v و n للنحاس عند تواترات مختلفة لموجة كهرطيسية :

التواتر Hz	(في الفراغ) λ	δ (m)	$v=\omega\varepsilon$ (m/sec)	$n=c/v$
60	5000 km	9×10^{-3}	3.2	9.5×10^{7}
10^{6}	300 m	6.6×10^{-5}	4.1×10^{2}	7.3×10^{5}
3×10^{10}	10^{-2}m	3.9×10^{-7}	7.1×10^{4}	4.2×10^{3}

سرعة الصوت في النحاس $3.6 \times 10^{3} (m.s^{-1})$

وجدنا أن كثافة الطاقة الكهربائية في الخلاء تساوي الطاقة المغناطيسية فهل يتحقق ذلك في النواقل الجيدة ؟

اذا أخذنا نسبة كثافة الطاقة الكهربائية الى كثافة الطاقة المغناطيسية نجد :

$$\frac{\text{كثافة الطاقة الكهربائية}}{\text{كثافة الطاقة المغناطيسية}} = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon E_o^2}{\frac{1}{2}\mu H_o^2} = \frac{\omega\varepsilon}{\sigma} << 1 \qquad (2-58)$$

وهذا يثبت أن كثافة الطاقة المغناطيسية أكبر بكثير من كثافة الطاقة الكهربائية أي أن الطاقة في النواقل الجيدة تكون على شكل طاقة مغناطيسية ويمكن شرح هذه النتيجة على الشكل التالي :

بما أن الناقلية σ كبيرة جدا في النواقل الجيدة فان النسبة $\frac{\vec{E}}{\vec{J}_c}$ تكون صغيرة جدا : $\frac{\vec{E}}{\vec{J}_c} = \frac{1}{\sigma} << 1$ والحقل الكهربائي $\vec{E}$ يكون ضعيفا في حين أن قيمة كثافة التيار $\vec{J}_c$ وبالتالي قيمة $\vec{H}$ تكون كبيرة .

9 – 1 – 2 – نظرية بوينتنغ في الاوساط الناقلة :

لنوجد متجهة بوينتنغ في الحالة العامة عندما تنتشر الموجة الكهرطيسية في الاوساط الناقلة .

اذا ضربنا معادلة ماكسويل الثانية : $\vec{j}_c = \vec{\nabla}\Lambda\vec{H} - \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

التي تربط بين كميات لها أبعاد كثافة التيار بـ $\vec{E}$ فاننا نحصل على كميات لها الكثافة الحجمية للطاقة والعلاقة السابقة تصبح من الشكل :

$$\vec{E}.\vec{j}_c = \vec{E}.(\vec{\nabla}\ \Lambda\ \vec{H}) - \vec{E}.\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (2\text{-}59)$$

وبالاستفادة من المطابقة :

$$\vec{\nabla}.(\vec{E}\ \Lambda\ \vec{H}) = \vec{H}.(\vec{\nabla}\ \Lambda\ \vec{E}) - \vec{E}.(\vec{\nabla}\ \Lambda\ \vec{H})$$

فان العلاقة (59) تصبح على الشكل :

$$\vec{E}.\vec{j}_c = \vec{H}.(\vec{\nabla}\Lambda\vec{E}) - \vec{\nabla}.(\vec{E}\ \Lambda\ \vec{H}) - \varepsilon\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (2\text{-}60)$$

ومن معادلة ماكسويل الثالثة (29 - 2):

$$\vec{\nabla}\ \Lambda\ \vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

نعوض قيمة الجداء $\vec{E}\ \Lambda\ \vec{\nabla}$ بالمعادلة (60)فنحصل على العلاقة التالية :

$$\vec{E}.\vec{j}_c = -\mu\vec{H}\frac{\partial H}{\partial t} - \varepsilon\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla}.(\vec{E}\ \Lambda\ \vec{H}) \qquad (2\text{-}61)$$

$$= -\frac{1}{2}(\mu\frac{\partial H^2}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial E^2}{\partial t}) - \vec{\nabla}.(\vec{E}\ \Lambda\ \vec{H})$$

وبالمكاملة على الحجم v واستخدام نظرية غوص – اوسترا غرادسكي على الحد الثاني من الطرف الايمن نجد :

$$\int_v \vec{E}.\vec{j}_c dv + \frac{\partial}{\partial t}\int_v(\frac{\mu}{2}H^2 + \frac{1}{2}\varepsilon E^2)dv = -\oint_s(\vec{E}\Lambda\vec{H})\overrightarrow{ds} \qquad (2\text{-}62)$$

حيث s هو السطح المغلق الذي يحد الحجم v . تدعى العلاقة (62)

بنظرية بوينتنغ أو معادلة انحفاظ الطاقة. الحد الاول من الطرف الايسر يمثل الطاقة الكهرطيسية الضائعة في واحدة الزمن ضمن الحجم v بفعل جول ، أما الحد الثاني فيمثل تزايد الطاقة الكهرطيسية في واحدة الزمن في نفس الحجم v . ويمثل الطرف الايمن مع اشارته السالبة تدفق الطاقة الكهرطيسية التي تدخل الحجم v،في واحدة الزمن ، وبدون اشارة ناقص يعبر عن تدفق طاقة الكهرطيسية الخارجة من السطح v الذي يحد الحجم s . ويمكن صياغة العلاقة (62) على النحو التالي :

ان تدفق الطاقة الكهرطيسية الى داخل السطح s في واحدة الزمن يساوي الى تزايد الطاقة الكهرطيسية في واحدة الزمن زائد الطاقة الكهرطيسية الضائعة في واحدة الزمن بفعل جول في نفس الحجم v المحدود بالسطح المغلق s .

في الحقيقة ، يمكن للمقدار $\vec{E}.\vec{j}_c$ أن يعبر عن عدة حالات فيزيائية أو بشكل آخر نقول انه يأخذ عدة معاني فيزيائية فمثلا عند جريان تيار كهربائي في ناقل تتولد فيه حرارة والمقدار $\vec{E}.\vec{j}_c = j_c^2/\sigma$ يعبر عن كمية الطاقة الضائعة على شكل حرارة بفعل جول في واحدة الحجم من الناقل وخلال واحدة الزمن والتكامل $\int_v j_c^2/\sigma dv$ يساوي الى RI^2 وهذه هي الاستطاعة الضائعة على شكل حرارة بفعل جول . عند حركة الاجسام المشحونة في حقل كهرطيسي يتم بتادل للطاقة بين الحقل والطاقة الميكانيكية للاجسام المشحونة التي تنقل التيار والتي نادرا ماتفقد الطاقة عن طريق التصادم . عند عدم وجود قوة ميكانيكية متبقية تؤثر على الشحنات فان معادلة

القوة تكون :

$$\vec{F} = \vec{E}.Q_v = m_v \frac{d\vec{v}}{dt}$$

حيث m_v = الكثافة الكتلية للشحنات المسرعة . ولكن :

$$\vec{E}.\vec{J}_c = \vec{E}.Q_v \, \vec{v} = m_v \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_v v^2\right)$$

وهكذا فان $\vec{E}.\vec{J}_c$ يساوي الى تغير الطاقة الحركية للشحنات في واحدة الزمن. فاذا زادت الطاقة الحركية فان الحقل يقوم بعمل على الشحنات كما يفعل في المسرع Betatron أو كما يفعل في حالة تيار مستمر على الصمام الالكتروني . واذا تناقصت الطاقة الحركية فان الشحنات تقوم بعمل على الحقل كما تفعل الالكترونات على حقل التيار المتناوب في المضخمات أو في الترانزيستور ....الخ.

10-1-2 - نظرية بوينتنغ في الصيغة العقدية :

عندما نعبر عن الحقلين الكهربائي والمغناطيسي بالصيغة العقدية فاننا نعرف متجهة بوينتنغ العقدية (الانية) بالشكل:

$$\vec{p}_c = \vec{E} \wedge \vec{H}^* \qquad (2-63)$$

حيث $\vec{H}^*$ هو المرافق العقدي للحقل المغناطيسي $\vec{E}$ و $\vec{H}$ يكونان تابعين للاحداثيات والزمن . ونعرف أيضا متوسط تدفق الاستطاعة $\langle\vec{p}_c\rangle$ ومتوسط كثافة الطاقة الكلية $\langle u\rangle$ بالعلاقتين التاليتين :

$$\left.\begin{aligned} \langle\vec{p}_c\rangle &= \frac{1}{2} R_e(\vec{E} \wedge \vec{H}^*) \\ \langle u\rangle &= \frac{1}{4} R_e(\vec{E}.\vec{D}^* + \vec{H}.\vec{B}^*) \end{aligned}\right\} \qquad (2-64)$$

لاستنتاج نظرية بوينتنغ في الصيغة العقدية نضرب معادلة ماكسويل الاولى بـ $\vec{H}^*$ والمرافق العقدي للمعادلة الثانية بـ $\vec{E}$ فينتج:

$$\vec{H}^*.\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\vec{H}^*.\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{E}.\vec{\nabla}\wedge\vec{E}^* = \vec{E}.\vec{j}_c^* + \vec{E}\,\frac{\partial D^*}{\partial t}$$

نطرح الاولى من الثانية فنحصل على :

$$\vec{E}.\vec{\nabla}\wedge\vec{E}^* - \vec{H}^*.\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \vec{E}.\vec{j}_c^* + \vec{E}\,\frac{\partial\vec{D}^*}{\partial t} + \vec{H}^*\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,.$$

$$-\nabla.(\vec{E}\wedge\vec{H}^*) = \vec{E}.\vec{j}_c^* + \vec{E}\,\frac{\partial\vec{D}^*}{\partial t} + \vec{H}^*\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

وبالمكاملة على الحجم v المحاط بالسطح المغلق s وبتطبيق نظرية غوص استراغرادسكي على الطرف الايسر نجد :

$$-\oint\vec{p}_c d\vec{s} = \int_v \vec{E}.\vec{j}_c^* dv + \int_v(\varepsilon\vec{E}.\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial t} + \mu\vec{H}^*\,\frac{\partial\vec{H}}{\partial t})\,dv \quad (2\text{-}65)$$

وهي نظرية بوينتنغ في الصيغة العقدية .

ملاحظة :

اذا طبقنا المعادلة (6) على حالة التيار المستمر أي الحالة التي يكون فيها E ثابتا مع الزمن فان الحد الثاني من الطرف الايسر لهذه المعادلة يساوي الصفر أي $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\mu}{2}H^2+\frac{\varepsilon}{2}E^2)=0$ ولذلك لاتوجد موجات كهرطيسية داخل الحجم المذكور على الاطلاق ويكون تدفق الطاقة الداخلة الى الحجم في واحدة الزمن مساويا الى الطاقة الضائعة في واحدة الزمن بفعل جول .

11 ـ 1 ـ 2 ـ معادلات ماكسويل في الصيغة العقدية:

اذا أخذنا حلا لمعادلات ماكسويل في الخلاء على شكل موجة مستوية أحادية اللون تنتشر وفق متجهة الواحدة $\vec{n}$) حيث $\vec{k} = k\vec{n}$) على الشكل التالي:

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_o(\vec{r})e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \\ \vec{H}(\vec{r},t) &= \vec{H}_o(\vec{r})e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \end{aligned}\right\} \qquad (2-66)$$

حيث $\vec{E}_o(\vec{r})$ ، $\vec{H}_o(\vec{r})$ هي متجهات ثابتة وتكون عقدية في الحالة العامة .

واذا عوضنا الحلول (66) في معادلات ماكسويل في الخلاء:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\mu_o \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla}.\vec{H} = 0$$

نجد:

$$\vec{\nabla}.\vec{H} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\left(\vec{H}_o(\vec{r})e^{i(k_x.x+k_y.y+k_z.z-\omega t)}\right)$$

$$= i\vec{E}_o(\vec{r})(\vec{i}k_x + \vec{j}k_y + \vec{k}K_z).e^{i(\vec{K}.\vec{r}-\omega t)} = i\vec{K}.\vec{H}$$

ونجد بالمثل أن :

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = i\vec{K}.\vec{E}$$

لنحسب أيضا كل من $\overrightarrow{rot\ E}$ و $\overrightarrow{rot\ H}$:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \overrightarrow{rot\ E} = \overrightarrow{rot}[\vec{E}_o e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}] = -e^{-i\omega t}\vec{E}_o \wedge \overrightarrow{grad}\ e^{i\vec{k}.\vec{r}}$$

ولكن:

$$\overrightarrow{grad}\ e^{i\vec{k}.\vec{r}} = i\vec{k}\ e^{i\vec{k}.\vec{r}}$$

ومنه :
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = i\vec{k} \wedge \vec{E}$$

ومن جهة أخرى فان :
$$\mu_o \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -i\omega\mu_o \vec{H}$$

والمعادلة تصبح بشكلها النهائيعلى الشكل: $i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega\mu_o\vec{H}$

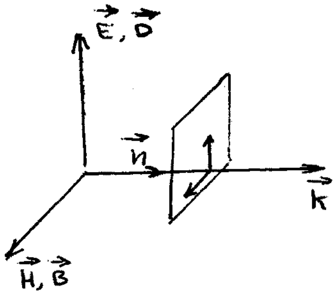
وهذه المعادلةيمكن كتابتهاعلى الشكل :
$$\vec{k} \wedge \vec{E} - \omega\mu_o\vec{H} = 0$$

وبالمثل فاننا نجد أن :
$$\vec{k} \wedge \vec{H} + \omega\varepsilon_o\vec{E} = 0$$

تدعى المعادلات التالية بمعادلات ماكسويل في الصيغةالعقدية :
$$\left.\begin{array}{llll} \text{(a)} & \vec{k} \wedge \vec{E} - \omega\mu_o\vec{H} = 0 & \vec{k}\wedge\vec{H}+\omega\varepsilon_o\vec{E} = 0 & \text{(c)} \\ \text{(b)} & \vec{k}.\vec{E} = 0 & \vec{k}.\vec{H} = 0 & \text{(d)} \end{array}\right\} (2-67)$$

ان العلاقتين (b)و(d) تدلان على أن الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{H}$ متعامدان مع $\vec{k}$ ،أي أنهما عرضيان . ومن(a) نستنتج أن :
$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}\ \vec{n} \wedge \vec{E} \qquad (2-68)$$

ولذلك فان المتجهات $\vec{E}$ و $\vec{H}$ و $\vec{K}$ تؤلف ثلاثية متعامدة، الشكل .(2 -13)



الشكل(2 - 13)

12– 1 – 2 – انتشار الامواج الكهرطيسية المستويةفي العوازل :

في العوازل تكون $\rho = 0$ أما الناقلية σ فاما أن تكون صغيرة جدا أو أنها تساوي الصفر $\sigma = 0$.

ا – σ صغيرة جدا :

كما في العوازل الجيدة ويكون المقدار $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$ أصغر بكثير من الواحد ولذلك يمكن أن ننشر المقدار $(1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2})^{\frac{1}{2}}$ على النحو التالي :

$$(1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2})^{\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{\sigma^2}{2\omega^2\varepsilon^2} + \ldots$$

أما العدد الموجي k_i و k_r فيساويان:

$$k_i = \omega(\frac{\varepsilon\mu}{2})^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2})^{\frac{1}{2}} - 1} \simeq \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad (2\text{-}69)$$

$$k_r = \omega(\frac{\varepsilon\mu}{2})^{\frac{1}{2}}[(1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2})^{\frac{1}{2}} + 1]^{\frac{1}{2}} \simeq \omega(\frac{\varepsilon\mu}{2})^{\frac{1}{2}}[2 + \frac{\sigma^2}{2\omega^2\varepsilon^2}]^{\frac{1}{2}}$$

$$\simeq \omega\sqrt{\varepsilon\mu}(1 + \frac{1}{8}\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}) \qquad (2\text{-}70)$$

ان كلا من k_i و k_r يؤثر على تغير طور الموجة وعلى التخامد وعلى انزياح الطور بين الحقل الكهربائي والحقل المغناطيسي في هذا الوسط . والسرعة الطورية في العوازل الجيدة تساوي الى :

$$v = \frac{\omega}{k_r} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}(1 + \frac{\sigma^2}{8\omega^2\varepsilon^2})} \simeq v_o(1 - \frac{\sigma^2}{8\omega^2\varepsilon^2}) \qquad (2\text{-}71)$$

حيث $v_o = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ وهي السرعة الطورية للموجة في العازل عندما

$\sigma = 0$ ، نلاحظ من (71) أن سرعة الموجة الكهرطيسية تكون تابعة للتردد، فعند الترددات العالية تزداد السرعة بحيث تقترب من القيمة v_o أما نقصان تردد الموجة فيؤدي الى نقصان السرعة الطورية v .

٢ – عندما $\sigma = 0$: فان k من العلاقة (50) تساوي :

$$k = (\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}} . \omega \tag{2-72}$$

وهي مقدار حقيقي ولذلك لايوجد تخامد للموجة في مثل هذه العوازل

أما السرعة الطورية v فتساوي :

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega(\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{c}{(\varepsilon_r\mu_r)^{\frac{1}{2}}} \tag{2-73}$$

والسرعة الطورية للموجة الكهرطيسية تكون أقل بكثير من سرعتها في الخلاء . وقرينة الانكسار تصبح مساوية :

$$n = \frac{c}{v} = (\varepsilon_r\mu_r)^{\frac{1}{2}} \tag{2-74}$$

عندما يكون الوسط العازل غير مغنطيسي فان $\mu_r = 1$ وقرينة الانكسار تساوي :

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} \tag{2-75}$$

ويمكن أن نستنتج أنه في هذه العوازل :

$$\frac{E_y}{H_z} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2-76}$$

ويكون الحقل الكهربائي $\vec{E}$ والمغناطيسي $\vec{H}$ على اتفاق في الطور وتكون كثافة الطاقة الكهربائية مساوية الى كثافة الطاقة المغناطيسية :

$$\frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\mu H^2$$

وكثافة الطاقة الكلية الاتية تساوي عندئذ εE^2 أو μH^2 .

لنجد أخيرا متوسط متجهة بوينتنغ $<\vec{p}_c>$ التي تمثل متوسط تدفق الاستطاعة الزمني في واحدة المساحة من العازل :

$$<\vec{p}_c> = \frac{1}{2} R_e(\vec{E} \wedge \vec{H}^*) = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} E_o^2 \vec{i} \tag{2-77}$$

$$= \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} E_{eff}^2 \vec{i} = v\varepsilon\ E_{eff}^2 \vec{i} \tag{2-78}$$

$$= v\mu\ H_{eff}^2 \vec{i} \tag{2-79}$$

$$= 2.66 \times 10^{-3} \left(\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}\right)^{\frac{1}{2}} E_{eff}^2 \vec{i} \quad (w/m^2) \tag{2-80}$$

ومن (79) نلاحظ أن متوسط تدفق الاستطاعة الزمني أو القيمة المتوسطة لمتجهة بوينتنغ تساوي الى جداء السرعة الطورية بمتوسط كثافة الطاقة وهذه النتيجة مشابهة لتلك التي حصلنا عليها في حالة الخلاء.

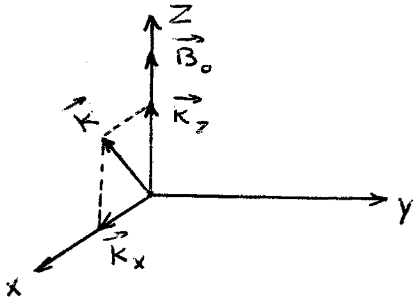
2 ـ 2 ـ انتشار الامواج الكهرطيسية المستوية في الاوساط المختلفة المناحي:

كمثال على هذه الاوساط نذكر البلورات والايونوسفير ولذلك سوف ندرس انتشار الامواج الكهرطيسية المستوية في كل منهما .

1 ـ 2 ـ 2ـ انتشار الامواج الكهرطيسية المستوية في الايونوسفير (الجوالموّين) :

عندما تنتشر موجة كهرطسية في وسط يتألف من عدد متساو من الالكترونات والايونات (البلازما)فانها تؤثر على حالة هذه الجسيمات وللتبسيط سوف نفترض أن هذه الموجة تؤدي الى نشوء اضطراب طفيف في البلازما بحيث نتجنب التأثيرات اللاخطية لهذا الاضطراب . فاذا كانت السرعة الطورية للموجة أكبر من السرعة الحرارية للالكترونات وكانت كل من هاتين السرعتين أكبر من سرعة الالكترونات المتحرضة بفعل الحقل

الكهربائي لهذه الموجة فانه يمكننا عند ذلك استعمال معادلات خطية. في دراستنا هذه نفترض عدم وجود تصادمات بين الالكترونات والايونات بحيث لاتنحجب ظاهرة الطنين ،وجميع هذه الفرضيات تدفعنا الى دراسة مايعرف "بظاهرة الموجة في البلازما الباردة الخالية من التصادمات" بالاضافة الى ذلك ، اذا اخترق البلازما حقل مغناطيسي ثابت عندئذ سندرس انتشار الموجة في بلازما مختلفة المناحي حيث تأخذ ثابتة العزل الكهربائي ε قيما تختلف باختلاف الاتجاهات. ان احدى أهداف دراستنا هي ايجاد ثابتة العزل الكهربائي لهذا الوسط ولذلك نفترض أن الحقل المغناطيسي الساكن الذي يجتاز البلازما يكون في الاتجاه z كما نفترض أن الموجة تنتشر في البلازما بحيث تكون متجهة الموجة $\vec{k}$ متوضعة في المستوى xz كما في الشكل (14- 2). تعطى معادلة الحركة لالكترون يخضع لتأثير حقل كهرطيسي بالعلاقة التالية :



الشكل (2 - 14)

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}_o) \quad (2-81)$$

حيث $\vec{B}_o = B_o\vec{a}_z$ هو الحقل المطبق، $\vec{a}_z$ هي متجهة الواحدة على المحور z ،ونهمل هنا تأثير حقل التحريض المغناطيسي للموجة لأن $|\vec{B}_o| >> \mu_o|\vec{H}|$. في الحالة التي تكون فيها التغيرات مع الزمن توافقية ($e^{-i\omega t}$) فان المعادلة (81) تصبح على الشكل :

$$\vec{v} = -\frac{e}{im\omega}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}_o) \qquad (2-82)$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها على شكل ثلاث معادلات سلمية على النحو التالي :

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \frac{e}{m} \begin{bmatrix} -\frac{\omega^2}{i\omega(\omega^2-\Omega^2)} & -\frac{\Omega}{\omega^2-\Omega^2} & 0 \\ \frac{\Omega}{\omega^2-\Omega^2} & -\frac{\omega^2}{i\omega(\omega^2-\Omega^2)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{i\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

$$= \frac{e}{m} \hat{V} \vec{E} \qquad (2-83)$$

حيث $\Omega = \frac{eB_o}{m}$ تدعى بتواتر السيكلوترون، $\hat{V}$ هي المصفوفة المعرفة في المعادلة (83)ـ يكون حقل التحريض الكهربائي الكلي $\vec{D}$ في البلازما مؤلف من مجموع متجهة حقل التحريض الكهربائي $\vec{D}_c$ الناجم عن مرور الموجة (عند التغير التوافقي) $\vec{D}_c = \frac{\vec{j}}{-i\omega}$ ومتجهة حقل التحريض الكهربائي $\vec{D} = \varepsilon_o\vec{E}$ في الفراغ الحر. يكتب هذا المجموع على الشكل :

$$\vec{D} = \varepsilon_o\hat{\varepsilon}_r\vec{E} = \varepsilon_o\vec{E} + \frac{\vec{j}}{-i\omega} \qquad (2-84)$$

حيث $\vec{j}$ هي كثافة تيار الناقلية وتساوي : $\vec{j} = \vec{N}e\vec{v}$ (2-85)

N هو عدد الالكترونات في واحدة الحجم .

بجمع العلاقتين (85) و (83) نجد :

$$\vec{D} = \varepsilon_o \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon_o \vec{E} + \varepsilon_o \frac{Ne^2 \hat{V}}{-i\omega m \varepsilon_o} \vec{E}$$

$$= \varepsilon_o [\hat{I} + \omega_p^2 \frac{\hat{V}}{-i\omega}] \vec{E} \qquad (2-86)$$

حيث $\hat{I}$ هي مصفوفة الواحدةو $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_o m}$ هوتواتر البلازما .
والعلاقة الاخيرة تكتب على الشكل :

$$\vec{D} = \varepsilon_o \begin{bmatrix} a & -ib & 0 \\ ib & a & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

$$= \varepsilon_o \hat{\varepsilon}_r \vec{E} \qquad (2-87)$$

حيث :

$$\left.\begin{aligned} c &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(\frac{\omega}{\omega + \Omega}\right) & \qquad a &= \frac{1}{2}(c + d) \\ d &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(\frac{\omega}{\omega - \Omega}\right) & \qquad b &= \frac{1}{2}(c - d) \\ f &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} & & \end{aligned}\right\} \qquad (2-88)$$

تكتب من جهة أخرى معادلتا دوار ماكسويل في الصيغة العقديةلموجة كهرطيسية في وسط من البلازما على الشكل :

$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= i\omega\mu_o\mu_r \vec{H} & \qquad (1) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= -i\omega\left(\frac{\vec{J}}{-i\omega} + \varepsilon_o \vec{E}\right) = -i\omega\varepsilon_o \hat{\varepsilon}_r \vec{E} & \qquad (2) \end{aligned}\right\} \qquad (2-89)$$

بأخذ دوار العلاقة (1 - 89) ثم تعويض قيمة $\vec{\nabla}\wedge\vec{H}$ من العلاقة

(2 - 89) فيها نجد :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} - K_o^2 \mu_r \varepsilon_r \vec{E} = 0 \tag{2-90}$$

حيث $K_o^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$.

والمعادلة (90) تكتب باستخدام التمثيل المصفوفي على الشكل :

$$\begin{bmatrix} -\left(\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - K_o^2 \mu_r \varepsilon_{r_{11}} & \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y} - K_o^2 \mu_r \varepsilon_{r_{12}} & \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial z} - K_o^2 \mu_r \varepsilon_{r_{13}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y} - K_o^2 \mu_r \varepsilon_{r_{21}} & -\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - K_o^2 \mu_r \varepsilon_{r_{22}} & \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial z} - K_o^2 \mu_r \varepsilon_{r_{23}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial z} - K_o^2 \mu_r \varepsilon_{r_{31}} & \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial z} - K_o^2 \mu_r \varepsilon_{r_{32}} & -\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - K_o^2 \mu_r \varepsilon_{r_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0 \tag{2-91}$$

وقد حصلنا على المعادلة السابقة باستخدام التمثيل المصفوفي للمؤثر $\overrightarrow{rot}$:

$$\vec{\nabla} \wedge = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & 0 & -\dfrac{\partial}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}$$

وإذا فرضنا أن الحقل الكهربائي للموجة المستوية من الشكل:

$$e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} = e^{i(k_x x+k_y y+k_z z-\omega t)}$$

وبملاحظة الشكل (14 - 2)فان :

$$\frac{\partial}{\partial x} = ik_x = ik \sin \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = ik_z = ik \cos \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = ik_y = 0$$

ومن مقارنة المعادلة (91)مع (87) نجد أن :

$$\varepsilon_{r_{13}} = \varepsilon_{r_{23}} = \varepsilon_{r_{31}} = \varepsilon_{r_{32}} = 0 \quad , \mu_r = 1$$

وبملاحظة أن :

$$n = \frac{k}{k_o} = \frac{c}{v}$$

فان المعادلة (91) تصبح على الشكل التالي :

$$\begin{bmatrix} a-n^2\cos^2\theta & -ib & n^2\cos\theta\sin\theta \\ ib & a-n^2 & 0 \\ n^2\cos\theta\sin\theta & 0 & f-n^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0 \quad (2-92)$$

لكي يوجد حل للمعادلة (92) يجب أن تكون المصفوفة مساوية الى الصفر وبالنتيجة نجد أن :

$$An^4 - Bn^2 + F = 0 \qquad (2-93)$$

حيث :

$$\left.\begin{aligned} A &= a\sin^2\theta + f\cos^2\theta \\ B &= cd\sin^2\theta + fa(1+\cos^2\theta) \\ F &= fcd \\ a^2 - b^2 &= cd \end{aligned}\right\} \qquad (2-94)$$

ان حل المعادلة (93) يعطي :

$$n^2 = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AF}}{2A} \qquad (2-95)$$

من أجل بعض القيم الوسيطية لكل من البلازما والحقل المغناطيسي المطبق ولاتجاه انتشار الموجة تأخذ n^2 قيمة مساوية للصفر أوللنهاية، فمثلا عندما تصبح السرعة الطورية لانهائية فان $n^2 = 0$ وتدعى هذه الحالة بحالة القطع أو التوقف Cut off Case والحالة المعاكسة أي التي تكون فيها $n^2 = \infty$ (السرعة الطورية معدومة) تدعى بحالة الطنين • تفصل حالات الطنين والقطع قيم وسيطية التي من أجلها تكون n^2 موجبة أو سالبة أي تفصل بين مناطق الانتشار ومناطق عدم انتشار الموجة •

بالاعتماد على المعادلات(94)و(95) يمكن مناقشة حالات التوقف والطنين على الشكل :

- $n^2 = 0$ التوقف عند أي زاوية تجعل $d = 0$ أو $f = 0$ أو $c = 0$

- $n^2 = \infty$ الطنين عند أي زاوية : $\tan^2\theta = -\frac{f}{a}$

- $n^2 = \infty$ الطنين عندما $\theta = 0$ $\left[\begin{array}{l} c = \pm\infty \text{ تواترترنح الالكترون} \\ \\ d = \pm\infty \text{ تواترترنح الايون} \end{array}\right]$ الطنين الرئيسي

- $n^2 = \infty$ الطنين عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$, $a = 0$

اذا أضفنا المقدار An^2 الى طرفي العلاقة (93) نحصل على العلاقة التالية :

$$n^2 = \frac{An^2 - c}{An^2 + A - B}$$

وبتعويض قيمة n^2 من العلاقة (95) نحصل على علاقة تدعى علاقة Appleton-Hartree :

$$n^2=1 - \frac{x}{1-\dfrac{\frac{1}{2}y^2\sin^2\theta}{1-x} \pm\sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}y^4\sin^2\theta}{(1-x)^2} + y^2\cos^2\theta}} \qquad (2-96)$$

حيث $y = \frac{\Omega}{\omega}$ و $x = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$.

بعض الحالات المهمة لانتشار الامواج VHF $(f \simeq 2\ \text{MHz})$ في وسط من الايونوسفير غير مبدد يمكن تتبعها انطلاقا من المعادلات السابقة التي مرت معنا .

ولمناقشة العلاقة (96) نأخذ ثلاث حالات توافق ثلاثة قيم مختلفة للزاوية θ التي يكون فيها شعاع الموجة $\vec{k}$ لموجة مستوية مستقطبة خطيا منحرفا عن الحقل المغناطيسي الارضي $\vec{B}_o$ اذا كان $\vec{k}$ موازيا لـ $\vec{B}_o$ فاننا نقول أن الانتشار طولاني أما اذ

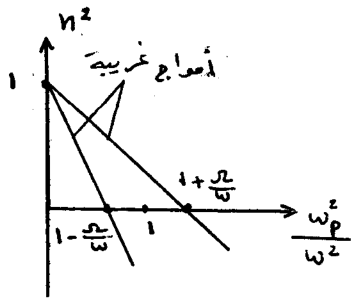
كانت $\vec{k}$ عمودية على $\vec{B}_o$ فالانتشار يكون عندئذ عرضيا . لنرى هذه الحالات :

١ - الانتشار الطولي:

يتم هذا الانتشار عندما: $\Theta = 0$ ، $y = \frac{\Omega}{\omega} < 1$ وعند هذا الشرط تكون n^2 مساوية الى :

$$n^2 = \frac{1 - x}{1 \pm y} = \frac{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}{1 \pm \frac{\Omega}{\omega}} \tag{2-97}$$

هذا النوع من الامواج يدعى بالامواج الغريبة أو الشاذة "Extraordinary Waves" وهذه الامواج تتأثر بالحقل المغناطيسي المطبق يبين الشكل (15 - 2) انتشار موجة طولية .



شكل (15 - 2) تغير مربع قرينة الانكسار n^2 بدلالة $\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$ عند انتشار الموجة الطولية .

2 - الانتشار العرضي :

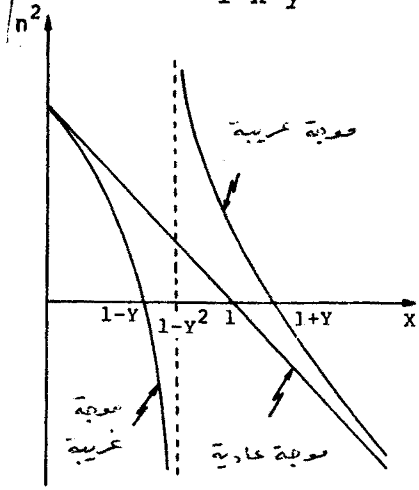
عندما $\Theta = \frac{\pi}{2}$ ، $y = \frac{\Omega}{\omega} < 1$ ولقرينة انكسار الوسط قيمتين :

الموجة المعتادة أو العادية Ordinary (لاتعتمد على الحقل المغناطيسي).

$$n^2 = 1 - x = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \tag{2-98}$$

موجة غريبة :

$$n^2 = 1 - \frac{x(1-x)}{1-x-y^2} = 1 - \frac{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \qquad (2-99)$$



والشكل (2-16) يبين انتشار موجة عرضية .

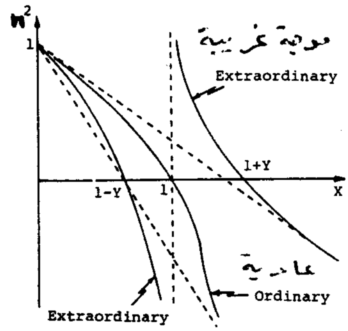
الشكل (2-16) انتشار موجة عرضية

من الشكل نلاحظ أنه عندما تكون $\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$ صغيرة جداً فان $n \longrightarrow 1$ وعند تزايد $\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$ فان n تتناقص حتى تصل الصفر عندما $\omega = \omega_p$. وعندما تكون: $\frac{\omega_p^2}{\omega^2} > 1$ فان n تصبح تخيلية وكذلك السرعة الطورية. بقي أن نشير الى أن السرعة الطورية تكون أكبر من سرعة الضوء عندما تكون $\omega < \omega_p$ والعدد الموجي k يصبح تخيليا وتخامد الحقل مع المسافة يكون أسيا ويزداد بازدياد المسافةوبالتالي لايمكن للموجة أن تنتقل عبر الايونوسفير .

3- <u>حالة الانحراف المتوسط بين الحالتين (1) و (2) أي أن</u> :

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad , \quad y < 1 .$$

عندما تكون الزاوية بين الحقل المغناطيسي الارض والموجةصغيرة فان قرينة الانكسار تتغير بين حدود الحالة (1) و (2) ويكون لها الشكل التالي : شكل (17 - 2) : من الشكل نجد أنه اذا دخلت الموجة



شكل (17 - 2) الانحراف المتوسط للامواج.

المعتادة الوسط الذي تتزايد فيه x (زيادة الكثافة الالكترونيــــة) اضافة الى الشرط $\Theta = 0°$ فانها تفقد بعضا من طاقتها للموجــة الغريبة التي تتولد قــــرب $x = 1\,(\omega_p - \omega)$ وعنـــد الحــد الذي يكون فيه الانتشار طولي بشكل كلي فان الموجة المعتادة تنقلب كليا الى موجة غريبة عند $x = 1$ وعند $x > 1$ توجد موجة غريبـــة فقط .

2 - 2 - 2 - تطبيق : دوران فاراداي أو مفعول فاراداي :

عند تطبيق حقل مغناطيسي على مادة شفافة كالزجـــاج وغير فعالة ضوئيا تمر خلالها حزمة ضوئية مستقطبة استقطابا خطيـــا وموازية للحقل المغناطيسي فان مستوى اهتزاز الحزمة يدور بزاويـة ما وتعرف هذه الحادثة باسم مفعول فاراداي . لنرى هذا المفعـــول عند انتشار موجة كهرطيسية في الايونوسفير ولنعين زاويـــة دوران مستوى الاستقطاب لهذه الموجة .

ان وجود الحقل المغناطيسي كما رأينا في البلازمـــا يؤدي الى نشوء وسط ذو انكسار مضاعف . فالموجة الكهرطيسية فـــي الايونوسفير تنقسم الى موجتين : معتادة وغريبة . وبما أن لهاتيـن الموجتين سرعتين طوريتين مختلفتين فان مستوى الاستقطاب للموجـــة المحصلة يدور بزاوية ما . لتكن λ_1 و λ_2 طول كل من هاتيـــن الموجتين اللتين تنتشران لمسافة قدرها dL ان الفرق فـــي دوران

طوريهما يساوي :

$$d\phi = k_1 dL - k_2 dL = \left(\frac{2\pi}{\lambda_1} - \frac{2\pi}{\lambda_2}\right) dL \qquad (2-100)$$

ولكن طول الموجة ترتبط بقرينة الانكسار بالعلاقة :

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{nf} = \frac{2\pi c}{\omega n}$$

نعوض قيمة λ في العلاقة (100) فنجد :

$$d\phi = \frac{\omega}{c}(n_1 - n_2)\, dL \qquad (2-101)$$

ان القيم التقريبية لقرينة انكسار الايونوسفير في حالة نمط الانتشار الطولي هي :

$$n_1 = 1 - \frac{x/2}{1 + y}$$

$$n_2 = 1 - \frac{x/2}{1 - y}$$

ومنه فان : $n_1 - n_2 = \frac{xy}{1-y^2} \approx xy$ عند $\omega >> \Omega_c$.

وبتعويض هذه القيمة في العلاقة (101) نجد أن :

$$d\phi = \frac{\omega}{c}\, xy dL = \frac{Ne^3 B_o}{cm^2 \omega^2 \varepsilon_o}\, dL \qquad (2-102)$$

فاذا فرضنا أن موجة راديوية تواترها 136 MHz تمر في الايونوسفير لمسافة 300 km وكان متوسط كثافة الالكترونات : $N = 4 \times 10^{11} \frac{\text{الكترون}}{m^3}$ وكان متوسط الحقل المغناطيسي B_o مساوي $B_o = 5 \times 10^{-5}\ wb/m^2$ فان الدوران يكون بحوالي 15.32 راديان.

ان B_o تكون عادة ثابتة مع الزمن ولذلك فان تغير زاوية الدوران الكلية ϕ مع الزمن تشير الى وجود تغير في كثافة الالكترونات عبر المسافة L وهذه المعلومات هي في غاية الاهمية بالنسبة للاتصالات التي تستخدم الاقمار الصناعية المتزامنة.

3 - 2 - 2 - الايونوسفير:

هي المنطقة الممتدة في الغلاف الجوي من (50 الى km 10^3) ويكون الغلاف الجوي فيها متأينا الى درجة كافية بحيث يصبح له تأثيرا على انتشار الامواج الكهرطيسية . يعود تأين الغلاف الجوي في أغلب الاحيان الى الاشعة فوق البنفسجية القادمة من الشمس .

تزداد الكثافة الايونية في الغلاف بازدياد الارتفاع ومن ثم لاتلبث أن تنخفض . غير أنها تظهر عتبات تتغير بشكل طفيف مع الارتفاع تدعى بالطبقات D و E و F_1 و F_2 .ويعود منشأ هذه الطبقات في وقت واحد الى تغير طبيعة الاشعاع الشمسي والى تغير تركيب هذه الطبقات مع الارتفاع . ان شدة تأين وارتفاع هذه الطبقات يتغير مع ساعات النهار ،مع تغير الفصل ومع تغير دورة السفع الشمسية ......الخ. ويبدو أن الناقلية σ تقريبا تعود بالكامل الى الكثافة الالكترونية ماعدا الحد السفلي من الايونوسفير.

تتراوح كثافة الالالكترونات من/ $10^{10}\ \frac{\text{electron}}{m^3}$/ عند الطبقة الدنيا الى / $10^{12}\ \frac{\text{الكترون}}{m^3}$ / عند الطبقة العليا . وعلى ارتفاعات أعلى من هذه المنطقة فان كثافة الجزيئات تتغير من $10^{22}/m^3$ الى $10^{15}/m^3$. ان عامل التأين يزداد بسرعة مع الارتفاع لكنه يبقى ضعيفا . فعندما تكون $N_e = 10^{11}/m^3$ فان تواتر البلازما يساوي $f_p \sim 3$ MHz والترددات التي تكون أقل من f_p لاتنفذ الى طبقة الايونوسفير بل تنعكس عنها .

4 - 2 - 2 - انتشار الامواج الكهرطيسية المستوية في البلورات :

يوجد العديد من البلورات التي تتميز بخاصة عدم تماثل

المناحي الكهربائي (عدا البلورات المكعبة) ولهذه البلورات تأثير على انتشار الامواج الكهرطيسية (الضوئية) بشكل مشابه لتأثير البلازما تقريباً . يحدث عدم التماثل في البلورات بسبب عدم تناظر الجزيئات المؤلفة للبلورة فقد تكون متطاولة باتجاه، و قصيرة باتجاه آخر . وعند مرور حقل كهربائي عبر هذه المادة فان اهتزاز الالكترونات الرابطة سوف يتعلق با تجاه الحقل (مثلا ،على فرض أن الالكترونات تستجيب للاهتزازات في اتجاه موازٍ لمحور الجزيء أكثر من استجابتها للاهتزازات العمودية على محور الجزيء الذي تنتمي اليه) وتكون ثابتة العزل الكهربائي ε عبارة عن مصفوفة .

وبسبب عدم التماثل السابق ذكره في البلورات توجد قيمتان للسرعة الطورية من أجل انتشار الموجة الكهرطيسية وبالمقابل فان قرائن الانكسار الموافقة لكل سرعة تكون مختلفة عن الاخرى . وهكذا فان قرينة الانكسار وبالتالي سرعة الموجة داخل البلورة يتعلقان باتجاه انتشار الموجة في البلورة، وهاتين السرعتين توافقين دوماً استقطابين وفق مستويين متعامدين. يوجد اذن موجتين تنتشران في البلورة هما : موجة معتادة وموجة غريبة . وتسمية هذين النوعين من الامواج هو نفسه في البلازما والبلورات ولكن ظاهرة عدم التماثل في البلازما تنتج عن عمليات فيزيائية مختلفة كلياً عن التي تحدث في البلورات . من جهة أخرى يوجد في البلورات اتجاه مفضل تكون وفقه السرعتان الطوريتان المستقطبتان في مستويين متعامدين متساويتين وكذلك تتساوي متجهات الموجة k . يدعى هذا الاتجاه المفضل بالمحور الضوئي . وجدنا أن ثابت العزل الكهربائي في الوسط المختلف المناحي هو عبارة عن تنسور من الشكل :

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_o \begin{bmatrix} \varepsilon_{r_{11}} & \varepsilon_{r_{12}} & \varepsilon_{r_{13}} \\ \varepsilon_{r_{21}} & \varepsilon_{r_{22}} & \varepsilon_{r_{23}} \\ \varepsilon_{r_{31}} & \varepsilon_{r_{32}} & \varepsilon_{r_{33}} \end{bmatrix}$$

يمكن ايجاد جملة محار بحيث أن تنسور ثابت العزل الكهربائي $\hat{\varepsilon}$ يمكن أن يكتب بشكل مصفوفة قطرية :

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_o \begin{bmatrix} \varepsilon_{r_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{r_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{r_{33}} \end{bmatrix} \qquad (2-103)$$

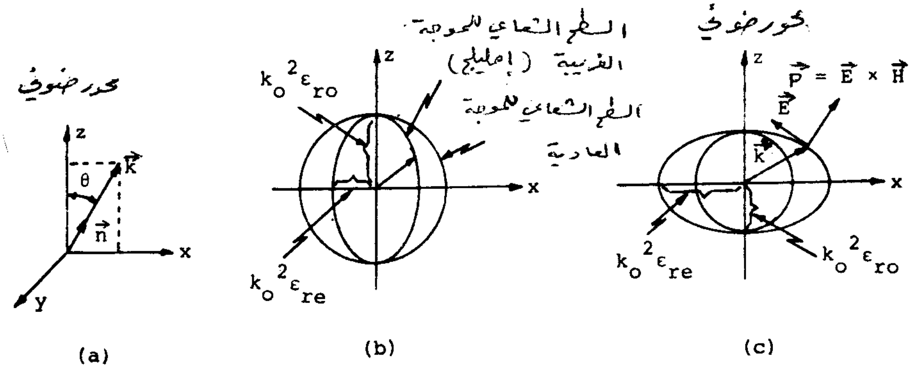
تدعى اتجاهات هذه المحاور بالمحاور الرئيسية Principle axes وتدعى المقادير $\varepsilon_{r_{11}}$ و $\varepsilon_{r_{22}}$ و $\varepsilon_{r_{33}}$ بالقيم الرئيسية لتنسور ثابت العزل الكهربائي $\hat{\varepsilon}$ حيث تأخذ قيما خاصة تتعلق بنوع البلورة واذا عوضنا هذه القيم في المعادلة (91) التي تصف العلاقات في أي وسط مختلف المناحي وتفترض حلا لمعادلة الموجة المستوية من الشكل :

$$e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} = e^{i(k_x.x+k_y.y+k_z.z-\omega t)}$$

نحصل على المعادلة التالية بعد وضع $\mu_r = 1$:

$$\begin{bmatrix} k_y^2+k_z^2-k_o^2\varepsilon_{r_{11}} & -k_xk_y & -k_xk_z \\ -k_xk_y & k_x^2+k_z^2-k_o^2\varepsilon_{r_{22}} & -k_yk_z \\ -k_xk_z & -k_yk_z & k_x^2+k_y^2-k_o^2\varepsilon_{r_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0 \quad (2-104)$$

لنفحص هذه المعادلة عند تطبيقها على البلورات التي من أجلها يكون $\varepsilon_{r_{11}} = \varepsilon_{r_{22}} \neq \varepsilon_{r_{33}}$ والتي تدعى بالبلورات الاحادية المحور "Uniaxial Crystals" أما البلورات التي يكون فيها $\varepsilon_{r_{11}} \neq \varepsilon_{r_{22}} \neq \varepsilon_{r_{33}}$ فتدعى بالبلورات الثنائية المحور (ثنائية المحور الضوئي)Biaxial Crystals . نفترض أن الموجة المنتشرة في بلورة أحادية المحور تكون موجهة كما في الشكل(18 a - 2).



بلورة أحادية المحور سالبة $\qquad$ بلورة أحادية المحور موجبة

$\varepsilon_{r_e} < \varepsilon_{r_o}$ $\qquad$ $\varepsilon_{r_e} > \varepsilon_{r_o}$

الشكل(18 - 2)

وبملاحظة الشكل(a) نجد :

$$k_z = k \cos \theta = kn_z \quad , \; k_y = 0 \;, \; k_x = k \sin \theta = kn_x$$

وبكتابة: $\varepsilon_{r_{11}} = \varepsilon_{r_{22}} = \varepsilon_{r_o}$ ، $\varepsilon_{r_{33}} = \varepsilon_{r_e}$ و $k^2 = k_x^2 + k_z^2$ نجد

أن المعادلة (104) تكتب على الشكل التالي بعد الاخذ بعين الاعتبار العلاقات السابقة :

$$\begin{bmatrix} k^2-k_x^2-k_o^2\varepsilon_{r_o} & 0 & -k_xk_z \\ 0 & k^2-k_o^2\varepsilon_{r_o} & 0 \\ -k_xk_z & 0 & k^2-k_z^2-k_o^2\varepsilon_{r_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0 \quad (2\text{-}105)$$

وهذه المعادلة تساوي المعادلات الثلاث التالية :

$$\left.\begin{array}{ll} (a) & (k^2-k_o^2\varepsilon_{r_o})E_x - k^2n_x(n_xE_x+n_zE_z)=0 \\ (b) & (k^2-k_o^2\varepsilon_{r_o})E_y = 0 \\ (c) & (k^2-k_o^2\varepsilon_{r_o})E_z - k^2n_z(n_xE_x+n_zE_z)=0 \end{array}\right\} \quad (2\text{-}106)$$

واذا وضعنا : $E_x = E_z = 0$, $E_y \neq 0$ و $k^2 = k_o^2\varepsilon_{r_o}$ $(n^2 = n_o^2 = \varepsilon_{r_o})$

نحصل على حل لجملة المعادلات توافق موجة عادية يكون الحقل الكهربائي $\vec{E} = E_y\vec{a}_y$ فيهاعموديا على كل من $\vec{k}$ والمحور الضوئي المأخـــوذ باتجاه z . ومركبات حقل التحريض الكهربائي $\vec{D}$ يســـاوي:

$$D_y = n_o^2E_y \quad , \quad D_x = D_z = 0$$

وهذا يعني أن الحقول $\vec{E}$ و $\vec{D}$ تكون على استقامةواحدة في الموجـة العادية . يوجـد حل آخر للمعادلات(106) وذلك بوضـــع $E_y = 0$ في (106 - b) والمعادلتان (106, a و c) يكون لهما حلا اذا كان معين أمثال E_x و E_z يساوي الصفر . واذا فعلنا ذلك نحصـل على المعادلة التالية :

$$\frac{1}{k^2} = \frac{n_x^2}{k_o^2\varepsilon_{r_e}} + \frac{n_z^2}{k_o^2\varepsilon_{r_o}} = \frac{\sin^2\theta}{k_o^2\varepsilon_{r_e}} + \frac{\cos^2\theta}{k_o^2\varepsilon_{r_o}} \quad (2-107)$$

حيث استفدنا من العلاقة : $n_z^2 = 1 - n_x^2$.

المعادلة (107) تمثل معادلة سطح موجة شعاعي من أجل الموجة الغريبة وهذا مايظهره الشكل(2 - 18,b , c) في الحالات التي تكون فيها $\varepsilon_{r_e} < \varepsilon_{r_o}$ و $\varepsilon_{r_e} > \varepsilon_{r_o}$ على التوالي .

نلاحظ من الشكل أن السطح الشعاعي للبلورة الاحادية مؤلف من سطحين احداهما كروي والاخر اهليلجي دوراني لهما نفس المركز ويتماسان مع بعضهما في نقطتين والخط الواصل بين هاتين النقطتين يمثل المحور الضوئي الذي يكون في الاتجاه z .

يمس النوع الاول من البلورات حيث $\varepsilon_{r_e} < \varepsilon_{r_o}$ بالبلورات الوحيدة المحور السالبة (شكل(2-18, b)) حيث يكون القطع الناقص أو الاهليلج داخل الكرة . أما النوع الثاني من البلورات حيث $\varepsilon_{r_e} > \varepsilon_{r_o}$ ، شكل(3-18,c)) ، فيدعى بالبلورات الاحادية المحور الموجبة حيث تكون الكرة داخل القطع الناقص .

اذا انتشرت الموجة في الاتجاه z فان $n_x = 0$ وتكون $k = k_o n_o = k_o\sqrt{\varepsilon_{r_o}}$. أما اذا انتشرت الموجة في الاتجاه x فان: $k = k_o\sqrt{\varepsilon_{r_e}} = kn_e$ وبما أن السرعة تتناسب عكسا مع شعاع الموجة فان سطوح الموجة الشعاعية تظهر تغير سرعة الموجة مع اتجاه الانتشار .

لتوضيح سلوك الموجة في بلورة أحادية المحور نفرض أن المحور الضوئي موجه بزاوية ما بالنسبة لسطح البلورة كما يوضحه الشكل (2-19,a) . ويمكن وصف انتشار الموجة بالاعتماد على مبدأ هويجنس الذي يفرض بأن كل نقطة من سطح البلورة تعمل كمنبع حيث تصدر

مويجات سطوح موجتها تتألف من سطح كروي يمس سطحا اهليلجيا دورانيا وكما يتضح فان الموجة العادية O توافق الجبهة المستوية المغلفة لسطوح مويجات هويجنس الكروية وهي تنتشر في البلورة بشكل معامد للسطح ولاتعاني أي انحراف ،أما الموجة الغريبة E فهي التي تكون جبهتها المستوية مغلفة لسطوح المويجات الاهليلجية والشعاع الغريب E ينحرف عن الناظم على السطح ويصنع معه زاوية ما .

ان انكسار الموجة الواردة في البلورة الى موجتين تنتشران وفق اتجاهين مختلفين يدعى بالانكسار المضاعف Birefrigence ومستوى تساو الطور للموجة العادية O وللموجة الغريبة E يكونان متوازيين وموازيين لمستوى تساو الطور للموجة الواردة . تبرز هاتين الموجتين من البلورة في نفس الاتجاه نظرا لتوازي وجهي البلورة وتكون الحزمة O مستقطبة في مستوى المقطع الاصلي أما الحزمة E فتكون مستقطبة في مستو معامد للمقطع الاصلي .

وعند ورود موجة طبيعية على بلورة قطعت بحيث أن سطحها يوازي المحور البصري فان الموجتين العادية O والغريبة E تنتشران بنفس الاتجاه ولكن بسرعتين مختلفتين حيث تكون سرعة الموجة العادية أكبر من سرعة الموجة الغريبة في البلورات الموجبة شكل (2 - 19,b) والعكس يكون في البلورات السالبة . والموجتان البارزتان (الشكل نفسه) تبقيان منطبقتين ولانحصل على موجة مستقطبة أي تبقى الموجة طبيعية كما كانت. نستنتج مما تقدم أن خاصية الانكسار المضاعف في البلورة يرجع الى الطريقة التي قطعت بها البلورة. يحدد شعاع الانتشار $\vec{k}$ في البلورات المختلفة المناحي اتجاه مستويات تساوي الطور، هذا

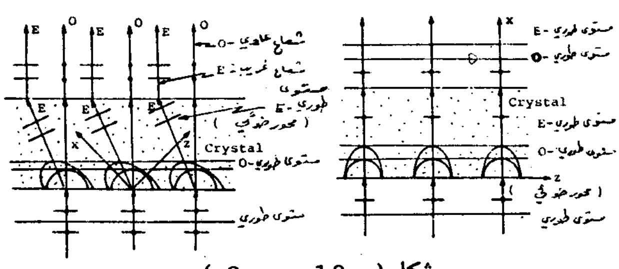
من جهة ومن جهة ثانية فان تدفق الطاقة $\vec{E}\wedge\vec{H}$ بشكل عام لايوازي $\vec{k}$ لأن $\vec{E}$ و $\vec{k}$ غير متعامدين والشكل التالي (20 - 2) يبين ذلك .

ان مستويات تساو الطور تكون عمودية على شعاع الانتشار $\vec{k}$ ولكنها تنتشر وفق منحى متجهة بوينتنغ $\vec{p}$. اذا كانت $\vec{v}_{ph}$ هي السرعة الطورية على المتجهة $\vec{k}$ و V_r هي السرعة الشعاعية على امتداد المتجهة $\vec{p}$ (السرعة الشعاعية تمثل سرعة انتشار الطاقة الكهرطيسية في الوسط المختلف المناحي) فان العلاقة التي تربط السرعة الطورية $\vec{v}_{ph}$ مع السرعة الشعاعية هي :

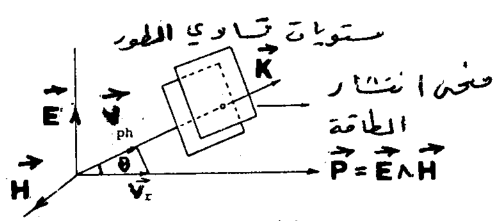
$$V_r = \frac{v_{ph}}{\cos\theta} \tag{2-108}$$

يتضح من العلاقة (108) أن السرعة الطورية للموجة المستوية تساوي الى مسقط سرعة انتشار الطاقة الكهرطيسية على الناظم لجبهة الموجة أي على $\vec{k}$

وان السرعة الشعاعية V_r تكون دوما أكبر من السرعة الطورية v_{ph} . وتتساوى السرعة الطورية والشعاعية عندما يكون اتجاه الانتشار وفق المحور الضوئي ويكون كل من $\vec{k}$ و $\vec{p}$ عندئذ في نفس الجهة .



شكل (2 - 19)



شكل (2 - 20)

تمارين غير محلولـــــــــــــــــة

١ – حزمة من الليزر استطاعتهـــا 20 GW وقطرها 2 mm . احسب القيمة العظمى لكل من الحقل الكهربائي وحقل التحريض المغناطيسي لها .

٢ – تنتشر موجة كهرطيسية مستوية تواترها 10 MHz وسعتها العظمى $E_0 = 50\ \mu V/m$ والمطلوب حساب :

أ – القيمة المتوسطة لكثافة الطاقة الكهربائية لهذه الموجة .

ب – كثافة الطاقة الكلية .

جـ – القيمة الوسطى لمتجهة بوينتنغ .

د – طويلة متجهة بوينتنغ .

هـ – الطاقة المتوسطة الموجودة في مكعب طول ضلعه 10 km.

٣ – سلك من التنغستين طوله 1,32 m نصف قطره 1 mm وناقليته $\sigma = 1.8 \times 10^7$ mho/m طبق عليه توتر مقداره V=10 Volt أوجد متجهة بوينتنغ على سطح هذا السلك ثم ارسم طويلة متجهة بوينتنغ في المجال $0 \leqslant r < \infty$.

٤ – ماهي حالة الاستقطاب للامواج التالية :

1) $\vec{E} = E_o \cos(kz - \omega t)\vec{i} \pm E_o \cos(kz - \omega t)\vec{j}$

2) $\vec{E} = E_o \cos(kz - \omega t)\vec{i} \pm E_o \sin(kz - \omega t)\vec{j}$

3) $\vec{E} = (E_{ox}\vec{i} - E_{oy}\vec{j})\cos(kz - \omega t)$

٥ ـ تنتشر موجة كهرطيسية مستوية في وسط سماحيته النسبيـــــــة $\varepsilon_r = 2.7$. فاذا كانت متجهة الحقل الكهربائي لهذه الموجة هي :

$$\vec{E} = 3{,}6\vec{i} + 1{,}2\vec{j} - 2\vec{k} \quad v/m$$

وكان العدد الموجي $\vec{k}$ يساوي : $\vec{k} = 0.1\vec{i} - 0.2\vec{j} \ (m^{-1})$

أوجد الحقل المغناطيسي $\vec{H}$ لهذه الموجة علما بأن تواتـــر الموجة الكهرطيسية يساوي 10^6 Hz .

٦ ـ يعطى الحقل الكهربائي $\vec{E}$ والحقل المغناطيسي $\vec{H}$ في النواقـل الجيدة بالعلاقتين :

$$\vec{E} = \vec{i}E_o \, e^{j[(k'-k'')x-\omega t]}$$

$$\vec{H} = \vec{k}\left(\frac{k'+jk''}{\omega\mu}\right)E_o e^{j[(k'-k'')x-\omega t]}$$

أوجد القيمة الوسطى لمتجهة بويتنـــغ العقديـــــــــــة :

$$\langle\vec{p}_c\rangle = \frac{1}{2} R_e[\vec{E} \wedge \vec{H}^*]$$

٧ ـ تنتشر موجة كهرطيسية سعتها العظمى $E_o = 4 \ \mu V/m$ فـــي وسط عازل غير مبدد فيه : $\mu_r = 1$ و $\varepsilon_r = 6$ أوجد :

a) سرعة الموجة ، b) ممانعة الوسط ، c) متجهة بوينتنـــــغ ، d) السعة العظمى للحقل المغناطيسي .

٨ ـ تنتشر موجة كهرطيسية مستوية باتجاه المحور z فاذا علمنـا أن مركبات الحقل الكهربائي لهذه الموجة هي :

$$E_x = E_{ox}\cos(kz - \omega t + \varphi_1)$$

$$E_y = E_{oy}\cos(kz - \omega t + \varphi_2)$$

$$E_z = 0$$

١ ــ احسب مركبات $\vec{B}$ ثم احسب متجهة بوينتنغ $\vec{p}$.

٢ ــ احسب الاستطاعة المتوسطة التي تعبر عنصر السطح s الموضوع بشكل عمودي على جهة الانتشار .

٩ ــ بفرض أن الحقلين الكهربائي $\vec{E}$ والمغناطيسي $\vec{H}$ في العوازل ($\sigma ,\rho = 0$) يساويان :

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_o e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$$

حيث $\vec{E}_o$ ، $\vec{H}_o$ ، k_x ، k_y ، k_z هي كميات ثابتة مستقلة عن x ، y ، z و t .

a) أثبت أن : $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$

حيث k هو العدد الموجي للوسط العازل .

b) أوجد اتجاهات $\vec{E}$ و $\vec{H}$ بالنسبة لـ $\vec{k}$.

١٠ــ لتكن مركبات الحقل الكهربائي كالتالي :

$$E_x = 0 \text{ و } E_y = 0 \text{ و } E_z = a\cos(nx)\sin nt$$

بفرض أن $\vec{H} = 0$ عندما $t = 0$ وان $\varepsilon=\mu=1$ و $\sigma = \rho = 0$

أثبت أن :

$$H_x = 0 \ , \ H_z = 0 \ , \ H_y = -a \sin(nx).\sin nt$$

تحقق أن التدفق الوسطي للطاقة معدوم :

$\langle p \rangle = 0$ (حالة موجة مستقرة)

١١- اذا علم بأن تدفق الاستطاعة التي يتلقاها $1 \ m^2$ من سطح الارض عندما يضاء ناظميا بأشعة الشمس هي : 1.35×10^3 W.
بين أن السعة العظمى للحقل الكهربائي E_o عند سطح الارض هي $1008,6$ V/m وأن السعة العظمى للحقل المغناطيسي H_o هي 2.7 A/m .

١٢- اثبت أنه اذا كان $\vec{E}(r) = \vec{E}_o e^{i\vec{k}.\vec{r}}$ حيث $\vec{E}_o$ متجهة ثابتة فان :

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = i\vec{k}.\vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = i\vec{k} \wedge \vec{E}$$

حيث $\vec{k} = k_x\vec{i} + K_y\vec{j} + k_z\vec{}$ و $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{}$

١٣- عند دراسة انتشار موجة مستوية متجهة الموجة لها $\vec{k}$ فانه يمكننا تحليل المقدار المتجهي $\vec{v}$ الى مركبتين : مركبة موازية لـ $\vec{k}$: $\vec{v}_{11}$ وأخرى عمودية على $\vec{k}$ هي $\vec{v}_\perp$ فنكتب :

$$\vec{v} = (\vec{v}_{11} + \vec{v}_\perp)e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \qquad (\omega > 0)$$

انطلاقا من معادلات ماكسويل اكتب المعادلات المتجهية (الشعاعية)

التي تربط $\vec{E}_{11}$, $\vec{E}_{\perp}$, $\vec{B}_{11}$, $\vec{B}_{\perp}$, $\vec{j}_{11}$, $\vec{j}_{\perp}$, ρ , $\vec{k}$ حيث $\vec{j}$ هي متجهة كثافة التيار، ρ هي كثافة الشحنات .

١٤ - لنعتبر معدنا ما ناقليته σ ولنبحث عن حل لمعادلات ماكسويل في هذا المعدن على شكل موجة مستوية تواترها الزاوي ω . وليكن هذا الحل من الشكل:

$$\vec{E} = E_o f(x) e^{i(k_x - \omega t)} . \vec{e}_z$$

حيث $\vec{e}_z$ هي متجهة الواحدة على المحور oz , $f(x)$ هو تابع يطلب تحديده، علما بأن تيار الانزياح $\varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ يهمل أمام تيار الناقلية $\vec{j}$ الذي يساوي $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

١ - أوجد انطلاقا من عبارة الحقل الكهربائي $\vec{E}$ حقل التحريض المغناطيسي $\vec{B}$ ثم تحقق ان $\vec{E}$ و $\vec{B}$ يحققان العلاقتين:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{و} \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

٢ - برهن أنه يمكن الحصول على معادلة تفاضلية للتابع f انطلاقا من معادلة ماكسويل أمبير (يهمل تيار الانزياح).

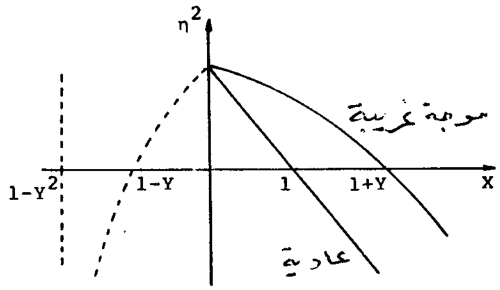
برهن أن f هو من الشكل :

$$f(x) = Ae^{(-x/\delta)}$$

أوجد كل من δ عمق التوغل و k .

٣ - احسب δ من أجل النحاس عند التواترات $100Hz$ ، 10^3Hz ، 10^5Hz ، $\sigma = 5.8 \times 10^7 \Omega^{-1}.m^{-1}$ ، $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7} H/m$

١٥- تأكد من أن الشكل التالي يوافق انتشار موجة عرضية عندما $y > 1$.



١٦ – احسب قيمة n^2 باستخدام علاقة Appleton-Hartree من أجل موجة ترددها 1 MHz تنتشر بزاوية مقدارها 45° اذا علم أن قيمة الحقل المغناطيسي الارضي تساوي $5 \times 10^{-5}\ wb/m^2$ والكثافة الالكترونية في النهار تساوي $N=1.5\times 10^{12} electron/m^3$

١٧ – تنتشر موجة تواترها 6 MHz انتشارا عرضانيا على الحقل المغناطيسي الارضي ،أي أن اتجاه الانتشار يعامد الحقل المغناطيسي الارضي ، عين تغير الطور للموجات العادية والغريبة اذا كانت مسافة الانتشار 1 km ، علما أن قيمة الحقل المغناطيسي الارضي هي : $50 \times 10^{-6}\ wb/m^2$ والكثافة الالكترونية في الليل هي : $N = 0,5\times 10^{12} elect/m^3$ وأن $\omega >> \Omega$ ، $\omega >> \omega_p$

١٨ – نعتبر أن كثافة الشحنات ρ معدومة عمليا داخل النواقل ولكنها من الناحية النظرية لاتساوي الصفر ،أوجد العلاقة التي تعطي ρ بدلالة ε و σ .

١٩ – أثبت أن الحقل الكهربائي والمغناطيسي التاليين :

$$\vec{H}= \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi \wedge \vec{k}\ , \quad \vec{E}=-\vec{k}\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{\text{grad}}\ \phi$$

يحققان معادلات ماكسويل التالية في الفراغ :

1) $\text{div}\ \vec{H} = 0$

2) $\text{div}\ \vec{E} = 0$

3) $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{H} = \frac{1}{C} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

4) $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = - \frac{1}{C} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

حيث $\vec{k}$ هي متجهة الواحدة على المحور oz , $\phi(x,y,z,t)$ هو تابع سلمي يحقق المعادلة :

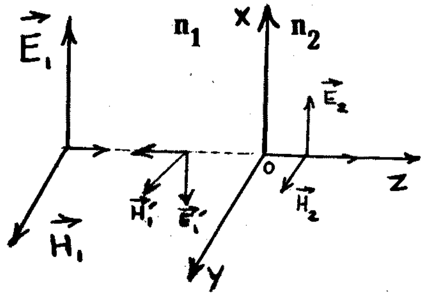
$$\nabla^2\phi = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

الفصل الثالث

انعكاس وانكسار الامواج الكهرطيسية على المستوى الفاصل بين أوساط مادية مختلفة

1 -3 - انعكاس وانكسار الامواج الكهرطيسية المستوية على السطح الفاصل بين وسطين غير ناقلين - الورود الناظمي:

عند سقوط موجة كهرطيسية مستوية ناظميا على السطح الفاصل بين عازلين فان جزءاً منها سوف ينعكس وجزءاً آخر سوف ينفذ الى الوسط الثاني . شكل (1 - 3).



الشكل (1 - 3) انعكاس وانكسار موجة كهرطيسية مستوية مستقطبة خطيا على السطح الفاصل بين عازلين .

بفرض أن الموجة الواردة تنتشر وفق الاتجاه الموجب للمحور z . ولنرمز بـ $\vec{E}_1$ ، $\vec{H}_1$ للحقلين الكهربائي والمغناطيسي في الموجة الواردة وبـ $\vec{E}'_1$ ، $\vec{H}'_1$ لنفس الحقلين في الموجة المنعكسة بالاتجاه السالب للمحور z وبـ $\vec{E}_o$ ، $\vec{H}_o$ للحقلين الكهربائي والمغناطيسي في الموجة النافذة في الوسط الثاني . ولنختار السطح الفاصل بين الوسطين العازلين بحيث يكون منطبقا على المستوي xy في النقطة z = 0 فيكون الوسط الاول على يساره والوسط الثاني على يمين هذا المستوي . ان الحقول الكهربائية المستقطبة خطيا وفق

الاتجاه x تكتب من أجل الموجة الواردة ، المنعكسة والنافذة على الشكل التالي :

$$\vec{E}_1 = E_{1x}\cdot e^{i(k_1 z-\omega t)}\cdot\vec{i}$$

$$\vec{E}'_1 = -E'_{1x}\cdot e^{-i(k_1 z+\omega t)}\cdot\vec{i} \qquad (3-1)$$

$$\vec{E}_2 = E_{2x}\cdot e^{i(k_2 z-\omega t)}\cdot\vec{i}$$

حيث k_1 ، k_2 هما طويلتا متجهة الموجة الواردة والنافذة ويساويان

$$k_1 = \frac{n_1}{c}\,\omega = \frac{\omega}{v_1}$$

$$k_2 = \frac{n_2}{c}\,\omega = \frac{\omega}{v_2}$$

أما حقول التحريض المغناطيسي لكل من الموجة الواردة والمنعكسة والنافذة فتساوي على الترتيب :

$$\vec{B}_1 = \frac{n_1}{c}\,E_{1x}\cdot e^{i(k_1 z-\omega t)}\cdot\vec{j} = B_{1x}\cdot e^{i(k_1 z-\omega t)}\cdot\vec{j}$$

$$\vec{B}'_1 = \frac{n_1}{c}\,E'_{1x}\cdot e^{-i(k_1 z+\omega t)}\cdot\vec{j} = B'_{1x}\cdot e^{-i(k_1 z+\omega t)}\cdot\vec{j}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{n_2}{c}\,E_{2x}\cdot e^{i(k_2 z-\omega t)}\cdot\vec{j}$$

$$= B_{2x}\cdot e^{i(k_2 z-\omega t)}\cdot\vec{j}$$

حيث أن : $\vec{B} = \frac{1}{\omega}(\vec{k}\wedge\vec{E})$ وان تواتر الموجة المنعكسة والنافذة

هو نفس تواتر الموجة الواردة ω لان الموجة الكهرطيسية تحافظ على تواترها عند الانعكاس والانكسار (النفوذ).

من شرط استمرار المركبات المماسية للحقول عند $z = 0$ نجد أن:

$$E_{1x} - E'_{1x} = E_{2x} \tag{3-3}$$

و:

$$H_1 + H'_1 = H_2 \tag{3-4}$$

من أجل الاوساط غير المغناطيسية فان : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_o$ والعلاقة (4) تكتب على الشكل :

$$\frac{n_1}{c} E_{1x}.e^{-i\omega t} + \frac{n_1}{c} E'_{1x}.e^{-i\omega t} = \frac{n}{c} E_{2x}.e^{-i\omega t}$$

وبعد الاختصار نجد أن :

$$n_1(E_{1x} + E'_{1x}) = n_2E_{2x} \tag{3-5}$$

ومن (3)و(5) يمكن أن نستنتج العلاقة بين كل من سعة الموجة المنعكسة E'_{1x} وسعة الموجة النافذة E_{2x} بدلالة سعة الموجة الواردة E_{1x} وهذه العلاقات هي :

$$E'_{1x} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_{1x}$$

$$E_{2x} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} E_{1x} \tag{3-6}$$

نستنتج من هاتين العلاقتين أن كلا من النسبتين $\frac{E'_{1x}}{E_{1x}}$ و $\frac{E_{2x}}{E_{1x}}$ تتحدد كليا من معرفة قرينة انكسار الوسط الاول n_1 وقرينة انكسار الوسط الثاني n_2 . وبالمقابل فانه يمكن بسهولة ايجاد العلاقة بين كل من سعتي الحقل المغناطيسي للموجة المنعكسة والنافذة بدلالة سعة الحقل المغناطيسي للموجة الواردة وهذه العلاقات هي :

$$H_1' = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} H_1$$
$$(3-7)$$
$$H_2 = \frac{2n_2}{n_1 + n_2} H_1$$

تدعى كل من النسبتين : $\frac{E_{1x}'}{E_{1x}}$ و $\frac{E_{2x}}{E_{1x}}$ بمعاملات فرنل في الانعكاس والانكسار في الحالة التي تكون فيها الموجة الكهرطيسية الواردة عمودية على السطح الفاصل ونرمز لها بالرمز r_{12} و t_{12}:

$$r_{12} = \frac{E_{1x}'}{E_{1x}} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$
$$(3-8)$$
$$t_{12} = \frac{E_{2x}}{E_{1x}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

في الواقع ان مايقاس ليس الحقل الكهربائي المنعكس أو المنكسر وانما هو متوسط متجهة بوينتنغ أي متوط الطاقة المتدفقة في واحدة المساحة وتدعى بالشدة وتساوي :

متوسط متجهة بوينتنغ للموجة الواردة $\langle p_1 \rangle = \frac{1}{2} \frac{n_1}{\mu_o c} E_{1x}^2$ (3-9)

المنعكسة = = = = $\langle p_1' \rangle = \frac{1}{2} \frac{n_1}{\mu_o c} E_{1x}'^2$ (3-10)

النافذة = = = = $\langle p_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{n_2}{\mu_o c} E_{2x}^2$ (3-11)

نعرف عامل الانعكاس R_n وعامل النفوذية T_n بالعلاقتين:

$$R_n = \frac{\langle p_1' \rangle}{\langle p_1 \rangle}$$
$$(3-12)$$
$$T_n = \frac{\langle p_2 \rangle}{\langle p_1 \rangle}$$

وفي حالة الورود الناظمي للموجة الكهرطيسية فان عامل الانعكاس

R_n والنفوذ T_n يساويان :

$$R_n = \frac{\langle p_1' \rangle}{\langle p_1 \rangle} = \frac{E'^2_{1x}}{E^2_{1x}} = r^2_{12} \qquad (3-13)$$

$$T_n = \frac{\langle p_2 \rangle}{\langle p_1 \rangle} = \frac{E^2_{2x}}{E^2_{1x}} \cdot \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_2}{n_1}\, t^2_{12} \qquad (3-14)$$

يرتبط عامل الانعكاس والنفوذ بالعلاقة :

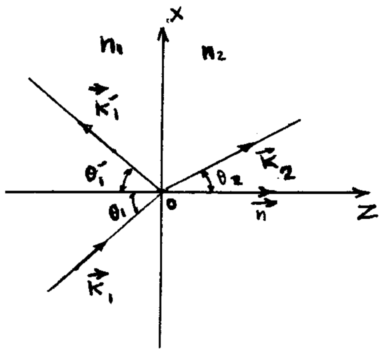
$$R_n + T_n = 1$$

وهذه العلاقة ليست الا شكلا من أشكال عبارات انحفاظ الطاقة عندالسطح الفاصل بين وسطين مختلفين ،وتبين على أن الموجةالواردة اما أن تكون منعكسة أو نافذة ولايوجد أي تخزين للطاقة على السطح الفاصل. اذا كان السطح الفاصل هو بين الهواء، $n_1 = 1$ والزجاج $n_2 = 1,5$ فان عامل الانعكاس يساوي $R_n = 0,04$ وعامل النفوذ يساوي $T_n = 0,96$ وفي حالة الهواء، $n_1 = 1$ والماء، $n_2 = 1,33$ (عند ترددات الضوء المرئي) فان $R_n = 0,02$، $T_n = 0,98$. عند الترددات الراديوية يصبح الماء النقي تقريبا غير ناقل وقرينة انكسار $n_2 = \sqrt{\varepsilon_r} = 9$ ولذلك فان عامل الانعكاس $R_n = 0,64$ و $T_n = 0,36$ أي أن 64 % من الموجة الواردة تنعكس على سطح الماء و 36% من الموجة الكهرطيسية ينفذ الى الماء. وأخيرا يجب التنويه الى أنه اذا كانت $n_2 > n_1$ فان r_{12} في العلاقة (8) يكون موجبا والموجة المنعكسة تكون متعاكسة في الطور مع الموجةالواردة وهذا ما ألفناه عند دراستنا للضوء من أن الانعكاس على وسط أشد كسرا يسبب تغيرا في الطور بمقدار π راديان أما انعكاس الضوء من وسط أشد

كسرا الى وسط أقل كسرا فلا يحدث تغيرا في طور للموجة المنعكسة وبالمقابل فان الموجة الواردة والنافذة تكونان على اتفاق في الطور سواء كانت n_2 أكبر أم أصغر من n_1 ، أي $t_{12}>0$ دوما .

2 ـ 3 ـ الانعكاس والانكسار على السطح الفاصل بين وسطين غير ناقلين الورود المائل :

تعتبر هذه الحالة أعم من الحالة السابقة ولذلك سوف نستنتج قوانين الانعكاس والانكسار المعروفين في الضوء ثم نستنتج العلاقة بين سعات الموجة المنكسرة والمنعكسة وبين سعة الموجة الواردة وهذه العلاقة تتبع طبيعة الحقول الكهرطيسية وشروطها الحدية على السطح الفاصل . يبين الشكل (2 - 3) موجة كهرطيسية واردة وفق الاتجاه $\vec{k}_1$ على الحد الفاصل بين وسطين عازلين قرينة انكسارهما n_1 و n_2، تمثل $\vec{k}_1'$ و $\vec{k}_2$ متجهات الانتشار للموجة المنعكسة والمنكسرة على الترتيب وهذه المتجهات $\vec{k}_1$، $\vec{k}_2$ و $\vec{k}_1'$ تقع جميعها في مستوي واحد هو المستوي xz .



الشكل (2 - 3) انعكاس وانكسار موجة كهرطيسية ترد بزاوية θ_1. المستوى xz يمثل مستوى الورود

يمكن كتابة المتجهات $\vec{k}_1$ ، $\vec{k}_2$ و $\vec{k}_1'$ على الشكل $\vec{k}_1=k_1\vec{u}_1$ ، $\vec{k}_1'= k_1.\vec{u}_1'$ و $\vec{k}_2 = k_2 \quad \vec{u}_2$. $\vec{n} = \vec{k}$ هي متجهة الواحدة العمودية على الحد الفاصل .

والمستوي المعرف بـ $\vec{k}_1$ و $\vec{n}$ يدعى بمستوي الورود وناظم هذا

المستوى يكون في الاتجاه $\vec{k}_1 \wedge \vec{n}$. تعطى معادلات الحقل الكهربائي للموجة الواردة والمنعكسة والمنكسرة على الترتيب بالمعادلات التالية :

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \hat{\vec{E}}_1 . e^{i(\vec{k}_1.\vec{r}-\omega t)} \\ \vec{E}_1' &= \hat{\vec{E}}_1' . e^{i(\vec{k}_1.\vec{r}-\omega t)} \\ \vec{E}_2 &= \hat{\vec{E}}_2 . e^{i(\vec{k}_2.\vec{r}-\omega t)} \end{aligned} \tag{3-15}$$

ان الشروط الحدية عند $z = 0$ تتحقق في أي نقطة من السطح الفاصل وفي أي لحظة زمنية وتغير الحقول الزماني والمكاني يجب أن يكون نفسه ولذلك فان الاطوار في كل نقطة من السطح الفاصل $z = 0$ تكون متساوية أي :

$$\vec{k}_1.\vec{r} = \vec{k}_1'.\vec{r} = \vec{k}_2.\vec{r} \tag{3-16}$$

ان $\vec{r}$ هي متجهة اختيارية على الحد الفاصل ولذلك يمكن اختيارها بحيث أن العلاقة (16) تصح فقط عندما $z = 0$ أو عندما $\vec{n}.\vec{r} = 0$ في كل نقطة من السطح الفاصل وبالاستفادة من المطابقة :

$$\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{r}) = (\vec{n}.\vec{r})\vec{n} - \vec{r} = -\vec{r}$$

فان :

$$\vec{k}_1.\vec{r} = -\vec{k}_1.\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{r}) = -(\vec{k}_1 \wedge \vec{n}).(\vec{n} \wedge \vec{r})$$

وبالمثل فان :

$$\vec{k}_1'.\vec{r} = -\vec{k}_1'.\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{r}) = -(\vec{k}_1' \wedge \vec{n}).(\vec{n} \wedge \vec{r})$$

$$\vec{k}_2.\vec{r} = -\vec{k}_2.\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{r}) = -(\vec{k}_2 \wedge \vec{n}).(\vec{n} \wedge \vec{r})$$

والعلاقة (16) تكون صحيحة فقط اذا كان :

$$(\vec{k}_1 \wedge \vec{n}) = (\vec{k}_1' \wedge \vec{n}) = \vec{k}_2 \wedge \vec{n} \tag{3-17}$$

وهذا يعني أن $\vec{k}_1'$ تقع في مستوى الورود وبما أن ناظم المستوى المعرف بـ$(\vec{n}, \vec{k}_1')$ هو موازيا لناظم مستوى الورود فان $\vec{k}_2$ تقع في مستوى الورود والمتجهات $\vec{k}_1', \vec{n}$, $\vec{k}_1$ و$\vec{k}_2$ تقع جميعها في مستوى واحد هو مستوى الورود . وبحساب الجداءات الشعاعية في العلاقة (17) نجد :

$$\vec{k}_2 . \vec{n} = k_2 \cos \theta_2 \ , \ \vec{k}_1' . \vec{n} = -k_1' \cos \theta_1' \ , \vec{k}_1 . \vec{n} = k_1 \cos \theta_1$$

و :

$$|\vec{k}_1 \wedge \vec{n}| = k_1 \sin \theta_1 \ , |\vec{k}_1' \wedge \vec{n}| = k_1' \sin \theta_1' \ , |\vec{k}_1 \wedge \vec{n}| = k_2 \sin \theta_2$$

وبالتعويض عن قيم هذه الجداءات في العلاقة (17) نحصل على العلاقة

$$k_1' \sin \theta_1' = k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 \qquad (3-18)$$

وبما أن $k_1 = k_1'$ فاننا نستنتج من (18) أن :

$$\theta_1 = \theta_1' \qquad (3-19)$$

أي أن زاوية الورود تساوي زاوية الانعكاس وهذا هو قانون الانعكاس.

ومن المساواة الثانية في العلاقة (18) فان:

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2$$

ولكن : $k_1 = n_1 \frac{\omega}{c}$ و $k_2 = n_2 \frac{\omega}{c}$ والعلاقة السابقة تساوي :

$$n_1 . \sin \theta_1 = n_2 . \sin \theta_2 \qquad (3-20)$$

وهذا هو قانون سنل في الانكسار . ان قانون الانعكاس والانكسار لايعتمد على الشروط الحدية للحقلين الكهربائي والمغناطيسي المشتقين من معادلات ماكسويل ولايعتمد على طبيعة الموجة .

3 - 3 - معادلات فرنل :

تتوقف العلاقة بين سعات الموجة الكهرطيسية الواردة والمنعكسة والمنكسرة على الشروط الحدية للحقل الكهرطيسي وعلى طبيعته أي على الحالة التي يكون فيها الحقل الكهربائي للموجة الكهرطيسية موازيا لمستوى الورود أو عموديا عليه. ان كل موجة كهرطيسية واردة يمكن تحليلها الى موجتين في الاولى يكون الحقل الكهربائي $\vec{\hat{E}}_P$ موازيا لمستوى الورود وفي الاخرى عموديا عليه $\vec{\hat{E}}_N$. يمكن كتابة سعات الموجة الواردة والمنعكسة بدلالة متجهات الواحدة على الشكل :

$\vec{\hat{E}}'_{1N}=\hat{E}'_{1N}\vec{N}'_1$, $\vec{\hat{E}}_{1N}=\hat{E}_{1N}\vec{N}_1$, $\vec{\hat{E}}_{2P}=\hat{E}_{2P}\vec{P}_2$, $\vec{\hat{E}}'_{1P}=\hat{E}_{1P}\vec{P}'_1$, $\vec{\hat{E}}_{1P}=\hat{E}_{1P}\vec{P}_1$

$\vec{\hat{E}}_{2N}=\hat{E}_{2N}.\vec{N}_2$. وتكون العلاقة بين متجهات الواحدة لهذه المركبات على الشكل :

$\vec{N}=\vec{u}\wedge\vec{p}$, $\vec{P}=\vec{N}\wedge\vec{u}$ ولذلك فان $\vec{N}_1=\vec{N}_2=\vec{N}'_1=\vec{j}$.

من شرط استمرار المركبة المماسية لـ $\vec{\hat{E}}$ و $\vec{\hat{B}}$ نجد :

$$\vec{n}\wedge(\vec{\hat{E}}_1+\vec{\hat{E}}'_1)=\vec{n}\wedge\vec{\hat{E}}_2 \qquad (3-21)$$

$$\vec{n}\wedge(\vec{\hat{B}}_1+\vec{\hat{B}}'_1)=\vec{n}\wedge\vec{\hat{B}}_2 \qquad (3-22)$$

(بفرض أن الوسط العازل غيرممغنط)

ننوه هنا الى أنه اذا أخذنا المطابقة التالية :

$$\vec{n}\wedge(\vec{n}\wedge\vec{\hat{E}})=(\vec{n}.\vec{\hat{E}})\vec{n}-\vec{\hat{E}}$$

فان :

$$\hat{E}=(\vec{n}.\vec{\hat{E}})\vec{n}-\vec{n}\wedge(\vec{n}\wedge\vec{\hat{E}})$$

فالحد الاول $(\vec{n}.\vec{\hat{E}})\vec{n}$ يمثل المركبة الناظمية لـ $\vec{\hat{E}}$ والحد الثانية $\vec{n}\wedge(\vec{n}\wedge\vec{\hat{E}})$ يمثل المركبة المماسية وهذا ما أشرنا اليه سابقا من أن $\vec{\hat{E}}$ يتألف من مركبتين ناظمية ومماسية .

اذا عوضنا عن قيمة $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \frac{n}{c}\ \vec{u} \wedge \vec{E}$$

و:

$$\vec{E} = -\frac{c}{n}\ \vec{u} \wedge \vec{B} \qquad (3-23)$$

في العلاقة (22) نجد:

$$n_1 . \vec{n} \wedge (\vec{u}_1 \wedge \vec{E}_1 + \vec{u}_1' \wedge \vec{E}_1') = n_2 \vec{n} \wedge (\vec{u}_2 \wedge \vec{E}_2) \qquad (3-24)$$

وللحصول على العلاقة بين $\vec{E}_1'$ و $\vec{E}_2$ بدلالة $\vec{E}_1$ يجب حل المعادلتين (24)و(21) مع الملاحظة أن الجداء الخارجي لثلاثة متجهات يساوي:

$$\vec{n} \wedge (\vec{u}_1 \wedge \vec{E}_1) = (\vec{n} . \vec{E}_1)\vec{u}_1 - (\vec{n} . \vec{u}_1)\ \vec{E}_1$$

وبشكل مشابه يمكن كتابة هذا الجداء من أجل المركبات $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$

من أجل المركبة الناظمية $\vec{E}_{1N}$ فان $n . \vec{E}_{1N} = 0$ والجداء الثلاثي السابق يصبح على الشكل:

$$\vec{n} \wedge (\vec{u}_1 \wedge \vec{E}_{1N}) = -\cos \theta_1 \vec{E}_{1N}$$

حيث $\vec{n} . \vec{u}_1 = \cos \theta_1$ وهكذا فان المعادلة (24) تصبح على الشكل:

$$n_1 (\cos \theta_1 \vec{E}_{1N} - \cos \theta_1' \vec{E}_1') = n_2 \cos \theta_2 \vec{E}_{2N} \qquad (3-25)$$

وبما أن $\theta_1 = \theta_1'$ فان (24) تساوي :

$$n_1 \cos \theta_1 (\vec{E}_{1N} - \vec{E}_{1N}') = n_2 \cos \theta_2 \vec{E}_{2N} \qquad (3-26)$$

وبأخذ الجداء الخارجي للعلاقة (21)مع $\vec{n}$ من أجل المركبة الناظمية لـ $\vec{E}$ نجد:

$$\vec{E}_{1N} + \vec{E}_{1N}' = \vec{E}_{2N} \qquad (3-27)$$

من العلاقتين (26)و(27) يمكن الحصول على العلاقة بين سعة الموجة الواردة وبين كل من سعة الموجة المنعكسة والمنكسرة عندما يكون

الحقل الكهربائي عموديا على مستوى الورود كما يمكن الحصول على هذه العلاقة عندما يكون الحقل الكهربائي موازيا لمستوي الورود وذلك بتعويض قيمة $\vec{E}$ من (23)في (21) • وسوف نقسم المناقشة الى جزأين نعالج في الجزء الاول الاستقطاب N للموجة الكهرطيسية وفي الجزء الثاني نعالج الاستقطاب من النوع p •

ا – الاستقطاب N :

بحل المعادلتين (26)و (27) مرتين في الاولى نحذف $\vec{E}_{2N}$ وفي الثانية نحذف $\vec{E}'_{1N}$ فنجد :

$$r_{12N} = \frac{\vec{E}'_{1N}}{\vec{E}_{1N}} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \qquad (3-28)$$

و :

$$t_{12N} = \frac{\vec{E}_{2N}}{\vec{E}_{1N}} = \frac{2 n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \qquad (3-29)$$

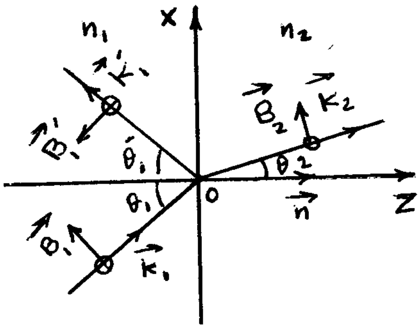
والشكل (3 - 3) يبين انكسار وانعكاس موجة كهرطيسية في حالة الاستقطاب N أي عندما يكون الحقل الكهربائي عموديا على مستوي الورود • تدعى العلاقتان (28)و (29)بالزوج الاول من معادلات فرنل

٢ – الاستقطاب $\vec{p}$ ($\vec{E}$ مواز لمستوي الورود) :

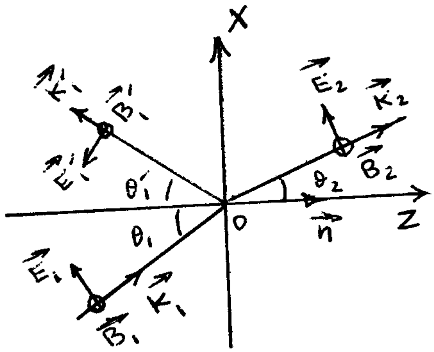
يبين الشكل (4 - 3) انعكاس وانكسار موجة كهرطيسية في حالة الاستقطاب $\vec{p}$: $\vec{E}$ مواز لمستوي الورود • عندما تقع المتجهات $\vec{E}_1$ و $\vec{E}'_1$ و $\vec{E}_2$ جميعها في مستوي الورود فان العلاقة (23) توضح أن المتجهات $\vec{B}$ تكون متجهة بالاتجاه العمودي أي بالاتجاه $\vec{j}$ ، شكل •(3 - 4)

واذا عوضنا قيمة $\vec{E}$: $\vec{E} = -\frac{c}{n}\vec{u} \wedge \vec{B}$ في العلاقة (21)نجد :

$$\frac{1}{n_1} \cos \theta_1 (\vec{B}_{1N} - \vec{B}'_{1N}) = \frac{1}{n_2} \cos \theta_2 \vec{B}_{2N} \qquad (3-30)$$



شكل(3 - 3)



شكل(4 - 3)

حيث : $\vec{n}\cdot\vec{B}_{1N} = \vec{n}\cdot\vec{B}_{2N} = \vec{n}\cdot\vec{B}'_{1N} = 0$.

وبالمقابل فان المعادلة (22) تساوي:

$$\vec{B}_{1N} + \vec{B}'_{1N} = \vec{B}_{2N} \qquad (3-31)$$

من العلاقتين (30)و(31) نجد أن العلاقة بين $\vec{B}_{1N}$ وبين $\vec{B}'_{1N}$ و $\vec{B}_{2N}$ هي :

$$\frac{\vec{B}'_{1N}}{\vec{B}_{1N}} = r_{12p} = \frac{n_2\cos\theta_1 - n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} \qquad (3-32)$$

$$t_{12p} = \frac{\vec{B}_{2N}}{\vec{B}_{1N}} = \frac{2n_2\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} \qquad (3-33)$$

وبحساب طويلة $\vec{E}$ من العلاقة (23) نحصل على :

$$r_{12p} = \frac{\hat{E}'_{1p}}{\hat{E}_{1p}} = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} \qquad (3-34)$$

$$t_{12p} = \frac{\hat{E}_{2p}}{\hat{E}_{1p}} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} \qquad (3-35)$$

تدعى هاتين العلاقتين بالزوج الثاني لمعادلات فرنل.

وهكذا فان الزوج الاول والثاني لمعادلات فرنل يعطي حلا للمسائل المتعلقة بالقيم الحدية على اعتبار أن الموجة الواردة المستقطبة

كيفياً، يمكن تحليلها الى مركبتين عمودية وموازية لمستوي الورود. ويجب التنويه هنا الى أن الاستقطاب p و N يعود دوماً الى اتجاه الحقل الكهربائي $\vec{E}$. عند الورد الناظمي للموجة الكهرطيسية فان $\Theta_1 = 0$ ومن علاقة سنل فان $\Theta_2=0$ والعلاقات (34)و(36)تصبح مساوية الى العلاقات(8) ولكننا نجد أن $r_{12N}= -r_{12p}$ ويحدث هذا الاختلاف في الاشارة نظراً لتعاكس اتجاه $\vec{E}_{1p}$ و$\vec{E}'_{1p}$ على حين يكون لـ $\vec{E}_{1N}$ و $\vec{E}'_{1N}$ نفس الاتجاه عند الورود الناظمي . في الاستقطاب N تربط معادلات فرنل بين متجهات الحقل الكهربائي أما عند الاستقطاب p فانها تربط بين طويلة هذه المتجهات ويعود السبب الى أن الحقول الكهربائية $\vec{E}_{1p}$, $\vec{E}_{1p}$, $\vec{E}_{2p}$ تتوضع في اتجاهات مختلفة عند الورود المائل . نحصل على العلاقة بين الشدات انطلاقاً من معادلات فرنل وذلك بمعالجة كل استقطاب بشكل منفصل عن الاخر . نعرف عامل الانعكاس وعامل النفوذ بدلالة المتوسط الزمني لمركبة متجهة بويتنتنغ العمودية على السطح الفاصل والتي تنتمي الى المركبة العمودية لمتجهة بويتنتنغ للموجة الكهرطيسية الواردة :

$$R_N = \frac{\vec{n}.<\vec{p}'_{1N}>}{\vec{n}.<\vec{p}_{1N}>} \qquad T_N = \frac{\vec{n}.<\vec{p}_{2N}>}{\vec{n}.<\vec{p}_{1N}>} \qquad (3-36)$$

$$R_p = \frac{\vec{n}.<\vec{p}'_{1p}>}{\vec{n}.<\vec{p}_{1p}>} \qquad T_p = \frac{\vec{n}.<\vec{p}_{2p}>}{\vec{n}.<\vec{p}_{1p}>} \qquad (3-37)$$

وبدلالة معاملات فرنل فان عامل الانعكاس والنفوذ يساوي :

$$R_N = r_{12N}^2 \qquad T_N = \frac{n_1 \cos \Theta_1}{n_1 \cos \Theta_1} t_{12N}^2 \qquad (3\text{-}38)$$

$$R_p = r_{12p}^2 \qquad T_p = \frac{n_2 \cos \Theta_2}{n_1 \cos \Theta_1} t_{12p}^2 \qquad (3\text{-}39)$$

والعلاقات $R_p + T_p = 1$ و $R_N + T_N = 1$ تظل صحيحة في حالة الورود المائل لموجة كهرطيسية على سطح غير ناقل ، في بعض الاحيان يكون من الملائم التعبير عن معادلات فرنل بالشكل التالي:

$$r_{12N} = \frac{\sin(\Theta_2 - \Theta_1)}{\sin(\Theta_2 + \Theta_1)} \qquad (3\text{-}40)$$

$$t_{12N} = \frac{2\cos \Theta_1 \, .\sin \Theta_1}{\sin(\Theta_2 + \Theta_1)} \qquad (3\text{-}41)$$

$$r_{12p} = \frac{\tan(\Theta_1 - \Theta_2)}{\tan(\Theta_1 + \Theta_2)} \qquad (3\text{-}42)$$

$$t_{12p} = \frac{2\cos \Theta_1 .\sin \Theta_2}{\sin(\Theta_1 + \Theta_2).\cos(\Theta_1 - \Theta_2)} \qquad (3\text{-}43)$$

وقد تم الحصول على هذه العلاقات باستخدام بعض المطابقات في المثلثات ومن استخدام قانون سنل في الانسكار.

3 – 4 – زاوية بروستر – الزاويةالحرجة :

سوف نعتبر أن كلاًمن R و T تتعلق بزاوية الورود في الحالة التي يكون فيها الوسطين غير ناقلين لانه يمكن كتابة Θ_2 بدلالة Θ_1 ، n_1 و n_2 . وجدنا سابقا عندما يكون ورود الموجة الكهرطيسية ناظميا على السطح الفاصل فان : $\Theta_1 = 0 \longrightarrow \Theta_2 = 0$

وفي هذه الحالة فان الاستقطاب لايعود مهما وعامل الانعكاس R يزداد عند زيادة النسبة $\frac{n_2}{n_1}$ التي تختلف عن الواحد. عندما ترد الموجة الكهرطيسية مماسيا على السطح الفاصل أي عندماتكون $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ فان $\cos\theta_1 = 0$ و $R_p = 1 = R_N$ ويمكن التأكد من ذلك بتعويض قيمة θ_1 بالمعادلات(28)و(34) . وهنا يجب الا يغيب عن بالنا أنه في كل مرة نحسب R فان T تساوي R - 1 . بالقرب من الورود المماسي فان عامل الانعكاس يكون كبيرا وهذا هو السبب في أن سطح البحيرة الهادئةتكون كالمرآة عند ورود الاشعة الضوئية على سطحها بزاوية قريبة من $90°$. وبين ورود الموجات الكهرطيسية بزاوية مماسية وزاوية ناظمية توجد زاويتين لهما أهمية خاصة هما زاويةبروستر والزاوية الحرجة .وقد يخطر في ذهننا سؤال : هل توجد حالة تكون فيها الانعكاسية (عامل الانعكاس) معدومة؟ والجواب : نعم، والمعادلتين(40)و(42) تؤيدان ذلك . فعندما $\theta_1 = \theta_2$ فان:

$$\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0 = \tan(\theta_1 - \theta_2)$$

ولاتوجد عندئذ موجة منعكسة لان $r_{12p} = 0 = r_{12N}$ أي أن عامل الانعكاس ينعدم مهما كان نوع الاستقطاب p أو N . ولسوء الحظ أن ذلك يحدث أيضا عندما تكون $n_1 = n_2$ أي عندما يكون الوسطين غير متمايزين ضوئيا وهذا مانستبعده الآن ، من جهة أخرى اذا كانت:

$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ فان المقدار $\tan(\theta_1 + \theta_2) = \infty$ و $r_{12p} = 0$

أي أنه لاتوجد موجة منعكسة ايضا اذا كانت الموجة الواردةمستقطبة بحيث أن $\vec{E}$ يكون موازيا لمستوي الورود (الاستقطاب p) ويمكن أن نفسر ذلك بقولنا ان الوسطين غير متمايزين ضوئيا بالنسبة لهذا

النوع من الموجة . واذا كان $r_{12p} = 0$ عندما $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$

فان $r_{12p} \neq 0$ أي أنه توجد موجة منعكسة عندما يكون الحقل الكهربائي $\vec{E}$ في الموجة الواردة عموديا على مستوي الورود (الاستقطاب N) واذاسقطت الموجة (الضوئية) الواردة بزاوية تحقق العلاقة $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ فان هذه الموجة الضوئية تستقطب بالانعكاس

بتبديل $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1$ في قانون سنل : $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ نجد :

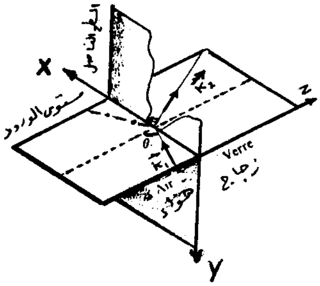
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin(\frac{\pi}{2} - \theta_1) = n_2 \cos \theta_1$$

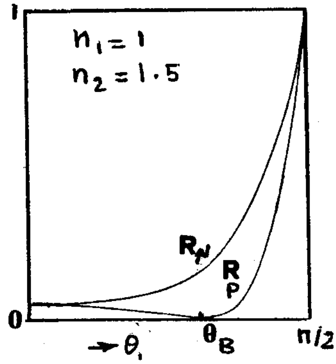
تدعى θ_1 بزاوية بروستر ويرمز لها بـ θ_B وتتعين بالعلاقة :

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \qquad \text{قانون بروستر} \qquad (3-44)$$

عند هذه الزاوية لاتوجد موجة منعكسة اذا كانت الموجة الواردة على السطح من الاستقطاب p اما اذا لم تكن كليا من الاستقطاب p فانه توجد موجة منعكسة وتكون ذات استقطاب N أي أن الحقل الكهربائي للموجة المنعكسة يكون عموديا على مستوي الورود . يوضح الشكل (5 - 3) موجة مستقطبة يكون فيها $\vec{E}$ موازيا لمستوي الورود ترد على السطح الفاصل بين الهواء والزجاج بزاوية بروستر التي تساوي في هذه الحالة الى $\theta_B = 56°$ كما ونمثل على الشكل (6 - 3) تغيرات R_N و R_p بدلالة زوايا الورود θ_1 حيث $n_1 = 1$ و $n_2 = 1,5$ (زجاج) .

ان الانعكاسية المنخفضة للضوء المستقطب $(R_p)p$ يعلل فائدة النظارات الشمسية . وبما أن معظم السطوح العاكسة الخارجية أو الخلوية Out door هي أفقية فان مستوى الورود لمعظم الشدة





شكل (3 - 5)

شكل (3 - 6) انعكاس الامواج الكهرطيسية ذات الاستقطاب N و p على السطح الفاصل هواء – زجاج $\theta_B = 56°$.

الضوئية المنعكسة الذي يصل العين يكون عموديا . واذا فرضنا أن رأس شخص ما كان بوضعية صحيحة (أي مرفوعا) فان العدسات المقطبة الموضوعة على العين تعمل بحيث تمرر الضوء الذي يكون فيه الحقل الكهربائي $\vec{E}$ في المستوي العمودي عليها وتحذف المركبات الاخرى المنعكسة بشدة من النوع N .

توجد حالة أخرى اضافة الى حالة الورود المماسي الذي يكون فيها $R_p = R_N = 1$ ، فمن المعادلات (28) و (34) نرى أن انعكاسا كليا يحدث عندما $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ مثلما يحدث عندما $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$. تسمى زاوية الورود التي من أجلها تكون $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ بالزاوية الحرجة أي $\theta = \theta_c$ ومن قانون سنل فان θ_c تساوي :

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \qquad (3-45)$$

تكون الزاوية الحرجة حقيقية فقط عندما تكون $n_1 > n_2$ والعلاقة

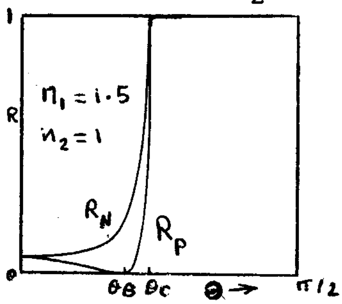
بين زاوية بروستر والزاوية الحرجة هي :

$$\tan \theta_B = \sin \theta_c \qquad (3-46)$$

وبما أن $\tan \theta > \sin \theta$ فان $\theta_c > \theta_B$، نمثل على الشكل (7 - 3)، تغير R بدلالة θ_1 في حالة السطح الفاصل بين الزجاج $n_1 = 1,5$ والهواء $n_2 = 1$. عندما يكون الورود من الزجاج الى الهواء فان $\theta_B = 34°$ و $\theta_c = 42°$ وعند زوايا ورود أكبر من الزاوية الحرجة : $\theta_1 > \theta_c$ فان قانون سنل يساوي :

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 > \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_c$$

ولكن $\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$ ولذلك فان $\sin\theta_2 > 1$ والزاوية θ_2 تكون عقدية وتجيبها عقدي . يكون اذن الانعكاس كليا (ويدعى بالانعكاس الكلي الداخلي) عندما تكون زاوية الورود $\theta_1 \geqslant \theta_c$ ويكون عندها $R_p = R_N = 1$ والموجة المنكسرة تنتشر بشكل مواز للسطح ويكون تدفق الطاقة عبر السطح الفاصل معدوما سواء كانت الموجة الكهرطيسية ذات الاستقطاب N أو p. ويمكن البرهان على ذلك كمايلي : ان متوسط تدفق الطاقة بواحدة الزمن وبواحدة السطح من السطح الفاصل تساوي من أجل الموجة المنكسرة :



الشكل (7 - 3) انعكاس موجة كهرطيسية ذات استقطاب N و p على السطح الفاصل بين الزجاج-هواء، زاوية بروستر تساوي في هذه الحالة $\theta_B = 34°$ و $\theta_c = 42°$

$$\langle\vec{p}_2\rangle.\vec{n}=\frac{1}{2}R_e[\vec{n}.(\vec{E}_{2N}\wedge\vec{H}^*_{2N})=\frac{n_2}{2c\mu}R_e[\vec{n}.(\vec{E}_{2N}\wedge\vec{u}_2\wedge\vec{E}^*_{2N})]$$

$$=\frac{n_2}{2c\mu}R_e[(\vec{n}.\vec{u}_2)|\vec{E}_{2N}|^2]=\frac{n_2}{2c\mu}R_e[\cos\theta_2.|\vec{E}_{2N}|^2]=0$$

لان $\cos\theta_2$ هي كمية عقدية . عندما $\theta_2=\frac{\pi}{2}$ وعند زوايا ورود أكبر من θ_c فان الطاقة تنعكس كليا في الوسط الاول وتدفق الطاقة يكون معدوما عبر السطح الفاصل وهذا مايبينه الشكل (4-7) حيث أن عامل الانعكاس يساوي الواحد دوما عند زوايا $\theta_1>\theta_c$.

ورب سائل يقول : ان ماتقدم صحيح ولكن اذا أخذنا معادلة الموجة النافذة $\vec{E}_2$ من العلاقة (15) فان الحقل الكهربائي $\vec{E}_2$ لاينعدم عندماتكون $\theta_1>\theta_c$. للاجابة على هذا السؤال نعيد كتابة $\vec{E}_2$ على الشكل :

$$\vec{E}_2=\vec{E}_2.e^{i[\vec{k}_2.\vec{r}-\omega t)}=\vec{E}_2.e^{i[k_2(z\cos\theta_2+x\sin\theta_2)-\omega t]}$$

نكتب $\cos\theta_2$ على الشكل:

$$\cos\theta_2=(1-\sin^2\theta_2)^{\frac{1}{2}}=[1-(\frac{n_1}{n_2})^2\sin^2\theta_1]^{\frac{1}{2}}$$
$$=i[(\frac{n_1}{n_2})^2\sin^2\theta_1-1]^{\frac{1}{2}}$$

نعوض قيمة $\cos\theta_2$ في التابع الاسي فنجد:

$$\vec{E}_2=\vec{E}_2.e^{-z[(\frac{n_1}{n_2})^2\sin^2\theta_1-1]^{\frac{1}{2}}k_2}.e^{i(k_2x\sin\theta_2-\omega t)}$$

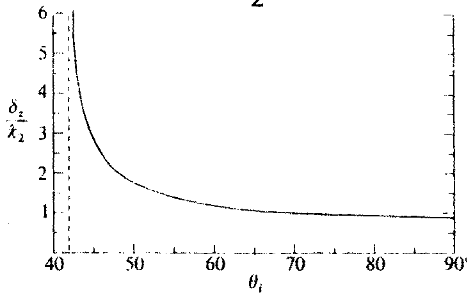
$$=\vec{E}_2.e^{-z/\delta}.e^{i(k_2x\sin\theta_2-\omega t)}\qquad(3-47)$$

حيث δ هو عمق التوغل :

$$k_2 = \frac{\omega}{v_2} = \frac{\omega}{\lambda_2/T} = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{1}{\bar{\lambda}_2}$$

$$\delta = \frac{1}{[(\frac{n_1}{n_2})^2\sin^2\theta_1-1]^{\frac{1}{2}}.k_2} = \frac{\bar{\lambda}_2}{[(\frac{n_1}{n_2})^2\sin^2\theta_1-1]^{\frac{1}{2}}}$$

وكما نلاحظ فان سعة الموجة النافذة تتخامد أسيا مع ازدياد z ومنحى التخامد يكون عموديا على السطح الفاصل . يبين الشكل (8 - 3) تغير $\frac{\delta}{\bar{\lambda}_2}$ بدلالة زاوية الورود θ_1 من أجل : $\frac{n_1}{n_2} = 1,5$



شكل (8 - 3) تغير $\frac{\delta}{\bar{\lambda}_2}$ للموجة المنكسرة بدلالة زوايا الورود عند الانعكاس الكلي .

ويكون متوسط تدفق الطاقة في الاتجاه العمودي على السطح الفاصل مساويا الصفر .

اذا كتبنا $\cos\theta_2$ عند الانعكاس الكلي بالشكل :

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1-\sin^2\theta_2} = \sqrt{1-(\frac{n_1}{n_2})^2\sin^2\theta_1} = i\sqrt{(\frac{n_1}{n_2})^2\sin^2\theta_1-1}$$

وعوضنا قيمتها في (28) فان معامل فرنل في حالة الاستقطاب N يساوي :

$$r_{12N} = \frac{\vec{E}'_{1N}}{\vec{E}_{1N}} = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} =$$

$$= \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2 i\sqrt{(\frac{n_1}{n_2})^2\sin^2\theta_1 - 1}}{n_1\cos\theta_1 + i n_2\sqrt{(\frac{n_1}{n_2})^2\sin^2\theta_1 - 1}}$$

$$= \frac{\frac{n_1}{n_2}\cos\theta_1 - i\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2\theta_1 - 1}}{\frac{n_1}{n_2}\cos\theta_1 + i\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2\theta_1 - 1}}$$

وبالاستفادة من العلاقة : $\frac{a - ib}{a + ib} = e^{-i\delta_N}$ حيث $\tan\left(\frac{\delta_N}{2}\right) = \frac{b}{a}$

فان معامل فرنل يساوي :

$$r_{12N} = \frac{\vec{E}'_{1N}}{\vec{E}_{1N}} = e^{-i\delta_N} \qquad (3-48)$$

حيث أن تغير الطور δ_N يساوي :

$$\delta_N = 2\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2\theta_1 - 1}}{\frac{n_1}{n_2}\cos\theta_1}\right)$$

وبشكل مشابه اذا بدلنا قيمة $\cos\theta_2$ في العلاقة (34)فاننا نحصل :

$$r_{12p} = \frac{\hat{E}'_{1p}}{\hat{E}_{1p}} = \frac{\frac{n_2}{n_1}\cos\theta_1 - i\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2\theta_1 - 1}}{\frac{n_2}{n_1}\cos\theta_1 + i\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2\theta_1 - 1}} = e^{-i\delta_p} \qquad (3-49)$$

حيث :

$$\tan\left(\frac{\delta_p}{2}\right) = \frac{\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2\theta_1 - 1}}{\frac{n_2}{n_1}\cos\theta_1}$$

وكما يبدو من العلاقتين (48)و(49) فان سعات الموجة المنعكسة تساوي سعات الموجة الواردة ويبقى R دوما مساويا الواحد ولكن سعة الموجة المنعكسة تتأخر في الطور بمقدار δ_N في حال الاستقطاب N وبمقدار δ_p في حال الاستقطاب p ، واذا كانت الموجة الواردة مستقطبة كيفيا فان الموجة المنعكسة انعكاسا كليا تكون مستقطبة استقطابا

اهليلجيا . ان طول الموجة المنعكسة يتغير من $0°$ عندما تكون زاوية الورود مساوية الى الزاوية الحرجة الى $180°$ عندما تكون زاوية الورود مماسية أي مساوية $\frac{\pi}{2}$ ، يمكن مشاهدة ظاهرة الانعكاس الكلي وعلى سبيل المثال لاحصرا في المواشير وعند النظر الى حوض الاسماك أو النظر من تحت الماء الى السطح...الخ ومن التطبيقات المهمة لهذه الظاهرة نذكر الانبوب الضوئي "Fineglass Fiber" حيث تنتقل الحزمة الضوئية فيه نتيجة الانعكاسات الكلية على الجوانب الداخلية للانبوب وبشكل مشابه للموجة الموجهة في الامواج الميكروية كما سنرى لاحقا . ان الامثلة التي ذكرت في هذه الفقرة تنطبق على الترددات في مجال الضوء المرئي وعلى المواد الشفافة التي قرينة انكسارها تساوي $n = \sqrt{\varepsilon_r}$. في المواد اللاقطبية تظل العلاقات السابقة صحيحة عند الترددات المنخفضة أما عند ترددات الاشعة فوق البنفسجية ومافوق فان هذه العلاقات تصبح غير صحيحة. وفيما يخص المواد القطبية الشفافة ضوئيا والمؤلفة من جزيئات قطبية كالماء أو من الايونات كما في الملح الصخري فان ماسبق ذكره من علاقات لايكون صحيحا عند الترددات المنخفضة والسبب هو أن ε_r يكون تابعا لتردد الموجة المستخدمة .

5 ـ 3 ـ انعكاس موجة كهرطيسية على مستوى ناقل ـ معاملات فرنل العقدية :

وجدنا في الفقرة السابقة أنه من أجل زوايا ورود أكبر من الزاوية الحرجة فان $\sin \theta_2 > 1$ و $\cos \theta_2$ تكون عقدية وبالتالي فان معاملات فرنل تكون عقدية أيضا . من جهة أخرى تكون معاملات فرنل

عقدية أيضا عندما يكون الوسط الثاني وسطا ناقلا وتكون كذلك قرينة الانكسار n_2 عقدية حيث نرمز لها بالرمز $\hat{n}_2$. ومن قانون سنل :

$$n_1 \sin \theta_1 = \hat{n}_2 \sin \hat{\theta}_2$$

فان $\sin \hat{\theta}_2$ يكون مقدارا عقديا .

لاتوجد في الحقيقة طريقة لرسم الاشكال (3 - 3)و(4 - 3) بزاوية عقدية $\hat{\theta}_2$ ولذلك سوف نلجأ الى الجبر الشعاعي حيث تكون قوانينه صالحة ليس فقط بالنسبة للكميات الحقيقية وانما أيضا بالنسبة للكميات العقدية . لنعتبر الآن أحد الوسطين شفافا وليكن الوسط الاول والمعادلات (17) تصبح عندئذ على الشكل التالي :

$$\vec{k}_1 \wedge \vec{n} = \vec{k}_2 \wedge \vec{n} \qquad (3-50)$$

تبقى $\vec{j}$ متجهة الواحدة العمودية على مستوى الورود أما متجهة الانتشار العقدية $\vec{k}_2$ فلا يكون لها مركبات في الاتجاه $\vec{j}$ أي :

$$\vec{k}_2 . \vec{j} = 0 \qquad (3-51)$$

والجداء $\vec{k}_2 . \vec{n}$ يساوي :

$$\vec{k}_2 . \vec{n} = \hat{k}_2 . \cos \hat{\theta}_2 \qquad (3-52)$$

ان الشروط الحدية على السطح الفاصل التي يخضع لها الحقل الكهربائي والمغناطيسي تبقى نفسها كما مر معنا سابقا ومعاملات فرنل العقدية تعطى بالعلاقات (28)،(29) ,(34)و(35) مع مراعات أن n_2 و $\cos\theta$ هي كميات عقدية : $\hat{n}_2$,$\cos \hat{\theta}_2$.

واذا عبرنا عن هذه المعاملات بالصيغة القطبية نجد أن:

$$\hat{r}_{12p} = |\hat{r}_{12p}| . e^{i\alpha_p} \text{ و } \hat{r}_{12N} = |\hat{r}_{12N}| e^{i\alpha_N} \text{ , ...}$$ ومن (28)

و(34) نحصل على الحقل الكهربائي $\vec{\hat{E}}_{1N}$ و $\vec{\hat{E}}'_{1p}$:

$$\vec{\hat{E}}'_{1N} = |\hat{r}_{12N}| . e^{i\alpha_N} . \vec{\hat{E}}_{1N}$$

$$\hat{E}'_{1p} = |\hat{r}_{12p}| . e^{i\alpha_p} . \hat{E}_{1p} \tag{3-53}$$

ويتضح من هذه العلاقة أن الحقول الكهربائية للموجة المنعكسة تكون مزاحة في الطور بالنسبة للحقل الكهربائي للموجة الواردة ،كما يمكن اثبات وجود فرق في الطور بين الحقل $\vec{E}$ للموجة الواردة وبين الحقل $\vec{E}$ للموجة النافذة . يتضح من (53)أن $\hat{E}'_{1N}$ و$\hat{E}'_{1p}$ يملكان فرقا في الطور $\alpha_N - \alpha_p$ ولذلك اذا كانت الموجة الواردة مستقطبة خطيا فان الموجة المنعكسة تكون مستقطبة اهليلجيا عند الورود المائل يمكن ايجاد كل من الانعكاسية R_p و R_N بسهولة ،ويساويان :

$$R_p = |\hat{r}_{12p}|^2$$
$$R_N = |\hat{r}_{12N}|^2 \tag{3-54}$$

في الاوساط اللاناقلة وجدنا أن $R + T = 1$ وعندما يكون أحد الوسطين ناقلا فاننا نستخدم بدلا من العلاقة السابقة المطابقات :

$$\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21}$$
$$\hat{r}^2_{12} + \hat{t}_{12}\hat{t}_{21} = 1 \tag{3-55}$$

والعلاقتين (55) تصلحان عندما يكون الاستقطاب N و p .

عند الورود الناظمي لموجة كهرطيسية من الهواء $n_1 = 1$، الى سطح ناقل فان عامل الانعكاس يعطى بالعلاقة :

$$R_n = \frac{(n-1)^2 + n'^2}{(n+1)^2 + n'^2} \qquad (3-56)$$

حيث :

$$\hat{n}_2 = n + in'$$

وباعتبار أن كل الطاقة النافذة تمتص في الوسط الناقل فاننا نعرف عامل الامتصاص بالعلاقة :

$$A = 1 - R \qquad (3-57)$$

وفي حالة الورود الناظمي فان :

$$A_n = \frac{4n}{(n+1)^2 + n'^2} \qquad (3-58)$$

يكون عامل الامتصاص ضئيلا (نعكاس كبير) اذا كان $n \gg 1$ أو اذا كان $n \gg 1$ أو اذا كان $n' \gg 1$. وعندما يكون $n \cong n' \gg 1$ فان :

$$A_n \cong \frac{2}{n'} \ll 1 \qquad (3-59)$$

وفي هذه الحالة فان :

$$n' \cong \sqrt{\varepsilon_r/2} = \sqrt{\sigma/2\varepsilon_o\omega}$$

و :

$$A_n \cong \frac{2}{\sqrt{2\varepsilon_o\omega/\sigma}} \qquad (3-60)$$

تدعى العلاقة (60) بعلاقة Hagen - Rubens وتطبق على النواقل الجيدة في مجال ترددات الامواج الميكروية ومادون وتطبق على المعادن في مجال ترددات الاشعة تحت الحمراء . ان عامل الامتصاص للفضة عند التردد $f = 10^{10}$ Hz يساوي :

$$A_n = 2.\sqrt{2(8.854 \times 10^{-7})(2\pi \times 10^{10})/3\times 10^{7}} = 3.9 \times 10^{-4}$$

وهو مقدار ضئيل جدا أما عامل الانعكاس فيساوي الى: $R_n = 0,9996$

من أجل ماء البحر وعندد التردد $f = 6.10^{11}Hz$ فـــــان $A_n = 25 \times 10^{-4}$ و $R_n = 0,9975$. والانعكاسية (عامـــل الانعكاس) العالية لماء البحر تخلق مشكلة في الاتصال بين الغواصات والمحطات على سطح اليابسة . فعندما يكون هوائي الغواصة تحت الماء فان الاتصال مع اليابسة يكون ضعيف الفعالية لان قسما كبيرا مـــن الطاقة ينعكس على سطح البحر والطاقة النافذة الضعيفة تتخامد بقوة مع المسافة، تتخامد موجة كهرطيسية ترددها 20 MHz في ماء البحـــر يساوي 170 dB/m و 5,4 dB/m عند التردد 20 KHz ولذلـــك يبدو أن الاتصال بين سطح الارض والغواصات في الوقت الحالي غيـــر ممكن حتى عند استخدام ترددات ضعيفة لان ذلك يتطلب استطاعة للبـــث كبيرة جدا وهذا بدوره يتطلب وضع هوائي ذو حجم كبير جدا علـــى الغواصة . تعود الامتصاصية الضئيلة الى أن عمق التوغل يكون ضئيـــلا نسبيا فمن العلاقة : $\delta = \frac{c}{k\omega}$ نجد أن الامتصاصية A_n تساوي

$$A_n = \frac{4\pi . \delta}{\lambda_1} \qquad (3-61)$$

حيث λ_1 هو طول الموجة الكهرطيسية في الهواء.

في مجال ترددات الاشعة المرئية فان n تساوي $n \cong 0,05$ و $n' \cong 3$ من أجل معدن الفضة والعلاقة (61) لاتكون صالحة فـــي هذه الحالة . من أجل النيكل $n \cong 2$ ، $n' \cong 3$ و $R_n = 0,56$

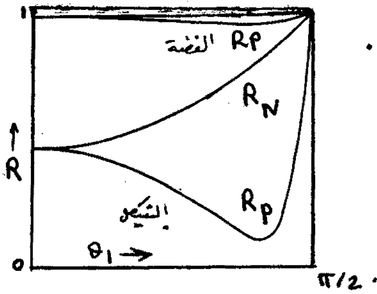
يبين الشكل التالي (9 - 3) تغير R بدلالة زاوية الورود مـــن أجل Ni و Ag .

نلاحظ من الشكل أنه عند زاوية بروستر فان R_p لاينعـــدم وانما يمر بنهاية صغرى وتظل الانعكاسية R_p أقل من الانعكاسيــة

R_N دوما . لدراسة وضع الموجة النافذة نكتب متجهة الانتشار $\vec{k}_2$ على الشكل :

$$\vec{k} = \vec{k}_r + i\vec{k}_i \qquad (3-62)$$

$$= \hat{k}\sin\hat{\theta}\,\vec{i} + \hat{k}\cos\hat{\theta}\,\vec{k} \qquad (3-63)$$



(نسقط الدليل 2 في هذه المناقشة).

شكل (9 - 3): الانعكاس على السطح الفاصل بين الهواء - معدن (Ag -Ni) عند الاستقطاب N و p للضوء المرئي.

ان المعادلة (63) تثبتها المعادلة (51) وهذا يعني أن $\vec{k}\wedge\vec{n}$ هو حقيقي ومن العلاقة (62) فان:

$$\vec{k}_r\wedge\vec{n} = \vec{k}_1\ \vec{n} \qquad (3-64)$$

$$\vec{k}_i\wedge\vec{n} = 0 \qquad (3-65)$$

تبين المعادلة (65) أن $\vec{k}_i$ تكون موازية $\vec{k} = \vec{n}$ والمعادلة (64) تساوي عندئذ الى :

$$k_r\sin\phi = k_1\sin\theta_1 \qquad (3-66)$$

حيث ϕ هي الزاوية الحقيقية بين $\vec{k}_r$ و $\vec{n}$ (الشكل(3-10)) وهذه الزاوية تدعى " زاوية الانكسار الحقيقية " وهي الزاوية الكائنة بين مستويات تساوي الطور وبين السطح الفاصل . ومن جهة أخرى فان مستويات تساوي السعة تكون موازية للسطح الفاصل . ولذلك فان الموجة تتخامد على نحو سريع داخل الناقل . اذا أعدنا كتابة المعادلة (62) على الشكل :

$$\vec{k} = k_r\sin\phi\vec{i} + k_r\cos\phi\vec{k} + ik_i\vec{k}$$

$$= k_1\sin\theta_1\vec{i} + (k_r\cos\phi + ik_i)\vec{k}$$

وبمقارنة مركبات هذه المعادلة مع مركبات المعادلة (63) نجد :

$$k_1 \sin \theta_1 = \hat{k} \sin \hat{\theta} \qquad (3-67)$$

$$k_r \cos \phi + ik_i = \hat{k} \cos \hat{\theta} \qquad (3-68)$$

تشير العلاقة (67) الى قانون سنل Snell ، أما العلاقة (68) فهي بالاضافة الى (66) تعطي العلاقة بين k_r ، k_i و ϕ مع n ، k و θ_1 وهذا ماسوف نفتش عنه . لنكتب $\hat{k}_2 \cos\hat{\theta}_2$ على الشكل :

$$\hat{k} \cos \hat{\theta} = \frac{\omega}{c}(p + iq) \qquad (3-69)$$

فيكون :

$$\hat{n} \cos \hat{\theta} = p + iq \qquad (3-70)$$

ومن المعادلة (69) نجد :

$$k_r \cos \phi = \left(\frac{\omega}{c}\right) p$$

ومن المعادلة (66) نجد أن :

$$k_r = \frac{\omega}{c} \sqrt{p^2 + n_1^2 \sin^2 \theta_1} \qquad (3-71)$$

$$k_i = \frac{\omega}{c}\, q \qquad (3-72)$$

لايجاد p و q نربع المعادلة (70) فنجد :

$$\begin{aligned} p^2 - q^2 + 2ipq &= \hat{n}^2(1 - \sin^2\hat{\theta}) \\ &= (n + in')^2 - n_1^2 \sin \theta_1 \\ &= n^2 - n'^2 - n_1^2 \sin^2\theta_1 + 2inn' \end{aligned}$$

حيث استخدمنا قانون سنل : $\hat{n} \sin \hat{\theta} = n_1 \sin \theta_1$ واذا عوضنا عن $\hat{n}^2$ بالمقدار $\hat{n}^2 = \bar{\varepsilon}_r = \varepsilon_r + i\varepsilon_r'$) حيث $\bar{\varepsilon}_r$ هي ثابتة العزل

العقدية) في العلاقة السابقة نجد :

$$p^2 - q^2 + 2ipq = \varepsilon_r - \varepsilon_{r_1}\sin^2\theta_1 + i\varepsilon_r'$$

وبمساواة الاجزاء الحقيقية والتخيلية نحصل على :

$$\varepsilon_r - \varepsilon_{r_1}\sin^2\theta_1 = p^2 - q^2$$

$$\varepsilon_r' = 2pq \qquad (3-73)$$

وبحل (53) نجد:

$$p = \sqrt{\frac{1}{2}[(\varepsilon_r-\varepsilon_{r_1}\sin^2\theta_1)+\sqrt{(\varepsilon_r-\varepsilon_{r_1}\sin^2\theta_1)^2+\varepsilon_r'^2}]}$$

$$(3-74)$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{2}[-(\varepsilon_r-\varepsilon_{r_1}\sin^2\theta_1)+\sqrt{(\varepsilon_r-\varepsilon_{r_1}\sin^2\theta_1)^2+\varepsilon_r'^2}]}$$

ان p و q كما نلاحظ تعتمد على زاوية الورود θ_1 فعندما $\theta_1 = 0$ فان $p = n$ و $q=n'$ ٠ تحدد العلاقة (72) مسافة التخامد $\delta = \frac{1}{k_i}$ التي تعطى بدلالة q ٠ هذا ويمكن أن نكتب العلاقة (71) على الشكل

$$k_r = \frac{\omega}{c} N \qquad (3-75)$$

حيث $N(\theta_1)$ هي قرينة الانكسار وتساوي :

$$N = \sqrt{p^2 + n_1^2\sin^2\theta_1} \qquad (3-76)$$

والمقدار :

$\frac{c}{N} = \frac{c}{\sqrt{p^2+n_1^2\sin^2\theta_1}}$ يساوي الى السرعة الطورية ٠ بتعويض (75) في العلاقتين (66)و(71) نجد:

$$\left.\begin{array}{l} N \sin \phi = n_1 \sin \Theta_1 \\ \qquad\qquad\qquad و \\ N \cos \phi = p \end{array}\right\} \qquad (3-77)$$

يمكن استخدام العلاقتين (77) لتحديد الزاوية ϕ .

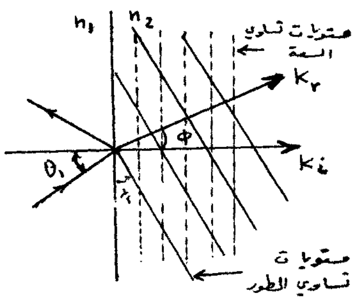
على الرغم من أن N لايمثل الجزء الحقيقي لـ $\hat{n}$ و ϕ لاتمثل الجزء الحقيقي لـ $\hat{\Theta}$ الا أن $N \cos \phi$ تمثل الجزء الحقيقي لـ $\hat{n} \cos \hat{\Theta}$ وبذلك يكون لدينا حل تام للحالة العقدية . ان المعادلات (74) هي معادلات معقدة وينوه عنها في كثير من الاحيان عند انتشار الامواج الكهرطيسية في الاوساط الناقلة عند السقوط المائل ماعدا بعض الحالات الضرورية . فمثلا عندما تكون ε_r' كبيرة جدا تقودنا هذه الحالة الى علاقة هاجن - روبنز Hagen-Rubens .

$$p \cong n \cong q \cong n' >> 1$$

ومن العلاقة (76) فان : $N >> 1$

ومن العلاقة الاولى في (77) نجد أن : $\phi \cong 0$

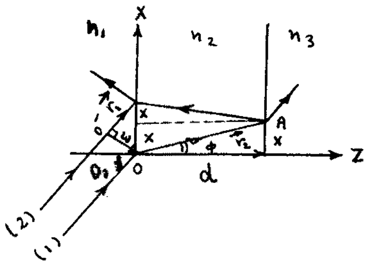
ان جهة الانتشار تكون عندئذ عمودية على السطح الفاصل داخل الوسط الناقل مهما كانت زاوية الورود ويكون التخامد قوي جدا وهذا مايؤدي الى تناقص السرعة وطول الموجة بشكل كبير.



شكل (10- 3): انكسار موجة كهرطيسية في النواقل . ان مستويات تساوي الطور تكون عمودية على اتجاه الانتشار وتصنع زاوية ϕ مع المستوي الفاصل ولكن مستويات تساوي السعة تكون موازية المستوي الفاصل .

6 – 3 – انعكاس وانكسار الامواج الكهرطيسية على الافلام الرقيقة :

لنعتبر سطحين منقطعين مؤلفين من مستويين متوازيين لانهائيين مختلفين بخواصهما يشكلان صفيحة مادية محدودة من كل جانب بوسط نصف لانهائي كما في الشكل (3-11) . ندعو المنطقة الواقعة الى يسار المستوي $z = 0$ بالوسط (1) المنطقة الواقعة الى يمين المستوي $z = d$ بالوسط (3)، والمنطقة الواقعة بين المستويين بالوسط (2). لحساب الحقل الكهربائي $\vec{E}$ والحقل المغناطيسي $\vec{H}$ في كل منطقة من المناطق الثلاث



شكل (3 - 11)

السابقة نطبق الشروط الحدية على كل من المستويين ثم نقوم باجراء الحساب كما في الفقرة السابقة فنحصل بذلك على $\vec{E}$ و $\vec{H}$

وسوف نستخدم طريقة تقريبية أخرى تعطي نفس النتائج التي تعطيها الطريقة السابقة . وتقوم هذه الطريقة على الفكرة التالية : نعتبر أن موجة واردة على الوسط الاول ينعكس جزء منها على السطح الفاصل الاول وجزء آخر ينفذ الى الوسط الثاني وهذه الموجة تنعكس جزئيا على السطح الفاصل الثاني لتعود وتسقط على السطح الاول أما الجزء الاخر من هذه الموجة فينفذ الى الوسط (3) وهكذا تتوالى الانعكاسات والانكسارات على كلا المستويين . بما أن معادلات فرنل السابقة تعطي الجزء المنعكس والنافذ من الموجة على كل مستوي فاصل لذلك نضيف الاسهامات المختلفة في الموجة الاصلية المنعكسة على الحد الفاصل في الوسط الاول وتلك النافذة الى الوسط (3) . وهذا

يمكن تحقيقه . وهنا يجب جمع السعات المختلفة لهذه الامواج كما يجب جمع فرق أطوارها .. وفي كل مرة تمر الموجة خلال الصفيحة أو الفلم الرقيق فان الطور ينزاح بسبب تغير $\vec{k}_2.\vec{r}$ في التابع الاسي للموجة نفرض أن شعاعين ضوئيين متوازيان عموديان على جبهة الموجة (شكل 11- 3) في الوسط (1) يسقطان على السطح الفاصل بين الوسطين (1)و(2) . ينعكس جزء من الشعاع الاول عند النقطة O من السطح الفاصل الاول أما الجزء الاخر فينكسر في الوسط الثاني ليسقط على السطح الفاصل بين الوسطين (2)و(3) عند A حيث يبرز قسما منه الى الوسط (3) والاخر ينعكس ليسقط على السطح الاول عند x حيث ينفذ قسما منه الى الوسط الاول يتراكب مع الشعاع (2) المنعكس عند النقطة x . بما أن الطور نفسه في النقطتين O و O′ الواقعتين على صدر موجة واحدة فانه بالامكان حساب فرق الطور بين المسار ox′ والمسار ozx . بفرض أن θ_1 هي زاوية الورود و θ_2 هي زاوية الانكسار وان الوسط (2) هو وسط ناقل. ان فرق الطور بين المسارين المذكورين يساوي :

$$\hat{\beta} = 2\vec{k}_2.\vec{r}_2 - \vec{k}_1.\vec{r}_1 \qquad (3-78)$$

حيث $\vec{r}_2 = x\vec{i} + d\vec{K}$ و $\vec{r}_1 = 2x\vec{i} - \omega\vec{p}_1$ و $\vec{p}_1 = \vec{N}\Lambda\vec{u}_1 = \vec{j}\Lambda\vec{u}_1$

هو عمودي على $\vec{k}_1 = k_1\vec{u}_1$ و β اذن تساوي :

$$\hat{\beta} = 2x(\vec{k}_2.\vec{i} - \vec{k}_1.\vec{i}) + 2d\vec{k}_2\vec{K}$$

$$\vec{k}_2\vec{i} - \vec{k}_1\vec{i} = \hat{k}_2\sin\hat{\theta}_2 - k_1\sin\theta_1 = 0$$

وذلك بموجب قانون سنل .

أما المقدار $\vec{k}_2.\vec{K}$ فيساوي الى : $\vec{k}_2.\vec{K} = \hat{k}_2\cos\theta_2$ وتكتب β

على الشكل :

$$\beta = 2d\hat{k}_2\cos\hat{\theta}_2 = 2d\frac{\omega}{c}\hat{n}_2\cos\hat{\theta}_2 \qquad (3-79)$$

$$= 2d\frac{\omega}{c}(p + iq) \qquad (3-80)$$

عندما يكون الوسط (2) وسطا غير ناقل فان $q = 0$ و $p = n_2 \cos \theta_2$ وذلك مهما كانت زاوية الورود ، أما اذا كان الوسط (2) هو وسطا ناقلا وعند الورود الناظمي فان : $p = n$ و $q = n'$ والقسم الحقيقي من $\hat{\beta}$ يعطي انزياحا طوريا حقيقيا أما القسم التخيلي من $\hat{\beta}$ فيعطي تخامدا تسببه الصفيحة .لنتذكر أن معاملات فرنل عند الاستقطاب p تختلف عن معاملات فرنل عند الاستقطاب N ولذلك سوف نسقط في الوقت الراهن الدليل N و p ويجب أن لاننسى دوما أن الاستقطا بين p و N يعالج كل منهما بشكل مختلف عن الاخر. بجمع كل الاسهامات في معامل انعكاس السعة الكلية r فنجد من الشكل (12 - 3):

$$\hat{r} = \hat{r}_{12} + \hat{t}_{12}\hat{r}_{23}e^{i\beta}\cdot\hat{t}_{21} + \hat{t}_{12}\hat{r}_{23}\cdot\hat{r}_{21}\cdot\hat{r}_{23}\hat{t}_{21}e^{2i\beta} + \ldots \qquad (3-81)$$

$$= \hat{r}_{12} + \hat{t}_{12}\cdot\hat{r}_{23}\cdot\hat{t}_{21}e^{i\beta}[1 + \hat{r}_{21}\cdot\hat{r}_{23}e^{i\beta} + (\hat{r}_{21}\hat{r}_{23}e^{i\beta})^2 + \ldots]$$

ولكننا نعلم أن :

$$1 + z + z^2 + \ldots = \frac{1}{1 - z}$$

والعلاقة (81) تساوي :

$$\hat{r} = \hat{r}_{12} + \frac{\hat{t}_{12}\cdot\hat{t}_{21}\cdot\hat{r}_{23}e^{i\beta}}{1 - \hat{r}_{21}\cdot\hat{r}_{23}e^{i\beta}}$$

ومن المطابقتين $\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21}$ و $\hat{r}^2_{12} + \hat{t}_{12}\hat{t}_{21} = 1$ فان العلاقة السابقة تصبح على الشكل :

$$\hat{r} = \frac{\hat{r}_{12} + \hat{r}_{23} \cdot e^{i\beta}}{1 + \hat{r}_{12} \cdot \hat{r}_{23} \cdot e^{i\beta}} \tag{3-82}$$

وبشكل مشابه نجد أن السعة الكلية النافذة في الوسط (3) تساوي :

$$\hat{t} = \frac{\hat{t}_{12} \cdot \hat{t}_{23} \cdot e^{\frac{1}{2}i\beta}}{1 + \hat{r}_{12} \cdot \hat{r}_{23} \cdot e^{i\beta}} \tag{3-83}$$

هذا ويجدر الانتباه الى أن صورة الكسر في العلاقتين (82)و(83)تعود الى تأثير كل من السطحين الامامي والخلفي أما المخرج في العلاقتين السابقتين فيعود الى الانعكاسات المتعددة على السطحين .وباعتبار أننا فرضنا أن الاوساط (1)و(3) غير ناقلة فانه بامكاننا حساب شدة الانعكاس والنفوذ الكلية :

$$R = \hat{r} . \hat{r}^* \quad , \quad T = \frac{n_3 \cos \theta_3 . \hat{t} . \hat{t}^*}{n_1 \cos \theta_1} \tag{3-84}$$

حيث أن R و T تختلف عند الاستقطاب N عن R و T عند الاستقطاب p . اذا كانت الصفيحة (فلم رقيق) غير ناقلة فان : $R + T = 1$

أما اذا كانت الصفيحة مؤلفة من وسط ناقل فان : $R + T + A = 1$ لان الصفيحة سوف تمتص قسما من الطاقة على شكل حرارة بفعل جول. تصبح المعادلات (84) من أجل الاوساط الناقلة معقدة عند التعبير عنها بدلالة n و $\acute{n}$ وحتى في حالة الورود الناظمي للموجة الكهرطيسية ولكن رغم ذلك تعتبر هذه المعادلات مهمة لان قياس R و T لفلم معدني رقيق يشكل احدى الطرائق لتعيين الثوابت الضوئية تجريبيا وفي هذه الحالة لابد من استخدام الحاسوب لحل هذه المعادلات من أجل n و $\acute{n}$ بدلالة القيم التجريبية لـ R و T . تتناسب النفوذية T مع $\hat{t}^*$ $\hat{t}$ وهذه بدورها تتناسب مع :

$$e^{\frac{1}{2}i\hat{\beta}}.e^{-\frac{1}{2}i\hat{\beta}^*} = e^{\frac{1}{2}i(\hat{\beta}-\hat{\beta}^*)}$$

$$= e^{-2d(\omega/c)q}$$

عند الورود الناظمي فان $q=n'$ و T في هذه الحالة تحوي العامل $e^{-2d/\delta}$ حيث $\delta = \frac{c}{k\omega}$. واذا كان الوسط (1) هو الهواء فان : $\frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\omega}{c}$ ولذلك فان:

$$e^{-2d/\delta} = e^{-4\pi n' d/\lambda_1}$$

في المعادن ($n' \cong 2$) عند طول موجة الضوئي المرئي($\lambda \approx 5000\ A^\circ$) فان d تكون أقل بـ $10^3 A^\circ$ من قيمة نفوذية الضوء التي يمكن تقديرها وعندما يكون هذا العامل صغيراً فان مخرج العلاقتين (83)و (84) يساوي تقريبا الواحد . في الاوساط اللامعدنية تكون $q=0$ (ماعدا حالة الانعكاس الكلي)،ولايوجد في هذه الحالة تخامدا يعود الى هذا العامل ولكن المعادلات ماتزال تتنبأ عن بعض المفاعيل المهمة . عندما تكون β وجميع معاملات فرنل حقيقية فان الانعكاسية R تساوي :

$$R = \frac{r_{12}+ r_{23}+ 2r_{12}\cdot r_{23}\cos\beta}{1 + r_{12}^2\cdot r_{23}^2+ 2r_{12}\cdot r_{23}\cos\beta} \qquad (3-85)$$

وعند الورود الناظمي فان:

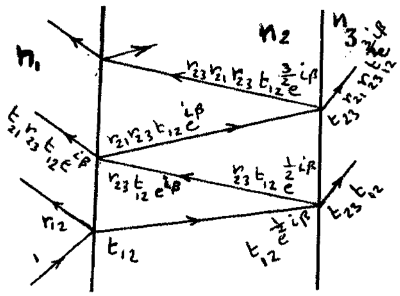
$$\beta = 2d\frac{\omega}{c}n_2 \ ,\ r_{12}= \frac{n_1- n_2}{n_1+ n_2} \ ,\ r_{23}= \frac{n_2- n_3}{n_2+ n_3}$$

والآن اذا افترضنا أن الوسط (1) هو الهواء والوسط(3) هو الزجاج $n_3= 1.5$ وكان الوسط الثاني هو طبقة معدنية رقيقة (فلم) $n_2= 1.3$ فعند ذلك تساوي الانعكاسية R الى :

$$R = \frac{0,02221 + 0.0186 \cos \beta}{1,0001 + 0,0186 \cos \beta} \qquad (3-86)$$

حيث β تساوي :

$$\beta = 4\pi n_2 \frac{d}{\lambda_1} = 16.3 \frac{d}{\lambda_1} \qquad (6-87)$$



تتغير قيمة R بين 0,04 و 0,004. تكون R عظمى عندما تكون $\beta = 2\pi$ أو مضاعفاتها الصحيحة أو عندما تأخذ $\frac{d}{\lambda_1}$ مضاعفات صحيحة من 0,39 كما هو مبين في الشكل (3 - 1) ان العلاقة المميزة لهذه النتيجة هو أن R أقل من القيمة : $r_{12}^2 = 0,017$ التي تمثل شدة الانعكاس على السطح الامامي لوحده. يحدث هذا المفعول فقط بسبب التداخل الهدام.

شكل (3 -12): الانعكاسات والانكسارات المتعددة لشعاع وارد سعته الواحد. كل سعة تتميز بمعاملات فرنل وتأخر في الطور قدرة β .

ان تغير R يكون بين $r_{13}^2 = 0,04$ (القيمة بدون أي طبقة معدنية) وبين قيمة أقل قليلا من $r_{23}^2 = 0,005$ التي تمثل الانعكاسية على الوجه الخلفي لوحده. وفي الحقيقة أن القيمة الدنيا لـ R يمكن أن تكون صفرا اذا كانت للمادة قرينة انكسار n_2 :

$$n_2 = \sqrt{n_1 . n_3} \qquad (3-88)$$

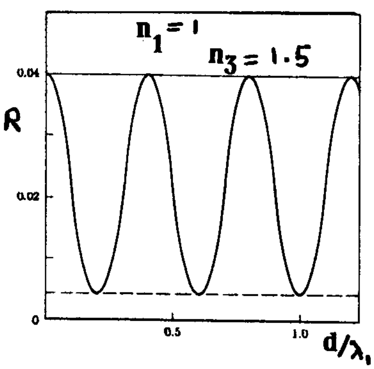
يستغل هذا المفعول لانتاج عدسات غير عاكسة. فمثلا تطلى عدسات الكاميرا بطبقة بحيث تكون الانعكاسية مساوية تقريبا الصفر قرب منتصف الطيف المرئي. ان الانعكاسية من أجل اللون الاحمر والازرق

لاتنعدم كليا ولذلك فان العدسة المغطاة بطبقة غير عاكسة تمتلك مظهرا ارجوانيا عند رؤية الضوء المنعكس عليها ناجما عن تراكب الضوء المنعكس الاحمر والازرق . ومن جهة أخرى فان الالوان تتعلق كذلك بزاوية الرؤية لانه عند الورود المائل فان β تساوي :

$$\beta = 4\pi n_2 \cos \theta_2 (\frac{d}{\lambda_1})$$

اذا كانت n_2 أكبر من n_1 و n_3 فان R تتغير بين القيمة الدنيا لـ r_{13}^2 وبين القيمة العظمى التي هي أكبر من r_{12}^2 و r_{23}^2 .

ان طول الموجة التي نحصل عندها على القيمة الصغرى أو القيمة العظمى لـ R يتعلق بسماكة الطبقة المعدنية d واذا كانت هذه الطبقة أو الفلم متغير من نقطة لاخرى فانه يحدث تغيرا في أطوال الامواج المنعكسة ومثل هذه التغيرات في السماكة تعلل وجود الالوان التي تظهر على فقاعات الصابون أو على طبقات الزيت الرقيقة العائمة على سطح الماء .



شكل (13 - 3) : تأثير التداخل على عامل الانعكاس لسطح فاصل بين هواء - زجاج مغطى بطبقة سماكتها d من مادة قرينة انكسارها $n_2 = 1.3$.

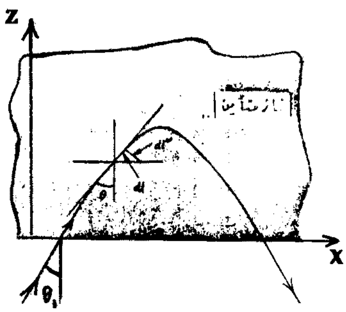
7 - 3 - انعكاس موجة كهرطيسية على الايونوسفير:

لندرس الآن مايحدث عندما تصادف موجة كهرطيسية غازا متأينا (أو طبقة الايونوسفير) . نفرض كما فعلنا سابقا عند دراستنا لانتشار الامواج الكهرطيسية في الايونوسفير أن الالكترونيات لاتتصادم

مع جزيئات الغاز أي أن ضغط الغاز ضعيف . واذا كان للغاز حدود واضحة وكان عدد الالكترونات بواحدة الحجم N_e منتظما في كل مكان من الغاز فان الانعكاس والانكسار على سطح الغاز يتم دون أي صعوبة لأن الغاز سيلعب دور عازل قرينة انكساره n أصغر من الواحد $n < 1$:

$$n = \frac{c}{v} = \{1 - (\frac{\omega_p}{\omega})^2\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= \{1 - 80.5\frac{N_e}{\nu^2}\}^{\frac{1}{2}} \qquad (3-89)$$

لنعتبر الاحداثيات المبينة في الشكل (14 - 3)، ولنفرض أن قرينة الانكسار n تتغير ببطء مع z وهي لاتتعلق بالاحداثي x و y . بدقة أكبر نفترض أن n تتغير بكمية ضئيلة مع طول الموجة . اذا زادت N_e بالتدريج مع z فان الموجة تنحني تدريجيا باتجاه الاسفل كما هو مبين على الشكل السابق حيث تصنع الموجة زاوية θ في نقطة من الغاز قرينة انكسارها هي n . عند وجود انكسار على السطح الفاصل بين وسطين n_1 و n_2 فان الكمية $n \sin \theta$ تكون محفوظة عبر السطح الفاصل وهذا هو قانون سنل . واذا تغيرت قرينة الانكسار على نحو متواصل فانه يمكن تصور الوسط على أنه وسط مؤلف من طبقات كثيفة رقيقة جدا وأن $n \sin \theta$ محفوظة على طول المسار . ولذلك فان :



شكل (14- 3) : موجة كهرطيسية ترد على سطح المنطقة المتأينة بزاوية ورود θ_1 وتنحرف بزاوية θ' بعد أن تخترق طبقة الغاز المتأين لمسافة z .

$$n \sin \Theta = n_1 \sin \Theta_1$$

حيث n_1 هي قرينة الانكسار عند $z = 0$. اذا وضعنا $n = 1$ فان العلاقة السابقة تساوي :

$$n \sin \Theta = \sin \Theta_1$$

ويكون مناسبا استنتاج هذه المعادلة بالنسبة الى المسافة ℓ التي تقيس طول المسار . وبالنتيجة نجد أن :

$$\frac{d\Theta}{d\ell} = -\frac{1}{n}\frac{dn}{d\ell}\,\mathrm{tg}\,\Theta \qquad (3-90)$$

اذا اخترق الشعاع منطقة من الايونوسفير تزداد فيها كثافة الايونات مع ازدياد z , فان قرينة الانكسار n تتناقص مع ℓ والمشتق $\frac{dn}{d\ell}$ يكون سالبا بحيث أن Θ تزداد مع المسافة كما يظهر على الشكل (3 -14) . واذا زادت قيمة n الى حد ملحوظ في نهاية بعض المسارات Θ تصبح مساوية °90 . وفي هذه الحالة فان $\mathrm{tg}\,\Theta$ يساوي لانهاية ولكن $\frac{dn}{d\ell}$ يصبح مساويا الصفر . وبعد هذه النقطة $\mathrm{tg}\,\Theta$ يصبح سالبا على حين أن $\frac{dn}{d\ell}$ يصبح موجبا وتستمر Θ بالزيادة حتى تخرج الموجة من المنطقة المتأينة صانعة زاوية مساوية الى زاوية الورود Θ_1 .

في ذروة المسار تكون :

$$\sin \Theta = 1 \qquad (3-91)$$

$$n_{90°} = \sin \Theta_1 \qquad (3-92)$$

$n_{90°}$ تمثل قرينة الانكسار اللازمة كي يتم انعكاس الموجة عندما تساوي زاوية الورود الى Θ_1 . ومن المعادلة (89) فان :

$$\frac{\omega}{\omega_p} = \frac{1}{\cos \Theta_1} = \sec \Theta_1 \qquad (3-93)$$

حيث ω هو التردد الزاوي للموجة و ω_p هو تردد البلاسما الزاوي

عند قيمة لـ z من أجلها θ تساوي $90°$. عند الورود الناظمي لموجة على طبقة الغاز المتأين أو الايونوسفير : $\theta_1 = 0$ و $\sec \theta_1 = 1$ والانعكاس يتم على مسافة z توافق قيمة لـ ω_p مساوية الى ω : $\omega_p = \omega$ أي عندما تكون $n = 0$ والسرعة الطورية مساوية اللانهاية ، عند الورود المائل فان $\sec \theta_i > 1$ ويحصل الانعكاس عندما تكون $\omega_p < \omega$ أي اذا افترضنا من أجل قيمة صغيرة جـــدا لـ z أن كثافة الالكترونات N_e و بالتالي ω_p تزداد بازدياد z .

يمكن كتابة العلاقة (90) بدلالة نصف قطر الانحناء R على الشكل

$$\frac{1}{R} = -\frac{1}{n}\frac{dn}{d\ell}\,tg\,\theta \qquad (3-94)$$

حيث ان $R = \frac{d\ell}{d\theta}$. اذا كان $R > 0$ فان $\frac{d\theta}{d\ell} > 0$ وبالتالي فان المسار يكون مقعرا نحو الاسفل ويمكن كتابة نصف قطر الانحناء بدلالة $d\ell'$ الطول العمودي على اتجاه الانتشار (انظر الشكل) :

$$\frac{1}{R} = -\frac{1}{n}\frac{dn}{d\ell'} \qquad (3-94-a)$$

ومن هذه العلاقة نلاحظ أن الموجة تنحني بشدة عندما تتغير قرينة الانكسار تغيرا سريعا في الاتجاه العمودي عليها .

8 - 3 - الامواج الموجهــــة :

درسنا في فصل سابق انتشار الامواج الكهرطيسية في وسط غير محدود ومتنوع ثم درسنا في هذا الفصل انعكاس وانكسار الامواج الكهرطيسية على المستوي الفاصل بين أوساط مختلفة . وسوف نتناول في دراستنا للامواج الموجهة كيفية توجيه الامواج الكهرطيسية وفق محاور معينة باستخدام موجهات أو أدلة موجة معدنية . سنتعرض في

البداية الى دراسة انتشار الامواج الكهرطيسية وفق خط مستقيم وليكن المحور z ومن دون أن نشير الى تابعية هذه الامواج للاحداثيات x و y ثم نتعرض فيما بعد لبعض نماذج أدلة الموجة .

1 ـ 8 ـ 3 ـ انتشار الامواج الكهرطيسية وفق خط مستقيم:

نفرض أن الوسط الذي تنتشر فيه الامواج الكهرطيسية هو وسط متماثل المناحي، خطي ،ومتجانس ولذلك فان العلاقة بين $\vec{E}$ و $\vec{D}$ ، $\vec{H}$ و $\vec{B}$ هي : $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ و $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ كما نفرض أن ناقلية الوسط معدومة مادامت الامواج الكهرطيسية تتخامد بشدة في هذا الوسط . ومايهمنا في هذه الدراسة هو أدلة الامواج المعدنية الصنع حيث تنتشر الامواج الكهرطيسية خارج النواقل أضف الى ذلك أننا سنعتبر أن كثافة الشحنات الحجمية ρ تساوي الصفر في الوسط ولذلك فان $\vec{\nabla}.\vec{E} = 0$. نفرض في البداية أن التخامد معدوما وفي فترة لاحقة نشير فيها الى الطريقة التي تسمح بأخذ التخامد بعين الاعتبار ،وأخيرا نشير الى أن اهتمامنا يتركز على انتشار الامواج في خط مستقيم وهو المحور z . لنفرض أن الموجة الكهرطيسية المستخدمة هي موجة جيبية نكتبها على الشكل :

$$\vec{E} = (E_{ox}\vec{i} + E_{oy}\vec{j} + E_{oz}\vec{k}).e^{i(\omega t-k_g z)} = \vec{E}_o.e^{i(\omega t-k_g z)} \tag{3-95}$$

$$\vec{H} = (H_{ox}\vec{i} + H_{oy}\vec{j} + H_{oz}\vec{k}).e^{i(\omega t-k_g z)} = \vec{H}_o.e^{i(\omega t-k_g z)} \tag{3-96}$$

حيث $E_{ox}, E_{oy}, E_{oz}, H_{ox}, H_{oy}, H_{oz}$ هي توابع نعتبرها أنيا مجهولة بالنسبة لـ x و y فقط . k_g هو العدد الموجي للموجة الموجهة

ويساوي : $k_g = \frac{1}{\lambda g}$ وهـــو ليس بالضرورة مساو الى العـــدد الموجي للموجة المستوية،ويكون k_g حقيقيا عندما لايوجد أي تخامد للموجة . نكتب معادلة ماكسويل لتفرق $\vec{E}$ عندما $\rho = 0$ على الشكل :

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial E_{ox}}{\partial x} + \frac{\partial E_{oy}}{\partial y} = ik_g E_{oz} \qquad (3-97)$$

وكذلك فان معادلة ماكسويل لتفرق $\vec{H}$: $\vec{\nabla}.\vec{H} = 0$ تساوي :

$$\frac{\partial H_{ox}}{\partial x} + \frac{\partial H_{oy}}{\partial y} = ik_g H_{oz} \qquad (3-98)$$

نعيد أيضا كتابة معادلة ماكسويل لدوار $\vec{E}$ ومعادلـــةماكسويل لدوار $\vec{H}$ على شكل ثلاث معادلات جبرية لكل منهما على الشكـــل :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Longrightarrow \frac{\partial E_{oz}}{\partial y} + ik_g E_{oy} = -i\omega\mu H_{ox} \qquad (3-99)$$

$$ik_g E_{ox} + \frac{\partial E_{oz}}{\partial x} = i\omega\mu H_{oy} \qquad (3-100)$$

$$\frac{\partial E_{oy}}{\partial x} - \frac{\partial E_{ox}}{\partial y} = -i\omega\mu H_{oz} \qquad (3-101)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Longrightarrow \frac{\partial H_{oz}}{\partial y} + ik_g H_{oy} = i\omega\varepsilon E_{ox} \qquad (3-102)$$

$$ik_g H_{ox} + \frac{\partial H_{oz}}{\partial x} = -i\omega\varepsilon E_{oy} \qquad (3-103)$$

$$\frac{\partial H_{oy}}{\partial x} - \frac{\partial H_{ox}}{\partial y} = i\omega\varepsilon E_{oz} \qquad (3-104)$$

ومن مجموعة هذه المعادلات يمكن أن نستنتج أربع مركبات عرضيـــــــه $H_{ox}, H_{oy}, E_{ox}, E_{oy}$ ومركبتان طوليتان همـا H_{oz} و E_{oz}. مـــن المعادلات(100)و(102) نحصل على المعادلة التالية :

$$E_{ox} = \frac{-i\omega\mu}{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_g^2}} \left(\frac{k_g}{\omega\mu} \frac{\partial E_{oz}}{\partial x} + \frac{\partial H_{oz}}{\partial y} \right), (\lambda_g \neq \lambda) \quad (3-105)$$

و:

$$H_{oy} = \frac{-i\omega\varepsilon}{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_g^2}} \left(\frac{\partial E_{oz}}{\partial x} + \frac{k_g}{\omega\varepsilon} \frac{\partial H_{oz}}{\partial y} \right) \quad (3-106)$$

حيث λ هو طول الموجة المختــــــــزل $\lambda = 1/\omega(\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}}$ وهو لايســـاوي طول الموجة الموجهة $\lambda_g = \frac{1}{k_g}$ ومن المعادلات (99)و(103)نجد

$$E_{oy} = \frac{i\omega\mu}{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_g^2}} \left[\frac{\partial H_{oz}}{\partial x} - \frac{k_g}{\omega\mu} \frac{\partial E_{oz}}{\partial y} \right], (\lambda \neq \lambda_g) \quad (3-107)$$

و :

$$H_{ox} = \frac{i\omega\varepsilon}{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_g^2}} \left[\frac{\partial E_{oz}}{\partial y} - \frac{k_g}{\omega\varepsilon} \frac{\partial H_{oz}}{\partial x} \right] \quad (3-108)$$

يتضح من المعادلات(105 - 108) إن الموجة تتعين بالكامل عنـــد تعيين E_{oz} و H_{oz}. يمكن ايجاد المعادلات التي تعطي E_{oz} و H_{oz} انطلاقـا من معادلة الموجة الكهرطيسية المستوية :

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\vec{E} &= \varepsilon\mu \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -k^2\vec{E} \\ \nabla^2\vec{H} &= \varepsilon\mu \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = -k^2\vec{H} \end{aligned}\right\} \quad (3-109)$$

من المعادلة الاولى نحصل على المعادلة التفاضلية لـ E_{oz} نجد:

$$\frac{\partial^2 E_{oz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{oz}}{\partial y^2} - k_g^2 E_{oz} = -k^2 E_{oz}$$

$$\frac{\partial^2 E_{oz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{oz}}{\partial y^2} = -\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_g^2}\right) E_{oz} \qquad (3\text{-}110)$$

كذلك من المعادلة الثانية لـ (109) نجد أن:

$$\frac{\partial^2 H_{oz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{oz}}{\partial y^2} = -\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_g^2}\right) H_{oz} \qquad (3\text{-}111)$$

لم نعرف حتى الآن طول الموجة λ_g: انه ثابت يجب اختياره لكي يحقق كل من H_{oz} و E_{oz} المعادلات التفاضلية السابقة ويحقق الشروط الحدية لدليل الموجة. وسنرى لاحقا أن بعض القيم المتميزة لـ λ_g ستكون ممكنة ،هذه القيم ندعوها بالقيم الخاصة وهي تعتمد على: التردد، على الشكل الهندسي للوسط وعلى الثوابت المميزة للوسط: ε_r و μ_r وأخيرا على الشكل الهندسي لدليل الموجه وعلى خواصه الكهربائية σ و μ_r .

ان الطريقة العامة لحساب الحقل الكهربائي $\vec{E}$ والحقل المغناطيسي $\vec{H}$ تكون على النحو التالي :

في البداية نحل معادلات الموجة بالنسبة لـ E_{oz} و H_{oz} مع الاخذ بالاعتبار الشروط الحدية لدليل الموجة هذا الحل يمكننا من الحصول على E_{oz} , H_{oz} و λ_g . والمركبات الاخرى لـ $\vec{E}$ و $\vec{H}$ نحصل عليها عندئذ من المعادلات(104)الى(107).

2 ـ 8 ـ 3 ـ الموجات TE والموجات TM :

من الشائع عادة التمييز بين نوعين من الامواج الموجهة

الامواج الكهربائية العرضية TE ،من أجلها يكون $E_{oz}=0$ والامواج العرضية المغناطيسية TM التي من أجلها $H_{oz} = 0$. لنكتب الآن المركبات العرضية للمتجهات $\vec{E}_o$ و $\vec{H}_o$ بالصيغة المتجهية على الشكل :

$$\vec{E}_{ot} = \vec{E}_{ox}\vec{i} + \vec{E}_{oy}\vec{j} \quad (3\text{-}112)$$

(الدليل t للدلالة على كلمة عرضية)

$$\vec{H}_{ot} = \vec{H}_{ox}\vec{i} + \vec{H}_{oy}\vec{j} \quad (3\text{-}113)$$

ولتحديد جهة E_{ot} بالنسبة لـ H_{ot} نأخذ جداءهما السلمي فنجد :

$$\vec{E}_{ot}\cdot\vec{H}_{ot} = E_{ox}H_{ox} + E_{oy}H_{oy} = 0 \quad (3\text{-}114)$$

اذن فالمركبات العرضية للحقل الكهربائي $\vec{E}$ والحقل المغناطيسي $\vec{H}$ في الامواج TE و TM متعامدة في كل نقطة من نقاط الوسط . وهذا ينطبق على أي موجة سواءً كانت TE أو TM تنتشر وفق خط مستقيم : وهذا البرهان لايكون صحيحا إلاّ اذا كانت $\lambda_g \neq \lambda$ ولكن نتائج هذا البرهان تكون مطبقة عندما $\lambda_g = \lambda$ كما سوف نرى فيما بعد .

لنوجد الآن النسبة E_{ot}/H_{ot} التي تدعى بممانعة الموجة وذلك من أجل الامواج $TE(E_{oz}=0)$ و $TM(H_{oz}=0)$. يمكننا اختيار المحاور في نقطة ما معينة بحيث $E_{oy} = H_{ox} = 0$ وممانعة الموجة في حالة الامواج $TE(E_{oz}=0)$ تساوي :

$$\frac{E_{ot}}{H_{ot}} = \frac{E_{ox}}{H_{oy}} = \frac{\omega\mu}{k_g} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2}\frac{\lambda_g}{\lambda} = 377\frac{\lambda_g}{\lambda_o}(\Omega) \quad (3\text{-}115)$$

حيث اعتبرنا $(\varepsilon_r = 1,\ \mu_r = 1)$

وبنفس الطريقة من أجل الامواج $TM(H_{oz} = 0)$ نجد أن :

$$\frac{E_{ot}}{H_{ot}} = \frac{k_g}{\omega\varepsilon} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2}\frac{\lambda}{\lambda_g}$$

$$= 377\frac{\lambda_o}{\lambda_g}(\Omega) \quad (\varepsilon_r = 1,\ \mu_r = 1) \quad (3\text{-}116)$$

وممانعة الموجة كما نرى هي عدد حقيقي وموجب.

3 – 8 – 3 – الامواج الكهرطيسية العرضانية TEM :

نعتبر أن $\lambda = \lambda_g$ ولذلك فان الحد: $0 = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_g^2}$

والمعادلات (103 - 106) تصبح على الشكل :

$$\frac{k}{\omega\mu}\frac{\partial E_{oz}}{\partial x} + \frac{\partial H_{oz}}{\partial y} = 0 \tag{3-117}$$

$$\frac{k}{\omega\mu}\frac{\partial E_{oz}}{\partial y} - \frac{\partial H_{oz}}{\partial x} = 0 \tag{3-118}$$

$$\frac{\partial E_{oz}}{\partial y} - \frac{k}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_{oz}}{\partial x} = 0 \tag{3-119}$$

$$\frac{\partial E_{oz}}{\partial x} + \frac{k}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_{oz}}{\partial y} = 0 \tag{3-120}$$

ان الزوج الاول من هذه المعادلات يساوي الى الزوج الاخير لكون $\lambda = \lambda_g$ فرضا وبالتالي :

$$\frac{k}{\omega\mu} = \omega\varepsilon/k = \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$$

تتحقق هذه المعادلات اذا وضعنا $E_{oz} = 0$ و $H_{oz} = 0$ ونحصل على مايسمى بالموجة الكهرطيسية العرضانية (TEM). يكون للموجة TEM بعض الخواص المميزة : بما أن $\lambda = \lambda_g$ فان السرعة الطورية $v_{ph} = \omega\lambda$ تساوي الى سرعة الموجة المستوية اذا كان الانتشار في نفس الوسط ، وهذه السرعة تساوي الى $v_{ph} = 1/(\varepsilon\mu)^{\frac{1}{2}}$ وهي مستقلة عن

التردد وذلك في الحالة التي يكون فيها ε و μ مستقلة أيضا عنه اذا انتشرت الموجة الكهرطيسية في الفراغ فان سرعتها تساوي c مهما كان الشكل الهندسي لدليل الموجة ومهما كان ترددها ويقال في هذه الحالة أن الخط الذي تنتشر وفقه الموجة هو خط بدون التواء

وجدنا سابقا أن الحقل الكهربائي $\vec{E}$ يكتب بصيغة مجموع للكمونين السلمي والمتجه :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi \qquad (3\text{-}121)$$

يرتبط الحد الاول بتغيرات الحقل المغناطيسي ،بينما يرتبط الحد الثاني بتوزع الشحنات ، وسوف نرى في الفقرة التالية أن التيارات يجب أن تكون طولية وبالتالي فان $\vec{A}$ و $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ يجب أن تكون طولية أيضا . اذا أخذنا $\vec{A}$: $\vec{A} = A.\vec{K}$ فان $\vec{E}$ يساوي :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} - \left(\frac{\partial \varphi\varphi}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial t}\right)\vec{K} \qquad (3\text{-}122)$$

وبما أن $\vec{E}$ هي عرضية فيجب أن تكون المركبات الطولية لـ $\vec{\nabla}\varphi$ و $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ معدومة أي أن :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial A}{\partial t} \qquad (3\text{-}123)$$

والحقل الكهربائي $\vec{E}$ يساوي :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} \qquad (3\text{-}124)$$

وباعتبار أن مايهمنا هي الموجة لذلك فان $\vec{E}$ و φ يكتبان على الشكل :

$$\vec{E} = \vec{E}_o \exp i\left(\omega t - \frac{z}{\lambda}\right) \qquad (3\text{-}125)$$

$$\varphi = \varphi_o \exp i\left(\omega t - \frac{z}{\lambda}\right) \qquad (3\text{-}126)$$

حيث $\vec{E}_o$ و φ_o لايتعلقان الا بالاحداثي y .

لنعيد كتابة العلاقة (125) بدلالة الكمون السلمي φ علـى الشكل التالي :

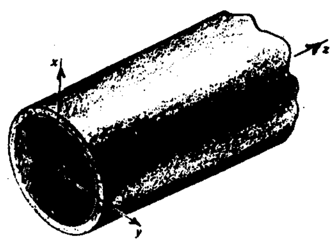
$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi_o}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi_o}{\partial y}\vec{j}\right)\exp i\left(\omega t - \frac{z}{\bar{\lambda}}\right) \qquad (3\text{-}127)$$

حيث :

$$\vec{E}_o = -\frac{\partial\varphi_o}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial\varphi_o}{\partial y}\vec{j} \qquad (3\text{-}128)$$

يمثل $\vec{E}_o$ الحقل الكهربائي في مستوي عمودي على اتجاه الانتشار (هذا المستوي هو المستوي الموازي لـ xy) وهو يشتق من كمون φ_o بنفس الطريقة التي يشتق منها حقل كهربائي ساكن.

اذا كان دليل الموجة هو انبوب اسطواني ناقل كما في الشكل (15- 3) فان المركبة المماسية للحقل الكهربائي $\vec{E}$ على السطح تكون معدومة و φ_o تكون ثابتة في كل جهة من الانبوب والحل الوحيد داخل الانبوب هو أن يكون $\varphi_o = const$.



شكل (15- 3) انبوب اسطواني ناقل

ولكن اذا كان φ_o ثابتا داخل الانبوب فان $\vec{E}_o = 0$ داخله وبالتالي فان $\vec{E} = 0$. وبما أن $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ فان الحقل المغناطيسي $\vec{H}$ داخل الانبوب لايكون متغيرا.

يمكن تلخيص ماتقدم كالتالي : لايمكن لموجة TEM أن تنتقل داخل الانابيب الناقلة الا ان هذا ليس صحيحا بشكل دائم

فمثلا ، عندما تكون الابعاد العرضية للانبوبة أكبر بكثير من طول موجة الموجة TEM يمكن عندئذ للموجة أن تنتقل داخل الانبوب المعدني بخط مستقيم كما هو الحال بالنسبة للضوء المرئي .

اذا أعدنا كتابة المعادلات(98 - 105 عدا 104) بعد وضع $E_{oz} = 0$ و $H_{oz} = 0$ فاننا نحصل على ستة معادلات تمثل انتشار موجة كهرطيسية في الاتجاه الموجب للمحور z وهذه المعادلات هي:

$$\frac{\partial E_{ox}}{\partial x} + \frac{\partial E_{oy}}{\partial y} = 0 \tag{3-129}$$

$$\frac{\partial H_{ox}}{\partial x} + \frac{\partial H_{oy}}{\partial y} = 0 \tag{3-130}$$

$$E_{oy} = -\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} H_{ox} \tag{3-131}$$

$$E_{ox} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} H_{oy} \tag{3-132}$$

$$\frac{\partial E_{oy}}{\partial x} - \frac{\partial E_{ox}}{\partial y} = 0 \tag{3-133}$$

$$\frac{\partial H_{oy}}{\partial x} - \frac{\partial H_{ox}}{\partial y} = 0 \tag{3-134}$$

من المعادلتين (131)و(132) نرى أن الحقل الكهربائي $\vec{E}$ والمغناطيسي $\vec{H}$ متعامدان في الموجة TEM وممانعة هذه الموجة تساوي :

$$\frac{E_{ox}}{E_{oy}} = \left(\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}\right)^{\frac{1}{2}} = 377\Omega \quad (\varepsilon_r = 1 \ , \ \mu_r = 1)$$

من جهة أخرى فان كثافة الطاقة الكهربائية تساوي كثافة الطاقة

المغناطيسية أي :

$$\frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\mu H^2$$

وكثافة الطاقة الكلية تساوي εE^2 أو μH^2 .

واذا حسبنا متوسط متجهة بوينتنغ بعد الاخذ بعين الاعتبار العلاقة (132) نجد :

$$\langle\vec{p}_c\rangle = \frac{1}{2} R_e(\vec{E} \wedge \vec{H}^*) = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} E_{ox}^2\vec{k} \quad (3-135)$$

$$= \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} E_{eff}^2\vec{k} \quad (3-136)$$

$$= v_{ph}\mu\, H_{eff}^2\vec{k} \quad (3-137)$$

ومتجهة بوينتنغ تكون موجهة بالاتجاه الموجب لـ z الذي هو اتجاه انتشار الموجة وطويلتها تساوي الى جداء سرعة الطور $v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ بكثافة الطاقة المتوسطة وهذا مارأيناه سابقا . لايجاد الحقول $\vec{E}$ و $\vec{H}$ نختار أولا الحقل الكهربائي الساكن $\vec{E}_o$ الموافق لنمط الانتشار الذي نريده . اذا كان ،مثلا، دليل الموجة كابل محوري يكون $\vec{E}_o$ قطريا ،ونحصل على الحقل الكهربائي $\vec{E}$ من المعادلة (127) وعلى الحقل المغناطيسي $\vec{H}$ من المعادلتين (131-132)

4 – 8 – 3 ـ الشروط الحدية على سطح دليل موجة معدني :

مهما يكن نموذج الموجة فان المركبة المماسية للحقل الكهربائي $\vec{E}$ تنعدم على سطح دليل موجة ناقل كامل . ينتج عن ذلك أنه بقرب سطح الدليل يكون الحقل الكهربائي عموديا على السطح ويكون $E_{oz} = 0$. أما الحقل المغناطيسي $\vec{H}$ فيجب أن يتصف بالقرب من السطح بالخواص التالية :

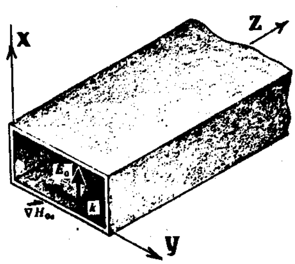
أ ـ مماسا للسطح، ب ـ عمودي على كثافة التيار، جـ ـ طويلته تساوي كثافة التيار السطحي معبرا عنه بواحدة A/m . في الامواج TM و TEM على سبيل المثال ،يكون الحقل المغناطيسي $\vec{H}$ عرضيا في كل نقطة من السطح وكثافة التيارات تكون في الدليل طولانية . في الموجة TE وعند استخدام دليل موجة ناقل كامل يضاف شرط آخر للشروط الحدية السابقة يستخدم H_{oz} هذا الشرط نحصل عليه من كتابة $\vec{E}_o$ على الشكل:

$$\vec{E}_o = E_{ox}\vec{i} + E_{oy}\vec{j}$$

حيث أن $E_{oz} = 0$ فرضا ، باستخدام المعادلات(105)و(107) نجد:

$$\vec{E}_o = \frac{i\omega\mu}{\frac{1}{\chi^2} - \frac{1}{\chi_g^2}}\left[-\frac{\partial H_{oz}}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial H_{oz}}{\partial x}\vec{j}\right]$$

$$= \frac{i\omega\mu}{\frac{1}{\chi^2} - \frac{1}{\chi_g^2}}\vec{k} \wedge \vec{\nabla} H_{oz} \qquad (3\text{-}138)$$



شكل(3-16) انتشار موجة TE في ناقل كامل مستطيل الشكل .

نمثل على الشكل(16 - 3)المتجهات $\vec{E}_o$ و $\vec{k}$ و $\vec{\nabla} H_{oz}$ حيث نلاحظ أن $\vec{\nabla} H_{oz}$ مماس لجدار الناقل.

5 ـ 8 ـ 3ـ الموجات الكهربائية العرضانية TE في أدلة الموجة ذات الاشكال المستطيلة الجوفاء:

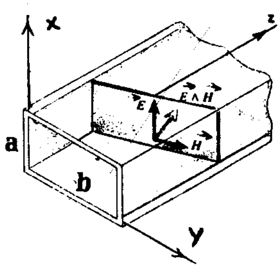
يوجد في الواقع عدة نماذج لادلة الموجة نذكر منها

الناقل المحوري المحمي (كابل محوري) La Ligne Coaxiale

الناقل الثنائي السلك المصفح Ligne Bifilaire Blindée والناقل ذو الخطين المتوازيين Ligne a fils parallèles ودليل الموجة ذو الشكل المستطيل الاجوف ... الخ . أدلة الموجة الجوفاء عبارة عن أنابيب معدنية تنتشر فيها الامواج الكهرطيسية عن طريق انعكاساتها على الجدران الداخلية للدليل على نحو يشابه قليلا انتشار الموجات الصوتية في الانابيب وهي كثيرة الاستعمال في الترددات العالية (HF). نعتبر أن العازل في الدليل المستطيل الاجوف هو الهواء، وان طول الموجة λ_g للموجة TE يختلف عن λ الذي يساوي في هذه الحالة الى λ_o :

$$\lambda_o = \frac{1}{(\varepsilon_o \mu_o)^{\frac{1}{2}}}$$

لتكن موجة كهربائية عرضية TE حيث $E_z = 0$، اتجاهات الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{H}$ فيها مبين على الشكل (3 - 17)، تنتشر هذه الموجة بالانعكاسات المتتالية على الجدران التي توازي المستوى xz . لتعيين $\vec{E}$ و $\vec{H}$ ينبغي ايجاد المركبات: E_{ox} ، E_{oy} ، H_{ox} ، H_{oz} ، H_{oy} ، $\lambda_g = \frac{1}{k_g}$ ومن الشكل نرى أن :



شكل (3 - 17)

$$H_{ox} = 0 \quad , \quad E_{oy} = 0 \qquad (3-139)$$

لتعيين المركبات الاربعة المتبقية E_{ox} ، H_{oy} ، H_{oz} ، λ_g نحل معادلات الموجة بالنسبة للمركبة H_{oz} مع اعتبار الشروط الحدية المناسبة المذكورة في الفقرة (4 - 8 - 3) فنحصل على H_{oz} و λ_g

ومن ثم نستنتج المركبات E_{ox} و H_{oy} من المعادلات (105)و (108)، من المعادلة (111) نجد أن H_{oz} يخضع لمعادلة الموجة

$$\frac{\partial^2 H_{oz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{oz}}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{\lambda_g^2} - \frac{1}{\lambda_o^2}\right) H_{oz} \qquad (3-140)$$

وحيث أن الموجة TE لاتتعلق بالاحداثي x كما يبينه الشكل (3 -17) فان المقدار $\frac{\partial^2 H_{oz}}{\partial x^2} = 0$ ، بتعويض هذا المقدار بالمعادلة (139) نحصل على المعادلة التالية :

$$\frac{\partial^2 H_{oz}}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{\lambda_g^2} - \frac{1}{\lambda_o^2}\right) H_{oz} \qquad (3-141)$$

وحل هذه المعادلة نأخذه من الشكل :

$$H_{oz} = A \sin cy + B \cos cy \qquad (3-142)$$

حيث :

$$-c^2 = \frac{1}{\lambda_g^2} - \frac{1}{\lambda_o^2} \qquad (3-143)$$

لنطبق الآن الشروط الحدية لايجاد الثوابت A و B :

$$\frac{\partial H_{oz}}{\partial x} = 0 \quad \text{عندما} \quad x = 0 \text{ و } x = a \qquad (3-144)$$

$$\frac{\partial H_{oz}}{\partial y} = 0 \quad \text{عندما} \quad y = 0 \text{ و } y = b \qquad (3-145)$$

الشرط الحدي الاول محقق باعتبار أن H_{oz} لاتتعلق بالاحداثي x ممن الشرط الحدي الثاني نجد :

$$\frac{\partial H_{oz}}{\partial y} = c[A \cos cy - B \sin cy] = 0 \quad \text{عندما} \quad y = 0 \,,\; y = b \qquad (3-146)$$

الشرط الحدي عند $y = 0$ يعطي $A = 0$ والحل $c = 0$ هو مرفـــوض

لانه يؤدي الى أن $\lambda_o=\lambda_g$ وهذا ليس صحيحا في حالة الموجة من النوع TE .

والشرط الحدي عند $y = b$ يعطي : $\sin cb = 0$ ومنه فان

$$c = \frac{n\pi}{b} \qquad (3\text{-}147)$$

حيث n عدد صحيح لايساوي الصفر .

بتعويض قيمة c في العلاقة (142)نجد:

$$H_{oz} = B\cos\left(\frac{n\pi}{b}\right)y \qquad (3\text{-}148)$$

لايجاد قيمة λ_g نعوض قيمة c في العلاقة (147) نحصل على المعادلة التالية :

$$\frac{-n^2\pi^2}{b^2} = \frac{1}{\lambda_g^2} - \frac{1}{\lambda_o^2} \qquad (n=1,2,\ldots) \qquad (3\text{-}149)$$

ان λ_g كما يلاحظ لاتأخذ الا قيما متقطعة توافق $n = 1, 2,3,..$.
ان وجود اشارة سالب في الطرف الايسر من (149) يدل على أن $\lambda_o < \lambda_g$ وتكون السرعة الطورية عندئذ أكبر من سرعة الموجة الكهرطيسية في الخلاء . بعد ايجاد c و H_{oz} و λ_g يمكننا تعيين E_{ox} و H_{oy} انطلاقا من المعادلات(105 و 108) وذلك بعد وضع $\lambda = \lambda_o$ و $\mu_r=1, \varepsilon_r=1$ فنجد:

$$E_{ox} = \frac{i\omega\mu_o bB}{n\pi}.\sin\left(\frac{n\pi}{b}\,y\right) \qquad (3\text{-}150)$$

$$H_{oy} = \frac{ibB}{n\pi\lambda_g}.\sin\left(\frac{n\pi}{b}\,y\right) \qquad (3\text{-}151)$$

وبوضع : $E_{oox}= \frac{i\omega\mu_o bB}{n\pi}$ حيث تمثل E_{oox} القيمة العظمى لـ E

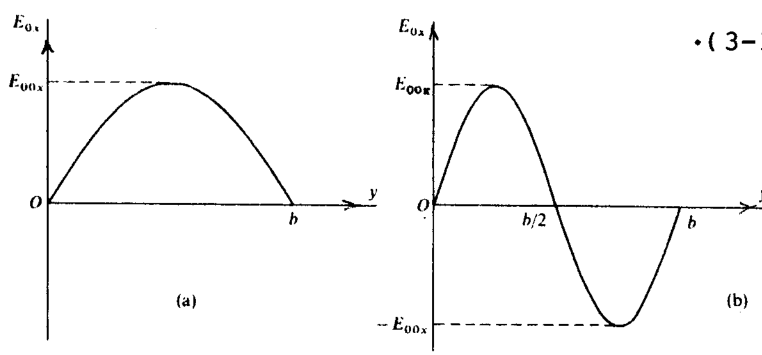
(وجدنا أن $E_{oy} = 0$)داخل الدليل,نجد أن:

$$E_x = E_{oox}\sin(\frac{n\pi}{b} y)\exp i(\omega t - \frac{z}{\lambda_g}) \qquad (3-152)$$

$$H_y = \frac{E_{oox}}{\omega\mu\lambda_g} \sin(\frac{n\pi}{b} y)\exp i(\omega t - \frac{z}{\lambda_g}) \qquad (3-153)$$

$$H_z = -\frac{E_{oox} n\pi}{i\omega\mu_o b}\cos(\frac{n\pi}{b} y)\exp i(\omega t - \frac{z}{\lambda_g}) \qquad (3-154)$$

من العلاقة (152) نرى بأن الحقل الكهربائي لموجة مستوية كالتي تظهر على الشكل (17 - 3) تنتشر في الاتجاه الموجب للمحور z مستقلة عن x وبنتيجة الانعكاسات المتعددة يحدث تداخل لهذه الامواج مما يؤدي الى تغير السعة مع y . من جهة أخرى فان لـ n تأثيرا على السعة أيضا ،فمن أجل $n = 1$,فان E_{ox} تتغير من o عند $y = 0$ الى قيمة عظمى E_{oox} عندما $y = b/2$ ثم تنعدم من جديد عند القيمة $y = b$ شكل (3 -18.a) وعندما $n = 2$,فان E_{ox} تنعدم في منتصف الدليل عندما $y = b/2$ وتغير اشارتها من جهة لاخرى شكل (3-18.b) .



شكل (18- 3): تغير السعة E_{ox} لموجة TE في دليل موجة مستطيل ان $n = 1$ في (a)وتساوي (2)في (b) .

ان أختلاف قيم n توافق اذن اختلافا في نمط الانتشار في الدليل.
لنكتب المعادلة (149)على الشكل :

$$\frac{\lambda_g}{\lambda_o} = \frac{1}{[1 - (\frac{n\lambda_o}{2b})^2]^{\frac{1}{2}}} \qquad (3-155)$$

عندما n=1 فان العلاقة السابقة تساوي :

$$\frac{\lambda_g}{\lambda_o} = \frac{1}{[1 - (\frac{\lambda_o}{2b})^2]^{\frac{1}{2}}} \qquad (3-156)$$

اذا كانت $\lambda_o < 2b$ فان λ_g لها قيمة حقيقية وهذا يعني أنالتوابع الاسية في المعادلات(152)، (153)و (154) تصف موجة غير متخامدة . ويمكن شرح المتراجحة $\lambda_o < 2b$ بالشكل التالي : اذاكان التردد عاليا الى حد كاف وكانت جدران الدليل مصنوعة من ناقل كامل فان الموجة يمكنها أن تنتشر في الدليل دون تخامد.عندما تكون $\lambda_o > 2b$ أي عندما يكون التردذ منخفضا جدا فان λ_g تكون عقدية والتوابع الاسية للعلاقات التي سبق ذكرها سوف تحوي على حد يعبر عن التخامد، والنتيجة أن الحقل الكهربائي والمغناطيسي سوف يتخامدان بتابعية z . ولكن الطور من جهة أخرى لايتغير مع z ولذلك لاتوجد موجة وتدفق الطاقة يكون معدوما في الدليل ويكون تخامد الموجة TE سريعا ان وجد ،فاذا كانت $\lambda_o = 4b$ (ترددات منخفضة جدا) فان المقدار:

$$\frac{1}{\lambda_g} = \pm\, i\, \frac{\sqrt{3}}{\lambda_o} \qquad (3-157)$$

ويجب هنا أخذ الاشارة السالبة والا حصلنا على تزايد أسي للسعة بدلالة z . وبالاستفادة من العلاقة السابقة فان المقدار $\exp(-i\frac{z}{\lambda_g})$ يساوي

$$\exp(-i \frac{z}{\lambda_g}) = \exp(-\frac{2\pi\sqrt{3}\, z}{\lambda_o})$$

وسعة الموجة تتخامد بمقدار 4×10^{-5} على بعد z مساو الى λ_o وتتخامد متوسط متجهة بوينتنغ $<\vec{p}_c>$ عند مسافة $z = \lambda_o$ بالمقدار 16×10^{-10} وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها طول الموجة $\lambda_o = 2b$ فان λ_g تصبح لانهائية . تدعى الكمية $\lambda_c = 2b$ طول موجة القطع Longueur d'onde de Coupure .نستخلص مما سبق أن أدلة الموجة المستطيلة الجوفاء لاتستعمل الا عندما يكون طول الموجة في الخلاء λ_o أقل بكثير من 2b : $\lambda_o \ll 2b$ في النمط n =1 .
اذا كان b = 10cm على سبيل المثال،فان λ_o يجب أن تكون أصغر بكثير من 20 cm وهذا يعني أن التردد الاصغري يساوي 1,5 GHz .
وهكذا فان الدليل يعمل كمرشح حيث أن الامواج لاتنتشر فيه الا عند الترددات الاكبر أو التي تساوي 1,5 GHz (الترددات العالية).
من أجل النمط n = 1 فان مركبات الحقلين الكهربائي والمغناطيسي تساوي :

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_{oox}\sin(\frac{\pi y}{b})\exp i(\omega t - \frac{z}{\lambda_g}) \\ E_y &= 0 \quad , \quad E_x = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3-158)$$

$$H_y = \frac{E_{oox}}{\omega\mu_o\lambda_g}\sin(\frac{\pi y}{b})\exp i(\omega t - \frac{z}{\lambda_g}) \qquad (3-159)$$

$$H_z = \frac{\pi E_{oox}}{\omega\mu_o b} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \exp i\left(\omega t - \frac{z}{\lambda_g} - \frac{\pi}{2}\right) \quad (3\text{-}160)$$

$$= \frac{\pi E_{oox}}{\omega\mu_o b} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \exp i\left[\omega t - \frac{1}{\lambda_g}\left(z + \frac{\lambda_g}{4}\right)\right]$$
(3-161)

$$H_z = 0$$

حيث λ_g طول الموجة في الدليل يساوي :

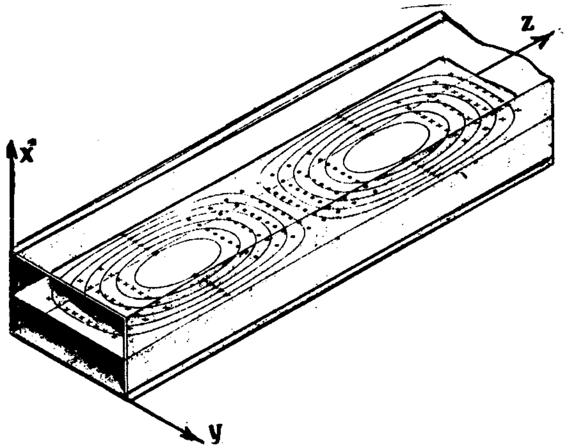
$$\lambda_g = \frac{\lambda_o}{\left[1 - \left(\frac{\lambda_o}{2b}\right)^2\right]^{1/2}} > \lambda_o \quad (3\text{-}162)$$

وسرعة الطور تساوي الى :

$$v_{ph} = \frac{c}{\left[1 - \left(\frac{\lambda_o}{2b}\right)^2\right]^{1/2}} > c \quad (3\text{-}163)$$

نلاحظ مما سبق أن E_x و H_y على توافق في الطور ، أما H_z فيملك في النقطة $z + \lambda_g/4$ طورا يساوي طور E_x و H_y في النقطة z .

يمثل الشكل التالي (3 - 19) خطوط الحقل الكهربائي $\vec{E}$ (مستقيمات عمودية مثلث بنقاط وعلامة x) والمغناطيسي $\vec{H}$ (خطوط بيضوية) لموجة TE من النمط $n = 1$ تنتشر في دليل موجة مستطيل الشكل .



شكل (19- 3).

6 – 8 – 3 – انتقال الطاقة الكهرطيسية لموجة من النوع TE في دليل أمواج مستطيل :

لنحسب الطاقة التي تنقلها موجة من النوع TE في دليل أمواج مستطيل الشكل فقدانه للطاقة ضعيف وذلك من أجل النمط $n = 1$.

تعطى القيمة الوسطية لمتجهة بوينتنغ من العلاقة :

$$\langle \vec{p}_c \rangle = \frac{1}{2} R_e(\vec{E} \wedge \vec{H}^*)$$

حيث $\vec{H}^*$ هو المرافق العقدي لـ $\vec{H}$ ؛

$$\langle \vec{p}_c \rangle = \frac{1}{2} R_e \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ E_x & 0 & 0 \\ 0 & H_y^* & H_z^* \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} R_e(-E_x H_z^* \vec{j} + E_x H_y^* \vec{k}) \qquad (3-164)$$

واذا عوضنا في هذه المعادلة قيم E_x و H_y و H_z من المعادلات (151 الى 153) نجد أن الحد الاول للمقدار مابين قوسين هو مقدار تخيلي أما الحد الثاني فهو مقدار حقيقي . والطاقة المنتقلة تكون فقط في الاتجاه z وتساوي :

$$\langle\vec{p}_c\rangle = \frac{E_{oox}^2}{2\omega\mu_o\lambda_g}\sin^2(\frac{\pi}{b}y)\vec{k} \tag{3-165}$$

وكما نلاحظ أن $\langle\vec{p}_c\rangle$ مستقلة عن x لان الموجة وطورها مستقلين عنه ولذلك فان $\langle\vec{p}_c\rangle$ تنعدم على الجدران عند $y = 0$ و$y = b$ حيث ينعدم الحقل الكهربائي $\vec{E}$، وتأخذ $\langle\vec{p}_c\rangle$ قيمة عظمى عندما $y = b/2$. ان الاستطاعة الكلية الوسطية المنتقلة يمكن حسابها بعد معرفة $\langle\vec{p}_c\rangle$ وتساوي :

$$W_T = \int_{y=0}^{y=b} \frac{E_{oox}^2}{2\omega\mu_o\lambda_g}\sin^2(\frac{\pi}{b}y)\,a\,dy \tag{3-166}$$

$$= \frac{E_{oox}^2 . ab}{4\omega\mu_o\lambda_g} \tag{3-167}$$

$$= \frac{ab.E_{oox}^2}{4c\mu_o}\{1 - (\frac{\lambda_o}{2b})^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{3-168}$$

لنقارن هذه الاستطاعة المنتقلة مع الطاقة الكهرطيسية الوسطية في واحدة الطول في الدليل . ان كثافة الطاقة الكهربائية الانية تساوي $\frac{1}{2}\varepsilon_o E^2$ وقيمتها المتوسطة تساوي $\frac{1}{4}\varepsilon_o E_o^2$. وتكون الطاقة الكهربائية في واحدة الطول مساوية الى :

$$\int_0^b \frac{1}{4}\varepsilon_o E_{oox}^2 \sin^2(\frac{\pi}{b}y)\,a\,dy = \frac{\varepsilon_o}{8}ab.E_{oox}^2 \tag{3-169}$$

لايجاد الطاقة المغناطيسية الوسطية في واحدة الطول نطبق نفس الطريقة على مركبات الحقل $\vec{H}$: H_x و H_y ، حيث $H^2 = H_x^2 + H_y^2$. نجد في النتيجة أن هذه الطاقة المغناطيسية الوسطية تساوي :

$\frac{\varepsilon_o}{8} \, abE_{oox}^2$ وهي اذن تساوي الى الطاقة الكهربائية الوسطية

وهذا منطقي,لان الامواج الكهرطيسية الناتجة من انعكاس الحقل $\vec{E}$ على جدران الدليل يكون لها كثافة طاقة كهربائية ومغناطيسية متساويين ، وقد لايكون كذلك في بعض الاحيان بسبب ظواهر التداخل ،
والطاقة الكهرطيسية الوسطية الكلية في واحدة الطول في الموجة تساوي: $\frac{1}{4} \, \varepsilon_o abE_{oox}^2$ ، اذا قسمنا الاستطاعة الوسطية المنقولة على الطاقة الكهرطيسية الكلية نحصل على :

$$\frac{\text{الاستطاعة الوسطية المنقولة}}{\text{الطاقة الكهرطيسية الوسطية الكلية}}$$

$$= E_{oox}^2 \frac{ab}{4\omega\mu_o \lambda_g} \frac{4}{\varepsilon_o abE_{oox}^2} = c \frac{\lambda_o}{\lambda_g}$$

$$= c\{1 - (\frac{\lambda_o}{2b})^2\}^{\frac{1}{2}} = v_s \qquad (3\text{-}170)$$

v_s هي سرعة الاشارة (السرعة المجموعية) وهي السرعة التي تنتقل فيها اشارة معينة على طول الدليل والاستطاعة الوسطية المنقولة تساوي اذن الى جداء سرعة الاشارة v_s في جداء الطاقة الكهرطيسية الوسطية الكلية في واحدة الطول ،

7 ـ 8 ـ 3 ـ تخامد موجة TE في دليل الموجة المستطيل الشكل:

لقد فرضنا حتى الآن أن جدران الدليل هي نواقل تامة أو كاملة حيث لايوجد خسارة في طاقة الموجة أما الآن فسنعتبر أن جدران الدليل ذات ناقلية محدودة ولذلك فانها تبدد قسما من طاقة الموجة

على شكل حرارة بفعل جول . تولد الامواج تيارات كهربائية في الدليل والحساب الدقيق للحقول في الدليل يكون صعبا ولحسن الحظ أن مثل هذه الحسابات ليست مهمة .

ان حساب الخسارة بفعل جول على الجدران يتم على الشكل التالي : كانت حساباتنا قائمة على اعتبار أن الدليل كامل الناقلية وهذا أدى الى حساب الحقل المغناطيسي $\vec{H}$ المماس لسطح الدليل . وبما أن المركبة المماسية للحقل $\vec{H}$ يجب أن تكون مستمرة على السطح الفاصل فان قيمة $\vec{H}$ يمكن معرفتها داخل الناقل بمساعدة معادلات ماكسويل ومتجهة بوينتنغ التي تكون عمودية على السطح الناقل وهي موجهة الى داخل الجدار . هذا ويعبر متوسط متجهة بوينتنغ عن الاستطاعة المتوسطة W_p الضائعة في واحدة الطول في الدليل . عندما تخترق الحقول $\vec{E}$ و $\vec{H}$ الجدار تنعدم بعد أن تكون قد توغلت مسافة δ ضئيلة جدا ($\delta = 1,2\ \mu$ في النحاس عند استخدام تردد مقداره : $\nu = 3$ GHz وعند قيمة b مساوية الى $b = 7,5$ cm) . بما أن $\vec{H}$ مماسا لسطح الناقل فان كثافة التيار $\vec{j}_c$ تكون موازية للسطح وعمودية على الحقل المغناطيسي $\vec{H}$ لان $\vec{j} = \vec{\nabla} \wedge \vec{H}$. نظرا للتخامد الذي تسببه جدران الدليل كان من الاهمية تعيين ثابت التخامد k_{g_i} . يعرف ثابت التخامد من العلاقة :

$$\frac{W_p}{2 . W_T} = \frac{\text{الاستطاعة الوسطية الضائعة في واحدة الطول في الدليل}}{\text{الاستطاعة الوسطية المنتقلة في الدليل}} \qquad (3-171)$$

ولحساب هذا الثابت يجب تعيين كل من الاستطاعة الوسطية الضائعة في

واحدة الطول W_p والاستطاعة الوسطية المنتقلة في الدليل W_T وهـــذا ماسنفعله في هذه الفقرة ٠

يولد الحقل المغناطيسي $\vec{H}$ المماسي موجة كهرطيسيـــة تخترق الجدار بشكل عمودي وداخل الجدار تكون النسبة بين الحقل $\vec{E}$ الى $\vec{H}$ مساوية الى :

$$\frac{E}{H} = \left(\frac{\omega\mu_o}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\pi/4} \qquad (3-172)$$

بفرض أن العازل الذي يملأ الدليل هو الهواء وأن $n = 1$ ، فـــان الحقل المغناطيسي على امتداد الوجه الواقع في المستوي xz يساوي :

$$H_z = \frac{\pi E_{oox}}{\omega\mu_o b} \exp i\left(\omega t - \frac{z}{\lambda_g} - \frac{\pi}{2}\right) \text{(عند } y = 0\text{)} \qquad (3-173)$$

ان E_x لاتساوي الصفر عندما $y = 0$ وهي تساوي الى :

$$E_x = \left(\frac{\mu_o\omega}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi E_{oox}}{\omega\mu_o b} \exp i\left(\omega t - \frac{z}{\lambda_g} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (y = 0) \qquad (3-174)$$

لنلاحظ أن $E_x \to 0$ عندما $\sigma \to \infty$. ان متوسط متجهة بوينتنغ الموافقة للخســـارة في هذا الجدار يساوي:

$$\langle \vec{p}_c \rangle = \frac{1}{2} R_e (\vec{E} \wedge \vec{H}^*) = \left(\frac{\pi E_{oox}}{b}\right)^2 \frac{1}{\sigma^{\frac{1}{2}} (2\omega\mu_o)^{3/2}} \quad (y = 0) \qquad (3-175)$$

وهي تمثل الاستطاعة الوسطية المفقودة في المتر مربع من الجدار $y = 0$ وهي نفسها في كل نقطة من نقاط الجدار.والاستطاعة المفقودة بواحـــدة الطول تكون أكبر من الاستطاعة الوسطية السابقة بمقدار a مرةوتســاوي من أجل الجدارين الموازيين للمستوي xz الى :

$$W_{xz} = \left(\frac{\pi E_{oox}}{b}\right)^2 \frac{2a}{\sigma^{\frac{1}{2}}(2\omega\mu_o)^{3/2}} \qquad (3-176)$$

وهي تمثل الاستطاعة الوسطية المفقودة بالانعكاس .

أما على الحائط $x = 0$ فان للحقل المغناطيسي $\vec{H}$ مركبتان واحدة على y : H_y والاخرى على z : H_z , يوافق المركبة H_y الحقل الكهربائي E_z ويساوي :

$$E_z = \left(\frac{\mu_o \omega}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{E_{oox}}{\omega\mu_o \lambda\!\!\!^{-}_g}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \exp i\left(\omega t - \frac{z}{\lambda\!\!\!^{-}_g} + \frac{\pi}{4}\right) \qquad (3-177)$$

والقيمة الوسطية لمتجهة بوينتنغ التي تدخل في الجدارين الموازيين للمستوى yz تساوي :

$$\left(\frac{E_{oox}}{\lambda\!\!\!^{-}_g}\right)^2 \frac{1}{\sigma^{\frac{1}{2}}(2\omega\mu_o)^{3/2}} \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \qquad (3-178)$$

ونفس الخطوات السابقة اذا أجريناها على المركبة H_z نجد أن القيمة الوسطية لمتجهة بوينتيغ تساوي :

$$\left(\frac{\pi E_{oox}}{b}\right)^2 \frac{1}{\sigma^{\frac{1}{2}}(2\omega\mu_o)^{3/2}} \cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \qquad (3-179)$$

وبمكاملة العلاقتين (178)و(179) من $y = 0$ الى $y = b$ وضرب النتيجة بالمقدار 2 نحصل على الاستطاعة المفقودة في المتر في الجدارين الموازيين للمستوى yz :

$$W_{yz} = \frac{\pi^2 E_{oox}^2}{b\sigma^{\frac{1}{2}}(2\omega\mu_o)^{3/2}} \left\{1 + \left(\frac{2b}{\lambda\!\!\!^{-}_g}\right)^2\right\} = \frac{\pi^2 E_{oox}^2}{b\sigma^{\frac{1}{2}}(2\omega\mu_o)^{3/2}} \left(\frac{2b}{\lambda_o}\right)^2 \qquad (3-180)$$

والاستطاعة الكلية المفقودة في واحدة الطول تساوي :

$$W_p = W_{xz} + W_{yz} = \frac{\pi^2 E_{oox}^2}{b\sigma^{\frac{1}{2}}(2\omega\mu_o)^{3/2}}\left[\frac{2a}{b} + \left(\frac{2b}{\lambda_o}\right)^2\right] \qquad (3\text{-}181)$$

وثابت التخامد k_{g_i} يساوي :

$$k_{g_i} = \frac{W_p}{2W_T} = \frac{1}{a(120\sigma\lambda_o)^{\frac{1}{2}}} \frac{1+\frac{2a}{b}\left(\frac{\lambda_o}{2b}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{\lambda_o}{2b}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (3\text{-}182)$$

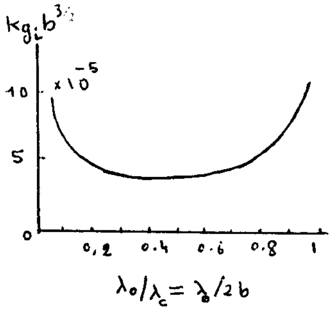
فاذا كان ارتفاع الدليل لانهائي : $a \to \infty$ فان ثابت التخامد في هذه الحالة يساوي :

$$k_{g_i} = \frac{1}{b(30\sigma\lambda_o)^{\frac{1}{2}}} \frac{\left(\frac{\lambda_o}{2b}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{\lambda_o}{2b}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (a \to \infty) \qquad (3\text{-}183)$$

وهذا الحد ناتج عن W_{xz} أي ناجم عن الخسارة على الاوجه الموازية للمستوي xz فقط .

من الناحية العملية يساوي المقدار $\frac{2a}{b}$ الواحد بينما يساوي المقدار $\left(\frac{\lambda_o}{2b}\right)^2$ النصف والخسارات الحادثة على الاوجه الموازية للمستوي xz تكون أقل بمرتين من الخسارات التي تحدث على الاوجه الاخرى . نمثل على الشكل(20- 3) تغير $(k_{g_i} . b^{3/2})$ بدلالة النسبة $\frac{\lambda_o}{2b} = \frac{\lambda_o}{\lambda_c}$ عندما : $\frac{a}{b} = 0,5$. ومن الشكل نرى أن القيمة المثلى للمقدار $\frac{\lambda_o}{2b}$ هي القيمة القريبة من 0,4 ولكن النهاية الصغرى عريضة ولذلك نأخذ من الناحية العملية القيم الاكبر للمقدار $\frac{\lambda_o}{2b}$ لكي يكون التخامد في النمط $n = 2$ شديدا . يكون التخامد من مرتبة $0,1\ dB/m^2$ (ديسي بل / متر مربع) عند ترددات تساوي عدة ميغا هرتز ويزداد التخامد مع زيادة التردد مرفوعا

للأس 3/2 : $\nu^{3/2}$ وذلك عندما نحافظ على بقاء النسبة $\frac{a}{b}$ و $\frac{\lambda_o}{2b}$ ثابتة .



شكل (3 -20) : تغير $(k_{g_i} \cdot b^{3/2})$ بدلالة $\frac{\lambda_o}{\lambda_c}$ في النحاس عندما $\frac{a}{b}=0,5$.

ويشير الجدول (1) الى ميزات بعض نماذج أدلة موجة مستطيلة الشكل

الاستطاعة المقبولة MW	التخامد $dB/m.10^2$	مجال الترددات GHz	تردد القطع GHz	الابعاد الداخلية للدليل cm
2,2 - 3,2	3,67-2,75	2,6 - 3,95	2,08	7,21 x 3,4
1,4 - 2	6,93-4,8	3,95 - 5,85	3,155	4,755 x 2,215
0,6 - 0,7	9,57-7,67	5,85 - 8,2	4,285	3,485 x1,580

جدول (1) خواص بعض أنواع أدلة الموجة المستطيلة الشكل .

مسائل غير محلولة

١ – احسب معامل فرنل في الانعكاس عند ورود موجة مستقطبة من النوع N ترد من الهواء على عازل عند زاوية ورود تساوي زاوية بروستر $\Theta_1 = \Theta_B$. أوجد الانعكاسية عندما تساوي قرينة انكسار العازل 1,5 .

٢ – تنعكس موجة ضوئية ذات استقطاب p عن سطح معدني . أوجد صيغة R_p عندما تكون $\cos\Theta_2 \approx 1$. أوجد قيمة $\cos\Theta_1$ عندما يكون R_p أصغريا واحسب قيمة الزاوية وقيمة R_p اذا كان: $n' = 6 \; , \; n = 1$.

٣ – تسقط موجة كهرطيسية على سطح معدني بزاوية Θ_1. بين أنه في المجال الذي تصح فيه علاقة هاجن – روبنز فان العلاقة(59 – 3) تستبدل بكل من العلاقتين :

$$A_n = \frac{2\cos\Theta_1}{n'} \quad , \quad A_p = \frac{2}{n'\cos\Theta_1}$$

٤ – تنعكس موجة كهرطيسية على سطح معدني عندما تسقط عمودية عليه ، بين من العلاقة التي تعطي $\hat{r}_{12N}$ أن انزياح الطور للحقل الكهربائي $\vec{E}$ هو:

$$\alpha_N = \tan^{-1} \frac{2n'}{n^2 + n'^2 - 1}$$

تحقق أن $\alpha_N = \pi$ عندما تكون $\sigma = \infty$.

٥ – بفرض أن موجة راديوية نبضها الزاوي $\omega = 10^7 s^{-1}$ تنعكس عن سطح الارض عند ورودها ناظميا عليه . احسب انزياح الطور عند

الانعكاس من نتيجة المسالة السابقة مفترضا أن $\varepsilon_r = 9$ و
$\sigma = 10^{-4}\,(\Omega m)^{-1}$ لسطح الارض .

٦ ـ تنعكس موجة مستوية واردة على السطح الفاصل بين عازلين ، فاذا كانت الموجة الواردة واقعة في الوسط (1) وكان $n_2/n_1 = 1 + a$ حيث a مقدار ثابت برهن :

١ ـ ان معامل فرنل في الانعكاس من أجل الامواج المنعكسة التي يكون فيها الحقل الكهربائي $\vec{E}$ للموجة الواردة عموديا على مستوى الورود يساوي :

$$R_N = \left\{\frac{1 + a - B}{1 + a + B}\right\}^2$$

حيث : $B^2 = 1 - a(a + 2)\,tg^2\Theta_1$ ، Θ_1 هي زاوية الورود .

٢ ـ برهن أن $B = 0$ عند ورود الموجة بزاوية حرجة .

٧ ـ تسقط موجة كهرطيسية مستوية ناظميا على حائط مصنوع من مادة عازلة ، سماحيته النسبية $\varepsilon_r = 1,25$ و نفوذيته النسبية $\mu_r = 1$ وذلك عند تردد معين للموجة الكهرطيسية ،
واذا كانت سعة الحقل الكهربائي لهذه الموجة في الهواء هي :
$E_{oi} = 15\ \mu V/m$ وسعة الحقل الكهربائي للموجة النافذة هي :

$$E_{ot} = \frac{2}{n + 1}\,E_{oi}$$

احسب :

١ ـ سعة الحقل المغناطيسي H_{oi} للموجة الواردة .

٢ ـ سعة الموجة النافذة E_{ot}

٣ ـ ممانعة الحائط للموجة الكهرطيسية .

٤ ـ سعة الحقل المغناطيسي للموجة النافذة H_{ot} .

٨ ـ تسقط موجة كهرطيسية ناظميا على وجه مصقول من الالماس قرينة انكساره 2,417 ، احسب :

١ ـ نسبة سعة الحقل الكهربائي للموجة المنعكسة الى سعة الحقل الكهربائي للموجة الواردة .

٢ ـ الشدة المنعكسة .

٩ ـ موجة كهرطيسية سرعتها الطورية V تكون تابعة لطول الموجة والتابع الذي يصف هذه العلاقة هو من الشكل: $V = Cf(\xi)$

حيث $\xi = \lambda/b$ ، b : ثابت مناسب ،والمطلوب :

١ ـ أثبت أن : $\lambda dV/d\lambda = C\xi df/d\xi$

٢ ـ اعتماد على العلاقة التي تعطي السرعة المجموعية $V_g = V - \lambda dV/d\lambda$ بين أن :

$$VV_g = C^2(f^2 - f\xi df/d\xi)$$

٣ ـ لكي تتحقق العلاقة: $VV_g = C^2$ أثبت أن V يجب أن يساوي :

$$V = C\sqrt{1 + (\lambda/b)^2}$$

٤ ـ اذا كان λ_o هو طول الموجة في الخلاء أثبت أن :

$$V = C/\sqrt{1 - (\lambda_o/b)^2}$$

١٠ ـ ان الحل العام للمعادلة (3 - 140) بعد اعتبار الشروط الحدية المناسبة لتابع الحقل هو من الشكل :

$$H_z = A \sin(\frac{m\pi x}{a}) \cdot \sin(\frac{n\pi y}{b}) \cos(\omega t - k_z z)$$

حيث A ثابتة تمثل مقدار حقيقي . برهن أن :

$$\frac{1}{\lambda_c^2} = \frac{1}{\lambda_o^2} - \frac{1}{\lambda_g^2} = \left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2$$

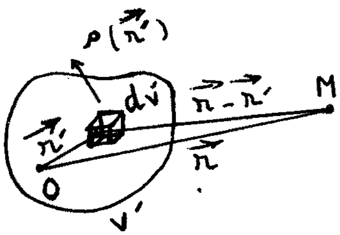
حيث λ_c هو طول موجة القطع ، m و n أعداد صحيحة . والعلاقة الاخيرة صحيحة أيضا للموجة من النوع TM.

الفصل الرابع

متعددات الاقطاب

4 - 1 - متعددات الاقطاب الكهربائية (حالة شحنات غير متحركة):

تنشأ الحقول الكهربائية الساكنة عن شحنات كهربائية ساكنة، ومن الطرق المتبعة في حساب هذه الحقول هي معرفة الكمون الكهراكدي لهذه الشحنات المولدة للحقل . ان التأثير المتبادل بين الشحنات الساكنة يمكن وصفه على أساس تصورات التأثير عن بعد ومن أجل ذلك نعتبر توزعا مستمرا ومحدودا للشحنات $\rho(\vec{r}')$ ولنبحث عن الكمون $\varphi(\vec{r})$ الناجم عن هذا التوزع وذلك في نقطة بعيدة $M(x_1, x_2, x_3)$ كما هو واضح في الشكل (1 - 4).



الشكل (1 - 4)

فمن أجل حساب الكمون $\varphi(\vec{r})$ نمدد في البداية الكمون الناشيء عن الشحنة العنصرية $dq = \rho(\vec{r}')\,dv'$ التي تولد عند النقطة $M(\vec{r})$ الكمون :

$$d\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}')\,dv'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad (4-1)$$

ان هذه العلاقة تمثل الكمون المتولد عن الشحنة النقطية dq أما الكمون الكلي عند النقطة $M(x_1, x_2, x_3)$ والناجم عن مختلف الشحنات

العنصرية الموجودة في التوزع $\rho(\vec{r}')$ فيعطى بالعلاقة :

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')\,dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \qquad (4-2)$$

يفرض أن $\vec{r} >> \vec{r}'$ فانه يمكن نشر هذا الكمون على شكل سلسلة تايلور أي يمكن نشر التابع $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ حول النقطة $\vec{r}' = 0$ وبنشر هذا التابع ثم تعويضه في العلاقة (2 - 4) نحصل على متعددات الاقطاب الكهربائية (أحادي القطب الكهربائي ، ثنائي القطب الكهربائي ،رباعي القطب ....الخ).

1 ـ 1 ـ 4 ـ نشر تابع الكمون ـ الحقل المتولد عن ثنائي القطب :

ان نشر التابع $f(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ حسب سلسلة تايلور يعطى بالعلاقة التالية :

$$f(\vec{r}, \vec{r}') = f(\vec{r}')\Big|_{\vec{r}'=0} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_i}\Big|_{\vec{r}'=0} x_i' + $$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{r})\Big|_{\vec{r}'=0}\right) x_i' x_j' + \ldots.$$

وبالتالي يمكن أن نكتب النشر للتابع $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ بالصيغة التحليلية التالية :

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} - \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r}\right) x_i' +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{r}\right) x_i' x_j' - \ldots \qquad (4-3)$$

ويمكن للطالب أن يتأكد بسهولة من أنه :

$$1-f(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=0} = \frac{1}{\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2}}\Big|_{\vec{r}'=0}$$

$$= \frac{1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = \frac{1}{r}$$

$$2-\ \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_1}\Big|_{\vec{r}'=0} = \frac{-(x_i - x_i')}{(\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2})^3}\Big|_{\vec{r}'=0}$$

$$= \frac{-x_i}{(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2})^3} = \frac{-x_i}{r^3}$$

$$3-\ \frac{\partial 2f(\vec{r}')}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{\vec{r}'=0} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{(x_j - x_j')}{(\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2})^3}\Big|_{\vec{r}'=0}$$

$$=\Big\{\frac{3(x_i - x_i')(x_j - x_j')}{(\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2})^5}$$

$$-\frac{1.\delta_{ij}}{(\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2})^3}\Big\}\Big|_{\vec{r}'=0}$$

$$= \frac{3x_ix_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}$$

حيث δ_{ij} يسمى رمز كرونيكر ويعرف كما هو معهود كمايلي :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{عندما} \quad i = j \\ 0 & \text{عندما} \quad i \neq j \end{cases} \quad \text{حيث} \quad i,j = 1,2,3,\ldots$$

والآن لنعوض العلاقة (3 - 4) بالعلاقة (2 - 4) فنحصل على عبـــارة الكمون من أجل $\vec{r} >> \vec{r}'$:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{v'}\rho(\vec{r}')\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_{v'}\rho(\vec{r}')\{\frac{1}{r} +$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i x_i'}{r^3} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}\frac{(3x_i x_j - r^2\delta_{ij})x_i' x_j'}{r^5} - \ldots\}dv'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r} + \frac{\vec{r}.\vec{p}}{r^3} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{(3x_i x_j - r^2\delta_{ij})}{r^5}\int_{v'}$$

$$\rho(\vec{r}')x_i'.x_j'.dv' - \ldots. \qquad (4-4)$$

وللتسهيل يمكن اعادة صياغة الحد الثالث وذلك ب...

تساوي الصفر :

$$\frac{1}{2.3}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{(3x_i x_j - r^2\delta_{ij})}{r^5}\int_{v'}\rho(\vec{r}')(3x_i' x_j' - r'^2\delta_{ij})dv' +$$

$$\frac{1}{2.3}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{(3x_i x_j - r^2\delta_{ij})}{r^5}\int_{v'}\rho(\vec{r}')r'^2\delta_{ij}dv'$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{i,j}\frac{(3x_i x_j - r^2\delta_{ij})}{r^5}\int_{v'}\rho(\vec{r}')(3x_i' x_j' - r'^2\delta_{ij})dv' +$$

$$+\frac{1}{6}\sum_i \frac{(3x_i^2-r^2)}{r^5}\int_{v'}\rho(\vec{r}')\,r'^2 dv' = \frac{1}{6}\sum_{ij}\frac{(3x_i x_j - r^2\delta_{ij})}{r^5}\phi_{ij} \tag{4-5}$$

لأن :

$$\frac{1}{6}\left(\sum_i(3x_i^2-r^2)\right)\int_{v'}\frac{\rho(\vec{r}')\,r'^2 dv'}{r^5} = \frac{1}{6}\left(3r^2-3r^2\frac{\int_{v'}\rho(\vec{r}')\,r'^2 dv'}{r^5}\right)=0$$

حيث اعتبرنا أن :

$$\phi_{ij} = \int_{v'}\rho(\vec{r}')\,(3x_i' x_j' - r'^2\delta_{ij})\,dv' \tag{4-6}$$

وبالنتيجة تصبح علاقة الكمون على الشكل التالي :

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} + \frac{1}{6}\sum_{i,j}\left(\frac{3x_i x_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}\right)\phi_{ij} + \dots\right] \tag{4-7}$$

ان الحد الاول من العلاقة (7- 4) يوافق التقريب الذي من أجله اعتبرت الشحنة بأكملها متجمعة في نقطة واحدة ($\vec{r}' = 0$) أي في مركز الاحداثيات، أي بمعنى آخر ان هذا الحد يوافق التعويض عن كامل جملة الشحنات بشحنة نقطية موجودة في نقطة الأصل ويدعى هذا الحد بالكمون [illegible] الرموز [illegible] نقطة [illegible] موجودة [illegible]

أما الحد الثاني من العلاقة [illegible]

[illegible] (4-8)

يمثل هذه العلاقة كمون ثنائي القطب الكهربائي حيث يتناسب طرداً مع المقدار $\frac{1}{r^3}$ من أجل النقاط البعيدة ،لذلك يتناقص بشدة أكبر من تناقص كمون كولون($\varphi \sim \frac{1}{r}$).يدعى المقدار $\vec{p}$ بعزم ثنائي

القطب ويعرف على الشكل :

$$\vec{p} = \int_{v'} \rho(\vec{r}')\,\vec{r}'\,dv' \tag{4-9}$$

الحد الثالث من السلسلة (7-4) يساوي الى :

$$\varphi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{6}\sum_{i,j}\frac{(3x_i x_j - r^2\delta_{ij})}{r^5}\,\phi_{ij}\right] \tag{4-10}$$

يحوي هذا الحد على عزم رباعي الاقطاب ϕ_{ij} والذي يعرف بالعلاقة :

$$\phi_{ij} = \int_{v'} (3x'_i x'_j - r'^2\delta_{ij})\,\rho(\vec{r}')\,dv' \tag{4-11}$$

والجدير بالذكر أن رباعي القطب ϕ_{ij} ينجمعن الجمل اللامتناظرة كرويا وسوف نحدد فيما بعد كيف يكون هذا العزم مميزا لتوزع غير كروي .

نستطيع الآن بسهولة حساب الحقل الكهربائي لثنائي القطب من العلاقة الاساسية بين الحقل والكمون :

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = -\overrightarrow{grad}\;\varphi_1(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left\{(\vec{p}.\vec{r})\,\overrightarrow{grad}\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3}\overrightarrow{grad}(\vec{p}.\vec{r})\right\}$$

ولكن :

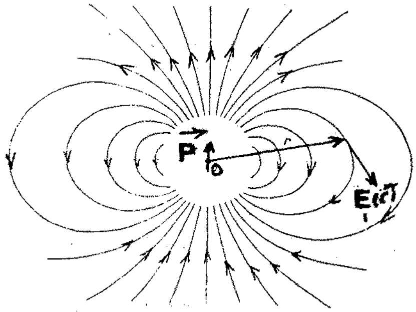
$$\overrightarrow{grad}(\vec{p}.\vec{r}) = \vec{p} \quad , \quad \overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -3\,\frac{1}{r^4}\,\frac{\vec{r}}{r}$$

والحقل الكهربائي $\vec{E}_1(\vec{r})$ يصبح على الشكل التالي :

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o r^3}\{3(\vec{p}.\vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}\} \tag{4-12}$$

حيث $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$.

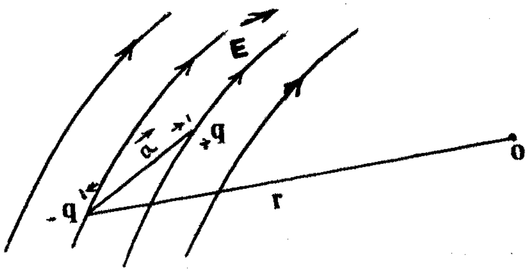
نلاحظ من العلاقة (4-12) أن الحقل الكهربائي المتشكل من ثنائي القطب يتناسب عكسا مع (r^3) وهذا يعني أن شدة الحقل الكهربائي الناتج عن ثنائي قطب أصغر من شدة الحقل الكهراكدي $\vec{E}_o(\vec{r})$ $(\vec{E}_o(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^2})$ ونلاحظ أيضا أن الحقل ($\vec{E}_1(\vec{r})$) يتعلق بالزاوية التي يصنعها عزم ثنائي القطب $\vec{p}$ مع الشعاع $\vec{r}$ ويكون له الشكل التالي (الشكل (2 - 4)).



الشكل (2 - 4) يمثل خطوط الحقل الكهربائي $\vec{E}_1(\vec{r})$ لثنائي القطب الكهربائي.

2 ـ 4 ـ ثنائي القطب في حقل كهراكدي خارجي متجانس :

سوف نعالج في هذه الفقرة التأثير المتبادل بين ثنائي قطب وحقل كهراكدي خارجي $\vec{E}(\vec{r})$ (انظر الشكل (3 - 4)):



الشكل (3 - 4) يمثل ثنائي القطب في حقل كهراكدي خارجي E(r)

وسوف نحسب القوة المؤثرة على هذا الثنائي ثم ندرس عزم الدوران والطاقة.

1 ـ 2 ـ 4 ـ القوة المؤثرة على ثنائي القطب :

نفرض أن الثنائي يملك اتجاها محددا ولنحسب القوة المطبقة عليه والتي تساوي الى مجموع قوى كولون على شحنتي الثنائي $+q$ و $-q$:

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r} + \vec{a}) - q\vec{E}(\vec{r}) \tag{4-13}$$

حيث $\vec{r} >> a$.

بنشر المقدار $\vec{E}(\vec{r} + \vec{a})$ وفق سلسلة تايلور مكتفين بالحدين الاولين للنشر نجد :

$$\vec{E}(\vec{r} + \vec{a}) = \vec{E}(\vec{r}) + (\vec{a}\ \overrightarrow{grad})\vec{E}(\vec{r}) \tag{4-14}$$

نعوض هذه العلاقة في (13 - 4) فنجد :

$$\vec{F} = q\vec{a}\ \overrightarrow{grad}\ \vec{E}(\vec{r}) = \vec{p}\ \overrightarrow{grad}\ \vec{E}(\vec{r}) \tag{4-15}$$

تدل هذه العلاقة على أن الثنائي الموجود في حقل كهربائي منتظم لايخضع لاية قوة لأن :

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0$$

2 ـ 2 ـ 4 ـ عزم الدوران المطبق على الثنائي :

يمكن بالمثل ايجاد عزم الدوران بال[illegible] ـدأ [illegible]

فنكتب :

[illegible] $\vec{E}(\vec{r} + \vec{a})]$

[illegible] $\wedge\ \vec{E}(\vec{r})]$ (4-16)

وبنفس الطريقة ننشر $\vec{E}(\vec{r} + \vec{a})$ [illegible]

في العلاقة (16 ـ 4) فنجد :

$$\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E} + \vec{r} \wedge \vec{p}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E} + \vec{r} \wedge \vec{F} \qquad (4-17)$$

يتكون عزم الدوران المطبق على ثنائي القطب من الحد $\vec{r} \wedge \vec{E}$ الذي يساوي الصفر عندما يكون $\vec{E}$ منتظماً ولايبقى سوى الحد الاول الذي يحاول ادارة الثنائي بشكل موازٍ للحقل $\vec{E}$ وهذا متوقع لان الوضع $\vec{p}//\vec{E}$ هو وضع الطاقة الدنيا (وضع الاستقرار) .

3 ـ 2 ـ 4 ـ طاقة التأثير المتبادل بين ثنائي القطب وحقل كهربائي خارجي $\vec{E}(\vec{r})$:

ان طاقة التأثير المتبادل لشحنة نقطية q مع حقل كهربائي خارجي $\vec{E}(\vec{r})$ هي بالتعريف عمل القوة الخارجية الواجب بزلها لنقل الشحنة q من اللانهاية $(\varphi(\infty) = 0)$ الى الموضع r وتعطى بالعلاقة التالية :

$$W = q\varphi(\vec{r}) \qquad (4-18)$$

أما طاقة التأثير المتبادل لشحنتي الثنائي فتعطى بالعلاقة :

$$W_d = q\varphi(\vec{r} + \vec{a}) - q\varphi(\vec{r}) = q\vec{a}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi(\vec{r}) + \ldots$$

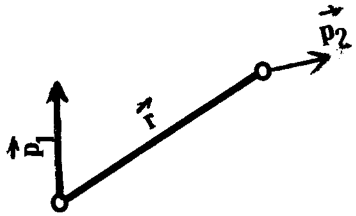
$$= -\vec{p}\ \vec{E} \qquad (4-19)$$

تأخذ W_d قيمتها الصغرى في وضع التوازن المستقر للثنائي أي عندما $\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{p}$ وتأخذ قيمتها العظمى في وضع التوازن غير المستقر أي عندما يكون $\vec{E} \uparrow\downarrow \vec{p}$. يعمل ثنائي القطب الكهربائي الموجود في حقل كهراكدي خارجي الى أخذ وضعية تكون فيها طاقة التأثير

المتبادلة صغرى .

4- 2 - 4 - طاقة التأثير المتبادل بين ثنائي قطب :

لنأخذ ثنائي قطب $\vec{p}_1$ و $\vec{p}_2$ تفصل بينهما مسافة $\vec{r}$ انظر الشكل (4 - 4).



الشكل (4 - 4) الطاقة المتبادلة بين ثنائي قطب .

استنادا الى العلاقتين (4 - 12) و (4 - 19) يمكن استنتاج طاقة التأثير المتبادل بين الثنائيين المفروضين فحسب العلاقة (4 - 19) تكون طاقة تأثير الحقل (E_1 الناتج عن ثنائي القطب الاول) في ثنائي القطب الثاني هي :

$$W_{12} = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(\vec{r}_2)$$

$$= \frac{1}{r^3}[\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3(\vec{p}_1\vec{e}_1)(\vec{p}_2\vec{e}_2)] \qquad (4-20)$$

نلاحظ أن طاقة التأثير المتبادل بين الثنائيين لاتتعلق فقط بالبعد $\vec{r}$ وانما تتعلق أيضا بالزاوية بين $\vec{p}_1$ و $\vec{p}_2$ وهذا النوع من القوى يختلف عن القوى المركزية (قوى كولون ،قوى الجاذبية $F \sim \frac{1}{r^2}$) التي تتعلق فقط بالبعد $\vec{r}$. تكون الجملة مستقرة اذا كانت طاقتها أصغر ما يمكن وهذا يحدث في حالة توازي $\vec{p}_1$ و $\vec{p}_2$ وتكون الجملة في طاقتها الاعظمية وبالتالي في حالة كوانتية غير مستقرة وذلك في حالة تعامد $\vec{p}_1$ مع $\vec{e}$ وتعامد $\vec{p}_2$ مع $\vec{e}$ وهذا

يتحقق ضد التوازي ، انظر الشكل (5 - 4) :

$W_{12} = +2W$	$\rightarrow$	$\leftarrow$	ضد التوازي
$W_{12} = -2W$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	توازي
$W_{12} = W$	$\uparrow$	$\uparrow$	توازي
$W_{12} = -W$	$\downarrow$	$\uparrow$	ضد التوازي

شكل (5- 4) تمثيل وضع التوازي وضد التوازي لطاقة التأثير لجملة الثنائيين

ملاحظة :

تجد العلاقة (20- 4) تطبيقاتها الهامة في الفيزياء الذرية والنووية ، فتبادل التأثير بين البروتونات والنترونات يخضع الى نفس القانون ولكن بتبديل $\vec{p}$ بـ $\vec{s}$ حيث $\vec{s}$ سبين كل من البروتون والنترون ، وهكذا نجد أن القوى النووية تتعلق باتجاهات السبين فالديتيريوم (جملة مؤلفة من برتون + نترون) يشكل جملة مستقرة فقط اذا كان كل من سبين البروتون والنترون متوازيين $s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ وتكون طاقة ارتباط الديتريوم في هذه الحالة أصغر مايمكن (جملة مستقرة) ولذلك فان الديتيريوم لايوجد في الطبيعة بشكل مستقر عندما يكون السبينين في حالة ضد التوازي أي :

$$s = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

3 – 4 – رباعي الاقطاب الكهربائي وخواصه :

وجدنا أن الحد الثالث من العلاقة (3 – 4) يدعى بعزم " رباعي الاقطاب الكهربائي " وهو عبارة عن جملة مؤلفة من ثنائيين متساويين عزم كل منهما $\vec{p}$ ويختلفان عن بعضهما بالاتجاه ويمثل عزم رباعي الاقطاب رياضيا بتنسور من المرتبة الثانية :

$$\phi_{ij} = \int_{v'} \rho(\vec{r}\,') (3x_i' x_j' - r'^2 \delta_{ij}) dv'$$

ومركباته الستة تعطى بالشكل التالي :

$$\phi_{11} = \int_{v'} \rho(\vec{r}\,') (3x_1^2 - r'^2) dv'$$

$$\phi_{22} = \int_{v'} \rho(\vec{r}\,') (3x_2^2 - r'^2) dv'$$

$$\phi_{33} = \int_{v'} \rho(\vec{r}\,') (3x_3^2 - r'^2) dv'$$

$$\phi_{12} = \int_{v'} \rho(\vec{r}\,') (3x_1 x_2) dv' = \phi_{21}$$

$$\phi_{13} = \int_{v'} \rho(\vec{r}\,') (3x_1 x_3) dv' = \phi_{31}$$

$$\phi_{23} = \int_{v'} \rho(\vec{r}\,') (3x_2 x_3) dv' = \phi_{32}$$

نلاحظ أن الكميات الستة $\phi_{12}, \phi_{22}, \phi_{33}, \phi_{11}, \phi_{13}, \phi_{23}$ تتوقف قيمتها فقط على توزع الشحنات في الجملة وليس على المكان الذي يعين فيه الكمون . ان مركبات ϕ_{ij} التسعة تشكل مصفوفة (3 X 3)

تكون فيها مجموع عناصر القطر الرئيسي تساوي الصفر :

$$\phi_{11}+\phi_{22}+\phi_{33}=\int_{v'}\rho(\vec{r}')[3(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2)-3r'^2]dv'=0$$

ذكرنا سابقا أن رباعي القطب الكهربائي يعبر عن مدى اختلاف توزع الشحنات في الجملة عن التناظر الكروي أي لايظهر حد الرباعي في نشر الكمون الا في حالة توزع الشحنات توزعا غير كروي ولنحدد الآن كيف يكون عزم الرباعي مميزا لتوزع غير كروي .

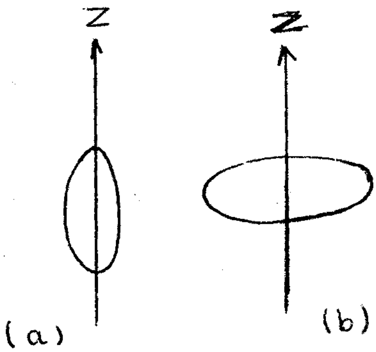
اذا كانت الشحنات موزعة توزعا كرويا متناظرا فان:

$$\frac{r'^2}{3}=x'^2=y'^2=z'^2 \Longrightarrow r'^2=x^2+y^2+z^2=3z^2$$

وهذا يعني حسب العلاقة (11 - 4) أن :

$$\phi_{ij}=0$$

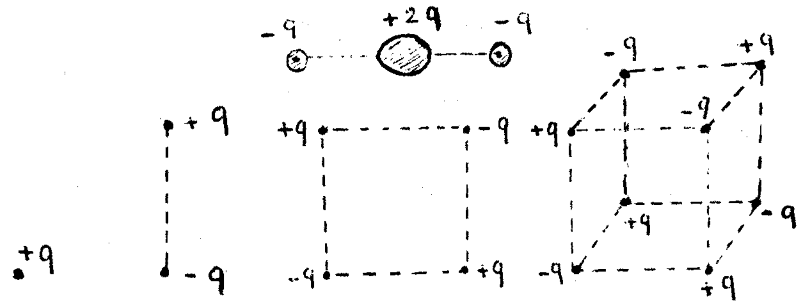
ان النوى التي لها عزم رباعي أقطاب كهربائي معدوم هي كروية وهذا ماأثبتته التجربة فجملة ذرة الاوكسجين 16 يكون لا عزم رباعي اقطاب معدوم. يمكن أيضا عن طريق رباعي الاقطاب الكهربائي معرفة شكل النواة ، فقد تبين أن النوى الثقيلة في الطبيعة توجد على شكلين : اما متطاولة (كالسيجار) واما مفلطحة وهذين الشكلين يتعلقان فقط باشارة ϕ_{ij} كونها موجبة أو سالبة ، فاذا كان $\phi_{ij}>0 \Longrightarrow r^2<3z^2$ وتكون النواة ممتدة على المحور z بشكل سيجار ،شكل (4 - 6.a) أما اذا كانت $\phi_{ij}<0 \Longrightarrow r^2>3z^2$ تكون النواة متباعدة عن المحور z (مفلطحة) شكل (4 - 6 .b)



شكل (6 - 4) تمثيل شكل النواة في حالة كون ϕ_{ij} موجبة (a) أو سالبة (b).

ملاحظــــــة :

يمكن أن نتصور نماذج مختلفة لمتعددات الاقطاب الكهربائية فأبسط نموذج لاحادي القطب هو شحنة نقطية . أما ثنائي القطب فهـــو جملة مؤلفة من شحنتين متساويتين بالقيمة ومختلفتين بالاشارة وأبسط نموذج لرباعي الاقطاب يمثل بأربع شحنات متوضعة على رؤوس متـــوازي الاضلاع على أن تكون هذه الشحنات متساوية بالقيم ومتناوبة بالاشارة عند الدوران على رؤوس متوازي الاضلاع وهكذا ، انظر الشكل (7- 4).



الشكل (7 - 4) متعددات الاقطاب الكهربائيـــــــــــــــــــــــــــة

4 - 4 - العزوم المغناطيسية المتعددة الاقطـــاب :

تولد التيارات المستقرة $\vec{J}(\vec{r})$ (أي المستقلة عن الزمن) حقولا مغناطيسية ساكنة ,ولحساب هذه الحقول نقوم بتعيين الكمـــــون الشعاعي $\vec{A}(\vec{r})$ الذي يعطى بالصيغة التالية :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{v'}\frac{\vec{J}(\vec{r}')\,dv'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{4-21}$$

عندما يكون $\vec{r} >> \vec{r}'$ يمكن نشر التابع $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ وفق سلسلة تايلور :

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r}|} - \vec{r}'\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\vec{r}'\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{r}'\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\frac{1}{r} - \dots$$

لنعوض هذا النشر في العلاقة (21 - 4) فنجد :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{v'} dv'\vec{J}(\vec{r})\left\{\frac{1}{|\vec{r}|} - \vec{r}'\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\vec{r}'\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{r}'\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\frac{1}{r} - \dots\right\}$$

$$= \vec{A}^{o}(\vec{r}) + \vec{A}^{(1)}(\vec{r}) + \vec{A}^{(2)}(\vec{r}) + \dots$$

1 — 4 — 4 — أحادي القطب المغناطيسي :

ان الحد الاول من النشر السابق معدوم ،أي :

$$\vec{A}^{o}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}|}\int_{v'}\vec{J}(\vec{r}')\,dv' = 0$$

لأن :

$$\int_{v'}(\vec{r}\cdot\operatorname{div}\vec{J}) = 0 = \int_{v'}\operatorname{div}(\vec{r}\cdot\vec{J})\,dv' - \int_{v'}\vec{J}\,dv'$$

$$= \oint_{S}(\vec{r}\cdot\vec{J})\,d\vec{s} - \int_{V}\vec{J}\,dv'$$

حيث حولنا التكامل الحجمي الى تكامل سطحي وذلك حسب دعوى غوص استروغرادسكي وعندما يكون السطح المحيط بالحجم v' لانهائي فان

التكامل السطحي ينعدم لأن $\vec{J}$ في اللانهاية تكون معدومة وبالتالي

$$\int_{v'} \vec{J}\, dv' = 0$$

أي أن الحد :

$$\vec{A}^{o}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}|} \int_{v'} \vec{J}(\vec{r}\,')\, dv' = 0 \qquad (4-22)$$

وكما نلاحظ فان الكمون المتجـه $\vec{A}^{o}(\vec{r})$ الناجم عن أحادي قطب مغناطيسي يساوي الصفر وهذا يتفق مع ماذكرناه في الفصل الاول من أن أحادي القطب المغناطيسي غير موجود في الطبيعة .

2 – 4 – 4 – ثنائي القطب المغناطيسي :

لنأخذ الآن بعين الاعتبار الحد الثاني من النشر السابق :

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = \frac{-\mu_o}{4\pi} \int_{v'} dv' \vec{J}(\vec{r}\,')\, \vec{r}\,' \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \frac{1}{r}$$

وبما أن : $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ فانه ينتج :

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{v'} \vec{J}(\vec{r}\,')\, \vec{r}\,' \frac{\vec{r}}{r^3}\, dv' \qquad (4-23)$$

ان خطوط الحقل هي خطوط مغلقة لأن : $\vec{\nabla}.\vec{J} = 0$

فاذا كانت هذه الخطوط متجاورة بحيث تشكل انبوب حقلي يكون لدينا في هذه الحالة :

$$\vec{J}(\vec{r}\,)\, dv' = I\, d\vec{r}$$

حيث I شدة التيار في الانبوب و $d\vec{r}$ هو عنصر خطي على طول خط الحقل وبالتالي يكون لدينا من أجل هذا الانبوب :

$$dv' \vec{J}(\vec{r}\,')\, \vec{r}\,'.\vec{r} = I\, d\vec{r}\,'\, \vec{r}\,'.\vec{r}$$

ونستطيع الآن أن نجزئ الطرف الايمن كمايلي :

$$d\vec{r}'\,\vec{r}'.\vec{r} = \frac{1}{2}[d\vec{r}'.\vec{r}'.\vec{r} + \vec{r}'\,d\vec{r}'\,\vec{r}] + \frac{1}{2}[d\vec{r}'\,\vec{r}'.\vec{r} - \vec{r}'\,d\vec{r}'.\vec{r}]$$

ويمكن كتابة الحد الاول على الشكل التالي:

$$d\left[\frac{\vec{r}'\,\vec{r}'.\vec{r}}{2}\right]$$

والتكامل على خط حقل مغلق لهذا التفاضل الكلي يساوي الصفر ؛

أما الحد الثاني فحسب قاعدة التكامل بالتجزئة يمكن كتابته على الشكل التالي :

$$\frac{1}{2}\,\vec{r}\,\Lambda(d\vec{r}'\,\Lambda\,\vec{r}) = \frac{1}{2}(\vec{r}'\,\Lambda\,d\vec{r})\,\Lambda\,\vec{r}$$

وبالتالي نحصل على :

$$dv'\vec{J}(\vec{r}')\,\vec{r}'.\vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{r}'\,\Lambda\,\vec{J}(\vec{r}'))\,\Lambda\,\vec{r}$$

وبذلك يكون لدينا :

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{v'}(dv'\frac{1}{2}(\vec{r}'\,\Lambda\,\vec{J})\,\Lambda\,\vec{r}\,\frac{1}{r^3}$$

أو :

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}(\vec{\mu}\,\Lambda\frac{\vec{r}}{r^3}) = -\frac{\mu_o}{4\pi}[\vec{\mu}\,\Lambda(\vec{\nabla}.\frac{1}{|\vec{r}|})] \qquad (4-24)$$

حيث $\vec{\mu}$ يساوي :

$$\vec{\mu} = \int_{v'} dv'\frac{1}{2}[\vec{r}'\,\Lambda\,\vec{J}(\vec{r}')] \qquad (4-25)$$

يدعى $\vec{\mu}$ عزم ثنائي القطب المغناطيسي و $(\vec{r})\,\vec{A}^{(1)}$ الكمون المتجه لثنائي القطب المغناطيسي . يمكن هنا بسهولة حساب الحقل المغناطيسي المتولد عن ثنائي القطب المغناطيسي حيث ننطلق من العلاقة $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A}$ ونعوض عن قيمة $\vec{A}$ من العلاقة :(24 - 4)فنجد :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\ \vec{A} = \overrightarrow{rot}(\vec{\nabla}\ \frac{1}{|\vec{r}|}\ \Lambda\ \vec{\mu}).\frac{\mu_o}{4\pi}$$

$$= \frac{\mu_o}{4\pi}[(\mu.\vec{\nabla})\vec{\nabla}\ \frac{1}{|\vec{r}|} - \vec{\mu}\ \nabla^2\ \frac{1}{|\vec{r}|}]$$

$$= -\frac{\mu_o}{4\pi}(\vec{\mu}.\vec{\nabla})\frac{\vec{r}}{r^3} = -\{\frac{\vec{\mu}}{r^3} - \frac{3\vec{r}}{r^4}(\vec{\mu}\ \vec{\nabla}\ r)\}\frac{\mu_o}{4\pi}$$

$$= \frac{\mu_o}{4\pi}(-\frac{\vec{\mu}}{r^3} + \frac{3(\vec{\mu}.\vec{r})\vec{r}}{r^5}) \qquad (4-26)$$

ملاحظة (١):

يمكن الاستمرار في المحاكمة نفسها واستنتاج علاقة رباعي الاقطاب المغناطيسي والكمون $\vec{A}^{(2)}(\vec{r})$ نترك هذه المحاكمة جانبا لعدم أهمية رباعي القطب المغناطيسي .

ملاحظة (٢):

ان الجسيمات الاساسية التي لها سبين تملك ثنائي قطب مغناطيسي أو اختصارا نقول عزم مغناطيسي $\vec{\mu}$ مرتبط مع سبين هذه الجسيمات . فالالكترون مثلا يملك سبين مقداره $\frac{1}{2}\hbar$ يرتبط بعزم مغناطيسي $\vec{\mu}$ وفقا للعلاقة التالية :

$$\vec{\mu}_e = g\hbar\ \vec{s} = \frac{e\hbar}{m_e}\ \vec{s}$$

وبما أن لسبين الالكترون احدى القيمتين $+\frac{1}{2}$ أو $-\frac{1}{2}$ فانه يكون :

$$\vec{\mu}_e = \frac{e\hbar}{2m_e} = -\vec{\mu}_{13} \qquad \text{عندما} \qquad s = +\frac{1}{2}$$

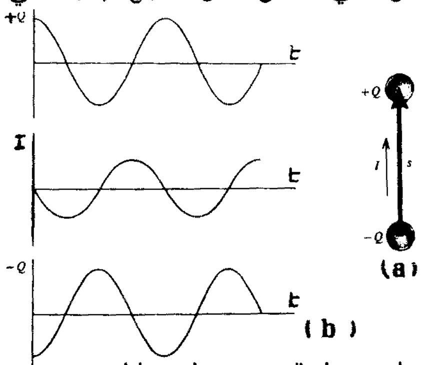
$$\vec{\mu}_e = \frac{-e\hbar}{2m_e} = \vec{\mu}_{13} \qquad \text{عندما} \qquad s = -\frac{1}{2}$$

حيث يدعى المقدار $\vec{\mu}_B = \dfrac{e\hbar}{2m_e}$ بمغنتون بور.

ان السبين والعزم المغناطيسي للالكترون قد تم قياسهما تجريبيا . وبنفس الطريقة نبين أنه لجميع الجسيمات التي تملك سبين يكون لها عزم مغناطيسي $\vec{\mu}$ ومن ثم يمكن تعميم هذا على النواة أيضا فكل نواة لها سبين غير معدوم تملك عزما مغناطيسيا $\vec{\mu}$.

5 ـ 4 ـ الكمون المتأخر المتولد عن ثنائي قطب كهربائي مهتز:

لنتصور لدينا ثنائي قطب كهربائي عبارة عن تابع جيبي للزمن كما هو موضح في الشكل (4 - 8).



شكل (4 - 8) (a) تمثل ثنائي قطب كهربائي مهتز. الشحنة الكلية معدومة أما الشعاع $\vec{a}$ متجه من $-q$ الى $+q$. (b) الشحنات و التيار عبارة عن توابع للزمن.

يمكن كتابة الشحنة على الشكل:

$$q = q_o e^{i\omega t} \tag{4-27}$$

وكتابة عزم ثنائي القطب على الشكل :

$$\vec{p} = q_o e^{i\omega t}.\vec{a} = \vec{p}_o e^{i\omega t} \tag{4-28}$$

حيث $\vec{p}_o = q_o.\vec{a}$ هو العزم في اللحظة $t = 0$.

لنتصور الآن أنه يوجد لدينا زوج من الكرات تمثل الاولى شحنة موجبة والثانية شحنة سالبة وموصولتين فيما بينهما بواسطة سلك رفيع جدا ذو مقاومة مهملة . ان التيار I الذي يجري ضمن السلك سيعطى بالعلاقة التالية :

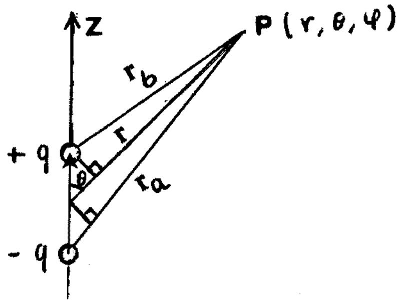
$$I = \frac{dq}{dt} = i\omega q_o e^{i\omega t} = I_o e^{i\omega t} \tag{4-29}$$

حيث :

$$I_o = i\omega q_o \tag{4-30}$$

ان الكمون الناتج عن ثنائي القطب المهتز في اللحظة t في نقطة من الفراغ $p(r , \theta , \varphi)$ تبعد عن الشحنة (+q) بالمسافة r_b وعن الشحنة -q بالمسافة r_a ، الشكل (9 - 4) يساوي :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{q_o \exp\, i\omega\left(t-\frac{r_{(b)}}{c}\right)}{r_b} - \frac{q_o \exp\, i\omega\left(t-\frac{r_{(a)}}{c}\right)}{r_a}\right] \tag{4-31}$$



الشكل (9 - 4) ثنائي القطب الكهربائي مع النقطة p التي تدرس عندها الكمون السلمي φ .

وكما نلاحظ أن الشحنتين +q و -q تولدان كمونين مختلفين بالقيمة والطور، مختلف بالقيمة بسبب وجود r_o في مخرج علاقة الكمون المتولد عن -q ووجود r_b في مخرج علاقة الكمون المتولد عن + q : $r_a \neq r_b$. هذا من جهة ومن جهة أخرى يأتي الاختلاف في الطور من اختلاف الحدين $\frac{r_a}{c}$ و $\frac{r_b}{c}$ في التابعين الاسيين ، العلاقة (31- 4) .

عندما يكون $a \ll r$ فان :

$$r_a \approx r + \frac{a}{2}\cos\theta \tag{4-32}$$

$$r_b \approx r - \frac{a}{2}\cos\theta \tag{4-33}$$

$$\omega\left(t - \frac{r_b}{c}\right) \approx \omega\left(t - \frac{r}{c} + \frac{a\cos\theta}{2c}\right)$$

$$\approx \left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{a}{2\lambdabar}\cos\theta \tag{4-34}$$

حيث : $\lambdabar = \dfrac{\lambda}{2\pi}$

واذا أخذنا بعين الاعتبار التقريب السابق فان علاقة الكمون تصبح على الشكل :

$$\varphi \approx \frac{q_o}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{\exp i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\left[\frac{\exp\left(i\frac{a}{2\lambdabar}\cos\theta\right)}{1-\frac{a}{2r}\cos\theta} - \frac{\exp\left(-i\frac{a}{2\lambdabar}\cos\theta\right)}{1+\frac{a}{2r}\cos\theta}\right] \tag{4-35}$$

واذا نشرنا الحدود الموجودة بين القوسين المتوسطين على شكل سلسلة واكتفينا بالحدود حتى المرتبة الثانية لـ $\frac{a}{r}$ و $\frac{a}{\lambdabar}$ فان العلاقة (4 -35) تصبح على الشكل :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{p_o\exp i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r\lambdabar}\left(\frac{\lambdabar}{r} + i\right)\cos\theta \tag{4-36}$$

حيث بدلنا قيمة $q_o a$ بـ p_o وافترضنا أيضا أن المقدار a صغير جدا بالنسبة لـ r و $\lambdabar$ أي $a \ll \lambdabar$ و $a \ll r$.

يمكن الحصول على العلاقة (4 - 8) التي تعطي الكمون السلمي المتولد عن ثنائي قطب ساكن اذا وضعنا $\omega = 0$ و $\lambdabar \to \infty$ فنجد أن :

$$\varphi = \frac{aq}{4\pi\varepsilon_o r^2}\cos\theta \tag{4-37}$$

وهي نفس معادلة الكمون التي حصلنا عليها سابقا مع ملاحظة أن $\frac{\vec{r}}{r}$ يمثل متجهة الواحدة على r و θ هي الزاوية بين $\vec{p}$ و $\vec{r}$.

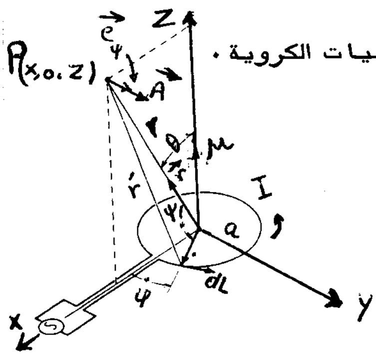
6 ـ 4 ـ الكمون المتجه الناجم عن ثنائي قطب مغناطيسي مهتز :

يمثل الشكل (10- 4) ثنائي قطب مغناطيسي مغذى بواسطة تيار متناوب من الشكل :

$$I = I_o \exp i\omega t$$

يعطى الكمون المتجه الناتج عن ثنائي القطب المغناطيسي بالعلاقة :

$$\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I_o \exp i\omega(t - \frac{r'}{c})}{r'} a \cos\varphi \, d\varphi \, \vec{e}_\varphi \qquad (4-38)$$



الشكل (10 - 4) : ثنائي قطب مغناطيسي مهتز .

$\vec{e}_\varphi$ متجهة الواحدة السمتية في الاحداثيات الكروية . ان $\vec{A}$ عبارة عن مجموع $d\vec{A}$ ناتج عن عناصر التيار للحلقة ،وكل عنصر $I\overrightarrow{d\ell}$ يتأخر بالمقدار r'/c عن العنصر المقابل له وبالتالي يمكن اعادة صياغة علاقة الكمون بالشكل التالي :

$$\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} a I_o \exp i\omega(t - \frac{r}{c}) \int_0^{2\pi} \frac{\exp i(\frac{r - r'}{\lambda})}{r'} \cos d\varphi \; \vec{e}_\varphi \qquad (4-39)$$

اذا كانت دارة التيار صغيرة أمام λ فان: $\lambda >> |r - r'|$ فانه يكون :

$$\exp i\left(\frac{r - r'}{\lambda}\right) \approx 1 + i\,\frac{r - r'}{\lambda} \qquad (4-40)$$

وعلاقة الكمون المتجه تصبح على الشكل :

$$\vec{A} = \frac{\mu_o a I_o \exp i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r}{r'} + i\frac{r}{\lambda}\left(\frac{r}{r'} - 1\right)\right] \cos\varphi\, d\varphi\ \vec{e}_\varphi \qquad (4-41)$$

وعندما تكون $a << r$ يمكن أن نكتب $\frac{r}{r'}$ على الشكل :

$$\frac{r}{r'} \approx 1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{ax}{r^2} \cos\varphi \qquad (4-42)$$

باجراء التكامل بوضع $r \sin\Theta = x$ نحصل على :

$$\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I_o \pi a^2 \exp i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r\lambda}\left(\frac{\lambda}{r} + i\right) \sin\Theta\ \vec{e}_\varphi \qquad (4-43)$$

وبفرض أن $\mu_o = \pi a^2 I_o = s I_o$ يكون:

$$\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\mu_o \exp i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r\lambda}\left(\frac{\lambda}{r} + i\right) \sin\Theta\ \vec{e}_\varphi \qquad (4-44)$$

$$= \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\vec{\mu}_o \wedge \vec{r}_1}{r\lambda}\left(\frac{\lambda}{r} + i\right) \exp i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \qquad (4-45)$$

حيث يمثل المقدار $\vec{\mu}_o$ العزم المغناطيسي لحلقة التيار .

عند انعدام التردد : $\omega = 0 \Longleftarrow \lambda \to \infty$ وستأخذ علاقة الكمون المتجه الشكل:

$$\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \wedge \vec{r}_1}{r^2} \qquad (4-46)$$

وهي نفس العلاقة التي مرت معنا سابقا .

7 – 4 – تطبيقات متعددات الاقطاب الكهربائية والمغناطيسية في الفيزياء الذرية والنووية :

تكمن التطبيقات الهامة لمتعددات الاقطاب الكهربائية والمغناطيسية في استخدام هذه المتعددات في الفيزياء الذرية والنووية لتفسير ودراسة خواص الطيوف الذرية والنووية (أشعة غاما) الاصدار والامتصاص الذي يحدث للجمل الذرية وكذلك في حالة تحلل النوى أو في حالة التخلص من طاقة الاثارة . ان اصدار النوى لاشعة غاما يستند الى تشكل متعددات الاقطاب الكهربائية والمغناطيسية على حد سواء في الغمامة الالكترونية للذرة أو داخل النوى وبالتالي لكي تعود الجملة الى وضعها المتوازن والمستقر (عدم التوازن والاستقرار ناتجان عن تشكل متعددات الاقطاب) يجب أن تتخلص من هذه المتعددات باصدار اشعاعات كهرطيسية مرئية وفوق بنفسجية في حالة الجمل الذرية واشعاعات كهرطيسية من نوع أشعة غاما في حال الجمل النووية .

من أهم أشكال هذه الاشعاعات ، الاشعاع ثنائي القطب الكهربائي المرتبط بتغير عزم ثنائي القطب الكهربائي للجملة والمعطى بالعلاقة :

$$\vec{p} = \sum_i e_i \vec{r}_i \tag{4-47}$$

حيث e_i هي القيمة المطلقة لشحنة الالكترون، $\vec{r}_i$ يمثل نصف القطر الشعاعي للالكترون (i) بالنسبة لجملة المقارنة الساكنة . لنفرض أن هذا الالكترون أبعد عن وضع توازنه فسيقوم بحركة اهتزازية هارمونية والانزياح اللحظي يتعين بالعلاقة :

$$a = a_o \cos(\omega t + \varphi) \tag{4-48}$$

حيث φ هي الطور البدئي .

أما عزم ثنائي الاقطاب الكهربائي p لهذه الجملة فيتعين بالعلاقة :

$$p = ea = ea_o\cos(\omega t + \varphi) = p_o\cos(\omega t + \varphi) \qquad (4-49)$$

ان الاهتزازات الهارمونية للالكترون بين السويتين الطاقيتين E_i و E_k تترافق باشعاع كهرطيسي عبارة عن فوتونات يتحدد تواترها بالعلاقة :

$$\nu_{ik} = (E_i - E_k)/\hbar \qquad (4-50)$$

وباستطاعة متوسطة $\bar{w}$ تعطى بالعلاقة :

$$w = \frac{2}{3c^3}\left|\overline{\frac{d^2p}{dt^2}}\right|^2 = \frac{2\omega^4}{3c^3}|p_o|^2\cos^2(\omega t + \varphi) \qquad (4-51)$$

ولما كانت القيمة المتوسطة لمربع جيب التمام تساوي $\frac{1}{2}$ فان العلاقة السابقة ستأخذ الشكل :

$$\bar{w} = \frac{\omega^4}{3c^3}\, p_o^2 \qquad (4-52)$$

وهكذا نجد من العلاقة (4-52) أن الاستطاعة المتوسطة التي تشعها الجملة المهتزة تتناسب طردا مع مربع سعة عزم ثنائي القطب الكهربائي $p_o = \pm\, ea$ وبالتالي فهي تتناسب طردا مع مربع سعة الاهتزاز a .

ان هذه العلاقة الخاصة باشعاع ثنائي القطب الكهربائي لايصح استخدامها الا في ظروف تحقق الشرط :

$$\lambda \gg a \qquad (4-53)$$

هذا الشرط محقق بالنسبة للانتقالات ذات الترددات الواقعة في المجال المرئي وفوق البنفسجي التي تقوم بها الذرات ، حيث تكون (λ) من

مرتبة 10^{-5} cm بينما تكون سعة الالكترونة المهتز من مرتبة 10^{-8} cm . أما في الحالات التي لايتحقق فيها الشرط (53 - 4) فاننا نحصل الى جانب اشعاع ثنائي القطب الكهربائي على اشعاع ثنائي القطب المغناطيسي واشعاع رباعي القطب الكهربائي ،وبالرغم من كون هذين الاشعاعين الاخيرين أضعف بكثير من اشعاع القطب الكهربائي الا أنهما يلعبان دورا مهما في الفيزياء النووية .

ملاحظة :

لقد ثبت تجريبيا أن اشعاع ثنائي القطب الكهربائي غير موجود في طيف النوى ،وذلك لكون مركز الشحنة (البروتونات) منطبقا على مركز ثقل البروتونات والنترونات (مركز ثقل النواة)أي أن البروتونات والنترونات تنزاح بشكل منتظم في النواة. ان اشعاع ثنائي القطب المغناطيسي يحدث من جراء تغير عزم ثنائي القطب $\vec{\mu}$ للجملة مع الزمن والاستطاعة المشعة تعطى بعلاقة مشابهة للعلاقة (52 - 4)وذلك باستبدال $\vec{p}$ بـ $\vec{\mu}$.

أما اشعاع رباعي القطب الكهربائي فيحدث من جراء تغير عزم رباعي القطب ϕ_{ij} للجملة مع الزمن وهذا الاشعاع أضعف بكثير من اشعاع ثنائي القطب الكهربائي .

وأخيرا نذكر بأن بعض النوى تملك عزم رباعي اقطاب كهربائي حيث أن قيمته واشارته تعكس طبيعة القوى بين البروتونات والنترونات كما أنها تعكس شكل النواة نفسها .

8 - 4 - الاستقطاب الكهربائي والمغناطيسي للمادة :

تمهيـــد :

في الفصل الثاني ،تم دراسة الحقل الكهرطيسي بشكل عـــام وأوجدنا معادلات الحقل وانتشاره في الخلاء وفي وسط ما وذلـــــك لتمييزه عن الخلاء .

في هذا الفصل ،سوف ندرس الحقل الكهرطيسي في المادة أو مايسمى بالوسط المادي ، وتسمى النظرية التي تصف الحوادث الكهرطيسية في المادة بالالكتروديناميك (التحريك الكهربائي) .

ان دراسة الحقل الكهرطيسي في المادة هي أقل سهولة مـــن دراسته في الخلاء وذلك بسبب علاقة الحقل ببنية المادة ، وسنـــرى أن طبيعة الظواهر الكهرطيسية تتعلق بخواص المادة (الوسط المادي).

المادة كما هو معروف هو اسم عام ،يطلق على كل الاجســـام التي تملك كتلة خاصة بها ، هذه الكتلة مؤلفة من مجموعة كبيرة مـــن الجزيئات ، والجزيئات مؤلفة من ذرات (نوى والكترونات) أي مؤلفة من شحنات صغيرة جدا تتحرك بسرعة كبيرة وبطريقة عشوائية . عنـــد دراسة الحقل الكهرطيسي في منطقة صغيرة من جسم ما ذات أبعـــاد ذريـــة تكون الكميات الكهرطيسية المدروسة (حقل ،كثافة شحنة ...) متغيرة تغيرا سريعا مع الزمن وبالتالي تأخذ هذه الكميات قيـــم مختلفة حتى في منطقتين متجاورتين وفي نفس اللحظة الزمنية .

لذلك عند دراسة الحقل الكهرطيسي في وسط مشحون ،نجـــد أن

هذا الحقل يتبع لمكان توضع الشحنات والزمن .

بما أن الكميات الكهرطيسية تكون متغيرة نتيجة الحركة المتغيرة فان تابعية الحقل (للمكان والزمان) تكون متغيرة تغيرا سريعا، ويكون في هذه الحالة الحقل غير متجانس في المنطقة الصغيرة ذات الابعاد الذرية.

عند دراسة الحقل الكهرطيسي في الاجسام ككل ،يهمنا معرفة ماينتج ، لذلك نستعمل مفهوم القيمة الوسطية لعدد كبير من الذرات، كما هو الحال في الميكانيك حيث نحسب القيمة الوسطية للكثافة عندما نأخذ حجما ما من الجسم الذي يحوي عددا كبيرا من الذرات ومن ثم نقسم كتلة هذا الحجم على الحجم نفسه.

عند استعمال القيم الوسطية للمقادير المدروسة يجب أن تكون ابعاد الجسم المدروس كبيرة نسبيا بالمقارنة مع الابعاد الذرية، لكي لاتؤثر البنية الذرية للمادة (الجسم) على القيمة الوسطية للحجم المعتبر .

لكي تتعين القيمة الوسطية بشكل دقيق يجب الاخذ بعين الاعتبار أيضا القيمة الوسطية للزمن ، لهذا يجب أن تكون الفترة الزمنية التي توجد فيها القيمة الوسطية كبيرة مقارنة مع أزمنة الحركة الذرية.

ان معادلات ماكسويل في الخلاء تحتوي على مقادير تتعلق بالموضع في لحظة معينة، هذه المقادير تكون غير صحيحة في المادة المؤلفة من ذرات وجزيئات ،لانه عند دراسة الحقل الكهرطيسي في المادة

سوف تنتج ظواهر كهرطيسية جديدة لان المقادير التي تميز هذا الحقل تتغير من نقطة الى أخرى في المادة بينما تكون واحدة في الخلاء فمثلا قيمة الحقل الكهربائي داخل الذرة تكون كبيرة وتتناقص بسرعة في خارج هذه الذرة .

بهذا المفهوم ، تهتم عادة بالقيمة الوسطية للمقادير التي تحدد الحقل الكهرطيسي ،وسوف نأخذ القيمة الوسطية للمقادير في معادلات ماكسويل في حجم لامتناهي في الصغر فيزيائيا V_o خلال فترة زمنية τ .

وبذلك فالقيمة الوسطية لكمية كهرطيسية f تعطى بالعلاقة :

$$\vec{f} = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{1}{V_o} \int_{V_o} f dV.dt$$

ويمكن المفاضلة بالنسبة للاحداثيات والزمن فمثلا :

$$\frac{\partial}{\partial x}\bar{f}(x,y,z,t) = \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} \quad , \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial f}{\partial t}}$$

أي أن مشتق القيمة الوسطية لكمية كهرطيسية يساوي القيمة الوسطية لمشتق الكمية نفسها .

9 – 4 – معادلات ماكسويل بالقيم الوسطية :

اذن يجب كتابة معادلات ماكسويل بالقيم الوسطية ،قبل ذلك سنرمز لـ $\vec{E}$ بـ $\vec{e}$ و $\vec{B}$ بـ $\vec{b}$ فتصبح معادلات ماكسويل (24- 4) على الشكل التالي :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} . \vec{b} = 0$$

$$(4-54)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{b} = \mu_o(\vec{j} + \varepsilon_o \frac{\partial \vec{e}}{\partial t})$$

$$\vec{\nabla} . \vec{e} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

هذه المعادلات التي تصف الحقل الكهرطيسي في الخلاء ، لاتصلح في المادة اذ أنه تحت تأثير الحقل الكهرطيسي على المادة يحدث توزع جديد للشحنات والتيارات ، لذلك يمكن كتابة معادلات ماكسويل السابقة بالقيم الوسطية أي أن :

$$\vec{\nabla} \wedge \overline{\vec{e}} = -\frac{\partial \overline{\vec{b}}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} . \overline{\vec{b}} = 0$$

$$(4-55)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \overline{\vec{b}} = \mu_o(\overline{\rho \vec{v}} + \varepsilon_o \frac{\partial \overline{\vec{e}}}{\partial t})$$

$$\vec{\nabla} . \overline{\vec{e}} = \frac{\overline{\rho}}{\varepsilon_o}$$

حيث من (2 - 19) $\vec{j} = \rho\vec{v}$.

فاذا فرضنا من جديد أن $\vec{E} = \overline{\vec{e}}$ و $\vec{B} = \overline{\vec{b}}$ حيث $\vec{E}$ القيمة الوسطية لشعاع الحقل الكهربائي في المادة و $\vec{B}$ القيمة الوسطية لشعاع التحريض المغناطيسي في المادة في هذه الحالة تأخذ مجموعة المعادلات (2 - 4) الشكل التالي :

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
&\nabla . \vec{B} = 0 \\
&\nabla \wedge \vec{B} = \mu_o(\overline{\rho \vec{v}} + \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \\
&\nabla . \vec{E} = \frac{\overline{\rho}}{\varepsilon_o}
\end{aligned}\right\} \quad (4-56)$$

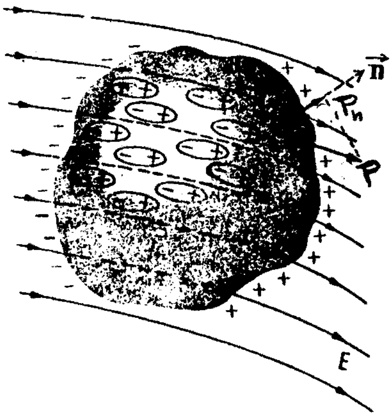
ويرتبط هذا التحويل في المعادلات بايجاد القيم الوسطية $\bar{\rho}$ و $\overline{\rho \vec{v}}$ والذي يتطلب بعض الفرضيات حول بنية المادة ومن ثم ايجاد اتجاه معين لدراسة خواصها ، وتصنيفها الى عوازل ونواقل من حيث ناقليتها الكهربائية بعد أن يطبق حقل كهربائي ،وتحديد نوعية المادة بعد أن يطبق عليها حقل مغناطيسي ، لذلك سنطبق على وسط مادي ، حقل كهربائي وحقل مغناطيسي وسوف نرى مايحدث .

10 – 4 – الاستقطاب الكهربائي لوسط مادي :

عندما نطبق حقل كهربائي خارجي على جسم معتدل كهربائيا (عازل مثلا) فانه يحدث توجيه للشحنات الموجبة والسالبة في ذرات وجزيئات الجسم المعتدل كهربائيا ، ويبقى الجسم معتدلا كما في الشكل (11- 4)، ولكن تتكشل ثنائيات أقطاب في الجسم المعتدل وتحت تأثير الحقل الكهربائي تنزاح الشحنات عن وضع توازنها وتشكل عددا كبيرا من ثنائيات الاقطاب العنصرية، هذه العملية تدعى بالاستقطاب . يتميز الجسم بعزم ثنائيات الاقطاب الناتجة عن الشحنات الموجودة في واحدة الحجم ونرمز له ب $\vec{P}$

ونسميه شعاع الاستقطاب الكهربائي للوسط (الجسم) وبذلك يكون عزم ثنائيات الاقطاب الموجودة في الجسم تساوي :

$$\vec{P} = \int_V \vec{\mathcal{P}}.dV \qquad (4-57)$$



الشكل (4 -11)

بشكل عام ، يتناسب شعاع الاستقطاب $\vec{\mathcal{P}}$ طرداً مع الحقل الكهربائي المطبق $\vec{E}$. عند تطبيق حقل كهربائي فان الشحنات المرتبطة في الجسم المعتدل تنزاح عن وضع توازنها وتتشكل ثنائيات أقطاب في الجسم المعتدل كهربائيا بحيث :

$$\vec{P} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

وفي حالة التوزع المستمر للشحن يكون :

$$q = \int_V \rho_p dV \qquad (4-58)$$

حيث ρ_p الكثافة الوسطية للشحنات المستقطبة (الشحنات المرتبطة) وعزم ثنائي القطب يكتب على الشكل :

$$\vec{P} = \int_V \rho_p \vec{r}.dV \qquad (4-59)$$

بمقارنة (59) مع (57) نجد :

$$\vec{P} = \int_V \rho_p \vec{r}.dV = \int_V \vec{\mathcal{P}}.dV \qquad (4-60)$$

اذن $\vec{p}$ يكتب بدلالة مقدارين : ρ_p للشحنات المرتبطة و شعاع $\vec{\mathcal{P}}$ الاستقطاب . لنرى ماهي العلاقة بين هذين المقدارين بحيث يبقى

تأثير الحقل الكهربائي الخارجي محتفظا بمعناه السابق .

1 - 10 - 4 - العلاقة بين ρ_p و $\vec{\mathcal{P}}$:

يمكن كتابة التكامل (57) على الشكل التالي :

$$\int \vec{\mathcal{P}}.dV = -\int \vec{r}\ \mathrm{div}\,\vec{\mathcal{P}}.dV \qquad (4.61)$$

حيث يمكن البرهان على هذه العلاقة في التكاملات المحددة اذا كتبت بدلالة مركبات احداثية ، فمثلا يكتب الطرف الايمن من (61) على الشكل :

$$\int_V x\left[\left(\frac{\partial \mathcal{P}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathcal{P}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathcal{P}_z}{\partial z}\right)dxdydz\right]=\int_s x\mathcal{P}_x\Big|_{x_1}^{x_2} dydz$$

$$+\int_s x\mathcal{P}_y\Big|_{y_1}^{y_2} dxdz+\int_s x\mathcal{P}_z\Big|_{z_1}^{z_2} dxdy-\int_V \mathcal{P}_x dxdydz \qquad (4-62)$$

ويمكن اختيار سطح التكامل المحدد خارج الحجم الذي يشغله الجسم فيكون الاستقطاب خارج الجسم معدوم أي $\vec{\mathcal{P}} = 0$ وبالتالي فان المركبات $\mathcal{P}_x$ و $\mathcal{P}_y$ و $\mathcal{P}_z$ معدومة خارج الجسم ، اذن يبقى من التكاملات (62) التكامل :

$$\int_V x\ \mathrm{div}\,\vec{\mathcal{P}}.dV = -\int_V \mathcal{P}_x dV$$

وبالمثل يكون لدينا :

$$\int_V y\ \mathrm{div}\,\vec{\mathcal{P}}.dV = -\int_V \mathcal{P}_y dx$$

$$\int_V z\ \mathrm{div}\,\vec{\mathcal{P}}.dV = -\int_V \mathcal{P}_z dV$$

وبشكل عام تكتب :

$$\int_V \vec{r}\ \mathrm{div}\,\vec{\mathcal{P}}.dV = -\int_V \mathcal{P}.dV$$

وهي نفس العلاقة (61) .

بتعويض (61) في (60) نجد أن :

$$\int_V \vec{r}(\operatorname{div}\vec{P} + \rho_p)\,dV = 0$$

بما أن شكل الجسم وأبعاده كيفية فانه لايمكن أن يكون $\vec{r}$ و dV معدومين ومنه :

$$\operatorname{div}\vec{P} + \rho_p = 0$$

أو :

$$\operatorname{div}\vec{P} = -\rho_p \qquad (4-63)$$

حيث ρ_p الكثافة الوسطية للشحنات المرتبطة أي $\rho_p = \bar{\rho}_p$ في المادة .

نستنتج من العلاقة السابقة أن الاستقطاب يبدو وكأنه ظاهرة حجمية فاذا كان الاستقطاب غير متجانس وكان شعاع الاستقطاب متغيرا من نقطة لاخرى فانه يتشكل في الجسم شحنات حجمية كثافتها ρ_p ويتشكل أيضا على السطح الخارجي s للجسم شحنات تتجمع بكثافة سطحية $\sigma_p = P_n$.

ملاحظة (1) :

في الجسم المستقطب نكتب بشكل عام :

$$\sigma_T = \sigma_f + \sigma_p = \sigma_f + P_n \qquad (4-64)$$

وأن :

$$\rho_T = \rho_f + \rho_p = \rho_f - \operatorname{div}\vec{P} \qquad (4-65)$$

حيث تمثل σ_f ، ρ_f الشحنات السطحية الحرة والحجمية الحرة في الجسم، على الترتيب .

وتمثل σ_T ، ρ_T الشحنات السطحية الوسطية الكلية على الجسم والحجمية

11 - 4 - الاستقطاب المغناطيسي (التمغنط) :

ان مفهوم الاستقطاب المغناطيسي هو عبارة عن دراسة استقطاب وسط مادي تحت تأثير حقل مغناطيسي خارجي .

لدراسة الاستقطاب المغناطيسي لابد من فهم ثنائي القطب المغناطيسي والعزم المغناطيسي كما هو الحال في ثنائي القطب الكهربائي وعزمه. نذكر بأن ثنائي القطب المغناطيسي هو عبارة عن مجموعة مؤلفة من شحنتين مغناطيسيتين (وهميتين) نقطيتين متساويتين وباشارتين مختلفتين البعد بينهما r .

نستنتج من ذلك ،أنه عندما نطبق حقل مغناطيسي خارجي على مادة فانها تصبح على شكل مغانط صغيرة (ثنائيات قطب مغناطيسية القيمة الوسطية لعزوم هذه المغانط تعطى بالعلاقة :

$$\vec{\mu} = \sum_i q_i \frac{\vec{r}_i \wedge \vec{v}_i}{2} \tag{4-66}$$

ويكتب العزم المغناطيسي μ لجملة تيارات كثافتها $\vec{j}$ وموجودة في حجم dV كمايلي :

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int_V (\vec{r} \wedge \vec{j})\, dV \tag{4-67}$$

كما وجدنا الكثافة الوسطية للشحنات المرتبطة (المتحرضة) في حالة الاستقطاب الكهربائي فاننا نستطيع ايجاد الكثافة الوسطية للتيار الناتج عن الشحنات المرتبطة (التيار المتحرض) في المادة .
نعرف شعاع الاستقطاب المغناطيسي (التمغنط) $\vec{M}$ بأنه العزم المغناطيسي في واحدة الحجم أي :

$$\vec{\mu} = \int_V \vec{M}.dV \qquad (4-68)$$

وهي علاقة مشابهة للعلاقة (57)٠

لنبرهن الآن على وجود مطابقة شبيهة بالمطابقة (61 - 4) وتكون على الشكل التالي :

$$\vec{\mu} = \int_V \vec{M}.dV = \frac{1}{2} \int_V (\vec{r} \wedge \overrightarrow{rot}\,\vec{M})\,dV \qquad (4-69)$$

للبرهان على ذلك تأخذ المركبات الاحداثية للطرف الايمن ونكتب :

$$\int_V (\vec{r} \wedge \overrightarrow{rot}\,\vec{M})_x dV = \int_V (y\,\overrightarrow{rot}_z\vec{M} - z\,\overrightarrow{rot}_y\vec{M})\,dV$$

نبدل $\overrightarrow{rot}_y\vec{M}$ و $\overrightarrow{rot}_z\vec{M}$ بقيمهما فنجد :

$$\int_V (\vec{r} \wedge \overrightarrow{rot}\,\vec{M})_x dV = \int_V \left[y\left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right) - z\left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}\right)\right] dxdydz$$

تكامل الجدائين $- z\frac{\partial M_x}{\partial z}$ و $- y\frac{\partial M_x}{\partial y}$ بالتجزئة وبقية التكاملات تصبح معدومة. بادخال حدود التكامل (نفس المناقشة في الفقرة (1-10-4)) ويبقى فقط التكامل $\int_V 2M_x dxdydz$ الذي يتفق مع الطرف الايسر من العبارة (69 - 4)٠

بنفس الطريقة السابقة وبعد أخذ مركبتي $(\vec{r} \wedge \overrightarrow{rot}\,\vec{M})$ على المحورين y و z ، فانهما يساويان على الترتيب :

$\int_V 2M_y dxdydz$ و $\int_V 2M_z dxdydz$ ٠ وأخيرا نكتب بشكل عام :

$$\frac{1}{2} \int_V (\vec{r} \wedge \overrightarrow{rot}\,\vec{M})\,dV = \frac{1}{2}\int_V 2\vec{M}.dV = \int_V \vec{M}.dV$$

وهي نفس العلاقة (69 - 4)٠

الان بمقارنة (69 - 4) مع (67 - 4) نجد أن :

$$\int_V (\vec{r} \wedge \vec{J})\, dV = \int_V (\vec{r} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{M})\, dV \qquad (4-70)$$

وبالتطابق نجد أن :

$$\vec{J}_a = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{M} \qquad (4-71)$$

أي أن كثافة التيار الوسطية تساوي الى دوار التمغنط . هذا التيار ناتج عن الاستقطاب المغناطيسي (ونسميه تيار التمغنط $\vec{J}_a$)وهو ناتج من جراء اعادة توزع الشحنات (التيارات) عند تطبيق الحقل المغناطيسي على المادة :

نتيجة هامـــــــة :

لكي يتم تعيين كثافة التيار بشكل دقيق يجب أن نأخذ قانون انحفاظ الشحنة بالقيمة الوسطى من أجل الحصول على العبارة العامة لكثافة التيار في الوسط المادي ولذلك نكتب قانون انحفاظ الشحنة في الوسط المادي بالشكل :

$$\mathrm{div}\, \overline{\vec{J}} = -\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} \qquad (4-72)$$

ولكن $\overline{\rho}$ ماهي الا كثافة الشحنة الحجمية الوسطية الكلية في الوسط المستقطب وتساوي :

$$\overline{\rho} = \rho_T = \rho_f + \rho_p = \rho_f - \mathrm{div}\, \vec{P}$$

بالتعويض في العلاقة (72 - 4) نجد :

$$\mathrm{div}\, \overline{\vec{J}} = -\frac{\partial}{\partial t}(\rho_f - \mathrm{div}\, \vec{P})$$

$$\mathrm{div}\, \overline{\vec{J}} = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \mathrm{div}\, \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\,\overline{\vec{J}} = \mathrm{div}\,\vec{J}_f + \mathrm{div}\,\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\,\overline{\vec{J}} = \mathrm{div}\,\vec{J} = \mathrm{div}(\vec{J}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}) \qquad (4-73)$$

من هذه العلاقة نستنتج نتيجة هامة وهي أنه اذا كان استقطاب الجسم غير متجانس (أي $\mathrm{div}\,\vec{P} \neq 0$) فانه يظهر في الجسم تيار اضافي كثافته $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ ناتج عن حركة الشحنات المرتبطة ρ_p بالاضافة الى تيار الشحنات الحرة $\vec{J}_f$ أي أن :

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_p \qquad (4-74)$$

(القيمة السابقة للتيار هي دائما القيم الوسطية في المادة).

حيث أن :

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \qquad (4-75)$$

وهي كثافة التيار الناتجة عن الشحنات المرتبطة أو المستقطبة ، هذا التيار ينتج عن تغير الاستقطاب الكهربائي مع الزمن .

12- 4- عبارة كثافة التيار الكلي في المادة :

بشكل عام يتألف التيار الكلي في وسط يحوي مادة مغناطيسية من مجموع كثافة التيارات التالية :

- تيار الناقلية للشحنات الحرة $\vec{J}_f$
- تيار الاستقطاب الكهربائي للشحنات المرتبطة $\vec{J}_p$
- تيار التمغنط $\vec{J}_a$ (ويسمى بالتيار الامبيري أو الجزيئي) ويرتبط بالعزوم المغناطيسية لذرات وجزيئات المادة وينتج عن الاستقطاب المغناطيسي للشحنات المرتبطة ، بذلك يمكن وصف الوسط المادي المستقطب استقطابا كهربائيا ومغناطيسيا بكثافة التيارات الثلاثة

التاليـــــــة :

$$\left.\begin{aligned}\vec{J} &= \vec{J}_f + \vec{J}_p + \vec{J}_a \\ \vec{J} &= \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{M}\end{aligned}\right\} \qquad (4-76)$$

13 - 4 - خواص الاوساط الماديـــــة :

نستنتج مما سبق أن خواص الوسط المادي (ناقل ،عازل...) تأتي من تواجد شحنات وتيارات في هذا الوسط .

بشكل عام نستطيع أن نميز نوعين من الشحنات الكهربائية :

- شحنات حرة : الكترونات حرة في معدن ،جسيمات مؤينة في غـــاز وشحنات متوضعة على سطح عازل وموجودة بكثافة ρ_f تقاس بطـــرق فيزيائية .
- شحنات مرتبطة : وهي ناتجة بشكل أساسي عن استقطاب (تطبيق حقل) المادة، كثافة هذه الشحنات هي ρ_p .

تأتي الشحنات المرتبطة من عزوم ثنائيات دائمة لبعـــض جزيئات المادة أو تأتي من عزوم ثنائيات ناتجة عن تأثير حقـــل كهربائي خارجي على ذرات أو جزيئات المادة بحيث :

$$\text{div}\ \vec{P} = -\rho_p$$

هذه الشحنات المرتبطة لها علاقة بالبنية الميكروسكوبية للمـــادة وتنتقل الى مسافات من رتبة الابعاد الذرية (ضمن الذرة).

بوجود نوعين من الشحنات ،نستطيع أن نميز نوعين مـــن التيارات الكهربائية :

- التيارات الناتجة عن الشحنات الحرة ،كالتيارات التي تجري في سلك ناقـــل بكثافة $\vec{J}_f$ (تيارات الناقلية).
- التيارات الناتجة عن الشحنات الحرة المرتبطة في الذرة وهي بشكل أساســـي

تيارات الاستقطاب الناتجة عن تغير الاستقطاب P في الوسط المادي وكثافة هذه التيارات :

$$\vec{J} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

بالاضافة الى تيارات التمغنط الناتجة عن خواص المادة الممغنطة (عزوم مغناطيسية لذرات وجزيئات المادة ...) وتسمى هذه التيارات أيضا بالتيارات الجزيئية وكثافتها تعطى بالعلاقة :

$$\vec{J}_a = \text{rot } \vec{M}$$

حيث $\vec{M}$ شعاع تمغنط الوسط المادي أو كثافة التمغنط .

- لنوضح الآن أكثر ماهو تيار التمغنط أو التيار الجزيئي الذي ينتج عن خواص المادة الممغنطة (القابلة للتمغنط).

- اذا كان لدينا وسطا مغناطيسيا غير ناقل للكهربا٫ ،مؤلفا من جزيئات حيادية أو من ايونات مثبتة في عقد الشبكة البلورية في هذه الحالة لايتم نقل الشحنات المرتبطة الى مسافات ماكروسكوبية (انتقال بين الذرات) أي أن $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ معدوم بالاضافة الى انعدام تيار الشحنات الحرة $\vec{J}_f$.

ولكن الامر يختلف داخل الجزيئات المعزولة والايونات حيث توجد حركة معينة للالكترونات توافق توزعا معينا للتيارات ، هذه التيارات تسمى بالتيارات الجزيئية $\vec{J}_a$ (تيارات التمغنط) وهي تقع ضمن حجوم ميكروسكوبية وتنتج فقط عن الشحنات المرتبطة بالذرة .وتأتي فعاليتها من الغزوم المغناطيسية في ذرات المادة وجزيئاتها بما في ذلك العزم الحركي الداخلي للجزيئة (السبين) .

في الاوساط المغناطيسية الغير القابلة للتمغنط وتحت تأثير حقل مغناطيسي خارجي فان توزع هذه العزوم المغناطيسية يتم بشكل عشوائي بحيث أن حقولها تنعدم مع بعضها البعض .

- في الاوساط المغناطيسية القابلة للتمغنط وتحت تأثير حقل مغناطيسي خارجي تستقطب هذه الاوساط (أي تولد مجال مغناطيسي ذاتي) وينتج عن ذلك كثافة تمغنط $\vec{M}$ مشكلة تيارات جزيئية $\vec{J}_a$. (تيار تمغنط) هذا يؤدي الى تشكل حقل مغناطيسي لانهائي لهذه التيارات بحيث يختلف عن الصفر .

تجدر الاشارة الى أن تيارات التمغنط $\vec{J}_a$ موجودة في الاوساط المغناطيسية الناقلة أو العازلة ،لكن في الاوساط المغناطيسية الناقلة يضاف اليها كثافة تيار الناقلية للشحنات الحرة $\vec{J}_f$.

14 - 4 - معادلات ماكسويل في الوسط المادي :

ان معادلات ماكسويل العامة في الخلاء تصلح أيضا في الاوساط بشرط اضافة الشحنات المرتبطة الى الشحنات الحرة وعبارات التيارات الناتجة عن هذه الشحنات أي :

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{rot}\ \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ div\ \vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{rot}\ \vec{B} &= \mu_o[(\vec{J}_f + \vec{J}_p + \vec{J}_a) + \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}] \\ div\ \vec{E} &= \frac{\rho_f + \rho_p}{\varepsilon_o} \end{aligned}\right\} \qquad (4-27)$$

تكتب المعادلة (c) على الشكل :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_o\left[(\vec{J}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \overrightarrow{rot}\ \vec{M}) + \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right] \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B} - \mu_o\vec{M}) = \mu_o\left[\vec{J}_f + \frac{d}{dt}(\varepsilon_o\vec{E} + \vec{P})\right]$$

والمعادلة (d) على الشكل :

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = \frac{\rho_f - \mathrm{div}\,\vec{P}}{\varepsilon_o} \Longrightarrow \mathrm{div}(\varepsilon_o\vec{E} + \vec{P}) = \rho_f$$

وبادخال شعاع جديد بحيث :

$$\vec{D} = \varepsilon_o\vec{E} + \vec{P} \tag{4-78}$$

المسمى بشعاع التحريض الكهربائي في المادة وشعاع آخرجديد بحيث :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B} - \mu_o\vec{M}}{\mu_o} \tag{4-79}$$

المسمى بشعاع الحقل المغناطيسي في المادة (الحقل المغناطيسي في الخلاء $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o}$) .

بتعويض المتجهات الجديدة (78 - 4)و(79 - 4) في معادلات ماكسويل في المادة (77 - 4) نحصل على معادلات ماكسويل التالية :

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{rot}\ \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\ \vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{rot}\ \vec{H} &= \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\ \vec{D} &= \rho_f \end{aligned}\right\} \quad (4-80)$$

هذه المعادلات هي نفس معادلات ماكسويل التي درسناها في الفصل الاول ،وهي مستقلة عن الوسط المدروس لذلك سميت معادلات عامة ولايدخل فيها سوى الشحنات الحرة والتيارات الناتجة عنها .

الفصل الخامس

النظرية النسبية وتحويلات الحقول

نبحث في هذا الفصل تحويلات غاليله ونسبية نيوتن ثم تعرض ملخصا لفرضيات الميكانيك الكلاسيكي ،ننتقل بعدها الى عرض واحدة من أهم التجارب التي بينت فشل الميكانيك الكلاسيكي وهي تجربة مايلكسون ومورلي التي كان من نتائجها النسبية الخاصة التي وضعها العالم البرت اينشتاين .

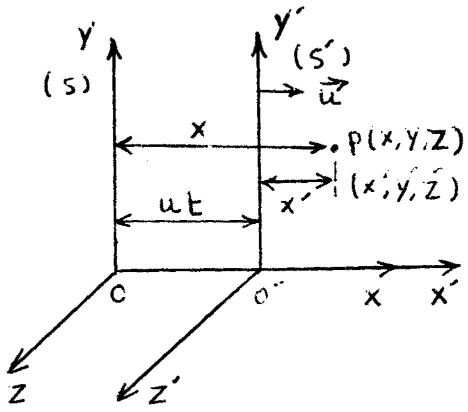
وقد أوردنا بايجاز أهم نتائج النسبية الخاصة : التواقت تمدد الازمنة ،وأوردنا أهم ماجاء في النسبية العامة .

واعتمادا على تحويلات لورنتس استنتجنا تحويلات القوى والحقول الكهرطيسية من جملة عطالية متحركة s' الى جملة عطالية أخرى ساكنة s كما أوردنا صيغ معادلات ماكسيول في الجملة المتحركة وقد أعدنا استنتاج كثافة التيار وكثافة الشحنات كمتجهات رباعية الابعاد وأخيرا تعرضنا لمفهوم تونسور الحقل الكهرطيسي .

1 ـ 5 ـ تحويلات غاليله Galileo :

لنفرض وجود جملتين احداثيتين تتحرك احداهما بالنسبة للاخرى حركة مستقيمة منتظمة بسرعة $\vec{u}$ بالاتجاه الموجب للمحور x المشترك بينهما كما في الشكل (1 - 5).

لنفرض في بدء الزمن أن الجملتين متطابقتين . وبعد



شكل (5 - 1)

مرور زمن t تنتقل الجملة O′ مسافة ut وتكون العلاقة بين احداثيات الجملتين هي:

$$\left.\begin{array}{l} x' = x - ut \\ y = y',\ z = z',\ t = t' \end{array}\right\} \quad (5-1)$$

والتحويل المعاكس أي من x′ الى x هو:

$$x = x' + ut\ ,\ y = y'\ ,\ z = z'\ ,\ t = t' \qquad (5-2)$$

تدعى هذه المعادلات بتحويلات غاليله ◦ نرمز عادة لجملة الاحداثيات الساكنة بالرمز s وبالرمز s′ لجملة الاحداثيات التي تتحرك بحركة مستقيمة منتظمة بالنسبة لـ s ◦

2 – 5 – المرجع العطالي :

اذا وجدت نقطة مادية حرة في منطقة من الفراغ لايوجد فيها قوى تؤثر على هذه النقطة ونسبنا هذه المنطقة الى جملة احداثيات ثابتة ◦ ان هذه النقطة تبقى ساكنة اذا كانت ساكنة في الاصل أو تتحرك بحركة مستقيمة منتظمة اذا كانت متحركة في الاصل تدعى جملة الاحداثيات هذه بالجملة العطالية أو الغاليلية وتسمى أيضا بالمرجع العطالي (a) · وبشكل عام نعتبر كل جملة مرجعية تتحرك بحركة مستقيمة منتظمة (b) بالنسبة لجملة عطالية هي مرجع عطالي ·

(c) 3 – 5 – قانون جمع السرع في الميكانيك الكلاسيكي :

ان من أحدى نتائج تحويلات غاليله هو قانون جمع السرع ◦

(d)

بفرض أن جسيم يتحرك بسرعة $\vec{v}'(v'_x, v'_y, v'_z)$ في المرجع s' بالنسبة لمراقب موجود في هذا المرجع. ما هي السرعة $\vec{v}$ لهذ الجسيم كما يراها مراقب ساكن في الجملة s ؟.

لايجاد $\vec{v}$ ننطلق من مركباته على المحاور x, y و z :

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

وخلال زمن قدره $dt' = dt$ فان الفاصلة x للجسيم تتغير بمقدار $dx' = v'dt'$ والمرجع s' يكون قد تحرك مسافة قدرها :
$u\,dt = u\,dt'$ وحسب العلاقة (2) فان :

$$dz = dz', \; dy = dy', \; dx = dx' + udt'$$

ومنه فان:

$$v_x = \frac{dx' + udt'}{dt'} = v'_x + u \;, \; v_y = v'_y \;, \; v_z = v'_z$$

ويكتب قانون جمع السرع في الميكانيك الكلاسيكي بالشكل المتجه على النحو التالي :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \qquad (5-3)$$

ومن هذا القانون يمكن استنتاج تحويلات الكتل والقوى عند تغيير المرجع العطالي .

4 ـ 5 ـ مبدأ النسبية عند نيوتن :

وجد نيوتن أن قوانين الميكانيك لاتتغير عند الانتقال من مرجع عطالي لآخر وقد عبر عن هذه النتيجة بقوله :

" ان قوانين الميكانيك هي نفسها في جميع الانظمة الغاليلية ولذلك فانه يستحيل استنتاج حركة هذا النظام بواسطة

تجارب ميكانيكية تجري فيه".

لنفرض مثلا أن فيزيائيا يجري تجارب داخل مركبة فضائية تسير بحركة منتظمة, ان كل التجارب الميكانيكية التي تجرى داخل هذه المركبة (قياس دور نواس مثلا) كما يراها هذا الفيزيائي تكون هي نفسها سواء كانت المركبة ساكنة أو تتحرك بحركة مستقيمة منتظمة وبمعنى آخر أنه لايمكن لهذا الفيزيائي قياس سرعة هذه المركبة . هذه النتيجة تكون صحيحة عندما يكون النظام غاليليا ولكن عند تسارع المركبة أو عند تحركها حركة دائرية فان الفيزيائي سوف يشعر بالحركة وبالتالي يستطيع اكتشاف هذا الدوران عن طريق اجراء التجارب داخل المركبة وذلك لأن الدوران يبطل مبدأ العطالة (قانون نيوتن الاول) حيث تنشأ قوة نابذة تغير القوانين داخل النظام المتحرك (أي داخل المركبة في مثالنا).

ان الارض في دورانها حول محورها لاتمتلك خاصية النظام الغاليلي (الجملة العطالية) وبالتالي لايمكن تطبيق قوانين نيوتن لان الحركة متسارعة . وبالفعل توجد تجارب عديدة تظهر دوران الارض مثلا : ميل القذائف الى يمين مستوى القصف في النصف الشمالي من الكرة الارضية . وتوجد ظواهر طبيعية تشير أيضا الى دوران الارض حول نفسها مثل : ميل الرياح والتيارات المائية البحرية الى اليمين في النصف الشمالي من الكرة الارضية ،تفلطح الكرة الارضية عند خط الاستواء ... وغيرها . أما حركة الارض حول الشمس فيمكن اعتبارها خلال فترة زمنية قصيرة (عدة ساعات أو يوم) حركة مستقيمة منتظمة أو حركة انسحابية بالنسبة لمحاور تمر من مركز الشمس ومتجهة نحو النجوم البعيدة.

وخلاصة نقول أنه يمكن تطبيق مبدأ النسبية النيوتني على حركة الارض هذه (حركة الارض حول الشمس)ولذلك فان التجارب الميكانيكية التي تجري على سطحها تكون عاجزة عن اظهار وجودها .

5 - 5 - لاتغير القوانين الفيزيائية- مثال من الميكانيك الكلاسيكي :

سوف نرى في هذه الفقرة أن قانون نيوتن $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ لايتغير عند الانتقال من مرجع عطالي ساكن الى آخر متحرك بحركة مستقيمة منتظمة في الاتجاه x .

نفرض في البداية أن جملتي الاحداثيات s و s' منطبقتين على بعضهما وان راصدا يجري تجربة فيزيائية : تأثير قوة F على كتلة m معلقة بنابض بالاتجاه x. في هذه الحالة تكون $x = x'$ (مقدار استطالة النابض) ويكون :

$$F_x = m\,\frac{d^2x}{dt^2} = m\,\frac{d^2x'}{dt^2} = F'_x \;,\; F_y = F'_y \;,\; F_z = F'_z$$

والقانون $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ هو صالح في المرجعين .

عندما تتحرك الأن الجملة s' بسرعة مستقيمة منتظمة u في الاتجاه x ،هل يرى الراصد في هذه الجملة s' أن قانون نيوتن السابق صحيحا بالنسبة له؟ لاختبار ذلك نعوض x بالمقدار :

$$F_x = m\,\frac{d^2x}{dt^2} = m\,\frac{d^2}{dt^2}(x' + vt) = m\,\frac{d^2x'}{dt^2} = F'_x$$

وبما أن $y = y'$ و $z = z'$ فان :

$$F_y = m\,\frac{d^2y}{dt^2} = F'_y \quad , \quad F_z = F'_z$$

وبناء على ماتقدم فان القوانين التي يراها الراصد في الجملة s هي نفسها التي يراها في ´s أي أن القانون $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ صالح في كلا المرجعين العطاليين وهذا يكافىء قولنا:ان قانون نيوتن لايتغير عند تطبيق تحويلات غاليله عليه ، وتجدر الاشارة هنا الى أن الكتلة m التي يقيسها الراصد الساكن والمتحرك هي نفسها فرضا ،

6 – 5 – فرضيات الميكانيك النيوتني أو الكلاسيكي :

لكي نفهم الاسس التي قامت عليها النسبية نورد أهم المفاهيم التي قام عليها الميكانيك الكلاسيكي وهي :

١ – يعتبر الميكانيك الكلاسيكي ان الزمن هو نفسه في منطقة من العالم وهو متماثلا عند الانتقال من جملة عطالية الى أخرى متحركة بالنسبة للاولى بحركة مستقيمة منتظمة أي أن الزمن مطلق.

٢ – ان قياس طول ما (طول مسطرة معينة مثلا) هو واحد في كلا الجملتين المتحركة والساكنة بالنسبة لراصدين موجودين في كلا الجملتين وذلك عند استخدام نفس واحدة الطول أي أن الطول مستقل عن اختيار المرجع ، وسوف نرى لاحقا أن هاتين الفرضيتين لاتصلحان الا عند السرع الصغيرة جدا بالنسبة لسرعة الضوء ،

٣ – يعتبر الميكانيك الكلاسيكي أن الفراغ اقليدي ،

٤ – الاحداثيات والسرعات تتغير لدى الانتقال من مرجع لاخر ولكن المسافة وتغير السرعة والقوة لاتتغير لدى الانتقال من مرجع عطالي الى آخر .

٥ – الفراغ هو متجانس ومتماثل المناحي ولذلك فان الخواص الفيزيائية هي نفسها في كل اتجاهات الفراغ. وهكذا فان الكتلة

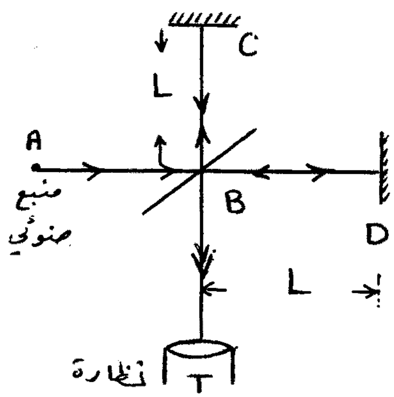
m في القانون $F = m\vec{\gamma}$ لاتتعلق باتجاه التسارع $\vec{\gamma}$ •

٦ ـ لاتتحقق قوانين نيوتن الآ بالنسبة للجمل العطالية •

٧ ـ قانون الجاذبية العام هو محقق دوما (يوجد تجاذب بين أي كتلتين m_1 و m_2 تبعدان عن بعضهما مسافة R: $F=G\frac{m_1 m_2}{R^2}$ ،G هو ثابت التجاذب الكوني)•

7 ـ 5 ـ تجربة مايكلسون ومورلي (Michelson-Morley) :

تعتبر تجربة مايكلسون ومورلي واحدة من أهم التجارب التي أجريت لقياس سرعة الارض (السرعة الانسحابية حول الشمس) في الاثير بالاعتماد على تداخل الامواج الضوئية وقد أجريت هذه التجربة عام 1887 • وهذه التجربة تعتبر دقيقة نظرا لامكانيتها في كشف سرعات من مرتبة 1,5 km/s في حين تبلغ سرعة الارض المدارية 30 km/s • يتألف جهاز مايكلسون، الشكل (2 - 5) من منبع ضوئي A وصفيحة زجاجية B مفضضة جزئيا ومرآتين C و D وقد ركبت جميع الاجزاء على قاعدة قابلة للدوران•



الشكل (2 - 5)

يخرج الضوء من المنبع A ليسقط على الصفيحة B نصف الشفافة حيث تميل على الحزمة الضوئية بزاوية 45° • تنقسم الحزمة الضوئية عند B الى حزمتين : الحزمة الاولى تنعكس عن B لتسقط على مرآة C تبعد عنها مسافة L والحزمة الثانية تخترق الصفيحة لتسقط على

ثانية D تبعد عن B أيضا مسافة تساوي L ،والحزمتان المنعكستان عن C و D تعود الى الصفيحة B ثم تبرزان منها الى منظار T بحيث يمكن بواسطته رؤية اهداب التداخل .

ان مراقبة اهداب التداخل تشكل طريقة فائقة الدقة في معرفة تساوي الزمن اللازم لذهاب الضوء من B الى C وعودته الى C مع الزمن اللازم لذهاب الضوء من B الى D والعودة اليها. فاذا كان الجهاز في حالة السكون فيجب أن يتساوى هذين الزمنين أما اذا كان الجهاز يتحرك بسرعة u نحو اليمين فسيوجد اختلاف بينهما. اذا فرضنا أن t_1 هو زمن ذهاب الضوء من B الى D ، t_2 هو زمن عودته. في لحظة انتقال الضوء من B الى D فان الجهاز يكون قد تحرك مسافة ut_1 وبالتالي فان المسافة التي قطعها الضوء خلال الزمن t_1 تساوي :

$$Ct_1 = L + ut_1 \implies t_1 = \frac{L}{C - u} \qquad (5-4)$$

حيث $C-u$ هي سرعة الضوء النسبية وفق BD .

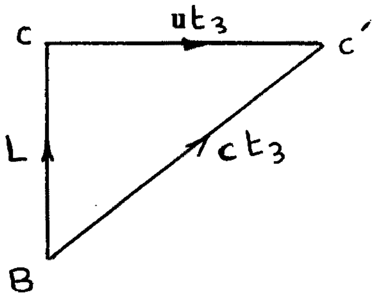
وبشكل مماثل فانه خلال الزمن t_2 اللازم لعودة الضوء من D الى B تكون الصفيحة B قد انتقلت مسافة تساوي ut_2 ومسافة العودة التي يقطعها الضوء تساوي $L - ut_2$ أي : $Ct_2 = L - ut_2$ ومنه فان t_2 تساوي :

$$t_2 = \frac{L}{L + u} \qquad (5-5)$$

حيث $C+u$ هي سرعة الضوء النسبية وفق DB ،والزمن الكلي يساوي :

$$t_1 + t_2 = \frac{L}{C - u} + \frac{L}{C + u} = \frac{2L/C}{1-u^2/C^2} \qquad (5-6)$$

وبحساب t_3 زمن ذهاب الضوء من B الى C (الاتجاه العمودي على جهة الحركة) نجد أنه خلال هذا الزمن تتحرك المرآة C الى اليمين مسافة ut_3 بنفس الوقت يسير الضوء مسافة Ct_3 على طول الوتر BC' للمثلث القائم BCC' ، الشكل (3 - 5) .



الشكل (3 - 5)

وتر هذا المثلث يساوي :

$$(Ct_3)^2 = L^2 + (ut_3)^2$$

ومنه :

$$t_3 = \frac{L}{\sqrt{C^2 - u^2}} \qquad (5-7)$$

عند عودة الضوء من C الى B تتحرك B مسافة ut_3 ويكون هناك تناظرا في الشكل السابق وبالتالي فان زمن العودة يكون نفسه والزمن الكلي يساوي $2t_3$:

$$2t_3 = \frac{2L/C}{\sqrt{1 - u^2/C^2}} \qquad (5-8)$$

نلاحظ من (6) و (8) أن الزمن اللازم للضوء للذهاب من B الى C والعودة اليه أقل من الزمن اللازم للضوء للذهاب من B الى D والعودة اليه رغم أن C و D تبعدان عن B بمسافتين متساويتين. اذا قبلنا باننا لانستطيع أن نجعل هاتين المسافتين متساويتين بالضبط مهما كانت تقنيتنا المستخدمة ولنفرض أن الطولين L غير متساويين مثلا $\overline{BD}$ أطو ل من $\overline{BC}$ ولذلك عندما نرير الجهاز بمقدار 90° بحيث يأخذ $\overline{BD}$ محل $\overline{BC}$ عندها يجب أن نرى انزياحا لاهداب التداخل

وعند اجراء التجربة وجه ميكلسون ومورلي الجهاز بحيث يكـــون $\overline{BD}$ موازٍ لحركة الارض وكانت النتيجة مفاجئة لانه لم يحصل أي انتقـــال للاهداب والفارق الزمني بين المسارين الضوئين صفرا وكأن الارض ثابتة لاتتحرك .

وقد حاول الفيزيائيون الحصول على نتائج ايجابية بعـــد ادخال تعديلات على جهاز مايكلسون واجراء التجارب في أمكنة مختلفـــة وفي مختلف أوقات السنة ولكن النتيجة بقيت صفرا أي انه لايمكـــن كشـــــف سرعة الارض في الاثير .

8 - 5 - نتائج تجربة مايكلســـون:

كان من نتائج مايكلسون النتيجتين التاليتين :

١ - بطلان قانون جمع السرع ، أي لايمكن جمع سرعة الضوء مع سرعـــة الارض وأن سرعة الضوء C تكون واحدة في كل الاتجاهات في المرجع العطالي وهي كسرعة الصوت لاتتعلق بحركة المنبع .

٢ - لايمكن قياس سرعة الارض المطلقة في الاثير بواسطة تجارب ضوئيـة تجري فيها .

ولحل المعضلة التي خلفتها نتيجة تجربة مايكلســـــون ومورلي اقترح لورنتس Lorantz أن الاجسام المادية تتقلـــص عند حركتها وان هذا التقلص يكون فقط في اتجاه الحركة ، فـــاذا فرضنا أن الطول يساوي L عندما يكون ساكنا فان طوله يصبـــح L′ عندما يتحرك بسرعة u موازية لطوله ويساوي :

$$L' = L\sqrt{1 - u^2/C^2} \qquad (5-9)$$

وعند تطبيق هذه الظاهرة على جهاز مايكلسون ومورلي فان طول الذراع

CD هو الذي يتغير فقط ويصبح $L\sqrt{1-u^2/C^2}$ ولذلك فان المعادلة (8) لاتتغير أما المعادلة (6) فتصبح مساوية :

$$t_1 + t_2 = \frac{2L/C.\sqrt{1-u^2/C^2}}{1-u^2/C^2} = \frac{2L/C}{\sqrt{1-u^2/C^2}} \qquad (5-10)$$

وعند مقارنة هذه النتيجة مع المعادلة (8) نجد أن $t_1 + t_2 = 2t_3$ وهذا يفسر نتيجة تجربة مايكلسون ومورلي. ولقد قوبل هذا النجاح باعتراضات كبيرة على أساس أنه يفسر غرضا محدودا.

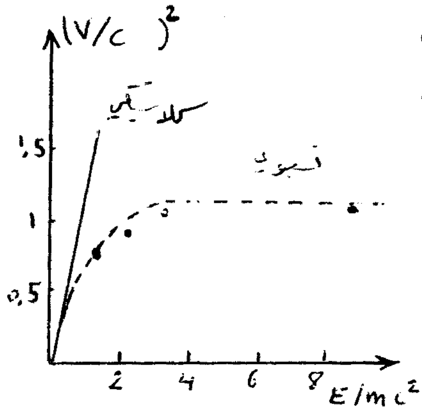
9 - 5 - فشل تحويلات غاليله وفشل الميكانيك الكلاسيكي عند السرعات العالية :

ان تحويلات غاليله والميكانيك النيوتني لاتأخذ بعين الاعتبار الظواهر التي تكون فيها السرعات قريبة من سرعة الضوء ونورد هنا بعض الامثلة على ذلك .

١ - ان سرعة الجزيئات لايمكن أن تتجاوز سرعة الضوء : وجد تجريبيا أن سرعة الجسيم لاتزداد الى مالانهاية عند زيادة طاقتها الحركية ولكنها تتناهى وفق خط متقارب نحو سرعة الضوء C . لذلك فان عبارة الطاقة الحركية $\frac{1}{2}mv^2$ لجسيم كتلته m وسرعته v تكون غير صحيحة ، انظر الشكل (4 - 5).

٢ - تركيب الشرع : بحسب تحويلات غاليه فان السرعات يمكن جمعها شعاعيا فمثلا: لنفرض أن مسافر يسير بسرعة $\vec{u}$ باتجاه مقدمة القطار وان القطار يسير بسرعة $\vec{v}$ فتكون سرعة المسافر

بالنسبة للارض هي مجموع السرعتين $\vec{u} + \vec{V}$ ولكن هذا القانون لايكون صالحا في حالة التفاعلات النووية حيث تكون سرع الجسيمات قريبة من سرعة الضوء . ان المحصلة لاتكون $\vec{v} + \vec{u}$ بل أقل منها بحيث لايمكن أن تتجاوز سرعة الضوء



الشكل (4 - 5)

٣ - تفرض تحويلات غاليله انه اذا كان راصدين يحملان ميقاتيين متماثلين ومتزامنين احداهما مثلا موجود في الجملة s' المتحركة بحركة مستقيمة منتظمة والاخر موجود على الارض كان الزمن الذي يقيسه الراصدين واحدا .سوف نبرهن فيما بعد ان هذه النتيجة تصبح خاطئة عند السرعات العالية أي القريبة من سرعة الضوء فمثلا ،يمضي الزمن بالنسبة لميزونات الاشعة الكونية ذات الطاقات العالية، 9 مرات أقل من الزمن الذي يمضي في المخبر (مرجع ساكن).

10 - 5 - نظرية اينشتاين النسبية :

تقسم نظرية اينشتاين النسبية الى نظريتين تدعى الاولى بالنسبية الخاصة أو المقصورة حيث وضعت عام 1905 وقد دعيت بالمقصورة أو الخاصة لانها تقتصر على الجمل العطالية أي اللامتسارعة وهذه النظرية تعبر عن مبدأ تكافؤ الجمل العطالية المتحركة بالنسبة لبعضها البعض . النظرية الثانية تدعى بالنسبية العامة حيث

وصفها اينشتاين عام 1915 وهي تعميم للنسبية الخاصة لتشمل حالة الجاذبية والجمل المتسارعة .

1 ـ 10ـ 5 ـ النظرية النسبية الخاصة :

تعبر الفرضتينين التاليتين عن مبدأ النسبية الخاصة :

١ ـ في مرجع عطالي ما تكون سرعة انتشار الضوء في الخلاء هي C في جميع الاتجاهات مهما تكن السرعة الانسحابية المنتظمة لهذا المرجع وهي مستقلة عن حركة المنبع والكاشف .

٢ ـ لايمكن تحديد سرعة المرجع العطالي مهما كان نوع التجارب الفيزيائية التي تجرى فيه .

تلغي الفرضية الاولى نظرية الاثير وتشرح النتيجة السلبية لتجربة مايكلسون ومورلي وترد على قانون جمع السرع في الميكانيك الكلاسيكي .

الفرضية الثانية هي تعميم لنسبية نيوتن التي تعتبر أن القوانين الفيزيائية هي متماثلة في جميع المراجع العطالية لانه اذا اختلفت هذه القوانين يمكن عندئذ تعيين حركة المرجع العطالي .

لنأخذ مثال توضيحي : لو أخذنا القانون الاساسي في التحريك $F_1 = m_1\gamma_1$ كما يراه راصد موجود في المرجع العطالي(s) فانه يوجد قانون مماثل : $F_2 = m_2\gamma_2$ كما يراه راصد في الجملة العطالية (s') . يجب عندئذ أن توجد تحويلات مختلفة عن تحويلات غاليله بحيث أن قوانين الطبيعة تكون واحدة في كلا المرجعين (s)و (s') .

2 – 10 – 2 – تحويلات لورنتـــــــــس :

عندتطبيق تحويلات غاليله على معادلات ماكسويل فان شكل هذه المعادلات يتغير وهذا يعني أن الظواهر الكهرطيسية في جملة عطالية متحركة سوف تختلف عن تلك التي تظهرفي جملة عطالية ساكنة ولذلك يمكن أن تستخدم هذه الظواهر لتعيين سرعة الجملة المتحركة المطلقة عن طريق اجراء قياسات ضوئية أو كهربائية مناسبة ولكن كما رأينا سابقا أن هذا غير ممكن تجريبيا. ولقد انحصر تفكير الفيزيائيون في ايجاد تحويلات أعم من تحويلات غاليله بحيث نتمكن من الانتقال من جملة عطالية لاخرى دون أن تتغير القوانين الفيزيائية. ولتحقيق ذلك يجب على التحويلات الجديدة أن تحقق الشروط التالية :

١ – أن تكون هذه التحويلات متناظرة بالنسبة لكلا الجملتين الساكنة $s(x,y,z,t)$ والمتحركة $s'(x', y', z', t')$ أي أن الصيغة الرياضية تبقى نفسها عند التحويل من جلة لاخرى وبالعكس.

٢ – أن تكون هذه التحويلات خطية.

٣ – تتطابق معادلات التحويل عندما تؤول السرعة النسبية للجملتين الى الصفر أي تصبح : $x = x'$, $y = y'$, $t = t'$, $z = z'$

٤ – أن تكون سرعة الضوء في الفراغ ثابتة في كلا الجملتين أي $C = C'$

لاستنتاج هذه التحويلات ،نكتب العلاقة الخطية بين x ، t' و t على الشكل

$$x' = Ax + Bt \qquad (5-11)$$

$$t' = Ex + Dt \qquad (5-12)$$

حيث A ، B ، E ، D ثوابت . وقد اعتبرنا أن $t \neq t'$.

اذا فرضنا أن $x' = 0$ أي أن مبدأ الاحداثيات o' للجملة s' يتحرك بسرعة u بالنسبة للجملة (o,x, y, z) تســـــاوي: $u = \frac{x}{t}$, وبتعويض قيمة x بالمقدار $u - t$ و $0 = x'$ في العلاقة (11) وبعد حذف الزمن نجد:

$$Au + B = 0 \tag{5-13}$$

وعند حل المعادلات (11)و(12) بالنسبة لـ x و t نجد العلاقتين

$$x = \frac{Dx' - Bt'}{AD - EB} \tag{5-14}$$

$$t = \frac{Ex' - At'}{EB - BD} \tag{5-15}$$

ومعادلات التحويل المعاكس للعلاقات (11)و(12)، مع الانتباه الى أن B و C يجب أن تغير اشاراتها عند ادارة المحاور x و x' في الاتجاه المعاكس ، هذه المعادلات هي :

$$x = Ax' - Bt' \tag{5-16}$$

$$t = -Ex' + Dt' \tag{5-17}$$

وبمقارنة (16)مع (14) نجد أن:

$$A = \frac{D}{AD - EB} \tag{5-18}$$

$$B = \frac{B}{AD - EB} \tag{5-19}$$

من (19) نجد أن :

$$AD - EB = 1 \tag{5-20}$$

ومن (18) نجد أن:

$$A = D \tag{5-21}$$

بتقسيم (11) على(12) نحصل على العلاقة :

$$\frac{x'}{t'} = \frac{\frac{A}{t}\, x + B}{\frac{x}{t}\, E + D} \tag{5-22}$$

وبفرض أن x هو موضع النقطة التي تستقبل اشارة ضوئية صادرة عن المبدأ o في بدء الزمن فان $C = \frac{x}{t}$. ومن الشرط الرابع فان: $C = C' = \frac{x}{t}$. نعوض هذه القيم في (22) فنحصل على :

$$C = \frac{AC + B}{CE + D} \tag{5-23}$$

الآن نعوض العلاقات (13) و (21) في (23) فنجد :

$$EC^2 + AC = AC - Au$$ ومنه :

$$E = - A \frac{u}{C^2} \tag{5-24}$$

وبتعويض العلاقات (24) و (13) و (21) في (20) نجد أن :

$$A^2 (1 - \frac{u^2}{C^2}) = 1 \tag{5-25}$$

واذا أخذنا بعين الاعتبار الشرط (3) فانه يجب اخذ الاشارة الموجبة للجذر التربيعي أي أن :

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/C^2}} \tag{5-26}$$

بتعويض قيم الثوابت A ، B ، E و D في العلاقتين (11) و (12) نجد التحويلات المطلوبة وهي :

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/C^2}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{ux}{C^2}}{\sqrt{1 - u^2/C^2}} \tag{5-27}$$

$$y = y' \quad , \quad z = z'$$

تدعى هذه المعادلات بتحويلات لورنتس .

للانتقال الى التحويل المعاكس نعوض قيم الثوابت السابقة في المعادلات(16)و(17) فنحصل على :

$$y = y' , \; z = z' , \; t= \frac{t' + \frac{ux'}{C^2}}{\sqrt{1-u^2/C^2}} \; , \; x= \frac{x' + ut'}{\sqrt{1-u^2/C^2}} \qquad (5-28)$$

من هذه المعادلات نجد :

١ - اذا وضعنا سرعة الضوء C مساوية لانهاية في تحويلات لورنتس فاننا نحصل على تحويلات غاليله.

٢ - لايمكن أن تكون السرعة النسبية u بالنسبة للجملتين أكبر من C لان x ، y، z و t تصبح عناصر تخيلية في احدى هاتين الجملتين.

٣ - في الحقيقة لايوجد سوى أربعة معادلات مستقلة لانه بالامكان أن نستنتج (28)من(27) والعكس صحيح. وكقاعدة عامة يمكن القول أن العلاقة بين كمية ما في احدى الجمل وبين الكمية المطابقة لها في الجملة الاخرى يمكن أن يعبر عنها بدلالة المعادلات(27)أو(28).

٤ - المعادلات (27)و(28) متماثلة حيث يمكن الانتقال من واحدة لاخرى عن طريق استبدال $+u$ بـ $-u$ واعتبار ذلك قاعدة عامة.

٥ - تسمح تحويلات لورنتس بحساب الاحداثيات الفراغية والزمانية لحادثة فيزيائية ما في مرجع عطالي (x', y', z', t') بدلالة احداثياتها (x, y, z, t) في مرجع عطالي آخر.

٦ – الزمن ليس مطلقا كما في ميكانيك نيوتن ولذلك قياسه في الجملة المتحركة يختلف عن قياسه في الجملة الساكنة أي أن قياس الزمن يتغير بالحركة النسبية و t لاتساوي t' الا عند السرعات النسبية الصغيرة . وهكذا فان الميكانيك النيوتني يعتبر حالة خاصة من النسبية عندما تكون $u \ll C$.

3 – 10 – 5 – تمدد الازمنة :

لنعد الى تجربة ميكلسون ومورلي ولنعتبر أن الظاهرة الفيزيائية المدروسة هي ظاهرة انتشار الاشارة الضوئية من المرآة B الى المرآة C والعودة الى B .

في المرجع المتحرك فان الراصد الموجود ضمنه يقيس زمن انتشار الاشارة الضوئية وعودتها فيراه مساويا الى :

$$2t' = \frac{2L}{C}$$

أما بالنسبة للراصد الموجود في المرجع العطالي الساكن فانه يجد أن الزمن الذي يقيس به نفس الظاهرة مساويا الى :

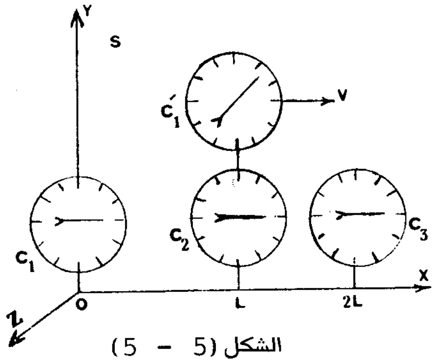
$$2t = \frac{2L/C}{\sqrt{1 - u^2/C^2}}$$

اذا فرضنا أن t' هو زمن استمرار الظاهرة الفيزيائية كما يراه الراصد المتحرك مع الجملة فان الراصد الساكن يجد أن نفس الظاهرة قد استغرقت زمنا t مساويا :

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - u^2/C^2}} \qquad t > t' \qquad (5-29)$$

أي أن الزمن كما يبدو للرصد s أطول من الزمن عند الراصد s'

وهذا المفعول يدعى بتمدد الازمنة. واذا وضعنا ميقاتية عند نقطة الاصل للجملة s أي عند $x = 0$ و عوضنا هذه القيمة في المعادلة الثانية من (27) نجد أن : $\acute{t}= \frac{t}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$ وتكون $t \leqslant t'$ أي أن الراصد في s' يرى أن الزمن أطول من الزمن عند الراصد s، وليس في هذه النتيجة تناقض مع (29) ولكنها تعبر عن حقيقة وهي أن الميقاتية المتحركة بالنسبة لراصد ما تكون بطيئة بالنسبة لميقاتيته الخاصة. انظر الشكل (5 -5).



الشكل (5 - 5)

4- 10- 5 - مفعول دوبلر النسبوي :

يعبر مفعول دوبلر النسبوي عن التغير الحاصل في طول موجة كهرطيسية نتيجة لحركة المنبع الضوئي الذي قد يكون ذرة أو نجم أو مجرة.....الخ.

ا - مفعول دوبلر الطولي :

اذا فرضنا أن المنبع الضوئي ساكن في المرجع s' الذي يتحرك بسرعة $u\vec{i}$ وفق المحور x بالنسبة للمرجع s. اذا أرسل المنبع اشارة ضوئية في لحظة ما ترددها ν' فان التردد ν الذي يستقبله الراصد في المرجع s الساكن يساوي :

$$\nu = \nu' \sqrt{\frac{1+u/C}{1-u/C}} > \nu'$$

عنداقتراب المنبع من الراصد في s

أو (5-30)

طول الموجة $$\lambda = \lambda' \sqrt{\frac{1-u/C}{1+u/C}}$$

ويساوي :

أو $$\nu = \nu' \sqrt{\frac{1-u/C}{1+u/C}} < \nu'$$

عند ابتعاد المنبع (5-31)

$$\lambda = \lambda' \sqrt{\frac{1+u/C}{1-u/C}}$$

٢ ـ مفعول دوبلر العرضي :

يعتبر هذا المفعول من نتائج النظرية النسبية ويطبق عندما يصنع الراصد زاوية قائمة مع اتجاه حركة الضوء الصادر عن المنبع ويساوي :

$$\nu = \frac{\nu'}{\sqrt{1 - u^2/C^2}} \tag{5-32}$$

مثال:

لنفرض راصدا ساكنا موجودا في جملة عطالية متحركة بسرعة $u = 0,2\ C$ بالنسبة لجملة ساكنة s وان هذا الراصد أصدر ضوءاً وحيد اللون طول موجته $\lambda = 5750\ A°$ (اللون الاصفر).

فاذا كانت الحركة باتجاه الراصد الساكن فان هذا الراصد يستقبل ضوءاً طول موجته $\lambda = 7050\ A°$ (أحمر كاشف) أما اذا تحرك المنبع

بعيدا عنه فان الراصد الساكن سوف يستقبل ضوءا طول موجته $\lambda = 4470\ A°$ (بنفسجي). واذا كانت سرعة المنبع الضوئي تساوي $u = 0,5\ C$ فان أطوال الموجات التي يستقبلها الراصد الساكن هي $\lambda = 10^4 A°$ عند اقتراب المنبع الضوئي منه و $\lambda = 3300\ A°$ عند ابتعاد المنبع عنه وفي كلا الحالتين فان الضوء يكون غير مرئي بالنسبة له. يستخدم مفعول دوبلر لقياس سرعة اقتراب أو ابتعاد النجوم والمجرات .... عن الارض .

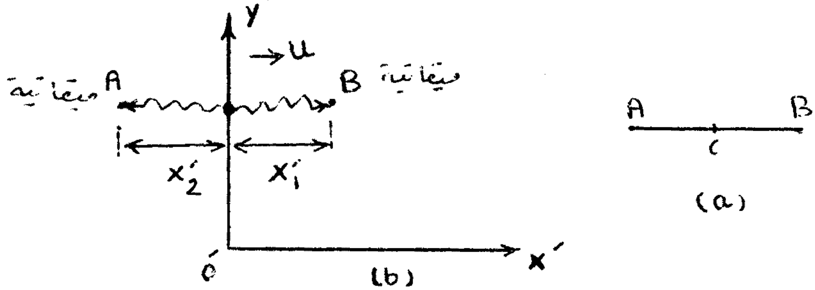
5 ـ 10 ـ 5 ـ التواقت :

نقول عن حادثتين أنهما متواقتين اذا وقعتا في آن واحد. يمكن الحصول على التواقت باجراء التجربة التالية : يوضع مصباحين ضوئيين في موضعين مثلا A و B ، شكل (5 - 6a) يقف راصد في C منتصف AB وينظر في آن واحد الى المصباحين بواسطة مرآة ذات وجهين ، فاذا شاهد الاشارتين الضوئيتين معا فانه يحزم بوقوعهما في آن واحد. ويمكن أن نضع ساعتين في A و B وارسال اشارة ضوئية من C في كلا الاتجاهين فتصل الى الساعتين في نفس الزمن ونحصل بذلك على ساعتين متواقتتين . لنفرض الآن أن الراصد في ´s الذي يتحرك بسرعة u (مركبة فضائية طويلة) يواقت ميقاتيتيه فهل يرى الراصد الساكن في s الساعتين متواقتتين ؟. ان الراصد في s سوف يرى أن الساعة الامامية تهرب من الاشارة الضوئية أي على الضوء أن يقطع أكثر من نصف المسافة ليبلغها ، اما الساعة الخلفية فتتقدم للقاء الاشارة الضوئية أي المسافة تقصر . فالراصد الساكن يرى أولا الاشارة الخلفية قبل الاشارة الامامية أي أن تسلسل الحوادث

مختلفا عند هذا الراصد فالحوادث الواقعة في آن واحد بالنسبة للراصد في s' ليستكذلك بالنسبة للراصد في s . لنفرض الآن وقوع حادثتين في الموضعين x_1 و x_2 في نفس اللحظة t بالنسبة لراصد ساكن في s ، ان الراصد في s' سوف يرى أن الفارق الزمني بين الحادثتين مساويا :

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{u(x_1 - x_2)/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad (5-33)$$

والخلاصة هي أن التواقت غير مطلق مثلما الزمن .



شكل (6 - 5)

6 ـ 10 ـ 5ـ تقلص الاطـــوال :

نأخذ قضيبا ساكنا يقع على امتداد المحور x في الجملة الساكنة s . بما أن القضيب ساكن فان احداثيات نهايتيه x_1 و x_2 تكون مستقلة عن الزمن t في هذه الجملةويكون طول القضيب الساكنمساويا $L_o = x_2 - x_1$.لننظرالآن من المرجع s' الذي يتحرك بسرعة $u\vec{i}$ بالنسبة للقضيب الساكن في الجملة s ان قياس طول القضيب في الجملة s' يتحدد في اللحظة t' التي يكون فيهاطرفا القضيب أونهايتاه منطبقين على الموضعين

x'_1 و x'_2 والمسافة بين x'_1 و x'_2 في الجملة s التي يتطابق عندها الموضعين في آن واحد على نهايتا القضيب تساوي الى طول القضيب المتحرك L في هـــذه الجملة ، أي :

$$L = x'_2(t') - x'_1(t')$$

ومن تحويلات لورنتـــس :

$$x_2 = x'_2(t')\gamma + Ct'\beta\gamma$$

$$x_1 = x'_1(t')\gamma + Ct'\beta\gamma$$

حيث $\beta = \frac{u}{C}$ و $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$

ومنه فان $x_2 - x_1$ تساوي :

$$x_2 - x_1 = L_o = [x'_2(t') - x'_1(t')]\gamma$$

$$L_o = L\gamma \Longrightarrow L = L_o(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (5-34)$$

وهذا المفعول يدعى بتقلص لورنتس أو تقلص لورنتس ـ فيتزجيرالـــد Fitwgerald- Lorentz لقضيب يتحرك موازيا لطوله . وكما نلاحظ من العلاقة (34) أن طول القضيب يتناقص كلما زادت سرعة الجملة $\vec{u}$ والراصد في s' يرى أن طول القضيب L أقصر من L_o وطول القضيـــب ينعدم عندما تبلغ $\vec{u}$ سرعة الضوء . من جهة أخرى فان الراصد في s يرى أن القضيب L الذي يتحرك بسرعة $\vec{u}$ بالنسبة له أقصر من طـــول القضيب L_o في جملته . فظاهرة التقلص كما نلاحظ هي ظاهرة متبادلـــة لدى الراصدين تنجم عن الحركة النسبية للمراقب والقضيب .

11 ـ 5 ـ النسبية العامة :

ان القوانين الفيزيائية التي مرت معنا في النظرية النسبية الخاصة كانت لامتغيرة في الجمل العطالية فقط وكانت قناعة اينشتاين بأن قوانين الطبيعة يجب أن يعبر عنها بصيغ تكون لامتغيرة في جميع الجمل العطالية متسارعة كانت أم غير متسارعة ولذلك عمل على تعميم نظريته النسبية الخاصة بحيث تشمل الجمل العطالية المتسارعة ولهذا السبب دعيت بالنظرية النسبية العامة .

1 ـ 11 ـ 5 ـ الكتلة الثقالية (الوازنة) والكتلة العطالية :

يمكن ،كما هو معروف ،قياس الكتلة عن طريق الميزان الذي يقيس بالضبط نسبة كتلتين وفي هذا القياس تلعب قوة الثقالة أو جاذبية الارض دورا في تعيين الكتلة ولذلك تدعى الكتل التي نحصل عليها بهذه الطريقة بالكتل الثقالية أو الوازنة .

اذا وضعنا جسما A على مستو أملس واعطيناه صدمة ،نلاحظ أن الجسم يتحرك بسرعة ما واذا كررنا هذه العملية على جسما آخر B وكانت سرعته تساوي ثلاثة أضعاف سرعة A نستنتج أن كتلة A أكبر بثلاث مرات من كتلة الجسم B . في هذه التجربة ليس للثقالة أي علاقة في تعيين الكتلة ،والكتلة المقاسة بهذه الطريقة تدعى بالكتلة العطالية . واذا قسنا بهاتين الطريقتين نسبة كتلتين فسوف نحصل على قيمة واحدة . هذا التكافؤ بين الكتلة العطالية والكتلة الثقالية اكتشفته الفيزياء الكلاسيكية ولكنها لم تعطه أي مدلول عميق، بينما النسبية العامة اعتبرت أن لهذا التكافؤ مدلول كبير وهو أن الكتلة الثقالية هي نفسها الكتلة العطالية

والتجربة التالية تثبت تطابق الكتلتين :

عندما أسقط غاليله من قمة برج بيزا عدة أجسام مختلفة من حيث الوزن والمادة بحيث يمكن اهمال مقاومة الهواء لها ،وجد أن هذه الاجسام تصل الارض في أزمنة متساوية مهما كان حجمها ومادتها وفي جميع الظروف . ان جاذبية الارض للاجسام تتناسب مع كتلها الثقالية في حين أن سرعة الاجسام تتعلق بكتلها العطالية، وتساوي زمن سقوط هذه الاجسام ماهو الاّ دليل على أن الكتلة العطالية تساوي الكتلة الثقالية .

اذا وضعنا عدة أجسام مختلفة بالوزن والطبيعة في مجال كهربائي معين نجد أن هذه الاجسام تكتسب تسارعات مختلفة لان القوة الكهربائية المؤثرة فيها تتناسب طردا مع الشحنة الكهربائية التي تحملها هذه الاجسام التي تتأثر حركتها بكتلها العطالية . لايوجد في هذا المثال اذن علاقة بين القوة الكهربائية والكتلة العطالية فالجسم الثقيل المشحون بكثافة ما يتحرك بتسارع أكبر من الجسم الخفيف المشحون بكثافة أقل . واذا تركت هذه الاجسام تسقط من ارتفاع ما الى سطح الارض فانها تصل بأزمنة متساوية .

2 - 11 - 5 - انحراف الضوء بالجاذبية :

يرى اينشتاين شيئا واحدا على صورتين حسب الظروف :صورة الثقالة وصورة العطالة ،فالثقالة هي قوة عطالية وقوانين التجاذب يجب أن تعبر عن قوانين العطالة .

ان للطاقة مظهر عطالي والتجاذب يؤثر في الطاقة كما يؤثر في المادة ولذلك فان الضوء الذي يحمل طاقة ما لاينتشر وفق

خط مستقيم بجوار الاجرام السماوية وانما ينحني مثل انحناء مسار القذيفة. ان الشعاع الضوئي المار بقرب الشمس ينحرف ٧٤ر١ ثانية عن مساره المستقيم وقد تم التأكد من ذلك للمرة الاولى عند كسوف الشمس الكلي في ٢٩ أيار ١٩١٩ . ان النسبية الخاصة لاتسمح بهذا التنبوء لذلك تعتبر حالة خاصة من النسبية العامة عندما يكون المجال التجاذبي معدوم أو شبه معدوم.

3- 11- 5 - التجاذب الكوني والهندسة :

ان الفراغ من حولنا كما تراه النسبية العامة ليس اقليديا وانما منحنيا (فراغ ريمان) والانحناء الذي يحصل على الفراغ هو بفعل الجاذبية. والفراغ لاينحني بانتظام بل أن انحناءه يزيد بالقرب من المادة والطاقة ويقل بالابتعاد عنهما. وبسبب الانحناء الملاحظ في ضوء النجوم بفعل الشمس فان مجموع زوايا المثلث تكون أكبر من 180° ونسبة محيط الدائرة الى قطرها لاتساوي π ،..... الخ.

ويمكن أن نفهم الانحناء الذي يحصل على الفراغ بفعل الجاذبية من المثال التوضيحي التالي :

اذا وضعنا قطعة قماش مشدودة على اطار دائري فان هندسة القماش تكون مستوية دون شك ولكن عند وضع كرة ثقيلة عند منتصف قطعة القماش فان القماش ينخفض في الوسط بتأثير ثقل الكرة . ان هندسة القماش حول الكرة لم تعد مستوية بل هي هندسة منحنية أما نقاط القماش البعيدة عن الكرة فتبقى مستوية .

ولو وضعنا الآن كرية صغيرة على حواف القماش البعيدة عن

مكان وجود الكرة فان حركتها ستكون مستقيمة مالم تقترب من الكرة ولكن عندما تدنو الكرية من الكرة فانها تنزلق الى الحفرة (مكان منحن ،حركة غير غاليليه).

لقد كان هدف النسبية العامة هو صياغة قوانين الفيزياء بحيث تحتفظ بشكلها عند الانتقال من مرجع عطالي الى مرجع غير عطالي (حركة متسارعة). بقي أن نشير الى أن الاختبار التجريبي للنظرية النسبية العامة هو من الصعوبة ولكن التجارب التي أجريت حتى الآن تؤيد صحة هذه النظرية (انحراف طيوف النجوم نحو الاحمر، دوران حضيض عطارد بزاوية مقدارها ٤٣ ثانية كل مئة عام).

5 - 12 - التحريك النسبوي :

1 - 12 - 5 - تحويل السرع :

لنفرض أن المرجع العطالي s' يتحرك حركة مستقيمة منتظمة بسرعة $\vec{u}$ بالنسبة لمرجع ساكن s وفق المحور x ، وان نقطة مادية تتحرك بسرعة $\vec{v}'$ في المرجع s' . ماهي السرعة $\vec{v}$ التي تتحرك بها هذه النقطة بالنسبة لراصد موجود في المرجع الساكن s ؟

في الميكانيك الكلاسيكي يكون الجواب هو التالي:
$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$ أما في الميكانيك النسبوي فالامر يختلف . ففي خلال الفاصل الزمني dt' تتحرك هذه النقطة في المرجع s' بمقدار $\vec{d\ell}' = \vec{v}'dt'$ حيث : $\vec{d\ell}' = (dx', dy', dz')$. والفترة الزمنية dt' توافق بالنسبة للراصد الساكن الفترة الزمنية dt :

$$dt = \frac{dt' + u\,dx'/C^2}{\sqrt{1 - u^2/C^2}} \qquad (5-35)$$

ومن هذه العلاقة نجد أن:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + udt'}{dt' + udx'/C^2} = \frac{v_x' + u}{1 + uv_x'/C^2} \qquad (5-36)$$

وهكذا فان السرعة بالنسبة لراصد في المرجع s هي أقل من $v_x' + u$ بمقدار $\frac{1}{1+uv_x'/C^2}$. والتحويل المعاكس للعلاقة (36) هو:

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 + uv_x/C^2} \qquad (5-37)$$

والسرعة على المحور y و z تساوي : $v_y = \frac{dy}{dt}$ و $v_z = \frac{dz}{dt}$

وبما أن $y = y'$ و $z = z'$ فان السرعة v_y و v_z تساوي :

$$v_y = \frac{dy'}{dt'}\frac{dt'}{dt} = v_y' \frac{dt'}{dt} = \frac{v_y'}{\gamma[1 + v_x'u/C^2]} \qquad (5-38)$$

$$v_z = \frac{v_z'}{1 + v_x'u/C^2}\sqrt{1 - u^2/C^2} = \frac{v_z'}{\gamma[1 + v_x'u/C^2]} \qquad (5-39)$$

حيث $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+u^2/C^2}}$.

والجدول رقم(1) يبين السرع في كلا الجملتين s و s´

السرعة في المرجع العطالـــــي s	السرعة في المرجع العطالـــــي ´s
$v_x = \dfrac{v'_x + u}{1 + v'_x u/C^2}$	$v'_x = \dfrac{v_x - u}{1 - uv_x/C^2}$
$v_y = \dfrac{v'_y}{\gamma[1 + (uv'_x/C^2)]}$	$v'_y = \dfrac{v_y}{\gamma[1 - (uv_x/C^2)]}$
$v_z = \dfrac{v'_z}{\gamma[1 + (uv'_x/C^2)]}$	$v_z = \dfrac{v_z}{\gamma[1 - (uv_x/C^2)]}$

عندما يكون $v'_y = y'_z = 0$ فان عبارة السرعة تكتب بشكل متجهي علـــــى النحو التالي :

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}' + \vec{u}}{1 + u\acute{v}/C^2} \tag{5-40}$$

2 ـ 12 ـ 5 ـ تحويل التســـارع :

لايجاد التسارع في المرجع s نكتب :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt'}\;\frac{dt'}{dt} = [\frac{d}{dt'}(\frac{v'_x + u}{1+uv'_x/C^2})]\,[\frac{1-uv_x/C^2}{\sqrt{1 - u^2/C^2}}]$$

وبتعويض v_x بقيمتها من العلاقة (36) نجد :

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3[1 + (uv'_x/C^2]^3} \tag{5-41}$$

وبنفس الطريقة نجد أن a_y و a_z يساويان :

$$a_y = \frac{1}{\gamma^2[1 + uv'_x/C^2]^2}\{a'_y - \frac{u.v'_y}{C^2 + uv'_x} a'_x\} \qquad (5-42)$$

$$a_z = \frac{1}{\gamma^2[1 + uv'_x/C^2]^2}\{a'_z - \frac{u.v'_z}{C^2 + uv'_x} a'_x\} \qquad (5-43)$$

والتحويل المعاكس للتسارع هو:

$$a'_x = \frac{a_x}{\gamma^3[1 - uv_x/C^2]} \qquad (5-44)$$

$$a'_y = \frac{1}{\gamma^2[1 - uv_x/C^2]^2}\{a_y + \frac{v_y.u}{C^2 - uv_x} a_x\} \qquad (5-45)$$

$$a'_z = \frac{1}{\gamma^2[1 - uv_x/C^2]^2}\{a_z + \frac{u.v_z}{C^2 - uv_x} a_x\} \qquad (5-46)$$

3 – 12 – 5 – الطاقة النسبوية :

من تعريف كمية الحركة أو الاندفاع في الميكانيك النسبوي :

$$P = \frac{m_o v}{(1 - v^2/C^2)^{\frac{1}{2}}} = m_o C\beta\gamma \qquad (5-47)$$

حيث v هي سرعة الجسيم . $\beta = \frac{v}{C}$.

بتربيع العلاقة (47) نجد أن :

$$P^2 \equiv m_o^2 C^2 \beta^2 \gamma^2$$

وبضرب المطابقة التالية :

$$\frac{1}{1 - v^2/C^2} - \frac{v^2/C^2}{1 - v^2/C^2} = 1$$

أو:

$$\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$$

بـ $m_o^2C^4$ نجد:

$$m_o^2C^4\gamma^2 - P^2C^2 = m_o^2C^4 \qquad (5-48)$$

يمثل المقدار $m_o^2C^4\gamma^2$ كمية فيزيائية هامة لانه عندما نطرح منه المقدار P^2C^2 نحصل على المقدار $m_o^2C^2$ وهو مقدار لايتغير ازاء تحويلات لورنتس ، عندما تكون $\beta = \frac{v}{C} << 1$ فان المقدار $m_oC^2\gamma$ يكتب على الشكل التالي:

$$\frac{m_oC^2}{\sqrt{1 - v^2/C^2}} \cong m_oC^2(1 + \frac{1}{2}v^2/C^2 + ..) \cong m_oC^2 + \frac{1}{2}m_ov^2 + . \qquad (5-49)$$

يدعى المقدار $E_o = m_oC^2$ بطاقة الجسيم السكونية والمقدار $E = m(v)C^2 \cong \frac{m_oC^2}{\sqrt{1 - v^2/C^2}}$ بالطاقة الكلية للجسيم أما المقدار $\frac{1}{2}m_ov^2 =$ فيمثل الطاقة الحركية للجسيم في الميكانيك الكلاسيكي ويساوي في النسبية الى:

$$E_k = \Delta E = E - E_o = (m - m_o)C^2 \qquad (5-50)$$

يعبر القانون $E = mC^2$ عن التكافؤ بين الكتلة والطاقة فكلما زادت الكتلة (عند السرع الكبيرة للجسيم) زادت طاقة الجسيم فالعلاقة بين E و m اذن هي علاقة تناسب ،

بادخال E الى العلاقة (48) حيث تصبح على الشكل التالي:

$$E^2 - P^2C^2 = m_o^2C^4 \qquad (5-51)$$

تسمح هذه العلاقة بحساب E اذا عرفنا الاندفاع P والعكس صحيح وذلك من أجل جسيم كتلته السكونية m_o معلومة . عند الانتقال من مرجع عطالي لاخر تستبدل P بالمقدار P' و E بـ E' فتصبح العلاقة (51) على الشكل:

$$E'^2 - P'^2C^2 = E^2 - P^2C^2 = m_o^2C^4 \qquad (5-52)$$

فالعلاقة (51) اذن لاتتغير عند تطبيق تحويلات لورنتس عليها وهي تمثل مقدارا لامتغيرا . وهنا نشير الى أن m_o لاتتغير عند تطبيق تحويلات لورنتس . والخلاصة أنه مهما كان المرجع العطالي الذي نراقب فيه الجسيم فان طاقة الجسيم واندفاعه (كمية حركته) يحققان دوما العلاقة (51).

4 – 12 – 5 – المتجهة الرباعية للاندفاع:

نفرض أن جسيما في المرجع s كتلته السكونية m_o وسرعته $v(v_x, v_y, v_z)$ ويملك طاقة واندفاعا هما :

$$E = \frac{m_oC^2}{\sqrt{1 - v^2/C^2}}$$

$$\vec{P} = \frac{m_o\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/C^2}}$$

لنوجد طاقة هذا الجسيم E' واندفاعه $\vec{P}'$ كما يراه راصد مرتبط مع المرجع العطالي s' الذي يتحرك حركة مستقيمة منتظمة بسرعة u موازية للمحور ox بالنسبة للمرجع s . اذا كانت $\vec{v}'(v_x', v_y', v_z')$ هي سرعة الجسيم بالنسبة للمرجع العطالي s فان العلاقة بين v_x و v_x' تعطى بالعلاقات الموجودة في الجدول (١) . لنحسب المقدار

$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/C^2}}$ بدلالة u و v'_x:

$$v^2 = \frac{1}{(1+uv'_x/C^2)^2}\left[(v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z)(1-u^2/C^2) + v'^2_x\frac{u^2}{C^2} + u^2 + 2uv'_x\right]$$

وبالتقسيم على C^2 نجد:

$$\frac{v^2}{C^2} = \frac{1}{(1+uv'_x/C^2)^2}\cdot\left[(1-u^2/C^2)\frac{v'^2}{C^2} + (1+uv'_x/C^2)^2 - (1-u^2/C^2)\right],$$

و:

$$1 - \frac{v^2}{C^2} = \frac{1}{(1+uv'_x/C^2)^2}\left(1-\frac{u^2}{C^2}\right)\left(1-\frac{v'^2}{C^2}\right)$$

ومنه فان:

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/C^2}} = \frac{1+uv'_x/C^2}{\sqrt{1-u^2/C^2}\cdot\sqrt{1-v'^2/C^2}}$$

وبالتالي فان:

$$E = \frac{m_o C^2/\sqrt{1-v'^2/C^2} + u(m_o v'_x/\sqrt{1-v'^2/C^2})}{\sqrt{1-u^2/C^2}}$$

$$= \frac{E' + up'_x}{\sqrt{1-u^2/C^2}} \qquad (5\text{-}52)$$

$$p_z = p'_z \quad , \quad p_y = p'_y \quad , \quad p_x = \frac{p'_x + uE'/C^2}{\sqrt{1-u^2/C^2}}$$

ولاجراء التحويل المعاكس نعوض $+u$ بـ $-u$ ونستبدل الكمية الغير مفتوحة بكمية مفتوحة فنجد:

$$E' = \frac{E - up_x}{\sqrt{1 - u^2/C^2}}$$

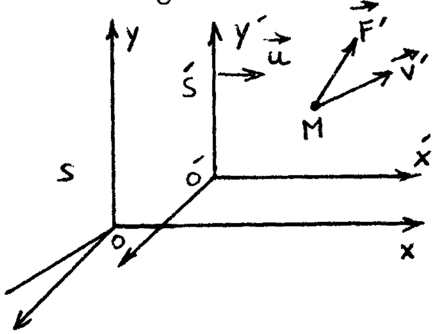
$$p'_x = \frac{p_x - uE/C^2}{\sqrt{1 - u^2/C^2}} \qquad (5-53)$$

$$p'_y = p_y \ , \quad p'_z = p_z$$

تشير هذه الصيغ الى أن $(\frac{E}{C^2}, p_x, p_y, p_z)$ تتحول كتحول مركبات متجهة رباعية لذلك فهي تعرف متجهة اندفاع رباعية: $\vec{p} = (\vec{p}\ ,\ i\frac{E}{C})$ ومربع طويلة هذه المتجهة هي: $p^2 - \frac{E^2}{C^2}$ تمثل مقدارا لامتغيرا.

13 ـ 5 ـ تطبيق تحويلات لورنتس على القوى :

بفرض أن نقطة مادية M كتلتها السكونية m_o في المرجع s' تنتقل تحت تأثير القوة $\vec{F}'$ بالنسبة لراصد مرتبط بهذا المرجع العطالي، الشكل (5 - 7)، ما هي قيمة هذه القوة كما يراها راصد موجود في المرجع s ؟



الشكل (5 - 7)

حسب المعادلة الاساسية في التحريك فان القوة $\vec{F}$ هي مشتق الدفع $\vec{p}$ بالنسبة للزمن المقاس في المرجع s أي: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ وبموجب تحويلات لورنتس فان الفترة الزمنية dt توافق فترة زمنية dt' في المرجع s' وانتقالا قدره $(dx' = v'_x dt\ , dy' = v'_y dt',\ dz' = v'_z dt')$ للجسيم في المرجع s' وهذه الفترة الزمنية dt تعطى بالعلاقة:

$$dt = \frac{dt' + udx'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

وبشكل مماثل فان تغير الاندفاع $\overrightarrow{dp}$ خلال الفترة الزمنية dt يساوي:

$$dp_x = \frac{dp'_x + udE'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad , \; dp_y = dp'_y \quad , \; dp_z = dp'_z$$

نستنتج مما سبق أن القوة $\vec{F}$ تساوي :

$$\left.\begin{aligned}
F_x &= \frac{dp_x}{dt} = \frac{dp'_x + udE'/c^2}{dt' + udx'/c^2} \\
&= \frac{1}{1 + uv'_x/c^2}\left[\frac{dp'_x}{dt'} + \frac{u}{c^2}\,\frac{dE'}{dt'}\right] \\
F_y &= \frac{dp_y}{dt} = \frac{dp'_y \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2}}{dt'(1 + uv'_x/c^2)} \\
F_z &= \frac{dp_z}{dt} = \frac{dp'_z}{dt'}\,\frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{\sqrt{1 - uv'_x/c^2}}
\end{aligned}\right\} \quad (5-54)$$

وتغير الطاقة dE' خلال الفترة الزمنية dt' يساوي :

$$dE' = \vec{F}' \cdot \vec{v}' \cdot dt' \quad (5-55)$$

وبتعويض قيمة dE في العلاقات (54) نجد تحويلات القوى :

$$F_x = \frac{1}{1 + uv'_x/C^2}[F'_x + \frac{u}{C^2} \vec{F}'.\vec{v}']$$

$$F_y = F'_y \frac{\sqrt{1 - u^2/C^2}}{1 + uv'_x/C^2} \qquad (5-56)$$

$$F_z = F'_z \frac{\sqrt{1 - u^2/C^2}}{1 + uv'_x/C^2}$$

وفي الحالة التي نختار فيها السرعة $\vec{v}'$ موازية للسرعة الانسحابية $\vec{u}$ التي تتحرك وفق ox فاننا نحصل على :

$$\vec{F}'.\vec{v}' = F'_x.v'_x$$

وعلاقات التحويل (56) تصبح على الشكل :

$$F_x = F'_x$$

$$F_y = F'_y \frac{\sqrt{1 - u^2/C^2}}{1 + uv'_x/C^2} \qquad (5-57)$$

$$F_z = F'_z \frac{\sqrt{1 - u^2/C^2}}{1 + uv'_x/C^2}$$

في الحالة الخاصة التي تكون فيها سرعة الجسيم v' معدومة فان عبارات التحويل بين $\vec{F}'$ و $\vec{F}$ تبسط على النحو التالي :

$$F'_x = F_x$$

$$F'_y = \gamma F_y \qquad (5-58)$$

$$F'_z = \gamma F_z$$

وهذه الصيغ ستكون ملاءمة لتحديد صيغ الحقول الكهربائية والمغناطيسية

عند تغيير المرجع العطالي .

14 – 5 – تحويلات الحقل الكهربائي والحقل المغناطيسي :

اذا وقع جسيم شحنته q وسرعته $\vec{v}$ في حقل كهربائي $\vec{E}$ وحقل تحريض مغناطيسي $\vec{B}$ فانه يخضع الى قوة لورنتس التالية مهما كان المرجع العطالي أو الغاليلي :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \tag{5-59}$$

وفي الحقيقة فان $\vec{E}$ و $\vec{B}$ يلعبان دورا أساسيا في وصف الجملة ولكن القيم التي تأخذها الحقول تعتمد على المرجع العطالي المختار من قبل الراصدين .

1 – تحويلات الحقل الكهربائي $\vec{E}$:

لنفرض أنه في المرجع الساكن يوجد حقل كهربائي $\vec{E}$ وحقل تحريض مغناطيسي $\vec{B}$ ولنوجد الحقل $\vec{E}$ الذي يقيسه راصد متحرك مع المرجع s بسرعة انسحابية منتظمة $\vec{u}$. لكي يكتشف الراصد المتحرك الحقل $\vec{E}'$ فانه يستعمل شحنة نقطية q ثابتة في مرجعه s' وبذلك تكون سرعة هذه الشحنة مساوية (0 , 0 , 0) في المرجع s' و (u , 0 , 0) في المرجع العطالي s . ان القوة التي تخضع لها الشحنة q هي : $\vec{F}' = q\vec{E}'$ بالنسبة الراصد يرتبط مع s' و $\vec{F}' = q(\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B})$ بالنسبة لراصد يرتبط مع s وبموجب تحويلات القوى (58) فان مركبات هذه القوى هي :

$$F'_x = F_x \quad , \quad F'_y = \frac{F_y}{\sqrt{1-u^2/C^2}} \quad , \quad F'_z = \frac{F_z}{\sqrt{1-u^2/C^2}}$$

وتكون مركبات الحقل الكهربائي $\vec{E}'$ كما يقيسها الراصد المتحرك هي :

$$\left.\begin{aligned}
E'_x &= E_x \\
E'_y &= \frac{(\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B})_y}{\sqrt{1 - u^2/C^2}} = \frac{E_y - uB_z}{\sqrt{1 - u^2/C^2}} \\
E'_z &= \frac{(\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B})_z}{\sqrt{1 - u^2/C^2}} = \frac{E_z + uB_y}{\sqrt{1 - u^2/C^2}}
\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}60)$$

والتحويلات المعاكسة هي :

$$\left.\begin{aligned}
E_x &= E'_x \\
E_y &= \frac{(\vec{E}' - \vec{u} \wedge \vec{B}')_y}{\sqrt{1 - u^2/C^2}} = \frac{E'_y + uB'_z}{\sqrt{1 - u^2/C^2}} \\
E_z &= \frac{(\vec{E}' - \vec{u} \wedge \vec{B}')_z}{\sqrt{1 - u^2/C^2}} = \frac{E'_z - uB'_y}{\sqrt{1 - u^2/C^2}}
\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}61)$$

فاذا ساد المرجع S ،مثلا ،حقل تحريض مغناطيسي $\vec{B}$ فقط مواز للمحور oz أي أن $B_y = 0,\ E_x = E_y = E_z = 0$: ولذلك يرى الراصد المرتبط مع ´S حقلا تحريضيا مغناطيسيا $\vec{B}'$ وحقلا كهربائيا $\vec{E}'$ مركباته $(0, \frac{-uB_z}{\sqrt{1-u^2/C^2}}, 0)$.

2 ـ تحويلات حقل التحريض المغناطيسي $\vec{B}$:

لكشف الحقل $\vec{B}$ فان الراصد الموجود في ´S يستعمل شحنة q متحركة في هذا المرجع ، واذا اختيرت سرعة هذه الشحنة $\vec{V}'$ موازية للمحور ´ox فان القوة المؤثرة على هذا الجسيم المشحون في الجملة ´S تساوي :

$$\vec{F}' \begin{cases} qE'_x \\ q(E'_y - v'B'_z) \\ q(E'_z + v'B'_y) \end{cases}$$

من جهة أخرى تكون سرعة الجسيم في المرجع العطالي s مساوية :

$$\vec{v} \begin{cases} v = \dfrac{u + v'}{1 + uv'/C^2} \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

ولذلك فان القوة كما يراها الراصد في s تساوي :

$$\vec{F}[qE_x,\ q(E_y - vB_z),\ q(E_z + uB_y)]$$

وبمقارنة مركبات القوة على المحور ox نجدها متساوية وبالتالي فان $E_x = E'_x$ ، أما العلاقة بين F'_y و F_y فتساوي :

$$F_y = F'_y \frac{\sqrt{1 - u^2/C^2}}{1 + uv'/C^2}$$

وبترتيب هذه العلاقة نجد :

$$(1 + uv'/C^2)F_y = F'_y . \sqrt{1 - u^2/C^2}$$

وبتعويض قيمة F'_y و F_y بقيمتها نحصل على :

$$(1 + uv'/C^2)(E_y - vB_z) = (E'_y - v'B'_z)(\sqrt{1 - u^2/C^2})$$

$$(1 + uv'/C^2)(E_y - vB_z) = E_y - uB_z - v'B'_z\sqrt{1 - u^2/C^2}$$

واذا أخذنا بعين الاعتبار هذه العلاقة :

$$1 + \frac{uv'}{C^2} = \frac{v' + u}{v}$$

المستنتجة من قانون جمع السرع فان العلاقة السابقة تساوي :

$$\left(\frac{v' + u}{v}\right)(E_y - vB_y) = E_y - uB_z - v'B_z'\sqrt{1 - u^2/C^2}$$

وبفك الاقواس والترتيب نحصل على :

$$\frac{u}{C^2} E_y - B_z = -B_z'\sqrt{1 - u^2/C^2}$$ ومنه :

$$B_z' = \frac{B_z - uE_y/C^2}{\sqrt{1 - u^2/C^2}} \qquad (5-62)$$

ونحصل على علاقة مشابهة من أجل B_y' . منأجل حساب B_x' يكفي اختيار شحنة q سرعتها $\vec{v}'$ موازية للمحور oy : $\vec{v}'(0, \vec{v}', 0)$ وتكـــون $\vec{v}$ مساوية : $\vec{v}(u, v'\sqrt{1-u^2/C^2}, 0)$ ومقارنة F_z مع F_z' .

وباعتبار أن السرعة v_x' معدومة ينتج من (58) أن :

$$F_z = F_z'\sqrt{1 - u^2/C^2}$$

وبتعويض قيمة F_z' و F_z نجد :

$$q(E_z + uB_y - v'B_x\sqrt{1 - u^2/C^2}$$

$$= q\sqrt{1 - u^2/C^2}(E_z' - v'B_x')$$

فاذا أخذنا بعين الاعتبار أن E_z' يساوي :

$$E_z' = \frac{E_z + uB_y}{\sqrt{1 - u^2/C^2}}$$

نجد بسهولة أن :

$$B_x = B_x' \qquad (5-63)$$

وفي الجدول (٢) التالي نعطي قيم تحويلات $\vec{B}$ والتحويلات المعاكسة

$$B'_x = B_x \qquad B_x = B'_x$$

$$B'_y = \frac{B_y + yE_z/C^2}{\sqrt{1 - u^2/C^2}} \qquad B_y = \frac{B'_y - uE'_z/C^2}{\sqrt{1 - u^2/C^2}}$$

$$B'_z = \frac{B_z - uE_y/C^2}{\sqrt{1 - u^2/C^2}} \qquad B_z = \frac{B'_z + uE'_y/C^2}{\sqrt{1 - u^2/C^2}}$$

15- 5 – ثبات الشحنة الكهربائية :

لنفرض أن q_o شحنة ساكنة في المرجع s' ، ان هذه الشحنة ستظهر بالنسبة لراصد ساكن في s اما مساوية $q_o\gamma$ أو $\frac{q_o}{\gamma}$. في الواقع ان هذا الافتراض هو خاطىء اذ أن الشحنة الكهربائية هي ثابتة (لامتغيرة) . فالجسيم المشحون يبقى مشحونا بنفس الشحنة الكهربائية عند كلا الراصدين في s ، و s' ، ومن المؤكد أن الاثبات المباشر لثبات الشحنة هو ما وجد تجريبيا من أن النسبة $\frac{e}{m}$ لجسيم مشحون (الكترون) يتحرك بسرعة v يحقق العلاقة :

$$\frac{e}{m} = \frac{e}{m_o}(1 - v^2/C^2)^{\frac{1}{2}} \tag{5-64}$$

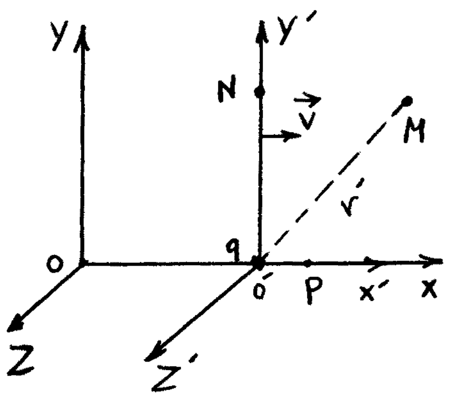
ان شحنة الالكترون e تبقى اذن ثابتة ومساوية $1,6 \times 10^{-19}$col مهما كانت سرعة الجسيم بينما تتغير كتلة الالكترون m تبعا للسرعة . وقد تم التأكد تجريبيا من صحة هذه العلاقة في مسرعات الجسيمات ذات الطاقات العالية جدا .

وهناك برهان آخر على ثبات الشحنة هو أن المعادن

لاتنشحن عند تسخينها أو تبريدها ،على الرغم من أن الطاقة الحركية الوسطية للالكترونات الناقلة تتغير على نحو أقل بكثير من تغير الطاقة الحركية الوسطية للذرات ∘ يظهر أيضا ثبات الشحنة بالنسبة للسرعة من خلال التجربة التي قام بها Fraser , Carlon و Hughes عام 1968 وذلك بقذف حزمة من ذرات السيزيوم في منطقة يسودها حقل كهربائي شديد∘ فاذا كانت ذرات السيزيوم غير حيادية فسوف تنحرف ولكن التجربة بينت أنه لايوجد أي انحراف وكانت دقة القياس $\frac{\Delta Q}{Q} < 10^{-18}$∘ حيث Q هي شحنة النواة، ΔQ شحنة الذرة∘ وهذه التجربة تبرهن أيضا على أن شحنة الالكترونات توازن شحنة النواة ∘ ان الكترونات الطبقة الخارجية تمتلك سرعات من رتبة 0,4C وهذا يشكل أيضا برهانا قويا على أن الشحنة الكهربائية لاتتغير مع السرعة بل تبقى ثابتة∘

16– 5 – الحقل الكهربائي $\vec{E}$ وحقل التحريض المغناطيسي $\vec{B}$ الناتج عن شحنة متحركة حركة مستقيمة منتظمة:

نختار المحاورللجملة s و ´s بحيث تكون سرعة الجسيم موازية لـ ox و´ox شكل (5 – 8) كما نختار سرعة الجملة ´s بالنسبة لـ s مساوية $\vec{v}$ بدلا من u∘ ان الشحنة q التي تكون ساكنة في المرجع ´s تولد في النقطة M



الشكل (5 – 8)

حقلا كهربائيا صرفا $\vec{E}'$ في s' :

$$\vec{E}' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{\vec{r}'}{r'^3}$$

$$\vec{B}' = 0$$

حيث r' هو بعد النقطة M عن o' في المرجع s' . ان الحقل الكهربائي $\vec{E}$ وحقل التحريض المغناطيسي $\vec{B}$ اللذين يقيسهما مراقب ساكن في s هما :

1 ـ الحقل الكهربائي $\vec{E}$. لدينا :

$$E_x = E'_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\,\frac{x'}{r'^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{1-v^2/C^2}}\,\frac{x - vt}{r'^3}$$

$$E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1-v^2/C^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{1-v^2/C^2}}\cdot\frac{y'}{r'^3} \qquad (5\text{-}65)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{1-v^2/C^2}}\,\frac{y}{r'^3}$$

$$E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1-v^2/C^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{1-v^2/C^2}}\,\frac{z'}{r'^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{1-v^2/C^2}}\,\frac{z}{r'^3}$$

وبشكل متجهي يكتب E على الشكل :

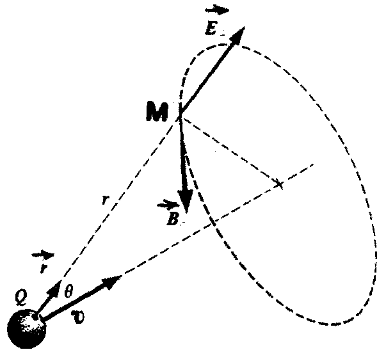
$$\vec{E} = \frac{\gamma q[(x - vt)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}]}{4\pi\varepsilon_o[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]}$$

حيث أن :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/C^2}}, \quad r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

والحقل الكهربائي المتولد في M يكون محمولا على شعاع الموضع الواصل بين الشحنة والنقطة M وواقعا في المستوى الذي يصنع زاوية قائمة

مع حركة الشحنة وتكون خطوط حقل التحريض المغناطيسي عبارة عن دوائر تقع مراكزها على مسار الشحنة الشكل (9 - 5)، و$\vec{E}$ لايكون ذو تناظر كروي .



الشكل (9 - 5)

ولو أخذنا، على سبيل المثال نقطة ما مثل p واقعة على المحور ox (y= z= 0) فان الحقل $\vec{E}$ يساوي :

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{(1 - v^2/C^2)^{3/2}}{\sqrt{1 - v^2/C^2}} \frac{(x - vt)}{(x - vt)^3}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{(1 - v^2/C^2)}{(x - vt)^2}$$

$$E_y = E_z = 0$$

واذا كانت الشحنة ساكنة في نقطة فاصلتها (x - vt) فانها تولد حقلا كهربائيا (كولوني) يساوي :

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1}{(x - vt)^2}$$

بسبب حركة الشحنة بسرعة v باتجاه ox فان الحقل الكهربائي $\vec{E}$ يقل بالعامل $(1-v^2/C^2)$ في الاتجاه ox . وبالمقابل فان الحقل الكهربائي في نقطة مثل N الواقعة على المحور oy' $(x'=z'=0)$ يساوي

$$E_x = 0$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \gamma \frac{1}{y^2}$$

$$E_z = 0$$

أما الحقل الكولوني الناجم عن الشحنة الساكنة في N فهو:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1}{y^2}$$

وهكذا نجد أن الحقل الكهربائي $\vec{E}$ الناجم عن شحنة كهربائية تتحرك حركة مستقيمة منتظمة في اتجاه عمودي على منحى الحركة يزداد بمقدار $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/C^2}}$ بالنسبة للحقل الكهربائي الناتج عن شحنة ساكنة

2 – حقل التحريض المغناطيسي :

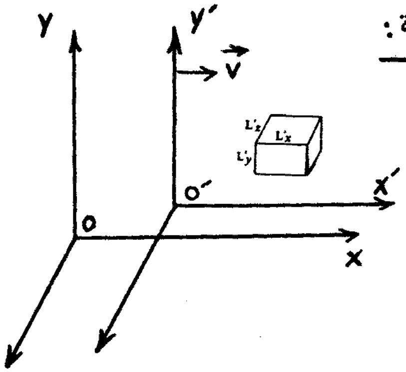
نحصل على حقل التحريض المغناطيسي $\vec{B}$ في الجملة S بالاعتماد على تحويلات لورنتس ويساوي :

$$\left.\begin{aligned} B_x &= B'_x = 0 \\ B_y &= -\frac{vE'_z}{C^2\sqrt{1 - v^2/C^2}} = \frac{(\vec{v} \wedge \vec{E})_y}{C^2} \\ B_z &= \frac{vE'_y}{C^2\sqrt{1 - v^2/C^2}} = \frac{(\vec{v} \wedge \vec{E})_z}{C^2} \end{aligned}\right\} \qquad (5-66)$$

نستنتج مما تقدم أن الحقل $\vec{B}$ في النقطة M الناتج عن شحنة تتحرك حركة انسحابية منتظمة يكون تابعا لسرعة الشحنة $\vec{v}$ وللحقل $\vec{E}$ الناتج في تلك النقطة ونكتب العلاقات (66) بشكل متجه كالتالي :

$$\vec{B} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{E}}{C^2} \qquad (5-67)$$

17 – 5 – متجهة كثافةالتيار الرباعية :



الشكل (10 - 5)

لنأخذ جملة من الشحنات الساكنة كثافتها الوسطية ρ_o في المرجع ´s تتحرك حركة انسحابية منتظمة بسرعة $\vec{v}$ بالنسبة للمرجع s ،شكل (10 - 5) . ان الراصد الموجود في s يرى أن هناك شحنات وتيارا مادامت الشحنات تتحرك بالنسبة له . لتكن q_o الشحنة الكلية لمكعب طول ضلعه ´L موجود في ´s وتكون ρ_o مساوية :

$$\rho_o = \frac{q_o}{L'^3}$$

أما بالنسبة لراصد ساكن فانه يرى أن المكعب هو متوازي مستطيلات أضلاعه :

$$L_x = L'\sqrt{1 - v^2/C^2}$$

$$L_y = L'$$

$$L_z = L'$$

وهذا المكعب يحوي بالتأكيد نفس الشحنة الكلية q_o سواء لوحظت من قبل راصد ساكن أو متحرك . ان كثافة الشحنات كما يراها راصد ساكن هي :

$$\rho = \frac{q_o}{L_x L_y L_z} = \frac{\rho_o}{\sqrt{1 - v^2/C^2}}$$

ان كل شحنة عند هذا الراصد لها سرعة متساوية $\vec{v}(v , 0 , 0)$ وهو

يصف جملة الشحنات بالكثافة :

$$\rho = \frac{\rho_o}{\sqrt{1 - v^2/C^2}} \qquad (5-68)$$

وبكثافة تيار :

$$\vec{j} = \rho\vec{v} = \frac{\rho_o\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/C^2}} \qquad (5-69)$$

تؤلف المتجهة $(\rho, \vec{j}) = (\rho, j_x, j_y, j_z)$ متجهة رباعية وتسمى "متجهة كثافة التيار الرباعية وتكتب بالشكل : $\vec{J} = (\vec{j}\ ,\ iC\rho)$ والمقدار $j^2 - C^2\rho^2$ يكون مقدارا لامتغيرا عند تطبيق تحويلات لورنتس .

لنفرض الآن أن المراقب الموجود في s' والذي يتحرك حركة مستقيمة منتظمة $\vec{u}$ بالنسبة للمرجع s يصف جملة الشحنات بالمركبات الاربعة $(\rho', j'_x\ ,\ j'_y, j'_z)$ لمتجهة كثافة التيار الرباعية :

ان الراصد في s يصف نفس جملة الشحنات بالمركبات :

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{\rho' + u j'_x/C^2}{\sqrt{1 - u^2/C^2}} \\ j_x &= \frac{j'_x + u\rho'}{\sqrt{1 - u^2/C^2}} \\ j_y &= j'_y \quad , \quad j_z = j'_z \end{aligned}\right\} \qquad (5-70)$$

والتحويلات المعاكسة هي :

$$\left.\begin{aligned} j'_x &= \frac{j_x - u\rho}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ \rho' &= \frac{\rho - j_x u/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ j'_y &= j_y \quad , \quad j'_z = j_z \end{aligned}\right\} \qquad (5-71)$$

18 – 5 – متجهة الكمون الرباعية $\vec{A}$:

للبرهان على أن $(\vec{A}, V/c^2)$ هي متجهة رباعية نستخدم تحويلات الحقول التي مرت معنا سابقا . في المرجع العطالي s فان المركبات مثلا ، E_y و B_z تساوي :

$$E_y = \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \vec{V}\right)_y = -\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$B_z = (\overrightarrow{\text{rot } \vec{A}})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

حيث V الكمون السلمي . لنرى الآن E'_y ، B'_z مركبات الحقول $\vec{E}'$ و $\vec{B}'$ كما يراها راصد موجود في الجملة s' التي تتحرك بسرعة انسحابية منتظمة $\vec{u}$ بالنسبة للجملة s .

وجدنا من تحويلات الحقول أن E'_y تساوي :

$$E'_y = \frac{E_y - uB_z}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/C^2}}\left[-\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial y} - u\frac{\partial A_y}{\partial x} + u\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)]$$

$$E'_y = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2/C^2}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)A_y - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V - uA_x}{\sqrt{1-u^2/C^2}}\right)\right]$$

ومن تحويلات لورنتس يمكن أن نكتب المشتقات الجزئية التالية :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)\\
\frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{u}{C^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\\
\frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \quad (5-72)$$

وبأخذ بعين الاعتبار المشتقات الجزئية السابقة فان E'_y يساوي :

$$E'_y = -\frac{\partial A_y}{\partial t'} - \frac{\partial}{\partial y'}[\gamma(V - uA_x)].$$

واذا وضعنا : $A_y = A'_y$ و $V' = \gamma(V - uA_x)$ فاننا نجد :

$$E'_y = -\frac{\partial A'_y}{\partial t'} - \frac{\partial V'}{\partial y'} \quad (5-73)$$

وبنفس الطريقة يمكن البرهان على أن : $B'_z = (\overrightarrow{rot}\ \vec{A})_z$ شرط أن نضع A'_x مساوية الى :

$$A'_x = \gamma(A_x - uV/C^2)$$

وعلاقات التحويل التالية هي مركبات متجهة الكمون الرباعية $(\vec{A}\ ,\ \frac{V}{C^2})$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{V}{C^2} &= \gamma(V'/C^2 + uA'_x/C^2) \\ A_x &= \gamma(A'_x + uV'/C^2) \\ A_y &= A'_y \\ A_z &= A'_z \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}74)$$

نحصل على علاقات التحويل المعاكسة بوضع $-u$ مكان $+u$ نجد

$$\left.\begin{aligned} \frac{V'}{C^2} &= \gamma(V/C^2 - uA_x/C^2) \\ A'_x &= \gamma(A_x - uV/C^2) \\ A'_y &= A_y \quad , \quad A'_z = A_z \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}75)$$

تكتب المتجهة الرباعية $(\vec{A}, \frac{V}{C^2})$ على الشكل: $\vec{A} = (\vec{A}, iV/C)$ ومربع طويلة $\vec{A}$ يساوي $A^2 - V^2/C^2$ هو مقدار لامتغير.

19- 5 - المؤثر الرباعي الابعاد $\vec{\Box}$:

كما عرفنا المؤثر التفاضلي الثلاثي الابعاد $\vec{\nabla}$ نعرف أيضا المؤثر التفاضلي الرباعي الابعاد $\vec{\Box}$ مركباته هي:

$$\frac{\partial}{\partial x} \ , \ \frac{\partial}{\partial y} \ , \ \frac{\partial}{\partial z} \ , (\frac{1}{iC}) (\frac{\partial}{\partial t})$$

تعرفه بالشكل:

$$\vec{\Box} = (\vec{\nabla} \ , \ \frac{1}{iC} \frac{\partial}{\partial t}) \qquad (5\text{-}76)$$

أما المشتقات الجزئية $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ فتساوي

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \gamma\left[\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{u}{C^2}\frac{\partial}{\partial t'}\right] \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y'} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \\
\frac{\partial}{\partial t} &= \gamma\left[\frac{\partial}{\partial t'} - u\frac{\partial}{\partial x'}\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (5-77)$$

وهذه التحويلات هي معادلات التحويل المعاكس للمعادلات(72) أي التحويل من المرجع s' الى المرجع s .

المؤثر $\vec{\square}$ هو كالمؤثر $\vec{\nabla}$ يمكن استخدامه لحساب التدرج :

$$\vec{\square}V = \left(\frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial y} , \frac{\partial}{\partial z} , \frac{1}{iC}\frac{\partial}{\partial t}\right)V \qquad (5-78)$$

أو لحساب تفرق متجهة $\vec{F}$:

$$\vec{\square}.\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} + \frac{1}{iC}\frac{\partial F_t}{\partial t} \qquad (5-79)$$

نسمي الجداء السلمي للمؤثر $\vec{\square}$ بنفسه والامبريان d'Alembertien $\square^2$ ويساوي :

$$\begin{aligned}
\square^2 = \vec{\square}.\vec{\square} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \\
&= \nabla^2 - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}
\end{aligned} \qquad (5-80)$$

يبين الجدول(3) المؤثرات التفاضلية الموافقة للمركبات x ، y ، t,z .

الاحداثيـــــــــات	x	y	z	t
المؤثرات الموافقة لـها	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial z}$	$(\frac{-1}{C^2})(\frac{\partial}{\partial t})$
مركبـــــــات $\vec{r}$	x	y	z	ict
مركبـــــــات $\vec{\Box}$	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial t}$	$\frac{\partial}{\partial z}$	$(\frac{1}{iC})(\frac{\partial}{\partial t})$
مربع طويلة $\vec{r}$	$x^2+y^2+z^2+C^2t^2 = r^2 - C^2t^2$			
$\Box^2$	$(\frac{\partial}{\partial x})^2+(\frac{\partial}{\partial y})^2+(\frac{\partial}{\partial z})^2-(\frac{1}{C^2})(\frac{\partial}{\partial t})^2 = \nabla^2 - (\frac{1}{C^2})\frac{\partial^2}{\partial t^2}$			

جدول رقم (3)

20 – 5 – قانون انحفاظ الشحنة :

بتطبيق المؤثر $\vec{\Box}$ على متجهة كثافة التيار الرباعيــة $\vec{j}$ نجد :

$$\vec{\Box}\cdot\vec{j} = \frac{\partial}{\partial x} j_x + \frac{\partial}{\partial y} j_y + \frac{\partial}{\partial z} j_z + \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{5-81}$$

$$= \vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{5-82}$$

لنرى أهمية علاقة التقرن هذه من الناحية الفيزيائية :

اذا كانت الشحنة $\rho\tau$ الموجودة ضمن الحجم τ تـــزداد خلال الزمن ∂t بسرعة قدرهـــا $\tau(\partial\rho/\partial t)$ فان سرعة تناقصها فـــي هذا الحجم خلال نفس الزمن يساوي $\tau(\vec{\nabla}\cdot\vec{j})$. ولقد وجد في جميـــع

التجارب العملية التي أجريت أن الشحنة محفوظة دوما أي أن :

$$\vec{\nabla}.\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

وهو قانون انحفاظ الشحنة كما مر معنا سابقا ونصوغه على الشكل التالي :

مهما كان المرجع العطالي المفروض فان الشحنات لاتخلق ولاتفنى ، يمكن كتابة هذا القانون على الشكل :

$$\vec{\Box}.\vec{j} = 0 \qquad (5-83)$$

ونلفت النظر هنا الى عدم الخلط بين هذه الخاصية وبين خاصية ثبات قيمة الشحنة الكهربائية . فثبات قيمة الشحنة يعني أن قيمة شحنة جسيم ما مستقلة عن السرعة التي يسير بها هذا الجسيم بالنسبة للراصد أي هي نفسها في كل المراجع العطالية .

5 – 21 – شرط لورنتس باستخدام المؤثر الرباعي الابعاد $\vec{\Box}$:

وجدنا سابقا أن العلاقة بين الكمون المتجه $\vec{A}$ والكمون السلمي V في الخلاء هي :

$$\vec{\nabla}.\vec{A} + \varepsilon_o\mu_o \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{(شرط لورنتس)}$$

وباستخدام المؤثر $\vec{\Box}$ فان شرط لورنتس يصبح على الشكل التالي :

$$\vec{\Box}.\vec{A} = 0 \qquad (5-84)$$

ويمكن البرهان على شرط لورنتس باستخدام العلاقات (74) :

22 – 5 – معادلات ماكسويل عند تغيير المرجع العطالي :

يمكن استنتاج معادلات ماكسويل في المرجع S' اعتمادا على قيم الحقل الكهربائي $\vec{E}$ وحقل التحريض المغناطيسي $\vec{B}$ المحسوبتين من أجل شحنة q تتحرك حركة مستقيمة منتظمة بالنسبة للمرجع الساكن S.

ان معادلات ماكسويل التي نحصل عليها هي نفس المعادلات التي مرت معنا في الحالة العامة :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

نترك برهان هذه المعادلات للطالب ولنثبت من جهتنا أن معادلات ماكسويل في المرجع S' لها نفس شكل المعادلات في الجملة الساكنة S أي أن :

$$\begin{aligned}
&(a) \quad \operatorname{div}' \vec{E}' = \frac{\rho'}{\varepsilon_0} \\
&(b) \quad \operatorname{div}' \vec{B}' = 0 \\
&(c) \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}'\, \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \\
&(d) \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}'\, \vec{B}' = \mu_0 [\vec{j}' + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'}]
\end{aligned} \qquad (5\text{-}85)$$

1 ـ 22 ـ 5 ـ تفرق الحقل الكهربائي $\vec{E}'$:

لنبرهن على صحة المعادلة (a) :

يعطى تفرق الحقل الكهربائي $\vec{E}'$ بالعلاقة :

$$\mathrm{div}'\vec{E}' = \frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_x}{\partial x'} \tag{5-86}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/C^2}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{u}{C^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_x + \frac{\partial}{\partial y}(E_y - uB_z) + \frac{\partial}{\partial z}(E_z + uB_y)\right].$$

وتكتب هذه العلاقة بعد ترتيبها على الشكل :

$$\mathrm{div}'\vec{E}' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/C^2}}\left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{u}{C^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} - u\frac{\partial B_z}{\partial y} + u\frac{\partial E_y}{\partial z}\right].$$

$$= \gamma\left[\mathrm{div}\,\vec{E} + u\left(\frac{1}{C^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} - (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}_x)\right)\right].$$

ومن معادلات ماكسويل في المرجع s : $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$ و :

$$\frac{1}{C^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = -\mu_o\vec{j} = -\frac{1}{\varepsilon_o C^2}\vec{j},$$

نعوض هاتين المعادلتين في العلاقة الاخيرة فنجد :

$$\mathrm{div}'\vec{E}' = \frac{1}{\varepsilon_o}\left[\frac{\rho - j_x u/C^2}{\sqrt{1-u^2/C^2}}\right] = \frac{\rho'}{\varepsilon_o} \tag{5-87}$$

2 ـ 22 ـ 5 ـ تفرق حقل التحريض المغناطيسي $\vec{B}'$:

ان تفرق $\vec{B}'$ يساوي :

$$\mathrm{div}'\vec{B}' = \frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'}$$

$$= \gamma\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{u}{C^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)B_x + \frac{\partial}{\partial y}(B_y + uE_z/C^2) + \frac{\partial}{\partial z}(B_z - uE_y/C^2)\right].$$

$$=\gamma\left[\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{u}{C^2}\frac{\partial B_x}{\partial t}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{u}{C^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}-\frac{u}{C^2}\frac{\partial E_y}{\partial z}\right]$$

$$\operatorname{div}'\vec{B}'=\gamma\left[\operatorname{div}\vec{B}+\frac{u}{C^2}\left(\frac{\partial B_x}{\partial t}+\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\right].$$

ولكن:

$$(\overrightarrow{rot}\,\vec{E})_x=-\frac{\partial B_x}{\partial t}=\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}$$

و $\operatorname{div}\vec{B}=0$

نعوض هذه القيم في المعادلة الاخيرة فنجد:

$$\operatorname{div}'\vec{B}'=\gamma(0+0)=0$$

اذن :

$$\operatorname{div}'\vec{B}'=0 \qquad (5-88)$$

3 - 22 - 5 - دوار الحقل الكهربائي $\vec{E}'$:

اذا وجد حقل كهربائي $\vec{E}$ فقط في الجملة s ناجم عن شحنة q ساكنة فان المراقب في s' يشعر بوجود حقل كهرطيسي في جملته وهذا ماتدل عليه المعادلات (60)والجدول(2)، من معادلة ماكسويل لدوار الحقل الكهربائي $\vec{E}$ في الجملة s نكتب:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=0$$

والمعادلات السلمية لهذه العلاقة هي :

$$\left[\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right]=0 \qquad (a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=\frac{\partial E_x}{\partial z}-\gamma\left(\frac{\partial E_z}{\partial x'}-\frac{u}{C^2}\frac{\partial E_z}{\partial t'}\right)=0 \qquad (b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \doteq \gamma\left(\frac{\partial E_y}{\partial x'} - \frac{u}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t'}\right) - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \qquad (c)$$

وباستخدام المعادلات (60) وملاحظة أن :

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}$$

نجد أن المعادلات (a و b و c) تساوي :

$$\left[\gamma\left(\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'}\right) - u\gamma \vec{\nabla}'.\vec{B}' + u\gamma \frac{\partial B'_x}{\partial x'}\right] = 0$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها على الشكل :

$$\left[\gamma\left(\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'}\right) - u\gamma \vec{\nabla}'\vec{B}' + u\gamma \frac{\partial B'_x}{\partial x'}\right] = 0 \qquad (5-89)$$

$$\frac{\partial E'_x}{\partial z'} + \gamma^2\left(\frac{u}{c^2}\frac{\partial E'_z}{\partial t'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'}\right) + \gamma^2\left(u\frac{\partial B'_y}{\partial x'} - \frac{u^2}{c^2}\frac{\partial B'_y}{\partial t'}\right) = 0 \qquad (5-90)$$

$$\gamma^2\left(\frac{\partial E'_y}{\partial x'} + u\frac{\partial B'_z}{\partial x'} - \frac{u}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}E'_y - \frac{u^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}B'_z\right) - \frac{\partial E'_x}{\partial y'} = 0 \qquad (5-91)$$

والمعادلات (89- 91) تبسط على الشكل :

$$\left.\begin{aligned} &\left[\left(\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial}{\partial z'}E'_y\right) + \frac{\partial}{\partial t'}B'_x\right] = 0 \\ &\left[\frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial t'}\right] = 0 \\ &\left[\frac{\partial E'_z}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial y'}E'_x + \frac{\partial}{\partial t'}B'_z\right] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5-92)$$

ومنه فان :

$$\vec{\nabla}' \Lambda \ \vec{E}' = - \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \qquad (5-93)$$

وبنفس الطريقة يبرهن على معادلة دوار الحقل $\vec{B}'$.

وهكذا نكون قد برهنا أن معادلات ماكسويل لامتغيرة عند تطبيق تحويلات لورنتس أي أن معادلات الحقل الكهرطيسي تكون متماثلة عند الانتقال من مرجع عطالي s الى مرجع عطالي آخر s' . فاذا أجرى كلا الراصدين نفس التجربة كل في مرجعه فان النتيجة تكون واحدة لدى كل منهما. اذن لايمكن للمجرب أن يكتشف بتجارب كهرطيسية حركة مرجعه الذي يسير بسرعة انسحابية مستقيمة منتظمة وهذا ما أشارت اليه النسبية الخاصة كما رأينا سابقا.

23 - 5 - التعبير عن تحويلات لورنتس باستخدام المصفوفات:

ان صيغة التحويل من جملة ثلاثية متعامدة الى أخرى والذي يطبق عادة على المتجهات الثلاثية الابعاد يمكن تطبيقه أيضا على الفراغ الرباعي الزمان - المكان وذلك عن طريق اضافة مركبة رابعة $x_4 = iCt$. فاذا كان F_i مثلا يمثل المركبة رقم i للمتجهة الثلاثية الابعاد فان $T_{\mu\nu}$ تمثل المركبة μ وν لتونسور رباعي الابعاد وتحويلات لورنتس من الجملة s' الى الجملة s كما رأينا هي :

$$X' = \gamma(x - ut)$$

$$t' = \gamma(t - \frac{u}{C^2} X)$$

$$y = y' \ , \quad z = z'$$

حيث يمكن كتابتها على الشكل :

$$x_1' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\, x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\, x_4$$

$$x_2' = 0.x_1 + x_2 + 0.x_3 + 0.x_4$$

$$x_3' = 0.x_1 + 0.x_2 + x_3 + 0.x_4 \tag{5-94}$$

$$x_4' = -\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\, x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\, x_4$$

حيث :

$x_4' = iCt'$, $x_3' = z'$, $x_2' = y'$, $x' = x_1'$, $z = x_3$, $y = x_2$, $x = x_1$, $\beta = \frac{u}{C}$

ومصفوفة هذا التحويل تساوي :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix} \tag{5-95}$$

يمكن التأكد من أن هذا التحويل هوتحويل تعامدي عقدي :-

$$\sum_{i} a_{ij} a_{jk} = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

ان المصفوفة السابقة A هي مصفوفة بسيطة (تحوي ستة عناصر غير معدومة) لان تحويل لورنتس يربط في هذه الحالة جملتين احداهما متحركة بالنسبة لاخرى وفق المحور x وفي هذه الحالة رأينا أن x و t تتحول الى x' و t' على حين تبقى y و z بدون تغيير .

في الحالة العامة عندما لاتكون الحركة وفق محور احداثي معين فان التحويل يكون معقدا ولكن مركبات المصفوفة تظل محققة لعلاقات التعامد . ان تحويل لورنتس (95) يمكن تفسيره على أنه دوران في المستوي x_1x_4 وفي هذه الحالة فان زاوية الدوران θ تتعين من العلاقة :

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\theta + x_4 \sin\theta \\ \tan\theta &= i\beta = i\,\frac{u}{C} \end{aligned}\right\} \qquad (5-96)$$

حيث أن الزاوية θ ليست زاوية دوران حقيقية ، من الناحية الرياضية يعتبر تحويل لورنتس بمثابة دوران في المكان الرباعي المتعامد وهو دوران بزاوية تخيلية . والتحويل المعاكس لـ (96) أي من الجملة s الى s' يعطى بمنقول المصفوفة Transpose Matrix .

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{bmatrix} \qquad (5-97)$$

24- 5 - تونسور الحقل الكهرطيسي :

نعرف تونسور الحقل الكهرطيسي F بالعلاقة :

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \qquad (5-98)$$

وبشكل متجهه بالعلاقة : $\vec{F} = \vec{\Box} \wedge \vec{R}$

حيث :

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0$$

$$F_{31} = -F_{13} = B_2 \ , \ F_{34} = -F_{43} = -iE_3/C \ , F_{24} = -F_{42} = -i\frac{E_2}{C}$$

$$F_{23} = -F_{32} = B_1 \ , \ F_{12} = -F_{21} = B_3 \ , \ F_{14} = -F_{41} = -i\frac{E_1}{C}$$

ونكتب F بالتمثيل المصفوفي على الشكل .

$$\begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -i\frac{E_1}{C} \\ -B_3 & 0 & B_1 & -i\frac{E_2}{C} \\ B_2 & -B_1 & 0 & -i\frac{E_3}{C} \\ \frac{iE_1}{C} & \frac{iE_2}{C} & \frac{iE_3}{C} & 0 \end{bmatrix} \quad (5-99)$$

وتفرق تونسور الحقل الكهرطيسي F يعطى بالعلاقة :

$$\sum_\nu \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \sum_\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\nu^2}$$

$$\sum_\nu \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 J_\mu \quad (5-100)$$

وهذه العلاقةتكتب بشكل متجهي على الشكل :

$$\vec{\square}.F = \mu_0 \vec{J} \quad (5-101)$$

يعبر المقدار $\sum_\nu \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\nu^2}$ عن شرط لورنتس وهو يساوي الصفر ويكتب اما بالصيغة السابقة أو على الشكل $\vec{\square}.\vec{A} = 0$. تمثل المعادلة (101) المعادلتين التاليتين من معادلات ماكسويل :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{C^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ومن المعادلة (98) يمكن استنتاج العلاقة التالية :

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \quad (5-102)$$

التي تمثل معادلتي ماكسويل التاليتين:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} . \vec{B} = 0$$

حيث μ و ν و λ هي رموز مختلفة ترمز لاي ثلاثة من الادلـــة:
1, 2, 3, 4.

25 – 5 – قانون تحويل الحقل الكهرطيسي:

لقد سبق واستنتجنا هذه التحويلات بين $\vec{E}$ و $\vec{B}$ في كلا الجملتين المتحركة s' والساكنة s ونعيد صياغتها باستخدام تونسور الحقل الكهرطيسي . بما أن الحقل الكهرطيسي هو كمية تونسوريـــه في صيغة فراغ رباعي الابعاد فانه مركباته تتحول بشكل مشابه لمركبات تونسور من المرتبة الثانية لتحويلات لورنتس:

$$F'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} a_{\mu\alpha} a_{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$$

حيث $F'_{\mu\nu}$ تمثل تونسور الحقل الكهرطيسي في الجملة s' . اذا اعتبرنا أن الجملة s' تتحرك بسرعة منتظمة u في الاتجاه OX بالنسبـــة للجملة s فان تحويلات لورنتس تعطى بالعلاقة (95)، وهكذا فان:

$$B'_x = F'_{23} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} a_{2\alpha} a_{3\beta} F_{\alpha\beta}$$

$$= F_{23} = B_x \qquad (5\text{-}103)$$

$$B'_y = F'_{31} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} a_{3\alpha} a_{1\beta} F_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} F_{31} + i \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} F_{34}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[B_y + \left(\frac{\beta}{C}\right) E_z\right] \qquad (5-104)$$

وبشكل مماثل نجد:

$$B_z' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[B_z - \left(\frac{\beta}{C}\right) E_y\right] \qquad (5-105)$$

أما اذا كان المقصود هو الحقل الكهربائي فان:

$$E_x' = iCF_{14}' = iC \sum_\alpha \sum_\beta a_{1\alpha} a_{4\beta} F_{\alpha\beta}$$

$$= iC\left[\frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} F_{11} + \frac{1}{1-\beta^2} F_{14} + \frac{\beta^2}{1-\beta^2} F_{41} + \frac{i\beta}{1-\beta^2} F_{44}\right]$$

$$= \frac{iC}{1-\beta^2}\left[-i \frac{E_x}{C} + i\beta^2 \frac{E_x}{C}\right] = E_x \qquad (5-106)$$

وأخيرا يمكن التأكد أن:

$$E_y' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[E_y - C\beta B_z\right] \qquad (5-107)$$

$$E_z' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left[E_z + C\beta B_y\right] \qquad (5-108)$$

وهكذا فان مركبات $\vec{E}$ و $\vec{B}$ التي في اتجاه الحركة لاتتأثر بها على حين أن المركبات العمودية عليها تتغير. ان النتائج السابقة يمكن اختصارها على المعادلات التالية:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \quad , \quad \vec{E}'_{\perp} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\vec{E}_{\perp} + \vec{u} \wedge \vec{B}\right] \\[2ex] \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \quad , \quad \vec{B}'_{\perp} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[\vec{B}_{\perp} - \dfrac{1}{C^2}\, \vec{u} \wedge \vec{E}\right] \end{array}\right\} \quad (5-109)$$

F = حيث الدليل $\parallel$ يشير الى المركبات الموازية للسرعة $\vec{u}$ والدليــل $\perp$ يشير الى المركبات العمودية عليها .

تمارين محلولـــــــــــــة

١ - يسافر رجل فضاء في مركبة فضائية تسير بسرعة 0,5C بالنسبة للارض . يقارن كل من رجل الفضاء ومراقب على الارض طول تدريج متري عياري موجود لديه مع طول التدريج العياري الموجود لدى الآخر . وتتم القياسات بحيث أن طول التدريج المتري لدى كل من المراقبين يكون موازيا لسرعة المركبة ما هو الطول الذي يدعي به كل من المراقبين بأن طول التدريج المتري للمراقب الآخر هو أقصر ؟ يبلغ طول التدريج المتري 1 m عند كل من رجل الفضاء والمراقب على الارض .

الحـــــل :

لدينا $u = 0,5\ C$ وتكون γ مساوية لـ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,5)^2}} = 1.155$$

و يظن كلا من المراقبين أن طول التدريج المتري المتحرك بالنسبة له أقصر من الطول المتري لديه بالمقدار :

$$\Delta L = L' - L = L' - \frac{L'}{\gamma} = L'[1 - \gamma^{-1}]$$

$$= 1[1 - (1,155)^{-1}] = 13.4\ cm$$

ويكون هذا المقدار مساويا $\Delta L = 85,9\ cm$ عندما تبلغ سرعة المركبة $u = 0,99C$.

- تتحرك جملة عطالية S' بسرعة $u = 0,5\ C$ وفق المحور المشترك x بالنسبة لجملة عطالية ساكنة S . توضع

ميقاتيتان في المبدأ الاحداثي لكل جملة وتضبطان على الصفر عندما يكون المبدأين متطابقين . لوحظت اشارتين ضوئيتين متزامنتين في الجملة s عند النقطة التي احداثياتها :

$(x_1, y_1, z_1, t_1)=(100m, 20m, 20m, 10^{-6}sec)$ وعند النقطة $(x_2, y_2, z_2, t_2)=(200m, 30m, 30m, 10^{-6}sec)$، ماهي احداثيات هاتين الاشارتين الضوئيتين كما تشاهد في الجملة $\acute{s}$ ؟

الحل:

باستخدام تحويلات لورنتس نجد أن احداثيات الاشارة الضوئية الاولى هي :

$$x'_1 = \gamma(x_1 - ut_1)$$

$$=1.115[100-(0,5)(3 \times 10^8)(10^{-6})] = -57,75 \text{ m}$$

$$y'_1 = y_1 = 20 \text{ m} \quad , \quad z'_1 = z_1 = 20 \text{ m}$$

$$t'_1 = \gamma(t_1 - \frac{ux_1}{c^2}) = 1.115[(10^{-6}) - (0,5)(100)/(9 \times 10^{16})]$$

$$= 0,962 \ \mu\text{sec}$$

وبشكل مشابه نجد أن احداثيات الاشارة الثانية هي :

$$x'_2 = 57.75 \text{ m} \ , \ y'_2 = 30 \text{ m} \ , \ z'_2 = 30 \text{ m}$$

$$t'_2 = 0.770 \ \mu\text{sec}$$

وكما نلاحظ أن الحادثتين غير متزامنتين في الجملة s والحادثة الثانية (x_2', y_2', z_2') تكون قد لوحظت قبل الاولى بزمن قدره $0,192\ \mu s$. ويلاحظ أيضا أن تمدد الزمن وأثر التواقت يساهمان في فقدان التزامن في الجملة s' .

٣ – أظهرت الدراسات الفلكية للضوء القادم من المجرات البعيدة عنا أن هذه المجرات تبتعد عنا ولذلك فالكون يتمدد . وقد حددت سرعة أبعاد هذه المجرات انطلاقا من قياسات الانزياحات الدوبلرية للخطوط الطيفية للضوء القادم من هذه المجرات وقد وجد بشكل تقريبي أن العلاقة خطية بين سرعة ابتعاد مجرة ما وبين بعد المجرة d : $u \cong Hd$

حيث H تسمى ثابتة هابل نسبة للعالم الفلكي Edwin Hubble وهذه الثابتة تساوي: $H \cong 2.3 \times 10^{-5}\ km/S.L.Y$ حيث L.Y تعني سنة ضوئية وتساوي : $9,46 \times 10^{15}\ m$ وهي المسافة التي يقطعها الضوء في الخلاء في سنة واحدة. ففي الضوء القادم من المجرة البعيدة من كوكبة بوت Constellation Bootes لوحظ علامة طيفية بارزة عند طول الموجة 4470 A° (ضوء ذرات الكالسيوم) وعند تحليل الضوء الصادر عن منبع مخبري ساكن وجد أن نفس العلامة لها طول موجة قدره 3940 A° ، ماهي المسافة التي تفصل بيننا وبين المجرة في كوكبة بوت ؟

الحل: يمكن حساب سرعة ابتعاد المجرة باستخدام العلاقة :

$$\frac{\nu}{\nu'} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

وبدلالة طول الموجة ،فان هذه العلاقة تساوي :

$$\frac{\lambda'}{\lambda_{\cdot}} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = \frac{3950\ A^\circ}{4470\ A^\circ} = 0.881$$

ويحساب β نجد أنهايســـــــاوي : $\beta = 0.126$ والسرعة تساوي الى :

$$u = \beta C = (0.126) \times (3 \times 10^8) = 3.78 \times 10^4\ km/s$$

وباستخدام قانون هابل نحصل على بعد المجرة عن الارض :

$$d = \frac{u}{H}$$

$$= \frac{3.78 \times 10^4\ km/s}{2.3 \times 10^{-5} km/S.L.Y} = 1.6 \times 10^9 L.Y\ (\text{سنة ضوئية})$$

وهناك مجرات تبتعد بسرعة أكبر من ابتعاد هذه المجرة فـــــي كوكبة بوت ،فالمجرة المعروفة بـ 3C 123 تملك قيمةلـ β مساوية الى 0,46 والاجرام التي لها مواصفات النجوم تملـــــك انزياحا دوبلريا يوافق سرعة ابتعاد عنا تبلغ 91% من سرعة الضوء .

٤ ـ يتشكل ميون في الطبقات العليا من الغلاف الجوي ويتحرك بسرعة $u = 0.99C$ مسافة 5 km قبل أن يتفكك ،احسب :

١ ـ عمر الميون كما نقيسه نحن وعمره في الجملة المتحركة معه ؟

٢ ـ ما هي سماكة طبقة الغلاف الجوي الذي يجتازها الميون كمـــــا نقيسها في الجملة المتحركة معه ؟

الحل : عمر الميون كما نقيسه نحن يساوي :

$$\tau = \frac{5}{0.99 \times 3 \times 10^5} = 1583 \times 10^{-6} s$$

أما عمر الميون في الجملة المتحركة فيساوي :

$$\tau_0 = \tau . \sqrt{1 - v^2/C^2}$$

$$= 16.83 \times 10^{-6} \times \sqrt{1 - (\frac{0.99C}{C})^2}$$

$$= 2.37 \times 10^{-6} s = 2.37 \ \mu s$$

الطلب الثاني : سمك الغلاف الجوي الذي يجتازه الميون في الجملة المتحركة يساوي :

$$2.37 \times 10^{-6} \times 0.99 \times 3 \times 10^5 = 0,7 \ km$$

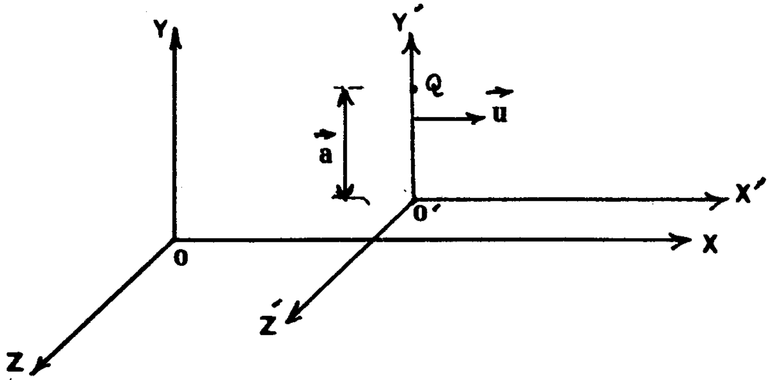
٥ – توضع في المرجع s' شحنتان تساوي كل منهما الى q على المحور $o'y'$ الاولى توضع في المبدأ والثانية في النقطة Q التي ترتيبها a' . احسب بطرق مختلفة القوة $\vec{F}$ التي تخضع لها الشحنة في النقطة Q والتي يعيشها مراقب في s وذلك :

آ ـ بحساب $\vec{F}'$ في المرجع العطالي s' وذلك باستخدام صيغ تحويلات القوى .

ب ـ بحساب الحقل $\vec{E}$ و $\vec{B}$ في المرجع s في النقطة Q .

الحل:

آ ـ ان الشحنة تبدو ساكنة بالنسبة لمراقب في s' ولذلك فان القوة المؤثرة في النقطة Q تكون كهراكدية . ولحساب القوى في الجملة s نطبق علاقات التحويل (   ) فنجد:



في الجملة $\underline{S}$

$$F\begin{cases} F_x = F'_x = 0 \\ F_y = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{q^2}{a^2}\sqrt{1-u^2/C^2} \\ F_z = 0 \end{cases}$$

في الجملة $\underline{S}'$

$$\vec{F}'\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{q^2}{a'^2} \\ F'_z = 0 \end{cases}$$

ان طول القطعة $O'Q$ هو a بالنسبة لمراقب ساكن في s وبالنسبة لمراقب متحرك مع s' أيضا .

ب ـ ان الحقل الكهربائي في النقطة Q والمتولد عن الشحنة q الموجودة في O' يزداد بالنسبة للحقل الكولوني بالمقدار $\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2/C^2}}$ ولذلك :

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{a^2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2/C^2}}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_Q = (0,\ E_y,\ 0) \\ \vec{B} = \dfrac{\vec{u}\wedge\vec{E}}{C^2} = (0,0,\dfrac{uE_y}{C^2}) \end{cases}$$

والقوة تساوي :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u}\wedge\vec{B}) = (0,\ F_y,\ 0)$$

حيث F_y تساوي :

$$F_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q^2}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2/C^2}} (1-u^2/C^2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q^2}{a^2} \sqrt{1-u^2/C^2}$$

– ليكن في الجملة العطالية s ناقل اسطواني سطح قاعدته S' وطوله L' مملوء بالالكترونات الموزعة فيه بشكل متجانس ، ولتكن Q الشحنة الكلية فيه .

آ – ماهي كثافة الشحنة كما تبدو بالنسبة لمراقب في s' وفي s .

ب – يفرض أن المراقب في الجملة s يرى ناقلاسطواني (S, L) يحوي على شكبة من الايونات الموجبة ثابتة في مرجعه (ρ_+ هي كثافة الشحنة) كما يحوي على غاز الكتروني كثافته ρ_- وسرعته الجرية $\vec{u}$ موازية لـ ox .

فاذا كان المراقب في s' يتحرك بسرعة u بالنسبة للمراقب الساكن أثبت أن الناقل الاسطواني يبدو بالنسبة للمراقب غير مشحون وبالنسبة للمراقب المتحرك مشحون ؟

الحـــل:

آ – المراقب المتحرك: يرى هذا المراقب أن كثافة الشحنة ρ'_- تساوي:

$$\rho'_- = - \frac{Q}{S'.L'}$$

– المراقب الساكن : يرى بالنسبة له أن : $S = S'$ و

$$L = L'\sqrt{1 - u^2/C^2}$$

وكثافة الشحنة ρ_- تساوي :

$$\rho_- = - \frac{Q}{L.S} = \frac{\rho'_-}{\sqrt{1 - u^2/C^2}}$$

ب ـ في هذه الحالة يكون المراقب في s ساكنا بالنسبة لكثافة الشحنة الموجبة ، بينما يكون المراقب المتحرك ساكنا بالنسبة للغاز الالكتروني .

وتكون كثافة الشحنة ρ_- , ρ_+ بالنسبة للمراقبين مساوية :

ـ المراقب الساكن يجد أن الكثافة هي :

$$\rho_- = \frac{\rho'_-}{\sqrt{1- u^2/C^2}} \quad , \quad \rho_+$$

ـ المراقب المتحرك يجد أن الكثافة هي :

$$\rho'_- \qquad و \qquad \rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - u^2/C^2}}$$

وبالنسبة للمراقب الساكن فان الناقل غير مشحون ولذلك فان:

$$\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$$

أما بالنسبة للمراقب المتحرك فان :

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = \rho_+ \frac{u^2/C^2}{\sqrt{1 - u^2/C^2}}$$

حيث أن :

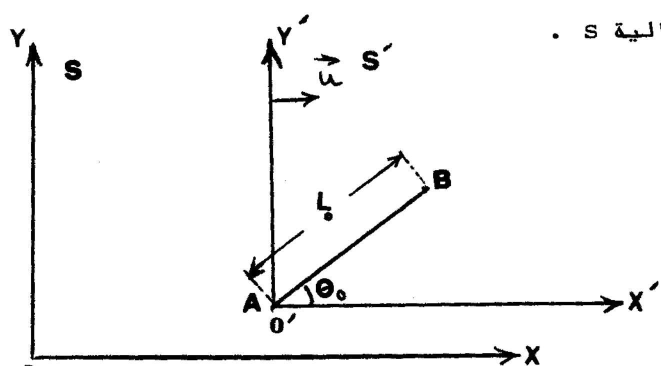
$$\rho'_- = \rho_- \sqrt{1 - u^2/C^2} = -\rho_+ \sqrt{1 - u^2/C^2}$$

تمارين غيـــر محلولـــــة

- يسافر رجل فضاء في مركبة فضائية تسير بسرعة 0.5C بالنسبة للارض . يقيس رجل الفضاء نبضات قلبه فيجدها بمعدل 75 نبضة في الدقيقة . تحول نبضات رجل الفضاء الى اشارات تبث الى الارض عندما تكون حركة المركبة عمودية على الخط الواصل بين المركبة ومراقب الارض . ماهو معدل النبضات الذي يقيسه المراقب على الارض ؟ كم يصبح هذا المعدل عندما تبلغ سرعة المركبة الفضائية 0.99 C ؟

الجواب : $10.6\ min^{-1}$, $64,9\ min^{-1}$

٢ - قضيب طوله ℓ_o يقع في المستو $x'y'$ لجملة عطالية s' ويصنع زاوية Θ_o مع المحور x' كما هو مبين في الشكل ، فاذا كانت الجملة العطالية s' تتحرك بسرعة $\vec{u}$ بالنسبة لجملة عطالية s وفق المحور x' الذي يوازي المحور x ، عين طول القضيب ℓ والزاوية Θ التي يصنعها مع المحور x في الجملة العطالية s .



٣ ـ لوحظ وقوع حادثتين في الجملة العطالية s احداثياتهما $(x_1, 0, 0, t_1)$ و $(x_2, 0, 0, t_2)$ حيث $x_1 > x_2$ و $t_1 > t_2$، جملة عطالية ثانية s' تتحرك بسرعة $\vec{u}$ بالنسبة للجملة العطالية s ووفق المحور x . توضع ميقاتيتان في مبدأ كل جملة وتضبط كل منهما على الصفر عندما يكون المبدئان منطبقين على بعضهما والمطلوب :

أ ـ بين أن المراقب في الجملة s' سوف يحكم بأن الحادثتين تتمان في نفس النقطة من الفراغ اذا كانت السرعة u تساوي :

$$u = (x_1 - x_2)/(t_1 - t_2)$$

ب ـ اذا كانت السرعة u تساوي القيمة المبينة في الفقرة (أ) بين أن الفاصل الزمني $t'_1 - t'_2$ المقاس في الجملة s' يساوي:

$$t'_1 - t'_2 = \sqrt{(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 / C^2}$$

جـ ـ اذا كان $u < C$ بين بالاستفادة من الفقرة (أ) أنه لايمكن أن يوجد مرجع s' تتطابق فيه الحادثتان اذا كان

$$C(t_1 - t_2) < (x_1 - x_2)$$

٤ ـ يبلغ الطول الخاص لقضيب 1m ويصنع زاوية 30° مع المحور x' في الجملة العطالية s' ، حيث يكون القضيب ساكنا فيها . تتحرك الجملة s' بسرعة ثابتة $\vec{u}$ باتجاه المحور x' بالنسبة لجملة ثابتة s موازية لها . يرى مراقب في الجملة s أن القضيب يصنع زاوية 60° مع المحور x في جملته . عين السرعة النسبية u للجملتين ؟ وماهو طول القضيب كما يقيسه المراقب في الجملة s؟

الجواب: $0,577\,m$, 2.83×10^8 m/s

٥ – بين أن المقدار $x^2 - c^2t^2$ لامتغير عند تطبيق تحويـــلات لورنتس (أي أن $x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2$).

٦ – يبلغ الطول الموجي للخط H في طيف ذرة الهيدروجين $6563\ A°$ ماهو الانزياح في الطول الموجي لهذا الخط الطيفي للضـــوء القادم من نجم ما في السماء يقترب منا بسرعة 50 km/sec ؟ هذا الخط في الواقع يشاهد في الضوء القادم من الشمس . فاذ كان الفرق بين الاطوال الموجية للخط الطيفي هذا للضـــوء الناجم عن ابتعاد واقتراب حواف القرص الشمسي مساويـــــ $0.085\ A°$ احسب الزمن اللازم للشمس لاتمام دورة حول نفسها

ملاحظـــة : اعتبر أن هذا الفرق يعود كليا الى مفعـــول دوبلر نصف قطر الشمس يساوي 6.9×10^8 m

الجواب: $1,09\ A°$, 26 يوم

٧ – بين أنه اذا كان L_o^3 هو حجم السكون لمكعب طول ضلعه L فان : $L_o^3(1-\beta^2)^{1/2}$ هو الحجم الذي يقيسه مراقب في الجملة العطالية التي تتحرك بسرعة منتظمة وباتجاه يوازي أحد أضلع المكعب .

٨ – أثبت أنه اذا كان في الجملة s' : $v'_y = c \sin\varphi$ و $v'_x = c \cos\varphi$ فانه في الجملة s يكون:

$$v_x^2 + v_y^2 = c^2$$

حيث أن الجملة s' تتحرك بسرعة منتظمة $u\vec{i}$ بالنسبة للجملة s

٩ – نطبق قوة $\vec{F}$ بواسطة حقل كهربائـي $\vec{E}$ مناسب ثابتة في طويلتها ومنحاها واتجاهها على الكترون كتلته السكونية m_o وشحنته e

فاذا كان الالكترون ساكنا في اللحظة $t = 0$ أوجد :

١ ـ الزمن الذي تستغرقه القوة المطبقة على الالكترون حتى تصل سرعته الى $v = aC$.

٢ ـ المسافة التي يقطعها الالكترون خلال هذا الزمن؟ما هي طاقته الكلية E ؟ وطاقته الحركية ؟

تطبيق عددي : $e = 1,6\times10^{-19}\,col$, $m_o = 0.9\times10^{-30}\,kg$,

$|\vec{E}| = 10^4\,v/m$, $a = 0,995$

الجواب : $4.6\ Mev$, $5,11\ Mev$, $455\ m$

ا ـ أثبت أن مؤثر دالامبير $\Box^2 = \nabla^2 - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ لايتغيرعند تطبيق تحويلات لورنتس عليه .

ا ـ اثبت أن $\vec{B}.\vec{E}$ لايتغير عند تطبيق تحويلات لورنتس .

ا ـ برهن أن : $B^2 - (E^2/C^2)$ لايتغير عند تطبيق تحويلات لورنتس عليه.

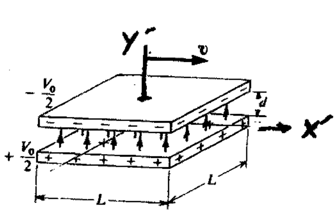
ا ـ يتحرك مكثف مستوي بسرعة $\vec{u}$ وفق الاتجاه x' كما هو مبين في الشكل :

١ ـ احسب الحقل الكهربائي $\vec{E}$ وحقل التحريض المغناطيسي بالنسبة لمراقب ساكن .

٢ ـ تحقق أن كلا من $E^2 - C^2B^2$ و $\vec{E}.\vec{B}$ هومقدار لامتغير.

٣ ـ احسب الكمون الشعاعي $\vec{A}$ ثم أوجد حقل التحريض المغناطيسي $\vec{B}$ وذلك بالنسبة لمراقب ثابت .

٤ ـ برهن أن $A^2 - (V^2/C^2)$ هو مقدار لامتغير .



١٤- اثبت أن الكتلة الحجمية تتحول على النحو التالي :

$$\rho = \gamma^2 [1 + \frac{v'_x u}{c^2}]^2 . \rho'$$

و :

$$\rho' = \gamma^2 [1 - \frac{v_x u}{c^2}]^2 . \rho$$

١٥- لدينا وشيعة حلزونية طولها لانهائي نصف قطرها R وتحوي على N لفة في المتر الواحد ،ويجتازها تيار شدته I . ان حقل التحريض المغناطيسي داخل هذه الوشيعة يساوي الى $\mu_o NI$ وينعدم خارجها .

أ - احسب الحقلين $\vec{E}$ و $\vec{B}$ داخل وخارج هذه الوشيعة كما يقيسهما مراقب ساكن في الجملة s عندما تتحرك هذه الوشيعة بسرعة $\vec{u}$ في اتجاه عمودي على محورها . بفرض أن المحور ´z هو محور الوشيعة وأن $\vec{u}=u\vec{i}$.

ب - برهن أنه في الجملة العطالية المتعلقة بالوشيعة أن الكمون الشعاعي :

$$\vec{A}' = -\frac{B'}{2} y'\vec{i} + \frac{B'}{2} x'\vec{j}$$

يعطي تحريضا منتظما ´$\vec{B}$ في الاتجاه الموجب للمحور z .

جـ - احسب $\vec{A}$ و V ثم $\vec{E}$ و $\vec{B}$ داخل الوشيعة وذلك بالنسبة لمراقب ساكن في الجملة s .

ملحق (١)

نورد في هذا الملحق صيغ معادلات ماكسويل ومعادلات الكمونات الكهرطيسية المعتمدة في جميع جمل الواحدات المستخدمة وذلك انطلاقا من المعادلات ε_o , μ_o , k وسرعة الضوء c حيث :

$$\varepsilon_o \mu_o c^2 = k^2$$

في الجملة الدولية :

$$k = 1 \;,\quad 4\pi\varepsilon_o = \frac{1}{9.10^9} \quad,\quad \frac{\mu_o}{4\pi} = 10^{-7}$$

في الجملة الغوصية (الواحدات الكهربائية للجملة السغثية الكهراكدية e.s.u+الواحدات المغناطيسية للجملة السغثية الكهرطيسية e.m.u) :

$$k = c \quad,\quad 4\pi\varepsilon_o = 1 \quad,\quad \frac{\mu_o}{4\pi} = 1$$

ـ قوة لورنتس :

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{1}{k}\, q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

ـ معادلات ماكسويل :

$$\left.\begin{aligned} &\overrightarrow{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{k}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ &\operatorname{div}\vec{B} = 0 \end{aligned}\right\} (1)$$

الحل العام لهما

$$\left.\begin{aligned} &\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{k}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ &\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \frac{\mu_o}{k}\vec{j} + \frac{\varepsilon_o\mu_o}{k}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \end{aligned}\right\} (2)$$

ـ شرط لورنتس أو معيار لورنتس :

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{\varepsilon_o\mu_o}{k}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

ـ معادلات انتشار الكمونين السلمي $\vec{A}$ والمتجهي :

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{\varepsilon_o\mu_o}{k^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mu_o}{k}\vec{j}$$

$$\nabla^2\varphi - \frac{\varepsilon_o\mu_o}{k^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

ـ الكمونات المتأخرة (حلول معادلات انتشار الكمونات الكهرطيسية) :

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi k}\iiint \frac{\vec{j}(t - r/c)}{r}\,d\tau$$

$$\varphi(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\iiint \frac{\rho(t - r/c)}{r}\,d\tau$$

ملحـــــــــــــــق (٢)

المؤثرات التفاضلية في جمل الاحداثيات لديكارتية ، الاسطوانية والكرويـــة

١ ـ الاحداثيات الديكارتية :

التدرج $\overrightarrow{\text{grad}}\, U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$

التفرق $\text{div}\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

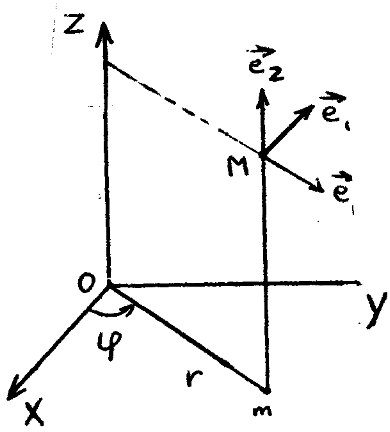
الدوار $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j}$

$$+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

لابلاسيان $\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$

لابلاسيان $\nabla^2\vec{A} = (\nabla^2 A_x)\vec{i} + (\nabla^2 A_y)\vec{j} + (\nabla^2 A_z)\vec{k}$

حيث : $\vec{A} = \vec{A}(A_x \,,\, A_y \,,\, A_z) \quad , \; U = U(x, y, z)$



٢ ـ الاحداثيات الاسطوانية :

$\varphi = \varphi(r \,,\, \varphi \,,\, z)$

$\vec{A} = \vec{A}(A_r, A_\varphi, A_z)$

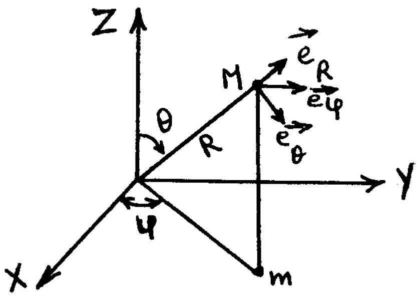
$$\overrightarrow{\text{grad}}\ U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\text{div}\ \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi$$

$$+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$



٣ ـ الاحداثيات الكروية :

$$\vec{A} = \vec{A}(A_R, A_\varphi, A_\theta) \quad , \quad V = V(R, \varphi, \theta)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ U = \frac{\partial U}{\partial R}\vec{e}_R + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta$$

$$\text{div}\ \vec{A} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2 A_R) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta)$$

$$+ \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial R_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} = \left\{\frac{1}{R\ \sin\ \Theta}\left(\frac{\partial}{\partial\Theta}(A_{\varphi}\sin\ \Theta) - \frac{\partial A_{\Theta}}{\partial\varphi}\right)\right\}\vec{e}_R$$

$$+ \left\{\frac{1}{R\ \sin\ \Theta}\ \frac{\partial A_R}{\partial\varphi} - \frac{1}{R}\ \frac{\partial}{\partial R}(RA_{\varphi})\right\}\vec{e}_{\varphi}$$

$$+ \left\{\frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(RA_{\Theta}) - \frac{\partial A_R}{\partial\Theta}\right]\right\}\vec{e}_{\Theta}$$

$$\nabla^2 U = \frac{1}{R^2}\ \frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\ \frac{\partial U}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\ \Theta}\ \frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\ \frac{\partial U}{\partial\Theta}\right)$$

$$+ \frac{1}{R^2\sin^2\Theta}\ \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$$

ملحـــق (٣)

الصيغ الشعاعيةالمستخدمة في اشتقاق معادلات الحقل الكهرطيســي

1) $\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c}.(\vec{a} \wedge \vec{b})$

2) $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$

3) $(\vec{a} \wedge \vec{b}).(\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d}) - (\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c})$

4) $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\Psi = 0$

5) $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) = 0$

6) $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{a}) - \nabla^2\vec{a}$

7) $\vec{\nabla}.(\Psi\vec{a}) = \vec{a}.\vec{\nabla}\Psi + \Psi\vec{\nabla}.\vec{a}$

8) $\vec{\nabla} \wedge (\Psi\vec{a}) = \vec{\nabla}\Psi \wedge \vec{a} + \Psi\vec{\nabla} \wedge \vec{a}$

9) $\vec{\nabla}(\vec{a}.\vec{b}) = (\vec{a}.\vec{\nabla})\vec{b} + (\vec{b}.\vec{\nabla})\vec{a} + \vec{a} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{b}) + \vec{b} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{a})$

10) $\vec{\nabla}.(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) - \vec{a}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{b})$

11) $\vec{\nabla} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a}(\vec{\nabla}.\vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla}.\vec{a}) + (\vec{b}.\vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a}.\vec{\nabla})\vec{b}$

12) $\vec{\nabla}.\vec{r} = 3$

13) $\vec{\nabla} \wedge \vec{r} = 0$

14) $(\vec{a}.\vec{\nabla})\vec{r} = \vec{a}$

نظريات التكاملات الشعاعية

a) $\int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) d\vec{s} = \oint_C \vec{a}.d\vec{\ell}$

نظرية ستوكـــــس

b) $\int_S \vec{n} \wedge \vec{\nabla}\Psi ds = \oint_C \Psi.d\vec{\ell}$

نظرية التفرق أو نظرية غوص – استراغرادسكي

c) $\oint_S \vec{a}.d\vec{s} = \int_V \vec{\nabla}.\vec{a}\, dv$

d) $\int_V (\phi\nabla^2\Psi - \Psi\nabla^2\phi) dv = \oint_S (\phi\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\phi).d\vec{s}$ نظرية غرين

ملحـــــق (٤)

حلول معادلات الكمونين السلمي والمتجه:

وجدنا أن معادلة الكمون السلمي φ هي :

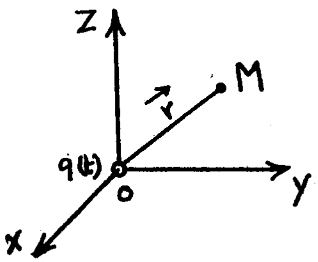
$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

لحل هذه المعادلة نلجأ الى حلها بدون طرف ثان ثم نكتب الحل العام مع الطرف الثاني .

١ - حل معادلة الكمون بدون طرف ثان:

لنعتبر شحنة نقطية $q(t)$ متغيرة مع الزمن وموضوعة في مبدأ الاحداثيات كما في الشكل (١)، نبحث عن حل للمعادلة :

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$



الشكل (1)

يكون ذو تناظر كروي : في لحظة ما فان الكمون φ له نفس القيمة في كل نقاط الكرة التي نصف قطرها r ومركزها الشحنة $q(t)$ والكمون في هذه الحالة لايتعلق باحداثيات النقطة M : (ϕ, Θ) وانما فقط بـ r ويكون مشتق φ بالنسبة لـ Θ و ϕ معدومين واللابلاسي يكتب عندئذ بالشكل :

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}$$

اذا ضربنا (1) بـ r ($r \neq 0$) نحصل على :

$$\frac{\partial^2 (rv)}{\partial r^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 (rv)}{\partial t^2} = 0 \qquad (2)$$

وهذه ليست الا معادلة انتشار موجة لها الشكل المعروف :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \qquad (3)$$

حيث :

$$\Psi(r\ ,\ t) = r.\varphi(r,\ t)$$

كل تابع مستمر وقابل للاشتقاق مرتين من الشكل :

$$\Psi_1(r\ ,\ t) = \Psi_1(r - Ct)$$

يعتبر حلا للمعادلة (3).

يمكن البرهان أيضا على أن التابع $\Psi_2(r\ ,\ t) = \Psi_2(r + Ct)$

يمثل حلا لـ (3) ولذلك فان الحل العام يكتب على الشكل :

$$\Psi(r\ ,\ t) = \Psi_1(r - Ct) + \Psi_2(r + Ct)$$

حيث يمثل التابع $\Psi_2(r + Ct)$ موجة تنتشر باتجاه النقطة 0

أما التابع $\Psi_1(r - Ct)$ فيعبر عن موجة تنتشر الى خارج الشحنة

وسوف نعتبر التابع الاخير أي :

$$\Psi_1(r\ ,\ t) = \Psi_1(r - Ct).$$

وإذا كان Ψ تابعا لـ $r - Ct$ فانه يكون كذلك تابعا لـ $t - \frac{r}{C}$

ولذلك فان تابع الكمون يكتب على الشكل:

$$\varphi(r,\ t) = \frac{1}{r}.\Psi(r;\ t) = \frac{1}{r}\ f(t - \frac{r}{C}) \qquad (4)$$

حيث f تابع وسيط .

من جهة أخرى يعطى الكمون السلمي الناتج عن شحنة ما بالعلاقة :

$$\varphi(r,\ t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q(t)}{r} \qquad (5)$$

والكمون السلمي في النقطة M يساوي :

$$\varphi(r,t) = \frac{1}{r} f(t - \frac{r}{C}) \sim \frac{1}{r} f(t) \qquad (6)$$

حيث اعتبرنا أن $\frac{r}{C}$ مقدار ضئيل . وبمقارنة (5)مع (6) نجد أن التابع f يساوي $\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}$ والحل النهائي للمعادلة (1)يكون من الشكل :

$$\varphi(r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q(t - r/C)}{r} \qquad (7)$$

وهو الكمون الذي يحقق المعادلة (1) والناتج بجوار الشحنة q ويدعى بالكمون المتأخر لان انتقال الكمون من q الى نقطة ما مثل M تبعد عن q بالمسافة r يستغرق زمنا يساوي $\frac{r}{C}$.

٢ ـ حساب $\vec{A}(\vec{r}, t)$ الناجم عن عنصر تيار :

لنبحث بنفس الاسلوب عن الكمون المتجه الناجم عن عنصر تيار متغير موضوع في المبدأ .

ان معادلة انتشار الكمون المتجه كما وجدنا هي :

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = - \mu_o\vec{J}(t)$$

ومركبات هذه المعادلة هي :

$$\nabla^2 A_x - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = - \mu_o \vec{J}_x(t)$$

$$\nabla^2 A_y - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = - \mu_o \vec{J}_y(t) \qquad (8)$$

$$\nabla^2 A_z - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = - \mu_o \vec{J}_z(t)$$

لنعتبر أن في مبدأ الاحداثيات عنصر حجم $d\tau$ يحوي كثافة نيار $\vec{j}(t)$ متغيرة مع الزمن . ان معادلة انتشار المركبة A_x تشابه تماما معادلة انتشار الكمون φ ولذلك فان حل هذه المعادلة يشابه حل معادلة الكمون φ . اذا لم يتغير j_x مع الزمن فان المركبة dA_x للكمون المتجه تساوي :

$$dA_x = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{j_x d\tau}{r}$$

في اللحظة t وفي نقطة ما M تبعد عن المبدأ مسافة r لانرى في هذه اللحظة j_x وانما نرى كثافة التيار $j_x(t - \frac{r}{C})$ في لحظة متأخرة $(t - \frac{r}{C})$ لانه يلزم زمن مقداره $\frac{r}{C}$ لانتشار الكمون من O الى M . وبناء على ماتقدم فان حلول المعادلات (8) هي :

$$dA_x(r, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{j_x(t - r/C)d\tau}{r}$$

$$dA_y(r, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{j_y(t - r/C)d\tau}{r} \qquad (9)$$

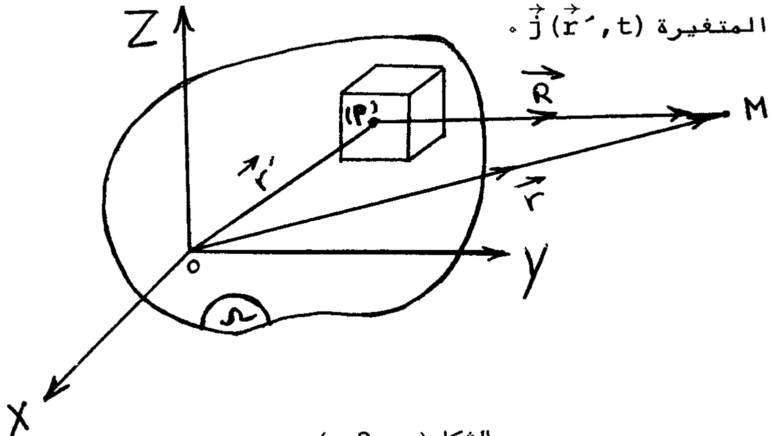
$$dA_z(r, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{j_z(t - r/C)d\tau}{r}$$

والحل يكتب بشكل متجه على الشكل :

$$d\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\vec{j}(t - r/C)d\tau}{r}$$

٣ ـ حساب $\vec{A}$ و φ عند توزع الشحنات والتيارات (الحل العام):

يمكن أن نحل الآن المعادلات العامة التي تتواجد فيها كثافة التيار $\vec{j}(t)$ وكثافة الشحنات $\vec{\rho}(t)$ في حجم Ω محدود كما في الشكل (2) في النقطة p التي تبعد عن O بالمسافة r' يكون الحجم العنصري $d\tau$ الذي يحوي الشحنة المتغيرة $\rho(\vec{r}',t)$ هو مكان تواجد كثافة التيار المتغيرة $\vec{j}(\vec{r}',t)$.



الشكل (2)

ان مساهمة $d\tau$ في الكمون $\varphi(\vec{r},t)$ و $\vec{A}(\vec{r},t)$ هو:

$$d\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\rho(\vec{r},\ t-R/C)}{R}$$
$$d\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{j}(\vec{r}',\ t-R/C)\,d\tau}{R} \qquad (10)$$

حيث R هي المسافة بين M و p . اذا جمعنا مساهمات كل عناصر الحجم مثل $d\tau$ نحصل على الحل العام للكمونات المتأخرة في النقطة M:

$$\varphi(\vec{r},\ t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_{\Omega} \frac{\rho(r',t - R/C)\,d\tau}{R}$$

$$\vec{A}(\vec{r},\ t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{j}(\vec{r}',t - R/C)\,d\tau}{R} \qquad (11)$$

وهو الحل العام لمعادلات الكمونين السلمي والشعاعي .

المراجع الأجنبية

1- Bertin,M. Faroux,J.P,Renault,J.Électromagnetisme II, Equations de Maxwell et Relativité, France, 1979.

2- Bansilal, Mathematical Theory of Electromagnetisme India, 1965.

3- Gerl. M. Janot, C. I.Relativité Electromagnétisme. France, 1970.

4- Jordan, E.C, Balmain K.G, Electromagnetic Waves and Radiating Systems, U.S.A. 1968.

5- Jackson, J.D, Classical Electrodynamcis, Second Edition, U.S.A. 1975.

6- Kittel, C., Knight, W.D,Ruderman,M.A,Mechanics, Berkeley Physics course, Volume 1, U.S.A. 1965.

7- Lorrain, P., Corson, D.R., Champs et ondes Electromagnétiques, France, 1979.

8- Marion, J.B, Hornyak, W.F., Physics For Science and Engineering, U.S.A. 1982.

9- Pain, H.J. The Physics of Vibrations and Waves. England, 1981.

10- Reitz, J.R, Milford, F.J,Christy R.W,Foundations of Electromagnetic Theory, Canada, 1979.

11- Stratton J.A., Electromagnetic Theory, U.S.A., 1941.

12- Samuel, S., Poularikas, A.D., Electromagnetics, Classical and Modern Theory and Applications , U.S.A., 1979.

13- Whitmer, R.M., Electromagnetics, U.S.A. 1963.

المراجع العربية

١ ـ اينشتاين البرت ، انفلد ليوبولد ،تطور الافكار في الفيزياء
ترجمة الدكتور أدهم السمان ،منشورات وزارة الثقافة دمشق 1986.

٢ ـ آبو عسلي الياس ، الالكتروديناميك ،منشورات جامعة دمشق، 1982.

٣ ـ العبد الله رياض ،الكهرطيسية ،منشورات جامعة البعث ، 1982 .

٤ ـ بول كوديراك ،النسبية ،ترجمة مصطفى الرقى ،منشورات عويدات
لبنان ، 1971.

٥ ـ فرانسيس ا . جينكينز ،هارفي . ا. هوايت ،أساسيات البصريات
ترجمة : د. أحمد الشاذلي عبد الفتاح ،الجزيري سعيد بسيوني،
القاهرة ، 1981 .

٦ ـ فاينمان ريتشارد . ب ،محاضرات فاينمان في الفيزياء ،الميكانيك
الجزء الاول ،ترجمة فئة من اساتذة جامعة دمشق ، 1974.

٧ ـ كينيث وفورد ـ الفيزياء الكلاسيكية والحديثة المجلد الثالث ،ترجمة
د.عمرحسن الشيخ ،د.عيسى سليم شاهين ،منشورات مجمع اللغة العربية
الاردني ، 1985 .

٨ ـ كومبانيتس ،آ ، الفيزياء النظرية الجزء الاول ،ترجمة : د. طاهر
الترابدار وآخرون ،مطبوعات وزارة التعليم العالي ، 1969 .

٩ ـ مراد عبدو ، الاهتزازات والامواج (٢) ،منشورات جامعة حلب 1983.
الاطياف والفيزياء الذرية ،منشورات جامعة حلب ، 1982.

المصطلحات العلمية

إنكليزي - عربي

- A -

Absorption	امتصاص
Amplitude	سعـة
Angle	زاوية
Phase Angle	زاوية الطور
Angle of incidence	زاوية الورود
Angle of polarization	زاوية الاستقطاب
Angle of reflection	زاوية الانعكاس
Angle of refraction	زاوية الانكسار
Complex Angle	زاوية عقدية
Average life time	متوسط العمر
Accelerator	مسرع
Linear Accelerator	مسرع خطي
Aberration of light	الزيغ الضوئي
Ampère's law	قانون أمبير

- B -

Boundary conditions	الشروط الحدية
Brewster's angle	زاوية بروستر
Biaxial crystal	بلورة ثنائية المحور
Birefrigence	انكسار مضاعف

Brillance	سطوع

- C -

Causality	سببية
Charge	شحنة
Conservation of Charge	انحفاظ الشحنة
Charge density	كثافة الشحنة
Charged particle	جسيم مشحون
Coaxial line	خط محوري
Conductive medium	وسط ناقل
Contraction of length	تقلص الطول
Conductor	ناقل
Crystal	بلورة
Crystalline media	وسط بلوري
Current	تيار
Conduction current	تيار الناقلية
Displacement current	تيار الانزياح
Induced current	تيار متحرض
Current density	كثافة التيار
Cyclotron frequency	تردد السيكلوترون
Frequency	تردد
Cylindrical waves	أمواج اسطوانية

- D -

Depth of penetration	عمق التوغل

Dielectric	عازل
Dielectric permittivity	سماحية العازل
Dipole	ثنائي أقطاب
Electric Dipole	ثنائي قطب كهربائي
Magnetic Dipole	ثنائي قطب مغناطيسي
Divergence	تفرق
Dot product	جداء داخلي
Dipole moment	عزم ثنائي الاقطاب

- E -

Electric flux	تدفق كهربائي
Electric field	حقل كهربائي
Electric force	قوة كهربائية
Electromagnetic theory	النظرية الكهرطيسية
Energy	طاقة
Energy electrostatic	طاقة كهراكدية
Kinetic Energy	طاقة حركية
Equiphase surface	سطوح تساوي الطور
Extraordinary wave	موجة شاذة أو غريبة
Potentiel energy	طاقة كمونية
Electromagnetic field	الحقل الكهرطيسي

- F -

Faraday's law	قانون فاراداي
Faraday rotation	دوران فاراداي

Sources of field	منابع الحقل
Irrotational field	حقل غير دوار
Field	حقل
Conservative field	حقل محفوظ
Induction field	حقل متحرض
Scalar field	حقل سلمي
Field equations	معادلات الحقل
Electric field	حقل كهربائي
Magnetic field	حقل مغناطيسي
Four vectors	المتجهات الرباعية
Fresnel coefficients	معاملات فرنل
Free charges	شحنات حرة
Frequency	تردد
Plasma frequency	تردد البلازما

- G -

Galileian relativity	نسبية غاليله
Galileian transformation	تحويل غاليله
Gauss's law	قانون غوص
Gauss's theorem	نظرية غوص
Lorentz Gauge	معيار لورنتس
Gauge transformations	التحويلات المعيارية
Gradian	تدرج

Gradian of electric field	تدرج الحقل الكهربائي
Group velocity	السرعة المجموعية
Guided waves	الامواج الموجهة
Guide wave ength	طول موجة الدليل

- H -

Hagen-Rubens relation	علاقة هاجن - روبنز
Harmonic oscillator	هزاز توافقي
Homogeous	متجانس

- I -

Impedance	ممانعة
Free space Impedance	ممانعة الخلاء
Index of refraction	قرينة الانكسار
Inductance	التحريض
Ionized gas	غاز متأين
Ionosphere	الايونوسفير
Ionization density	كثافة التأين
Ionospheric propagation	الانتشار الايونوسفيري
Interference	تداخل
Insulator	عازل

- L -

Laplacian	اللابلاسي
Lenz's law	قانون لنز
Lines of force	خطوط القوة

Local field	حقل موضعي
Longitudinal wave	موجة طولية
Loop	عروة

- M -

Magnetic force	القوة المغناطيسية
Magnetic flux	التدفق المغناطيسي
Magnetic potential	الكمون المغناطيسي
Magnetic induction	التحريض المغناطيسي
Magnetomotive force	القوة المحركة المغناطيسية
Material	مادة
Material Macroscopic properties	الخواص الماكروسكوبية للمادة
Material microscopie propertics	الخواص المجهرية للمادة
Matrix	مصفوفة
Matrix transpose	منقول مصفوفة
Maxwell's equations	معادلات ماكسويل
Media	وسط
Anisotropic media	وسط مختلف المناحي
Isotropic media	وسط متماثل المناحي
Homogenous media	وسط متجانس
Michelson-Morley experiment	تجربة مايكلسون ومورلي
Mode	نمط
Monopole	وحيد القطب
Motion	حركة

Motion of charged particules	حركة الجسيمات المشحونة

- O -

Optics	ضوء
Ordinary wave	موجة اعتيادية
Orthogonal	متعامد

- P -

Parallel planes	مستويات متوازية
Plane waves	موجات مستوية
Penetration depth	عمق التوغل
Permeability	نفوذية
Permeability of free space	نفوذية الفراغ
Permittivity	سماحية
Permittivity complexe	السماحية العقدية
Permittivity of ionized gas	سماحية الغاز المؤين
Permittivity relative	المساحية النسبية
Phase velocity	السرعة الظورية
Plane of incidence	مستوى الورور
Plane of refraction	مستوى الانكسار
Linear polarization	استقطاب خطي
Poynting vector	متجهة بوينتنغ
Complexe poynting vector	متجهة بوينتنغ العقدية

- R -

Reflection	انعكاس
Total internal reflection	انعكاس كلي داخلي

Reflection coefficient	معامل الانعكاس
Retarded potential	الكمون المتأخر
Right-hand Rule	قاعدة اليد اليمنى
Rotation sense	جهة الدوران

- S -

Skin effect	مفعول القشرة
Spherical wave	موجة كروية
Superconductivity	فوق الناقلية
Surface charge	شحنة سطحية
Snell's law	قانون سنل
Special theory of relativity	النظرية النسبية الخاصة
Steady current	تيار ثابت الشدة
Surface current	تيار سطحي

- T -

Transparent medium	وسط شفاف
Transverse electric wave	موجة كهربائية عرضية
Transverse magnetic field	حقل مغناطيسي عرضي

- W -

Wave length	طول الموجة

الفهرس

الفصل الاول : معادلات الحقل الكهرطيسي في الفراغ (معادلات ماكسويل)