

الإلكترونيات الأساسية

(الإلكترونيات 1)



منشورات جامعة دمشق
كلية العلوم

الإلكترونيات الأساسية

(الإلكترونيات 1)

الدكتور محمد قعقع
أستاذ في قسم الفيزياء

1436-1435هـ

2015-2014 م

جامعة دمشق

محتويات الكتاب

11	مقدم الكتاب
15	الفصل الأول
15	مدخل إلى الدارات الكهربائية
15	1-1 مقدمة
15	2-1 مفاهيم أساسية
21	3-1 عناصر الدارة
29	4-1 المصادر المستقلة:
30	5-1 المصادر غير المستقلة
30	6-1 العناصر غير البسيطة:
32	7-1 قوانين كيرشوف
35	8-1 تطبيقات على تحليل الدارة:
39	9-1 تجزئة التوتّر والتيار:
42	10-1 المصادر الحقيقية والدارات المكافئة لها:
45	11-1 المنبعان المتكافئان:
47	12-1 أمثلة على دارات فيها مصادر غير مستقلة:
52	مسائل على الفصل الأول
57	الفصل الثاني
57	الاستجابة في الدارات البسيطة
57	1-2 مقدمة:
57	2-2 مصطلحات
58	3-2 البحث عن استجابة الدارة
60	4-2 جمل المرتبة الأولى

72	5-2	تساؤل الاستجابة الأسي:
74	6-2	جمل المرتبة الثانية:
82	7-2	الاستجابة لدوال قسر غير أسية:
88	8-2	أمثلة على دوال قسر غير أسية:
98	9-2	خاتمة:
99		مسائل على الفصل الثاني
103		الفصل الثالث
103		الدارة الكهربائية في الحالة المستقرة الجيبية
103	1-3	مقدمة
103	2-3	العلاقة بين التوتر والتيار من أجل عناصر الدارة المختلفة:
110	3-3	القدرة في دارات التيار المتناوب
119	4-3	التجاوب في الدارات RCL
136		مسائل على الفصل الثالث
141		الفصل الرابع
141		طرق تحليل الدارات الكهربائية في الحالة الجيبية المستقرة
141	1-4	مقدمة
142	2-4	طريقة التحليل العروي
146	3-4	الصيغة المصفوفية لمعادلات العروة
148	4-4	أمثلة محلولة على التحليل العروي:
156	5-4	طريقة التحليل العقدي:
159	6-4	الصيغة المصفوفية لمعادلات العقدة:
160	7-4	أمثلة محلولة على التحليل العقدي:
170		مسائل على الفصل الرابع
177		الفصل الخامس

177	نظريات الدارة الكهربائية
177	1-5 مقدمة:
191	3-5 نظرية انتقال القدرة العظمى:
196	4-5 نظرية كِنلي KENLY:
200	5-5 نظرية الانضمام SUPERPOSITION
209	مسائل على الفصل الخامس
215	الفصل السادس
215	الشبكة رباعية الأطراف
215	1-6 مقدمة:
217	2-6 معادلات الشبكة رباعية الأطراف:
222	3-6 مدلول معادلات الشبكة في الدارات الفاعلة والمنفصلة:
222	4-6 الدارات المكافئة للشبكة رباعية الأطراف المنفصلة:
224	5-6 أمثلة محلولة:
229	6-6 ممانعة الدخل للشبكة رباعية الأطراف المُحمَّلة
231	7-6 التضخيم والتوهين
233	8-6 تسلسل الشبكات وتكرارها
237	9-6 المرشحات الكهربائية
238	10-6 أنواع المرشحات
241	11-6 أمثلة على المرشحات
255	12-6 رباعيات الأطراف كمرشحات كهربائية
255	13-6 الممانعة المميزة لرباعي الأطراف
257	14-6 تعيين تواترات القطع للمرشح
259	15-6 تطبيقات على المرشحات
269	مسائل على الفصل السادس

273	الفصل السابع.....
273	التحريض المتبادل والمحولات.....
273	1-7 التحريض المتبادل.....
275	2-7 تحليل الدارات المقترنة مغنطيسياً.....
276	3-7 قاعدة النقطة.....
279	4-7 المحوطة.....
281	5-7 المحولة الخطية.....
283	6-7 انتقال القدرة في المحولة الخطية.....
285	7-7 انتقال القدرة في المحولة المثالية.....
287	8-7 أمثلة محلولة.....
294	مسائل على الفصل السابع.....
299	الفصل الثامن.....
299	أنصاف النواقل.....
299	1-8 مقدمة.....
300	2-8 عصائب الطاقة.....
301	3-8 العوازل وأنصاف النواقل والنواقل.....
303	4-8 أنصاف النواقل الأصلية (الذاتية).....
305	5-8 أنصاف النواقل المطعمة (اللاذاتية).....
310	6-8 مستوى طاقة فرمي.....
312	7-8 الكتلة الفعالة.....
312	8-8 تركيز حاملات الشحنة.....
317	10-8 الناقلية النوعية لنصف الناقل الأصيل.....
317	11-8 الناقلية النوعية لنصف الناقل المطعم.....
318	12-8 أمثلة نموذجية وحسابات كمية.....

323	مسائل على الفصل الثامن.....
325	الفصل التاسع.....
325	الوصلة P-N والديودات الوصلية.....
325	1-9 مقدمة:.....
325	2-9 فيزياء الوصلة P-N.....
329	3-9 الديود الوصلي.....
332	4-9 الديود في غياب الانحياز (بدون انحياز).....
334	5-9 الديود الوصلي في الانحياز العكسي.....
335	6-9 الديود في الانحياز الأمامي أو المباشر.....
337	7-9 المنحني المميز السكوني (I-V) للديود الوصلي P-N.....
339	8-9 الديود الوصلي في الدارات الكهربائية.....
341	9-9 نماذج الديود التقريبية.....
344	10-9 أمثلة على استعمال نماذج الديود.....
348	11-9 تقويم التيار المتناوب.....
350	12-9 تقويم نصف موجة.....
353	13-9 مقوم الموجة الكاملة.....
355	14-9 مقوم الموجة الكاملة الجسري.....
358	مسائل على الفصل التاسع.....
359	الفصل العاشر.....
359	الترانزستورات الوصلية.....
359	1-10 مقدمة.....
361	2-10 أنواع الترانزستورات.....
361	3-10 الترانزستور الوصلي ثنائي القطبية.....
363	4-10 تركيبات الترانزستور ثنائي القطبية.....

3695-10 الترانزستور NPN
3716-10 العلاقة بين α و β في ترانزستور NPN
3737-10 تركيبة الباعث المشترك
3778-10 الدارة المكافئة للترانزستور
3799-10 الدارة المكافئة T
38010-10 الدارة المكافئة ذات الوسطاء المختلطة
38211-10 طريقة قياس الوسطاء H
385 الملاحق
385ملحق 1مسائل عامة محلولة
401ملحق 2:النوابت الفيزيائية
403المصطلحات العلمية
425المراجع العلمية

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

مقدمة الكتاب

الإلكترونيات علم تطبيقي تتسع تطبيقاته لتشمل كل مرفق من مرافق حياتنا اليومية. وتتوزع هذه التطبيقات بين البسيطة والمعقدة تبعاً للوظيفة التي تؤديها. فهناك أجهزة إلكترونية أساسية لا غنى عنها للمختبرات والباحثين، كالمنابع ومولدات الإشارة والمقاييس والمكاشيف وراسمات الاهتزاز وغيرها. وهناك تجهيزات معقدة متكاملة تستعمل لإرسال المعلومات المتمثلة بالصوت أو الصورة أو البيانات، كما توجد بالمقابل أجهزة لاستقبال تلك المعلومات. لقد تطور هذا العلم سريعاً بفضل التقدم الذي حصل في إلكترونيات الجسم الصلب، وعلى وجه الخصوص بعد اكتشاف الترانزستور. وقد انعكس هذا على صناعة الأجهزة الإلكترونية من حيث صغر حجمها، وتحسين أدائها، وإطالة عمرها وتوفيرها للطاقة.

لم يكن الهدف من هذا الكتاب تقديم معلومات مفصلة عن بنية هذه الأجهزة الإلكترونية وتشغيلها أو صيانتها. فتلك مواضيع يعالج بعض منها في مقرر تدريسي لاحق، ويدرس بعضها الآخر في مقررات الهندسة الإلكترونية. إن الهدف الرئيسي من هذا الكتاب هو تهيئة طالب الفيزياء في كلية العلوم ليفهم ويستوعب مقررات الإلكترونيات الأخرى اللاحقة. ومن أجل ذلك اخترت له عنواناً ينسجم مع الهدف وهو " الإلكترونيات الأساسية "

ومن أجل تحقيق هذا الهدف تضمن الكتاب موضوعين أساسيين: الأول هو الدارات الكهربائية بأنواعها وكل ما يتصل بها من عناصر، وطرائق حلها ونظرياتها، وسلوكها عندما تخضع لمنابع كهربائية متنوعة، جيبيية أو مستمرة، أو أسية أو نبضية وغيرها. وفي هذا المجال تناول الكتاب تطبيقات كثيرة على

الدارات بوجه عام والشبكات رباعية الأطراف بوجه خاص وصولاً إلى الدارات المكافئة ومعادلاتها والوسطاء المعرفة لها. وفي هذا السياق عالج الكتاب موضوع المرشحات الكهربائية بأنواعها والمحولات الكهربائية نظراً لأهمية هذه الأدوات. أما الموضوع الثاني فيقدم المعلومات الأساسية لدراسة الأدوات والنبائط الإلكترونية المصنوعة من أنصاف النواقل وفهم آلية عملها. لذا كان من الضروري عرض موضوع أنصاف النواقل وخصائصها الفيزيائية وآلية النقل الكهربائي فيها. ويشكل هذا الموضوع مدخلاً لفهم عمل الوصلة p-n وتطبيقاتها في الديودات والترانزستورات الوصلية.

عرضت محتويات الكتاب في عشرة فصول وأربعة ملاحق، خصصت سبعة فصول للموضوع الأول، وثلاثة للموضوع الثاني. كما تضمن كل فصل من فصول الكتاب أمثلة محلولة حلاً مفصلاً جاءت كتطبيقات على المواضيع النظرية التي سبقتها مع عدد من المسائل غير المحلولة. كان الهدف من الأمثلة المحلولة هو نقل الطالب من المعلومة النظرية البحتة إلى التطبيق العملي المباشر. ومما لا شك فيه أن هذه الأمثلة تساعد الطالب على حل المسائل الواردة في نهاية كل فصل.

كان الفصل الأول بمثابة مدخل لدراسة الدارات الكهربائية يتعرف فيه الطالب على عناصر الدارة بمختلف أنواعها وطرق التعامل معها. عرضت فيه القوانين الأساسية المستعملة في حل الدارة الكهربائية. وتناول الفصل الثاني استجابة الدارة الكهربائية، الطبيعية منها والقسرية، في نطاق الزمن وفي نطاق التواتر. لقد اتبعنا في إيجاد هذه الاستجابات طريقة بسيطة لا تعتمد على حل المعادلات التفاضلية بل تحول تلك المعادلات إلى معادلات جبرية المجهول فيها هو التواتر ω . واستكملنا دراسة الاستجابة في الفصل الثالث الذي تناول الاستجابة في الحالة المستقرة الجيبية. وعرض فيه موضوع التجاوب في الدارات التسلسلية والتفرعية بشيء من التفصيل.

تناول الفصلان الرابع والخامس طرائق تحليل الدارة الكهربائية. فقد خصص الفصل الرابع لطريقتي التحليل العروي والتحليل العقدي وعالج مختلف الحالات بشيء من التفصيل. أما الفصل الخامس فقد خصص لنظريات الدارة المختلفة. وتناول الفصل السادس دراسة الشبكة رباعية الأطراف ووسطائها المختلفة، وكانت المرشحات الكهربائية أهم تطبيقاتها في هذا الفصل. وتناول الفصل السابع تطبيقاً آخر للشبكة رباعية الأطراف هو المحولة الكهربائية، وبه نختم الموضوع الأساسي الأول للكتاب.

تبدأ فصول الموضوع الثاني بالفصل الثامن الذي يحمل عنوان أنصاف النواقل. نقدم في هذا الفصل المفاهيم الأساسية لأنصاف النواقل متخذين العنصرين الهامين منها ألا وهما السليكون والجرمانيوم كمثال عليها. يتناول هذا الفصل عرضاً مبسطاً لفيزياء أنصاف النواقل التي تشكل الأرضية اللازمة لفهم عمل وتشغيل العديد من العناصر والنبائط الإلكترونية المكونة للدارات الكهربائية والإلكترونية. نتناول في الفصل التاسع فيزياء الوصلة pn وآلية عملها كديود بطريقة يغلب عليها الأسلوب الوصفي، ونستعرض بعض التطبيقات العملية للديودات بأنواعها المختلفة. ويخصص الفصل العاشر للترانزستورات الوصلية وآلية عملها وبعض تطبيقاتها.

يتضمن الكتاب عدداً من الملاحق، أولها مجموعة من المسائل العامة المحلولة، والثاني أهم الثوابت الفيزيائية التي قد يحتاجها الطالب في حل بعض التمارين والتطبيقات. كما احتوى الثالث على ثبوت بالمصطلحات العلمية بالإنكليزية وما يقابلها بالعربية مرتبة وفق الحرف اللاتيني. وتضمن الرابع أهم المراجع العربية والإنكليزية المتعلقة بموضوعات الكتاب.

وفي الختام، أمل أن يكون هذا الكتاب عوناً لطالب الفيزياء، يجد فيه ضالته ويساعده على فهم الأسس التي يقوم عليها علم الإلكترونيات الواسع. كما أرجو أن يضيف لبنة نافعة في صرح المكتبة العلمية العربية الشامخ. وأخيراً أقول:

لقد بذلت ما استطعت من جهد وسخرت ما لدي من خبرة اكتسبتها من تدريس هذا المقرر لسنوات تزيد على ربع قرن في جامعاتنا السورية وفي جامعتين عربيتين، فإذا وُفِّت فذاك فضل من الله، وإذا كان غير ذلك فمن نفسي. ولاشك أن وجود بعض الهفوات في أي عمل يكون حافزاً لاستدراك ما فات وتصحيح ما غاب. والله من وراء القصد.

دمشق في 2014/5/3

المؤلف

أ.د. محمد قعق

الفصل الأول

مدخل إلى الدارات الكهربائية

1-1 مقدمة

تعد دراسة الدارات الكهربائية من الأمور الأساسية في مجال الإلكترونيات، كما أنها مفيدة في مجالات أخرى. ولا تقتصر فائدة المهارات المكتسبة من هذه الدراسة على مجالات الهندسة الإلكترونية كالإلكترونيات، والاتصالات، والأمواج المكروية، ومنظومات القدرة؛ بل يمكن تطبيقها في مجالات أخرى مختلفة.

نعني بمصطلح الدارة الكهربائية أو الشبكة الكهربائية تجميعاً من الأجهزة الكهربائية (كمنابع التوتر ومنابع التيار، والمقاومات، والمحرّضات، والمكثفات، والمضخمات، والترانزستورات وغيرها...) متصلة فيما بينها بطريقة أو بأخرى. وغالباً ما يطلق اسم الدارة الكهربائية على الشبكة إذا احتوت هذه الأخيرة على طريق مغلق واحد على الأقل. تكون الشبكة منفصلة، أو خاملة، إذا احتوت على عناصر منفصلة فقط، كالمقاومات والمكثفات، وتكون فاعلة إذا احتوت على عنصر فاعل واحد على الأقل كمنبع للتيار أو التوتر. سنتناول في هذا الفصل عرضاً سريعاً لبعض المفاهيم الأساسية في هذا المجال، ونتعرف أهم العناصر الكهربائية الأولية والقوانين التي تصفها.

1-2 مفاهيم أساسية

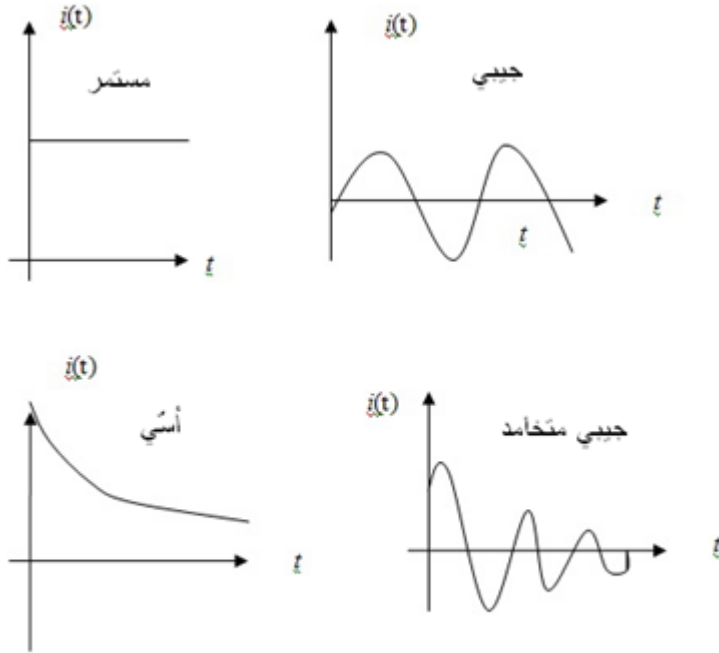
1-2-1 التيار الكهربائي

نعرف التيار الكهربائي بأنه المعدل الزمني لتغير الشحنة، ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1 - 1)$$

إن جهة التيار الاصطلاحي هي الجهة التي تتحرك وفقها الشحنة الموجبة. وقيمة التيار هي كمية الشحنة الموجبة التي تمر عبر نقطة مرجعية معينة في ثانية واحدة. أما وحدة التيار فهي الأمبير الذي يرمز له بالحرف A ، ويعرّف بأنه معدل حركة شحنة تساوي كولوناً واحداً في ثانية واحدة. ونحسب الشحنة المارة بين لحظتين t_0 و t من العلاقة الآتية:

$$q = \int_{t_0}^t i dt \quad (1 - 2)$$



الشكل 1-1

توجد أنواع مختلفة من التيارات قيد الاستخدام كالتيار المستمر (DC)، والتيار المتناوب الجيبي (AC) ذي السعة الثابتة، والجيبي المتخامد ذي السعة المتخامدة، والأسّي (أي تتغير قيمته مع الزمن وفق دالة أسية)، والنبضي (المكون من نبضات مستطيلة أو مثلثية بجهة واحدة أو متناوبة)، وغيرها. ويوضح الشكل 1-1 بعضاً من هذه الأنواع. يمثل التيار في مخطط الدارة بسهم يشير إلى جهته، وقد تسجل قيمة التيار إلى جانب السهم.

1-2-2 القيمة الوسطية والقيمة المنتجة

تتغير قيمة التيار التابع للزمن في كل لحظة وفق الدالة المعرفة له. بيد أنه يمكن إيجاد قيمة وسطية / للتيار $i(t)$ بين لحظتين t_1 و t_2 من العلاقة:

$$I = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt \quad (1 - 3)$$

فإذا كانت دالة $i(t)$ دورية تكون قيمته الوسطية هي القيمة المحسوبة في مجال يساوي الدور T ، وتكتب على النحو التالي:

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt \quad (1 - 4)$$

أما إذا كانت دالة التيار جيبيية فالقيمة الوسطية تكون عندئذ صفراً، لذلك جرت العادة في التيار المتناوب أن تحسب قيمة الجذر التربيعي لمتوسط مربع القيمة الآنية، أو ما يسمى بالقيمة المنتجة ويرمز لها بالرمز rms وتكتب على النحو التالي:

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \quad (1 - 5)$$

والنتيجة المعروفة لهذه القيمة أنها تساوي $1/\sqrt{2}$ من سعة الدالة الجيبية.

مثال 1-

إذا كان $i_1 = 5 \cdot e^{4t}$ من أجل $t < 0$ و $i_1 = 5 \cdot e^{-4t}$ من أجل $t > 0$ تحقق بأن: $i_1(0.25 \text{ s}) = 1.84 \text{ A}$ - ب- متوسط التيار في المجال الزمني

$-0.25s \leq t \leq 0.25s$ هو $\bar{I}_1 = 3.16 \text{ A}$ ج- الشحنة الكلية التي مرت في الناقل في الفترة الزمنية ذاتها تساوي 1.58 C .

1-2-3 التوتر أو فرق الكمون

نقول يوجد توتر أو فرق كمون كهربائي بين طرفي عنصر ما إذا تطلب مرور التيار فيه (أي أن يدخل التيار من أحد طرفيه ويخرج من الطرف الآخر) صرفاً طاقة. وهذه الطاقة تعبر عن العمل اللازم لتحريك الشحنة في داخل العنصر. ونعرف التوتر بين طرفي عنصر ما بأنه العمل اللازم لتحريك شحنة كهربائية موجبة تساوي كولوناً واحداً من أحد طرفيه إلى الطرف الآخر مرة بالعنصر. تقدر واحدة التوتر بالفلظ (V) وهو جول على كولون. فإذا تطلب تحريك شحنة q بين الطرفين A و B للعنصر صرف عمل قدره W_{AB} فالعلاقة التي تعطي التوتر أو فرق الكمون V_{AB} بين الطرفين هي:

$$V_{AB} = \frac{W_{AB}}{q} \quad (1 - 6)$$

ملاحظة 1: لا يُعدّ جريان التيار في العنصر شرطاً لازماً لوجود توتر بين طرفيه، فالبطارية مفتوحة الطرفين يوجد فرق في الكمون بين طرفيها.
ملاحظة 2: ينبغي أن تظهر الطاقة المصروفة لإمرار التيار في العنصر، في مكان آخر أو بأشكال أخرى.

1-2-4 مصطلح الطاقة

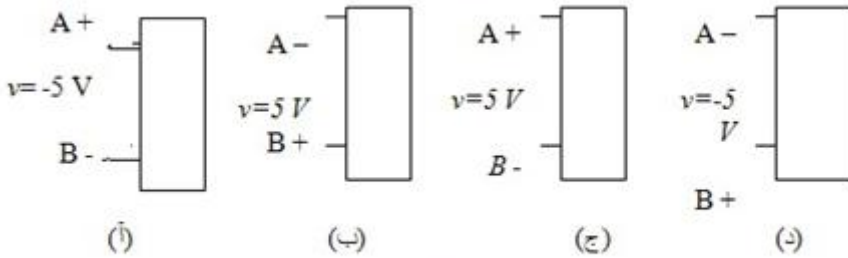
نصطلح أن العنصر يأخذ طاقة، أو يستهلك طاقة، أو يزوّد بالطاقة إذا دخل التيار الموجب من طرفه ذي الكمون الأعلى وخرج من الطرف ذي الكمون الأدنى، وفي هذه الحال تكون قيمة الطاقة موجبة. ونصطلح أن العنصر يُعطي طاقة، أو يزوّد الطاقة، أو يولد الطاقة إذا دخل التيار الموجب من طرفه ذي الكمون الأدنى وخرج من الطرف ذي الكمون الأعلى، وفي هذه الحال تكون قيمة الطاقة سالبة.

وبتعبير آخر نقول: إذا كانت طاقة العنصر المحسوبة موجبة فالعنصر يأخذ أو يستهلك الطاقة، أما إذا كانت طاقته المحسوبة سالبة فهذا يعني أن العنصر يعطي أو يولد الطاقة.

1-2-5 أمثلة على حساب التوتر بين طرفي عنصر ما

مثال 2-

يبين الجزء آ من الشكل 1-2 أن كمون الطرف A أعلى من كمون الطرف B بمقدار 5 V ، أي إن كمون B أعلى من كمون A بمقدار 5 V . أما في الجزء ب من الشكل، فمن الواضح أن كمون B أعلى من كمون A بمقدار 5V. وإذا انتقلنا إلى الجزئين ج و د من الشكل نجد أن الطرف A محمول إلى كمون موجب يزيد على كمون B بمقدار 5 V في كليهما.



الشكل 2-1

مثال 3-

لدينا في الشكل 3-1 $v_1(t) = 100 \cos 250 t$

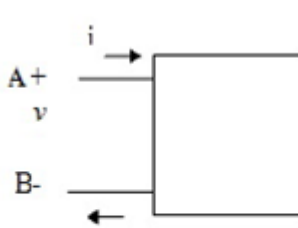
احسب: آ- $v_1(1ms)$ ؛ ب- $v_1(8ms)$ ؛ ج- الطاقة اللازمة لتحريك شحنة قدرها 4C من الطرف ذي الكمون الأعلى في اللحظة $t = 4ms$ ؛ د- الطاقة اللازمة لتحريك الشحنة السابقة من طرف الكمون الأدنى في اللحظة $t = 4ms$.

الأجوبة: آ- $V = 96.89$ ؛ ب- $V = -41.6$ ؛ ج- $J = +216$ ، وهذا يعني أن العنصر يستهلك هذه الطاقة؛ د- $J = -216$ ، أي إن العنصر يعطي هذه الطاقة؛ لأن الطاقة التي يأخذها سالبة.

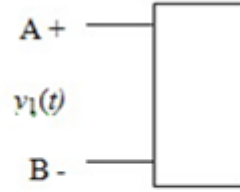
1-2-6 القدرة (الاستطاعة): هي معدل صرف الطاقة، وتعطى بالعلاقة الآتية:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(qv) = v \frac{dq}{dt} = vi \quad (1-7)$$

تقدر القدرة بالواط (W) إذا قدر التوتر بالفولط وقدر التيار بالأمبير.



الشكل 4-1



الشكل 3-1

نقول إن العنصر يمتص أو يأخذ قدرة إذا دخل التيار من طرفه الموجب. ونقول إنه يعطي أو يقدم قدرة إذا خرج التيار من طرفه الموجب.

1=2-7 أمثلة على حساب القدرة:

مثال 4-

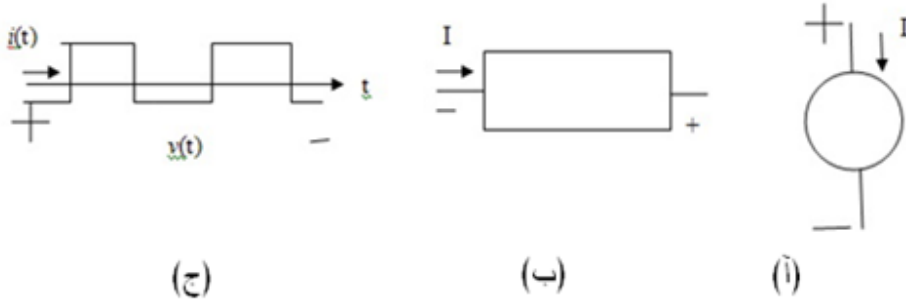
إذا كان $i = 2 \text{ A}$ و $v = -5 \text{ V}$ في الشكل 4-1 ، فالقدرة التي يمتصها العنصر تساوي:

$$P = v \cdot i = (-5) \times 2 = -10W$$

وتعني إشارة السالب أن العنصر يأخذ قدرة سالبة، أي أنه يعطي قدرة تساوي $10W$.

مثال 5-

آ- احسب القدرة التي تُقدَّم إلى عنصر الدارة المبين في الجزء آ من الشكل 1-5 وذلك في اللحظة $t = 0.8 \text{ s}$ ؛ ب- احسب القدرة التي يعطيها عنصر الدارة المبين في الجزء ب من الشكل نفسه ؛ ج- احسب القدرة التي تقدم إلى عنصر الدارة المبين في الجزء ج في اللحظة $t = 0$. تعطى التيارات والتوترات لهذه العناصر كما يلي: (أ) : $I = 5.1 \text{ A}$ ، $v(t) = 5(t^2 - 2) \text{ V}$ ؛ (ب) : $V(t) = 7.2 \text{ V}$ ، $I = 110 \text{ mA}$ ؛ ج : $v(t) = 23 \text{ csc } 120\pi t \text{ kV}$ ، $i(t) = 2.5 \cos \left(120\pi t - \frac{2\pi}{3} \right) \text{ A}$



الشكل 1-5

الأجوبة: آ- 34.68 W -العنصر يعطي قدرة؛ ب- 792 mW ؛ ج- 28.75 kW -

1-3 عناصر الدارة

من المهم أن نميز بين الجهاز الفيزيائي ذاته والنموذج الرياضي لهذا الجهاز الذي سيستعمل لدراسة سلوكه في دارة كهربائية. تشير العبارة "عنصر الدارة" إلى النموذج الرياضي. هذا وسنميِّز "عنصر الدارة العام" عن "عنصر الدارة البسيط" بقولنا إن عنصر الدارة العام يمكن أن يتكون من أكثر من عنصر دارة بسيط واحد. بيد أن عنصر الدارة البسيط لا يمكن تجزئته إلى عناصر دارة

بسيطة أخرى. وسنصطلح على استعمال المصطلح " عنصر الدارة " ليشير إلى عنصر الدارة البسيط.

تصنّف عناصر الدارة البسيطة من حيث الطاقة في صنفين:

1-العناصر المنفصلة passive elements كالمقاومة والمكثفة والتحريضية، وجميعها عناصر خاملة تستهلك الطاقة أو تختزنها بشكل أو بآخر.

2-العناصر الفاعلة active elements كالمولدات والمنابع والبطاريات، وجميعها قادرة على توليد الطاقة بطرق مختلفة، كيميائية أو مغناطيسية أو ضوئية أو حرارية أو سواها، وتقدمها للدارة الكهربائية. كما تصنف من حيث العلاقة التي تربط التيار المار في العنصر والتوتر المطبق عليه في صنفين أيضاً: عناصر خطية كالمقاومات، وعناصر لا خطية كالديودات. وهناك أصناف أخرى.

1-3-1 عنصر الدارة المنفصل

سنعرّف ثلاثة عناصر رئيسة من العناصر المنفصلة البسيطة وفقاً للعلاقة التي تربط بين التيار المار في العنصر والتوتر المطبق بين طرفيه، وعلى هذا الأساس نعرف:

آ-عنصر المقاومة: إذا قامت علاقة خطية بين التيار الجاري في العنصر والتوتر المطبق بين طرفيه، قيل إن هذا العنصر هو مقاومة. وتعرّف خاصية المقاومة بالعلاقة:

$$R = \frac{v(t)}{i(t)} \quad (1 - 8)$$

حيث R هي المقاومة مقدرة بالأوم (Ω) إذا قدرت v بالفولط و i بالأمبير. وتعرف المعادلة (1-8) بقانون أوم. يمثل الجزء (a) من الشكل 1-6 الرمز التخطيطي للمقاومة، ويظهر على الشكل أيضاً الاتجاه الموجب للتيار ولفرق الكمون. إن

الدائرة التي تبذل الطاقة من دون أن تخزنها هي دائرة كل عناصرها مقاومات فقط.

يدعى مقلوب المقاومة الناقلية، ويرمز لها بالرمز G ، أي: $G = \frac{1}{R}$ ، وتسمى واحدها السيمينز (S) وهو مقلوب الأوم. يكتب قانون أوم، بدلالة الناقلية، على الشكل الآتي:

$$i(t) = v(t) \cdot G \quad (1-9)$$

يمكن إعادة كتابة المعادلة (1-7) التي تعطي القدرة المتبددة في المقاومة بإحدى الصيغتين التاليتين:

$$p(t) = i(t) \cdot v(t) = R \cdot [i(t)]^2 \quad (1-10)$$

أو

$$P(t) = v(t) \cdot \frac{v(t)}{R} = G[v(t)]^2 \quad (1-11)$$

ملاحظة: إذا كان الكون ثابتاً، $v(t) = V$ فإن $i(t) = I$ وتعطى القدرة عندئذ بالعلاقة:

$$P = I^2 \cdot R = V^2 \cdot G \quad (1-12)$$

وهي مستقلة عن الزمن.

ب- عنصر التحريضية: يقال عن دائرة إنها تتمتع بتحريضية إذا كانت قادرة أن تخزن طاقة في حقل مغنطيسي. تتصف التحريضية بوجود علاقة توول إلى خطية بين التوتر بين طرفيها والتيار المار فيها. تعرف هذه الخاصية بالعلاقة:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (1-13)$$

حيث L هي التحريضية وواحدتها الهنري (H) إذا قدرت v بالفلط و قدرت i بالأمبير و t بالثانية

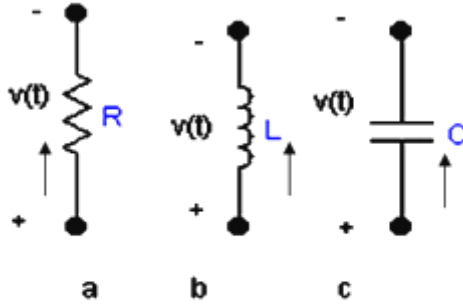
يظهر في الجزء (b) من الشكل 1-6 رمز التحريضية في مخطط الدائرة.

يمكن إعادة كتابة المعادلة (1-13) بالشكل التكاملي على النحو التالي:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt \quad (1-14)$$

يدعى العنصر الذي يمتلك تحريضية بالمرضة inductor . يمكن إيجاد صيغة القدرة المخزنة في المرضة L في اللحظة t باستعمال العلاقة (1-7) والعلاقة (1-13) فنجد:

$$P(t) = Li(t) \frac{di(t)}{dt} \quad (1-15)$$



شكل 6-1

وتكون قيمتها مغايرة للصفر عندما يكون $\frac{di(t)}{dt}$ مغايراً للصفر؛ لذا فإن $P(t)=0$ من أجل أي تيار مستمر $i(t) = I$ ، لكن التيار لا يصل إلى القيمة I إلا بعد أن تكون المرضة قد اختزنت طاقة W تعطى بالعلاقة:

$$W = \int_0^T P(t) dt$$

حيث T هو الزمن اللازم كي يصل التيار المار في المرضة من الصفر إلى القيمة النهائية I . إذن:

$$W = \int_0^T Li(t) \frac{di(t)}{dt} dt$$

$$W = \int_0^I Li(t) di(t) = \frac{1}{2} LI^2 \quad (1-16)$$

مثال 6-

يطبق توتر مستمر قيمته 100 فلت على محرصة قيمتها 2 H. احسب التيار الجاري والطاقة المخزونة بعد مرور 10 ثوانٍ، بفرض أن التيار كان معدوماً في اللحظة $t = 0$. احسب كذلك التوتر الواجب تطبيقه كي نعيد التيار إلى الصفر خلال ثانيتين.

الحل

لحساب التيار في اللحظة نستخدم العلاقة (1-10) فنجد:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt + i(0) = \frac{1}{2} \int_0^t 100 dt = 50t$$

وبالتعويض نجد:

$$i(10s) = 50 \times 10 = 500A$$

لحساب الطاقة المخزنة بعد مرور 10 ثوانٍ نستخدم العلاقة:

$$W(10) = \int_0^{10} v(t)i(t) dt = \int_0^{10} 100 \times 50t dt = 250kJ$$

كي يهبط التيار إلى الصفر خلال ثانيتين نقول: إن معدل تغير التيار $\frac{di}{dt}$ خلال

ثانيتين يجب أن يساوي $\frac{v(t)}{L}$ ، كما تشير إلى ذلك المعادلة (1-13). ولما كان

مقدار تغير التيار يساوي:

$$di = i(t_2) - i(t_1) = 0 - i(10) = -500A$$

فإن هذا التغير يجب أن يتم خلال ثانيتين، أي يجب أن يكون:

$$\frac{di}{dt} = \frac{-500A}{2s} = -250As^{-1}$$

إذن، فقيمة التوتر اللازم تطبيقه هو: $v = L \frac{di}{dt} = 2 \times (-250) = -500V$

ج-عنصر الوسعية: يقال عن دائرة إنها تمتلك وسعية إذا كانت قادرة على اختزان طاقة في حقل كهربائي. وتعرف الوسعية بدلالة الشحنة المخزونة بوحدة فرق الكمون بين طرفيها وفق المعادلة:

$$q(t) = Cv(t) \quad (1-17)$$

حيث C هي الوسعية وتقدر بالفاراد F عندما تقدر q بالكولون و v بالفولط. وبعد الرجوع إلى المعادلة (1-1) فإن المعادلة (1-17) تؤول إلى العلاقة:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (1-18)$$

التي يمكن إعادة كتابتها على شكل تكامل:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (1-19)$$

يدعى العنصر الذي يمتلك وسعية بالمكثفة، ويمثل الجزء (c) من الشكل 1-6 رمزه في مخطط الدارة. يمكن كتابة صيغة القدرة بالرجوع إلى العلاقة (1-3) كالآتي:

$$p(t) = v(t)C \frac{dv(t)}{dt}$$

وهي مغايرة للصفر عندما تكون $\frac{dv(t)}{dt}$ مغايرة للصفر فقط. أما من أجل توتر مستمر $v(t) = V$ ، مثلاً، فإن $p(t) = 0$ ، لكن التوتر بين طرفي المكثفة لا يصل إلى القيمة V إلا بعد أن تكون المكثفة قد اختزنت طاقة تعطيها العلاقة:

$$W = \int_0^T p(t) dt$$

حيث T هو الزمن اللازم كي يصل التوتر إلى القيمة V . فالطاقة عندئذ تكون:

$$W = \int_0^T v(t)C \frac{dv(t)}{dt} dt$$

$$= \int_0^V Cv(t)dv(t) = \frac{1}{2} CV^2 \quad (1-20)$$

ملاحظة 1 تشير المعادلة (1-13) إلى الآتي:

آ- في حال التيار المستمر يكون التوتر بين طرفي التحريضية معدوماً، أي إن التحريضية تسلك سلوك دائرة قصيرة في دارات التيار المستمر، أي ذات مقاومة معدومة.

ب- لا يمكن أن يحدث الانقطاع المفاجئ في قيمة التيار الذي يجري في التحريضية، لأن ذلك سيتطلب توتراً لانهائياً بين طرفيها. وبمعنى آخر، إن التيار الجاري في التحريضية هو دالة مستمرة مع الزمن، فإذا علمت قيمته في لحظة معينة، ولتكن $t = 0$ مثلاً، فإن قيمته قبيل تلك اللحظة ($i(0^-)$) وبعيها ($i(0^+)$) تساويان $i(0)$.

ملاحظة 2 تشير المعادلة (1-18) إلى الآتي:

آ- في حال التيار المستمر يكون التيار الجاري في المكثفة معدوماً، أي إن المكثفة تسلك سلوك دائرة مفتوحة في دارات التيار المستمر، أي ذات مقاومة لانهائية.

ب- لا يمكن أن يحدث الانقطاع المفاجئ في قيمة التوتر في المكثفة؛ لأن ذلك سيتطلب تياراً لانهائياً فيها. وبمعنى آخر، إن التوتر بين طرفي المكثفة هو

دالة مستمرة مع الزمن، فإذا علمت قيمته في لحظة معينة، ولتكن $t = 0$ مثلاً، فإن قيمته قبيل تلك اللحظة $v(0^-)$ وبعيدها $v(0^+)$ تساويان $v(0)$.

مثال 7-

تيار مستمر قيمته 4 mA يغذي مكثفة سعتها $10 \mu\text{F}$. احسب التوتر الذي تصل إليه المكثفة بعد 5 ثوانٍ. احسب كذلك الطاقة المخزونة الموافقة علماً أن المكثفة لم تكن مشحونة في البدء. ما هو التيار اللازم لتفريغ المكثفة تفريغاً كاملاً خلال 20 ثانية؟

الحل:

نحصل على توتر المكثفة من العلاقة:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + v(0)$$

حيث $i(t) = 4 \text{ mA}$ و $v(0) = 0$ و $C = 10^{-5} \text{ F}$. إذن:

$$v(t) = 10^5 \int_0^t 4 \times 10^{-3} dt = 400t \text{ V}$$

وبالتعويض نجد: $v(5) = 2000 \text{ V}$

أما الطاقة المخزونة خلال 5 ثوانٍ فهي:

$$W(5s) = \int_0^5 p(t) dt = \int_0^5 v(t) i(t) dt = 1.6 \int_0^5 t dt = 20 \text{ J}$$

لحساب التيار اللازم لتفريغ المكثفة كلياً خلال 20 ثانية، نستخدم العلاقة:

$$i = C \frac{dv}{dt} = C \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = 10^{-5} \frac{0 - 2000}{20} = -10^{-3} \text{ A} = -1 \text{ mA}$$

1-3-2 عنصر الدارة الفاعل: ستقتصر الدراسة هنا على نوع من العناصر الفاعلة، وهي العناصر القادرة على إمداد الدارة بالطاقة التي تحتاجها، وتسمى

المنابع. يكون التوتر بين طرفي العنصر في بعض هذه العناصر الفاعلة مستقلاً تماماً عن التيار الذي يجري فيه، وفي بعضها الآخر يكون التيار المار في العنصر مستقلاً تماماً عن التوتر بين طرفيه. تدعى أمثال هذه العناصر المنابع المستقلة independent sources، وتشمل منابع التوتر و منابع التيار. كما أن هناك نوعاً خاصاً من المنابع يكون التوتر أو التيار فيها متعلقاً بالتيار أو التوتر الموجود في مكان ما من الدارة. تدعى أمثال هذه العناصر المنابع غير المستقلة dependent sources. ويشمل هذا النوع منابع التوتر و منابع التيار غير المستقلة.

1-4 المنابع المستقلة:

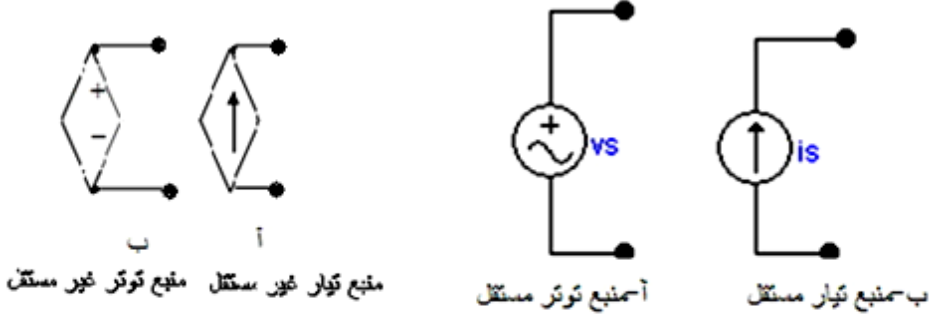
وهي إما منابع توتر أو منابع تيار.

آ- منبع التوتر المستقل

يتميز منبع التوتر المستقل بأن التوتر المتشكل بين طرفيه مستقل عن التيار الذي يجري فيه. يُمثَّل منبع التوتر المستقل في مخطط الدارة بدائرة في داخلها الإشارتان + و - إذا كان المنبع مستمراً، وتوضع الإشارة ~ إذا كان المنبع متناوباً. يبين الجزء (أ) من الشكل 1-7 رمز هذا المنبع في مخطط الدارة. أما الدليل S في v_s فيشير إلى أن التوتر هو توتر "منبع". إن منبع التوتر المستقل منبع مثالي، ولا يمثل في الواقع أي جهاز فيزيائي حقيقي. فمثلاً، عندما نغلق طرفي هذا المنبع على مقاومة متغيرة، فإن التيار المار في المقاومة يتغير عندما تتغير هذه المقاومة، لكن التوتر بين طرفي المقاومة يبقى ثابتاً ومساوياً v_s ، أي قيمة توتر المنبع عندما كان طرفاه مفتوحين.

ب- منبع التيار المستقل يتميز منبع التيار المستقل بأن التيار المار فيه يكون مستقلاً عن التوتر المتشكل بين طرفيه. أي إننا إذا أغلقنا طرفي المنبع على مقاومة متغيرة، فإن قيمة التيار المار في المقاومة يبقى ثابتاً عندما تتغير قيمة

هذه المقاومة. يمثل منبع التيار المستقل في مخطط الدارة بدائرة بداخلها سهم يشير إلى جهة التيار المار فيه، كما هو مبين في الجزء (ب) من الشكل 7-1 .



الشكل 8-1

الشكل 7-1

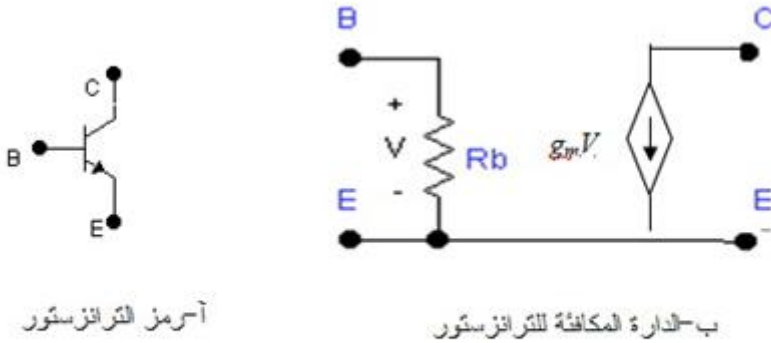
5-1-5 المصادر غير المستقلة

خلافًا لما هي الحال في المصادر المستقلة، فإن مقدار التوتر أو التيار الذي يعطيه المنبع المثالي غير المستقل، يتعين بواسطة التيار أو التوتر الموجود في مكان آخر في الدارة الكهربائية الموضوعه تحت الاختبار. وللتمييز بين المصادر المستقلة والمصادر غير المستقلة في مخططات الدارة جرت العادة باستعمال رمز الماسة (المعين) للمنبع غير المستقل بدلاً من رمز الدائرة في المنبع المستقل، كما هو مبين في الجزئين (أ) و(ب) في الشكل 8-1. توجد مثل هذه المصادر في الدارات المكافئة للعديد من الأجهزة الإلكترونية كالترانزستور، والدارات المتكاملة والمضخمات وغيرها.

6-1-6 العناصر غير البسيطة:

لابد من الإشارة هنا إلى أن كل العناصر التي تكلمنا عليها أعلاه، هي عناصر بسيطة ومثالية. وهي عناصر مهمة؛ لأنه يمكننا أن نجعلها ونشكل منها شبكات أو دارات تمثل أجهزة حقيقية بالدقة التي نريدها. لكن العديد من النماذج

والأجهزة الإلكترونية ليست عناصر بسيطة بل تُتمثل في مجملها بمجموعة من العناصر البسيطة. فالترانزستور، على سبيل المثال، الذي تكون بنيته الفيزيائية معقدة جداً، والذي يُعطى رمزه في مخطط الدارة كما هو في الجزء (أ) من الشكل 9-1، يمكن نمذجته بواسطة مقاومة وحيدة ومنبع تيار غير مستقل وحيد، كما يظهر في الجزء (ب) من الشكل 9-1، وذلك عندما يعمل في مجالات متوسطة من التواتر. لاحظ على الشكل كيف أن منبع التيار غير المستقل يولد تياراً يعتمد على التوتر V في مكان آخر من الدارة، وهو التوتر بين طرفي المقاومة R_b .



الشكل 9-1

إن هذا الترانزستور وأمثاله لا يشكل إلا جزءاً ضئيلاً من دارة متكاملة قد لا تزيد مساحتها على 2 مليمتراً مربعاً، ولا يتجاوز ثخنها 0.2mm، ومع ذلك، فهي تحتوي على عشرات الألوف، بل مئات الألوف، من الترانزستورات ومثلها من المقاومات والمكثفات. وهكذا نرى أن الدارة المتكاملة التي هي جهاز فيزيائي بحجم حرف الكتابة الصغير تتطلب نموذجاً مؤلفاً من آلاف العناصر البسيطة.

1-7 قوانين كرشوف

على الرغم من أن قانون أوم والقوانين التي عبرت عنها المعادلتان (1-9) و(1-14) صحيحة في الحالة العامة، إلا أن إدخال توسعين مهمين لها يكونان مفيدتين عند التعامل مع الدارات التي تحتوي على العديد من العناصر المتشابهة وأكثر من منبع واحد للطاقة. كان كرشوف أول من اقترح هذين القانونين في عام 1848 .

1-7-1 تعاريف

العقدة: هي نقطة تلاقي (اتصال) ثلاثة عناصر أو أكثر.

الطريق: هو مجموعة العقد والعناصر لدى الانتقال من عقدة إلى أخرى عبر أحد العناصر ثم المتابعة دون المرور أكثر من مرة واحدة من أية عقدة. **العروة:** هي طريق مغلقة.

الفرع: طريق وحيدة مؤلفة من عنصر واحد أو أكثر بين عقدتين متتاليتين.

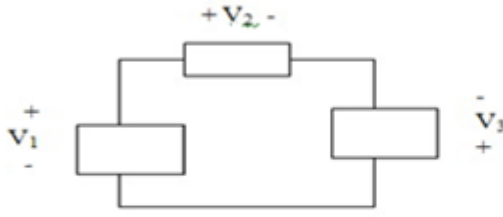
1-7-2 القانون الأول أو قانون كرشوف في التيار

لا يوجد تخزين أو نفاذ للشحنة عند عقدة من شبكة كهربائية، إذن فالمجموع الجبري للتيارات التي تلتقي في أي عقدة ما يساوي الصفر. نطبق هذا القانون على عقدة الشكل 1-10 مع اصطلاح إشارة (+) للتيار الذي يدخل العقدة، وإشارة (-) للتيار الذي يخرج منها.

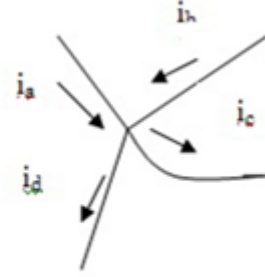
$$\sum_{n=1}^N i_n = 0 \quad \text{أو} \quad i_a + i_b - i_c - i_d = 0 \quad (1-21)$$

1-7-3 القانون الثاني أو قانون كرشوف في التوتر

المجموع الجبري لتوترات كل العناصر في أية عروة (طريق مغلقة) من دائرة كهربائية يساوي الصفر.



الشكل 11-1



الشكل 10-1

نطبق هذا القانون على العروة في الشكل 11-1 بعد الاصطلاح على جهة موجبة للدوران حول العروة، ولتكن جهة دوران عقارب الساعة فنجد:

$$\sum_{n=1}^N v_n = 0 \quad \text{أو} \quad v_1 - v_2 + v_3 = 0 \quad (1-22)$$

كما نصطلح لتحديد إشارة توتر العنصر v_n ما يلي: إذا اجتزنا العنصر من طرفه السالب إلى طرفه الموجب نضع $+v_n$ ، أما إذا اجتزنا العنصر من طرفه الموجب إلى السالب فنضع $-v_n$.

سنطبق هذا القانون على العروتين A و B في الشكل 12-1. تعطينا العروة A المعادلة الآتية:

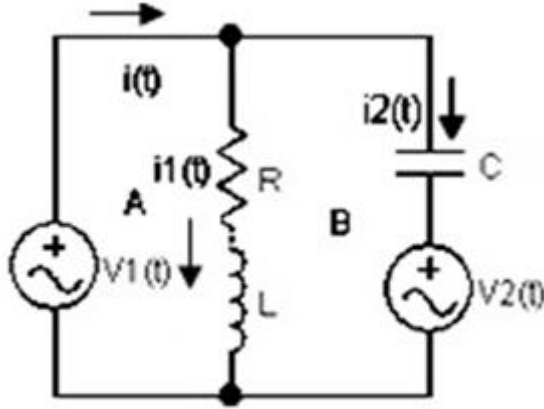
$$i_1(t)R + L \frac{di_1(t)}{dt} = v_1(t)$$

وتعطينا العروة B المعادلة:

$$-i_1(t)R - L \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i_2(t) dt = -v_2(t)$$

أما قانون العقدة فيعطي المعادلة:

$$i - i_1 - i_2 = 0$$



الشكل 12-1

ملاحظة 1: الطرفان الموجب والسالب للمنبع معرفان على المخطط ، أما العناصر المنفصلة فطرفها الموجب هو الطرف الذي يدخل منه التيار، والطرف السالب هو الطرف الآخر الذي يخرج منه التيار.

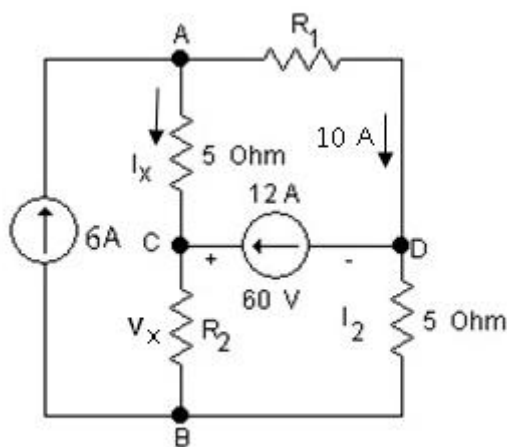
ملاحظة 2 : إذا اشتملت الدارة على n عقدة وعلى m فرعاً، فإن تطبيق قوانين كرشوف يؤدي إلى كتابة $n-1$ معادلة للعقد من تطبيق قانون كرشوف الأول؛ وذلك لأنه ينبغي أخذ إحدى العقد مرجعاً لقياس توتر العقد الأخرى. ولما كان عدد المجاهيل يساوي عدد التيارات الفرعية، وهي تساوي m تياراً ، فإن تطبيق قانون كرشوف الثاني على العرى يجب أن يؤدي إلى كتابة عدد من معادلات العروة يساوي: $m - (n - 1) = m - n + 1$ معادلة مستقلة للعروة.

مثال 8-

عين i_x و v_x في الدارة المبينة في الشكل 13-1 إذا علمت أن فرق الكمون بين النقطتين C و D يساوي 60 V وأن المقاومات مقدره بالأوم .

الحل:

نطبق قانون كرشوف في التيار على العقدة A فنجد:



الشكل 1-13

$$6 - i_x - 10 = 0$$

ومنها نجد: $i_x = -4 A$

لإيجاد v_x نطبق قانون كرشوف في التوتر على العروة BCD بالدوران مع

جهة عقارب الساعة فنجد:

$$v_x - 60 + 5i_2 = 0$$

نحسب i_2 بتطبيق القانون الأول على العقدة D : $10 - 12 + i_2 = 0$

ومنها نجد $i_2 = 2A$.

وأخيراً نعوض في العلاقة السابقة فنجد : $v_x = 50V$.

8-1 تطبيقات على تحليل الدارة :

1-8-1 تحليل دارة بعروة واحدة

آ- الدارة لا تحوي إلا منابع مستقلة:

مثال 9-

احسب القدرة التي يمتصها أو يقدمها كل عنصر من عناصر الدارة المبينة في الشكل 1-14.

الحل:

بتطبيق قانون كرشوف في التوتر على الدارة نجد:

$$120 - 30i - 30 - 15i = 0$$

$$i = 2 \text{ A} \quad \text{وبحلها نجد:}$$

المنبع 120 V يعطي قدرة قدرها: $P = i.v = 2 \times 120 = 240 \text{ W}$

والمنبع 30 V يمتص قدرة قدرها: $P = 30 \times 2 = 60 \text{ W}$

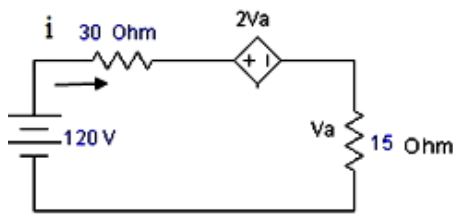
المقاومة 30Ω تمتص قدر قدرها: $P = i^2.R = 4 \times 30 = 120 \text{ W}$

وأخيراً تمتص المقاومة 15Ω قدرة قدرها $P = 4 \times 15 = 60 \text{ W}$.

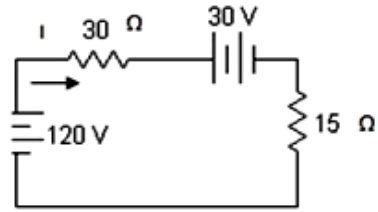
ب- الدارة فيها منابع غير مستقلة:

مثال 10-

احسب التيار الذي يجري في دارة الشكل 1-15.



الشكل 1-15



الشكل 1-14

الحل:

بتطبيق قانون كرشوف في التوتر على الدارة نجد:

$$120 - 30.i - 2Va - 15.i = 0$$

ولكن من الشكل نجد: $Va = 15.i$. وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد:

$$i = 1.6 \text{ A}$$

1-8-2- تحليل دارة فيها زوج واحد من العقد:

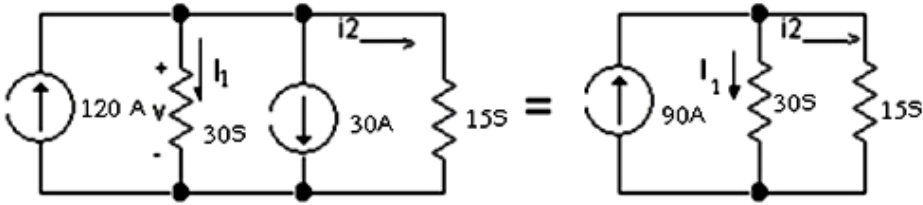
آ-الدارة لا تحوي إلا منابع مستقلة:

مثال 11-

احسب القدرة التي يمتصها أو يولدها كل عنصر من عناصر دارة الشكل 1-16، وذلك بعد حساب التيارات الفرعية والتوتر المطبق بين العناصر.

الحل:

يمكن مكافأة منبعي التيار بمنبع واحد قيمته $90\text{ A} = 120 - 30$ كما في الشكل.



الشكل 1-16

نحسب الآن قيمتي التيارين i_1 و i_2 المارين في الناقلتين 30 S و 15 S على الترتيب وكذلك التوتر المطبق بين العناصر وذلك بتطبيق قوانين كرشوف على إحدى العقدتين وعلى العروتين فنجد:

$$90 = i_1 + i_2 \quad \text{و} \quad v = i_1/30 = i_2/15$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد : $i_2 = 30\text{ A}$ و $i_1 = 60\text{ A}$ و $v = 2\text{ V}$.

نحسب القدرة لكل عنصر بتطبيق العلاقة $P = v.i$ على كل عنصر فنجد: المنبع الأول يعطي قدرة تساوي 240 W، والمنبع الثاني يأخذ قدرة تساوي 60 W، والمقاومة الأولى تأخذ قدرة تساوي 120 W، والثانية تأخذ قدرة تساوي 60 W.

ملاحظة: هناك تشابه في حل المثالين 10 (الشكل 1-14) و 11 (الشكل 1-16). يجب أن لا يمر هذا التشابه دون تعليق. ففي المثالين كانت الأرقام التي تعطي قيم العناصر المكونة لهما متماثلة. لكن عناصر الدارة الأولى مؤلفة من مقومات ومنبع توتر موصولة على التسلسل، أما في الدارة الثانية فكانت مؤلفة من ناقليات ومنبع تيار موصولة على التفرع. أي إن منابع التيار، و منابع التوتر، والمقومات، والناقلات، والتسلسل، والتفرع، هذه كلها تتبادل في المثالين. وهذا مثال على ما يسمى بالمتثوية، ويقال عن الدارتين إنهما دارتان مثنويتان كلياً dual circuits، لأن قيم العناصر المتقابلة في الدارتين متساوية. أما إذا تغيرت قيم العناصر أو قيم منابع في أي من الدارتين فيقال إنهما مثنويتان، وإن كانتا غير كاملتي المتثوية.

سنستفيد من خاصية المتثوية هذه في الدارة RCL التسلسلية والتفرعية في الفصل الرابع. نكتفي هنا بالتنكير بهذه الخاصة والتأكيد على مايلي: أي نتيجة نحصل عليها بدلالة التيار، والتوتر، والمقاومة في الدارة التسلسلية، لها ما يقابلها بدلالة التوتر، والتيار، والناقلية، على الترتيب، في الدارة التفرعية.

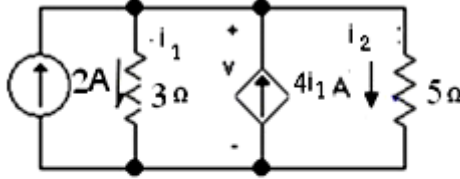
ب- الدارة تحتوي على منابع غير مستقلة:

مثال 12-

لتكن للدارة المبينة في الشكل 1-17 والنبي فيها منبع تيار غير مستقل قيمته $4i_1A$ ، أي يتبع التيار i_1 . احسب قيمة هذا المنبع.

الحل:

لمعرفة قيمة منبع التيار غير المستقل يجب معرفة i_1 . نطبق قانون كرشوف



الشكل 17-1

في التيار على إحدى العقدتين فنجد:

$$\text{أو: } 2 - i_1 + 4i_1 - i_2 = 0$$

$$3i_1 - i_2 = -2$$

ومن تساوي التوتر بين العقدتين نكتب:

$$v = 3i_1 = 5i_2$$

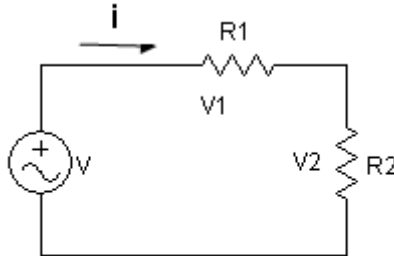
بحل هاتين المعادلتين نجد $i_1 = -5/6$ A ، وعليه تكون قيمة تيار منبع

التيار غير المستقل مساوية $-10/3$ A .

9-1 تجزئة التوتر والتيار:

1-9-1 تجزئة التوتر: نقوم بهذه العملية لإيجاد التوتر الحاصل بين طرفي

مقاومة من بين عدة مقاومات موصولة على التسلسل بين طرفي منبع توتره V .



الشكل 18-1

لحساب التوتر V_2 بين طرفي المقاومة R_2 في الشكل 18-1 نكتب:

$$V_2 = R_2 i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V \quad (1-23)$$

ولحساب جزء التوتر V_1 بين طرفي المقاومة R_1 ، نجد أيضاً:

$$V_1 = R_1 i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V \quad (1-24)$$

وفي الحالة العامة حيث يوجد لدينا N مقاومة موصولة على التسلسل بين طرفي منبع توتره V ، يعطى التوتر V_i بين طرفي المقاومة R_i بالعلاقة:

$$V_i = \frac{R_i}{R_1 + R_2 + \dots + R_i + \dots + R_N} V = \frac{R_i}{\sum_{i=1}^N R_i} V \quad (1-25)$$

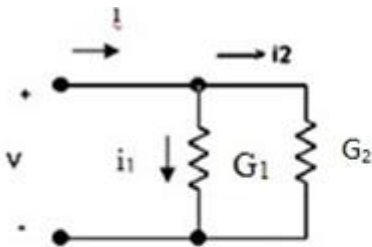
مثال 13-

احسب V_2 في الشكل 19-1 إذا كان توتر المصدر $v = 12 \sin t$ والمقاومات مقدره بالأوم.

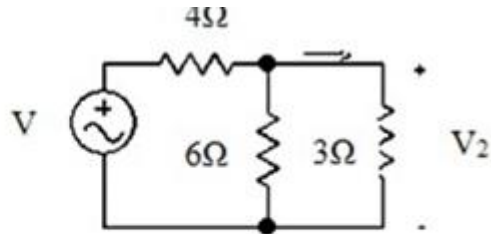
الحل:

نجمع أولاً المقاومتين 3Ω و 6Ω الموصولتين على التفرع، فتكون المقاومة المكافئة لهما 2Ω .

بتطبيق قانون تجزئة التوتر نجد: $V_2 = \frac{2}{2+4} \times 12 \sin t = 4 \sin t$ v



الشكل 20-1



الشكل 19-1

1-9-2 تجزئة التيار: لدينا هنا مقاومتان R_1 و R_2 موصولتان على التفرع، كما في الشكل 1-20، ونريد أن نحسب جزأي التيار i_1 أو i_2 المتفرعين من التيار الكلي i والجاريين في المقاومتين R_1 و R_2 على الترتيب.

يفضل هنا استخدام الناقلية G بدلاً من المقاومة R في العلاقات التي سنستخرجها. يعطى التيار i_1 والتيار i_2 الجاريان في الناقليتين G_1 و G_2 في الشكل 1-20 بالعلاقتين: $i_1 = G_1 V$ و $i_2 = G_2 V$ حيث V هو التوتر بين

$$V = \frac{i}{G} = \frac{i}{G_1 + G_2} \text{ لكن لدينا:}$$

نعوض عن V في العلاقتين السابقتين بما تساويه من العلاقة الأخيرة فنجد:

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i, \quad i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i \quad (1-26)$$

أما من أجل N مقاومة موصولة على التفرع، فتعطى علاقة التيار في الفرع i بالعلاقة:

$$i_i = \frac{G_i}{G_1 + G_2 + \dots + G_i + \dots + G_N} i = \frac{G_i}{\sum_{i=1}^N G_i} i \quad (1-27)$$

مثال 14-

إذا كان $v = 10 \text{ V}$ في دارة الشكل 1-19، احسب التيار الجاري في كل مقاومة.

الحل:

نحسب أولاً التيار الكلي i . نكافئ المقاومتين الموصولتين على التفرع بمقاومة وحيدة تساوي:

$$R = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \times 3}{6 + 3} = 2\Omega$$

فتصبح مقاومة الدارة الكلية $6 \Omega = 4+2$. وعليه فالتيار الكلي i الجاري هو:

$$1.66 A = 10/6. \text{ ويكون التيار في المقاومة } 6 \Omega :$$

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1+G_2} \times i = \frac{R_2}{R_1+R_2} i = \frac{3}{3+6} \times 1.66 = 0.55A$$

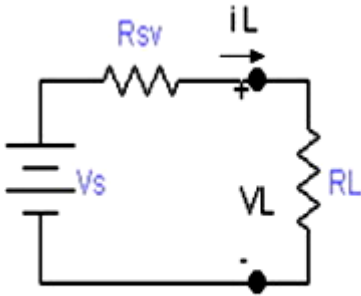
وبالمثل نحسب التيار الجاري في المقاومة 3Ω فنجد: $i_2 = 1.11 A$

10-1 المنابع الحقيقية والدارات المكافئة لها:

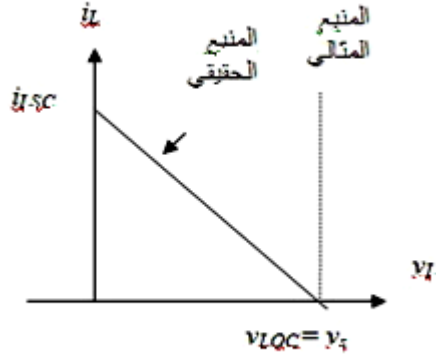
فرضنا في كل ما سبق أن المنبع المستخدم كان منبعاً مثالياً، إلا أن أمثال هذه المنابع لا وجود لها في الواقع العملي والتطبيقي. فأفضل منابع التوتر المتوفرة لا تحافظ على قيمة التوتر الطرفي ثابتاً عندما يمر فيها تيارات عالية، إذ نرى أن هذا التوتر الطرفي ينخفض ويزداد انخفاضه كلما ازداد التيار المار في المنبع. لذلك نفترض أن المنبع الحقيقي يتألف من منبع مثالي مع مقاومة مسؤولة عن تبديد الطاقة وعن انحراف المنبع عن المثالية.

1-10-1 منبع التوتر الحقيقي: نمثل هذا المنبع بمنبع توتر مثالي V_s على التسلسل مع مقاومة R_{sv} ، كما في الشكل 1-21، ندعوها المقاومة الداخلية للمنبع. ولا يُظن أن هذه المقاومة تشكل عنصراً منفصلاً عن المنبع؛ بل هي جزء لا يتجزأ منه ومن تركيبته الفيزيائية. يعرف مثل هذا التركيب للدارة باسم الدارة المكافئة التسلسلية، أو مكافئ تيفينين. كما يعرف المنبع المُمثل بهذه الطريقة باسم منبع التوتر أو منبع تيفينين. لتكن R_L هي مقاومة الخرج أو الحمولة الموصولة بين طرفي هذا المنبع ليمر فيها تيار قيمته i_L . إن تطبيق قانون كرشوف في العروة على دارة الشكل يعطي:

$$v_L = v_s - R_{sv} i_L \quad (1-28)$$



الشكل 21-1



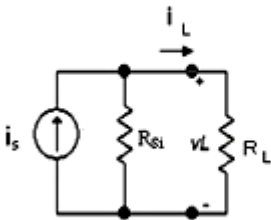
الشكل 22-1

إن العلاقة الخطية بين التوتر الطرفي v_L والتيار i_L التي تعبر عنها المعادلة السابقة مرسومة في الشكل 22-1. إن توتر الدارة المفتوحة (أي عندما $R_L = \infty$ و $i_L = 0$) هو:

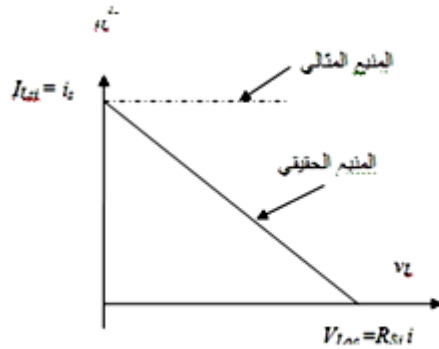
$$V_{LOC} = V_s \quad (1-29)$$

كما إن تيار الدارة القصيرة (أي عندما $R_L = 0$ و $v_L = 0$) هو:

$$i_{LSC} = \frac{V_s}{R_{sv}} \quad (1-30)$$



الشكل 23-1



الشكل 24-1

وتمثل هاتان القيمتان v_L و i_L أعلاه نقطتي تقاطع المستقيم مع محوري الإحداثيات في الشكل 1-22 وتفيدان في تعيينه تعييناً تاماً.

1-10-2 منبع التيار الحقيقي: نمثل منبع التيار الحقيقي أو العملي بمنبع تيار مثالي i_s على التفرع مع مقاومة داخلية R_{si} . يمثل الشكل 1-23 منبع تيار حقيقي، ويظهر على الشكل التوتر الطرفي v_L المتشكل بين طرفي الحمولة R_L وكذلك التيار i_L المار في هذه الحمولة. يعرف مثل هذا التركيب للدارة المكافئة باسم الدارة المكافئة التفرعية أو مكافئ نورتون. كما يعرف المنبع المُمثل بهذه الطريقة باسم منبع نورتون أو منبع التيار. من دارة الشكل السابق وبتطبيق قانون كرشوف الأول على إحدى العقدتين نكتب:

$$i_L = i_s - \frac{v_L}{R_{si}} \quad (1-31)$$

وهي أيضاً علاقة خطية. إن توتر الدارة المفتوحة v_{LOC} (أي $i_L = 0$) وتيار الدارة القصيرة i_{LSC} (أي $v_L = 0$) هما على التوالي:

$$v_{LOC} = R_{si} i_s \quad \text{و} \quad i_{LSC} = i_s \quad (1-32)$$

يمكن دراسة تغير تيار الحمولة مع تغير توتر الحمولة جراء تغير قيمة R_L ، كما هو مبين في الشكل 1-24. وبتغيير قيمة R_L من الصفر حتى اللانهاية تتحول قيمة التيار من تيار الدارة القصيرة i_s حتى تيار الدارة المفتوحة.

ملاحظة: يقترب منبع التوتر الحقيقي من المنبع المثالي بقدر ما تتحقق العلاقة $R_{sv} \ll R_L$ ، كما يقترب منبع التيار الحقيقي من المنبع المثالي بقدر ما تتحقق العلاقة $R_{si} \gg R_L$.

11-1 المنبعان المتكافئان:

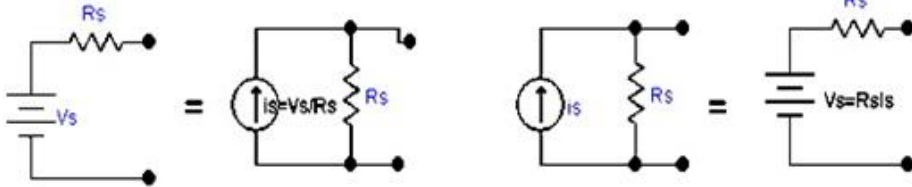
نعرف المنبعين المتكافئين بأنهما المنبعان اللذان يعطيان قيمتين متماثلتين للتوتر v_L وقيمتين متماثلتين للتيار i_L عند وصلهما إلى مقاومتين R_L متساويتين مهما تكن قيمتهما، بما فيها القيمتان صفر واللانهاية. بما أن $R_L = 0$ و $R_L = \infty$ هما من المقاومات المشمولة في تعريف المنبعين المتكافئين، لذا فإن المنبعين المتكافئين يجب أن يعطيا قيمة واحدة لتوتر الدارة المفتوحة كما يجب أن يعطيا قيمة واحدة لتيار الدارة القصيرة. وبعبارة أخرى نقول: إذا ما أعطينا منبعين متكافئين، أحدهما منبع توتر حقيقي والآخر منبع تيار حقيقي، وكل منهما موجود في صندوق أسود بحيث لا يظهر من المنبع سوى طرفاه، أي ليس هناك من سبيل للتمييز بين الصندوقين عن طريق قياس التيار الجاري في حمولة موصولة بين الطرفين أو قياس فرق الكمون المتشكل بينهما. وعليه فإن شروط التكافؤ تقضي:

أولاً، أن يتساوى توترا الدارة المفتوحة في المنبعين أي:

$$v_{LOC} = v_s = R_{si} i_s$$

ثانياً، أن يتساوى تيارا الدارة القصيرة فيهما أي:

$$i_{LSC} = \frac{v_s}{R_{sv}} = i_s$$



تحويل منبع التوتر إلى منبع تيار

تحويل منبع التيار إلى منبع توتر

الشكل 25-1

وينتج عن هذين الشرطين:

$$v_s = R_s i_s \quad \text{و} \quad R_{sv} = R_{si} = R_s \quad (1-33)$$

يبين الشكل 1-25 كيف تتم عملية تحويل منبع التوتر إلى منبع تيار ومنبع التيار إلى منبع توتر.

مثال 15-

إن توتر الدارة المفتوحة في بطارية سيارة يساوي 13.4 V ، وتستطيع هذه البطارية أن تزود تياراً قدره 2000 A لدى قصر طرفيها. عيّن الدارة المكافئة لهذه البطارية بدلالة: آ- منبع توتر و ب- منبع تيار. احسب القدرة التي تستهلكها حمولة خارجية قيمتها $R_L = 0.1 \Omega$.

الحل:

آ- إيجاد منبع التوتر المكافئ أو مكافئ تيفينين: القوة المحركة الكهربائية للبطارية تساوي توتر الدارة المفتوحة أي: $v_s = 13.4V$ ، أما المقاومة الداخلية R_s فنحصل عليها من العلاقة:

$$R_s = \frac{v_s}{i_s} = \frac{13.4}{2000} = 6.7 \times 10^{-3} \Omega$$

ب- إيجاد منبع التيار المكافئ أو مكافئ نورتون: منبع تيار مثالي قيمته $i_s = 2000 A$ على التفرع مع مقاومة داخلية قيمتها $R_s = 6.7 \times 10^{-3} \Omega$.
لحساب القدرة في الحمولة، نستخدم العلاقة الآتية:

$$p_L = i_L^2 R_L$$

نحسب التيار i_L من العلاقة:

$$i_L = \frac{v_s}{R_s + R_L} = \frac{13.4}{6.7 \times 10^{-3} + 0.1} = 125.58 A$$

وذلك تكون القدرة التي تستهلكها الحمولة:

$$P_L = (125.58)^2 \times 0.1 = 1577.2 \text{ W}$$

ويكون التوتر بين طرفي الحمولة:

$$V_L = i_L \cdot R_L = 125.58 \times 0.1 = 12.56 \text{ V}$$

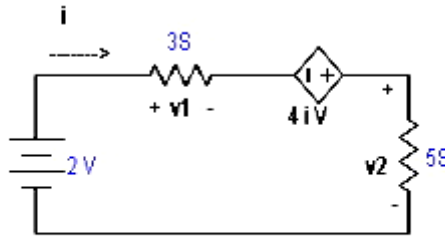
12-1 أمثلة على دارات فيها منابع غير مستقلة:

مثال 16-

لتكن الدارة المبينة في الشكل 1-26 والتي فيها منبع توتر غير مستقل قيمته $4i \text{ V}$ ، أي يتبع التيار i . أوجد توتر منبع التوتر غير المستقل، وكذلك التوتر بين طرفي كل مقاومة.

الحل:

نطبق قانون كرشوف في التوتر على الدارة فنجد: $2 - v_1 + 4i - v_2 = 0$



الشكل 1-26

وبتطبيق قانون أوم على المقاومتين، مع ملاحظة أن القيم الموضوعه على المقاومات هي قيم الناقلية، نجد:

$$v_1 = i/G_1 = i/3 \text{ من الأولى و } v_2 = i/G_2 = i/5 \text{ من الثانية.}$$

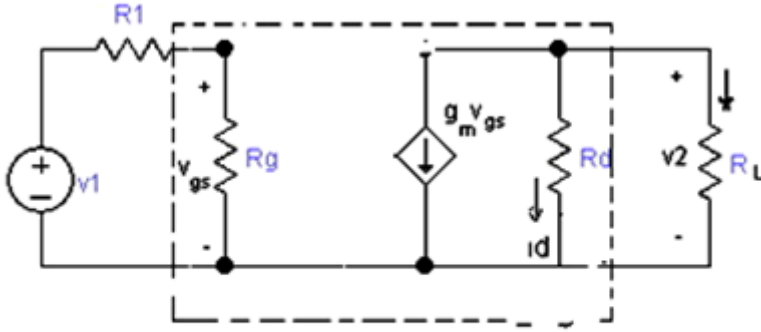
بالتعويض عن قيمتي التوترين في المعادلة السابقة نجد:

$$i = -15/26 = -0.577 \text{ A}$$

وعليه يكون: $v_1 = -0.19 \text{ V}$ و $v_2 = -0.115 \text{ V}$ وتوتر المنبع غير المستقل: 2.31 V -.

مثال 17-

لتكن الدارة المبينة في الشكل 1-27 وهي تمثل مضخماً مؤلفاً من ترانزستور مفعول الحقل وحيد (FET)، دخله v_1 وخرجه v_2 . يمثل الجزء المحدد من الدارة نموذجاً مقرباً لترانزستور مفعول الحقل. أوجد توتر الخرج v_2 بدلالة توتر الدخول v_1 .



الشكل 1-27

الحل:

من تجزئة التوتر نكتب:

$$v_{gs} = \frac{R_g v_1}{R_g + R_1}$$

بتطبيق قانون كرشوف في التيار على الجزء الأيمن من الدارة نجد:

$$g_m v_{gs} + i_d + i_L = 0$$

وبعد التعويض عن هذه التيارات بما تساويه في الشكل 1-27 نجد:

$$g_m \left(\frac{R_g v_1}{R_g + R_1} \right) + \frac{v_2}{R_d} + \frac{v_2}{R_L} = 0$$

وبعد إعادة ترتيب المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$v_2 = \frac{-g_m R_d R_g R_L}{(R_g + R_1)(R_L + R_d)} v_1$$

القيم النموذجية لمثل هذا المضخم هي: $R_1 = 600 \Omega$ ، $g_m = 5 \text{ mS}$ ، $R_d = 10 \text{ k}\Omega$ ، $R_g = 1 \text{ M}\Omega$ و $R_L = 10 \text{ k}\Omega$.

بتعويض هذه القيم في العلاقة السابقة نحصل على: $v_2 \approx -25 v_1$. وعليه، وعلى سبيل المثال، إذا كان توتر الدخل $v_1(t) = 0.1 \cos 2000 \pi t \text{ V}$ ، فإن توتر الخرج يكون: $v_2 \approx -2.5 \cos 2000 \pi t \text{ V}$.

مثال 18-

يظهر الشكل 1-28 مضخماً مكوناً من ترانزستور وصلي ثنائي القطبية وحيد (BJT). يمثل الجزء المحدد من الدارة نموذجاً مقرباً نجمياً أو على شكل الحرف T لترانزستور وصلي ثنائي القطبية. أوجد v_2 بدلالة v_1 ، ثم أوجد v_2 بدلالة v_b .

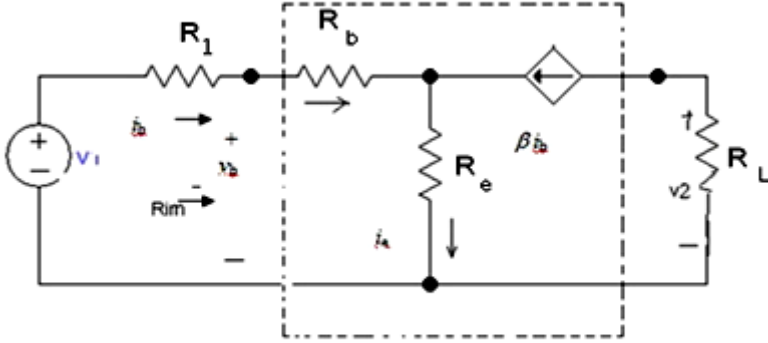
الحل:

بتطبيق قانون كرشوف في العروة على العروة اليسرى في الشكل 1-28 نجد:

$$v_1 - R_1 i_b - R_b i_b - R_g i_g = 0$$

وبتطبيق قانون كرشوف في العقدة نجد:

$$i_b - i_e + \beta i_b = 0$$



الشكل 28-1

نستخرج قيمة i_e من المعادلة الثانية ونضعها في المعادلة الأولى فنجد:

$$v_1 = R_1 i_b + R_b i_b + R_e (1 + \beta) i_b = [R_1 + R_b + R_e (1 + \beta)] i_b$$

التي نحصل منها على:

$$i_b = \frac{v_1}{R_1 + R_b + (1 + \beta) R_e}$$

ولحساب v_2 ، لدينا من الشكل (28-1) : $v_2 = -R_L \beta i_b$. فبالتعويض عن i_b بما تساويه من المعادلة الأخيرة نجد:

$$v_2 = \frac{-R_L \beta v_1}{R_1 + R_b + (1 + \beta) R_e}$$

القيم النموذجية التي تستخدم في دارة كهذه هي : $\beta = 50$ ، $R_L = 1.5 \text{ k}\Omega$ ،

$R_e = 25 \Omega$ ، $R_b = 150 \Omega$ ، و $R_1 = 75 \Omega$. بتعويض هذه القيم في المعادلة

الأخيرة نجد: $v_2 = -50 v_1$.

أما التوتر v_b عند دخل الترانزستور، فنحسبه كالاتي:

$$v_b = R_b i_b + R_e i_e = R_b i_b + R_e (1 + \beta) i_b = [R_b + (1 + \beta) R_e] i_b$$

وتكون المقاومة R_{in} التي ننظر إليها من دخل الترانزستور:

$$R_{in} = \frac{v_b}{i_b} = R_b + (1 + \beta)R_e = 150 + (51)25 = 1425\Omega$$

والمقاومة المكافئة R_{eq} التي يراها منبع التوتر هي:

$$R_{eq} = R_1 + R_{in} = 75 + 1425 = 1500\Omega$$

نحسب التوتر v_b بين طرفي دخل الترانزستور باستخدام تجزئة التوتر فنجد:

$$v_b = \frac{R_{in} v_1}{R_{in} + R_1} = \frac{1425 v_1}{1425 + 75} = 0.95 v_1$$

لقد وجدنا $v_2 = -50 v_1$ ، فيكون $v_1 = -v_2/50$. إذن:

$$v_b = 0.95 \left(\frac{-v_2}{50} \right)$$

$$v_2 = -\frac{50}{0.95} v_b = -52.63 v_b \quad \text{ومنها نجد:}$$

مسائل على الفصل الأول

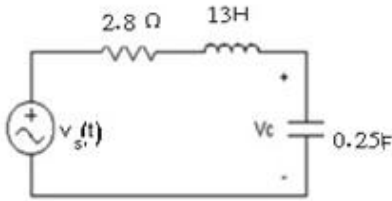
1-1- منبع توتر مثالي تعطى قيمته بالعلاقة: $v(t) = (3t + 2)e^{-2t}$. احسب قيمة منبع التوتر هذا عندما: آ- $t = 0s$ ، ب- $t = 1s$ ، ج- $t = 2s$ ، د- $t = 3s$ ، هـ- $t = 4s$.

1-2- تعطى الشحنة الكهربائية في مجال ما بالعلاقة الآتية: $q(t) = 4e^{-2t} C$. احسب التيار في هذا المجال.

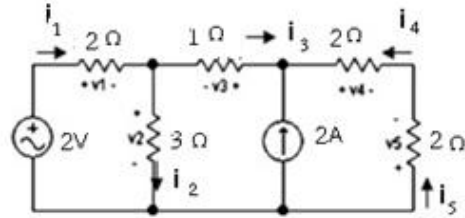
1-3- أعد المسألة 1-2 من أجل الحالتين الآتيتين: آ- $q(t) = 3 \sin \pi t C$ ، ب- $q(t) = 6e^{-t} \cos 2\pi t C$.

1-4- لتكن الدارة المبينة في الشكل م-1-1 . آ- إذا كان $v_1 = -2/3 V$ ، احسب i_1 . ب- إذا كان $v_2 = 8/3 V$ ، احسب i_2 . ج- إذا كان $v_3 = 11/9 V$ ، احسب i_3 . د- إذا كان $v_4 = 7/3 V$ ، احسب i_4 . هـ- إذا كان $v_5 = -14/9$ ، احسب i_5 .

1-5- صندوق مغلق، له زوج من الأطراف الخارجية، ويحتوي على مجموعة من المصادر والمقاومات. وصلنا بين الطرفين حمولة عبارة عن مقاومة تساوي 10Ω فمرّ تيار قدره $2.5 A$ ، ثم زدنا الحمولة إلى 20Ω فانخفض التيار إلى $2A$. عيّن: آ- منبع التوتر و ب- منبع التيار المكافئين لمحتويات الصندوق.



الشكل م-1-2



الشكل م-1-1

6-1- يجري في دارة تيار معطى بالعلاقة $i(t) = 30e^{-10t}$ A من أجل $t > 0$.
 احسب: آ- التيار الذي يجري في اللحظة $t=0.7s$ ، ب- الزمن اللازم كي يهبط
 التيار إلى $1\mu A$.

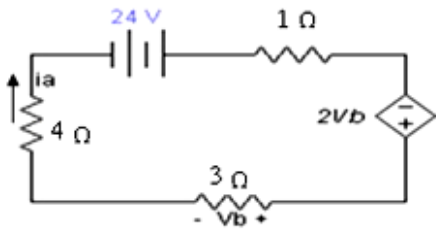
7-1- لدينا في دارة الشكل م-1-2 $v_c(t) = 4te^{-2t}$ V

آ-أوجد صيغة التيار الجاري في الدارة. ب-أوجد صيغة الطاقة المخزونة في
 كل من الملف والمكثفة. ج-أوجد صيغتي التوتر في كل من الملف والمقاومة.
 د-أوجد صيغة التوتر الكلي $v_s(t)$.

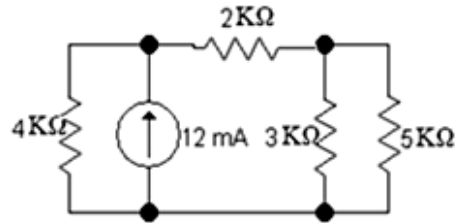
8-1- لتكن الدارة المبينة في الشكل م-1-3 آ- حول منبع التيار إلى منبع
 توتر.

ب-استعمل جمع المقاومات وتجزئة التوتر لحساب التيار في كل فرع من فروع
 الدارة. ج- استعمل، في الدارة الأصلية للشكل، جمع المقاومات وتجزئة التيار لحساب
 التيارات السابقة.

9-1- في دارة الشكل م-1-4 ، احسب: آ- i_a ، ب- v_D ، ج- احسب القدرة التي
 يمتصها كل عنصر من العناصر المكونة للدارة.

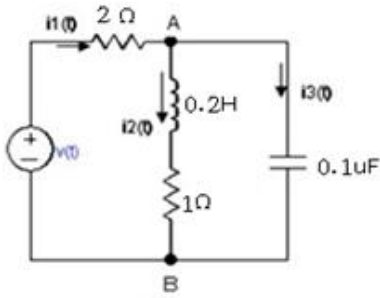


الشكل م-1-4

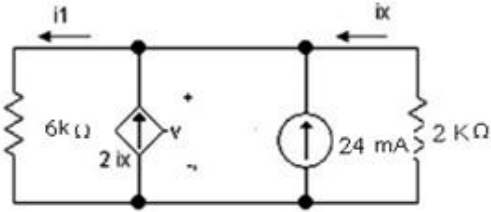


الشكل م-1-3

10-1- احسب كلاً من i_1 و i_x و v في دارة الشكل م-1-5 .



الشكل م-1-6



الشكل م-1-5

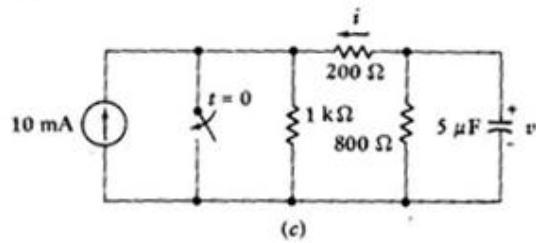
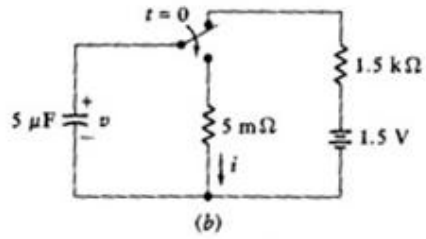
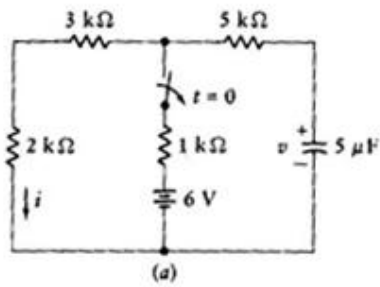
11-1- يعطى تيار بالعلاقة: $i(t) = 3t^2 + 4t + 1$ من اجل $t > 0$ ، ويجري في وشيعة مكونة من مقاومة 2Ω وتحريضية 10 H . احسب: أ- دخل القدرة إلى الوشيعة في اللحظة $t = 2 \text{ s}$ ، ب- الطاقة المخزونة والطاقة المتبددة حتى اللحظة $t = 3 \text{ s}$ ، ج- الطاقة المنطلقة فيما لو هبط التيار إلى الصفر بعد 5 ثوانٍ.

12-1- يجري التيار المعطى في المسألة 11-1 في مكثفة سعتها 10 ميكروفاراد. احسب القدرة والطاقة المخزونة في اللحظة $t = 2 \text{ s}$.

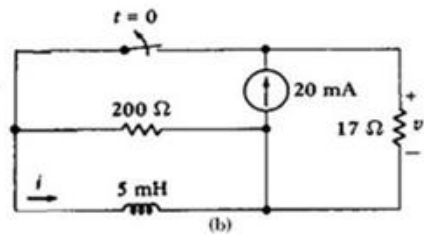
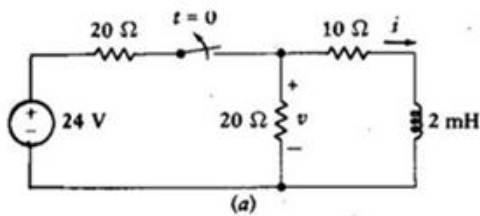
13-1- تعمل الدارة الممثلة في الشكل م-1-6 على توتر تابع للزمن من الشكل: $v(t) = 12t$ ، حيث t هو الزمن مقدراً بالثانية. إذا فرضنا أن التيار معطى بعلاقة من الشكل: $i_1(t) = at + b$ ، استخرج الثابتين a و b ومن ثم عين التوتر بين طرفي A و B والتيار i_2 الجاري في فرع التحريضية، والتيار i_3 الجاري في فرع المكثفة.

14-1- يحتوي الشكل م-1-7 على ثلاث دارات. إذا علمت أن كل واحدة منها كانت في الحالة التي تبينها القاطعة على الشكل ولفترة زمنية طويلة ثم انتقلت في اللحظة $t=0$ إلى الوضع الآخر، عين: $v(0^+)$ و $i(0^+)$ في كل منها.

15-1- كانت القاطعتان في دارتي الشكل م-1-8 مغلقتين لفترة طويلة ثم فتحتا في اللحظة $t = 0$. احسب $i(0)$ ثم $v(0^+)$ في كل منهما بعيد فتح القاطعة.



الشكل م 7-1



الشكل م 8-1

الفصل الثاني

الاستجابة في الدارات البسيطة

2-1 مقدمة:

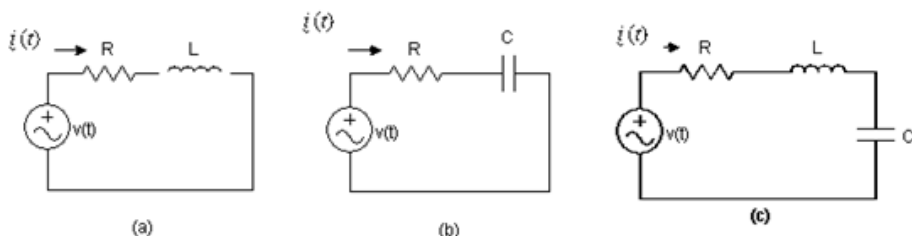
سنركز اهتمامنا في هذا الفصل على دارات كهربائية بسيطة تحتوي على محرّضة أو مكثفة، أو الاثنتين معاً، إضافة إلى المقاومة. وسندرس هذه الدارات في حالتين: الحالة التي نفترض فيها وجود منبع في الدارة، والحالة الثانية هي حالة عدم وجود أي منبع فيها، ولكن يوجد بين عناصرها المكونة لها عناصر تختزن الطاقة كالمكثفات والمحرّضات، وسنجد حلولاً لها.

2-2 مصطلحات

نعني باستجابة الدارة إيجاد التيار الذي يجري فيها بدلالة الزمن في أي من الحالتين السابقتين أو في كليهما. تسمى الاستجابة **استجابة قسرية** في حال وجود منبع في الدارة، لأن المنبع يجبر الدارة على إمرار التيار. أما في حال عدم وجود منابع فيها فنسمي الاستجابة **استجابة طبيعية**.

نقول عن دارة إنها من **المرتبة الأولى** إذا أدت القوانين الناظمة لها إلى معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى. كما نقول عن جملة إنها من **المرتبة الثانية** إذا أدت تلك القوانين إلى معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية. وكمثال على جملة المرتبة الأولى نذكر الدارة البسيطة المكونة من مقاومة R موصولة على التسلسل مع محرّضة تحريضيتها L ويغذيها منبع مثالي يعطي موجة توتر تابع للزمن ولها شكل معين كما في الجزء (a) من الشكل 1-2. وكمثال آخر، الدارة المكونة من مقاومة R ومكثفة سعتها C موصولتين على التسلسل ويغذيها منبع توتر مثالي تابع للزمن كما في الجزء (b) من الشكل 1-2. وكمثال على جملة من المرتبة

الثانية نذكر الدارة البسيطة المؤلفة من مقاومة R ومحرضة L وسعة C موصولة على التسلسل ويغذيها منبع توتر تابع للزمن كما في الجزء (c) من الشكل 1-2.



الشكل 1-2

2-3 البحث عن استجابة الدارة

لو أخذنا المثال الأول فإننا نحصل على العلاقة بين التوتر والتيار بتطبيق قانون كرشوف الثاني على دارة الجزء (a) من الشكل 1-2 فنجد:

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = v(t) \quad (2-1)$$

إذا انتقلنا إلى المثال الثاني، وطبقنا القانون نفسه على دارة الجزء (b) فإننا نحصل على المعادلة:

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = v(t) \quad (2-2)$$

وإذا انتقلنا إلى المثال الثالث وطبقنا قانون كرشوف على دارة الجزء (c) فإننا نحصل على المعادلة:

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = v(t) \quad (2-3)$$

وهكذا نرى أن الدارة الأولى أعطت معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى، وأعطت الدارة الثانية معادلة تكاملية تتحول بالاشتقاق مرة واحدة بالنسبة للزمن

إلى معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى أيضاً. أما الدارة الثالثة فقد أعطت معادلة تفاضلية تكاملية، تتحول أيضاً بالاشتقاق مرة واحدة بالنسبة للزمن إلى معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية.

يمكن حل كل معادلة من هذه المعادلات التفاضلية وإيجاد التيار المار في الدارة التي تمثلها بعد معرفة شكل التوتر المطبق $v(t)$ وذلك باتباع الطرق التقليدية المعروفة في حل المعادلات التفاضلية. لكننا هنا لن نفعل ذلك بل سنستخدم طريقة تختلف قليلاً عن تلك الطرق رغم أنها لا تطبق إلا على عدد محدود من دوال التوتر، لكنها تجعلنا نفهم سلوك الدارة بشكل أفضل.

بالرجوع إلى المعادلات التفاضلية السابقة نرى أن الطرف الثاني، وهو توتر المنبع، يساوي في المعادلة الأولى مجموع حدين هما التيار ومشتقه بالنسبة للزمن؛ ويساوي في المعادلة الثانية مجموع حدين أيضاً هما التيار وتكامله؛ أما في المعادلة الثالثة فيساوي مجموع ثلاثة حدود هي التيار ومشتقه وتكامله.

للبحث عن حل للمعادلة التفاضلية الأولى نقول: إن الحل الذي نبحث عنه، وهو التيار، يجب أن يكون هو ومشتقه بالنسبة للزمن لهما الشكل نفسه، وعندئذ سيكون للتوترين بين طرفي كل من المقاومة R والتحريضية L الشكل نفسه أيضاً، ومن ثم سيكون للتوتر الناتج عن جمعهما الشكل نفسه كذلك. وبتطبيق قانون كرشوف يمكننا توسيع هذا المفهوم فنقول: إن التوتر بين طرفي أي تجميع من المقاومات والتحريضيات سيكون له الشكل نفسه في الحالة المستقرة. وإذا استعملنا المحاكمة نفسها مع المعادلة الثانية، نقول إنه يجب أن يكون للتيار فيها ولتكامله الشكل نفسه، وأن يكون للتوتر بين طرفي كل من المقاومة والمكثفة ولمجموعهما الشكل نفسه، وإن التوتر بين طرفي أي تجميع من هذين العنصرين سيكون له الشكل نفسه في الحالة المستقرة. أما حل المعادلة الثالثة فيجب أن يكون هو ومشتقه وتكامله من نفس الشكل. وعندئذ سيكون التوتر بين طرفي كل عنصر من هذه العناصر الثلاث والتوتر الناتج عن جمعها له الشكل نفسه، كما

سيكون التوتر بين طرفي أي تجميع من هذه العناصر والتوتر الناتج عن جمعها له الشكل نفسه.

من هذه المناقشة نصل إلى النتيجة الآتية: إننا نبحت عن حل هو دالة تيار بالنسبة للزمن يكون لها ولمشتقتها وتكاملها الشكل نفسه. توجد دالة وحيدة تابعة للزمن تحقق هذه المتطلبات، تلك هي الدالة الأسية؛ لأن مشتقتها وتكاملها دالتان أسيتان كذلك.

وهكذا، إذا أخذنا حلاً تكون فيه دالة التيار من الشكل:

$$i(t) = Ie^{st} \quad (2-4)$$

حيث s ثابت حقيقي، فإن مشتقه هو: $di(t)/dt = sle^{st}$ أي s مضروباً في الدالة $i(t)$ نفسها. كما أن تكامله هو:

$$\int i(t)dt = (1/s)Ie^{st}$$

أي $1/s$ مضروباً في الدالة $i(t)$ نفسها.

هذا وينبغي أن نلاحظ أن I في المعادلات السابقة هو مقدار ثابت يساوي قيمة التيار في اللحظة $t = 0$ ، أي: $I = i(0)$. وسنتابع فيما يلي دراسة استجابة كل دائرة من الدارات الثلاث السابقة.

2-4-2-4-1-1 جمل المرتبة الأولى

2-4-2-1-1 الدائرة مكونة من تحريضية ومقاومة:

آ- الاستجابة القسرية:

الدائرة التي سندرسها هنا هي دائرة الجزء (a) من الشكل 2-1 ، ومعادلتها التفاضلية هي المعادلة (2-1) ، لنفرض أن التيار الذي يجري فيها معطى بالمعادلة (2-4). سنعين الآن التوتر بين طرفي الدائرة. لنعوض التيار ومشتقه

في المعادلة التفاضلية (2-1) للدائرة فنجد:

$$v(t) = RI e^{st} + sLIe^{st} \quad (2-5)$$

من الواضح أن المعادلة (2-5) يمكن أن تكتب على الشكل الآتي:

$$v(t) = V e^{st} \quad (2-6)$$

حيث

$$V = I(R + sL) \quad (2-7)$$

وهكذا نرى أن التوتر $v(t)$ يأخذ شكل دالة أسية (المعادلة (2-6)) مثل دالة التيار وللدالتين الأس ذاته، و نحصل على قيمة التوتر في اللحظة $t = 0$ من المعادلة (2-7). يمكن إعادة ترتيب حدود المعادلة (2-7) لمقارنتها بقانون أوم المعروف، فنجد:

$$\frac{V}{I} = R + sL = Z(s) \quad (2-8)$$

تشير المعادلة الأخيرة إلى أنه من أجل أشكال موجية أسية، يمكن لأثري الإعاقاة الذي تبديه كل من المقاومة والتحريضية، الموجودتين معاً في دائرة ما، أن يجمعاً معاً في عامل وحيد يعرف باسم دالة الممانعة، التي نرسم لها بالرمز $Z(s)$. ولما كان جريان التيار I في الدارة هو نتيجة لتطبيق التوتر V عليها، فإن V يعرف باسم دالة القسر أو توتر القسر، كما يعرف I باسم دالة الاستجابة. وفي أكثر الأحيان نطلق على التيار اسم الاستجابة القسرية.

والخلاصة: إذا كان توتر القسر من الشكل الذي تعطيه المعادلة (2-6) فإن الاستجابة القسرية للدائرة تكون من الشكل الذي تعطيه المعادلة (2-4)، وتعين قيمة I من المعادلة

$$I = \frac{V}{Z(s)} = \frac{V}{R + sL} \quad (2-9)$$

وأخيراً، تكون الاستجابة القسرية لدائرة الجزء (a) من الشكل 1-2 :

$$i(t) = \frac{V}{R + sL} e^{st} \quad (2-10)$$

ب- الاستجابة الطبيعية

عرفنا الاستجابة الطبيعية بأنها استجابة الدارة عندما لا يوجد فيها منبع، أي يجري تيار فيها بالرغم من عدم وجود توتر مطبق، أي $V = 0$. ولما كان $V = I Z(s)$ فإن هذه المعادلة تشير إلى أن شرط وجود الاستجابة (أي التيار I غير معدوم مع أن $V = 0$) هو أن يكون $Z(s) = 0$. وإذا عدنا إلى المعادلة (2-8) التي تعرف Z لهذه الدارة نجد أن الشرط هو: $s = -R/L$. وبتعويض قيمة s في معادلة الاستجابة (2-4) نحصل على:

$$i(t) = I e^{-(R/L)t} \quad (2-11)$$

وهذه هي الاستجابة الطبيعية لدارة الجزء (a) من الشكل 1-2. عندما يكون $t = 0$ فإن $I = i(0)$ ، وهذا يؤدي إلى:

$$i(t) = i(0) e^{-(R/L)t} \quad (2-12)$$

إذا كان $i(0) = 0$ فإن $i(t) = 0$ دائماً، لذا لا توجد استجابة طبيعية للدارة RL إذا كان التيار الابتدائي معدوماً.

ج- الاستجابة الكلية:

سنناقش الآن الاستجابة الكلية للتيار في دارة مكونة من مقاومة R وتحريضية L موصولتين على التسلسل وقد طبق عليها في اللحظة $t=0$ توتر قسر من الشكل: $v(t) = V e^{st}$ عندما كان التيار المار فيها مساوياً $i(0)$.

نحصل على الاستجابة الكلية $i_T(t)$ بإضافة الاستجابة الطبيعية $i_N(t)$ إلى الاستجابة القسرية $i_F(t)$ فنكتب:

$$i_T(t) = i_F(t) + i_N(t) \quad (2-13)$$

وبالتعويض عن $i_F(t)$ و $i_N(t)$ من المعادلتين (2-10) و (2-11) في المعادلة (2-13) تصبح الاستجابة الكلية:

$$i_T(t) = \frac{V}{R+sL} e^{st} + I_N e^{-(R/L)t} \quad (2-14)$$

حيث I_N مقدار ثابت نعينه من شروط البدء. نضع $i_T(0)=i(0)$ في المعادلة (2-14) فنجد:

$$i(0) = \frac{V}{R+sL} + I_N$$

ومنها نجد:

$$I_N = i(0) - \frac{V}{R+sL}$$

وأخيراً تصبح الاستجابة الكلية للتيار:

$$i_T(t) = \frac{V}{R+sL} e^{st} + i(0) e^{-(R/L)t} - \frac{V}{R+sL} e^{-(R/L)t}$$

التي يمكن أن نكتبها على الشكل:

$$i_T(t) = i(0) e^{-(R/L)t} + \frac{V}{R+sL} [e^{st} - e^{-(R/L)t}] \quad (2-15)$$

تشير المعادلة (2-15) إلى أنه يمكن عدّ الاستجابة الطبيعية مكونة من مركبتين: مركبة يسببها تضاؤل التيار الابتدائي $i(0)$ (وهي الاستجابة في حال عدم وجود منبع)، ومركبة ثانية يولدها التطبيق المفاجئ لتابع القسر. وهذه المركبة موجودة دوماً؛ وقيمتها في اللحظة $t=0$ تساوي قيمة الاستجابة القسرية في تلك اللحظة، لكنها بإشارة معاكسة، لأن مجموعها مع الاستجابة القسرية ينبغي أن يساوي الصفر. وقد جرت العادة أن نضم المركبتين معاً ونشير إليهما بالاستجابة الطبيعية.

د- مناقشة الحل:

تمثل المعادلة (2-15) الاستجابة الكلية للدار RL على التسلسل. ولكن إذا تفحصنا تلك المعادلة فإننا نرى إنه في الحالة التي يصبح فيها $Z(s)=0$ ، أي عندما تكون $s=-R/L$ ، فإن الاستجابة الكلية تؤول إلى $0 \times \infty$ أي إلى حالة من عدم التعيين. ولإزالة عدم التعيين نطبق قاعدة أوبيتال على الحد الثاني في المعادلة (2-15)، ونجري الاشتقاق بالنسبة لـ s . وبعد إجراء عملية الاشتقاق والتعويض نجد أن الحد الثاني في المعادلة (2-15) ينتهي إلى:

$$\frac{t}{L} e^{-(R/L)t}$$

وأخيراً، تصبح الاستجابة الكلية للدارة RL في هذه الحالة الخاصة كالآتي:

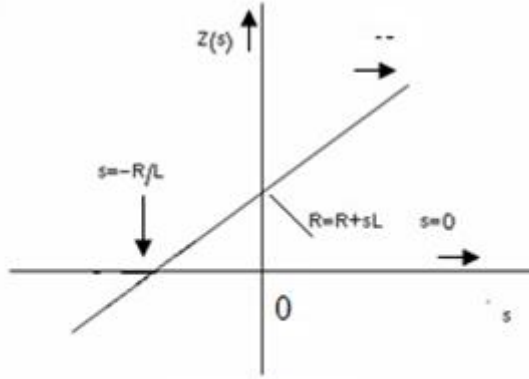
$$i_T(t) = i(0)e^{-(R/L)t} + \frac{V}{L}te^{-(R/L)t} \quad (2-16)$$

هـ- تمثيل الاستجابة بيانياً: يجب أن نميز بين نوعين من التمثيل لدالة ما: التمثيل في نطاق الزمن والتمثيل في نطاق s أو التواتر. فمثلاً، يمكن تمثيل المعادلتين (2-4) و (2-6) بيانياً بدلالة الزمن، من أجل كل قيم s الموجبة والسالبة، وعندئذٍ يقال عن هذا التمثيل إنه في نطاق الزمن. أما إذا مثلنا المعادلتين بدلالة s من أجل قيمة معينة للزمن t ، قيل عن هذا التمثيل أنه في نطاق التواتر أو نطاق s . أما المعادلة (2-8) فهي لدالة خطية تمثل ممانعة داره مكونة من مقاومة R على التسلسل مع تحريضية L بدلالة التواتر s ، يمكن تمثيل هذه الدالة بيانياً بدلالة s كما هو مبين في الشكل 2-2، ويقال عن هذا التمثيل عندئذٍ إنه في نطاق s أو نطاق التواتر. عندما $s=0$ يكون $v(t)=V$ و $Z(s)=R$ ، وهنا يصبح التوتر مستقراً، وفي هذه الحالة لا تشعر الدارة بوجود التحريضية، وهي نتيجة معروفة. تسمى s التواتر الطبيعي أو التواتر النيبري عندما تكون

مقداراً حقيقياً (موجباً أو سالباً)، وهي التواتر الزاوي عندما تكون مقداراً تخيلياً. وباختصار نقول: إذا كانت الدالة التي تمثل مقداراً كهربائياً، كالتيار أو الممانعة أو غيرهما، معرفة بدلالة الزمن فتمثيلها عندئذ يكون في نطاق الزمن، أما إذا كانت معرفة بدلالة التواتر s فتمثيلها يكون في نطاق التواتر.

و- الأصفار والأقطاب:

عندما يقطع المنحني $Z(s)$ المحور s تأخذ دالة الممانعة أهمية خاصة، إذ يكون عندها: $Z(s) = 0$ أو: $(R+sL) = 0$ ، التي تتحقق من أجل $s = -R/L$.



الشكل 2-2

تدعى هذه النقطة "صفر" دالة الممانعة. أما عندما يكون $Z(s) = \infty$ (ويحدث ذلك عندما تكون $s = \infty$ في هذه الحالة)، فإن هذه النقطة تدعى "قطب" دالة الممانعة. وهكذا فإن لدالة الممانعة $Z(s) = R+sL$ صفراً واحداً وقطباً واحداً. هناك دالة أخرى هي دالة القبولية التي تعرّف بأنها مقلوب $Z(s)$ ، ويرمز لها بالرمز $Y(s)$ وتكتب في هذه الحالة:

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{R+sL} \quad (2-17)$$

إذا رسمنا هذه الدالة بدلالة s فإننا نجد أن لها قطباً واحداً عند $s = -R/L$ و صفراً واحداً عند $s = \pm\infty$. إن حالة التيار المستمر ($s=0$) تعطي:

$Y(s) = 1/R = G$. وهكذا نرى أن أيًا من الدالتين، $Z(s)$ أو $Y(s)$ ، يعطي استجابة الدارة لتوتر أسي مطبق وذلك بعد إيجاد أصفار $Z(s)$ أو أقطاب $Y(s)$.
 ز- أمثلة على استجابة الدارة RL:

مثال 1-

تعطى دالة القسر للتوتر بالعلاقة:

$$v(t) = 100e^{-12t} \text{ volts} \quad (2-18)$$

وتطبق في اللحظة $t=0$ على دارة مكونة من مقاومة قيمتها 10Ω وتحريضية قيمتها 0.25 H موصلتين على التسلسل. احسب آ- استجابة التيار القسرية، و ب- الاستجابة الطبيعية للتيار، و ج- الاستجابة الكلية من أجل $t > 0$ بفرض أن توتر القسر طبق عندما كان التيار يساوي $+8\text{A}$.

الحل:

آ- الاستجابة القسرية في نطاق الزمن من الشكل:

$$i_F(t) = I_F e^{-12t} \text{ A}$$

نعين I_F من صيغة الاستجابة القسرية في نطاق التواتر التي تعطيها العلاقة:

$$I_F = \frac{V}{Z(s)} = \frac{V}{R + sL}$$

وبالرجوع إلى المعادلة (2-18) نجد أن $s = -12$ ، و $V=100 \text{ V}$ وعليه فإن ممانعة الدارة عند تواتر نيبيري (طبيعي) قدره -12 نيبير/ثانية تكون: $Z(s) = R + sL = 7\Omega$. وتصبح $I_F = 14.286 \text{ A}$. وبالتعويض في معادلة الاستجابة القسرية أعلاه نجد:

$$i_F(t) = 14.286e^{-12t}$$

وهي الاستجابة القسرية للدارة عندما يطبق عليها توتر القسر الذي تعطيه المعادلة (2-18) . ونلاحظ أن الاستجابة القسرية لها الشكل الزمني ذاته.

ب- تحدث الاستجابة الطبيعية عندما $Z(s)=0$ ، أي عندما $10+0.25s = 0$ أو $s=-40$. وهكذا نجد أن الاستجابة الطبيعية $i_N(t)$ هي :

$$i_N(t) = I_N e^{-40t}$$

أما الثابتة I_N فلا يمكن تعيينها بدون معطيات إضافية تتعلق بشروط البدء.

ج- الاستجابة الكلية هي :

$$i_T(t) = 14.286e^{-12t} + I_N e^{-40t}$$

نعين I_N من شروط البدء فنجد: $I_N = -6.286 \text{ A}$.

وأخيراً تكون الاستجابة الكلية للتيار:

$$i_T(t) = 14.286e^{-12t} - 6.286e^{-40t}$$

مثال 2-

يعطى توتر أسي بالعلاقة: $v(t) = 100e^{st}$ volts

ويطبق في اللحظة $t=0$ على دائرة مؤلفة من مقاومة 5Ω وتحريضية 0.2 H موصولتين على التسلسل. بفرض أن التيار كان مساوياً 5 A من أجل $t < 0$ ، عين استجابة التيار الكلية من أجل: آ- $s=+20$ ، ب- $s=-10$ ، ج- $s=-25$ ، د- $s=-30$.

الحل:

آ- عندما $s=20$ فالممانعة: $Z(s) = R+sL = 5+0.2 \times 20 = 9\Omega$. إذن فصيغة الاستجابة القسرية في نطاق التواتر هي:

$$I_F = \frac{V}{Z(s)} = \frac{100}{9} = 11.1 \text{ A}$$

وتكون الاستجابة القسرية في نطاق الزمن: $i_F(t)=11.1e^{20t}$. أما الاستجابة الطبيعية فتساوي:

$$i_N(t) = I_N e^{-(R/L)t} = I_N e^{-25t}$$

وتكون الاستجابة الكلية :

$$i_T(t) = 11.1e^{20t} + I_N e^{-25t}$$

نعين I_N من شروط البدء فنجد: $I_N = -6.1 \text{ A}$. وأخيراً تكون الاستجابة الكلية:

$$i_T(t) = 11.1e^{20t} - 6.1e^{-25t} = 5e^{-25t} + 11.1(e^{20t} - e^{-25t})$$

ب- عندما $s = -10$ ، نعيد الخطوات في (أ) فنجد:

$$i_T(t) = 33.3e^{-10t} - 28.3e^{-25t} = 5e^{-25t} + 33.3(e^{-10t} - e^{-25t})$$

ج- عندما $s = -25$ ، نجد أن هذه القيمة تجعل $Z(s) = 0$ ، فالحل إذن هو كما تعطيه المعادلة (2-17) ، أي من الشكل:

$$i_T(t) = i(0)e^{-(R/L)t} + \frac{V}{L}te^{-(R/L)t}$$

و بالتعويض نجد:

$$i_T(t) = 5(1 - 100t)e^{-25t}$$

د- عندما $s = -30$ ، تكون الممانعة $Z(s) = -1$ و $I_F = -100 \text{ A}$ ، وتكون الاستجابة الكلية:

$$i_T(t) = -100e^{-30t} + 105e^{-25t} = 5e^{-25t} + 100(e^{-25t} - e^{-30t})$$

2-4-2 الدارة مكونة من مكثفة ومقاومة:

آ- الاستجابة القسرية:

الدارة التي ندرسها الآن هي دارة الجزء (b) من الشكل 2-1، ومعادلتها التفاضلية هي المعادلة (2-2). لنفرض، كما فعلنا في الدارة السابقة، أن التيار الذي يجري في الدارة معطى بالمعادلة (2-4). سنعين الآن التوتر بين طرفي الدارة. نعوض التيار وتكامله في المعادلة التفاضلية (2-2) للدارة فنجد:

$$RIe^{st} + \frac{1}{sC}Ie^{st} = v(t)$$

$$Ie^{st} \left(R + \frac{1}{sC} \right) = v(t) \quad \text{أو:}$$

$$V = I(R + 1/sC) \quad \text{حيث} \quad v(t) = Ve^{st} \quad \text{والتي هي من الشكل:}$$

وهكذا نرى أن التوتر هو دالة أسية بالنسبة إلى الزمن مثل دالة التيار ولها

$$\text{الأس نفسه. إذا وضعنا: } Z(s) = R + 1/sC$$

فإن $Z(s)$ هي دالة الممانعة لهذه الدارة، ونحصل عندها على العلاقة:

$$V = IZ(s)$$

وهي تمثل قانون أوم العام لهذه الدارة.

ب- الاستجابة الطبيعية:

نحصل عليها بوضع $Z(s) = 0$ فنجد: $Z(s) = R + 1/sC = 0$ أو $s = -1/RC$

إذن ليس للدارة ممانعة من أجل هذه القيمة لـ s ، وستبدي استجابة محدودة لدى غياب توتر القسر. وتلك هي إذن الاستجابة الطبيعية، وهي دالة أسية تابعة للزمن، قيمة s فيها هي القيمة التي حصلنا عليها بوضع $Z(s) = 0$. وعليه، فالاستجابة الطبيعية هي:

$$i_N(t) = I_N e^{-\frac{t}{RC}}$$

حيث I_N هو التيار الابتدائي الذي يساوي الصفر إذا لم تكن المكثفة مشحونة في

البداء. أما في الحالة العامة حيث يكون للمكثفة شحنة ابتدائية $q(0)$ وتوتر ابتدائي $v(0)$ فإن:

$$I_N = \frac{v(0)}{R}$$

تصبح الاستجابة الطبيعية:

$$\begin{aligned} i_N(t) &= \frac{v(0)}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \text{ أو} \\ v_C(t) &= v(0) e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned} \quad (2 - 19)$$

وذلك لأن: $v_C(t) = v_R(t) = i_N(t)R$

ج-مثال على استجابة الدارة RC

مثال 3-

يطبق في اللحظة $t=0$ توتر قسر معطى بالعلاقة: $v(t) = 100e^{-10t}$ على دارة مؤلفة من مقاومة قيمتها 1000Ω موصولة على التسلسل مع مكثفة سعتها $300\mu F$. عين التوتر بين طرفي المكثفة إذا كان توتر المكثفة الابتدائي في اللحظة $t=0$ يساوي $30V$

الحل:

يمكننا أن نحل هذه المسألة باتباع طريقتين:

الطريقة الأولى: نعين التيار الكلي $i_T(t)$ ثم نطبق العلاقة:

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i_T(t) dt \quad (2 - 20)$$

نبدأ بتعيين الاستجابة القسرية من العلاقة:

$$i_F(t) = \frac{V}{Z(s)} e^{-10t} = \frac{V}{R + 1/sC} e^{-10t} = \frac{100}{1000 + (1/-10 \times 3 \times 10^{-4})} e^{-10t}$$

أو:

$$i_F(t) = 0.15e^{-10t}$$

أما الاستجابة الطبيعية فنحصل عليها بوضع الشرط: $Z(s)=R+1/sC=0$ وبالتعويض عن كل حد بما يساويه نجد: $\text{neper/ss} = -3.33$ وعليه تكون الاستجابة الطبيعية:

$$i_N(t) = I_N e^{-3.33t}$$

وتصبح الاستجابة الكلية:

$$i_T(t) = 0.15e^{-10t} + I_N e^{-3.33t}$$

وأخيراً، بحسب توتر المكثفة من العلاقة (2-20) بعد التعويض عن التيار بما يساويه من العلاقة الأخيرة فنحصل على المعادلة:

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i_T(t) dt = \frac{10^4}{3} [0.15 \int e^{-10t} dt + I_N \int e^{-3.33t} dt]$$

وبإجراء عمليتي التكامل والتبسيط نجد:

$$v_C(t) = -50e^{-10t} - 1000I_N e^{-3.33t}$$

ومن شروط البدء لدينا : $v_C(0) = +30$ ، فبالتعويض في العلاقة الأخيرة من أجل $t=0$ نجد: $I_N = -0.080$. بوضع قيمة I_N هذه في المعادلة الأخيرة نحصل على توتر المكثفة، وهو:

$$v_C(t) = -50e^{-10t} + 80e^{-3.33t}$$

الطريقة الثانية: لتعيين استجابة التوتر القسرية V_C ، نرجع إلى الجزء (b) من الشكل 2-1 فنرى أنه يمكن تعيين V_C كونه جزءاً منتوتراً القسر ، حيث المقاومة

R هي على التسلسل مع مكثفة، ممانعتها $1/sC$ ، ومنبع توتر يعطي 100فلط. وعليه فإن التوتر بين طرفي المكثفة تعطيه علاقة مجزئ الكمون:

$$V_c = \frac{1/sC}{R+1/sC} \times V = \frac{V}{1+sCR} = \frac{1}{1+(-10 \times 1000 \times 300 \times 10^{-6})} \times 100$$

$$V_c = -50 \text{ V أو}$$

وأخيراً نحصل على الاستجابة القسرية لتوتر المكثفة والتي لها نفس شكل توتر القسر:

$$v_c(t) = -50e^{-10t}$$

اما الاستجابة الطبيعية لتوتر المكثفة فتتبعين، كالسابق، من وضع: $Z(s) = R + 1/sC = 0$ التي تعطي $s = -1/RC = -3.33 \text{ neper/s}$. وعليه فالاستجابة الطبيعية هي:

$$v_{CN}(t) = V_{CN} e^{-3.33t}$$

حيث V_{CN} ثابت ينبغي تعيينه من شروط البدء.

نحصل على الاستجابة الكلية لتوتر المكثفة من جمع الاستجابتين. إذا فعلنا ذلك نجد:

$$v_c(t) = V_{CN} e^{-3.33t} - 50e^{-10t}$$

من شروط البدء لدينا $v_c(0) = +30$. نعوض في المعادلة الأخيرة فنحصل على $V_{CN} = 80$

وهكذا نحصل على الاستجابة الكلية نفسها التي حصلنا عليها بالطريقة الأولى.

2-5 تضاؤل الاستجابة الأسي:

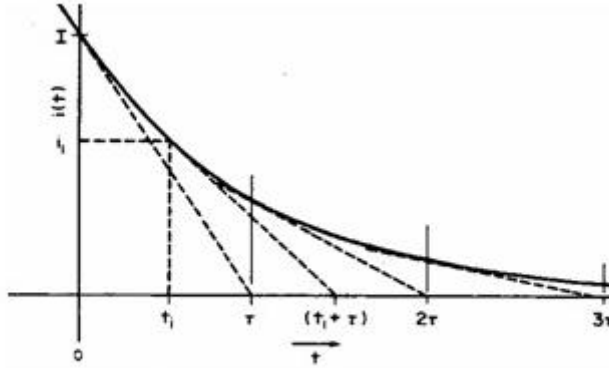
إذا نظرنا في المعادلة (2-11) نرى أن المقدار R/L يجب أن يكون له أبعاد مقلوب زمن. فإذا وضعنا $\tau = L/R$ ، فإن τ تدعى الثابتة الزمنية للدائرة RL . وإذا

نظرنا في المعادلة (2-19) أيضاً فإن المقدار RC يجب أن يكون له أبعاد زمن ويسمى الثابتة الزمنية للدارة RC ؛ لذا نضع $\tau = RC$. فبدلالة الثابتة الزمنية للدارة يمكن تمثيل المعادلتين السابقتين بمعادلة واحدة من الشكل:

$$i(t) = I e^{-\frac{t}{\tau}}$$

ويبين الشكل 3-2 تمثيلها بيانياً. بعد انقضاء ثابتة زمنية واحدة، أي $t = \tau$ ، فإن قيمة التيار تصبح: $i(\tau) = I e^{-1} = 0.368 I$ ، أي أن التيار يهبط إلى: 36.8% من قيمته الابتدائية. نلاحظ أن المماس للمنحني $i(t)$ في اللحظة $t=0$ يقطع محور الزمن عند $t = \tau$ لأن:

$$\left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0} = -\left(\frac{I}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)_{t=0} = -\frac{I}{\tau}$$



الشكل 3-2

كما أن المماس للمنحني في أية لحظة t_1 الموافقة للتيار i_1 يقطع محور الزمن في النقطة $(t_1 + \tau)$. وهذا يفيدنا تجريبياً في تعيين الثابتة الزمنية للدارة إذا علمنا تغيرات التيار فيها بدلالة الزمن. ومن أجل $t = 2\tau$ ، تصل قيمة التيار إلى 0.135 من قيمته الابتدائية. وبعد انقضاء ثلاث ثوابت زمنية تهبط قيمة التيار إلى 0.05 من قيمته الابتدائية. وهكذا نرى أن التيار يتضاءل بسرعة مع الزمن، ويكاد ينعدم بعد انقضاء بضعة ثوابت زمنية.

2-6 جمل المرتبة الثانية:

2-6-1 الدارة مكونة من تحريضية ومكثفة ومقاومة:

سندرس الآن استجابة الدارة المرسومة في الجزء (c) من الشكل 2-1 .
المعادلة التفاضلية لهذه الدارة هي المعادلة (2-3) . لنفرض- كما فعلنا في
السابق- أن التيار الذي يجري في هذه الدارة هو دالة أسية بالنسبة للزمن ومن
الشكل الذي تعطيه المعادلة(2-4) ، ثم نعوض عن التيار وعن مشتقه وتكامله
في المعادلة التفاضلية (2-3) فتؤول إلى الشكل الآتي:

$$Rie^{st} + LLe^{st} + \frac{1}{sC}e^{st} = v(t)$$

أو:

$$\left(R + sL + \frac{1}{sC}\right)Ie^{st} = v(t) \quad (2-21)$$

وهذه المعادلة الأخيرة يمكن كتابتها على الشكل:

$$v(t) = Ve^{st} \text{ حيث:}$$

$$V = I \left(R + sL + \frac{1}{sC}\right) = IZ(s)$$

و $Z(s)$ هي دالة الممانعة للدارة المكونة من مقاومة وتحريضية ومكثفة
موصولة على التسلسل. وعليه نكتب :

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC} \quad (2-22)$$

نعين الآن الاستجابتين الطبيعية والقسرية بصورة منفصلة، كما فعلنا من قبل.

آ- الاستجابة الطبيعية:

تحدث الاستجابة الطبيعية عندما تنعدم دالة الممانعة، أي:

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC} = \frac{sRC + s^2LC + 1}{sC} = 0$$

أي عندما يكون:

$$s^2LC + sRC + 1 = 0 \quad (2-23)$$

لهذه المعادلة جذران s_1 و s_2 قيمتهما:

$$s_{1,2} = \frac{-R}{2L} \mp \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad (2-24)$$

نضع:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{و} \quad \alpha = \frac{R}{2L}$$

نعوض في المعادلة (2-24) فتأخذ الشكل:

$$s_{1,2} = -\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (2-25)$$

وتكون الاستجابة الطبيعية لهذه الدارة من الشكل:

$$i_N(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \quad (2-26)$$

إن شكل الاستجابة الطبيعية مرتبط بطبيعة الجذرين s_1 و s_2 ، وهذا يعتمد على

إشارة ما تحت الجذر في المعادلة (2-25). وهنا نميز ثلاث حالات:

1- إذا كان $\alpha > \omega_0$ أي: $R/2L > 1/\sqrt{LC}$ ، فالجذران حقيقيان وسالبان، وتكون

الاستجابة أسية متخامدة كما تشير المعادلة (2-26)، وتتعين الثابتان A و B من

شروط البدء.

2- إذا كان $\alpha = \omega_0$ فالجذران حقيقيان ومتساويان (جذر مضاعف) وتكون

الاستجابة أسية متخامدة أيضاً ولكن تخامدها أسرع من الحالة السابقة، وتأخذ

الشكل الآتي:

$$i_N(t) = (At + B)e^{st} \quad (2-27)$$

3- إذا كان $\alpha < \omega_0$ فالجذران عقديان قيمتهما:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = -\alpha \pm j\omega \quad (2-28)$$

حيث:

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \quad , \quad \zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

وتكون الاستجابة اهتزازية متخامدة ومن الشكل:

$$i_N(t) = e^{-\alpha t} \left[A e^{j\omega t} + B e^{-j\omega t} \right] \quad (2-29)$$

يمكن إرجاع هذه العلاقة إلى شكل أكثر فائدة وتمييزاً باستخدام نظرية أولر أي:

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$$

فتصبح الاستجابة، بعد إعادة كتابتها على شكل دالة جيبية تواترها الزاوي ω وسعتها متخامدة، بثابتة تخامد α ، من الشكل:

$$i_N(t) = D e^{-\alpha t} \cos(\omega t \pm \varphi) \quad (2-30)$$

حيث D و φ ثابتان عوضاً عن الثابتين A و B في المعادلة (2-29). ويرتبطان معهما بالعلاقتين التاليتين:

$$D = \sqrt{A^2 + B^2} \quad , \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{B}{A}$$

وهكذا يمكننا دوماً الانتقال من الحل المعطى بالمعادلة (2-29) إلى الحل المعطى بالمعادلة (2-30) وبالعكس.

ملاحظة: توجد حالة خاصة عندما $\alpha = 0$ أي عندما $R = 0$ ، وهي حالة عدم وجود تخامد، فعندها يكون $s_{1,2} = \pm j\omega_0$ ، ففي هذه الحالة تكون الاستجابة الطبيعية غير متخامدة ومن الشكل:

$$i_N(t) = A e^{j\omega_0 t} + B e^{-j\omega_0 t} = D \cos(\omega_0 t \pm \varphi) \quad (2-31)$$

يسمى ω_0 التواتر الطبيعي للاستجابة اللامتخامدة ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2-32)$$

أما ω فهي التواتر الحقيقي عند وجود التخامد. تسمى المقاومة التي ينعدم من أجلها ماتحت الجذر في المعادلة (2-24) مقاومة التخامد الحرجة ويرمز لها بالرمز R_c . فإذا كانت مقاومة الدارة أكبر من المقاومة الحرجة كانت الاستجابة أسية متخامدة، وإذا كانت مقاومة الدارة أصغر من المقاومة الحرجة كانت الاستجابة اهتزازية متخامدة السعة. نحصل على قيمة مقاومة التخامد الحرجة بكتابة: $\alpha^2 = \omega^2_0$ فنجد:

نسمي نسبة المقاومة R إلى المقاومة الحرجة R_c عامل التخامد ζ .

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2-33)$$

ب- الاستجابة القسرية

شكل هذه الاستجابة مثل شكل دالة توتر القسر، وتعطى في نطاق التواتر بالعلاقة:

$$I = \frac{V}{Z(s)} = \frac{V}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

حيث نعوض عن s من قيمتها في دالة القسر. وسنعالج هذه الاستجابة بالتفصيل في المثال 8 من الفقرة 2-8، وذلك بعد التعرف على مختلف أشكال دوال القسر.

ج- مثال على الاستجابة الطبيعية للدارة RCL

مثال 4-

دارة مكونة من تحريضية L قيمتها 0.5 H ، موصولة على التسلسل مع مكثفة سعنتها C قيمتها 0.0556 F ومقاومة R . عين الاستجابة الطبيعية من أجل :
 أ- $R=10 \Omega$ ، ب- $R=6 \Omega$ ، ج- $R=1 \Omega$ ، د- $R=0$ ، وذلك عند غلق الدارة على توتر ابتدائي قدره 35 فلت بين طرفي المكثفة.

الحل:

شرط الاستجابة الطبيعية أن يكون $Z(s) = 0$. نكتب:

$$z(s) = R + sL + \frac{1}{sC} = 0$$

نعوض عن كل حد بما يساويه فنجد:

$$Z(s) = R + \frac{s}{2} + \frac{18}{s} = 0$$

التي نكتبها على الشكل التالي:

$$s^2 + 2sR + 36 = 0 \quad (2-34)$$

الحالة آ- $R=10\Omega$: نعوض في المعادلة (2-34) فتصبح:

$$s^2 + 20s + 36 = 0$$

جذرا هذه المعادلة هما $s_1 = -2$ و $s_2 = -18$ ، والاستجابة الطبيعية في هذه الحالة هي:

$$i_N(t) = Ae^{-2t} + Be^{-18t} \quad (2-35)$$

A و B ثابتان نعينهما من شروط البدء .

لما كان $i(0^-) = 0$ فإن $i(0^+) = 0$ ، إذن $i(0) = 0$ ؛ لأنه يوجد في الدارة تحريضية، ولأن التيار في التحريضية مستمر ولا يعاني انقطاعاً. وبالتعويض في المعادلة (2-35) نجد:

$$0 = A + B \quad (2-36)$$

نحصل على معادلة ثانية بكتابة:

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i_N(t) dt = 18 \int (Ae^{-2t} + Be^{-18t}) dt$$

بإجراء عملية المكاملة نجد:

$$v_c(t) = -9Ae^{-2t} - Be^{-18t} \quad (2-37)$$

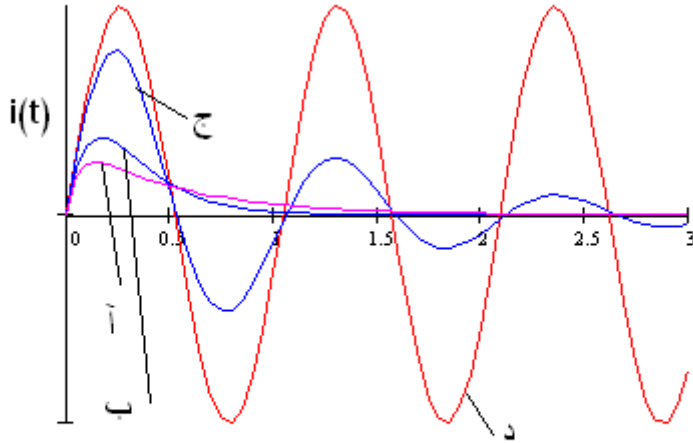
ولما كان $v_c(0^-) = 35 \text{ V}$ فإن $v_c(0^+) = 35 \text{ V}$ وبالتالي فإن $v_c(0) = 35 \text{ V}$ لأن التوتر في المكثفة مستمر ولا يعاني انقطاعاً. نعوض في المعادلة (2-37) فنجد:

$$35 = -9A - B \quad (2-38)$$

من المعادلتين (2-36) و (2-38) نجد: $A = 4.37$ و $B = -4.37$ وأخيراً تصبح الاستجابة الطبيعية في هذه الحالة:

$$i_N(t) = 4.37(e^{-2t} - e^{-18t}) \quad (2-39)$$

وهي مبينة في الجزء أ من الشكل 4-2 .



الشكل 4-2 الاستجابة الطبيعية لدارة تسلسلية بدرجات تخامد متقاوئة

الحالة ب- $R = 6 \Omega$

في هذه الحالة يعطينا شرط انعدام دالة الممانعة المعادلة الآتية:

$$s^2 + 12s + 36 = 0$$

وهذه المعادلة لها جذر مضاعف $s_1 = s_2 = -6$ ، وعليه تكون الاستجابة الطبيعية في هذه الحالة على الشكل:

$$i_N(t) = (At + B)e^{-6t} \quad (2-40)$$

نعين الثابتين A و B من شروط البدء- كما فعلنا في الحالة الأولى- فنجد: $A = 70$ و $B = 0$.

وتصبح الاستجابة الطبيعية في هذه الحالة:

$$i_N(t) = 70te^{-6t} \quad (2-41)$$

هذه الاستجابة شبيهة باستجابة الحالة السابقة ولكنها تتخامد بسرعة أكبر، وهي مبينة في الجزء ب من الشكل 2-4 .

الحالة ج- $R = 1\Omega$:

تؤول المعادلة (2-24) في هذه الحالة إلى:

$$s^2 + 2s + 36 = 0$$

لهذه المعادلة جذران عقديان هما: $s = -1 \pm j\sqrt{35}$ ، والاستجابة في

هذه الحالة هي من الشكل:

$$i_N(t) = Ae^{(-1+j\sqrt{35})t} + Be^{(-1-j\sqrt{35})t} \quad (2-42)$$

والتي يمكن إعادة كتابتها على النحو التالي:

$$i_N(t) = e^{-t} (Ae^{j\sqrt{35}t} + Be^{-j\sqrt{35}t}) \quad (2-43)$$

نعين الثابتين هنا من شروط البدء- كما عيناها في الحالات السابقة - ونحصل على:

$$A = j\sqrt{35} \quad , \quad B = -j\sqrt{35}$$

بالتعويض في المعادلة (2-43) نحصل على الاستجابة الطبيعية في هذه الحالة وهي:

$$i_N(t) = j\sqrt{35}e^{-t} (e^{-j\sqrt{35}t} - e^{j\sqrt{35}t}) \quad (2-44)$$

يمكننا إعادة كتابة المعادلة (2-44) ووضعها على شكل دالة جيبية ذات سعة متخامدة وذلك بتطبيق نظرية أولر، فتصبح على الشكل الآتي:

$$i_N(t) = 2\sqrt{35}e^{-t} \sin \sqrt{35}t \quad (2-45)$$

$$= 11.832e^{-t} \sin 5.916t$$

الاستجابة في هذه الحالة اهتزازة جيبية ذات تواتر زاوي قدره 5.916 rad/s وتواتر طبيعي (نييري) قدره (-1 نيبر/ثانية)، أي هي موجة جيبية ذات سعة متخامدة مع الزمن. وشكل هذه الاستجابة مبين في الجزء ج من الشكل 2-4. الحالة د- $R = 0$: تؤول المعادلة (2-24) في هذه الحالة إلى:

$$s^2 + 36 = 0$$

وجذرا هذه المعادلة هما $s = \pm j6$ ، والاستجابة في هذه الحالة هي من الشكل:

$$i_N(t) = Ae^{j6t} + Be^{-j6t}$$

نعين الثابتين هنا من شروط البدء كما عيناها في الحالات السابقة ونحصل على:

$$B = j5.83 \text{ و } A = -j5.83$$

وتصبح الاستجابة الطبيعية في هذه الحالة:

$$i_N(t) = j5.83(e^{-j6t} - e^{j6t})$$

وحسب نظرية أولر يمكن إعادة كتابة المعادلة الأخيرة على الشكل التالي:

$$i_N(t) = 11.66 \sin 6t \quad (2-46)$$

والاهتزازة في هذه الحالة جيبية وذات سعة ثابتة غير متخادمة، قيمتها 11.66 وتواترها الزاوي 6 rad/s ، وهي مبينة في الجزء د من الشكل 2-4 .

2-7 الاستجابة لدوال قسر غير أسية:

توجد دوال قسر أخرى شائعة الاستعمال في التطبيقات العملية نذكر بعضاً منها: الدالة الدرجة step function للتوتر والتيار، ويرمز لها بالرمز $u(t)$ ودالة الانحدار أو الدالة الخطية ramp function ونبضة الاعتيان sampling pulse ودالة الجيب أو التجب. وسنشرح في هذه الفقرة كيف نحصل على الاستجابة القسرية للدائرة المدروسة عندما يطبق عليها منبع توتر أو تيار يكون تغيره مع الزمن وفق إحدى هذه الدوال.

2-7-1 الدالة الدرجة:

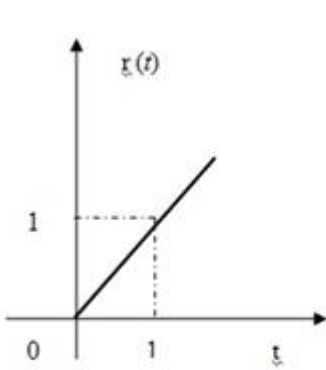
هي الدالة المبينة في الشكل 2-5 ، ويرمز لها بالرمز $u(t)$ ، وتعرّف كالاتي:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } -\infty < t < 0 \\ 1 & \text{for } 0 < t < \infty \end{cases}$$

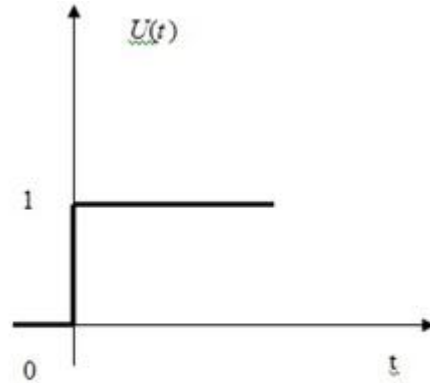
وعليه إذا ضربنا الدالة الدرجية $u(t)$ في دالة من الشكل $f(t)$ فالناتج، $f(t)u(t)$ ، يعرف عندئذ كما يلي:

$$f(t)u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } -\infty < t < 0 \\ f(t) & \text{for } 0 < t < \infty \end{cases}$$

إن تشابه الدالة الدرجية مع الدالة الأسية مدهش. فإذا أردنا أن نمثل توتراً ما، وليكن $v(t)$ ، فمن الضروري أن نضرب $u(t)$ في توتر ثابت، مثل V . وهكذا فإن الدالة $v(t) = Vu(t)$ تمثل منبع توتر مثالي تساوي قيمته الصفر من أجل $t < 0$ ، وتساوي توتراً ثابتاً V من أجل $t > 0$.



الشكل 6-2 الدالة الخطية



الشكل 5-2 الدالة الدرجية

لو أعطينا دالة درجية من الشكل $v(t) = Vu(t)$ ، يمكننا تمثيلها بدالة أسية من الشكل $v(t) = Ve^{st}$ بوضع $s = 0$ ، فتصبح $v(t) = V$ من أجل $t > 0$ ، وهو ما تؤول إليه الدالة الدرجية في هذا المجال. فالدالتان متماثلتان إذن من أجل $t > 0$. إذا أردنا إيجاد الاستجابة القسرية لدارة المثال 1-2، المكونة من مقاومة $R = 10\Omega$ موصولة على التسلسل مع تحريضية $L = 0.25 \text{ H}$ ، يمكن عمل ذلك

بوضع $s=0$ في علاقة دالة الممانعة: $Z(s) = R+sL$. أما الاستجابة الطبيعية فلا تتعلق بدالة توتر القسر وتبقى مماثلة للاستجابة التي حصلنا عليها لدى تطبيق دالة القسر الأسية على الدارة في اللحظة $t=0$. إن الدالة الدرجية هي حالة مثالية لعملية تأخذ مجراها عندما تُغلق قاطعة في دارة فتؤدي إلى تطبيق منبع طاقة في فترة لا متناهية في القصر. يفترض أن تساوي هذه المدة صفرًا بالفعل، بحيث تكون اللحظة $t=0$ هي اللحظة التي يُطبَّق عندها منبع الطاقة، مثلما كان الحال مع التوترات الأسية المُطبَّقة. يبين الشكل 2-7 قاطعة أحادية القطب ذات نقلتين (أي تأخذ وضعيتين)، ويشير إلى أنها تحدث دارة قصيرة بين a و b ودارة مفتوحة بين a و c عند $t < 0$. وتحدث دارة مفتوحة بين a و b ودارة قصيرة بين a و c عند $t > 0$. ويبين الشكل 2-8 كيف تكافئ الدالة الدرجية لتوتر القسر بمنبع توتر مثالي مع قاطعة من هذا النوع. يشير الشكل 2-8 إلى أن $v(t)=0$ من أجل $t < 0$ وأن $v(t)=V$ من أجل $t > 0$ ، وهذا ما تفعله الدالة الدرجية.

2-7-2 الدالة الخطية:

يرمز لها بالرمز $r(t)$ ، وهي مبينة في الشكل 2-6 وتعرّف كالآتي:

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } -\infty < t < 0 \\ t & \text{for } 0 < t < \infty \end{cases}$$

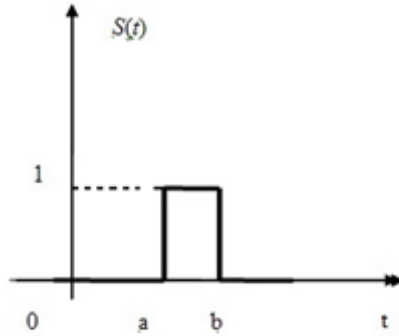
2-7-3 نبضة الاعتيان:

يرمز لها بالرمز $s(t)$ وهي نبضة مستطيلة مبينة في الشكل 2-9، وتعرف كالآتي:

$$S(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } -\infty < t < a \\ 1 & \text{for } a \leq t < b \\ 0 & \text{for } b < t < \infty \end{cases}$$

ومن الجدير بالملاحظة أن دالة الاعتيان يمكن التعبير عنها بدلالة الدالة الدرجية كما يأتي:

$$S(t) = u(t-a) - u(t-b)$$



الشكل 2-9 نبضة الاعتيان هي نبضة مستطيلة

2-7-4 الدالة الجيبية:

لعل أكثر دوال القسر المتغيرة مع الزمن أهمية هي الدالة التي يكون تغيرها مع الزمن وفق دالة الجيب أو التجيب، كالدالتين:

$$v(t) = V \cos \omega t \quad v(t) = V \sin \omega t \quad (2-47)$$

اللتين تمثلان توتراً متناوباً. يجب أن نكون قادرين على إيجاد الاستجابة القسرية لمثل هذه الدالة، لأن العديد من التوترات والتيارات المولدة عملياً في منظومات

الطاقة ومنظومات الاتصالات تقترب كثيراً من هذه الدالة المثالية.
من السهل أن نمثل الدالة الجيبية بواسطة دالة أسية، وذلك اعتماداً على نظرية أولر:

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t \quad (2-48)$$

يُعبّر عن دالة التجيب بالجزء الحقيقي (Real part) من دالة أسية يكون فيها $s = j\omega$ ، حيث ω هي التواتر الزاوي للدالة الجيبية، ونعبر عن دالة الجيب بالجزء التخيلي (Imaginary part) من الدالة الأسية، ونكتبهما على النحو الآتي:

$$\cos \omega t = \text{Re} e^{j\omega t} \quad , \quad \sin \omega t = \text{Im} e^{j\omega t} \quad (2-49)$$

كي نطبق دالة قسر جيبية كالدالة الممثلة بالمعادلة (2-47)، فإننا نبدأ بتطبيق دالة قسر أسية لها أس تخيلي. وتكون الاستجابة المطلوبة هي الجزء الحقيقي من استجابة الدالة الأسية إذا كانت دالة القسر دالة \cos ، أو الجزء التخيلي من الاستجابة إذا كانت دالة القسر دالة \sin . وتجدر الإشارة إلى أن هذه الطريقة لاتصح إلا على الجمل الخطية، وهذا ينطبق على الجمل التي نتعامل معها مادامت العناصر التي تتكون منها عناصر خطية.

2-7-5 المقادير الطورية:

تمثل المعادلتان (2-47) دالتان جيبيتان بسيطتان. لكن الدالة الجيبية للتوتر أو التيار، في الحالة العامة، تكون على الشكل الآتي $A \cos(\omega t + \theta)$. ومن الواضح أن لهذه الدالة الجيبية ثلاث مواصفات. لها تواتر ω ، وسعة A ، وزاوية طور θ . ولو تأملنا الدالة الأسية العقدية:

$$A e^{j(\omega t + \theta)} = A e^{j\theta} e^{j\omega t}$$

لوجدنا أن لها أيضاً ثلاث مواصفات هي ذات مواصفات الدالة الجيبية: لها تواتر ω ، وسعة A وزاوية طور θ . ومن أجل تواتر ثابت للتيار أو التوتر، تبقى هناك صفتان مميزتان لكل من الدالة الجيبية والدالة الأسية هما السعة والطور. إذا رمزنا للعدد العقدي $\mathbf{A} = Ae^{j\theta}$ بالرمز $\mathbf{A} = A \angle \theta$ ، فإن هذا التمثيل يعرف بالتمثيل الطوري للمقدار الجيبي (الحقيقي والعقدي). وبموجب ما ذكر آنفاً، يمكن تمثيل الدالة الجيبية بالطريقة نفسها التي تمثل بها نظيرتها الدالة الأسية، أي التمثيل الطوري. وعلى سبيل المثال، إذا كان منبع التوتر معطى بالعلاقة:

$$v(t) = V_m \cos \omega t$$

فإنه يكتب في التمثيل الطوري على الشكل: $V_m \angle 0^\circ$. وإذا كانت استجابة التيار من الشكل:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) \quad (2-50)$$

فتمثيله الطوري هو: $I_m \angle \phi$.

كما أن للمقدار العقدي $Z = a + jb$ طول $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ وطور $\phi = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ وبذلك يكون تمثيله الطوري $Z = |Z| \angle \phi$

ملاحظة: لتمييز مقدار طوري عن عدد صرف، نكتب المقدار الطوري عادة بوضع خط فوقه، أو نكتبه بأحرف غامقة. فمثلاً إذا أردنا أن نكتب المعادلة (2-50) بالصيغة الطورية تصبح:

$$\mathbf{I} = I_m \angle \phi \quad (2-51)$$

وعليه، فالتوتر المعطى بالعلاقة الجيبية التالية: $v(t) = 100 \cos(400t - 30^\circ)$ يكتب في الصيغة الطورية على النحو: $\mathbf{V} = 100 \angle -30^\circ$

كما أن المقدار العقدي $Z=3+j4$ يكتب بالصيغة الطورية على الشكل: $Z=5\angle 53.1^\circ$

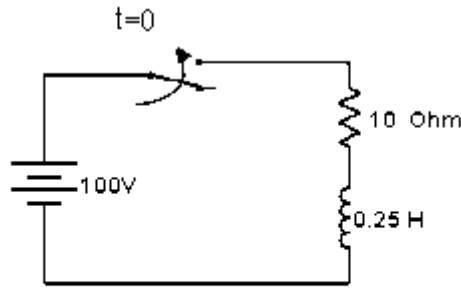
8-2 أمثلة على دوال قسر غير أسية:

آ- دالة القسر الدرجة:

مثال 5-

عين استجابة التيار الكلية بعد إغلاق القاطعة في دارة الشكل 10-2.

الحل:



تسكن 10-2

يمكن تمثيل منبع التوتر والقاطعة بدالة درجية من الشكل:

$v(t) = 100U(t)$ أي: $v(t) = 100e^{st}$ مع جعل $s=0$ من أجل $t > 0$.

نحصل على الاستجابة القسرية من العلاقة:

$$I_F = \frac{V}{Z(S)} = \frac{V}{R+SL} = \frac{100}{10+0} = 10 \text{ A}$$

فالاستجابة القسرية ثابتة وتساوي 10 A؛ لأن $v(t)$ ثابتة من أجل $t > 0$. أما الاستجابة الطبيعية، فهي من الشكل:

$$i_N(t) = Ie^{-\frac{t}{\tau}}$$

حيث: $T = L/R = 0.025 \text{ s}$. وتصبح الاستجابة الطبيعية:

$$i_N(t) = Ie^{-40t}$$

وأخيراً فالاستجابة الكلية هي: $i_T(t) = 10 + Ie^{-40t}$

نعين I من شروط البدء حيث كان $i_T(0^-) = 0$ في هذه الدارة لأن القاطعة كانت

مفتوحة في البدء، وبسبب وجود التحريضية فإن $i_T(0^+) = 0$ أيضاً. بالتعويض في

المعادلة نجد $A = -10$. وتصبح الاستجابة الكلية للتيار:

$$i_T(t) = 10 - 10e^{-40t} = 10(1 - e^{-40t})A$$

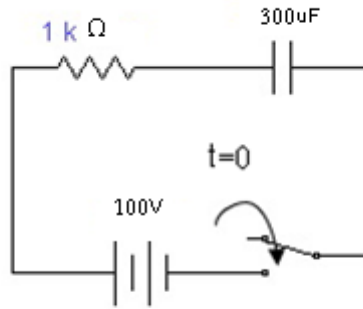
مثال 6-

عيّن التوتر المتشكل بين طرفي المكثفة في الشكل 11-2 إذا كان توتر القسر

توتراً مستمراً وقيمته 100 V وأن توتر المكثفة قبل غلق القاطعة كان مساوياً

30 V .

الحل:



الشكل 11-2

الاستجابة القسرية: نحسب V_c في نطاق الزمن من علاقة مجزئ الكمون- كما فعلنا في حالة الدالة الأسية- ولكننا نضع هنا $s=0$ فنجد:

$$V_c(t) = \frac{1/sc}{R+1/sc} V = \frac{V}{1+Rcs} = 100 V$$

فالاستجابة القسرية في نطاق الزمن من أجل $t > 0$ هي $v_c(t) = 100 V$.
أما الاستجابة الطبيعية فهي، كما في الحالة السابقة:

$$v_N(t) = V e^{-t/\tau} = V e^{-3.33t}$$

وتكون الاستجابة الكلية:

$$v_T(t) = 100 + V e^{-3.33t}$$

من شروط البدء حيث: $v_c(0) = 30 V$ نجد $V = -70 V$

وأخيراً تصبح الاستجابة الكلية :

$$v_T(t) = 100 - 70 e^{-3.33t}$$

ملاحظة: لو لم تكن المكثفة مشحونة في البدء لكانت الاستجابة:

$$i_T(t) = 100(1 - e^{-3.33t})$$

ب- دالة القسر الجيبية:

مثال 7 -

مقاومة قيمتها 10Ω موصولة على التسلسل بتحريضية قيمتها $0.25 H$ ويغذيها منبع توتر جيبى معطى بالعلاقة: $v(t) = 150 \cos 100t$ ، أوجد استجابة التيار القسرية لهذه الدارة.

الحل:

يمكننا أن نمثل التوتر الجيبى بدلالة دالة أسية على الشكل:

$$v(t) = \text{Re } 150 e^{j100t}$$

وممانعة هذه الدارة:

$$Z(j\omega) = R + j\omega L = 10 + j25$$

فتكون الاستجابة القسرية في نطاق التواتر:

$$I_F = \frac{V}{Z(j\omega)} = \frac{150}{10+j25} = (2.07 - j5.17) A$$

وهذا التيار له طويلة:

$$I_F = \sqrt{(2.07)^2 + (5.17)^2} = 5.574 A$$

وله زاوية طور ϕ نحسبها كالآتي:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{-5.17}{2.07} = -68^\circ 12' = -1.19 \text{ rad}$$

وتكون الاستجابة في نطاق الزمن:

$$i_F(t) = \text{Re}(2.07 - j5.17)e^{j100t}$$

أو:

$$i(t) = \text{Re}5.574e^{-j1.19}e^{j100t} = \text{Re}[5.574 e^{j(100t-1.19)}]$$

وأخيراً نأخذ الجزء الحقيقي من هذه الدالة الأسية، فنحصل على الاستجابة القسرية وهي:

$$i(t) = 5.574 \cos(100t - 1.19)$$

مثال 8-

يطبق توتر جيبيعلى دارة مؤلفة من محرصة تحريضيتها $L=0.5 H$ ومكثفة سعنتها $C=0.0556 F$ ومقاومة $R=1 \Omega$ موصولة على التسلسل، احسب استجابة التيار الكلية في هذه الدارة عند تطبيق توتر جيبى معطى بالعلاقة الآتية:

$$v(t) = 10 \csc(9t - 37^\circ) \quad (2 - 52)$$

بفرض أنه لا توجد طاقة مخزونة في الدارة في اللحظة $t=0$.

الحل:

الاستجابة القسرية: نستعمل المقادير الطورية، فنكتب صيغة التوتر على الشكل

$$V = 10\angle -37^\circ \text{V} \quad \text{الآتي :}$$

التيار في نطاق التواتر يحسب من العلاقة: $I = V/(Z(j\omega))$

نحسب الممانعة العقدية $Z(j\omega)$ ، حيث $s = j\omega = j9$

$$Z(j\omega) = R + sL + \frac{1}{sC} = 1 + j4.5 + \frac{18}{j9} = 1 + j2.5$$

وهذه هي الصيغة الديكارتية للممانعة، أما صيغتها الطورية فنجدها بعد إيجاد طويلتها وطورها كما يأتي:

$$Z(j\omega) = \sqrt{1 + 2.5^2} \angle \tan^{-1} 2.5 = 2.693 \angle 68.2^\circ \Omega$$

وتصبح الصيغة الطورية للتيار:

$$I = \frac{V}{Z(j\omega)} = \frac{10\angle -37^\circ}{2.693 \angle 68.2^\circ} = 3.714 \angle -105.2^\circ \text{A}$$

وصيغة التيار في نطاق الزمن هي:

$$i_F(t) = 3.714 \cos(9t - 105.2^\circ) \text{A}$$

الاستجابة الطبيعية: وجدنا هذه الاستجابة في المثال 4 من أجل الحالة (ج)

وكانت:

$$i_N(t) = e^{-t}(Ae^{j\sqrt{35}t} + Be^{-j\sqrt{35}t})$$

وأخيراً، تكون الاستجابة الكلية هي مجموع الاستجابتين القسرية والطبيعية:

$$i(t) = 3.714 \cos(9t - 105.2^\circ) + e^{-t}(Ae^{-j\sqrt{35}t} + Be^{j\sqrt{35}t}) \quad (2-53)$$

نعين A و B من شروط البدء. فعند $t=0^+$ كان $i(0^+)=0$ لأن الدارة تحوي تحريضاً ولا توجد طاقة مخزونة، وينتج عن ذلك أن:

$$i(0) = 3.714 \cos(-105.2) + A + B = 0$$

$$A+B=0.965 \text{ أو}$$

أما الشرط الثاني فنحصل عليه من كتابة قانون كرشوف الثاني للدائرة في اللحظة $t=0$ والذي يعطي:

$$v_c(0) + v_R(0) + v_L(0) = v(0)$$

والذي تكتبه على النحو الآتي:

$$v_c(0) + Ri(0) + L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = v(0) \quad (2-54)$$

نحصل على $\frac{di(t)}{dt}$ بأخذ مشتق المعادلة (2-53)، ثم نعوض كل حد بما

يساويه في المعادلة (2-54) في اللحظة $t=0$ ، مع الأخذ بالاعتبار أن:

$v_c(0) = Ri(0) = 0$ حسب شروط البدء. وبذلك تؤول المعادلة (2-54) إلى:

$$\text{أو: } v(0) = 0 + 0 + L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{v(0)}{L} = 16$$

بعد اشتقاق المعادلة (2-53) وإيجاد قيمة المشتق في اللحظة $t=0$ وتعويضها

في المعادلة الأخيرة نحصل على الشرط الثاني :

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = 32.276 - A(j\sqrt{35} + 1) - B(1 - j\sqrt{35}) = 16$$

وبحل المعادلتين اللتين تحويان A و B نجد :

$$A=0.483-j1.294 \quad B=0.483+j1.294$$

وبالتعويض عن قيمتي A و B في الاستجابة الطبيعية نجد:

$$i_N(t) = e^{-t} \left[(0.483 - j1.294)e^{-j\sqrt{35}t} + (0.483 + j1.294)e^{j\sqrt{35}t} \right]$$

أو

$$i_N(t) = e^{-t} \left[0.483(e^{-j\sqrt{35}t} + e^{j\sqrt{35}t}) + j1.294(e^{j\sqrt{35}t} - e^{-j\sqrt{35}t}) \right]$$

بتطبيق علاقة أولر على هذه المعادلة تصبح:

$$i_N(t) = e^{-t} [0.966 \cos \sqrt{35}t - 2.588 \sin \sqrt{35} t]$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$i_N(t) = C e^{-t} \cos(\sqrt{35}t - \phi)$$

حيث

$$C = \sqrt{0.966^2 + 2.588^2} = 2.762$$

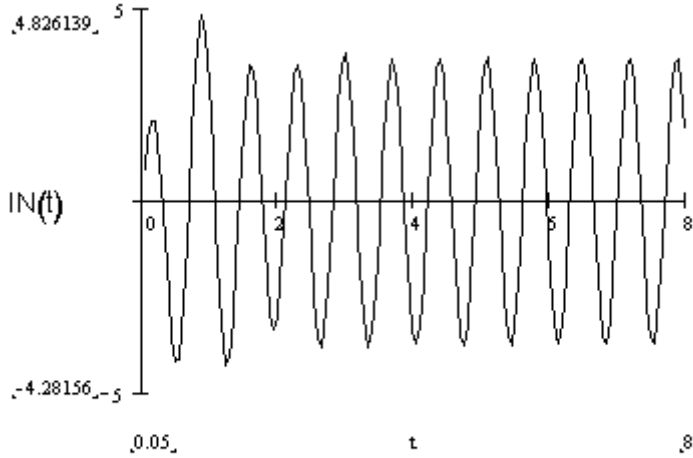
$$\phi = \tan^{-1} \frac{2.588}{0.966} = 69.5^\circ$$

وبذلك تصبح الاستجابة الكلية التي تعطيها المعادلة (2-53):

$$i(t) = 3.714 \cos(9t - 105.2^\circ) + 2.762e^{-t} \cos(\sqrt{35} t + 69.5^\circ)$$

إذا تفحصنا هذه المعادلة نجد أن الاستجابة الكلية للتيار تتألف من مجموع دالتي تجب لهما تواتران مختلفان: تواتر الاستجابة القسرية هو $\omega_F = 9 \text{ rad/s}$ وتواتر الاستجابة الطبيعية هو $\omega_N = 5.92 \text{ rad/s}$. فالأولى لها سعة ثابتة تساوي 3.714 A والثانية لها سعة متخامدة أسياً. لذا فإن الشكل الموجي لهذه الاستجابة الكلية يبقى بعيداً عن الدالة الجيبية إلى أن تتخامد المركبة الطبيعية للاستجابة وتصبح مهملة. وعلى سبيل المثال نرى أن قيمة المركبة الطبيعية للاستجابة تنخفض إلى 1% من قيمة المركبة القسرية بعد مضي زمن يقارب 4.3 ثانية؛ أي ما يعادل 6 أدوار تقريباً. ويتضح ذلك من الشكل 2-12 الذي يمثل الاستجابة

الكلية كما تعطيتها المعادلة (2-53). وهكذا نرى أن الشروط في الدارة تكون قد وصلت إلى الحالة المستقرة بعد مضي مايزيد قليلاً على 6 أدوار.



الشكل 2-12

مثال 9 -

في الدارة المبينة في الشكل 2-13 كانت القاطعتان مغلقتين لفترة طويلة من الزمن، ثم فتحتا معاً في اللحظة $t = 0$.

أ- احسب قيمتي i و v_c من أجل $t < 0$ ثم استنتج قيمتيهما $i(0)$ و $v_c(0)$.

ب- أوجد الصيغة الزمنية لكل من v_c من أجل $t > 0$.

ج- أوجد الصيغة الزمنية للطاقة المخزونة في المكثفة من أجل $t > 0$.

د- احسب قيم v_c والطاقة W_c في اللحظة $t = 20 \text{ ms}$.

الحل:

أ - من أجل $t < 0$ تسلك المكثفة سلوك دائرة مفتوحة، ويسلك الملف سلوك دائرة قصيرة. وعليه يكون توتر الملف معدوماً، وكذلك تيار المكثفة. ويمكن اعتبار المقاومتين 2Ω و 5Ω موصولتين على التفرع وكأن المكثفة غير موجودة.

نحسب التيار i الذي يمر في الملف والمقاومة 2Ω باعتباره جزءاً من التيار الكلي I الذي يعطيه المنبع باستخدام قانون تجزئة التيار على النحو الآتي:

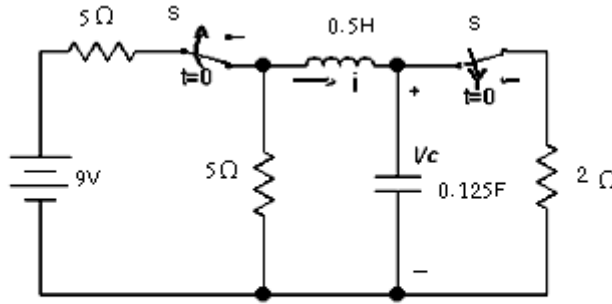
$$i = \frac{5}{5+2} I = \frac{5}{7} \frac{9}{5 + \frac{5 \times 2}{5+2}} = 1A$$

أما التوتر بين طرفي المكثفة فهو نفسه التوتر بين أي من المقاومتين 5 أو 2 أوم. إذن:

$$v_c = v_{2\Omega} = 1 \times 2 = 2V$$

بسبب وجود التحريضية فإن: $i(0^-) = i(0^+) = i(0) = 1A$

وبسبب وجود المكثفة فإن: $v_c(0^-) = v_c(0^+) = v_c(0) = 2V$



الشكل 13-2

ب من أجل $t > 0$

تتكون الدارة الآن من التحريضية والمكثفة والمقاومة 5Ω فقط، ويكون للمكثفة توتر ابتدائي يساوي $2V$ ويمر في الملف تيار ابتدائي قدره أمبير واحد. ونظراً

لخروج المنبع من الدارة بعد فتح القاطعتين S ، فإن الاستجابة تكون طبيعية. وشرط وجود هذه الاستجابة هو انعدام الممانعة Z(s) ، أي:

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{Cs} = 5 + 0.5s + \frac{8}{s} = 0$$

وهذه تؤول إلى المعادلة: $s^2 + 10s + 16 = 0$

التي يعطي حلها قيمتين للتواتر الطبيعي s هما: $s_1 = -2$ و $s_2 = -8$ ، وهما جذران حقيقيان. فالاستجابة إذن من الشكل:

$$i(t) = Ae^{-2t} + Be^{-8t}$$

ونحصل على الصيغة الزمنية لتوتر المكثفة من تطبيق العلاقة القائمة بين التوتر والتيار في المكثفة فنجد:

$$v_c(t) = \frac{1}{c} \int i(t) dt = 8 \int (Ae^{-2t} + Be^{-8t}) dt = -4Ae^{-2t} - Be^{-8t}$$

تتعين الثابتان A و B من شروط البدء التي استتجناها في الطلب السابق.

يعطيشروط البدء للتيار العلاقة: $i(0) = A + B = 1$ ويعطي شرط البدء للتوتر

$$v_c(0) = -4A - B = 2 \quad \text{العلاقة}$$

من هاتين العلاقتين نجد $A = -1$ و $B = 2$. نعويض هاتين الثيمتين في معادلتنا

التيار والتوتر أعلاه فتصبح استجابتا التيار والتوتر على النحو الآتي:

$$i(t) = -e^{-2t} + 2e^{-8t}$$

$$v_c(t) = 4e^{-2t} - 2e^{-8t}$$

ج-الصيغة الزمنية للطاقة المخزونة في المكثفة من أجل $t > 0$ تعطىها العلاقة:

$$W_c(t) = \int P(t) dt = \frac{1}{2} cv_c^2(t) = e^{-4t} - e^{-10t} + \frac{1}{4} e^{-16t}$$

د-نحسب قيم التيار والتوتر في اللحظة $t = 20 \text{ ms}$ فنجد:

$$v_c(20 \text{ ms}) = 2.14 \text{ V} \quad \text{و} \quad i(20 \text{ ms}) = 0.743 \text{ A}$$

أما قيمة الطاقة التي تختزنها المكثفة في تلك اللحظة فتساوي:

$$W_c(20ms) = \frac{1}{2} cv_c^2(20ms) = 0.134J$$

2-9 خاتمة

لقد تجنبنا في كل ما سبق استعمال الطريقة التقليدية في حل معادلة تفاضلية من أجل دراسة استجابة الدارة الكهربائية، ولجأنا إلى تحويل تلك المعادلة إلى معادلة جبرية بسيطة يسهل حلها. ونحن نعلم أن حل أي معادلة تفاضلية مكون من جزأين: أحدهما هو الحل الخاص للمعادلة التفاضلية يتعلق بشكل الطرف الثاني، والآخر هو الحل العام للمعادلة التفاضلية بدون طرف ثاني. وأن الحل العام هو مجموع الجزأين.

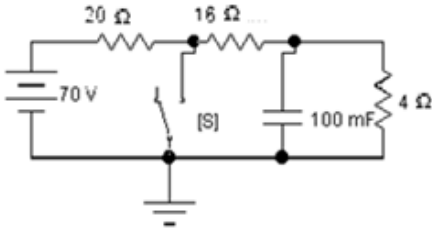
ونحن الآن نستطيع أن نحدد هذين الجزأين من الحل ونربط بينهما وبين الاستجابتين القسرية أو الطبيعية. فالحل الخاص للمعادلة يمثل الاستجابة القسرية، والحل العام يمثل الاستجابة الطبيعية. وكما أن الحل العام يتحدد من معرفة الشروط الحدية، فكذلك الاستجابة الطبيعية تتعين من معرفة الشروط الابتدائية للدارة. والحل العام للمعادلة التفاضلية يمثل الاستجابة الكلية للدارة.

ولما كانت الاستجابة الطبيعية هي استجابة عابرة بطبيعتها إذ تتضاءل بسرعة مع الزمن، فلا يبقى إلا الاستجابة القسرية. لذا يطلق على الاستجابة الطبيعية في أغلب الأحيان اسم **الاستجابة العابرة**، وعلى الاستجابة القسرية اسم **استجابة الحالة المستقرة**. وهكذا تهيمن الاستجابة القسرية التي تضع الدارة في الحالة المستقرة بعد انقضاء بضع ثوابت زمنية في دارات المرتبة الأولى، أو انقضاء عدة أدوار في دارات المرتبة الثانية. وسندرس سلوك الدارات الكهربائية في الحالة المستقرة في الفصل الثالث.

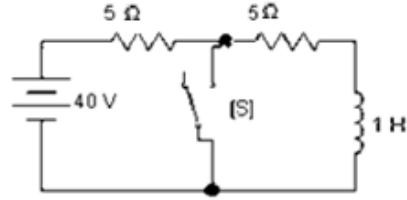
مسائل على الفصل الثاني

1-2 يجري في دارة كهربائية تيار معطى بالعلاقة $i(t) = 30e^{-10t}$ A من أجل $t > 0$. احسب آ- التيار الذي يجري في اللحظة $t = 0.7s$ ، ب- الزمن اللازم كي يهبط التيار إلى $1\mu A$.

2-2 مقاومة قيمتها $250\ \Omega$ ومكثفة مشحونة سعتها $10\ \mu F$ ، موصولتان على التفرع. إذا علمت أن $i(t) = 0.4\ A$ في اللحظة $t = 0$ ، احسب التوتر بين طرفي المقاومة آ- في اللحظة $t = 0$ ، ب- في اللحظة $t = 2.5\ ms$ ، ج- في اللحظة $t = 10\ ms$. د- عين الزمن اللازم ليهبط كمون المكثفة إلى 1 فولت.



الشكل م-2-2



الشكل م-1-2

2-3 في دارة الشكل م-1-2 كانت القاطعة s مفتوحة لفترة طويلة من الوقت ثم أغلقت في اللحظة $t = 0$. استخرج صيغة التيار $i(t)$ المار في الملف من أجل آ- $t < 0$ ، ب- من أجل $t > 0$.

2-4 في دارة الشكل م-2-2 كانت القاطعة مفتوحة لفترة طويلة من الوقت ثم أغلقت في اللحظة $t = 0$. استخرج صيغة التيار $i(t)$ الجاري خلال القاطعة من أجل $t > 0$.

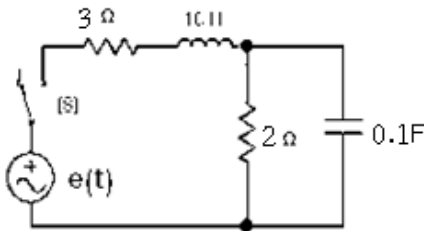
2-5 يطبق توتر معطى بالعلاقة $v(t) = 20e^{-3t}$ من أجل $t > 0$ ، على دارة مؤلفة من مقاومة $10\ \Omega$ على التسلسل مع تحريضية $8\ H$. عين: آ- الاستجابة القسرية للتيار، ب- الاستجابة الطبيعية للتيار، ج- الاستجابة الكلية

للتيار بفرض أن التيار في الدارة كان مساوياً $-3A$ في اللحظة $t(0^-)$ ، د-التيار في اللحظة $t = 1s$.

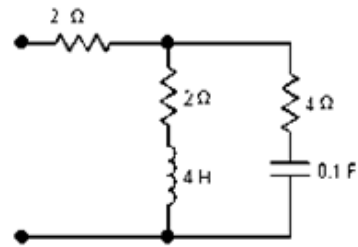
6-2 مكثفة سعتها $4 \mu F$ ومقاومة 5000Ω موصلتان في اللحظة $t = 0$ على التسلسل إلى منبع قوته المحركة الكهربائية $E = 250 V$. احسب آ-التيار في اللحظة $t = (0^+)$ ، ب- التيار في اللحظة $t = \infty$ ، ج- توتر المكثفة بدلالة الزمن من أجل $t > 0$ ، د- الطاقة المخزونة في المكثفة في اللحظة $t = 10 ms$ ، هـ - الطاقة الكلية المتبددة في المقاومة في اللحظة $t = \infty$. افرض أن المكثفة كانت غير مشحونة في اللحظة $t = (0^-)$.

7-2 لتكن الدارة المبينة في الشكل م-2-3 . عين عدد أصفار وأقطاب $Y(s)$ ، وحدد مواضعها . عين كذلك قيمة $Y(s)$ عندما $s = 0$.

8-2 يطبق توتر جيبي $v(t) = 200 \cos 5000t$ على دارة مؤلفة من تحريضية قدرها $4 mH$ ومقاومتها $R = 15 \Omega$ على التسلسل وفي شروط الحالة المستقرة . احسب: آ- $Z(j\omega)$ للدارة معبراً عنها بالشكلين القطبي والديكارتي ، ب - تيار الحالة المستقرة بالشكل القطبي وفي نطاق الزمن .



شكل م-4-2

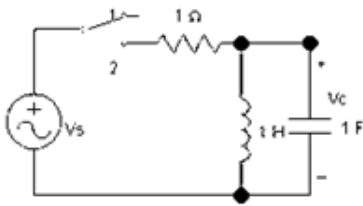


شكل م-3-2

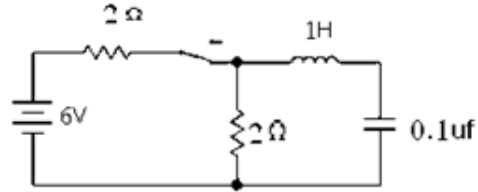
9-2 استخراج التيار $i(t)$ من أجل $t > 0$ للدارة المبينة في الشكل م-4-2 حيث القوة المحركة الكهربائية لمنبع التوتر $e(t) = 20 \cos t / 2$ ، وتغلق القاطعة في

اللحظة $t = 0$ عندما كان $e(t) = 10 \text{ V}$ ومتناقصاً . نفرض عدم وجود طاقة مخزونة في المكثفة في اللحظة $t = 0$.

10-2 لتكن الدارة المبينة في الشكل م 2-5 حيث $v_s(t) = 3 \cos t \text{ V}$.
 آ - بفرض أن القاطعة كانت مفتوحة (في الوضع 1) لفترة طويلة ثم أغلقت (في الوضع 2) في اللحظة $t = 0$ وأن المكثفة لم تكن مشحونة ، أوجد التيار الجاري في المقاومة وكذلك الاستجابة $v_c(t)$ من أجل $t > 0$.



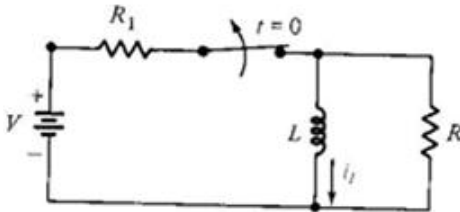
الشكل م 2-5



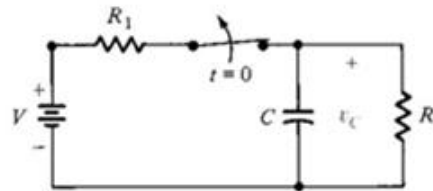
الشكل م 2-6

ب - بفرض أن القاطعة كانت مغلقة لفترة طويلة ثم فتحت في اللحظة $t = 0$ وأن المنبع أصبح $V_s = 12 \text{ V}$ ، عين كلاً من التيار الجاري في المقاومة والتيار الجاري في التحريضية وتوتر المكثفة $v_c(t)$ من أجل $t < 0$. أوجد الاستجابة $v_c(t)$ من أجل $t > 0$.

11-2 في دارة الشكل م 2-6 كانت القاطعة s مغلقة لفترة طويلة، ثم فتحت في اللحظة $t=0$. آ- عين التيار المار في كل عنصر، والتوتر v_c بين طرفي المكثفة وذلك من أجل $t < 0$ ، ب- أوجد تيار الملف وتوتر المكثفة من أجل $t > 0$.



الشكل م 2-8



الشكل م 2-7

12-2 لتكن الدارة المبينة في الشكل م 2-7 حيث كانت القاطعة مغلقة لفترة طويلة، ثم فتحت في اللحظة $t = 0$ وبقيت مفتوحة. عين $v_c(t)$ من أجل $t < 0$ و من أجل $t > 0$.

13-2 لتكن الدارة المبينة في الشكل م 2-8 حيث كانت القاطعة مغلقة لفترة طويلة، ثم فتحت في اللحظة $t = 0$ وبقيت مفتوحة. عين $i_L(t)$ من أجل $t < 0$ و من أجل $t > 0$.

الفصل الثالث

الدارة الكهربائية في الحالة المستقرة الجيبية

3-1 مقدمة

وجدنا في الفصل الثاني أن الاستجابة الكلية للدارة الكهربائية التي يغذيها توتر قسر جيبى مؤلفة من مركبتين : الأولى جيبية ذات سعة متخامدة أسياً، وهي الاستجابة الطبيعية، والثانية جيبية وذات سعة ثابتة وتواترها يساوي تواتر توتر القسر الجيبى. لكن مركبة الاستجابة الطبيعية تتخامد بسرعة حتى تتلاشى بعد فترة زمنية قصيرة، ولا يبقى سوى الاستجابة القسرية، وهي تمثل الاستجابة الدائمة في الحالة المستقرة.

سنقصر دراستنا في هذا الفصل على الاستجابة في الحالة المستقرة الجيبية، ونؤكد على أن كل التوترات والتيارات في الدارة تكون جيبية . في هذه الحال يمكننا استعمال المقادير العقدية والمقادير الطورية لتمثيل الممانعات ودوال القسر الجيبية سواء أكانت توترات أم تيارات على نحو ما فعلناه في الفصل الثاني.

3-2 العلاقة بين التوتر والتيار من أجل عناصر الدارة المختلفة:

نفرض في كل الحالات التي ندرسها الآن أن توتر القسر المطبق على الدارة هو توتر جيبى طوره معدوم، نكتبه على الشكل: $v(t) = V \cos \omega t$. وسنستعمل المقادير الطورية لتمثيل كل من التيار والتوتر الأنبيين اللذين يتغيران وفق دالة جيبية. وبذلك تكون الصيغة الطورية للتوتر $V = V \angle 0^\circ$. وتجدر الإشارة إلى أن التواتر النيبيري s يحل محله $j\omega$ هنا، ومن ثم نجد العلاقة المطلوبة بين I و V من أجل العناصر المختلفة المكونة للدارة.

آ- حالة المقاومة: يعطينا قانون أوم العلاقة الآتية: $V = ZI$

ولما كان $Z=R$ وهي مقدار حقيقي، فإن التيار والتوتر متفقان في الطور.

ب- حالة التحريضية: إن ممانعة التحريضية التي هي $Z(s) = sL$ تصبح هنا

$Z(j\omega) = j\omega L$. وعليه يعطينا قانون أوم العلاقة التالية بين التيار والتوتر:

$$V = ZI = j\omega LI = \omega LI \angle 90^\circ \quad (3-1)$$

تشير هذه المعادلة إلى أن توتر التحريضية V متقدم على التيار بزاوية 90° .

ملاحظة: نسمي المقدار ωL الردية التحريضية، وهي مقدار موجب، نرسم لها

بالرمز $X_L = j\omega L$ ونكتب:

ج- حالة الوسعية: لدينا هنا $Z(s) = \frac{1}{sC}$ التي تصبح هنا:

$$Z(j\omega) = 1/j\omega C = -j 1/\omega C$$

ويعطينا قانون أوم:

$$V = ZI = \frac{I}{j\omega C} = -j \left(\frac{I}{\omega C} \right) = \left(\frac{I}{\omega C} \right) \angle -90^\circ \quad (3-2)$$

تدل هذه العلاقة على أن توتر الوسعية متأخر عن التيار بزاوية 90° .

ملاحظة: نسمي المقدار $\frac{1}{\omega C}$ الردية الوسعية، وهي مقدار سالب، نرسم لها

بالرمز $X_C = -\frac{j}{\omega C}$ ونكتب .

د- حالة تحريضية مع مقاومة على التسلسل: لدينا الآن:

$$Z(j\omega) = R + j\omega L \quad (3-3)$$

كما يعطينا قانون أوم:

$$V = I(R + j\omega L) = I\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \angle \varphi \quad (3-4)$$

حيث φ زاوية فرق الطور بين التيار والتوتر، وتعطى بالعلاقة:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \quad (3-5)$$

في هذه الحالة يتقدم التوتر على التيار بزاوية قدرها φ تقع بين الصفر (من أجل

تحريضية معدومة) و $\pi/2$ (من أجل مقاومة معدومة).

هـ حالة وسعية مع مقاومة على التسلسل: الممانعة في هذه الحالة هي:

$$Z(j\omega) = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{\omega C} \quad (3-6)$$

وبتطبيق قانون أوم على هذه الدارة نجد:

$$V = I \left(R - \frac{j}{\omega C} \right) = I \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \angle \varphi \quad (3-7)$$

حيث φ زاوية فرق الطور بين التيار والتوتر، وتعطى بالعلاقة:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{-1}{\omega C R} \quad (3-8)$$

في هذه الحالة يتقدم التوتر على التيار بزاوية سالبة قدرها φ ، (أو يتقدم التيار على التوتر) تقع بين الصفر (من أجل $R \gg \frac{1}{\omega C}$) و $\pi/2$ (من أجل مقاومة معدومة)، تعطى العلاقة (3-8).

و-حالة مقاومة وتحريضية ومكثفة على التسلسل:

الدارة المدروسة هي المبينة في الشكل 3-1. الممانعة في هذه الحالة هي:

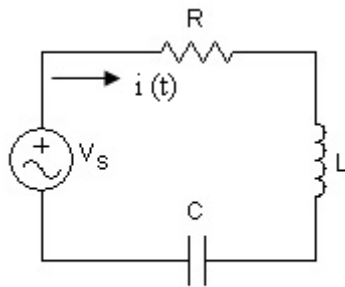
$$Z(j\omega) = R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = Z \angle \varphi \quad (3-9)$$

حيث طوليتها Z وطورها φ يعطيان بالعلاقتين:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad , \varphi = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

بتطبيق قانون أوم على هذه الدارة نجد:

$$V = I \left(R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right) = I \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \angle \varphi \quad (3-10)$$



الشكل 1-3

من هذه المعادلة نجد أن الصيغة الطورية للتيار هي:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V \angle 0^\circ}{Z \angle \varphi} = I \angle -\varphi \quad (3-11)$$

حيث φ - فرق الطور بين التوتر والتيار، و $I = \frac{V}{Z}$ طولية التيار.

نلاحظ أن φ تكون موجبة عندما يتحقق $\omega L > \frac{1}{\omega C}$. وفي هذه الحالة يغلب على الممانعة الأثر التحريضي، ويكون التيار متأخراً عن التوتر. وتكون φ سالبة عندما يتحقق $\omega L < \frac{1}{\omega C}$. وفي هذه الحالة يغلب على الممانعة الأثر الواسعي ويكون التيار متقدماً على التوتر.

هناك حالة خاصة ينعدم فيها فرق الطور بين التوتر والتيار وذلك عندما يتحقق $\omega L = \frac{1}{\omega C}$. تدعى هذه الحالة حالة التجاوب، سندرسها بالتفصيل في فقرة لاحقة.

ز- حالة مقاومة وتحريضية ومكثفة على التفرع:

الدارة المدروسة هي المبينة في الشكل 3-2، وهي مؤلفة من منبع تيار $i_s(t)$ موصول معه على التفرع مقاومة ومكثفة وتحريضية. نفرض أن الصيغة الطورية للتيار هي: $I_s = I_s \angle 0^\circ$. يفضل هنا استعمال القبولية Y بدلاً من الممانعة Z لأن عناصر الدارة موصولة على التفرع. تمثل القبولية Y بجزئها: الحقيقي G ، ويسمى الناقلية، والتخيلي B ، ويسمى الطواعية. وتعطى قبولية هذه الدارة بالعلاقة:

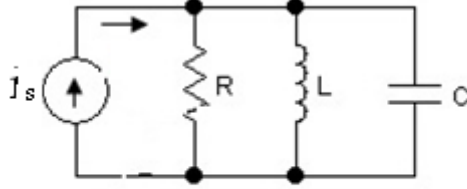
$$Y = G + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = Y \angle \varphi \quad (3-12)$$

$$Y = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \quad \text{حيث طوليتها } Y \text{ هي:}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G} \quad \text{وطورها } \varphi \text{ تعطيه العلاقة:}$$

وبتطبيق قانون أوم على هذه الدارة نجد التوتر V بين طرفي كل عنصر فيها:

$$V = \frac{I_s}{Y} = \frac{I_s}{\sqrt{G^2 + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}} = \frac{I_s \angle 0}{Y \angle \phi} = V \angle -\phi \quad (3-13)$$



الشكل 2-3

نلاحظ أن ϕ تكون موجبة عندما يتحقق $\omega C > \frac{1}{\omega L}$. وفي هذه الحالة يغلب على القبولية الأثر الواسعي ويكون التوتر متأخراً عن التيار. وتكون ϕ سالبة عندما يتحقق $\omega C < \frac{1}{\omega L}$. وفي هذه الحالة يغلب على القبولية الأثر التحريضي وعندها يكون التوتر متقدماً على التيار.

هناك حالة خاصة ينعدم فيها فرق الطور بين التوتر والتيار وذلك عندما يتحقق $\omega C = \frac{1}{\omega L}$. تدعى هذه الحالة حالة التجاوب التفرعي، وهو تجاوب توتر، سندرسها بالتفصيل في فقرة لاحقة .

ح-حالة ممانعات موصولة على التسلسل:

يبين الجزء (أ) من الشكل 3-3 دائرة مؤلفة من عدد من الممانعات موصولة على التسلسل إلى منبع توتر. نمثل كل ممانعة بمجموع جزئها: الحقيقي (أي المقاومة R) والردّي (تحريضي أو وسعي أو مجموعهما X). فالممانعة Z_1 ، على سبيل المثال نكتبها على الشكل: $Z_1 = R_1 + jX_1$ ، وبالمثل نكتب Z_2 و Z_3 ... وهكذا.

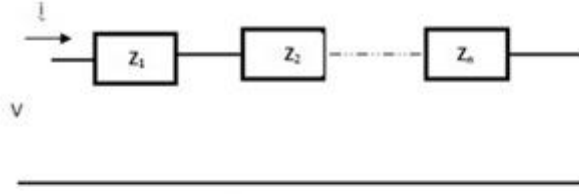
وتعطى الممانعة المكافئة Z من العلاقة:

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = R_1 + jX_1 + R_2 + jX_2 + \dots + R_n + jX_n \\ = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) + j(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \quad (3-14)$$

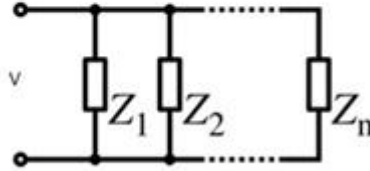
وهذه تكتب على الشكل الآتي:

$$Z=R+jX$$

حيث R هي مجموع الأجزاء الحقيقية في الممانعات أي $R=R_1+R_2+\dots+R_n$ ،
و X هي الرديّة، أي مجموع الأجزاء التخيلية في الممانعات أي:
 $X=X_1+X_2+\dots+X_n$. وهكذا نرى أن الممانعات الموصولة على التسلسل تكافئ
ممانعة وحيدة جزؤها الحقيقي يساوي مجموع الأجزاء الحقيقية في الممانعات،
وجزؤها التخيلي يساوي مجموع الأجزاء التخيلية في الممانعات. وبعد ذلك نتابع
الحل كما في الحالة (و).



(أ)



(ب)

الشكل 3-3

ط-حالة ممانعات موصولة على التفرع:

يبين الجزء (ب) من الشكل 3-3 دارة مؤلفة من عدد من الممانعات موصولة
على التفرع إلى منبع مشترك. بتطبيق قانون كرشوف في العقدة على إحدى
العقدتين نجد:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

يمكن حساب كل تيار على حدة إذا كتبنا:

$$I_1 = \frac{V}{Z_1}, I_2 = \frac{V}{Z_2}, \dots$$

ويصبح التيار الذي يعطيه المنبع:

$$I = \frac{V}{Z_1} + \frac{V}{Z_2} + \frac{V}{Z_3} + \dots + \frac{V}{Z_n}$$

$$= V \left[\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots + \frac{1}{Z_n} \right] = \frac{V}{Z}$$

حيث Z هي الممانعة المكافئة للممانعات n المعطاة، وبذلك يكون:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots + \frac{1}{Z_n} \quad (3 - 15)$$

يمكننا هنا أن نستعويض عن كل ممانعة Z بالقبولية $Y = \frac{1}{Z}$ فتكون القبولية

المكافئة:

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n \quad (3 - 16)$$

إن مفهوم القبولية مفيد عند التعامل مع دارات تفرعية . يمكن حساب قبولية كل

فرع من مركبتيه: ناقليته G وطواعيته B ، وتكتب على الشكل:

$$Y = G + jB$$

وإذا تذكرنا أن الممانعة تكتب على الشكل:

$$Z = R + jX$$

فبإمكاننا أن نجد العلاقة التي تعطي مركبات القبولية إذا عرفنا مركبات الممانعة،

والعكس صحيح. لنكتب:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R+jX} = \frac{R-jX}{R^2+X^2} = \frac{R}{|Z|^2} - j \frac{X}{|Z|^2}$$

ومنها نجد:

$$G = \frac{R}{|Z|^2} \quad , \quad B = \frac{-X}{|Z|^2} \quad (3 - 17)$$

وبسهولة نجد R و X بدلالة مركبات القبولية من كتابة: فنجد:

$$R = \frac{G}{|Y|^2} \quad , \quad X = \frac{-B}{|Y|^2} \quad (3 - 18)$$

3-3 القدرة في دارات التيار المتناوب

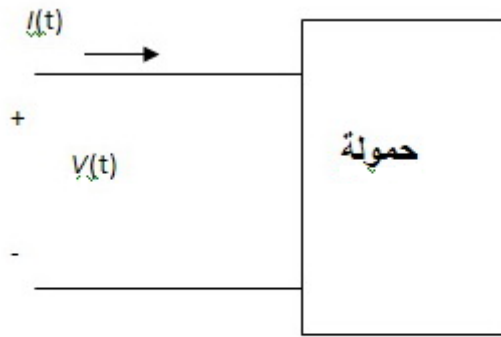
سندرس القدرة التي يمتصها عنصر دارة عام (أو حمولة)، يوجد بين طرفيه توتر جيبى معطى بالعلاقة:

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

ويتألف من مقاومة R وردية X ، يمكن أن تكون تحريضية أو وسعية كما في الشكل 3-4. في هذه الحالة سيكون التيار جيبياً أيضاً، له نفس التواتر ومن الشكل:

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

حيث φ_1 و φ_2 هما طوراً التوتر والتيار على الترتيب، و V_0 و I_0 يمثلان سعة (القيمة العظمى) التوتر والتيار على الترتيب



الشكل 4-3

3-3-1 القدرة الآنية:

تعطى القدرة التي يمتصها عنصر الدارة المذكور أعلاه بالعلاقة:

$$p(t) = v(t)i(t) = [V_0 \cos(\omega t + \varphi_1)][I_0 \cos(\omega t + \varphi_2)]$$

وباستعمال علاقة جداء جيبّيّ تمام في المثلاث وتطبيقها على المعادلة السابقة،

يمكن كتابة صيغة القدرة الآنية على الشكل التالي

$$p(t) = \frac{V_0 I_0}{2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{V_0 I_0}{2} \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) \quad (3-19)$$

تدل المعادلة (3-19) على أن القدرة الآنية هي مجموع مركبتين: مركبة ثابتة لا تتعلق بالزمن، هي الجزء الأول من الطرف الثاني في المعادلة (3-19)، ومركبة جيبية تواترها الزاوي ضعف التواتر الزاوي للتوتر والتيار، هي الجزء الثاني من الطرف الثاني في المعادلة السابقة.

جرت العادة أن نعبر عن قيم التيار والتوتر في دارات التيار المتناوب بقيمها المنتجة (rms)، وهي قيمة الجذر التربيعي لمتوسط مربع التيار أو التوتر الآنيين، لأنها القيم التي يعطيها مقياس الأمبير ومقياس الفلظ. ترتبط القيمة المنتجة بالقيمة العظمى بعلاقة من الشكل:

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad V = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \quad \text{القيمة المنتجة للتوتر}$$

إذا وضعنا في المعادلة (3-19) القيم المنتجة للتيار والتوتر بدلاً من القيم العظمى نحصل على المعادلة الآتية:

$$P(t) = VI \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + VI \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) \quad (3-20)$$

ملاحظة: يشار دائماً إلى التوترات والتيارات في دارات التيار المتناوب بقيمها المنتجة. وسنتبنى هنا هذا الإجراء ما لم يذكر خلاف ذلك. يفضل استعمال القيم المنتجة لدى التعبير عن المقادير الطورية. أما لدى التعبير عن الصيغ الزمنية للتيار أو التوتر فيحتفظ بالقيمة العظمى (السعة). وعلى سبيل المثال تدل الصيغة:

$$v(t) = 150 \cos 100t$$

على أن 150 هي القيمة العظمى. أما إذا أعطينا التيار بالصيغة العقدية الآتية:

$$I = (2.07 - j5.175)A$$

فإن القيمة المنتجة للتيار هي: $I = 3.94 A$ وصيغته الطورية هي:

$$I = 3.94 \angle - 68.20 A$$

وتكون صيغته الزمنية إذا كان موجة \cos كما يلي:

$$i(t) = \text{Re}[3.94\angle -68.20^\circ] = 5.57 \cos(100t - 68.20^\circ)$$

3-3-2 القدرة الوسطية:

تحسب القدرة الوسطية من العلاقة:

$$p = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \quad (3-21)$$

حيث $T = \frac{2\pi}{\omega}$. إذا عوضنا عن $P(t)$ الموجودة في المعادلة (3-21) بقيمتها من المعادلة (3-20) ثم أجرينا التكامل لوجدنا أن ناتج الحد الثاني معدوم؛ لأنه دالة جيبية، ونحن نعلم أن متوسط الدالة الجيبية في مجال يساوي الدور معدوم. أما نتيجة تكامل الحد الأول فتساوي: $VI \cos \varphi$ حيث $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ هو فرق الطور. وبذلك تكون القدرة الوسطية:

$$P = VI \cos \varphi \quad (3-22)$$

من أجل الحالة الخاصة حيث العنصر مقاومة صرفية، يكون فرق الطور φ معدوماً، وتصبح علاقة القدرة الوسطية:

$$P = VI = I^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (3-23)$$

وهي نتيجة معروفة.

أما من أجل ردية صرفية (تحريرية أو وسعية) فإن فرق الطور بين التوتر

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \mp 90^\circ \quad \text{والتيار هو:}$$

وبذلك تكون القدرة التي تمتصها ردية صرفية صفراً، مهما كان نوعها.

3-3-3 مفاهيم أساسية في القدرة

وجدنا أن القدرة الوسطى التي تمتصها الحمولة تعطى بالمعادلة (3-21) وهي تمثل الطاقة التي يمتصها الجزء المقاوم من الحمولة. أما إذا كانت الحمولة مقاومة صرفية فإن القدرة الوسطى تعطى بالعلاقة (3-23)، وتقدر بالواط (W).

وعليه، تدل المعادلتان السابقتان على أن القدرة الوسطى أصغر دوماً من الجداء VI . ندعو الجداء VI القدرة الظاهرية وتقدر باللفظ. أمبير (VA)، كي نميزها عن القدرة الوسطية (القدرة الحقيقية) التي تمتصها الحمولة. كما يدعى المقدر $\cos\varphi$ عامل القدرة، ونرمز له بالرمز η أو pf. وعلى هذا الأساس نعرف عامل القدرة كما يأتي:

$$\eta = \frac{\text{القدرة الوسطية}}{\text{القدرة الظاهرية}} = \frac{VI \cos \varphi}{V \times I} = \cos \varphi \quad (3 - 24)$$

وتدعى الزاوية φ بزاوية عامل القدرة، وهي تساوي زاوية الممانعة Z كما نرى:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V \angle \varphi_1}{I \angle \varphi_2} = \frac{V}{I} \angle (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{V}{I} \angle \varphi$$

وهكذا نرى أن زاوية عامل القدرة هي زاوية الممانعة.

ملاحظة: تشير العلاقة (3-24) إلى أن عامل القدرة هو $\cos\varphi$ ، وعلى الرغم من كونها صحيحة من أجل أمواج جيبية إلا أنها ليست تعريفاً لعامل القدرة. أما إذا لم تكن الأشكال الموجية للتوتر والتيار جيبية فليس لـ φ أي معنى، وعندئذ يعطى عامل القدرة من النسبة بين الجزء الحقيقي من الممانعة والممانعة ذاتها كالاتي:

$$\eta = \frac{R}{Z} \quad (3 - 25)$$

3-3-4 القدرة العقدية

لنعد إلى الشكل 3-4 حيث لدينا: $V = V \angle \varphi_1$ ، $I = I \angle \varphi_2$ ونعيد صياغة علاقة القدرة الوسطى بعد التعويض عن $\cos\varphi$ بالجزء الحقيقي من دالة أسية كالاتي:

$$\begin{aligned} p &= VI \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = VI \operatorname{Re}[e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}] \\ &= VI \operatorname{Re}[e^{j\varphi_1} \times e^{-j\varphi_2}] = \operatorname{Re}[VI e^{j\varphi_1} \times e^{-j\varphi_2}] \end{aligned}$$

$$= \text{Re}[(Ve^{j\phi_1})(Ie^{-j\phi_2})] = \text{Re}[(Ve^{j\phi_1}) \times (Ie^{j\phi_2})^*]$$

تشير النجمة إلى المرافق العقدي للمقدار بين قوسين. وهذا يعني أن القدرة الوسطى التي تمتصها حمولة يغذيها تيار متناوب تساوي الجزء الحقيقي من مقدار عقدي. يمكن إعادة كتابة المعادلة الأخيرة بعد ملاحظة أن:

$$I = Ie^{j\phi_2} \quad \text{و} \quad V = Ve^{j\phi_1}$$

$$P = \text{Re}[VI^*] \quad (3-26)$$

تشير المعادلة (3-26) إلى أن القدرة الوسطى التي تمتصها حمولة يمر فيها تيار متناوب I ويطبق عليها توتر V تساوي الجزء الحقيقي من جداء التوتر في المرافق العقدي للتيار.

إن المقدار العقدي الذي أشرنا إليه أعلاه هو القدرة العقدية التي سنرمز لها بالرمز S ، وتكتب على النحو الآتي:

$$S = V.I^* \quad (3-27)$$

وبالتعويض عن قيمتي I و V بما يساويهما نحصل على:

$$S = (Ve^{j\phi_1})(Ie^{-j\phi_2}) = VIe^{j(\phi_1-\phi_2)} = VIe^{j\phi} \quad (3-28)$$

وهكذا نرى إن قيمة القدرة العقدية S هي القدرة الظاهرية $V.I = |S|$ ، وزاوية القدرة العقدية هي زاوية عامل القدرة.

بتطبيق علاقة أولر على الطرف الأخير من المعادلة (3-28) يمكننا أن نكتب القدرة العقدية بالصيغة الديكارتية:

$$S = VI(\cos \phi + j \sin \phi) = VI \cos \phi + jVI \sin \phi$$

التي يمكن أن نكتب على النحو الآتي:

$$S = P + jQ \quad (3-29)$$

حيث $P = VI \cos \phi$ هي القدرة الوسطية التي تمتصها الحمولة، وتسمى أيضاً القدرة الحقيقية. أما الحد الثاني وهو $Q = VI \sin \phi$ فيسمى القدرة الرديية. وكما ذكرنا سابقاً، تقدر P بالواط (W) وتقدر Q بوحدة تسمى فلت أمبير ردي

(VAR) . وحدة القدرة العقدية هي الفلط أمبير (VA) مثل وحدة القدرة الظاهرية.

3-3 أمثلة محلولة

مثال 1-

يعطى التوتر الآني المطبق على دارة تسلسلية مؤلفة من مكثفة وملف بالعلاقة:
 $v(t) = 100 \sin 5000t$ فلط . إذا كان $C = 5 \mu F$ و $L = 12 \text{ mH}$ ومقاومة
 الملف $R = 15 \Omega$ ، احسب التيار الآني خلال الدارة، وكذلك التوترين الآنيين
 بين طرفي المكثفة والملف. احسب القدرة المتبددة في المقاومة.
 الحل:

لنحسب أولاً ردية المكثفة و ردية الملف ثم الممانعة Z والتيار فنجد:

$$Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega c})$$

$$\omega L = 5000 \times 12 \times 10^{-3} = 60 \Omega$$

$$\omega c = 5000 \times 5 \times 10^{-6} = 25 \times 10^{-3} S$$

$$\frac{1}{\omega c} = 40 \Omega$$

$$Z = 15 + j(60 - 40) = 15 + j20 = 25 \angle 53.1^\circ \Omega$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{100/\sqrt{2} \angle 0^\circ}{25 \angle 53.1^\circ} = 2.828 \angle -53.1^\circ A$$

وتكون الصيغة الآنية للتيار:

$$i(t) = 2.828\sqrt{2} \sin(5000t - 53.1^\circ) = 4 \sin(5000t - 53.1^\circ) A$$

التوتر بين طرفي المكثفة (صيغة الطورية V_c ، وصيغة الآنية $v_c(t)$):

$$V_c = \frac{I}{j \omega c} = \frac{2.82 \angle -53.1^\circ}{1 \angle 90^\circ \times 25 \times 10^{-3}} = (113.12 \angle -143.1^\circ) V$$

$$v_c(t) = 160 \sin(5000t - 143.1^\circ) = 160 \cos(5000t - 53.1^\circ) V$$

التوتر بين طرفي الملف (الصيغة الطورية):

$$V_L = (R + j\omega L)I = (15 + j60) \times 2.828 \angle -43.1^\circ$$

$$V_L = 61.85 \times 2.828 \angle (75.9 - 53.1)^\circ = 174.9 \angle 22.86^\circ V$$

التوتر الآني بين طرفي الملف: (الصيغة الآنية)

$$v_L(t) = 247.35 \sin(5000t + 22.8^\circ) V$$

القدرة المتبددة في المقاومة:

$$P = |I|^2 \times R = (2.828)^2 \times 15 = 120 W$$

مثال 2-

في دارة مكونة من مكثفة وملف مربوطين على التسلسل. يجري تيار قدره 2 A وتواتره 50 هرتز. إذا كان التوتر V المطبق بين طرفي الدارة يساوي 100 V والتوتر بين طرفي الملف $V_L = 150 V$ وبين طرفي المكثفة $V_C = 200 V$ ، احسب المقاومة الداخلية والتحريض الذاتي للملف وكذلك سعة المكثفة.

الحل

لدينا:

$$V_C = \frac{I}{\omega C} \quad \text{ومنها تجد سعة المكثفة:}$$

$$C = \frac{I}{\omega V_C} = \frac{2}{314 \times 200} = 31.85 \times 10^{-6} F = 31.85 \mu F$$

أما المقاومة الداخلية R والتحريضية الذاتية L للملف، فيحسبان من المعادلتين التاليتين:

$$V_L = (R + j\omega L)I \Rightarrow \frac{V_L^2}{I^2} = (R^2 + \omega^2 L^2) \quad \text{من أجل الملف لدينا:}$$

$$\frac{V^2}{I^2} = R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 \quad \text{ومن أجل الدارة ككل لدينا:}$$

ب طرح المعادلة الثانية من الأولى ثم التعويض وحل مجموعة المعادلتين نجد:

$$R = 36.3 \Omega \quad \text{و} \quad L = 209 \text{ mH}$$

مثال 3-

منبع توتر جيبي قيمته المنتجة 200 فلف وتواتره 50 هرتز. يغذي الفروع الثلاثة الآتية الموصولة على النفرع:

أ- الفرع الأول هو وشيعة تحريضيتها 0.03 H ومقاومتها الداخلية 3Ω .

ب- الفرع الثاني هو مكثفة سعتها $400 \mu F$ على التسلسل مع مقاومة 100Ω .

ج- الفرع الثالث وشيعة تحريضيتها 0.02 H ومقاومتها الداخلية 7Ω على التسلسل مع مكثفة سعتها $300 \mu F$. احسب التيار الكلي الذي يقدمه المنبع.

الحل

نحسب الممانعات الثلاث:

$$Z_1 = 3 + j 9.42 = 9.89 \angle 72.3^\circ \Omega$$

$$Z_2 = 100 - j 7.96 = 100.32 \angle -4.55^\circ$$

$$Z_3 = 7 + j 6.28 - j 10.61 = 7 - j 4.33 = 8.23 \angle -31.7^\circ A$$

نحسب بعد ذلك التيارات الفرعية:

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{200 \angle 0^\circ}{9.89 \angle 72.3^\circ} = 20.22 \angle -72.3^\circ A$$

$$I_2 = \frac{V}{Z_2} = \frac{200 \angle 0^\circ}{100.32 \angle -4.55^\circ} = 1.99 \angle 4.55^\circ A$$

$$I_3 = \frac{V}{Z_3} = \frac{200 \angle 0^\circ}{8.23 \angle -31.7^\circ} = 24.30 \angle 31.7^\circ A$$

ويكون التيار الكلي:

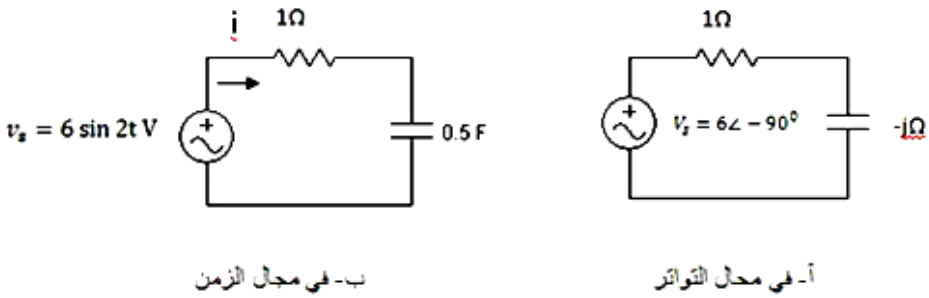
$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3 = 20.22 \cos(-72.3^\circ) + j 20.22 \sin(-72.3^\circ) + \\ &1.99 \cos(4.55^\circ) + j 1.99 \sin(4.55^\circ) + 24.30 \cos(31.7^\circ) + \\ &j 24.30 \sin(31.7^\circ) \\ &= 6.15 - j 19.28 + 1.98 + j 0.16 + 15.83 - j 14.2 \\ &= 23.96 - j 9.36 = 25.72 \angle -21.3^\circ A \end{aligned}$$

وهو التيار الكلي الذي يقدمه المنبع.

ملاحظة: كان من الممكن إيجاد الممانعة الكلية للدائرة ثم حساب التيار الكلي مباشرة، أو إيجاد القبولية الكلية ثم حساب التيار الكلي.

مثال 4-

لتكن الدارة الممثلة في نطاق التواتر في الجزء أ من الشكل 3-5 ، وفي نطاق الزمن في الجزء ب منه. احسب القدرة الوسطية التي تمتصها هذه الدارة.
الحل:



الشكل 3-5

نحسب أولاً التيار الجاري بالصيغة الطورية:

$$I = \frac{V_S}{Z} = \frac{6\angle -90^\circ}{1-j} = 3\angle -45^\circ$$

وعليه فالقيمة المنتجة لكل من التوتر والتيار هي:

$$I = 3\angle -45^\circ \text{ A}, \quad V = \frac{6}{\sqrt{2}}\angle -90^\circ \text{ V}$$

يمكن حساب القدرة الوسطية التي تمتصها الدارة التسلسلية RC بعدة طرق:
أ- من العلاقة:

$$P = VI \cos \varphi = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot 3 \cdot \cos(-90 + 45) = 9 \text{ W}$$

ب- لما كانت القدرة الوسطية هي القدرة التي تمتصها المقاومة، لذا يمكن حسابها من العلاقة:

$$P = I^2 R = 9 \cdot 1 = 9 \text{ W}$$

ج- يمكن أن نحسبها بأخذ الجزء الحقيقي من القدرة العقدية.

$$P = \text{Re}(V \cdot I^*) = \text{Re}\left(\frac{6}{\sqrt{2}} \angle -90\right) (3 \angle 45) = \text{Re}\left[\left(\frac{18}{\sqrt{2}}\right) \angle -45\right]$$

أي:

$$P = \text{Re}\left[\frac{18}{\sqrt{2}} \cos(45) + j \frac{18}{\sqrt{2}} \sin(-45)\right] = \text{Re}[9 - j9]$$

وأخيراً نجد $P = 9 \text{ W}$

3-4 التجاوب في الدارات RCL

3-4-1 التجاوب في الدارة RCL التسلسلية:

تحدث ظاهرة التجاوب في الدارات الكهربائية التي تحتوي على عناصر ذات رديّات تحريضية (محرضات) وعناصر أخرى ذات رديات وسعية (مكتفات)، وتعد كبيرة الأهمية في التطبيقات العملية. توصف ظاهرة التجاوب بأنها الشرط القائم في أية جملة فيزيائية (ميكانيكية أو صوتية أو كهربائية أو غير ذلك) كي تولد استجابة ذات سعة عظيمة؛ وذلك عندما يطبق عليها دالة قسر جيبيّة ذات سعة ثابتة ومن الشكل: $v(t) = V \cos \omega t$

نعرف التجاوب في دارة كهربائية مؤلفة من تحريضية واحدة ومكتفة واحدة على الأقل بأنه الحالة التي تغدو فيها ممانعتها مقاومة صرفية. ويحدث ذلك عندما يندم الجزء الردي من الممانعة، أي عندما تساوي الرديّة الوسيّة للمكتفة (وهي سالبة) رديّة الملف التحريضية (وهي موجبة). وفي هذه الحال يكون التيار والتوتر متفقين في الطور.

سنطبق شرط التجاوب على الدارة RCL التسلسلية المبينة في الشكل 3-1 .

تعطى ممانعة هذه الدارة بالعلاقة:

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (3-30)$$

بتطبيق شرط التجاوب المذكور أعلاه نحصل على العلاقة الآتية:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad (3-31)$$

يمكن تحقيق شرط التجاوب هذا بتغيير أحد العناصر الثلاثة L أو C أو ω مع إبقاء العنصرين الآخرين ثابتين. سوف نركز اهتمامنا في الوقت الحاضر على الحالة التي تكون فيها ω قابلة للتغيير بينما العنصران الآخران L و C ثابتان. وعليه يتحقق شرط التجاوب المعطى بالعلاقة (3-31) من أجل التواتر ω_0 بالعلاقة:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3-32)$$

تجدر الإشارة إلى أن تواتر التجاوب هذا هو التواتر الطبيعي للدارة RCL المعروف في الفصل الثاني بالعلاقة (2-32) لدى دراسة الاستجابة الطبيعية لهذه الدارة.

عندما تعمل الدارة في وضع التجاوب يتحقق ما يلي:

- 1- تكون الممانعة أصغرية وتساوي مقاومة صرفة $Z = R$.
- 2- يكون التيار أعظماً ويساوي $I_0 = \frac{V}{R}$.
- 3- ينعدم فرق الطور بين التوتر والتيار.
- 4- يكون التوتر بين طرفي التحريضية أكبر من التوتر المطبق ويعطى بالعلاقة:

$$V_{Lo} = \omega_0 L I_0 = \frac{\omega_0 L}{R} V$$

- 5- يكون التوتر بين طرفي المكثفة أكبر من التوتر الكلي المطبق ويساوي:

$$V_{Co} = \frac{I_0}{\omega_0 C} = \frac{1}{\omega_0 C R} V$$

- 6- يتساوى توتر التحريضية وتوتر المكثفة، أي: $V_{Lo} = V_{Co}$

- 7- تكون نسبة توتر المكثفة أو توتر التحريضية إلى التوتر المطبق أكبر من

الواحد. وتدعى هذه النسبة عامل تكبير الدارة، وتكتب على الشكل الآتي:

$$\text{عامل التكبير} = \frac{V_{Lo}}{V} = \frac{V_{Co}}{V} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} \quad (3-33)$$

يبين الجزء (أ) من الشكل 3-6 تغير كل من الرديّة التحريضية X_L والرديّة الوسعية X_C والممانعة Z بدلالة التواتر ω . كما يبين الجزء (ب) تغير طويلة التيار بدلالة التواتر من أجل قيم مختلفة للمقاومة. أما الجزء (ج) فيبين تغير فرق الطور بين التيار والتوتر بدلالة التواتر من أجل قيم مختلفة للمقاومة.

3-4-1-1 عامل الجودة للدائرة التسلسلية RCL

يبين الجزء (ب) من الشكل 3-6 كيف يتغير شكل منحنى التجاوب للدائرة التسلسلية RCL عندما تتغير قيمة المقاومة التسلسلية R . وتحدث أشد حدة للمنحنى عند القيم الصغيرة للمقاومة R . نعبر عن حدة المنحنى بمصطلح معروف يسمى عامل الجودة، ويرمز له بالرمز Q الذي يعرف عند تواتر التجاوب كما يأتي:

$$Q = 2\pi \times \frac{\text{الطاقة المخزونة العظمى}}{\text{الطاقة الكلية الضائعة في دور واحد}}$$

ولما كانت الطاقة تخزن في المكثفات والتحريضيات، فتكون الطاقة المخزونة : $[W_C(t) + W_L(t)]_{max}$. ولما كانت الطاقة تستهلك في المقاومات فالطاقة الضائعة في دور واحد هي $W_R = P_R T$. وبالتعويض في علاقة التعريف نجد:

$$Q = \frac{2\pi [W_C(t) + W_L(t)]_{max}}{P_R T}$$

وبإجراء الحسابات اللازمة نجد:

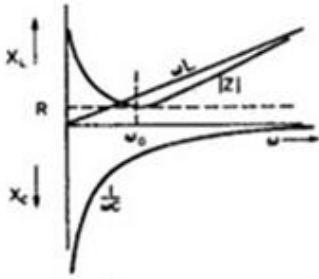
$$W_L = \frac{1}{2} L I^2, W_C = \frac{1}{2} C V_C^2 = \frac{1}{2} C \frac{I^2}{\omega^2 C^2} = \frac{I^2}{2\omega^2 C}, W_R = R I^2 \frac{2\pi}{\omega}$$

وبعد التعويض في العلاقة والتبسيط نجد:

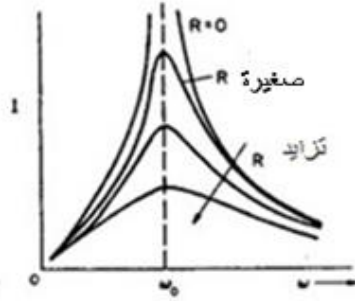
$$Q = \frac{\omega^2 cL + 1}{2\omega cR}$$

إذا أخذنا بالحسبان أن $\omega = \omega_0$ وكذلك $\omega_0^2 Lc = 1$ في وضع التجاوب، فإن العلاقة الأخيرة تصبح:

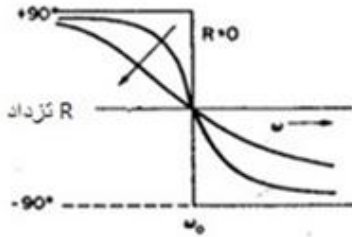
$$Q = \frac{\omega_0^2 cL + 1}{2\omega_0 cR} = \frac{1}{\omega_0 cR} = \frac{\omega_0 L}{R}$$



(أ) تحويلات X_L ، X_C و Z بدلالة ω



(ب) طولية التيار بدلالة التواتر ω



(ج) طور التيار بدلالة التواتر

الشكل 3-6 منحنيات التجاوب في الدار RCL التسلسلية

أي إن عامل جودة الدارة التسلسلية RCL في وضع التجاوب يعطى بالعلاقة:

$$Q = \frac{1}{\omega_0 cR} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (3-34)$$

بمقارنة العلاقة (3-34) بالعلاقة (3-33) نرى أن عامل التكبير للدارة التسلسلية RCL في وضع التجاوب يساوي عامل جودة هذه الدارة في وضع التجاوب.

وتشير العلاقة (3-34) إلى أن عامل الجودة Q يمكن تعريفه بأنه نسبة الرديية إلى المقاومة.

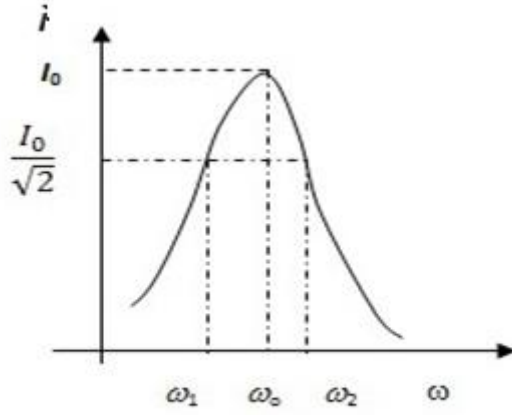
3-4-1-2 العرض العصابي

بالرجوع إلى الجزء (ب) من الشكل 3-6، الذي يسمى منحنى التجاوب للدارة التسلسلية RCL ، نلاحظ أن شدة الإشارة التي تمررها الدارة تختلف باختلاف تواترها، وتكون عظمى عند تواتر التجاوب ω_0 ، ثم تتناقص وتصبح ضعيفة حتى تتلاشى من أجل تواترات أصغر أو أكبر من تواتر التجاوب. كما يبين أيضاً أثر تغير قيمة المقاومة التسلسلية R على حدة منحنى تجاوب الدارة. ولكي يستفاد عملياً من ظاهرة التجاوب هذه ينبغي تحديد حزمة أو عصابة من التواترات تكون استجابة الدارة لإشارة تحمل هذه التواترات ذات شدة معقولة. وقد اصطلح على أن التواترين ω_1 و ω_2 ، الواقعين على يسار ويمين تواتر التجاوب ω_0 والموافقين لنصف القدرة، يحددان هذه الحزمة من التواترات التي تكون الاستجابة من أجلها معتبرة. يسمى عرض هذه الحزمة العرض العصابي

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

أو عرض العصابة النافذة $\Delta\omega$ ، ونكتب:

نعرف العرض العصابي لدارة التجاوب التسلسلية RCL بأنه مجال من التواترات تكون الاستجابة ضمنه أكبر من أو مساوية لنصف القدرة. وبدلالة التيار فهي توافق قيمة للتيار أكبر من أو مساوية $\frac{1}{\sqrt{2}}$ من قيمة التيار عند التجاوب، كما هو مبين في الشكل 3-7. يعين هذان التواتران الحدين الأدنى ω_1 والأعلى ω_2 لهذا المجال من التواترات بحيث يكون أحدهما فوق تواتر التجاوب والآخر تحته. ويسمى هذان التواتران بتواتري نصف القدرة.



الشكل 7-3

نعين تواتري نصف القدرة بمساواة نصف القدرة العظمى في وضع التجاوب مع القدرة عند تواتر ما ω . تعطى نصف القدرة العظمى في وضع التجاوب بالعلاقة:

$$\text{نصف القدرة العظمى} = \frac{1}{2} I_0^2 R = \frac{1}{2} \frac{V^2}{R^2} R = \frac{1}{2} \frac{V^2}{R}$$

ونحسب القدرة عند التواتر ω من العلاقة الآتية:

$$P = I^2 R = \frac{V^2 R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}$$

بمساواة هاتين المعادلتين وتبسيط العلاقة الناتجة نحصل على المعادلة الآتية:

$$\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{R\omega c}\right)^2 = 1 \quad (3-35)$$

في وضع التجاوب تتحقق العلاقات الآتية:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 c} \quad , \quad \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 c R} = Q$$

بضم هذه العلاقات إلى العلاقة (3-35) وأخذ الجذر التربيعي نحصل على المعادلة الآتية:

$$Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \pm 1 \quad (3-36)$$

من أجل الإشارة (+) نحصل على المعادلة من الدرجة الثانية الآتية:

$$Q\omega^2 - \omega_0\omega - Q\omega_0^2 = 0$$

وجذرا هذه المعادلة هما:

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}$$

إشارة السالب مرفوضة لأنها تعطي تواتراً سالباً، وعليه يكون:

$$\omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \quad (3-37)$$

أما من أجل الإشارة (-) في المعادلة (3-36) فتعطي المعادلة من الدرجة الثانية الآتية:

$$Q\omega^2 + \omega_0\omega - Q\omega_0^2 = 0$$

وجذراها:

$$\omega_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}$$

وهنا أيضاً تكون إشارة (-) مرفوضة للسبب نفسه. وعليه فالتواتر الذي يحقق المعادلة هو:

$$\omega_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \quad (3-38)$$

وبذلك يكون العرض العصابي :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \quad (3-39)$$

وهو يمثل عرض حزمة تواترات الإشارات التي تمررها الدارة بشدات لا تقل عن 0.707 من الشدة العظمى. أما العرض النسبي لهذه العصابة فهو:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} = \text{العرض النسبي للعصابة} \quad (3-40)$$

ملاحظة: إذا حسبنا الجداء ω_1, ω_2 فإننا نجد أنه يساوي ω_0^2 أي:

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = \omega_0^2$$

وهذا يعني أن تواتر التجاوب هو الوسط الهندسي لتواتري حدي العصابة.

3-1-4-3 القيم العظمى للتوتر في الدارة RCL التسلسلية:

آ-التوتر بين طرفي المقاومة:

يكون التيار أعظماً في وضع التجاوب ويساوي $I_0 = \frac{V}{R}$ وعليه فأعظم قيمة للتوتر بين طرفي المقاومة هي $V_R = I_0 R = V$ ، أي التوتر الكلي الذي يعطيه المنبع.

ب-التوتر بين طرفي التحريضية:

نحسب قيمة V_L من العلاقة:

$$\text{أو: } V_L = I\omega L = \frac{V\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

$$V_L^2 = \frac{V^2}{(R^2/\omega^2 L^2) + [1 - (1/\omega^2 LC)]^2} \quad (3-41)$$

بوضع: $\omega_0 LC = 1$ و $\alpha = \frac{\omega}{\omega_0}$ و $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR}$

حيث ω_0 تواتر التجاوب، تصبح العلاقة (3-41):

$$V_L^2 = \frac{V^2}{\left(\frac{1}{\alpha^2 Q^2}\right) + \left[1 - \left(1/\alpha^2\right)\right]^2} \quad (3-42)$$

ولكي يكون V_L أعظماً يجب أن ينعدم مشتق المخرج في المعادلة (3-42) بالنسبة لـ α ، أي يجب أن يكون:

$$\frac{d}{d\alpha} \left[\left(\frac{1}{\alpha^2 Q^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)^2 \right] = 0$$

وبإجراء عملية الاشتقاق ومساواة النتيجة إلى الصفر نجد:

$$\text{أو: } \alpha = \frac{\omega L}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

$$\omega_L = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \quad (3 - 43)$$

وبتعويض قيمة α هذه في المعادلة (3-42) نحصل على القيمة العظمى للتوتر V_{Lmax} بين طرفي الملف بالعلاقة التالية:

$$V_{Lmax} = \frac{QV}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad (3 - 44)$$

تشير المعادلتان (3-43) و(3-44) إلى أن V_L تبلغ قيمة عظمى V_{Lmax} عند تواتر أعلى من تواتر التجاوب وأن هذه القيمة أكبر من قيمتها V_{L0} عند التجاوب وذلك من أجل قيم صغيرة لعامل الجودة Q ($Q < 5$)، انظر الشكل 3-8 .

ج-التوتر بين طرفي المكثفة:

نحسب قيمة V_C من العلاقة:

$$V_C = \frac{I}{\omega C} = \frac{V}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

$$V_C^2 = \frac{V^2}{\omega^2 C^2 R^2 + (\omega^2 L C - 1)^2} = \frac{V^2}{(\frac{\alpha}{Q})^2 + (\alpha^2 - 1)^2}$$

نتابع العمل كما في الحالة السابقة، فنجد أن V_C تبلغ قيمة عظمى عند التواتر:

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (3 - 45)$$

وتعطي هذه القيمة العظمى بالعلاقة:

$$V_{Cmax} = \frac{QV}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad (3 - 46)$$

تشير المعادلتان (4-45) و (4-46) إلى أن التواتر الذي تصبح V_C عنده عظمى اصغر من تواتر التجاوب، وأن قيمته أكبر من قيمة V_{C0} من أجل قيم صغيرة لعامل الجودة ($Q < 5$) .

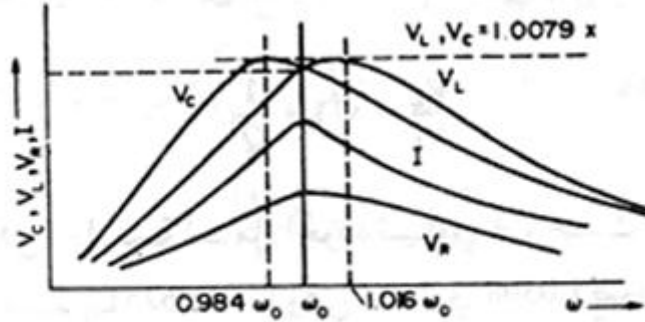
فمن أجل عامل جودة $Q=4$ مثلاً، نجد أن التواتر ω_L الذي تكون V_L عنده عظمى هو :

$$\omega_L = 1.016\omega_0$$

كما أن القيمة العظمى لتوتر المكثفة تحدث عند التواتر: $\omega_C = 0.984\omega_0$

أما القيمة العظمى لكل من التوترين فهي: $V_{Lmax} = V_{Cmax} = 1.0079V$

بين الشكل 8-3 المنحنيات التي تمثل التوترات الثلاثة V_C و V_L و V_R بدلالة التواتر ω .



الشكل 8-3

3-4-2 التجاوب في الدارة التفرعية RCL :

تعرف هذه الدارة باسم الدارة التفرعية النظرية. نعرّف شرط التجاوب هنا بالطريقة نفسها التي عرّفناه بها في حالة الدارة التسلسلية، أي هو الشرط الذي تصبح فيه الممانعة الكلية للدارة مقاومة صرفة. وهذا يعني أن يندمج الجزء التخيلي من الممانعة (أي الرديّة). ولما كنا نتعامل مع القبوليات في الدارات التفرعية بدلاً من الممانعات، فإننا نقول: الشرط هو أن تكون القبولية ناقلية صرفة، أو أن يندمج الجزء التخيلي من القبولية (أي الطواعية).

سندرس الآن حالة التجاوب في الدارة التفرعية المبينة في الشكل 3-2 ، حيث الدارة مكونة من ثلاثة فروع وفي كل فرع منها عنصر صرف: مقاومة R ومكثفة C وتحريضية L .

قبولية الدارة هي:

$$Y = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

وشرط التجاوب هو أن يكون:

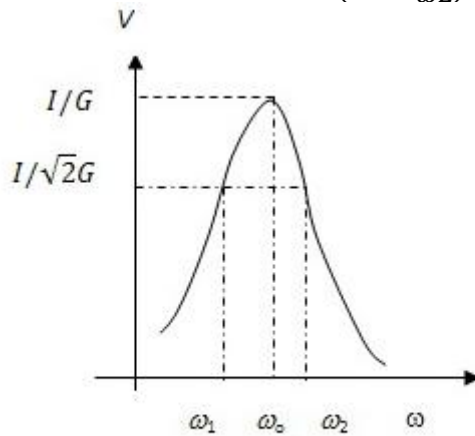
$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

وهذه المعادلة تتحقق عند تواتر ω_0 معطى بالعلاقة:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3-47)$$

وهو شرط التجاوب نفسه في الدارة التسلسلية والذي تعطيه المعادلة (3-34) . وعليه فإن تواتر التجاوب في هذه الحالة يساوي تواتر التجاوب عند وصل العناصر الثلاثة نفسها R و C و L على التسلسل. يعطى التوتر بين طرفي المقاومة بالعلاقة:

$$V = \frac{I}{Y} = \frac{I}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$



الشكل 9-3

يبين الشكل 3-9 تغيرات هذا التوتر بدلالة التواتر ω ، وتكون قيمته عظمى عند تواتر التجاوب ω_0 ؛ لأن قبولية الدارة في هذا الوضع تكون صغرى وتساوي الناقلية G ، وعندها يكون التوتر بين طرفيها أعظماً ويساوي $V = \frac{I}{Y} = \frac{I}{G}$ حيث I هو التيار الذي يعطيه منبع التيار الذي يغذي الدارة. وفي هذه الحالة يكون التيار الذي يمر في التحريضية مساوياً للتيار الذي يمر في المكثفة ويعاكسه في الطور؛ وبالتالي يكون مجموعهما صفراً، لكن كل واحد منهما أكبر من التيار الكلي I . وتكون النتيجة أن التيار الكلي I الذي يعطيه المنبع يمر كله في المقاومة. إن قيمة التوتر بين طرفي كل من التحريضية والمكثفة والمقاومة واحد في وضع التجاوب وعليه نكتب:

$$V_{Lo} = I_{Lo}\omega_0 L = V_{Co} = \frac{I_{Co}}{\omega_0 C} = \frac{I}{G}$$

تشير هذه العلاقات بوضوح إلى أن التيارين I_{Co} و I_{Lo} متساويان وكل منهما أكبر من التيار المطبق I . نحسب النسبة بين كل من هذين التيارين والتيار الكلي فنجد:

$$\frac{I_{Lo}}{I} = \frac{1}{\omega_0 LG} \quad , \quad \frac{I_{Co}}{I} = \frac{\omega_0 C}{G}$$

نسمي هذه النسبة عامل الجودة للدارة التفرعية ونكتب:

$$Q = \frac{1}{\omega_0 LG} = \frac{\omega_0 C}{G} \quad (3-48)$$

تدل المعادلة (3-48) على أن عامل الجودة للدارة RCL التفرعية هو نسبة الطواعية إلى الناقلية.

من المفيد أن نذكر هنا بما دعوناه المثوية في الدارات الكهربائية في الملاحظة التي أوردناها في الفصل الأول عند الكلام على تحليل دارة تسلسلية وأخرى تفرعية، تحتوي الأولى على مقاومات ومنابع توتر وتحتوي الثانية على ناقلات ومنابع تيار، وقلنا عن الدارتين أنهما دارتان مثويتان. إن أي نتيجة نحصل عليها بدلالة التيار والتوتر والمقاومة في دارة تسلسلية سيكون لها نظراًؤها

المماثلة لها بدلالة التوتر والتيار والناقلية من أجل الدارة التفرعية الثنائية المقابلة لها.

لو طبقنا مبدأ المثوية على الدارة التفرعية بعد دراستنا للدارة التسلسلية لحصلنا على النتائج نفسها التي توصلنا إليها أعلاه إذا استبدلنا كلاً من: المقاومة R والسعة C والتحريضية L والتوتر V والتيار I ومنبع التوتر V_s والممانعة Z في الدارة التسلسلية، بما يقابلها في الدارة التفرعية وهي: الناقلية G والتحريضية L والسعة C والتيار I والتوتر V ومنبع التيار I_s والقبولية Y على الترتيب . يمكن التحقق من ذلك بإعادة الحصول على العلاقة (3-48) التي تعطي عامل الجودة للدارة التسلسلية. أما بالنسبة للعرض العصابي للدارة التفرعية فيعطى بالعلاقات نفسها التي تعطي العرض العصابي للدارة التسلسلية وهي المعادلات (3-37) و (3-38) و (3-39) ، على أن يؤخذ عامل الجودة هنا عامل الجودة للدارة التفرعية، وهو الذي تعطيه المعادلة (3-48). وهو يمثل في الدارة التفرعية حزمة التواترات التي لا تمر من الدارة إلا بشدات أقل من $\frac{1}{\sqrt{2}}$ من الشدات الواردة.

مثال 5-

لدينا في دارة الشكل 3-1:

$$R = \frac{5}{3} \Omega , L = 5H , C = \frac{1}{25} F . \text{ ويغذيها منبع توتر متناوب}$$

$$\text{يعطى بالعلاقة } v_s(t) = 17 \cos 3t \text{ V . والمطلوب:}$$

- 1- أوجد التيار $i(t)$ في نطاق الزمن. 2- أوجد $v_c(t)$ في نطاق الزمن .
- 3- احسب تواتر التجاوب لهذه الدارة. 4- احسب عامل جودة هذه الدارة.
- 5- احسب العرض العصابي $\Delta \omega$. 6- عين تواتري نصف القدرة. 7- احسب التيار في وضع التجاوب. 8- احسب توتر المكثفة في وضع التجاوب.

الحل:

1- نحسب التيار I من العلاقة:

$$I = \frac{V_S}{Z} = \frac{V_S \angle \varphi}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

نكتب توتر المنبع بالصيغة الطورية على الشكل $V_S = \frac{17}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ$ V وبإجراء الحساب على الممانعة نجد $Z = 6.87 \angle 76^\circ \Omega$. نعوض في معادلة التيار فنجد:

$$I = \frac{V_S}{Z} = \frac{12 \angle 0^\circ}{6.87 \angle 76^\circ} = 1.74 \angle -76^\circ \text{ A}$$

أما صيغة التيار في نطاق الزمن فنكتبها على النحو التالي:

$$i(t) = 2.47 \cos(3t - 76^\circ) \text{ A}$$

2- نعين V_C من العلاقة:

$$V_C = \frac{I}{j\omega C} = \frac{1.74 \angle -76^\circ}{\frac{3}{25} \angle 90^\circ} = 14.57 \angle -166^\circ \text{ V}$$

وفي نطاق الزمن :

$$v_C = 20.6 \cos(3t - 166^\circ) \text{ V}$$

3- نعين تواتر التجاوب من العلاقة: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2.23 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

4- عامل الجودة : $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = 6.69$

5- العرض العصابي:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} = 0.334 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

6- تواترا نصف القدرة:

$$\omega_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} = 2.082 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} = 2.415 \text{ rad/s}$$

7- التيار في وضع التجاوب:

$$I_0 = \frac{V_s}{R} = \frac{17}{5/3} = 10.2 \text{ A}$$

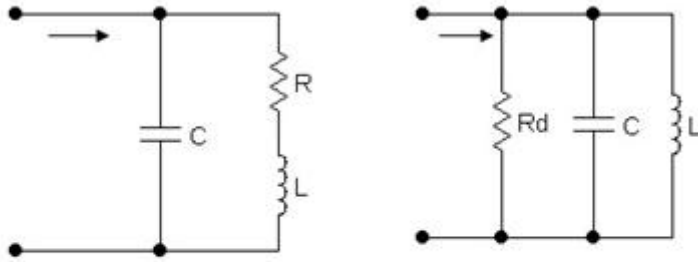
والقيمة المنتجة للتيار في وضع التجاوب هي: $\frac{10.2}{\sqrt{2}} = 7.18 \text{ A}$

8- القيمة المنتجة لتوتر المكثفة في وضع التجاوب:

$$V_{Co} = \frac{I_o}{\omega_o C} = \frac{7.18}{0.089} = 80.49 \text{ V}$$

3-4-3 التجاوب في الدارة التفرعية العملية:

الدارة التفرعية التي درسناها حتى الآن هي دارة نظرية، بمعنى أن عناصرها المكونة لها بسيطة، ولا يوجد أكثر من عنصر واحد في الفرع الواحد. سندرس الآن دارة تفرعية تعد من أكثر دارات التجاوب التفرعي من حيث قربها من الواقع. تلك هي الدارة المبينة في الجزء (أ) من الشكل 3-10، ولا تختلف عن الدارة السابقة إلا بوجود مقاومة في فرع التحريضية، وهذا أمر طبيعي لأن لكل تحريضية مقاومة لا يمكن إهمالها.



(أ) الدارة العملية

(ب) الدارة المكافئة

الشكل 3-10

آ- تعيين تواتر التجاوب: لنحسب أولاً قبولية الدارة Y :

$$Y = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \left(\frac{-\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} + \omega C \right)$$

يحدث التجاوب عندما يندم الجزء التخيلي من القبولية، أي:

$$\text{أو: } \frac{-\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} + \omega C = 0$$

$$\omega_r^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \quad (3-49)$$

من هذه العلاقة نجد أن تواتر التجاوب ω يعطى بالعلاقة:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \quad (3-50)$$

تشير العلاقة (3-50) إلى أن تواتر التجاوب للدارة التفرعية العملية ω_r يختلف قليلاً عن تواتر التجاوب ω_0 المقابل للدارة التسلسلية أو التفرعية المكونة من هذه العناصر الثلاثة، وهو أصغر قليلاً منه.

ب- الممانعة التحريكية في وضع التجاوب:

عند تواتر التجاوب تكون القبولية ناقلية صرفة G ، نحصل عليها من تعويض ω في معادلة القبولية بقيمتها من المعادلة (3-50) فنجد:

$$G = \frac{CR}{L} \quad (3-51)$$

أي إن الدارة تسلك سلوك مقاومة صرفة في حالة التجاوب، قيمتها:

$$R_d = \frac{L}{CR} \quad (3-52)$$

تدعى المقاومة R_d الممانعة التحريكية للدارة. يمكننا الآن أن نكافئ الدارة العملية بدارة تفرعية نظرية عناصرها هي: L و C و R_d ، كما في الجزء (ب) من الشكل 3-10.

ج- عامل الجودة في وضع التجاوب:

إذا عرفنا Q بالطريقة نفسها التي عرّفنا بها في الدارة التفرعية النظرية، نجد:

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \omega_0 C R_d = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (3-53)$$

يمكن إعادة كتابة المعادلة (3-50) في ضوء المعادلة (3-53) والعلاقة (3-47)

التي تعرّف تواتر التجاوب ω_0 للدارة النظرية، فنحصل على المعادلة التالية:

$$\text{أو: } \omega_r^2 = \frac{1}{LC} \left(1 - \frac{1}{Q^2}\right)$$

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}} \quad (3 - 54)$$

وكذلك:

$$R_d = Q^2 R \quad (3 - 55)$$

وهكذا نرى أنه إذا كان عامل جودة الدارة كبيراً يصبح تواتر التجاوب التفرعي للدارة العملية قريباً جداً من تواتر تجاوب الدارة النظرية، كما أن R_d يمكن أن تبلغ قيمة عالية جداً.

مثال 6-

تعطى قيم العناصر في الدارة العملية المبينة في الجزء (أ) من الشكل 3-10 كما يلي: $R = 10 \Omega$ ، $C = 500 \text{pF}$ ، $L = 50.7 \mu\text{H}$. والمطلوب: 1- تعيين تواتر التجاوب، 2- حساب عامل جودة الدارة. 3- حساب الممانعة التحريكية لهذه الدارة.

الحل:

1- نحسب تواتر التجاوب من العلاقة (3-50) . لكننا نلاحظ أن الحد الثاني تحت الجذر أصغر كثيراً من الحد الأول، أي إننا نستطيع ان نكتب بتقريب جيد جداً أن $\omega_r = \omega_0$. وعليه:

$$\omega_r \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 6.281 \times 10^6 \text{rad/s}$$

وتواتر التجاوب هو: $f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = 9.996 \times 10^5 \text{Hz} \approx 10 \text{MHz}$

2- عامل الجودة: من العلاقة (3-53) نجد: $Q = 31.84$

3- الممانعة التحريكية: من العلاقة (3-55) نجد: $R_d = 10.14 \text{k}\Omega$.

مسائل على الفصل الثالث

3-1 يطبق توتر قدره $V = (200+j100) V$ على دارة ممانعتها $Z=(10+j10) \Omega$. آ- احسب التيار كمقدار طوري في نطاق التواتر، ب- احسب القدرة الممتصة، ج- احسب عامل القدرة.

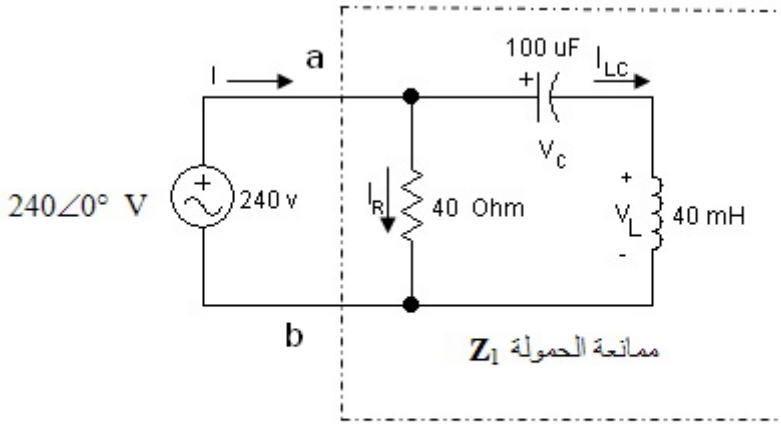
3-2 وشيعة ذات تحريضية ومقاومة داخلية موصولة على التسلسل مع مقاومة صرفة إلى منبع توتر قيمته $V \angle 0^\circ 100$ وتواتره الزاوي $\omega = 300 \text{ rad/s}$ ، ويعطي تياراً قدره $I = 2 \text{ A}$. إذا كان التوتر بين طرفي الوشيعة $V_1 = 80 \text{ V}$ وبين طرفي المقاومة $V_2 = 50 \text{ V}$ ، احسب: آ- تحريضية الوشيعة، ب- المقاومة الداخلية للوشيعة، ج- المقاومة الموصولة على التسلسل، د- القدرة المتبددة في الوشيعة، هـ- القدرة الكلية الممتصة، و- عامل القدرة الكلي.

3-3 توتر معطى بالعلاقة: $v(t) = 400 \cos 1000t \text{ V}$ ، يطبق على دارة، فيؤدي إلى تيار من الشكل: $i(t) = 8 \cos \left(1000t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ A}$. احسب مقاومة الدارة ورددتها، والقدرة المتبددة، وعامل القدرة.

3-4 مقاومة ووشيعة ومكثفة موصولة على التسلسل لتشكل دارة يغذيها منبع تيار قيمته 0.4 A . قيست التوترات بين العناصر فكانت على التوالي: 30 فلط (للمقاومة)، 50 فلط (للوشيعة) و 70 فلط (للمكثفة)، بينما كان التوتر بين طرفي الوشيعة والمقاومة معاً 60 فلط. آ- احسب قيم كل العناصر، ب- احسب القدرة وعامل القدرة، ج- احسب زاوية طور الوشيعة، د- احسب توتر المنبع. افرض أن $f = 80 \text{ Hz}$.

3-5 أوجد التركيب التسلسلي لمكثفة سعتها C موصولة على التفرع مع مقاومة R . تطبيق: $C=1000 \text{ pF}$ و $R = 200 \text{ k}\Omega$. أجز الحساب من أجل الحالتين الآتيتين: $f_1 = 1 \text{ kHz}$ و $f_2 = 10 \text{ MHz}$.

6-3 دائرة الشكل م 3-1 مؤلفة من منبع توتر، قيمته الطورية $V = 240\angle 0^\circ$ وتواتره الزاوي $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ ، وحمولة مكونة من العناصر الموجودة إلى يمين النقطتين a و b. احسب: آ-ممانعة الحمولة Z_1 التي تري من النقطتين a و b، ب-التيار الجاري في المنبع، ج-القدرة العقدية، د-القدرة الحقيقية، هـ-عامل القدرة.



الشكل م 3-1

7-3 ثلاث ممانعات:

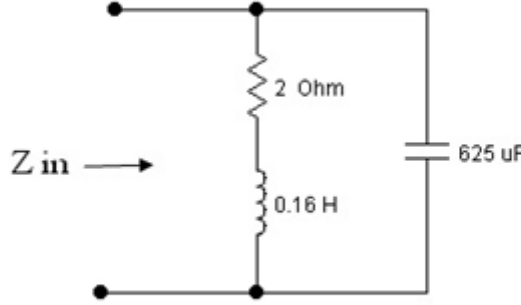
$$Z_3 = 12\angle 50^\circ \Omega, Z_2 = 10\angle -40^\circ \Omega, Z_1 = 8\angle 30^\circ \Omega$$

موصولة على التسلسل بين طرفي منبع توتر $V=100\text{v}$ $0^\circ\angle$. احسب التوتر المتشكل بين طرفي كل ممانعة والقدرة الكلية التي يقدمها المنبع.

8-3 لتكن الشبكة المبينة في الشكل م 3-2، آ-استخرج صيغة الممانعة Z_{in} لها بدلالة التواتر الزاوي ω . ب-استعمل تعريف التجاوب لإيجاد تواتر التجاوب ω_0 . ج-احسب قيمة Z_{in} في وضع التجاوب.

9-3 وشيعة ممانعتها 25Ω ومقاومتها 15Ω ، وصلت على التفرع مع مقاومة عديمة التحريض قيمتها 10Ω . احسب القبولية الكلية ثم الناقلية والطواعية

للتركيب الجديد.



الشكل م 2-3

3-10 وشيعة تحريضيتها $50 \mu\text{H}$ موصولة إلى مكثفة على التسلسل فيحدث التجاوب في الدارة عند التواتر 1000 kHz ، وبعرض عصابي يوافق نقطتي نصف القدرة ويساوي 20 kHz . احسب السعة اللازمة وعامل الجودة Q للوشيعة. عين تواتري نقطتي نصف القدرة. افرض أن المكثفة عديمة الضياع.

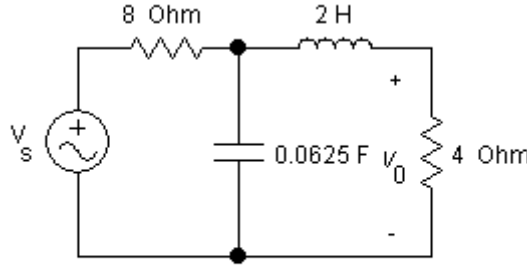
3-11 وشيعة تحريضيتها 120 mH ، وعامل جودتها 8 ، موصولة على التفرع إلى مكثفة سعتها $60 \mu\text{F}$. يغذي هذا التركيب منبع تغذية ثابت التوتر ومتغير التواتر. احسب تواتر التجاوب، والممانعة التحريكية R_D لهذه الدارة في وضع التجاوب.

3-12 دارة تجاوب تسلسلية مكونة من مقاومة $R = 16$ ، ومكثفة سعتها $C = 1 \mu\text{F}$ ، ومحرضة تحريضيتها L ، إذا كان العرض العصابي 500 rad/s . أوجد: أ- تواتر التجاوب ω_0 ، ب- عامل الجودة في وضع التجاوب Q_0 ، ج- قيمة التحريضية L .

3-13 أحكمت دارة كهربائية على موجة طولها 500 m . إذا كانت تحريضيتها $L = 150 \text{ mH}$ ومقاومتها الأومية $R = 5 \Omega$ ، احسب العرض العصابي لهذه الدارة.

3-14 دائرة RCL تسلسلية يغذيها منبع توتر متناوب يعطي توتراً قيمته المنتجة 100 V وله مقاومة داخلية $R = 1\Omega$. فإذا كانت سعة المكثفة $1\mu\text{F}$ وكانت تحريضية الوشيعية 2.53 H ومقاومتها الداخلية 30.8Ω ، احسب في وضع التجاوب كلاً من: آ- عامل جودة الدارة Q. ب- قيمة التيار الجاري في الدارة. ج- قيمتي V_C و V_L بين طرفي الوشيعية والمكثفة على الترتيب.

3-15 لتكن الدارة المبينة في الشكل م-3-3، حيث v_s معطاة بالعلاقة:
 $v_s = 4 \cos(4t - 60^\circ)\text{V}$. آ- احسب القدرة الوسطية التي يمتصها كل عنصر من عناصر دائرة الشكل.

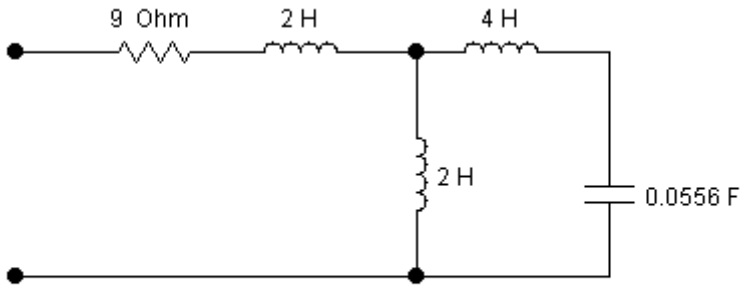


الشكل م 3-3

3-16 مقاومة قيمتها $R=10\Omega$ موصولة على التسلسل مع محرضة تحريضيته $L=2\text{ H}$. بفرض أن $\omega = 50\text{ rad/s}$ ، والمطلوب: آ- احسب عامل الجودة لهذه التركيبية، ب- أوجد التركيبية RL الموصولة على التوازي المكافئة للتركيبية التسلسلية عند نفس التواتر، ج- احسب عامل جودة هذه التركيبية.

3-17 وشيعية تحريضيته 10 mH ومقاومتها الداخلية 3.14Ω ، آ- احسب عامل الجودة لهذه الوشيعية عند تواتر قدره $f = 1000\text{ Hz}$. ب- نصل طرفي الوشيعية إلى مقاومة $R = 1\text{ k}\Omega$ ، حول هذا التركيب إلى تركيب مكافئ له مكون من عنصرين بسيطين موصولين على التفرع مستخدماً التقريب المناسب عند التواتر المذكور في الطلب آ.

3-18 احسب تواتر التجاوب للدارة المبينة في الشكل م 3-4. احسب أيضاً عامل جودتها في وضع التجاوب.



الشكل م 3-4

الفصل الرابع

طرق تحليل الدارات الكهربائية في الحالة الجيبية المستقرة

4-1 مقدمة

تدعى العملية التي يتم بها تعيين قيمة متحول ما (التوتر أو التيار) في دارة كهربائية تحليل الدارة الكهربائية. ونحن، حتى الآن، كنا نحل الدارات غير المعقدة جداً، وكنا نلجأ في ذلك إلى استعمال قوانين أوم أو قوانين كرشوف في العقدة أو العروة، أو نلجأ إلى وسائل أخرى كاستعمال قوانين تجزئة التوتر أو تجزئة التيار. ولكن توجد دارات معقدة لا تكون فيها تلك القوانين مناسبة للحل. إن الخطوة الأولى في تحليل دارة ما بطريقة تحليلية هي تشكيل معادلة أو مجموعة معادلات تمثل جريان التيار وتوزع التوترات فيها.

يمكننا استعمال عدد من الطرق للقيام بهذه المهمة. إحدى هذه الطرق تعطي مجموعة من المعادلات الأنوية تكون المتحولات فيها هي توترات العقد، ويعرف هذا بالتحليل العُقدي nodal analysis. وفي طريقة أخرى نكتب جملة من المعادلات الأنوية تكون المتحولات فيها هي التيارات العروية، بدلاً من تيارات الفروع، ويعرف هذا بالتحليل العرووي mesh analysis. ورغم أن التحليل العقدي يمكن أن يستعمل في كل الدارات، لكن هذا لا ينطبق على التحليل العرووي. فهناك صنف من الدارات يعرف باسم الشبكات اللامستوية nonplanar networks لا يمكن التعامل معها بالتحليل العرووي. نطلق على الدارة اسم دارة مستوية إذا أمكن رسم مخططها على سطح مستوي بصورة لا يمر أي فرع منها من فوق أو من تحت أي فرع آخر؛ وكل دارة لاتحقق هذا الشرط هي دارة لامستوية. على كل حال، توجد طريقة مماثلة، تعرف باسم التحليل الحلقي loop analysis، يمكن استعمالها لحل الدارات

اللامستوية، ونحن هنا نكتفي بالإشارة إليها دون الخوض في تفاصيلها. وفي هذه الطريقة تكون المتحولات أيضاً هي التيارات العروية. ومن المفيد هنا أن نشير إلى الفرق بين معنى الكلمتين: العروة mesh والحلقة loop . فالعروة هي العنصر الأساسي المكون للحلقة، فهي حلقة مؤلفة من عروة واحدة فقط. أما الحلقة فتتألف من عروة واحدة أو أكثر.

إلا أنه من الممكن، في حالات أخرى، تبسيط الدارة واختصار العمل بتطبيق طرق نظامية للحل يمكن تلخيصها في مجموعة من القواعد التطبيقية نطلق عليها اسم نظريات الشبكة التي سنستعرض بعضاً منها في الفصل الخامس. ورغم أن بعض الدارات التي نتعامل معها تكون عناصرها المنفصلة مقاومات صرفية، وبعضها الآخر يحتوي على عناصر رديّة سواء أكانت رديّة وسعية أم رديّة تحريضية، إلا أن الطريقة تبقى صالحة للتطبيق في كل الأحوال؛ لذا فإننا سنستعرض هذه الطرق في الحالة العامة حيث العناصر ممانعات، وليست مقاومات صرفية.

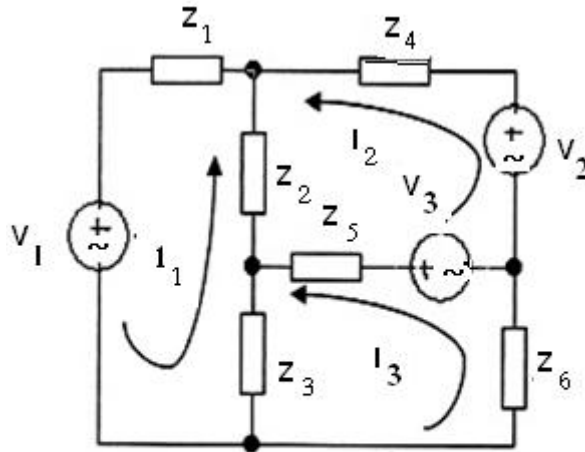
عند تطبيق منابع توتر أو تيار، تتغير وفق دالات جيبية تابعة للزمن ، على دارة كهربائية مؤلفة من عناصر خطية، ينتج لدينا دائماً استجابات في الحالة الجيبية المستقرة في كل نقطة من نقاط الدارة. تشمل عملية تحليل الدارة تعيين التيارات في كل الفروع والتوترات في كل العقد في الدارة. ولما كانت كل هذه التوترات والتيارات جيبية بالنسبة للزمن فإن استعمال المقادير الطورية العقدية لتمثيلها يسهل التعامل معها في مختلف طرائق التحليل التي سنستعرضها.

4-2 طريقة التحليل العروي

الأصل في هذه الطريقة أن تكون المجاهيل فيها هي التيارات الفرعية. ولكن وجد أنه بإدخال مفهوم التيارات العروية يمكن تقليل عدد المجاهيل، كما يمكن حساب التيارات الفرعية من التيارات العروية بعمليات حسابية بسيطة. تخصص

هذه الطريقة كل عروة من العرى المستقلة بتيار عروي نختاره بحيث يجتاز العروة بأكملها، كما ينبغي أن يكون هو التيار الحقيقي الذي يمر في أحد فروعها، ونختار له جهة هي جهة دوران عقارب الساعة أو الجهة المعاكسة، كما في الشكل 4-1. يمكن بعد ذلك إيجاد التيارات الفرعية الحقيقية من التيارات العروية بعملية حسابية بسيطة. ففي الشكل 4-1، نحسب التيارات الفرعية كما يلي: التيار المار في الممانعة Z_1 هو I_1 وجهته إلى اليسار، والتيار المار في الممانعة Z_2 هو $(I_1 - I_2)$ وجهته نحو الأعلى، والتيار المار في الممانعة Z_3 هو $(I_1 - I_3)$ وجهته نحو الأعلى، والتيار المار في الممانعة Z_4 هو I_2 وجهته إلى اليسار، والتيار المار في الممانعة Z_5 هو $(I_2 - I_3)$ وجهته إلى اليمين، والتيار المار في الممانعة Z_6 هو I_3 وجهته نحو الأعلى. وكما هو الحال في طريقة كرشوف، إذا حصلنا على قيمة سالبة للتيار فهذا يعني أن جهة التيار هي الجهة المعاكسة.

في هذه الطريقة، يكون عدد المجاهيل بعدد التيارات العروية، وعدد المعادلات بعدد العرى المستقلة، التي هي ثلاث معادلات في حالة الشكل 4-1.



الشكل 1-4

نطبق بعد ذلك قانون كرشوف في العروة على كل عروة من هذه العرى آخذين بالحسبان الطريقة التي تتشكل بها تيارات الفروع وأن كل المقادير التي نتعامل معها هي مقادير طورية. نبدأ بعد ذلك بكتابة معادلات العرى ونحن نجتازها باتجاه محدد، وليكن اتجاه عقارب الساعة.

معادلة العروة الأولى:

$$V_1 + Z_1 I_1 + Z_2 (I_1 - I_2) + Z_3 (I_1 - I_3) = 0 \quad (4-1)$$

معادلة العروة الثانية:

$$Z_2 (I_2 - I_1) + Z_4 I_2 - V_2 + V_3 + Z_5 (I_2 - I_3) = 0 \quad (4-2)$$

معادلة العروة الثالثة:

$$Z_3 (I_3 - I_1) + Z_5 (I_3 - I_2) - V_3 + I_3 Z_6 = 0 \quad (4-3)$$

وبجمع الحدود التي تحوي I_i نفسها في كل معادلة، وهي التي تشكل المقادير المجهولة، يمكن إعادة كتابة تلك المعادلات لتأخذ الشكل التالي:

$$(Z_1 + Z_2 + Z_3) I_1 - Z_2 I_2 - Z_3 I_3 = -V_1 \quad (4-4)$$

$$-Z_2 I_1 + (Z_2 + Z_4 + Z_5) I_2 - Z_5 I_3 = V_2 - V_3 \quad (4-5)$$

$$-Z_3 I_1 - Z_5 I_2 + (Z_3 + Z_5 + Z_6) I_3 = V_3 \quad (4-6)$$

وبمقارنة هذه المعادلات بالشكل 1-4 نلاحظ ما يأتي:

لو تأملنا المعادلة (4-4) على سبيل المثال، وهي المعادلة الخاصة بالعروة الأولى، نجد:

أ- أن أمثال I_1 هو مجموع الممانعات المكونة للعروة الأولى، وهو ما نسميه **الممانعة الذاتية للعروة الأولى** ونرمز لها بالرمز Z_{11} .

ب- أن أمثال I_2 تساوي **الممانعة المشتركة** بين العروتين 1 و 2 ونرمز لها بالرمز Z_{12} . وهي مسبوقه بإشارة سالبة لأن التيارين I_1 و I_2 يجريان في الممانعة المشتركة في جهتين متعاكستين. وتصبح هذه الإشارة موجبة لو كانت جهة جريان التيارين في الممانعة واحدة. كما أن أمثال التيار I_3 هي الممانعة

المشتركة بين العروتين 1 و 3 مسبوقة بإشارة سالبة أيضاً، للسبب نفسه المذكور أعلاه، ونرمز لها بالرمز Z_{13} .

ج- الطرف الأيمن من المعادلة يمثل المجموع الجبري لكل القوى المحركة الكهربائية (ق م ك) الموجودة في العروة الأولى. وتساوي هنا $-V_1$ ، لأنه لا يوجد سوى منبع توتر واحد في هذه العروة. تؤخذ إشارة توتر المنبع موجبة إذا دخل التيار العرووي من قطبه السالب وخرج من قطبه الموجب، وتؤخذ سالبة إذا دخل التيار العرووي من القطب الموجب وخرج من القطب السالب كما هو الحال في هذه العروة. وعند كتابة المعادلتين الثانية والثالثة الخاصتين بالعروتين الثانية والثالثة على الترتيب، نتبع الإجراءات نفسها التي ذكرت أعلاه. وفيما يأتي نلخص القواعد التي يجب اتباعها عند كتابة معادلات العروة في الدارة الكهربائية:

1- اختر مجموعة ملائمة من التيارات العرووية بحيث لا يبقى فرع إلا ويمر فيه تيار عرووي. يجب أن نلاحظ أن كل تيار عرووي جديد يجب أن يجتاز فرعاً جديداً على الأقل. يمكنك أن تختار أي جهة تشاء للتيار العرووي، ولكن يفضل اختيار جهة واحدة لكل التيارات العرووية لتسهيل كتابة المعادلات.

2- اكتب معادلة واحدة لكل عروة مسترشداً بما ذكر أعلاه :

أ- أمثال تيار العروة هو الممانعة الذاتية لها مسبوقة بالإشارة (+) دوماً. فلدَى كتابة معادلة العروة الأولى التي تيارها العرووي I_1 تكون هذه الأمثال $Z_{11} = (Z_1 + Z_2 + Z_3)$. ولدى كتابة معادلة العروة الثانية التي تيارها العرووي I_2 تكون أمثاله $Z_{22} = (Z_2 + Z_4 + Z_5)$ ، وأمثال تيار العروة الثالثة هي $Z_{33} = (Z_3 + Z_5 + Z_6)$.

ب- أمثال أي تيار آخر غير تيار العروة المعنية هو الممانعة المشتركة (المتبادلة) بين هذه العروة والعروة المجاورة مسبوقة بالإشارة (-) إذا اختلف التياران بالجهة وبالإشارة (+) إذا اتفقا بالجهة. فلدَى كتابة معادلة العروة

الأولى التي تيارها العرووي I_1 تكون أمثال التيار I_2 هي $Z_{12} = -Z_2$ ، وأمثال التيار I_3 هي $Z_{13} = -Z_3$. ولدى كتابة معادلة العروة الثانية التي تيارها العرووي I_2 فأمثال التيارين I_1 و I_3 هي $Z_{21} = -Z_2$ و $Z_{23} = -Z_5$ على التوالي. و لدى كتابة معادلة العروة الثالثة التي تيارها العرووي I_3 تكون أمثال التيارين I_1 و I_2 هي $Z_{31} = -Z_3$ و $Z_{32} = -Z_5$ على التوالي.

لاحظ كيف أنه إذا أخذنا كل التيارات العرووية في نفس الاتجاه فإن إشارة الممانعات المشتركة تكون سالبة دوماً. لذا نوصي الطالب باختيار تيارات عرووية متفقة في الاتجاه دوماً.

3- الطرف الأيمن في كل معادلة هو المجموع الجبري للقوى المحركة الكهربائية التي يجتاها تيار العروة. تؤخذ الإشارة (+) للقوة المحركة إذا دخل التيار العرووي المنبع من قطبه السالب وخرج من قطبه الموجب. وتؤخذ الإشارة (-) إذا كان العكس.

4-3 الصيغة المصفوفية لمعادلات العروة

يمكن إعادة كتابة مجموعة المعادلات (4-4) إلى (4-6) بالصيغة المصفوفية على النحو الآتي:

$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_3 & -Z_2 & -Z_3 \\ -Z_2 & Z_2 + Z_4 + Z_5 & -Z_5 \\ -Z_3 & -Z_5 & Z_3 + Z_5 + Z_6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_1 \\ V_2 - V_3 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

أو على الشكل المختصر:

$$[Z] \times [I] = [V] \quad (4-8)$$

حيث نحسب التيار من العلاقة التالية:

$$[I] = [V] \times [Z]^{-1} \quad (4-9)$$

وهما الشكل المصفوفي لقانون أوم، حيث $[Z]$ هي مصفوفة الممانعة و $[I]$ هي مصفوفة التيار و $[V]$ مصفوفة القوة المحركة الكهربائية.
 إن حل المعادلة (4-7) يعطي تيارات العرى الثلاثة كنسبة معينين باستعمال طريقة كرومر على النحو الآتي:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \quad (4 - 10)$$

حيث Δ هو معين الأمثال، أي معين المصفوفة $[Z]$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_3 & -Z_2 & -Z_3 \\ -Z_2 & Z_2 + Z_4 + Z_5 & -Z_5 \\ -Z_3 & -Z_5 & Z_3 + Z_5 + Z_6 \end{vmatrix}$$

أما Δ_1 فهو المعين الذي نحصل عليه من استبدال عناصر العمود الأول في معين الأمثال بعناصر المصفوفة $[V]$ ، أي هو المعين :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -V_1 & -Z_2 & -Z_3 \\ V_2 - V_3 & Z_2 + Z_4 + Z_5 & -Z_5 \\ V_3 & -Z_5 & Z_3 + Z_5 + Z_6 \end{vmatrix}$$

و Δ_2 هو المعين الذي سنحصل عليه من استبدال عناصر العمود الثاني في معين الأمثال بعناصر المصفوفة $[V]$ ، أي هو المعين :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_3 & -V_1 & -Z_3 \\ -Z_2 & V_2 - V_3 & -Z_5 \\ -Z_3 & V_3 & Z_3 + Z_5 + Z_6 \end{vmatrix}$$

و Δ_3 هو المعين الذي سنحصل عليه من استبدال عناصر العمود الثالث في معين الأمثال بعناصر المصفوفة $[V]$ ، أي هو المعين:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_3 & -Z_2 & -V_1 \\ -Z_2 & Z_2 + Z_4 + Z_5 & V_3 - V_2 \\ -Z_3 & -Z_5 & V_3 \end{vmatrix}$$

4-4 أمثلة محلولة على التحليل العروي:

سنقدم فيما يلي بعض الأمثلة التطبيقية نستعمل فيها التحليل العروي لحل الدارة الكهربائية. سنبدأ في هذه الفقرة بتحليل دارات عناصرها مكونة من مقاومات صرفة ومنابع توتر فقط، ثم نعالج بعد ذلك دارات تحتوي على منابع تيار، بالإضافة إلى منابع توتر، ثم ننتقل بعد ذلك إلى تحليل دارات تحتوي على ممانعات فيها رديات تحريضية ورديات وسعية إضافة إلى المقاومات الصرفة.

4-4-1 الدارة تحتوي على مقاومات صرفة ومنابع توتر فقط:

مثال 1-

استعمل طريقة التحليل العروي لإيجاد التيارات العروية في دارة الشكل 4-2 ، ثم استنتج التيارات الفرعية المارة في كل فرع منها.

الحل:

في هذه الدارة ثلاث عرى مستقلة، لها ثلاثة تيارات عروية نرمز لها بالرموز I_1 و I_2 و I_3 على الترتيب، ونوجهها باتجاه دوران عقارب الساعة، كما هو مبين في الشكل. نكتب المعادلات العروية لهذه العرى مسترشدين بالملاحظات المذكورة أعلاه، مع أخذ جهة الدوران عليها مع جهة عقارب الساعة. معادلة العروة الأولى:

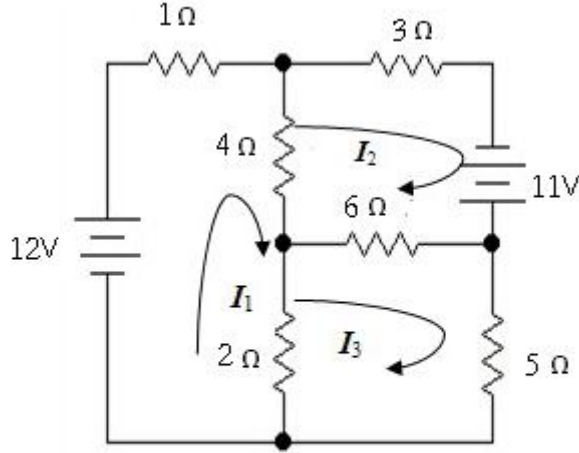
$$(1 + 4 + 2)I_1 - 4I_2 - 2I_3 = 12$$

ومعادلة العروة الثانية:

$$-4I_1 + (4 + 3 + 6)I_2 - 6I_3 = 11$$

أما معادلة العروة الثالثة فهي:

$$-2I_1 - 6I_2 + (2 + 6 + 5)I_3 = 0$$



الشكل 2-4

وبإعادة كتابة هذه المعادلات بعد تبسيطها نحصل على مجموعة المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} 7I_1 - 4I_2 - 2I_3 &= 12 \\ -4I_1 + 13I_2 - 6I_3 &= 11 \\ -2I_1 - 6I_2 + 13I_3 &= 0 \end{aligned}$$

وحلها يعطي:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -4 & -2 \\ 11 & 13 & -6 \\ 0 & -6 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -4 & 13 & -6 \\ -2 & -6 & 13 \end{vmatrix}}, \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 12 & -2 \\ -4 & 11 & -6 \\ -2 & 0 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -4 & 13 & -6 \\ -2 & -6 & 13 \end{vmatrix}}, \quad I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -2 & 12 \\ -4 & -6 & 11 \\ -2 & 13 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -4 & 13 & -6 \\ -2 & -6 & 13 \end{vmatrix}}$$

وأخيراً نجد: $I_1 = 4 \text{ A}$ ، $I_2 = 3 \text{ A}$ ، $I_3 = 2 \text{ A}$.

أو نجد الحل بكتابة المعادلة المصفوفية $[I] = [Z]^{-1} \times [V]$ وبالتعويض تصبح:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -4 & 13 & -6 \\ -2 & -6 & 13 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالحل نجد أن مصفوفة التيار هي:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

أما التيارات الفرعية، فنحسبها كالاتي:

التيار المار في المقاومة 1Ω في العروة الأولى يساوي $I_1 = 2 \text{ A}$. والتيار المار في المقاومة 3Ω في العروة الثانية فيساوي $3A I_2 =$. والتيار المار في المقاومة 5Ω في العروة الثالثة يساوي $I_3 = 4A$. أما التيار المار في المقاومة 4Ω المشتركة بين العروتين الأولى والثانية فيساوي $I_1 - I_2 = -1A$ ، أي إن جهته نحو الأعلى. والتيار المار في المقاومة 2Ω المشتركة بين العروتين الأولى والثالثة يساوي $I_1 - I_3 = -2A$ ، وجهته نحو الأعلى أيضاً. وأخيراً، التيار المار في المقاومة 6Ω المشتركة بين العروتين الثانية والثالثة يساوي $I_2 - I_3 = -1A$ ، وجهته إلى اليمين.

4-4-2 الدارة تحتوي على منابع تيار أيضاً إضافة إلى منابع التوتر

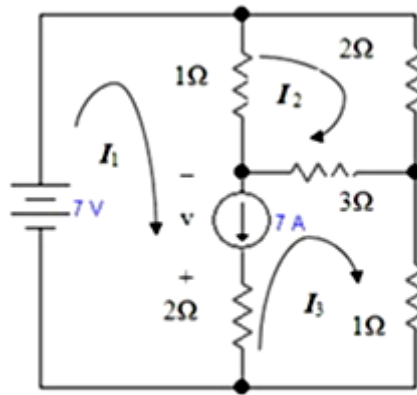
عندما يوجد في الدارة منبع تيار (مستقل أم غير مستقل)، فإن تعديلاً يجب أن يطرأ على طريقة التحليل العروي؛ لأن التوتر بين طرفي منبع التيار يمكن أن يكون أي شيء. في هذه الحالة توجد طريقتان ممكنتان لإجراء التحليل. الطريقة الأولى أن نخصص منبع التيار بتوتر مجهول بين طرفيه ثم نتابع العملية

كالسابق، وبعدها نجد علاقة تربط منبع التيار بالتيارات العروية. وهذه الطريقة قد تكون أكثر صعوبة في أغلب الأحيان.

أما الطريقة الثانية، وهي الأفضل، فتكون بأن نشكل ما يسمى بالعروة الفائقة supermesh. تتألف العروة الفائقة من عروتين متجاورتين بينهما منبع تيار كعنصر مشترك. وفي هذه الحالة يكون منبع التيار في داخل العروة الفائقة. وبهذه الطريقة ينخفض عدد العرى بواحد من أجل كل منبع تيار موجود في الدارة. إذا كان منبع التيار يقع على محيط الدارة، أي على حدودها الخارجية، فإن العروة التي فيها المنبع يمكن إهمالها؛ لأن تيارها معلوم. وعندئذ يطبق التحليل العروي فقط على بقية العرى أو العرى الفائقة في الدارة المعدلة. لنأخذ مثالاً نستعمل في حله كلتا الطريقتين.

مثال 2-

يبين الشكل 3-4 دارة فيها منبع تيار مستقل (7A) يقع في الحدود المشتركة بين العروتين الأولى والثالثة. سوف نحسب التيارات العروية I_1 و I_2 و I_3 المحددة على الشكل.



الشكل 3-4

الحل بالطريقة الأولى: نضع توتراً مجهولاً v بين طرفي منبع التيار، ثم نكتب معادلات العرى الثلاث على النحو الآتي:

معادلة العروة الأولى:

$$3I_1 - I_2 - 2I_3 = 7 + v$$

معادلة العروة الثانية:

$$6I_2 - I_1 - 3I_3 = 0$$
$$- 2I_1 - 3I_2 + 6I_3 = -v$$

والمعادلة الرابعة هي العلاقة التي تربط منبع التيار بالتيارات العروية:

$$I_1 - I_3 = 7$$

ونحصل على المعادلة الخامسة بجمع المعادلة الأولى والثالثة فنجد:

$$I_1 - 4I_2 + 4I_3 = 7$$

والآن لدينا ثلاث معادلات، هي الثانية والرابعة والخامسة، وفيها ثلاثة مجاهيل

بحلها معاً نجد: $I_1 = 9A$ و $I_2 = 2.5A$ و $I_3 = 2A$.

الحل بطريقة العروة الفائقة:

نظراً لوجود منبع التيار في الحد المشترك بين العروتين الأولى والثالثة، فهذا

يضطرنا لأخذ عروة فائقة يكون منبع التيار في داخلها. نشكل العروة الفائقة في

هذه المسألة من العروتين الأولى والثالثة. نكتب معادلة العروة لهاتين العروتين

متبعين التعليمات المتعلقة بطريقة كتابة معادلة العروة المذكورة سابقاً. أما

المعادلة الثالثة فهي المعادلة الرابعة المذكورة أعلاه وهي تمثل العلاقة بين منبع

التيار والتيارات العروية. لنكتب الآن معادلتنا العرويتين:

معادلة العروة الفائقة:

$$I_1 + (3 + 1)I_3 - I_2 - 3I_2 = 7 \quad \text{أو}$$

$$I_1 - 4I_2 + 4I_3 = 7$$

ومعادلة العروة الثانية:

$$(1 + 2 + 3)I_2 - I_1 - 3I_3 = 0$$

أو :

$$-I_1 + 6I_2 - 3I_3 = 0$$

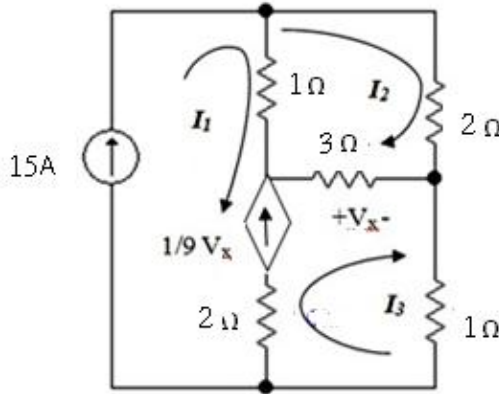
والمعادلات المطلوب حلها بهذه الطريقة هي معادلة العروة الفائقة ومعادلة العروة الثانية بالإضافة إلى العلاقة التي تربط منبع التيار بالتيارات العروية:

$$I_1 - I_3 = 7$$

وهي نفس المعادلات التي حصلنا عليها بالطريقة السابقة.

4-4-3 الدارة تحتوي على منابع غير مستقلة:

لنأخذ الآن مثلاً آخر حيث تحتوي الدارة على منبع تيار مستقل موجود على محيط الدارة، كما تحتوي على منبع تيار غير مستقل. إن وجود منبع واحد أو أكثر من المصادر غير المستقلة لا يتطلب سوى أن يعبر عن مقدار كل واحد من هذه المصادر وعن المتحول الذي يعتمد عليه هذا المقدار بدلالة التيارات العروية المخصصة .



الشكل 4.4

مثال 3-

يبين الشكل 4-4 دائرة فيها منبع تيار مستقل قيمته 15A ، ومنبع تيار غير مستقل قيمته $\frac{1}{9}V_x$ حيث V_x هو التوتر بين طرفي المقاومة 3Ω كما هو مبين في

الشكل. احسب التيارات العروية الثلاث I_1 و I_2 و I_3 .

الحل:

لدينا هنا ثلاثة تيارات عروية، ولكن واحداً منها هو I_1 معلوم بقيمته 15A. لذا يمكننا أن نهمل هذه العروة ونكتفي بكتابة معادلتين فقط. نحصل على إحدى المعادلتين من العروة الثانية التي نكتبها على الشكل :

$$-I_1 + 6I_2 - 3I_3 = 0$$

أما المعادلة الثانية فنحصل عليها من كتابة العلاقة التي تربط منابع التيار بالتيارات العروية، وهذه المعادلة هي:

$$\frac{1}{9}v_x = I_3 - I_1$$

$$v_x = 3(I_3 - I_1) \quad \text{ولكن:}$$

من هاتين المعادلتين نحصل على المعادلة الآتية:

$$3I_1 - I_2 - 2I_3 = 0$$

وبذلك يصبح لدينا ثلاث معادلات هي: $I_1 = 15$

$$-I_1 + 6I_2 - 3I_3 = 0$$

$$3I_1 - I_2 - 2I_3 = 0$$

وبحل هذه المجموعة من المعادلات نجد:

$$I_1 = 15A \quad , \quad I_2 = 11A \quad \text{و} \quad I_3 = 17A$$

4-4-4 الدارة تحتوي على منابع وممانعات:

مثال 4-

اكتب معادلات العروة لدارة الشكل 4-5 الذي يحتوي على منبع توتر وممانعات ثم احسب التيارات العروية.

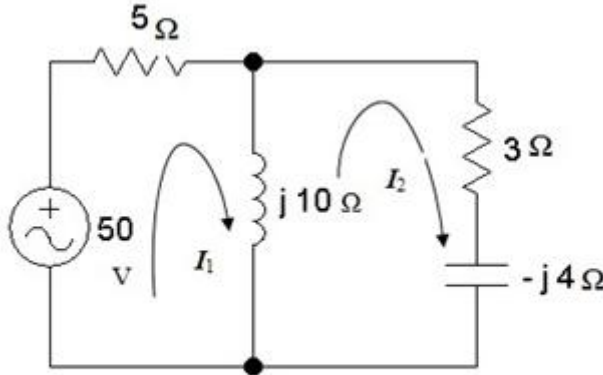
الحل:

معادلة العروة الأولى:

$$(5 + j10)I_1 - j10I_2 = 50$$

ومعادلة العروة الثانية:

$$-j10I_1 + (3 + j6)I_2 = 0$$



النكل 5-4

نحل هاتين المعادلتين العقديتين بكتابة المعادلة المصفوفية:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 10j & -10j \\ -10j & 3 + 6j \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وحلها يعطي:

$$I_1 = 3.96 + j1.132A = 4.12 \angle 16^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = 4.53 + j4.15 = 6.14 \angle 42.5^\circ \text{ A}$$

مثال 5-

احسب التيارين العرويين في الدارة المبينة في الجزء (أ) من الشكل 4-6 ، الذي يمثل مخطط الدارة في نطاق الزمن. بينما يمثل الجزء (ب) من الشكل مخطط الدارة في نطاق التواتر.

الحل:

إن لمنبع التوتر الكائن على يسار الشكل تواتراً زاوياً $\omega = 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ كما هو مبين في الجزء (أ) من الشكل. ويظهر على هذا الجزء من الشكل التياران العرويان I_1 و I_2 . كما يظهر وجود منبع توتر غير مستقل قيمته $2I_1$.

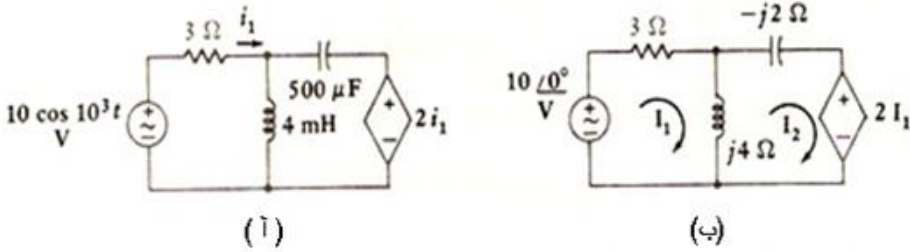
لنكتب المعادلتين العرويتين:

$$(3 + j4)I_1 - j4I_2 = 10\angle 0^\circ$$

$$-j4I_1 + (4j - j2)I_2 = -2I_1$$

وبإصلاح المعادلة الثانية تصبح:

$$(2 - j4)I_1 + j2I_2 = 0$$



الشكل 6-4

وبحل مجموعة المعادلتين نجد:

$$I_1 = 1.08 + j0.61 = 1.24\angle 29.4^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = 1.54 + j2.31 = 2.77\angle 56.3^\circ \text{ A}$$

4-5 طريقة التحليل العقدي:

المجاهيل في هذه الطريقة هي توترات العقد بالنسبة إلى عقدة مرجعية نختارها بحيث يكون توترها مساوياً للصفر. ويكون عدد المعادلات بعدد توترات العقد المجهولة. فإذا احتوت الدارة على N عقدة يكون عدد المعادلات N-1 معادلة.

نطبق هذه الطريقة على دارة الشكل 7-4. نخصص كل عقدة بتوتر معين بالنسبة لتوتر العقدة D الذي نعهده مبدئاً للتوتر، وغالباً ما توصل هذه العقدة بالأرض فيكون توترها مساوياً للصفر. يستند هذا التحليل إلى قانون كرشوف الأول في التيار. بتطبيق هذا القانون على العقد A و B و C و D في دارة الشكل نحصل على المعادلات الآتية:

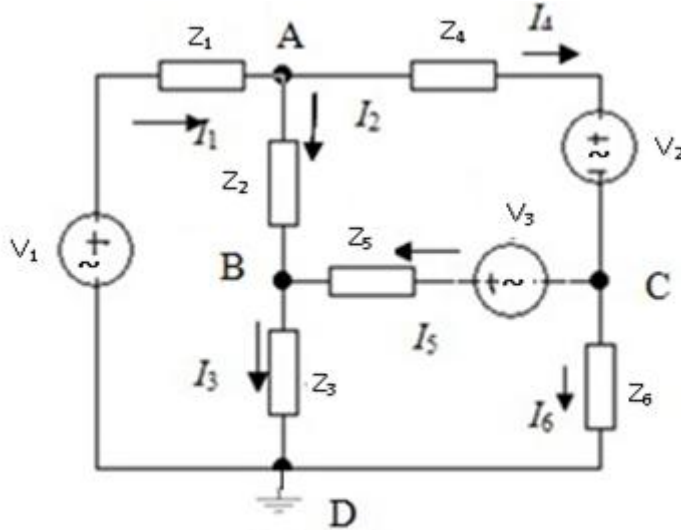
$$I_1 - I_2 - I_4 = 0 \quad (4 - 11) \text{ من أجل العقدة A التي توترها } V_A$$

$$I_2 + I_5 - I_3 = 0 \quad (4-12) \quad \text{من أجل العقدة B التي توترها } V_B$$

$$I_4 - I_5 - I_6 = 0 \quad (4-13) \quad \text{من أجل العقدة C التي توترها } V_C$$

$$I_6 + I_3 - I_1 = 0 \quad (4-14) \quad \text{من أجل العقدة D التي توترها معدوم}$$

لأنها مرجعية .



الشكل 7-4

من الملاحظ أن مجموع ثلاث معادلات من المعادلات السابقة يعطي المعادلة الرابعة، مما يدل على وجود ثلاث معادلات مستقلة فقط. لذا سنتبنى المعادلات الثلاث الأولى ونعد العقدة D هي المرجع ، وكل توترات العقد الأخرى هي المجاهيل وتحسب بالنسبة إليها. ومن المفيد هنا أن نشير إلى أن التيارات الواردة في المعادلات السابقة ترمز هنا إلى التيارات الفرعية. وقد وجب التنبيه لذلك منعاً من وقوع الالتباس.

لإيجاد المعادلات التي تحوي المجاهيل V_A و V_B و V_C نكتب العلاقات التي تعطي التيارات الفرعية الستة بتطبيق قانون أوم من أجل كل تيار فرعي يمر بين عقدتين وذلك بدلالة فرق الكمون بينهما والممانعة Z الكائنة بين هاتين العقدتين أو القبولية $Y=1/Z$ وذلك لسهولة كتابتها. وهذه العلاقات هي:

$$\begin{aligned}
I_1 &= Y_1 (V_1 - V_A) , & I_2 &= Y_2 (V_A - V_B) \\
I_3 &= Y_3 (V_B - 0) , & I_4 &= Y_4 (V_A - V_F) = Y_4 (V_A - V_C - V_2) \\
I_5 &= Y_5 (V_G - V_B) = Y_5 (V_C + V_3 - V_B) \\
I_6 &= Y_6 (V_C - 0)
\end{aligned}$$

نعوض عن قيم/المختلفة التي تعطيها المعادلات السابقة في المعادلات (4-11) و(4-12) و(4-13) أعلاه فنحصل على المعادلات الآتية:

$$(Y_1 + Y_2 + Y_4)V_A - Y_2V_B - Y_4V_C = Y_1V_1 + Y_4V_2 \quad (4-15)$$

$$-Y_2V_A + (Y_2 + Y_3 + Y_5)V_B - Y_5V_C = Y_5V_3 \quad (4-16)$$

$$-Y_4V_A - Y_5V_B + (Y_4 + Y_5 + Y_6)V_C = -Y_4V_2 - Y_5V_3 \quad (4-17)$$

والمعادلات (4-15) إلى (4-17) هي معادلات العقدة للعقد A و B و C على الترتيب في دارة الشكل 4-7.

وسنجد الآن طريقة سريعة لكتابة هذه المعادلات مباشرة بعد تأمل شكل الدارة، كما فعلنا من أجل كتابة المعادلات العروية. وهذه هي الطريقة:

1- اختر إحدى العقد مبدءاً يُرجع إليه في حساب توتر العقد الأخرى. في كثير من الحالات توجد نقطة متصلة بالأرض لذا يعد اختيارها مبدءاً للتوتر أمراً طبيعياً. أعط لكل عقدة توتراً خاصاً بها.

2- اكتب لكل عقدة معادلة: عدد المجاهيل فيها بعدد العقد المستقلة، وإن عدد المعادلات يساوي عدد العقد ناقصاً واحد هو العقدة المرجعية. والمجاهيل هي توترات العقد المأخوذة، وتساوي ثلاث معادلات في حالتنا الراهنة.

3- معادلة العقدة A: إن أمثال V_A هو مجموع كل القبوليات الموصولة إلى العقدة A، أي قبوليتها الذاتية التي تساوي $Y_{11} = Y_1 + Y_2 + Y_4$ ومسبوقة بالإشارة (+) من أجل العقدة A. أما أمثال V_B و V_C فهما القبوليتان المشتركتان اللتان تصلان العقدة A بالعقدة B والعقدة C على الترتيب ومسبوقتان بالإشارة (-) دوماً، وهما $Y_{12} = Y_2$ من أجل العقدة B و $Y_{13} = Y_4$ من أجل العقدة C.

4- معادلة العقدة B : إن أمثال V_B هو مجموع كل القبوليات الموصولة إليها، أي قبوليتها الذاتية التي تساوي $Y_{22}=Y_2+Y_3+Y_5$. أما أمثال V_A وأمثال V_C فهما $Y_{21}=-Y_2$ و $Y_{23}=-Y_5$ على الترتيب.

5- معادلة العقدة C : أمثال V_C هو قبوليتها الذاتية $Y_{33}=Y_4+Y_5+Y_6$. أما أمثال V_A وأمثال V_B فهما $Y_{31}=-Y_4$ و $Y_{32}=-Y_5$ على الترتيب وهما مسبوقان بإشارة الناقص (-) دوماً.

6- الطرف الثاني في كل معادلة من هذه المعادلات هو المجموع الجبري لكل منابع التيار التي تدخل العقدة؛ وذلك بعد أن نمثل كل منبع للتوتر بمنبع تيار بعلاقة من الشكل:

$$I = \frac{V}{Z} = YV$$

تؤخذ قيمة التيار موجبة إذا كان منبع التيار يعطي تياراً يتجه إلى العقدة، وتؤخذ سالبة إذا أعطى تياراً يخرج من العقدة.

4-6 الصيغة المصفوفية لمعادلات العقدة:

يمكن إعادة كتابة المعادلات (4-15) إلى (4-17) بالصيغة المصفوفية على النحو الآتي:

$$[Y] \times [V] = [I]$$

حيث $[Y]$ مصفوفة القبولية و $[V]$ مصفوفة توتر العقد و $[I]$ مصفوفة منابع التيار. أو نكتبها على الشكل التالي:

$$[V] = [Y]^{-1} \times [I]$$

حيث:

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 + Y_4 & -Y_2 & -Y_4 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 + Y_5 & -Y_5 \\ -Y_4 & -Y_5 & Y_4 + Y_5 + Y_6 \end{bmatrix}$$

$$[V] = \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix}, \quad [I] = \begin{bmatrix} Y_1 V_1 + Y_4 V_2 \\ -Y_5 V_3 \\ -Y_4 V_2 \end{bmatrix}$$

أو يمكن أن نحلها بواسطة المعينات كما في حالة معادلات العروة.

4-7 أمثلة محلولة على التحليل العقدي:

سنقدم فيما يأتي بعض الأمثلة التطبيقية على التحليل العقدي لحل الدارة الكهربائية. وكما فعلنا في طريقة التحليل العروي سنبدأ هنا بتحليل دارات عناصرها مكونة من مقاومات صرفة ومنابع تيار فقط ولا تحتوي منابع توتر، ثم نعالج بعد ذلك دارات تحتوي على منابع تيار؛ بالإضافة إلى منابع توتر، ثم ننتقل بعد ذلك إلى تحليل دارات تحتوي على ممانعات فيها ردّيات تحريضية ورديات وسعية؛ إضافة إلى المقاومات الصرفة.

4-7-1- الدارة تحتوي على مقاومات صرفة ومنابع تيار فقط:

آ- كل منابع التيار مستقلة

مثال 6-

استعمل طريقة التحليل العقدي لإيجاد توترات العقد V_1 و V_2 و V_3 في الشكل 4-8، ثم احسب التيارات الجارية في المقاومات الأربع.

الحل:

يُلاحظ من الشكل أن العقدة المرجعية معينة في مخطط الدارة، كما أن الناقلات الأربع في الدارة معطاة، وقيمها مقدرة بالسيمنز (S). لنكتب الآن معادلات العقدة للعقد الثلاث، ولنبدأ بالعقدة الأولى:

$$(1 + 2)V_1 - V_2 - 2V_3 = -2$$

معادلة العقدة الثانية هي:

$$-V_1 + (1 + 4)V_2 = 3$$

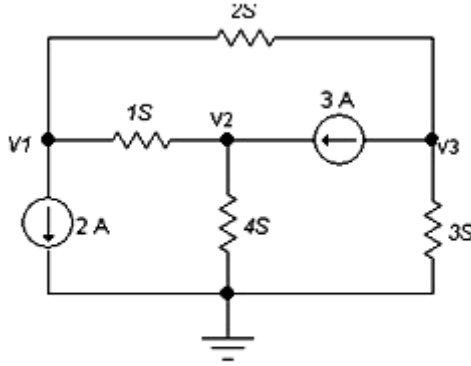
ومعادلة العقدة الثالثة:

$$-2V_1 + (2 + 3)V_3 = -3$$

نكتب المعادلة المصفوفية:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

وحل هذه يعطي: $V_1 = -1.30 \text{ V}$, $V_2 = 0.34 \text{ V}$, $V_3 = -1.12 \text{ V}$



الشكل 8-4

والآن، لنحسب التيارات الفرعية:

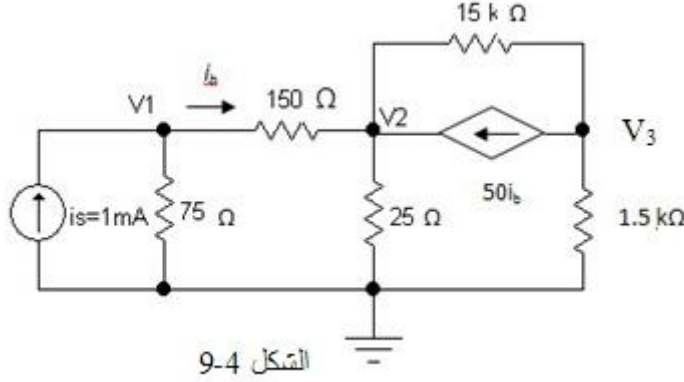
التيار في الناقلية 2S هو: $I_{12} = 2 \times (V_1 - V_3) = -0.36 \text{ A}$ ، أي إن التيار يتجه إلى اليسار. والتيار المار في الناقلية 1S هو: $I_{12} = 1 \times (V_1 - V_2) = -1.64 \text{ A}$ ، وهو يتجه إلى اليسار أيضاً. والتيار في الناقلية 4S هو: $I_{20} = 4 \times V_2 = 1.36 \text{ A}$ ، ويتجه إلى الأسفل. والتيار في الناقلية 3S هو: $4 \times V_3 = -4.48 \text{ A}$ ، ويتجه إلى الأعلى.

ب- الدارة تحتوي على منابع تيار غير مستقلة:

مثال 7-

في دارة الشكل 9-4 يوجد منبع تيار غير مستقل قيمته 50 i_s . استعمل التحليل

العقدي لحساب ربح التوتتر V_3/V_1 .



الشكل 9-4

الحل :

لاحظ أن هذه الدارة ما هي إلا دارة الشكل 1-28 والتي تمثل مضخماً BJT ، ولكننا استبدلناها بمنبع التوتتر V_1 الموصول على التسلسل مع مقاومة R_1 منبع تيار i_s على التفرع مع مقاومة 75Ω . لنكتب معادلات العقدة للعقد الثلاث كالآتي:

العقدة الأولى:

$$\left(\frac{1}{75} + \frac{1}{150}\right) V_1 - \frac{1}{150} V_2 = 10^{-3}$$

العقدة الثانية:

$$-\frac{1}{150} V_1 + \left(\frac{1}{150} + \frac{1}{25} + \frac{1}{15000}\right) V_2 - \frac{1}{15000} V_3 = 50i_b$$

العقدة الثالثة:

$$\frac{1}{15000} V_2 + \left(\frac{1}{15000} + \frac{1}{1500}\right) V_3 = -50i_b$$

ويعطى التيار i_b بالعلاقة الآتية:

$$i_b = \frac{V_1 - V_2}{150}$$

نعوض i_0 من العلاقة الأخيرة في المعادلتين الثانية والثالثة، ونبسّط مجموعة المعادلات الثلاث الناتجة ونحلها فنحصل على:

$$V_1 = 0.071 \text{ V} \quad , \quad V_2 = 0.063 \text{ V} \quad \text{و} \quad V_3 = -3.69 \text{ V} .$$

$$\frac{V_3}{V_1} = -51.98 \quad \text{نحسب ربح المضخم من العلاقة:}$$

4-7-2 الدارة تحتوي على منبع توتر

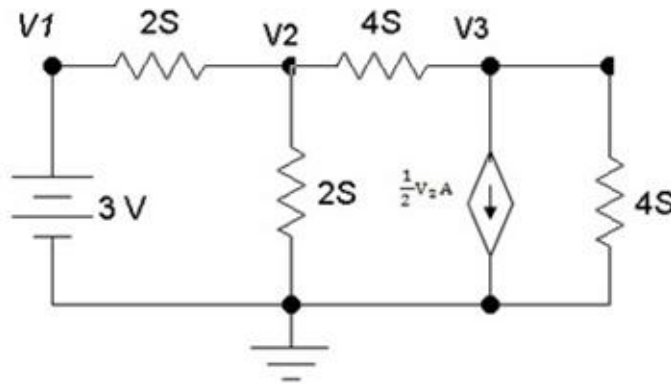
نميز هنا حالتين وذلك حسب طريقة وصل منبع التوتر في الدارة. الحالة الأولى يكون أحد مربطي منبع التوتر موصولاً بالعقدة المرجعية مباشرة. وفي الحالة الثانية لا يكون أي من مربطي المنبع موصولاً بالعقدة المرجعية. والمثالان الآتيان يوضحان طريقة الحل في كل حالة.

آ- أحد مربطي منبع التوتر موصول مباشرة بالعقدة المرجعية:

مثال 8-

احسب التوترين V_2 و V_3 في دارة الشكل 4-10 .

الحل:



الشكل 4-10

يوجد في دارة الشكل منبع توتر مستقل قطبه السالب موصول مباشرة إلى العقدة المرجعية، كما يوجد منبع تيار غير مستقل. نلاحظ من الشكل أن القيم المعطاة

هي للناقلات بدلاً من المقاومات. سنعين الآن توترات العقد V_1 و V_2 و V_3 باستعمال طريقة التحليل العقدي.

إن توتر العقدة الأولى V_1 معلوم ويساوي توتر المنبع، أي $V_1 = 3\text{ V}$ لأن القطب الآخر للمنبع موصول إلى العقدة المرجعية التي توترها معدوم. بقي علينا تعيين V_2 و V_3 ، ومن أجل ذلك نكتب معادلتين العقدتين الثانية والثالثة.

معادلة العقدة الثانية:

$$-2V_1 + (2 + 2 + 4)V_2 - 4V_3 = 0$$

معادلة العقدة الثالثة:

$$-4V_2 + (4 + 4)V_3 = -\frac{1}{2}V_2$$

يمكن تبسيط المعادلتين السابقتين وإعادة كتابتهما على النحو الآتي بعد ملاحظة

$$\text{أن } V_1 = 3\text{ V}$$

معادلة العقدة الثانية:

$$8V_2 - 4V_3 = 6$$

معادلة العقدة الثالثة

$$-7V_2 + 16V_3 = 0$$

بحل مجموعة المعادلتين السابقتين نحصل على: $V_2 = 0.96\text{ V}$ و $V_3 = 0.42\text{ V}$.

ملاحظة 1: منبع التوتر غير المستقل الموصول بين نقطة مرجعية ونقطة غير مرجعية يعامل معاملة منبع التوتر المستقل، أي لا نكتب معادلة العقدة لتلك النقطة الموصول إليها منبع التوتر غير المستقل.

ملاحظة 2: من الممكن حل هذه الدارة على النحو الآتي: في الحقيقة تحتوي الدارة على عقدتين فقط، توترهما V_2 و V_3 . وهنا يجب أن نأخذ بالحسبان أن العقدة 2 يصب فيها تيار قيمته $I = Y.V = 2 \times 3 = 6\text{ A}$ لأن منبع التوتر 3 V على التسلسل مع ناقلية 2 S يكافئ منبع تيار على التفرع مع ناقلية 2 S وقيمته

هي القيمة التي حسبناها أعلاه. في هذه الحالة تكتب معادلة العقدة الثانية على النحو الآتي:

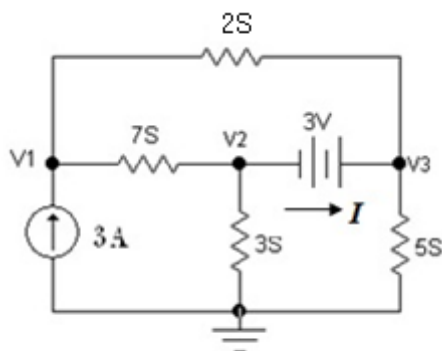
$$8V_2 - 4V_3 = 6$$

وهي المعادلة نفسها التي وجدناها أعلاه.

ب- كلا المربرطين في منبع التوتر غير موصولين إلى النقطة المرجعية:

مثال 9-

لتكن الدارة المبينة في الشكل 4-11 التي تحتوي على منبع توتر ومنبع تيار مستقلين عيّن توترات العقد V_1 و V_2 و V_3 .



الشكل 4-11

الحل:

نلاحظ أن منبع التوتر غير متصل بالعقدة المرجعية من أي طرف من طرفيه. سنتبع في حل هذه الدارة طريقتين. تعتمد الطريقة الأولى على فرض تيار I يعطيه منبع التوتر. وتعتمد الطريقة الثانية على ما يسمى العقدة الفائقة supernode.

الطريقة الأولى: طريقة فرض تيار يمر بالمنبع. نفرض أن منبع التوتر يعطي تياراً I اخترنا جهته كما هو مبين في الشكل 4-11. لنكتب الآن معادلات العقد الثلاث:

معادلة العقدة الأولى:

$$9V_1 - 7V_2 - 2V_3 = 3$$

معادلة العقدة الثانية:

$$-7V_1 + 10V_2 = -I$$

معادلة العقدة الثالثة:

$$-2V_1 + 7V_3 = I$$

كما يوجد بين طرفي منبع التوتر العلاقة الآتية: $V_3 - V_2 = 3$

بجمع العلاقتين الثانية والثالثة نحصل على:

$$-9V_1 + 10V_2 + 7V_3 = 0$$

وهكذا يصبح لدينا ثلاث معادلات هي المعادلة الأولى والمعادلتان الأخيرتان

بحلها معاً نجد:

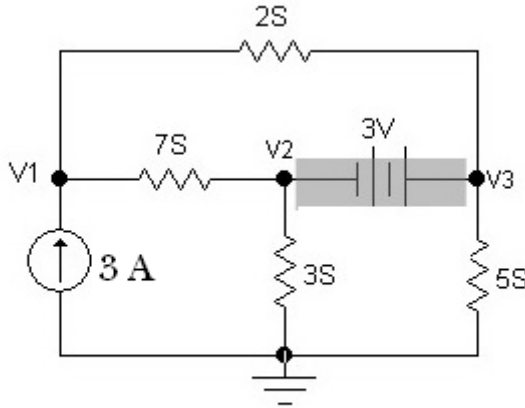
$$V_3 = 1.5 \text{ V} \quad \text{و} \quad V_2 = 1.5 \text{ V} \quad ، \quad V_1 = -0.5 \text{ V}$$

الطريقة الثانية: طريقة العقدة الفائقة.

نظراً لوجود منبع التوتر بين عقدتين ليست أية منهما مرجعية؛ ونظراً لأن التيار

الذي يعطيه غير معلوم، فإننا نجمع العقدتين معاً فتشكلان عقدة واحدة نسميها

العقدة الفائقة. وقد أظهرنا هذه العقدة على الشكل 4-12 بصورة مظلمة.



الشكل 4-12

لتعيين توترات العقد الثلاث، يمكننا كتابة ثلاث معادلات. نحصل على المعادلة الأولى من العلاقة بين V_2 و V_3 وهي:

ونحصل على المعادلة الثانية بكتابة معادلة العقدة الأولى وهي المعادلة الأولى نفسها في الطريقة السابقة أي هي:

$$9V_1 - 7V_2 - 2V_3 = 3$$

أما المعادلة الثالثة فنحصل عليها من كتابة معادلة العقدة للعقدة الفائقة. ومعادلة العقدة الفائقة هي:

$$(7 + 3)V_2 + (5 + 2)V_3 - 7V_1 - 2V_1 = 0$$

وبإصلاح هذه المعادلة نجد:

$$-9V_1 + 10V_2 + 7V_3 = 0$$

وما هذه المعادلة سوى المعادلة الثالثة في الطريقة الأولى.

4-7-3 الدارة تحتوي على رديات ومقاومات:

مثال 10-

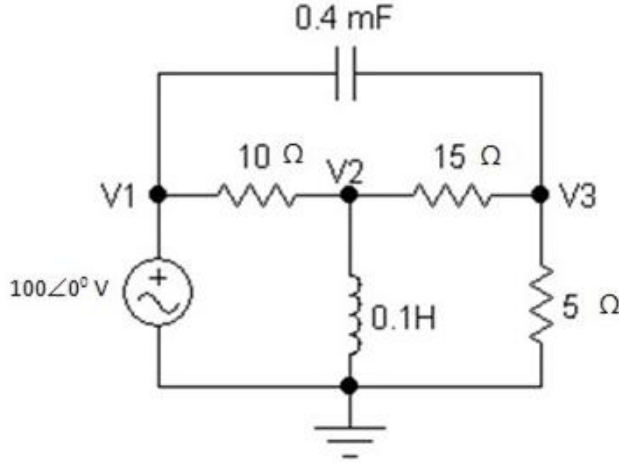
نأخذ الآن مثلاً لدارة كهربائية تحتوي على ممانعات ويغذيها منبع توتر متناوب. نريد حساب توترات العقد الثلاث V_1 و V_2 و V_3 لدارة الشكل 4-13، وكذلك حساب التيار المار في منبع التوتر علماً أن $\omega = 100 \text{ rad/s}$.
الحل:

لنحسب أولاً قبوليتي الملف والمكثفة:

$$Y_L = \frac{1}{j\omega L} = -j0.1S \quad , Y_C = j\omega C = j0.04S$$

ونحسب كذلك ناقلات المقاومات فنجد: $0.1S$ و $0.2S$ و $0.066S$ للمقاومات 10 و 5 و 15 أوم على الترتيب.

إن توتر العقدة الأولى معروف؛ لأنها تشكل أحد مربطي منبع التوتر الذي يتصل



الشكل 13-4

مربطه الآخر بالعقدة المرجعية، وعليه يكون توتر هذه العقدة $V_1 = 100 \angle 0^\circ V$
معادلة العقدة الثانية :

$$-0.1V_1 + (0.1 + 0.066 - 0.1j)V_2 - 0.066V_3 = 0$$

معادلة العقدة الثالثة:

$$-0.066V_2 + (0.266 + 0.04j)V_3 - 0.04jV_1 = 0$$

بالتعويض عن V_1 بما تساويه وتبسيط المعادلتين السابقتين نجد:

$$(1.66 - 1j)V_2 - 0.66V_3 = 100$$

$$-0.66V_2 + (2.66 + 0.4j)V_3 = 40j$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على:

$$V_2 = 44.56 + 35.47j = 56.9 \angle 38.5^\circ V$$

$$V_3 = 14.32 + 21.68j = 26 \angle 56.5^\circ V$$

لحساب التيار المار في المنبع نقول: إن هذا التيار يساوي مجموع تيارين يمرأدهما في المقاومة 10Ω والآخر في المكثفة (بموجب قانون كرشوف في العقدة). وعليه، فالتيار الذي يمر في المقاومة 10Ω هو:

$$I_R = \frac{V_1 - V_2}{10} = \frac{100 - (44.56 + 35.47j)}{10} = 5.54 - 3.55jA$$

والتيار المار في المكثفة :

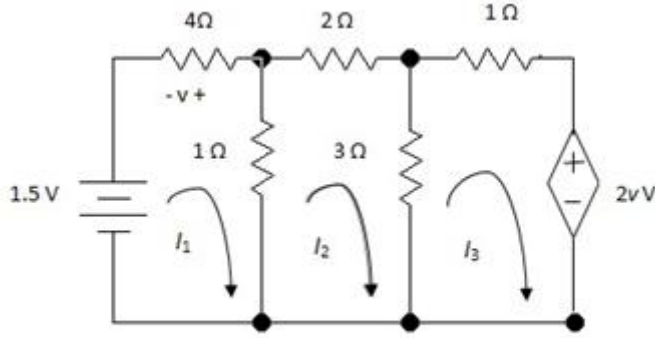
$$I_C = \frac{V_1 - V_3}{1/j\omega C} = \frac{100 - (14.32 + 21.68j)}{-25j} = 3.43j - 0.87A$$

وأخيراً نحسب التيار المار في المنبع بجمع التيارين السابقين فنجد:

$$\begin{aligned} I_S = I_R + I_C &= 5.54 - 3.55j + 3.43j - 0.87 \\ &= 4.67 - 0.12j = 4.67 \angle 1.47^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

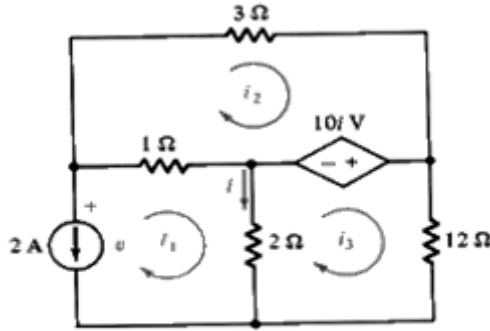
مسائل على الفصل الرابع

1-4 يوجد في دارة الشكل م 1-4 منبع توتر غير مستقل. استعمل طريقة التحليل العروي، واحسب التيارات العروية i_1 و i_2 و i_3 .



الشكل م 1-4

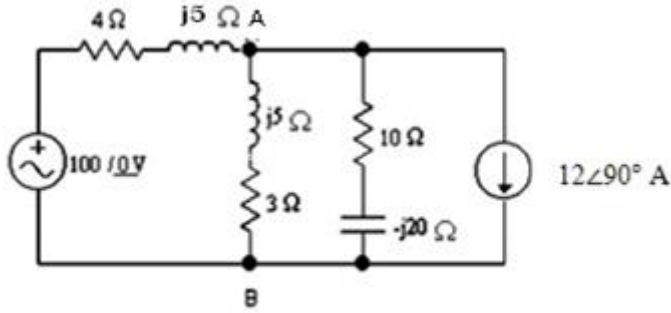
2-4 استعمل طريقة التحليل العروي واحسب التيارات العروية الثلاثة في دارة الشكل م 2-4.



الشكل م 2-4

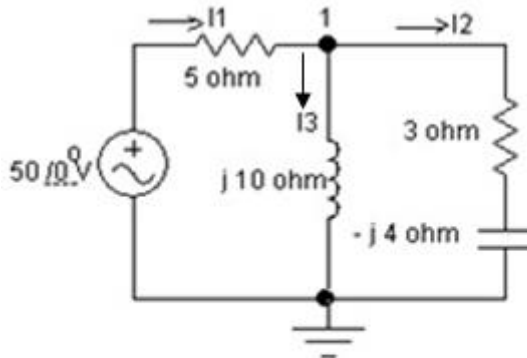
3-4 لتكن الدارة المبينة في الشكل م 3-4 . آ- اكتب معادلة العقدة واستنتج توتر العقدة A. ب- احسب التيار المار في الفرع AB ، والتيار المار في الفرع الذي يحوي المقاومة والمكثفة. ج- اكتب معادلات العروة المستقلة لهذه الدارة.

د- احسب التيارات العروية. هـ أعد الطلب ب مستفيداً من حسابك للتيارات العروية.



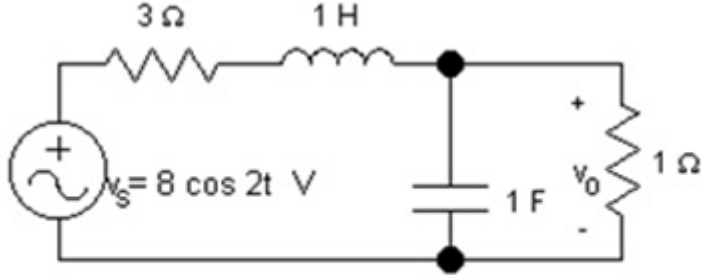
الشكل م 3-4

4-4 لتكن الدارة المبينة في الشكل م4-4. آ-اكتب معادلة العقدة 1 واستنتج توتر هذه العقدة. ب- احسب التيارات i_1 و i_2 و i_3 . ج-اكتب معادلات العروة، ثم احسب التيارات العروية واستنتج منها التيارات الفرعية الثلاثة السابقة. د- حول منبع التوتر إلى منبع تيار. هـ- استخرج علاقات التيارات الجارية في الفروع الثلاثة في الدارة الجديدة باستعمال طريقة تجزئة التيار. و- احسب القدرة المستهلكة في كل مقاومة. ز- احسب القدرة التي يقدمها المنبع.



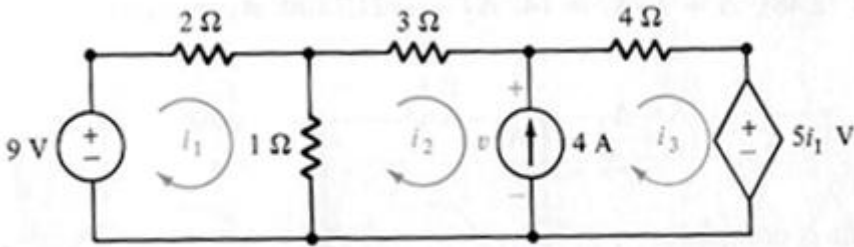
الشكل م4-4

5-4 لتكن الدارة المبينة في الشكل م-4-5 حيث $v_s = 8 \cos 2t \text{ V}$ - آ - استعمل طريقة التحليل العقدي لإيجاد v_o ، ب- استنتج التيار المار في المقاومة 1Ω .



الشكل م-4-5

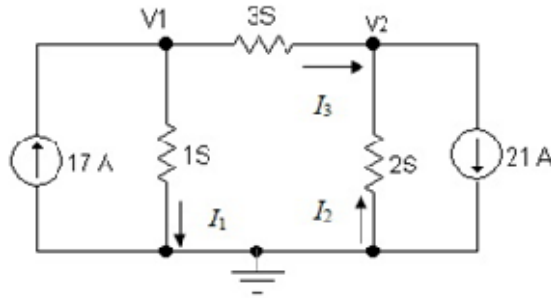
6-4 يوجد في دارة الشكل م 4-6 منبع تيار موضوع في الفرع الفاصل بين العروتين 2 و 3. احسب التيارات العروية الثلاثة مستعملاً طريقة التحليل العروي.



الشكل م-4-6

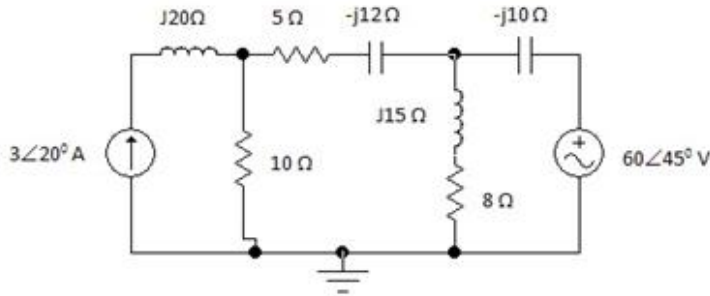
7-4 استعمل طريقة التحليل العقدي لحساب التوترين v_1 و v_2 ، والتيارات الفرعية i_1 و i_2 و i_3 في دارة الشكل م 4-7 .

8-4 احسب التيار المار في كل فرع في الدارة المبينة في الشكل م 4-8، وكذلك القدرة التي يقدمها كل منبع مستعملاً طريقة التحليل العروي أولاً، ثم طريقة التحليل العقدي تانياً.



الشكل م 7-4

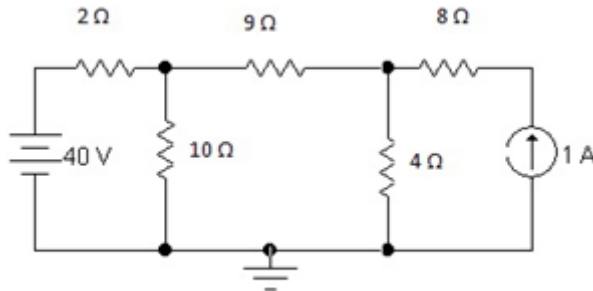
9-4 احسب التيار الذي يجري في المقاومة 10Ω من دارة الشكل م 4-9 مستعملاً طريقة التحليل العروي أو التحليل العقدي .



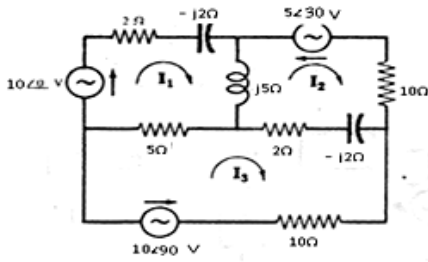
الشكل م 8-4

10-4 استعمل طريقة التحليل العقدي لحساب التيار الذي يجري في المقاومة 2Ω في دارة الشكل م 4-10 .

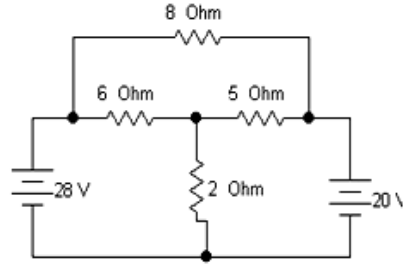
11-4 لتكن الدارة المبينة في الشكل م 4-11 وقد وضعت عليها التيارات العروية المختلفة. اكتب معادلات العروة لهذه الدارة وضعها في صيغة مصفوفة.



الشكل م 9-4

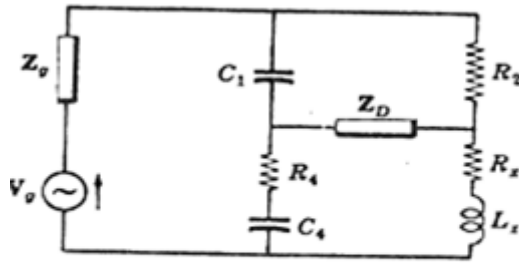


الشكل م 11-4



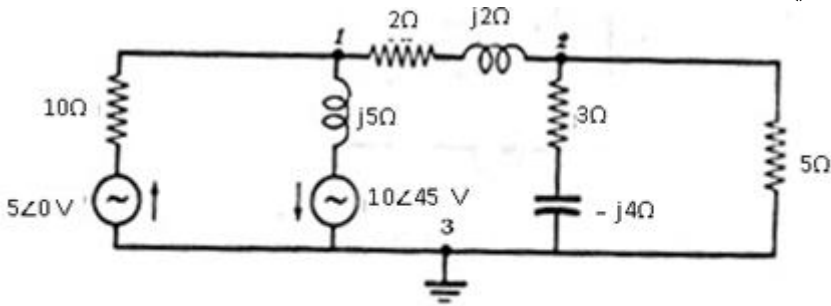
الشكل م-10-4

12-4 تسمى الدارة المبينة في الشكل م-12-4 جسر أوين. أوجد R_x و L_x بدلالة الثوابت الأخرى للجسر وذلك في وضع توازن الجسر، أي عندما يكون التيار في Z_p معدوماً.



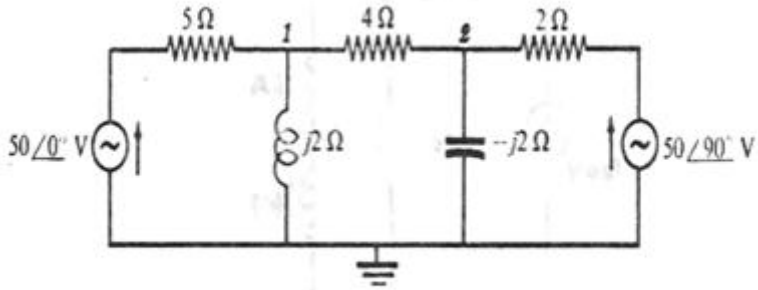
الشكل م-12-4

13-4 اكتب معادلات العقدة للشبكة الكهربائية المبينة في الشكل م-13-4 ، ثم ضعها في صيغة مصفوفة.



الشكل م-13-4

14-4 احسب توتري العقدتين 1 و 2 في الدارة المبينة في الشكل م 14-4 .



الشكل م 14-4

الفصل الخامس

نظريات الدارة الكهربائية

5-1 مقدمة:

تعد طريقتا التحليل العروي والتحليل العقدي من أهم الطرق وأكثرها استعمالاً في تحليل الدارة الكهربائية. ونستطيع بتطبيق هاتين الطريقتين حساب تيارات كل العناصر التي تتكون منها الدارة، وتوترات كل العقد الموجودة فيها. لكن كثرة العرى والعقد في الدارة يزيد عدد المعادلات التي يجب حلها، إذا أضفنا إلى ذلك أننا، في كثير من الأحيان، لا نهتم بكل هذه التفاصيل ولا نحتاج إليها للتعرف إلى الوظيفة التي تقوم بها هذه الدارة وإلى حسن أدائها. فمصممو الدارات الكهربائية يصبون جل اهتمامهم على ما يجري بين نقطتين من الدارة يوجد بينهما عنصر ما من عناصر الدارة، وهو ما نسميه بالحمولة. وفي مثل هذه الحال، نحن نهتم بمعرفة التيار الذي يجري في الحمولة والتوتر المتشكل بين طرفيها والقدرة المنقلة إليها من بقية أجزاء الدارة، بغض النظر عما تحويه الدارة من منابع متعددة ومقاومات أو ممانعات مختلفة. كما أننا قد نرغب في معرفة استجابة الدارة من أجل ممانعات حمولة مختلفة. وفي هذه الحال أيضاً لا توجد ضرورة لتطبيق أي من الطريقتين السابقتين اللتين تتطلبان عملاً رياضياً شاقاً في أغلب الأحيان. هنا يأتي دور نظريات الدارة المختلفة التي تبسط لنا طرائق الحل إلى حد كبير. وسنعرض في هذا الفصل عدداً من هذه النظريات مع تطبيقات مباشرة على كل منه

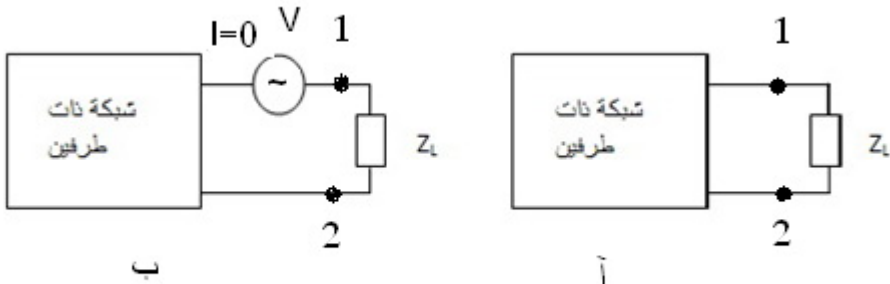
5-2 نظريتا تيفينين و نورتون:

لو رجعنا إلى ما خلصنا إليه في الفصل الأول عند الحديث عن المصادر الحقيقية والدارات المكافئة لها لاستطعنا أن نلخص ذلك بقولنا إن هناك نوعين من

الدارات المكافئة: الدارة المكافئة التسلسلية، أو مكافئ تيفينين والدارة المكافئة التفرعية، أو مكافئ نورتون. فمكافئ تيفينين هو منبع توتر مثالي على التسلسل مع مقاومة. أما منبع نورتون فهو منبع تيار مثالي على التفرع مع مقاومة أو ناقلية. سنعمم الآن مفهوم الدارة المكافئة ليشمل دارات معقدة تحتوي على منبع واحد أو أكثر وعلى عدد من العناصر كالمقاومات والتحريضيات والمكثفات، أو بشكل أعم على عدد من الممانعات. وسنجد المكافئ لهذه الدارات عندما يُنظر إليها من نقطتين يصل بينهما عنصر ما أو ممانعة والتي غالباً ما تمثل الحمولة في الدارة. إن نظرية تيفينين ونظرية نورتون توحيان كيف نحصل على هذه الدارات المكافئة في شكلها التسلسلي والتفرعي على الترتيب.

5-2-1 نظرية تيفينين Thèvenin

نفرض أن لدينا شبكة ذات طرفين 1 و 2 موضوعة ضمن صندوق أسود، كما في الجزء أ من الشكل 5-1، ولا يظهر منها إلا طرفاها اللذان تتصل بهما حمولة Z_L . نريد حساب التيار المار في هذه الحمولة. تسهل نظرية تيفينين الحل، وذلك بأن نجد الدارة المكافئة للشبكة بين النقطتين 1 و 2، وهي منبع توتر V_T على التسلسل مع ممانعة Z_T ، كما هو مبين في الجزء ب من الشكل 5-2.



الشكل 5-1

يتضح بعد ذلك مدى السهولة الحاصلة في حساب التيار المار في ممانعة الحمولة Z_L . وهذا هو نص نظرية تيفينين:

لا يتغير التيار المار في أي ممانعة Z_L موصولة بين نقطتين من شبكة إذا استبدلنا بالشبكة منبع توتر بسيط تساوي قوته المحركة الكهربائية توتر الدارة المفتوحة بين النقطتين، وممانعته الداخلية تساوي ممانعة الشبكة عندما ننظر إليها من النقطتين بعد الاستعاضة عن كل المنابع بممانعاتها الداخلية.

هذا ويمكننا أن نعرف مكافئ تيفينين لشبكة كهربائية ذات طرفين كما يأتي: إن مكافئ تيفينين لشبكة كهربائية بين طرفين أو نقطتين هو منبع توتر قيمته V_T موصول على التسلسل بممانعة Z_T . حيث V_T هو توتر الدارة المفتوحة بين النقطتين، و Z_T ممانعة الدارة كما ترى من النقطتين بعد إلغاء كل المنابع الموجودة في الدارة والاستعاضة عنها بممانعاتها الداخلية.

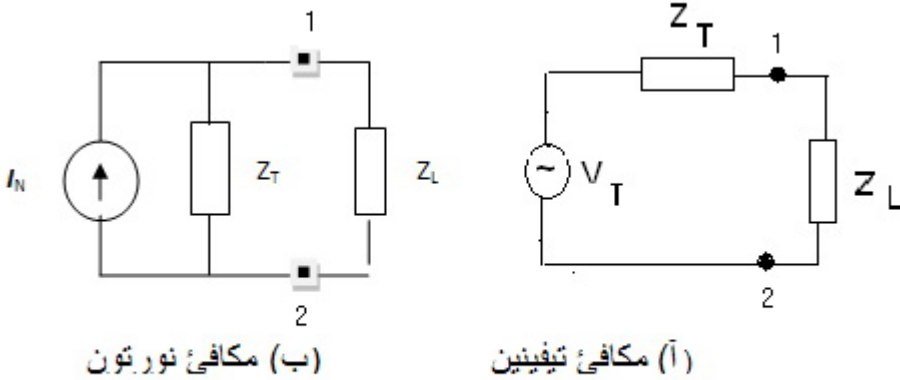
لتفسير هذه النظرية نقول: نفرض أننا أدخلنا منبعاً خارجياً إلى الدارة توتره V ووضعناه بين النقطة 1 والشبكة كما هو مبين في الجزء ب من الشكل 5-1. ولنفرض أيضاً أننا اخترنا توتره V بحيث ينعدم التيار المار في الحمولة Z_L . بعد أن يصبح التيار المار في الحمولة معدوماً، أي بين النقطتين 1 و 2، فهذا يعني أن التوتر بين طرفي الحمولة يصبح معدوماً أيضاً. وهذا يعني أيضاً أن توتر المنبع الذي أدخلناه يساوي توتر الدارة بين النقطتين 1 و 2 في حالة انعدام التيار في الحمولة. والآن يمكننا فصل الممانعة Z_L عن الدارة، أي فتح الدارة بين النقطتين، من دون إحداث أي اضطراب في الدارة، وعندها يصبح التوتر V مساوياً لتوتر الدارة المفتوحة بين النقطتين 1 و 2 أي V_T ، وهو التوتر الذي تسببه كل المنابع الموجودة في الدارة الأصلية. هذا من ناحية، ومن ناحية أخرى إذا ألغينا كل المنابع في الدارة واستعضنا عنها بممانعاتها الداخلية وأبقينا المنبع الخارجي الذي توتره V_T في مكانه فإن التيار يعود إلى الجريان في الدارة وفي الحمولة Z_L ، وتكون قيمته معطاة بالعلاقة:

$$I_L = \frac{V_T}{Z_T + Z_L} \quad (5 - 1)$$

إن مكافئ تيفينين للدارة المبينة في الجزء آ من الشكل 1-5 بين النقطتين 1 و 2 هو الجزء آ من الشكل 2-5 . ونلخص فيما يأتي الطريقة المتبعة لإيجاد كل من Z_T و V_T :

1-تعيين V_T : نفتح الدارة بين النقطتين، أي نفصل الممانعة Z_L ، ونحسب التوتر المتشكل بينهما بأي طريقة كانت، فيكون هو توتر تيفينين لأنه توتر الدارة المفتوحة بين النقطتين.

2-تعيين ممانعة تيفينين Z_T : نبقى الدارة مفتوحة بين النقطتين، ونلغي كل المصادر الموجودة في الدارة، ويتم ذلك بقصر مصادر التوتر وفتح مصادر التيار. نحسب بعد ذلك الممانعة Z_T بين الطرفين.



الشكل 2-5

2-2-5 نظرية نورتون

الدارة المكافئة حسب نورتون هي منبع تيار I_N على النفرع مع ممانعة Z_T . حيث I_N هو التيار الذي يمر بين النقطتين 1 و 2 لدى قصرهما، أي جعل الممانعة Z_L بينهما معدومة. ونحصل على قيمة منبع التيار I_N من عملية تحويل منبع التوتر إلى منبع تيار بموجب العلاقة :

$$I_N = \frac{V_T}{Z_T} \quad (5-2)$$

تنص نظرية نورتون على ما يأتي:

لا يتغير التيار الذي يمر في حمولة Z_L موصولة بين نقطتين من شبكة كهربائية إذا استعصنا عن الشبكة بمنبع تيار موصول على التفرع بممانعة. إن التيار الذي يعطيه منبع التيار هو التيار الذي يجري بين النقطتين عند قصرهما (أي جعل Z_L تساوي الصفر)، والممانعة هي ممانعة تيفينين، أي الممانعة التي نراها من النقطتين عند فتحهما وإلغاء كل المنابع في الدارة. وباختصار نقول:

يمكن استبدال أية شبكة ذات طرفين بمنبع تيار ثابت I_N على التفرع مع ممانعة Z_T ، حيث I_N هو تيار الدارة القصيرة و Z_T هي ممانعة الدارة المفتوحة بين النقطتين.

في الحقيقة، تعد نظرية نورتون وجهاً آخر لنظرية تيفينين، ويمكن استنتاجها منها مباشرة. فإذا قصرنا الممانعة Z_L في دارة الجزء أ من الشكل 5-2، مرور مولد تيفينين تياراً شدته I_N تعطيها المعادلة (5-2). وهذا التيار ثابت حتى لو تغيرت الحمولة Z_L . إذا أزلنا القصر من الدارة فإن تيار الحمولة يأخذ القيمة الآتية:

$$I_L = \frac{V_T}{Z_T + Z_L} = \frac{Z_T}{Z_T + Z_L} I_N \quad (5 - 3a)$$

هذه الصيغة الثانية لنظرية تيفينين تؤدي إلى الدارة المكافئة المبينة في الجزء ب من الشكل 5-2. إذا أردنا حساب التوتر V_L بين طرفي الحمولة Z_L واستعصنا عن الممانعات بالقبوليات فإن المعادلة السابقة تأخذ الشكل الآتي:

$$V_L = \frac{I_N}{Y_T + Y_L} \quad (5-3b)$$

هذه الصيغة الجديدة للمعادلة (5-3a) هي الصيغة التي تنتج إذا تذكرنا أن دارتي الجزئين (أ) و (ب) من الشكل 5-2 ينطبق عليهما مبدأ المثوية.

5-2-3 تطبيقات

نتناول في هذه التطبيقات عدداً من الأمثلة نبدوها بدارات تحتوي على مقاومات ومنابع مستقلة فقط ثم ننقل بعدها إلى دارات تحتوي على منابع غير مستقلة، وأخيراً نتناول دارات التيار المتناوب التي تحتوي على ممانعات.

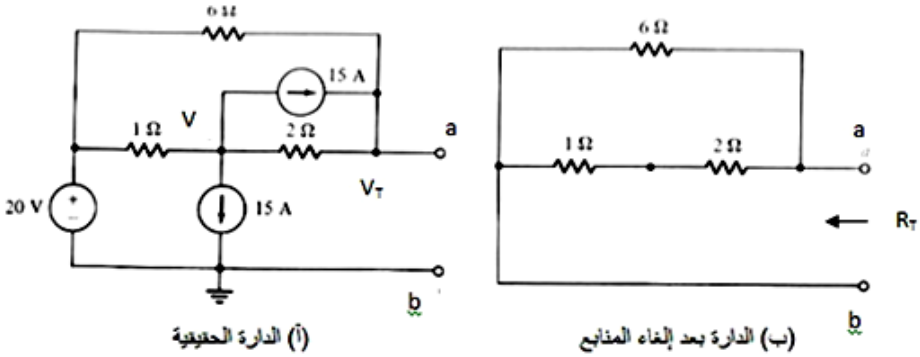
آ- الدارة تحتوي على مقاومات ومنابع مستقلة فقط:

مثال 1-

لتكن الدارة المبينة في الجزء (أ) من الشكل 3-5، أوجد دارة تيفينين المكافئة لها بين النقطتين a و b، ثم احسب التيار الذي يمر في مقاومة 3Ω عندما توصل بين هاتين النقطتين.

الحل:

سنجد أولاً مقاومة تيفينين R_T بين النقطتين a و b. نلغي جميع المنابع، فنفتح منبعي التيار ونقصر منبع التوتر فتأخذ الدارة الشكل المبين في الجزء (ب) من



الشكل 3-5

الشكل. يتضح بسهولة من الشكل أن المقاومة المكافئة هي حاصل جمع مقاومتين على التفرع: الأولى 6Ω والثانية $2+1=3\Omega$. وعليه، تكون مقاومة تيفينين:

$$R_T = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 2\Omega$$

لنحسب الآن توتر تيفينين. نلاحظ من الشكل أن $V_T = V_a - V_b$ ، لنكتب معادلتين العقدتين V و V_T للجزء (أ). معادة العقدة V:

$$(1+1/2)V - 1 \times 20 - 1/2 V_T = -15 - 15 = -30$$

معادلة العقدة V_T :

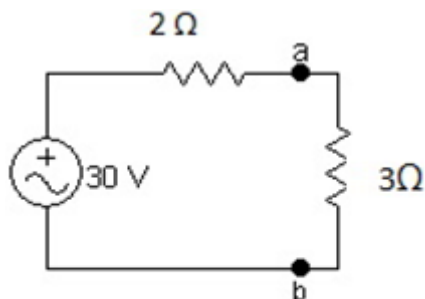
$$(1/2+1/6)V_T - 1/2 V - 1/6 \times 20 = 15$$

وبعد التبسيط تصبح هاتان المعادلتان:

$$3V - V_T = -20$$

$$-3V + 4V_T = 110$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد: $V_T = 30 \text{ V}$.



الشكل 4 5

لقد وجدنا أن $R_T = 2 \Omega$ ، وبذلك يكون مكافئ تيفينين لدارة الشكل 3-5 هو الدارة الممثلة بالشكل 4-5 ، وقد وُصِلت المقاومة $R = 3 \Omega$ بين النقطتين a و b .
لحساب التيار الذي يجري في هذه المقاومة نطبق العلاقة (5-1) فنجد:

$$I_L = \frac{V_T}{Z_T + Z_L} = \frac{30}{2+3} = 6 \text{ A}$$

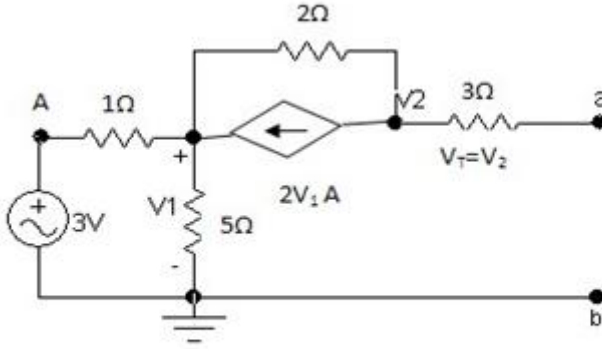
ب- الدارة تحتوي على مقاومات ومنابع غير مستقلة:

مثال 2-

لتكن الدارة المبينة في الشكل 5-5 وفيها منبع تيار غير مستقل قيمته $2V_1 \text{ A}$ ،
أوجد مكافئ تيفينين بين النقطتين a و b .

الحل:

تعيين V_T : بتحليل دارة الشكل 5-5 . نلاحظ أنه توجد ثلاث عقد هي العقدة V_1 والعقدة V_2 والعقدة A التي توترها معلوم ويساوي $3V$. كما نلاحظ أن الدارة مفتوحة بين النقطتين a و b ، وأن توتر تيفينين V_T يساوي توتر العقدة V_2 وذلك لأنه لا يجري تيار في المقاومة 3Ω ، وعليه يكون توتر النقطة a يساوي التوتر V_2 . إذن نكتب $V_T = V_a - V_b = V_2$.



الشكل 5-5

معادلة العقدة V_1 :

$$\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) V_1 - 3 \times 1 - \frac{1}{2} V_T = 2V_1$$

معادلة العقدة V_2 :

$$\frac{1}{2} V_2 - \frac{1}{2} V_1 = -2V_1$$

وبعد التبسيط نحصل على المعادلتين الآتيتين:

$$3V_1 + V_2 = 0 \quad , \quad -3V_1 - 5V_2 = 30$$

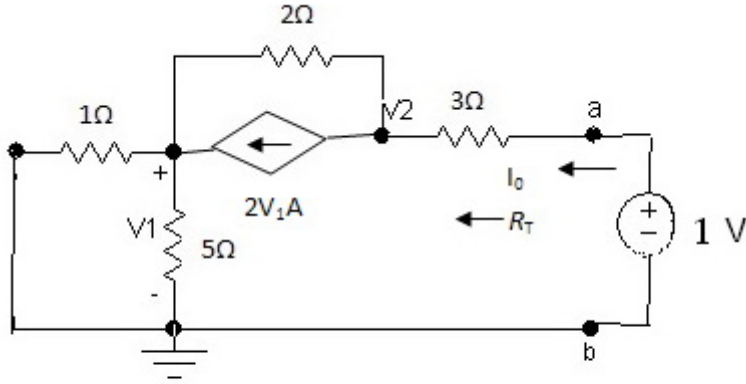
بحل هاتين المعادلتين نحصل على: $V_T = V_2 = 7.5V$

حساب R_T : حصلنا على مقاومة تيفينين في المثال السابق مباشرة عن طريق جمع المقاومات بعد حذف المصادر. أما في حال وجود منابع غير مستقلة فتوجد طريقتان لعمل ذلك.

الطريقة الأولى: نضع منبع توتر بين النقطتين a و b توتره V_0 ، ونحسب التيار الجاري فيه I_0 بعد حذف المصادر المستقلة والإبقاء على المصادر غير المستقلة، ثم نحسب المقاومة R_T من العلاقة $R_T = V_0 / I_0$.

الطريقة الثانية: نقصر الدارة بين النقطتين a و b ونحسب تيار نورتون I_N ، ثم نحسب R_T بتقسيم V_T على I_N .

سوف نطبق هنا الطريقة الأولى، ونختار قيمة منبع التوتر الخارجي $V_0 = 1\text{ V}$ وبذلك تكون مقاومة تيفينين $R_T = 1 / I_0$.



الشكل 5-6

يبين الشكل 5-6 الدارة بعد حذف المصادر المستقلة وإدخال المنبع الخارجي. بعد

الرجوع إلى الشكل يحسب التيار I_0 من العلاقة :

$$I_0 = \frac{V_a - V_2}{3} = \frac{1 - V_2}{3}$$

نحسب الآن V_2 . نطبق التحليل العقدي على العقدتين V_1 و V_2 : معادلة العقدة :

$$V_1 \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} V_2 = 2V_1$$

معادلة العقدة V_2 :

$$-\frac{1}{2} V_1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) V_2 - \frac{V_0}{3} = -2V_1$$

بحل هاتين المعادلتين، علماً بأن $V_0 = 1 \text{ V}$ ، نجد:

$$V_1 = 0.33 \text{ V} \text{ و } V_2 = -0.2 \text{ V} .$$

أما قيمة I_0 فهي: $I_0 = 0.4 \text{ A}$ ، وعليه تكون مقاومة تيفينين $R_T = 1/I_0 = 2.5 \Omega$

ملاحظة: إن مقاومة تيفينين (2.5Ω) هي حاصل جمع المقاومة 3Ω مع مقاومة

باقي الدارة R'_T ، وهذا يعني أن مقاومة باقي أجزاء الدارة R'_T هي:

$R'_T = 2.5 - 3 = -0.5\Omega$. وهي مقاومة سالبة، وهي ناتجة عن وجود المنبع غير

المستقل.

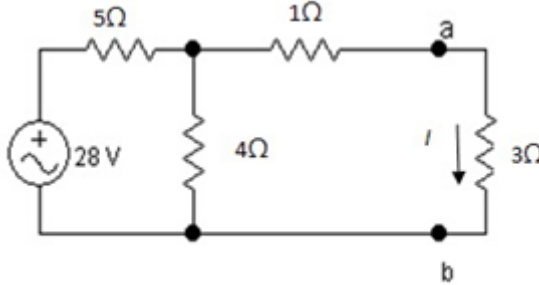
ج- مكافئ نورتون بوجود منابع مستقلة فقط:

مثال 3-

لتكن الدارة المبينة في الشكل 5-7، والمطلوب إيجاد مكافئ نورتون للجزء

الواقع إلى يسار النقطتين a و b، ثم الاستفادة من ذلك لحساب التيار I الذي يمر

في المقاومة 3Ω .

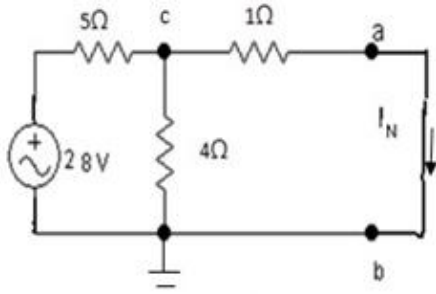


الشكل 5-7

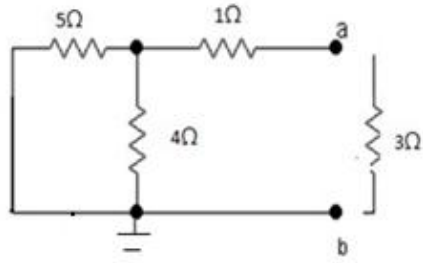
الحل:

حساب R_T :

نفتح بين النقطتين a و b ونقصر منبع التوتر، فتعدو الدارة كما في الشكل 5-8.



الشكل 5-9



الشكل 5-8

من الشكل 5-8 نجد بسهولة:

$$R_T = 1 + \frac{4 \times 5}{4 + 5} = 3.2 \Omega$$

حساب I_N : نقصر الدارة بين النقطتين a و b فتأخذ الشكل 5-9 .

يمكن استعمال أي طريقة لحساب التيار I_N . فإذا أجرينا التحليل العقدي على العقدة c ، نكتب بعدها: $I_N = V_c / 1$.

معادلة العقدة c :

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1}\right) V_c - \frac{1}{5}(28) - \frac{1}{1}(0) = 0$$

من هذه المعادلة نجد: $V_c = 3.86 \text{ V}$ ، وعليه فالتيار I_N يكون $I_N = 3.86 \text{ A}$.

نحسب الآن التيار المار في المقاومة 3Ω من العلاقة:

$$I = \frac{R_T}{R_T + R_L} I_N = \frac{3.2}{3.2 + 3} \times 3.86 = 2 \text{ A}$$

د- مكافئ نورتون بوجود منابع مستقلة وغير مستقلة:

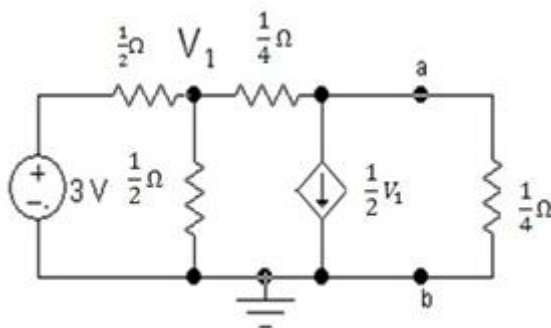
مثال 4-

لتكن الدارة المبينة في الشكل 5-10 أوجد مكافئ نورتون وتيفينين لها بين النقطتين a و b ، ثم احسب التيار في المقاومة $\frac{1}{4} \Omega$.

الحل:

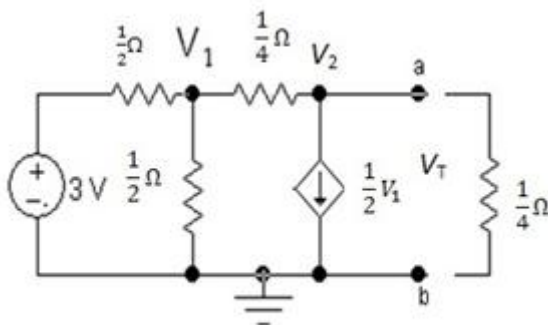
نفتح الدارة بين النقطتين a و b ونحسب التوتر بينهما فيكون هو V_T . ثم نقصر الدارة بين النقطتين ونحسب التيار الجاري بينهما فيكون هو I_N . ثم نحسب بعد

ذلك R_T بقسمة V_T على I_N .



الشكل 10-5

حساب V_T : نفتح الدارة بين النقطتين a و b فتصبح كما في الشكل 5-11 .



الشكل 11-5

يتضح من الشكل أن $V_T = V_2$. نكتب معادلتي العقدتين 1, 2 فنجد:

معادلة العقدة V_1 :

$$(2 + 2 + 4)V_1 - 2 \times 3 - 4V_2 = 0$$

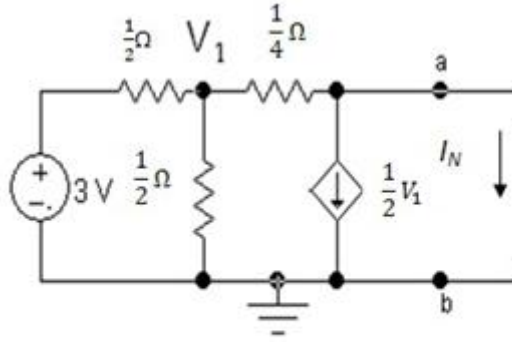
معادلة العقدة V_2 :

$$4V_1 - 4V_2 = \frac{1}{2}V_1$$

بحل هاتين المعادلتين نجد: $V_1 = 1.33 \text{ V}$ و $V_T = V_2 = 1.16 \text{ V}$

حساب I_N : نقصر الدارة بين النقطتين فتصبح كما في الشكل 5-12 . نلاحظ

أن كمون العقدة V_2 صار صفراً لأنها أصبحت موصولة بالأرض بعد القصر.



الشكل 12-5

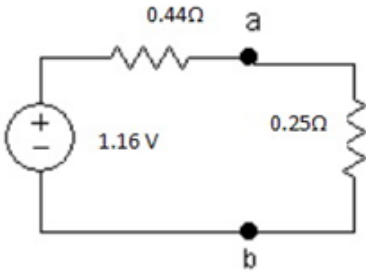
معادلة العقدة V_1 :

$$(2 + 2 + 4)V_1 - 2 \times 3 - 4 \times 0 = 0$$

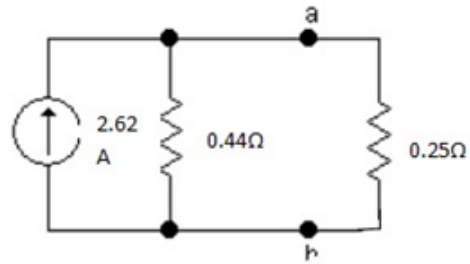
معادلة العقدة V_2 :

$$4 \times 0 - 4V_1 = -\frac{1}{2}V_1 - I_N$$

بحل هاتين المعادلتين نجد: $V_1 = 0.75 \text{ V}$ و $I_N = 2.62 \text{ A}$.



(ب)



(i)

الشكل 13-5

حساب R_T : نحسب الآن مقاومة تيفينين بالطريقة الثانية من العلاقة:

$$R_T = \frac{V_T}{I_N}$$

ومنها نجد: $R_T = 0.44 \Omega$

إن مكافئ نورتون وتيفينين للدارة بين النقطتين a و b هما المبينان في الجزعين آ و ب من الشكل 5-13 على الترتيب.

هـ: مكافئ تيفينين ومكافئ نورتون بوجود ممانعات:

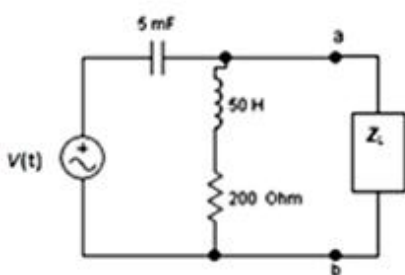
مثال 5-

لتكن الدارة المبينة في الجزء (أ) من الشكل 5-14 حيث منبع التوتر معطى

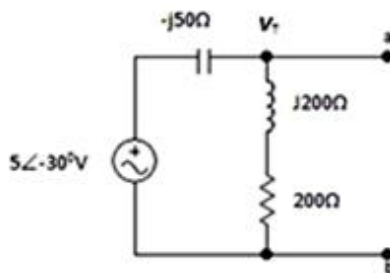
$$Vv(t) = 5 \cos(4t - 30^\circ)$$

آ- أوجد مكافئ تيفينين بين النقطتين a و b الواقعتين إلى يسار الحمولة Z_L .

ب- أوجد أيضاً مكافئ نورتون بين هاتين النقطتين.



(أ) مخطط الدارة في نطاق الزمن



(ب) مخطط الدارة في نطاق التواتر

الشكل 14-5

الحل

الجزء (أ) من الشكل 5-14 هو مخطط للدارة في نطاق الزمن، بينما يمثل

الجزء (ب) المخطط في نطاق التواتر وقد فتحنا الدارة بين النقطتين اللتين

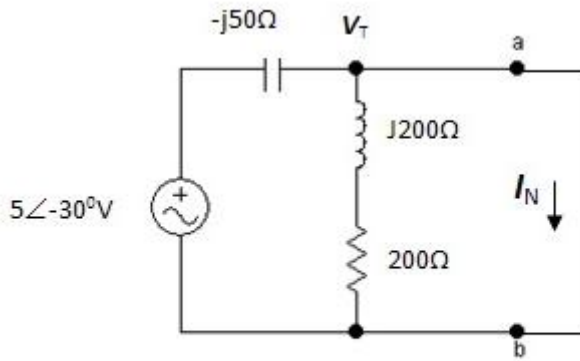
اتصلت بهما الحمولة.

حساب V_T : نحسب V_T من مجزئ الكمون في الجزء (ب) من الشكل فنجد:

$$V_T = \frac{5\angle-30^\circ}{-j50+j200+200} (200 + j200) = 3\sqrt{2}\angle -21.9^\circ$$

حساب Z_T : نقصر المنبع ونحسب ممانعة تيفينين بين النقطتين a و b . بما أن المكثفة موصولة على التفرع مع الممانعة ($200+j200$) فمجموعهما:

$$Z_T = \frac{-j50(200+j200)}{-j5+j200+200} = 8 - j56 = 40\sqrt{2} \angle -81.9^\circ \Omega$$



الشكل 5-15

مكافئ نورتون: وجدنا Z_T ، سنجد الآن تيار نورتون I_N . من أجل ذلك نقصر الدارة بين النقطتين ونبقي على منبع التوتر، ونحسب التيار الجاري بين هاتين النقطتين. تصبح الدارة كما هو مبين في الشكل 5-15 . لحساب التيار I_N نلاحظ أن التيار الذي يعطيه المنبع يمر كله في المكثفة وسلك الدارة القصيرة بين a و b، ولا يمر منه شيء في المقاومة والتحريضية بسبب القصر الحاصل بينهما. إذن:

$$I_N = \frac{5\angle-30^\circ}{-j50} = 0.1\angle60^\circ \text{A}$$

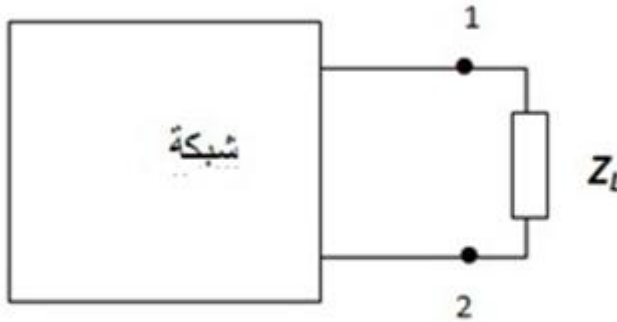
3-5 نظرية انتقال القدرة العظمى:

عندما توجد حمولة موصولة بين طرفي منبع، أو عند وصل دارة أولى بدارة

ثانية، فالذي نهتم به هو معرفة كم هي القدرة المنتقلة من المنبع إلى الحمل أو من الدارة الأولى إلى الدارة الثانية. وإن ما نهتم به ونريد أن نعرفه بصورة خاصة هو انتقال أعظم قدرة في الحالتين، وهو ما تجيب عليه هذه النظرية التي نصها ما يأتي:

عندما تنتقل القدرة من دارة إلى حمل أو إلى دارة أخرى موصولة بها عند طرفيها، فإن هذه القدرة المنتقلة تكون عظمى عندما يكون للدارة والحمل المتصلة بها، أو عندما يكون للدارتين، ونحن ننظر إليهما من نقطتي اتصالهما، ممانعتان مترافقتان عقدياً. أي لهما قيمة واحدة وطوران متعاكسان. وبتعبير آخر نقول: تكون القدرة المنتقلة من منبع إلى حمل عظمى عندما تكون الممانعة العقدية للحمل مساوية للمرافق العقدي للممانعة المنبع.

يمكن البرهان على صحة هذه النظرية كما يأتي:

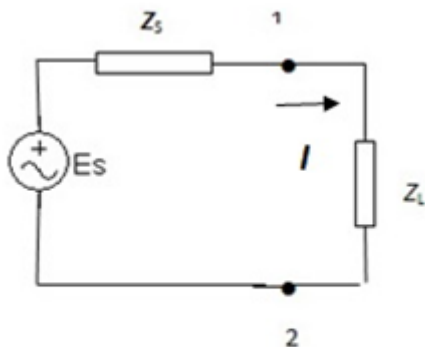


الشكل 5-16

لنفرض أن لدينا شبكة ذات طرفين 1 و2، وهناك حمل Z_L ، أو دارة أخرى ممانعة دخلها Z_L ، موصولة بينهما كما في الشكل 5-16. يمكننا، حسب نظرية تيفينين، أن نستبدل بالشبكة بين النقطتين 1 و2 شبكة أخرى مكافئة لها مكونة من منبع توتره E_S على التسلسل مع ممانعة Z_S ، كما في الشكل 5-17. نكتب

$$Z_S = R_S + jX_S \quad \text{على الشكل الآتي:}$$

كما نكتب الحمولة على الشكل: $Z_L = R_L + jX_L$



الشكل 17-5

تعطى القدرة المنتقلة إلى الحمولة بالعلاقة: $P = I^2 R_L$ ، حيث نعني بالقدرة هنا القدرة الحقيقية. نحسب التيار من دائرة الشكل 17-5 فنجد:

$$I = \frac{E}{Z_S + Z_L} = \frac{E}{(R_S + R_L) + j(X_S + X_L)} \quad (5 - 4)$$

وتكون قيمة التيار:

$$I = \frac{E}{\sqrt{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2}} \quad (5 - 5)$$

نعوض في معادلة القدرة فنحصل على:

$$P = \frac{E^2 R_L}{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2} \quad (5 - 6)$$

تشير هذه العلاقة إلى أن القدرة تابعة للحمولة المؤلفة من مقاومة R_L وردية X_L متغيرتين. والشروط التي يجب أن تتحقق كي تكون القدرة عظمى هي أن ينعقد المشتقان الجزئيان للقدرة بالنسبة لكل من المقاومة والردية. نعبر عن هذين الشرطين رياضياً بالعلاقتين الآتيتين:

$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = 0 , \quad \frac{\partial P}{\partial X_L} = 0 \quad (5 - 7)$$

بإجراء الاشتقاق الجزئي في كل معادلة وحل المعادلتين الناتجتين نحصل على الشرطين الآتيين:

$$X_L = -X_S \quad \text{و} \quad R_L = R_S \quad (5-8)$$

وبدلالة الممانعة، يكتب هذان الشرطان على النحو الآتي:

$$Z_L = R_S - jX_S = Z_S^* \quad (5 - 9)$$

وهذا يعني أن ممانعة الحملية يجب أن تكون مساوية المرافق العقدي لممانعة المنبع كي تنتقل أعظم قدرة من المنبع إلى الحملية. وتؤول علاقة القدرة في هذه الحالة إلى:

$$P = \frac{E^2}{4R_L} \quad (5 - 10)$$

وهكذا نرى أن القدرة المنتقلة من المنبع إلى الحملية Z_L تصبح عظمى عن طريق التحكم في الممانعات حتى يتحقق الشرطان السابقان. ويتم ذلك عادة بالتحكم في Z_L بواسطة محولة بحيث تصبح المركبة الأومية R_L للحمولة مساوية المركبة الأومية R_S لممانعة المنبع، كما تصبح المركبة الردية X_L للحمولة مساوية المرافق العقدي للمركبة الردية للمنبع (أي تساوي $-X_S$). تسمى هذه العملية التوفيق المرافق أو توفيق الممانعات.

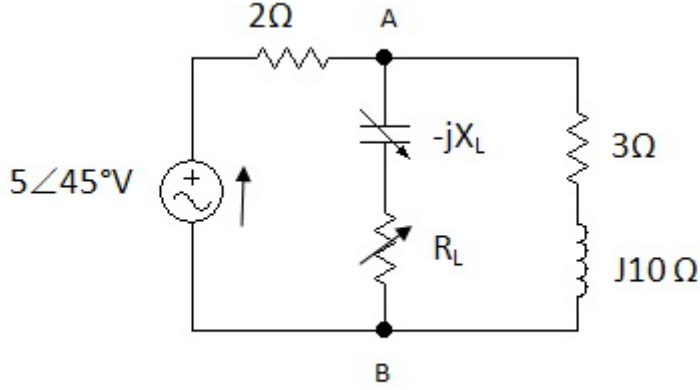
مثال 6-

لتكن الدارة المبينة في الشكل 5-18 حيث الحملية فيها موصولة بين النقطتين A و B ، وهي مؤلفة من مقاومة متغيرة R_L وردية وسعية متغيرة أيضاً X_L . عين كلاً من R_L و X_L كي يحدث أعظم انتقال للقدرة من المنبع إلى الحملية. احسب قيمة هذه القدرة المنتقلة.

الحل:

نجد مكافئ تيفينين لهذه الدارة بين النقطتين A و B . نفتح الدارة بين النقطتين A و B ، فنحذف بذلك الحملية. نحسب توتر تيفينين V_T بين A و B بطريقة تجزئة الكمون فنجد:

$$V_T = \frac{5\angle 45^\circ}{2+3+j10} (3 + j10) = 2.687 + j3.819 = 4.67\angle 54.9^\circ V$$



الشكل 5-18

حساب ممانعة تيفينين Z_T : نقصر منبع التوتر، ونفتح بين A و B كما سبق، فنجد أن ممانعة تيفينين بينهما تساوي:

$$Z_T = \frac{2(3+j10)}{2+3+j10} = (1.84 + j0.32)\Omega$$

إذن، فالدارة المكافئة هي منبع توتر قيمته $4.67\angle 54.9^\circ V$ موصل على التسلسل مع ممانعة مؤلفة من مقاومة قيمتها 1.84Ω على التسلسل مع ردية تحريضية قيمتها 0.32Ω .

أما شرط انتقال أكبر قدرة إلى الحمولة فيتم عندما نختار ممانعة الحمولة بحيث تساوي المرافق العقدي لممانعة المنبع. وبما أن ممانعة المنبع في الدارة المكافئة تساوي: $Z_T = (1.84 + j0.32)\Omega$ ، فممانعة الحمولة تكون إذن:

$$Z_L = Z_T^* = (1.84 - j0.32)\Omega$$

وهذا يعني أنه يجب أن نختار مقاومة للحمولة قيمتها $R_L = 1.84\Omega$ ومكتفة رديتها الوسعية $X_L = -0.32\Omega$.

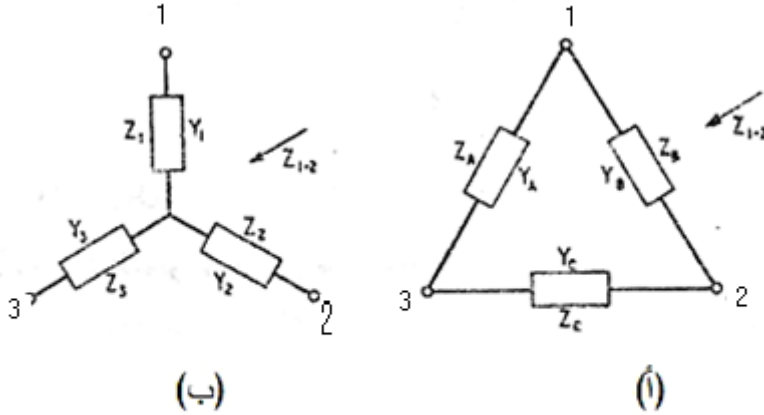
نحسب القدرة العظمى المنتقلة إلى الحمولة من العلاقة:

$$P_{max} = \frac{E^2}{4R_L} = \frac{V_T^2}{4R_L} = \frac{4.67^2}{4 \times 1.84} = 2.96 W$$

4-5 نظرية كِنلي :Kennly

تبين هذه النظرية كيف نحول تركيبة مؤلفة من ثلاث ممانعات موصولة بين ثلاث نقاط تشكل رؤوس مثلث، ولكل منها توتره الخاص، كما في الجزء (أ) من الشكل 5-19، إلى تركيبة أخرى مكافئة لها بين النقاط الثلاث يتصل كل منها برأس من رؤوس المثلث وتشارك جميعها في نقطة واحدة تقع داخل المثلث كما هو مبين في الجزء (ب) من الشكل 5-19. يدعى الوصل في التركيبة الأولى الوصل المثلثي أو الوصل دلتا ؛ لأنه يشبه الرمز Δ . ويدعى الوصل في التركيبة الثانية الوصل النجمي أو الوصل واي ؛ لأنه يشبه الحرف اللاتيني Y . وهناك تسميات أخرى كالوصل π للأولى والوصل T للثانية، وهما التسميتان الشائعتان عند الحديث عن الشبكات رباعية الأطراف.

يبين الشكل 5-19 ثلاث ممانعات موصولة بين ثلاثة أطراف بطريقتين: (أ) بطريقة الوصل المثلثي، و (ب) بطريقة الوصل النجمي. تتلخص نظرية كِنلي بإيجاد العلاقات بين عناصر التركيبتين كي تكونا متكافئتين.



الشكل 5-19

كي تكون التركيبتان متكافئتين ينبغي أن تكون الممانعتان، أو القبوليتان، الكائنتان بين طرفين متماثلين في التركيبتين متساويتين.

آ-التحويل من الوصل المثلثي إلى الوصل النجمي:

نحسب، في شروط الدارة المفتوحة، الممانعتين المقيستين بين طرفين متماثلين في التركيبتين ونساوي بينهما، فنحصل على مجموعة المعادلات الآتية:

$$\begin{array}{l}
 \text{وصل مثلثي} \\
 \text{وصل نجمي} \\
 \text{الممانعة} \\
 \text{بين الطرفين}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 Z_{12} \\
 Z_{23} \\
 Z_{31}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 Z_1 + Z_2 \\
 Z_2 + Z_3 \\
 Z_3 + Z_1
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 \frac{Z_B(Z_A + Z_C)}{Z_A + Z_B + Z_C} \\
 \frac{Z_C(Z_A + Z_B)}{Z_A + Z_B + Z_C} \\
 \frac{Z_A(Z_B + Z_C)}{Z_A + Z_B + Z_C}
 \end{array}
 \quad (A)$$

لدينا الآن مجموعة من ثلاث معادلات (A)، فإذا كانت الممانعات Z_A, Z_B, Z_C معلومة يمكننا إيجاد Z_1 و Z_2 و Z_3 بدالاتها، وبذلك نكون قد وجدنا عناصر التركيب النجمي المكافئ لتركيب مثلثي معلوم. إذا جمعنا المعادلات الثلاث طرفاً إلى طرف، وطرحنا من المجموع إحدى المعادلات وكررنا هذه العملية ثلاث مرات نحصل على عناصر التركيب النجمي المكافئ وهي:

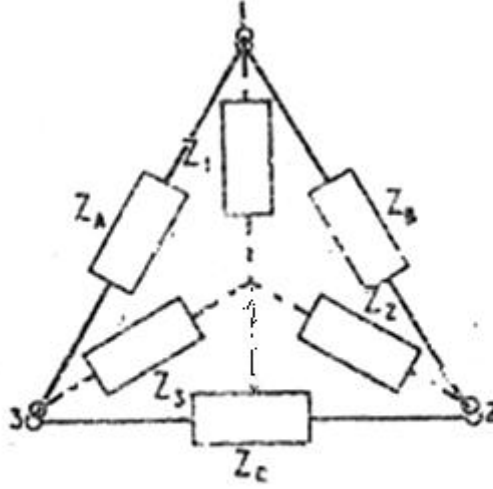
$$Z_1 = \frac{Z_A Z_B}{\Delta}, \quad Z_2 = \frac{Z_B Z_C}{\Delta}, \quad Z_3 = \frac{Z_C Z_A}{\Delta} \quad (5 - 11)$$

حيث

$$\Delta = Z_A + Z_B + Z_C \quad (5-12)$$

تمثل المعادلات (5-11) و (5-12) علاقات التحويل من الوصل المثلثي إلى الوصل النجمي. ولتسهيل حفظها وتذكرها ننظر إلى الشكل 5-20 الذي فيه تركيبية الوصل المثلثي وقد أدخل عليه بخطوط متقطعة تركيبية الوصل النجمي المكافئ. من النظر إلى الشكل وإلى معادلات التحويل نلاحظ أن الممانعة في

الوصل النجمي المكافئ تساوي جداء ممانعتي الوصل المثلثي المحصورة بينهما مقسوماً على Δ التي هي مجموع ممانعات الوصل المثلثي.



الشكل 20-5

ب- التحويل من الوصل النجمي إلى الوصل المثلثي:

بحل مجموعة المعادلات (A) باعتبار عناصر الوصل المثلثي هي المجاهيل نجد:

$$Z_A = \frac{1}{Z_2} (Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1)$$

$$Z_B = \frac{1}{Z_3} (Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1) \quad (5-13)$$

$$Z_C = \frac{1}{Z_1} (Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1)$$

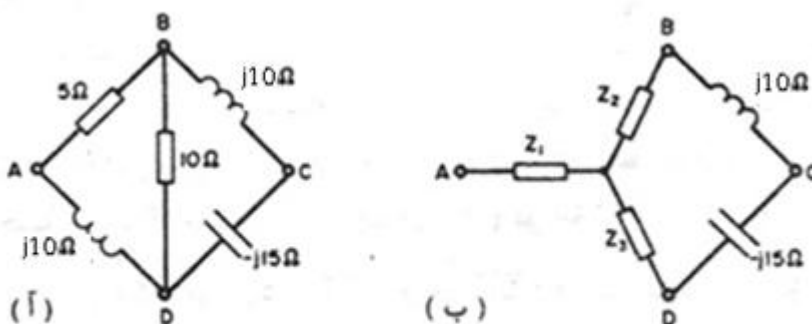
من النظر إلى الشكل 20-5 وإلى معادلات التحويل (5-13) نلاحظ أن الممانعة المتصلة برأسين من المثلث في تركيبه الوصل المثلثي تساوي مجموع جداءات

ممانعات التركيبة النجمية مثنى مثنى مقسوماً على الممانعة في التركيب النجمي الواقعة بين الممانعتين الأخريتين في التركيب المثلثي.

ملاحظة: يمكن إيجاد صيغة أخرى للمعادلات (5-13) إذا استعملنا القبوليات بدلاً من الممانعات، وعندئذ ستكون مماثلة في شكلها لصيغة معادلات التحويل من مثلثي إلى نجمي ولكن بدلالة القبوليات بدلاً من الممانعات.

مثال 7-

عين الممانعة المكافئة للجزء (أ) من الشكل 5-21 بين النقطتين A و C.



الشكل 5-21

الحل:

نحول العروة ABD إلى تركيب نجمي، فنحصل على الدارة المبينة في الجزء (ب) من الشكل 5-21، وفيه :

$$Z_1 = \frac{Z_{AB}Z_{AD}}{Z_{AB} + Z_{BD} + Z_{AD}} = \frac{j50}{15 + j10}$$

$$= (1.54 + j2.31) \Omega.$$

$$Z_2 = \frac{50}{15 + j10} = (2.31 - j1.54) \Omega$$

$$Z_3 = \frac{j100}{15 + j10} = (3.08 + j4.62) \Omega.$$

وبالرجوع إلى الجزء ب من الشكل 5-21 نضع:

$$Z_4 = Z_2 + j20 = (2.31 + j18.46) \Omega$$

$$Z_5 = Z_3 - j15 = (3.08 - j10.38) \Omega$$

نرمز الآن لحاصل جمع Z_4 و Z_5 على الفرع بالممانعة Z_6 ، فيكون لدينا:

$$Z_6 = \frac{Z_4 Z_5}{Z_4 + Z_5} = (14.16 - j15.12) \Omega$$

وأخيراً تكون الممانعة المطلوبة:

$$Z_{AC} = Z_1 + Z_6 = (15.70 - j12.81) \Omega$$

5-5 نظرية الانضمام superposition

إذا وجد في الدارة الخطية منبعان مستقلان أو أكثر من منابع التوتر أو التيار، فإن التوتر بين طرفي أي فرع منها، أو التيار الجاري فيه هو حاصل الجمع الجبري للتوترات أو التيارات في ذلك الفرع الناتجة عن تأثير كل منبع لوحده مع إلغاء كل منابع الأخرى. فمثلاً، إذا كان في الدارة ثلاثة منابع فإن التوتر V بين طرفي أحد الفروع هو: $V = V_1 + V_2 + V_3$ ، حيث V_1 هو التوتر الذي يحدثه المنبع الأول لوحده بعد إلغاء المنبعين الثاني والثالث، و V_2 هو التوتر الذي يحدثه المنبع الثاني لوحده، و V_3 هو التوتر الذي يحدثه المنبع الثالث لوحده، بعد إلغاء بقية المصادر. كما أن التيار I الجاري في هذا الفرع هو: $I = I_1 + I_2 + I_3$ ، حيث I_1 هو التيار الذي يحدثه المنبع الأول لوحده بعد إلغاء المنبعين الثاني والثالث. ونجد I_2 و I_3 بالطريقة نفسها.

لإلغاء المصادر نتبع ما يأتي: يُلغى منبع التوتر بقصره والاستعاضة عنه بمقاومته

أو ممانعته الداخلية إن وجدت، ويلغى منبع التيار بفتحه والاستعاضة عنه بمقاومته أو ممانعته الداخلية إن وجدت.

تعرف الدارة الخطية بأنها الدارة التي تتكون من عناصر منفصلة حيث تكون العلاقة بين التوتر والتيار فيها علاقة خطية. ويمكن أن نعد الدارة خطية أيضاً إذا وجد فيها منابع غير مستقلة خطية. ويعتبر المنبع غير المستقل خطياً، سواء أكان منبع توتر أم منبع تيار، إذا كان يعطي توتراً أو تياراً متناسباً مع التيار أو التوتر من الدرجة الأولى. فمثلاً، يعد منبع التوتر غير المستقل $v = 3i$ ، ومنبع التيار غير المستقل $i = 4v_x$ خطيان، بينما المنبع غير المستقل $v_s = 6i_1^2$ والمنبع غير المستقل $v_s = 6i_1v_2$ غير خطيين.

تعد نظرية الانضمام الصيغة الأعم لخطية الدارة الكهربائية، وتتص على ما يأتي:

يمكن الحصول على الاستجابة (التيار أو التوتر المرغوبين) في أي نقطة من دارة خطية فيها أكثر من منبع مستقل واحد (منبع تيار أو منبع توتر) بأخذ مجموع الاستجابات التي يسببها كل منبع مستقل عندما يؤثر لوحده.

إن البرهان على نظرية الانضمام موجود ضمناً في طريقتي التحليل العروي والتحليل العقدي. فلو رجعنا إلى مجموعة المعادلات (4-4) إلى (4-6) وصيغتها المصفوفية الممثلة بالمعادلة (4-7)، والتي تعطي قيم التيارات في دارة مؤلفة من ثلاث عرى ويوجد فيها أكثر من منبع واحد للتوتر، تمكنا من كتابة صيغ التيارات العروية الثلاثة، كما جاءت في (4-10)، على النحو الآتي:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \quad (5 - 14)$$

حيث Δ هو معين الأمثال، أي معين مصفوفة الممانعة $[Z]$ ، و Δ_1 هو المعين الذي نحصل عليه من الاستعاضة عن عناصر العمود الأول في المعين Δ

بعناصر المصفوفة [V] ، أي معين المصفوفة [V] . وعليه، يمكن كتابة صيغة كل تيار من هذه التيارات الثلاثة كمجموع ثلاثة حدود. فمن أجل التيار I_1 نكتب:

$$I_1 = V_1 \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta} \right) + (V_2 - V_3) \left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta} \right) + V_3 \left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta} \right) \quad (5-15)$$

حيث Δ_{11} و Δ_{21} و Δ_{31} هي المعينات التي نحصل عليها من المعين Δ بعد حذف العمود الأول والسطر الأول، والعمود الأول والسطر الثاني، والعمود الأول والسطر الثالث منه على الترتيب. تشير المعادلة (5-15) إلى أن التيار العرووي I_1 الذي يجري في العروة الأولى مكون من مجموعة من الحدود هي مركبات التيارات الناتجة عن منابع التوتر الموجودة في الدارة عندما يؤثر كل منها لوحده في الدارة. هذا، ويمكننا التعبير عن التيارين العرويين الآخرين I_2 و I_3 بالطريقة نفسها، مما يدل على أن مبدأ الانضمام محقق في الشبكة الخطية وموجود ضمناً في طريقة التحليل العرووي.

يمكننا كذلك، - اعتماداً على نتائج طريقة التحليل العقدي- أن نبين أن توتر العقدة V_1 ، مثلاً، هو مجموع مركبات التوترات الناتجة عن كل منبع من منابع التيار المختلفة الموجودة في الدارة والتي تشكل توتر العقدة الأولى. وينطبق الأمر نفسه على توترات العقد الأخرى.

ملاحظة: ليس بالضرورة أن يكون تحليل الدارة بتطبيق نظرية الانضمام أسهل من استعمال الطرق الأخرى؛ ، بل على العكس من ذلك، قد يتطلب تطبيق هذه النظرية استعمال تلك الطرق لإنجاز الحل كما سنرى في الأمثلة اللاحقة.

5-5-1 أمثلة محلولة

سنتناول في هذه الأمثلة الدارة في عدة حالات: آ- الدارة مؤلفة من مقاومات ومنابع مستقلة، ب- الدارة مؤلفة من مقاومات ومنابع غير مستقلة، ج- الدارة مؤلفة من ممانعات.

آ- دارة مقاومات ومنابع مستقلة

مثال 8-

لتكن الدارة المبينة في الشكل 5-22 ، احسب توتر العقدة V .

الحل:

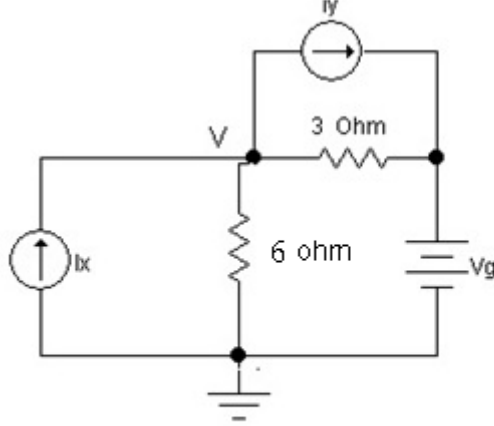
تحتوي الدارة على منبعي تيار مستقلين ومنبع توتر مستقل. لإيجاد توتر العقدة V نطبق طريقة التحليل العقدي على هذه العقدة علماً أن توتر العقدة الأخرى

معلوم ويساوي v_g ، فنجد:

$$V \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{3} v_g = -i_y + i_x$$

التي نكتبها بعد الإصلاح على الشكل الآتي:

$$V = 2/3 v_g + 2i_x - 2i_y$$



الشكل 5-22

1- نلغي منبعي التيار فنضع $i_x = i_y = 0$ في المعادلة السابقة فنجد المركبة

$$V_1 = 2/3 v_g \text{ الأولى}$$

2- نلغي منبعي التيار i_x ومنبعي التوتر v_g ونضع $i_x = 0$ و $v_g = 0$ ونجد المركبة

$$V_2 = -2i_y \text{ الثانية}$$

3- نلغي منبعي التيار i_y ومنبعي التوتر v_g ونضع $i_y = 0$ و $v_g = 0$ ونجد المركبة

الثالثة $V_3 = 2i_x$. وأخيراً يكون توتر العقدة V الكلي الناتج عن المنابع الثلاثة هو

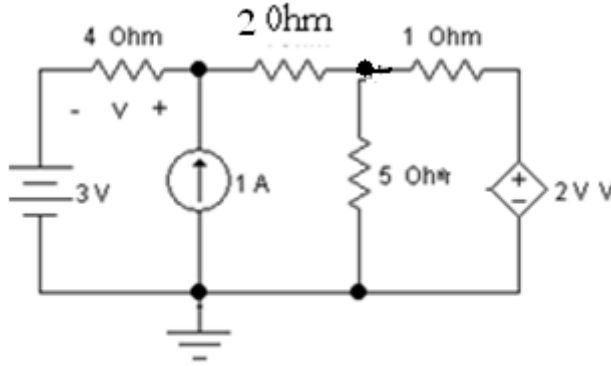
حاصل جمع المركبات الثلاث المحسوبة أعلاه، ويساوي:

$$V = v_1 + v_2 + v_3 = 2/3v_g + 2i_x - 2i_y$$

ب- دائرة مكونة من مقاومات مع وجود منابع غير مستقلة:

مثال 9-

لتكن الدارة المبينة في الشكل 5-23 ، احسب التوتر V بين طرفي المقاومة 4Ω .



الشكل 5-23

الحل:

لإيجاد التوتر V يكفي إيجاد التيار المار في المقاومة 4Ω لأن $V = -4I$ ، حيث I هو التيار المار في المقاومة 4Ω . ولحساب هذا التيار نتبع ما يأتي:

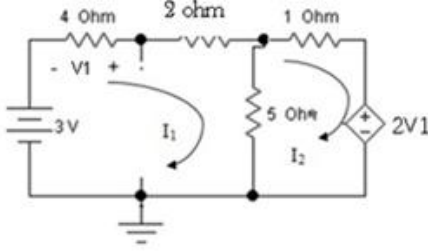
1- نلغي منبع التيار بفتحه، فتصبح الدارة كما في الشكل 5-23a . نستعمل طريقة التحليل العروري على العروتين 1 و 2 فنحصل بعد التبسيط على المعادلتين الآتيتين اللتين تعطياننا المركبة الأولى I_1 للتيار، ومنها نجد المركبة الأولى V_1 التي نكتبها: $V_1 = -4I_1$. والمعادلتان الناتجتان هما:

$$11I_1 - 5I_2 = 3 \quad \text{و}$$

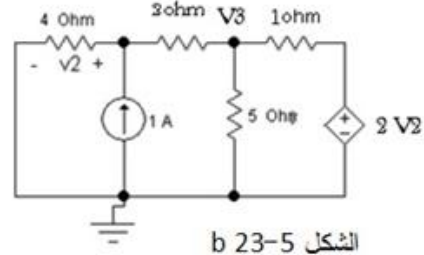
$$-13 I_1 + 6 I_2 = 0 \quad \text{التي تكتب: } -5I_1 + 6I_2 = -2V_1 = 8 I_1$$

وحلها يعطي: $I_1 = 18 \text{ A}$ و $I_2 = 39 \text{ A}$

وبذلك يكون: $V_1 = -4 I_1 = -72 \text{ V}$



الشكل 5-23 a



الشكل 5-23 b

2- نجد الآن المركبة الثانية V_2 التي يعطيها منبع التيار لوحده. تصبح الدارة الآن كما في الشكل 5-23 b. نطبق طريقة التحليل العقدي على دارة هذا الشكل حيث توجد عقدتان، ويكون توتر العقدة الأولى (على اليسار) هو V_2 .

$$\text{معادلة العقدة الأولى بعد الإصلاح} \quad 3V_2 - 2V_3 = 4$$

$$\text{معادلة العقدة الثانية} \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 1\right)V_3 - \frac{1}{2}V_2 = \frac{2V_2}{1}$$

$$\text{وبعد الإصلاح تصبح} \quad 17V_3 - 7V_2 = 0$$

$$\text{بحل هاتين المعادلتين نجد:} \quad V_3 = 100 \text{ V} \quad \text{و} \quad V_2 = 68 \text{ V}$$

وأخيراً نجمع المركبتين V_1 و V_2 فنجد التوتر V المطلوب فيكون

$$V = V_1 + V_2 = -72 + 68 = -4 \text{ V}$$

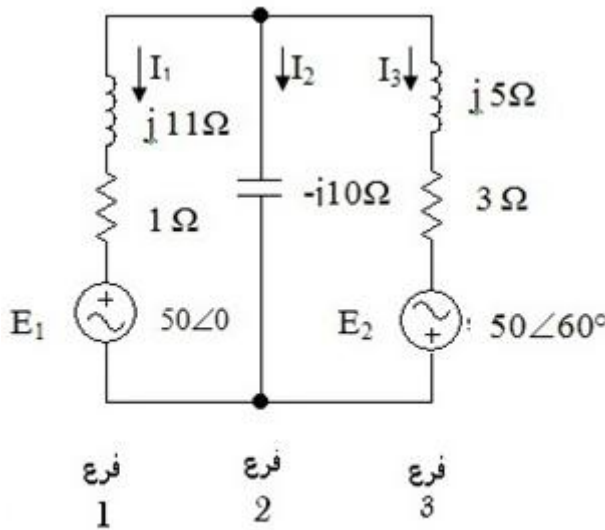
ج- الدارة تحوي ممانعات

مثال 10-

لتكن الدارة المبينة في الشكل 5-24، استعمل نظرية الانضمام لحساب مركبات التيارات الثلاثة ثم احسب كل تيار منها.

الحل:

بموجب نظرية الانضمام يكون التيار المار في كل فرع يساوي مجموع التيارين



الشكل 5-24

المارين فيه عندما يؤثر كل منبع من منبعي التواتر E_1 و E_2 لوحده في الدارة بعد قصر المنبع الآخر. نسمي مركبات التيار التي يحدثها المنبع E_1 في الفروع الثلاثة كما يلي: I_{11} في الفرع 1 ، I_{21} في الفرع الثاني، I_{31} في الفرع الثالث. كما نسمي مركبات التيار التي يحدثها المنبع E_2 لوحده في هذه الفروع: I_{12} و I_{22} و I_{32} في الفرع الأول والثاني والثالث على الترتيب. وبعد أن نحسب هذه المركبات الست نحسب التيارات الكلية في الفروع الثلاثة كما يأتي:

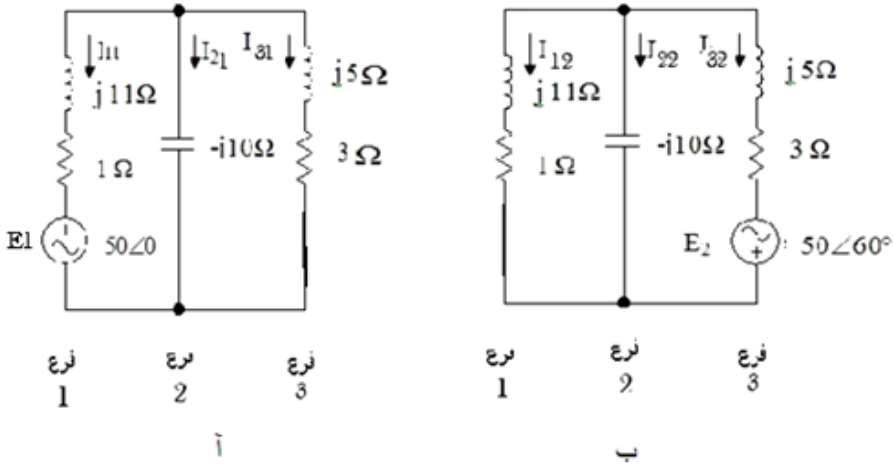
$$I_1 = I_{11} + I_{12} \text{ وهو التيار في الفرع الأول.}$$

$$I_2 = I_{21} + I_{22} \text{ وهو التيار في الفرع الثاني.}$$

$$I_3 = I_{31} + I_{32} \text{ وهو التيار في الفرع الثالث.}$$

نجري الحل على ثلاث مراحل، نحذف أحد المنبعين في المرحلة الأولى، ونحسب التيار في كل فرع. وفي المرحلة الثانية نحذف المنبع الثاني، ونحسب التيارات في كل فرع. وفي المرحلة الثالثة نجمع مركبتي كل فرع ونجد

التيارات الفرعية.



الشكل 5-24

المرحلة الأولى: نحذف المنبع الثاني ونحسب التيارات التي يولدها المنبع الأول، فتصبح الدارة كما في الجزء أ من الشكل 5-24 . يمكننا أن نفعل ذلك بتطبيق أية طريقة مناسبة كالتحليل العقدي أو التحليل العروي أو بالاعتماد على تجزئة التيار. سنستعمل هنا طريقة التحليل العروي، وبذلك يكون تيار العروة اليسرى هو I_{11} وتيار العروة اليمنى هو I_{31} . فيما يأتي نكتب معادلتَي العروتين معادلة العروة اليسرى:

$$(1 + j)I_{11} + j10I_{31} = 50$$

معادلة العروة اليمنى:

$$(3 - j5)I_{31} + j10I_{11} = 0$$

بحل هاتين المعادلتين نجد :

$$I_{11} = (1.43 - j2.29) = 2.7 \angle -64.5^\circ A$$

$$I_{31} = 0.086 - j4.63 = 4.63 \angle 98.8^\circ A$$

أما التيار I_{21} فيحسب من العلاقة:

$$I_{21} = I_{11} - I_{31} = 1.33 + j2.34 = 2.69 \angle 67.1^\circ A$$

المرحلة الثانية: نحذف المنبع الأول، ونحسب التيارات التي يولدها المنبع الثاني، فتصبح الدارة كما في الجزء ب من الشكل 5-24 .
نكتب معادلتَي العروتين اليسرى فاليمنى كما فعلنا في المرحلة الأولى فنجد:

$$(1 + j)I_{12} + j10I_{32} = 0$$

$$(3 - j5)I_{32} + j10I_{12} = -50\angle 60^\circ = 25 + j43.30$$

بحل هاتين المعادلتين نجد:

$$I_{32} = -0.181 + j0.63 = 0.655\angle -82.2^\circ A$$

$$I_{12} = 4.055 + j2.245 = 4.635\angle -32.1^\circ A$$

أما التيار I_{22} فيحسب من العلاقة:

$$I_{22} = I_{12} - I_{32} = 4.236 + j1.615 = 4.533\angle 23.2^\circ A$$

المرحلة الثالثة:

التيار في الفرع الأول هو $I_{12} + I_{11}$ ، وبالحساب نجد:

$$\text{التيار في الفرع الأول} = I_{12} + I_{11} = 5.485 - j0.045 = 5.845\angle -0.5^\circ A$$

التيار في الفرع الثاني هو:

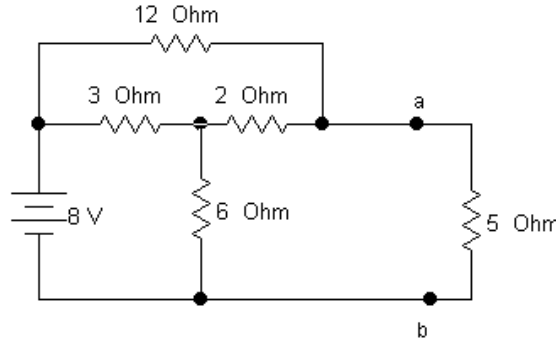
$$I_{21} + I_{22} = 1.49 + j1.71 = 2.06\angle 62.3^\circ A$$

التيار في الفرع الثالث هو:

$$I_{31} + I_{32} = 0.535 - j4.63 = 4.66\angle -92.7^\circ A$$

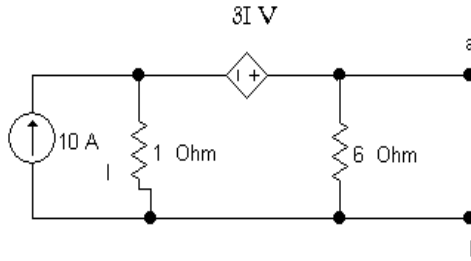
مسائل على الفصل الخامس

5-1 أوجد دارة تيفينين المكافئة للجزء الواقع إلى يسار النقطتين a و b في دارة الشكل م5-1. استعمل النتيجة السابقة لحساب التوتر V بين طرفي المقاومة 5Ω



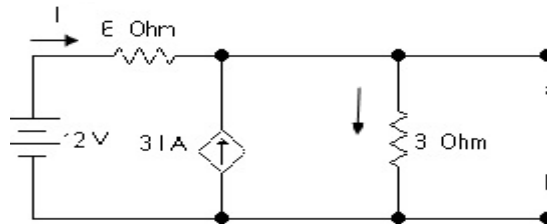
الشكل م5-1

5-2 أوجد دارة تيفينين المكافئة لدارة الشكل م5-2 بين النقطتين a و b .



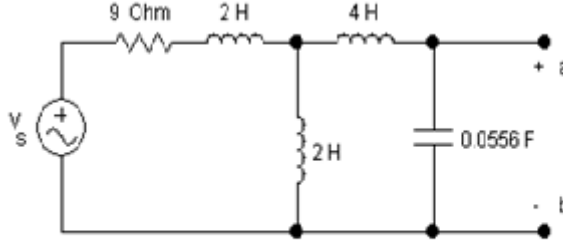
الشكل م5-2

5-3 أوجد مكافئ نورتون لدارة الشكل م5-3 بين النقطتين a و b .



الشكل م5-3

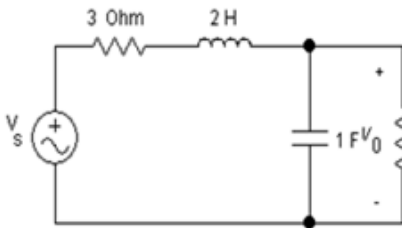
4-5 أوجد مكافئ تيفينين بالنسبة للنقطتين a و b لدارة الشكل م-4-5، علماً أن توتر المنبع يعطى بالعلاقة: $v_s = 36 \cos(3t - 60^\circ)V$.



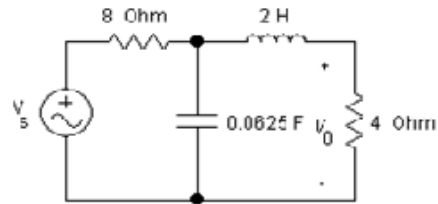
الشكل م 4-5

5-5 لتكن الدارة المبينة في الشكل م-5-5، حيث v_s معطاة بالعلاقة: $v_s = 4 \cos(4t - 60^\circ)V$. أوجد $v_o(t)$ وذلك: آ- بالاستعاضة عن جزء الدارة الذي يقع إلى يسار المقاومة 4Ω بما يكافئه حسب تيفينين، ب- بالاستعاضة بالتحليل العقدي.

5-6 لتكن الدارة المبينة في الشكل م-5-6، حيث v_s معطى بالعلاقة: $v_s = 6 \cos 2t V$. أوجد $v_o(t)$ وذلك بالاستعاضة أولاً عن جزء الدارة الذي يقع إلى يسار المقاومة 1Ω بما يكافئه حسب نورتون. ب- نضع بدلاً من المقاومة 1Ω ممانعة Z_L ، احسب قيمة هذه الممانعة بحيث تمتص أعظم قدرة، ج- احسب هذه القدرة.

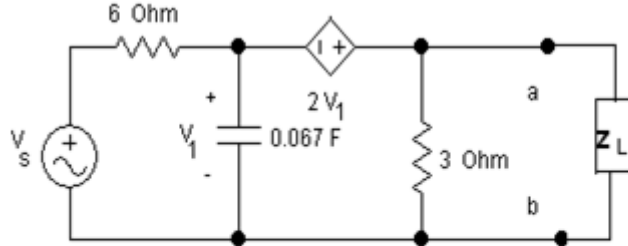


الشكل م-5-6



الشكل م 5-5

5-7 اجعل قيمة المحرصة في دائرة الشكل م 5-6 مساوية 0.2H ثم أوجد $v_0(t)$ بالاستعاضة عن جزء الدارة الواقع إلى يسار المقاومة 1Ω بمكافئ تيفينين.



الشكل م 5-7

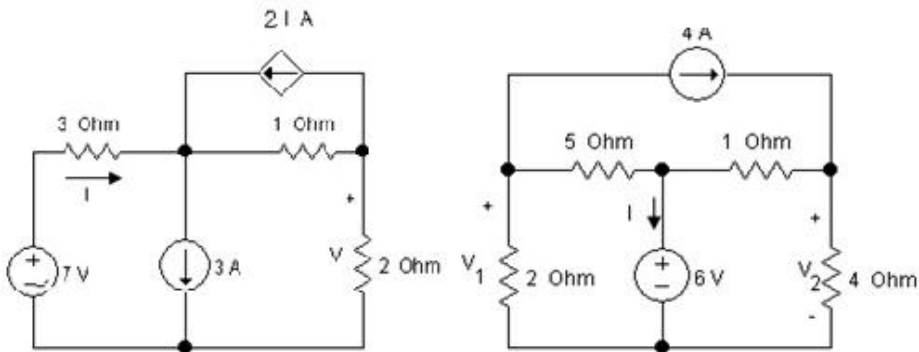
5-8 أبرهن أن توتر الدارة المفتوحة v_{oc} بين النقطتين a و b لدائرة الشكل م 5-7، والذي هو توتر تيفينين، يعطى بالعلاقة:

$$V_{oc} = \frac{189}{53} - j \frac{54}{53} = 3.71 \angle -16^\circ V$$

ب- أوجد ممانعة تيفينين Z_T وبين أنها تساوي:

$$Z_T = \frac{126}{53} - j \frac{36}{53} = 2.47 \angle -16^\circ \Omega$$

ج- ما هي ممانعة الحمولة التي إذا وصلت بين الطرفين a و b انتقلت إليها أعظم قدرة؟ د- احسب هذه القدرة العظمى.



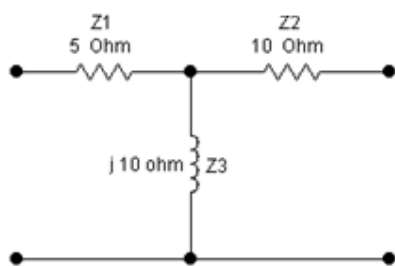
الشكل م 5-9

الشكل م 5-8

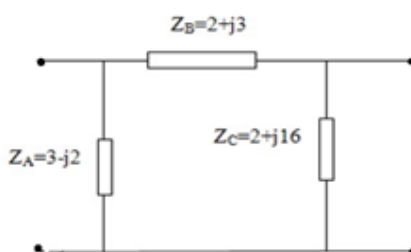
5-9 استعمال نظرية الانضمام لحساب V_1 و V_2 في دارة الشكل م 5-8. احسب كذلك التيار I الذي يمر في منبع التوتر.

5-10 استعمال نظرية الانضمام لإيجاد التوتر V والتيار I في دارة الشكل م 5-9.

5-11 لتكن الشبكة المثلثية (Δ) المبينة في الشكل م 5-10، المطلوب إيجاد الشبكة النجمية (T) المكافئة لها.



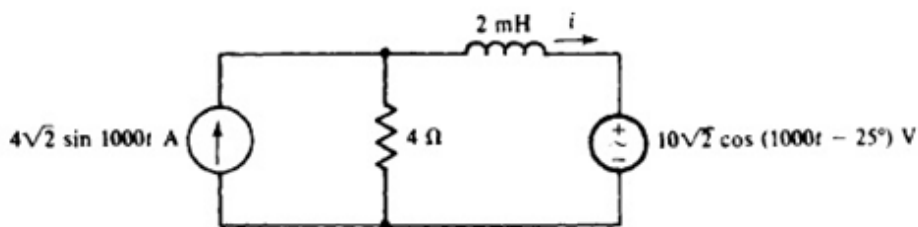
الشكل م 11-5



الشكل م 10-5

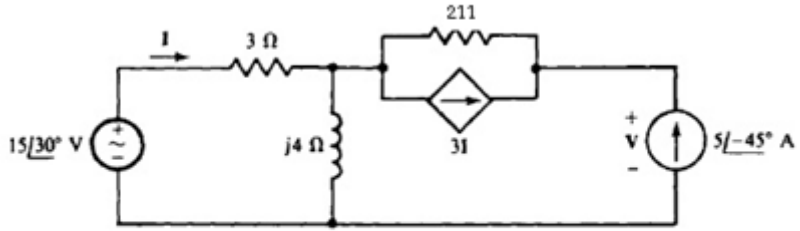
5-12 أوجد الشبكة المثلثية المكافئة للشبكة النجمية المبينة في الشكل م 5-11 .

5-13 استعمال نظرية الانضمام لحساب التيار i في دارة الشكل م 5-12 .



الشكل م 12-5

5-14 استعمال نظرية الانضمام لحساب التوتر V بين طرفي منبع التيار المستقل الموجود في دارة الشكل م 5-13.



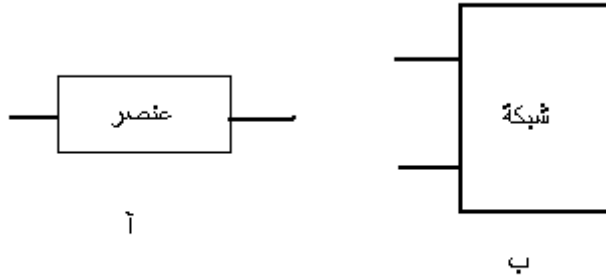
الشكل م 5-13

الفصل السادس

الشبكة رباعية الأطراف

1-6 مقدمة:

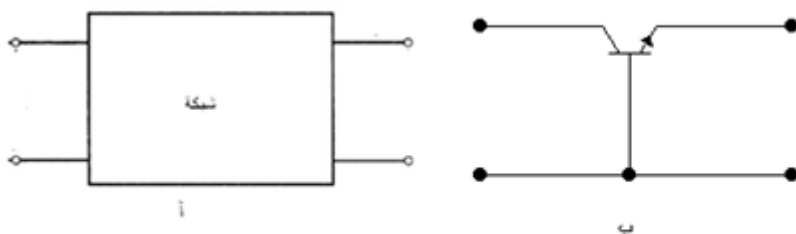
تعد عناصر الدارة، كالمقاومات والمكثفات والمحرضات والمنابع المستقلة، عناصر أو نباتات ذات طرفين، يمكن تمثيلها في مخطط الدارة بشكل مماثل لما هو مبين في الجزء آ من الشكل 1-6. ويمكن تعميم ذلك بقولنا: إن أية تركيبية مؤلفة من مجموعة من العناصر المتصلة فيما بينها يمكن تمثيلها بزواج واحد من الأطراف، كما هو مبين في الجزء ب من الشكل 1-6. يمكننا القول: إن الطرفين يشكلان ممراً وحيداً للتيار، وتسمى الشبكة في هذه الحالة شبكة ذات ممر وحيداً ثنائية الأطراف. يمكن توصيف الشبكة ذات الممر الوحيد التي لا تحتوي على منابع مستقلة، بممانعتها أو قبوليتها. كما أنه يمكن توصيف مثل هذه الشبكة بمكافئ تيفينين أو بمكافئ نورتون.



الشكل 1-6 الشبكة ثنائية الأطراف

لننظر الآن في الشكل 2-6، وهو يمثل الحالة التي يكون فيها للشبكة زوجان من الأطراف بدلاً من زوج واحد. تسمى الشبكات من هذا النوع الشبكات رباعية

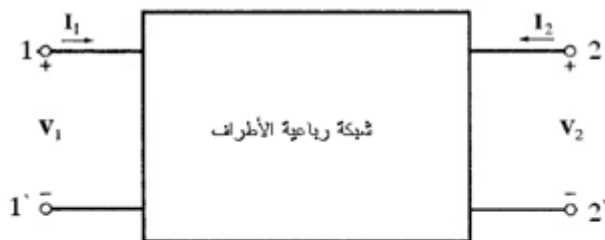
الأطراف أو الشبكات ذات الممرين للتيار. ومثلما يمكن أن تتألف الشبكة ذات الممر الواحد من عنصر واحد أو من عناصر متعددة، كذلك يمكن للشبكة ذات الممرين أن تتألف من عنصر واحد أو من مجموعة من العناصر. فمثلاً، المحولة هي شبكة بسيطة ذات ممرين، وكذلك الترانزستور.



الشكل 6-2 الشبكة رباعية الأطراف

تحتوي الشبكة رباعية الأطراف على زوجين من الأطراف، زوج للدخل وزوج للخروج. وكل زوج من هذه الأطراف يشكل ممراً للتيار. تزود الشبكة بالطاقة من ممر الدخل وتُستخرج هذه الطاقة من ممر الخروج. ويمكن إجراء القياسات على الشبكة من ممري الدخل والخروج. لذلك جرت العادة أن تمثل الشبكة رباعية الأطراف كما في الشكل 6-3، الذي يحتوي أيضاً على الاصطلاح المعتمد في الاتجاهات الموجبة للتيار والقطبية الاصطلاحية للتوترات. يمثل الطرفان 1 و 1 في الشكل ممر الدخل، ويمثل الطرفان 2 و 2 ممر الخروج. وهناك خاصية أخرى للشبكات رباعية الأطراف ولمعظم الدارات الإلكترونية وهي أن الطرفين 1 و 2 مشتركان، أي يمثلان طرفاً واحداً. يتضمن تعريف الممر إقراراً بأن التيار الذي يخرج من الطرف 1 يساوي بالضبط التيار الذي يدخل الطرف 1، والتيار الذي يخرج من الطرف 2 يساوي التيار الذي يدخل الطرف 2. يسمى التيار I_1 تيار الدخل، ويسمى التيار I_2 تيار الخروج، كما

يسمى التوتر V_1 توتر الدخل ويسمى التوتر V_2 توتر الخرج. تُجرى القياسات في الشبكات رباعية الأطراف فقط عند الأطراف، ولا يسمح بإجرائها بين الطرفين 1 و 2 أو الطرفين $1'$ و $2'$.



الشكل 3-6 شبكة رباعية الأطراف

(ذات ممرين)

لا نهتم كثيراً بالتفاصيل الدقيقة المتعلقة بالعناصر المكونة للشبكة رباعية الأطراف ولا حتى بالتيارات الجارية في هذه العناصر أو التوترات المتشكلة بينها، وكل ما نهتم به هو معرفة التيار الداخل إلى الشبكة والتيار الخارج منها أو التوتر المطبق على مدخلها والتوتر المتشكل عند الخرج.

إن توصيف الشبكة رباعية الأطراف مهم ومفيد بأن معاً. وسندرس فيما يأتي الشبكة رباعية الأطراف التي لا تحتوي على منابع مستقلة، ولكنها قد تحتوي على منابع غير مستقلة. تسمى الشبكات من هذا النوع الشبكة رباعية الأطراف المنفصلة، تمييزاً لها عن الشبكة رباعية الأطراف الفاعلة التي تحتوي على منابع مستقلة.

2-6 معادلات الشبكة رباعية الأطراف:

يمكن وصف الشبكة رباعية الأطراف بأربعة متغيرات تمثل تيار الممرين وتوتريهما. يمكن عد اثنين من هذه المتغيرات كمتغيرين مستقلين وعد الاثنين الباقيين متغيرين تابعين لهما. ولما كانت الجملة تسلك سلوكاً خطياً فإن

المتغيرات ترتبط فيما بينها بجملة من المعادلات الخطية. تربط بين تيارى الممرين وتوتريهما، وتعرّف جملة من وسطاء الشبكة رباعية الأطراف. توجد ست تجميعات يمكن بها التعبير عن متغيرين اثنين من المتغيرات الأربعة بدلالة المتغيرين الباقيين. من بين جمل الوسطاء الستة الممكنة تستعمل ثلاثة منها، بشكل خاص، في تحليل الدارات الإلكترونية نظراً لسهولة قياسها. نعرض فيما يأتي معادلات الشبكة رباعية الأطراف لثلاث من هذه الجمل ونعرف وسطاء كل جملة.

6-2-1 وسطاء القبولية:

إذا اخترنا توتري الممرين كمتغيرين مستقلين، واعدنا تياريهما كمتغيرين تابعين فبإمكاننا كتابة جملة معادلتين خطيتين تمثلان معادلات الشبكة رباعية الأطراف وتحتوي على أربعة وسطاء تربط بين تيارى الممرين وتوتريهما. نكتب جملة المعادلات المعرفة في نطاق التواتر كما يلي:

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 &= y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{aligned} \quad (6-1)$$

إن للعناصر y_{11} ، y_{12} ، y_{21} و y_{22} أبعاد قبولية وواحدتها سيمنز (S) ، وتسمى الوسطاء y ، وهي تابعة للتواتر ضمناً لذا يكتفى بكتابتها على هذا النحو. إن التسمية الخاصة التي تعطى لكل وسيط من هذه الوسطاء تتعين من العلاقة بين التيار والتوتر، وتعرف عادة في شروط الدارة القصيرة. إذا جعلنا الطرفين 2 و 2` في الشكل 6-3 دارة قصيرة فإن التوتر V_2 يصبح صفراً. وفي هذا الشرط ينتج من مجموعة المعادلتين (6-1) تعريف الوسيطين y_{11} و y_{21} والمعنى الفيزيائي لكل منهما.

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2 = 0} \quad \text{قبولية الدخل لدى قصر الخرج} \quad (6-2)$$

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2 = 0} \quad \text{قبولية الانتقال الأمامي لدى قصر الخرج} \quad (6-3)$$

يشير مصطلح " الانتقال الأمامي " في المعادلة (6-3) إلى أن الشبكة تُستعمل بالطريقة المعتادة حيث تُطبق الإثارة عند ممر الدخل 1 وتُقاس الاستجابة عند ممر الخرج 2 . والآن، إذا طبقت الإثارة عند الممر 2 وكان الممر 1 دائرة قصيرة، فإن التوتر V_1 يصبح صفراً، وعند ذلك ينتج عن مجموعة المعادلتين (6-1) تعريف الوسيطين y_{12} و y_{22} والمعنى الفيزيائي لكل منهما.

$$y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1 = 0} \quad (6-4)$$

$$y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1 = 0} \quad (6-5)$$

يشير مصطلح " الانتقال العكسي " إلى أن الإثارة مطبقة في ممر الخرج 2 والاستجابة مقيسة عند ممر الدخل 1 .

إذا استعملنا مصطلحات أخرى لتعريف الوسطاء y ، وبخاصة عندما تُطبَّق لتصف النبائط الإلكترونية، فإننا نكتب هذه الجملة من المعادلات على النحو الآتي:

$$\begin{aligned} I_1 &= y_i V_1 + y_r V_2 \\ I_2 &= y_f V_1 + y_o V_2 \end{aligned} \quad (6-6)$$

تشير القرائن i ، r ، f ، و o إلى أن الوسطاء التي تحملها ترمز إلى ما يأتي: i للدخل input و r للانتقال العكسي reverse، أي من الخرج إلى الدخل، و f للانتقال الأمامي forward، أي من الدخل إلى الخرج، و o للخروج output .

6-2-2-2 وسطاء الممانعة:

إذا اخترنا تيارَي الممرين I_1 و I_2 كمتغيرين مستقلين، و عددنا توتريهما V_2 كمتغيرين تابعين فبإمكاننا كتابة جملة معادلتين خطيتين تمثلان معادلات الشبكة رباعية الأطراف وتحتوي على أربعة وسطاء تربط بين توترَي الممرين وتياريهما. نكتب جملة المعادلات المعرفة في نطاق التواتر كما يأتي:

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2 = z_i I_1 + z_r I_2 \\ V_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2 = z_f I_1 + z_o I_2 \end{aligned} \quad (6-7)$$

تسمى الوسطاء z_{11} ، z_{12} ، z_{21} و z_{22} وسطاء الممانعة لأن لها أبعاد ممانعة وواحدتها هي الأوم (Ω) ، وتسمى أيضاً الوسطاء z . تُعرّف هذه الوسطاء بدلالة الدارة المفتوحة. إذا جعلنا ممر الخرج (أي الممر 2) دارة مفتوحة، وهذا يعني أن $I_2 = 0$ ، وأثرنا ممر الدخل (أي الممر 1) ، نتج عن جملة المعادلتين (6-7) تعريف كل من الوسيطين z_{11} و z_{21} والمعنى الفيزيائي لكل منهما.

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2 = 0} \quad (6-8)$$

إذا جعلنا الآن ممر الدخل دارة مفتوحة، أي $I_1 = 0$ ، وأثرنا ممر الخرج فإن المعادلتين تعطياننا تعريفاً لكل من z_{12} و z_{22} والمعنى الفيزيائي لكل منهما.

$$z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1 = 0} \quad (6-10)$$

$$z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1 = 0} \quad (6-11)$$

ملاحظة: تجدر الإشارة إلى أن القبوليات التي رمزنا لها بالرموز: y_{11} ، y_{12} ، y_{21} ، y_{22} ليست هي مقلوب الممانعات z_{11} ، z_{12} ، z_{21} ، z_{22} على الترتيب، وذلك لأن الأولى هي وسطاء الدارة القصيرة بينما الثانية هي وسطاء الدارة المفتوحة. بيد أنه من الممكن الحصول على وسطاء الدارة المفتوحة، أي الوسطاء z ، بدلالة وسطاء الدارة القصيرة، أي الوسطاء y ، وذلك بحل مجموعتي المعادلات (6-6) و (6-7) وإيجاد z بدلالة y . لو فعلنا ذلك لحصلنا على العلاقات الآتية:

$$z_{11} = \frac{y_{22}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} \quad (6-12)$$

$$z_{12} = \frac{-y_{12}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} \quad (6-13)$$

$$z_{21} = \frac{-y_{21}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} \quad (6-14)$$

$$Z_{22} = \frac{y_{11}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} \quad (6 - 15)$$

6-2-3 الوسطاء المُختلطة:

توجد جملة ثالثة من الوسطاء هي ليست قبوليات صرفة؛ ولا ممانعات صرفة، بل هي خليط منها ومن وسطاء عددية لا بعد لها. تسمى هذه الجملة من الوسطاء جملة الوسطاء الهجينة أو الوسطاء h . يؤخذ في هذه الجملة تيار الدخل I_1 وتوتر الخرج V_2 كمتغيرين مستقلين، ويؤخذ توتر الدخل V_1 وتيار الخرج I_2 كمتغيرين تابعين لهما فبإمكاننا كتابة جملة المعادلتين المعرفتين للشبكة رباعية الأطراف على النحو الآتي:

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 = h_i I_1 + h_r V_2 \quad (6 - 16)$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 = h_f I_1 + h_o V_2 \quad (6 - 17)$$

يمكن تعريف الوسطاء h بإثارة ممر الدخل أولاً وجعل ممر الخرج دارة قصيرة، أي: $V_2 = 0$ ، ثم بإثارة ممر الخرج وجعل ممر الدخل دارة مفتوحة، أي: $I_1 = 0$. إذا فعلنا ذلك حصلنا على معادلات التعريف لهذه الوسطاء، وهي:

$$h_{11} = h_i = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{V_2 = 0} \quad \text{ممانعة الدخل مع قصر الخرج} \quad (6 - 18)$$

$$h_{21} = h_f = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{V_2 = 0} \quad \text{ربح التيار الأمامي مع قصر الخرج} \quad (6 - 19)$$

$$h_{22} = h_o = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{I_1 = 0} \quad \text{قبولية الخرج مع فتح الدخل} \quad (6 - 20)$$

$$h_{12} = h_r = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2 = 0} \quad \text{ربح التوتر العكسي مع فتح الدخل} \quad (6-21)$$

إن الوسيطين h_f و h_r مقداران ليس لهما أبعاد، وهما يمثلان كسب التوتر وكسب التيار على الترتيب، بينما يكون للوسيط h_i أبعاد ممانعة وللوسيط h_o أبعاد قبولية. ومن هنا جاءت تسمية الوسطاء h بالوسطاء الهجينة أو المختلطة.

6-3 مدلول معادلات الشبكة في الدارات الفاعلة والمنفصلة:

في الدارات التي تحتوي على عناصر منفصلة كالمقاومات والتحريضيات والمكثفات، لا تتغير خواص هذه العناصر عندما تتغير جهة مرور التيار فيها؛ وذلك لأن طرفيها متماثلان. لذا فإن ممانعات الانتقال الأمامي Z_{12} والعكسي Z_{21} فيها تكون متساوية، أي $Z_{12} = Z_{21}$. كما تكون قبوليات الانتقال الأمامي Y_{12} والعكسي Y_{21} فيها متساوية أيضاً أي $Y_{12} = Y_{21}$. وعليه، يمكن التعبير عن الشبكة رباعية الأطراف بثلاثة وسطاء مستقلة فقط. فوسطاء الممانعة هي: Z_{11} و Z_{22} و $Z_{12} = Z_{21}$ ، ووسطاء القبولية المستقلة الثلاث هي: Y_{11} و Y_{22} و $Y_{12} = Y_{21}$.

أما في الدارات الفاعلة، وهي شبكات تحتوي ضمناً على منابع للطاقة مع العنصر كما هو الحال في الديودات والترانزستورات، فمن المفيد أن نشير هنا إلى أن هذه المعادلات تؤدي دوراً كبيراً في نظرية هذه الدارات، وبصورة خاصة في دارات المضخمات التي تحتوي على ترانزستورات. في مثل هذه الدارات لا تتساوى ممانعات الانتقال، كما لا تتساوى قبوليات الانتقال. وعليه يكون: $Z_{12} \neq Z_{21}$ ، كما أن $Y_{12} \neq Y_{21}$ ؛ لذا لا يمكن تمثيل الشبكة رباعية الأطراف الفاعلة بثلاثة وسطاء فقط، ولا بد من أربعة وسطاء مستقلة.

6-4 الدارات المكافئة للشبكة رباعية الأطراف المنفصلة:

وجدنا أن الشبكة رباعية الأطراف المنفصلة تتعين بثلاثة وسطاء مستقلة فقط؛ لذا فإن الشبكات رباعية الأطراف يمكن أن تتعين بثلاثة عناصر فقط. وإن أبسط أنواع الشبكات رباعية الأطراف يمكن أن يأخذ الشكل T (في التوصيل النجمي)، أو تأخذ الشكل π (في التوصيل المثلثي). هذا، ويمكننا تحويل أحد التوصيلين إلى التوصيل الآخر المكافئ له باستعمال نظرية كينلي. وهكذا، يمكن تمثيل الشبكة رباعية الأطراف بأحد التركيبين المبينين في الشكل 6-4.

6-4-1 وسطاء التركيب النجمي:

يمكننا تحليل الشبكة رباعية الأطراف المبينة في الجزء أ من الشكل 4-6 كونها مؤلفة من عروتين مستقلتين، ونكتب معادلتها وفق التحليل العروي فنجد:

$$\begin{aligned} V_1 &= (Z_a + Z_c)I_1 + Z_c I_2 \\ V_2 &= Z_c I_1 + (Z_b + Z_c)I_2 \end{aligned} \quad (6-22)$$

بفتح الخرج ، أي جعل $I_2 = 0$ نجد من الأولى:

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = Z_a + Z_c$$

ومن المعادلة الثانية نجد:

$$z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = Z_c$$

بفتح الدخل، أي بجعل $I_1 = 0$ نجد من الأولى:

$$z_{12} = \frac{V_1}{I_2} = Z_c$$

ومن الثانية نجد:

$$z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = Z_b + Z_c$$

من الملاحظ أننا وجدنا $z_{12} = z_{21}$ وكل منهما يساوي Z_c .

ملاحظة: كان من الممكن الحصول على قيم هذه الوسطاء من مقارنة جملة المعادلتين (6-22) بجملة المعادلتين (6-7).

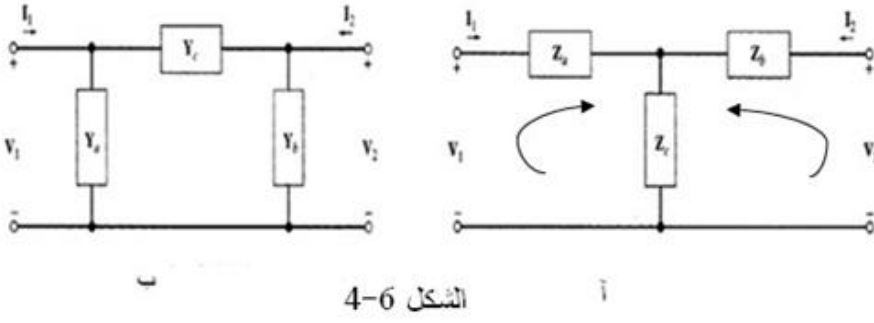
6-4-2 وسطاء التركيب المثلي:

يمكننا تحليل الشبكة رباعية الأطراف المبينة في الجزء ب من الشكل 4-6 بتطبيق التحليل العقدي على العقدتين 1 و2 في الشكل. معادلة العقدة الأولى:

$$(Y_a + Y_c)V_1 - Y_c V_2 = I_1$$

ومعادلة العقدة الثانية:

$$-Y_c V_1 + (Y_b + Y_c)V_2 = I_2$$



نعين الوسطاء y في حالة الدارة القصيرة. نبدأ بقصر الخرج، أي جعل $V_2 = 0$.
تعطي المعادلة الأولى:

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = Y_a + Y_c$$

وتعطي المعادلة الثانية:

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = -Y_c$$

وبقصر الدخل، أي جعل $V_1 = 0$ ، تعطي المعادلة الأولى

$$y_{12} = -Y_c$$

وتعطي المعادلة الثانية:

$$Y_b + Y_c = y_{22}$$

ملاحظة: كان من الممكن الحصول على قيم هذه الوسطاء من مقارنة هاتين المعادلتين بجملتي المعادلتين (6-6).

5-6 أمثلة محلولة:

مثال 1-

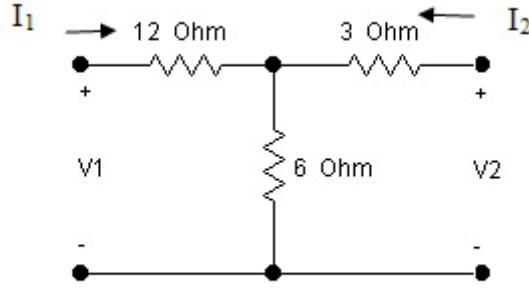
عين الوسطاء Z والوسطاء y للشبكة رباعية الأطراف المبينة في الشكل 5-6.

الحل:

أ- تعيين وسطاء الممانعة Z في شروط الدارة المفتوحة: من الشكل مباشرة نجد:

$$Z_{12} = Z_{21} = 6 \Omega \quad \text{و} \quad Z_{22} = 3 + 6 = 9 \Omega \quad , \quad Z_{11} = 12 + 6 = 18 \Omega$$

ب- تعيين وسطاء القبولية y في شروط الدارة القصيرة:



الشكل 5-6

بقصر الخرج في الشكل 5-6 نحسب ممانعة الدخل عند قصر الخرج z_{11} ، التي نحسبها كما يأتي:

$$z_{11} = 12 + \frac{3 \times 6}{3+6} = 14 \Omega$$

فتكون قبولية الدخل عند قصر الخرج: $y_{11} = \frac{1}{z_{11}} = \frac{1}{14} S$

وبقصر الدخل نحسب z_{22} بالطريقة ذاتها ثم نأخذ مقلوبها لحساب y_{22} في شروط الدارة القصيرة.

أما لحساب y_{12} أو y_{21} ، فنحسبهما كالآتي: عند قصر الخرج نحسب $\frac{I_2}{V_1} = y_{21}$ وبتطبيق تجزئة التيار على الشكل بعد قصر الخرج وذلك لحساب التيار I_2 ، مع ملاحظة تعاكس I_1 و I_2 ، نجد:

$$I_2 = \frac{-6}{3+6} \times I_1 = -\frac{2}{3} I_1$$

$$I_1 = \frac{V_1}{12 + \frac{6 \times 3}{6+3}} = \frac{V_1}{14}$$

لكن I_1 في هذه الحالة يحسب كالآتي:

نعوض عن I_1 بقيمتها من المعادلة الأخيرة فنجد:

$$y_{21} = \frac{I_2}{V_1} = \frac{-\frac{2V_1}{314}}{V_1} = -\frac{1}{21} S$$

وبالمثل نجد y_{12} ويكون مساوياً y_{21} .

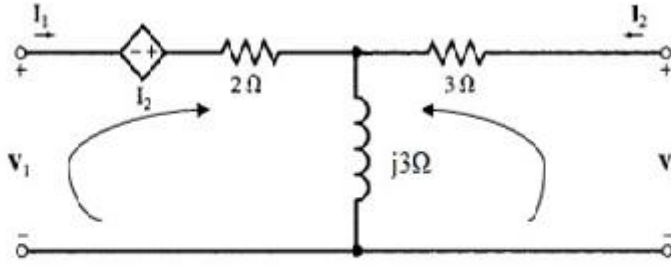
كما أن قصر الدخل يعطي:

$$z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = 3 + \frac{6 \times 12}{6+12} = 7 \Omega$$

وبذلك تكون قبولية الخرج عند قصر الدخل: $y_{22} = \frac{1}{z_{22}} = \frac{1}{7} S$

مثال 2-

تحتوي دائرة الشكل 6-6 على منبع توتر غير مستقل تابع للتيار، وهي تمثل شبكة رباعية الأطراف. أوجد الوسطاء z لهذه الشبكة.



الشكل 6=6

الحل:

لنكتب أولاً معادلتَي العروتين. معادلة العروة الأولى:

$$V_1 + I_2 = (2 + j3)I_1 + j3I_2$$

والتي يمكن أن نعيد كتابتها على النحو الآتي:

$$V_1 = (2 + j3)I_1 + (j3 - 1)I_2$$

ومعادلة العروة الثانية:

$$V_2 = (3 + j3)I_2 + j3I_1$$

نعين الوسطاء z في شروط الدارة المفتوحة. إذا فتحنا الخرج ($I_2=0$) نحصل

على:

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = 2 + j3, \quad z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = j3$$

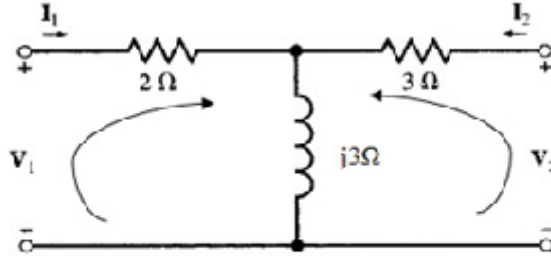
وإذا فتحنا الدخل ($I_1=0$) نحصل على:

$$z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = 3 + j3, \quad z_{12} = \frac{V_1}{I_2} = j3 - 1$$

نلاحظ أن $Z_{12} \neq Z_{21}$ لأن الشبكة فاعلة حيث يوجد فيها منبع توتر غير مستقل.

مثال 3-

عيّن الوسطاء Z لدارة الشكل 7-6 .



الشكل 7-6

الحل:

معادلتا العروتين تعطياننا:

$$V_1 = (2 + j3)I_1 + j3I_2$$

$$V_2 = j3I_1 + (3 + j3)I_2$$

نستنتج الوسطاء Z بسهولة من هاتين المعادلتين، فنجد:

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = 2 + j3, \quad Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = j3,$$

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = 3 + j3, \quad Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} = j3$$

نلاحظ أن $Z_{12} = Z_{21}$ وذلك لأن الشبكة منفصلة .

مثال 4-

عيّن الوسطاء y للدارة المبينة في الشكل 8-6 .

الحل:

هذه الدارة لها تركيب مثلثي مثل التركيب في الجزء ب من الشكل 4-6 . وعليه

فإن الوسطاء y لها هي:

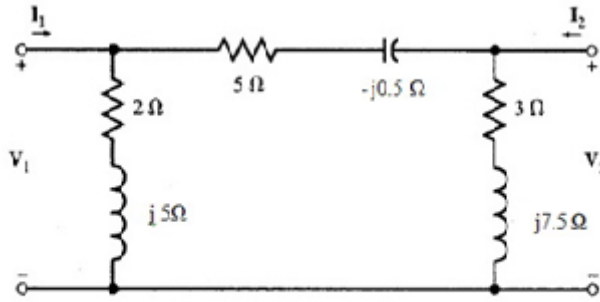
$$y_{21} = -Y_c, \quad y_{11} = Y_a + Y_c$$

$$y_{22} = Y_b + Y_c, \quad y_{12} = -Y_c$$

$$Y_a = \frac{1}{2+j5} = 0.069 - j0.172$$

$$Y_b = \frac{1}{3+j7.5} = 0.064 - j0.115$$

$$Y_c = \frac{1}{5-j0.5} = 0.198 + j0.02$$



الشكل 8-6

وبعد التعويض في علاقات الوسطاء y أعلاه نجد:

$$y_{11} = Y_a + Y_c = 0.267 - j0.152$$

$$y_{22} = Y_b + Y_c = 0.262 - j0.095$$

$$y_{12} = y_{21} = -Y_c = -0.198 - j0.02$$

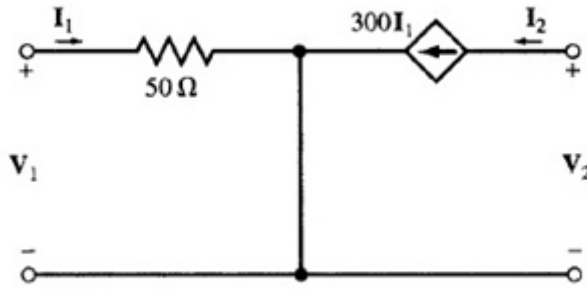
نلاحظ أن $y_{12} = y_{21}$ وذلك لأن الدارة منفصلة.

مثال 5-

عيّن الوسطاء h لدارة الشكل 9-6 التي تمثل النموذج البسيط للترانزستور الوصلي ثنائي القطبية في المجال الخطي من تشغيله.

الحل:

إذا تفحصنا الشكل نجد:



الشكل 9-6

$$I_2 = 300I_1 \quad \text{و} \quad V_1 = 50I_1$$

وبالمقارنة مع معادلاتي الشبكة ذات الوسطاء h التي نكتب على الشكل الآتي:

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$$

نستنتج أن:

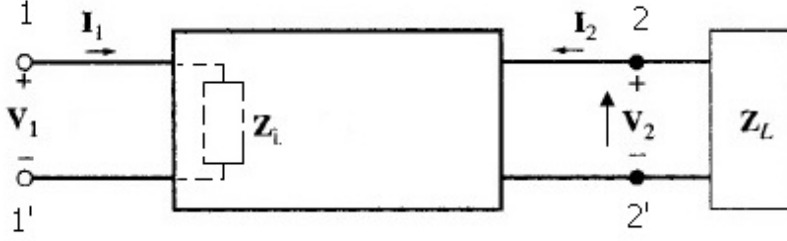
$$h_{11} = 50 , h_{21} = 300 , h_{12} = 0 , h_{22} = 0$$

6-6 ممانعة الدخل للشبكة رباعية الأطراف المحمّلة

عند تشغيل الشبكة رباعية الأطراف يوضع بين طرفي خرجها 2 و 2' ممانعة Z_L تسمى ممانعة الحمولة، كما في الشكل 6-10. إذا نظرنا الآن إلى رباعي الأطراف من طرفي الدخل 1 و 1' فإننا نرى أنه يبدو لنا كشبكة ذات طرفين، ولها ممانعة Z_i تحسب من العلاقة:

$$Z_i = V_i / I_i \quad (6 - 23)$$

تسمى الممانعة Z_i ممانعة الدخل لرباعي الأقطاب. ويجب أن نشير هنا إلى أنه لا يجب الخلط بين هذه الممانعة والممانعة Z_{11} لأن هذه الأخيرة، أي Z_{11} ، هي ممانعة الدخل للشبكة رباعية الأطراف عندما تكون مفتوحة الخرج، بينما الممانعة Z_i هي ممانعة دخلها عندما يكون خرجها محملاً بالحمولة Z_L .



الشكل 10-6

يمكن حساب ممانعة الدخل Z_i لرباعي الأطراف كما يأتي:

نكتب معادلتنا رباعي الأطراف في الشكل 10-6 :

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad (6-24)$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \quad (6-25)$$

ويعطينا الشكل 10-6 العلاقة التي تربط توتر الخرج بتيار الخرج وممانعة

الحمولة التي تكتب على النحو الآتي:

$$V_2 = -Z_L I_2 \quad (6-26)$$

نعوض قيمة V_2 هذه في المعادلة الثانية، ونحسب I_2 فنجد:

$$I_2 = \frac{-z_{21}I_1}{z_{22} + Z_L} \quad (6-27)$$

نعوض قيمة I_2 هذه في المعادلة (6-24) فتصبح:

$$V_1 = z_{11}I_1 - \frac{z_{12}^2}{z_{22} + Z_L} I_1 \quad (6-28)$$

وإذا تذكرنا العلاقة (6-23) فيمكننا حساب ممانعة الدخل Z_i لرباعي

الأطراف المحمّل من العلاقة (6-28) فنجد:

$$Z_i = \frac{V_1}{I_1} = z_{11} - \frac{z_{12}^2}{z_{22} + Z_L} \quad (6-29)$$

تشير العلاقة (6-29) إلى أن ممانعة الدخل Z_i لرباعي أطراف محمّل لا تساوي

(بل هي أصغر دائماً من) ممانعة الدخل z_{11} عندما يكون الخرج مفتوحاً، والتي

تمثل ممانعة حمولة لا نهائية.

6-7 التضميم والتوهين

توضع الشبكة رباعية الأطراف إعادة بين شبكة سابقة، هي المنبع، وشبكة لاحقة، هي الحمولة. ويبين الشكل 6-11 شبكة رباعية الأطراف طُبِّق على دخلها منبع توتر قيمته V_S ومقاومته الداخلية R_S ، ووضع في مخرجها حمولة Z_L . ومن الطبيعي أن نعرف دور الشبكة من حيث تأثيرها على الإشارة التي يطبقها المنبع على مدخلها وقيمة الإشارة التي تظهر في مخرجها. ويمكن معرفة هذا التأثير من معرفة النسبة بين الإشارة الداخلة والإشارة الخارجة. ويمكن للشبكة أن تعمل على تضخيم الإشارة أو توهينها. لذا لا بد من اصطلاح معيار محدد لمعرفة تأثير الشبكة على الإشارة المطبقة عليها في مدخلها. لقد اصطلاح على اعتبار ضياع الإدخال معياراً هاماً لعمل الشبكة.



الشكل 6-11

تعرف نسبة ضياع الإدخال، A_L ، للشبكة بأنها نسبة التوتر (أو التيار) في الحمولة، من دون وجود الشبكة، إلى التوتر (أو التيار) في الحمولة، مع وجود الشبكة. إذا طبقنا هذا التعريف على دائرة الشكل 6-11 فإننا نكتب هذه النسبة على النحو الآتي:

$$A_L = \frac{V_2'}{V_2} = \frac{I_2'}{I_2} \quad (6-30)$$

حيث: V_2' التوتر بين طرفي الحمولة Z_L من دون وجود الشبكة.

I_2' التيار المار في الحمولة Z_L من دون وجود الشبكة.

أما I_2 و V_2 فهما قيمتا التيار والتوتر في الحمل مع وجود الشبكة، كما في الشكل 6-11.

هذا، ويمكن حساب V_2' و I_2' بالرجوع إلى الشكل 6-11 فنجد:

$$V_2' = \frac{V_S Z_L}{R_S + Z_L} \quad (6 - 31)$$

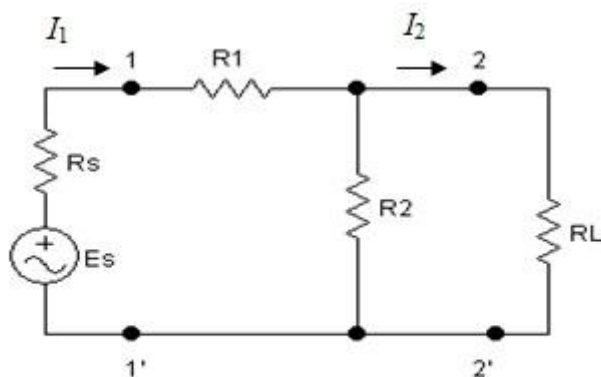
$$I_2' = \frac{V_S}{R_S + Z_L} \quad (6 - 32)$$

أما ضياع الإدخال G ، ويقدر بالديسي بل (dB)، فيعطى بالعلاقة:

$$G(dB) = 20 \log_{10} A_L \quad (6 - 33)$$

إذا كانت A_L أصغر من الواحد فإن G تكون سالبة، وهذا يعني أن وجود الشبكة يؤدي إلى كسب؛ لذا فهي تضخم التوتر والتيار. أما إذا كانت A_L أكبر من الواحد فإن G تكون موجبة، وهذا يعني أن وجود الشبكة يؤدي إلى خسارة، لذا فهي توهن أو تضعف التوتر والتيار.

سنحسب الآن نسبة ضياع الإدخال A_L لشبكة بسيطة مكونة من مقاوماتين صرفتين R_1 و R_2 على شكل γ كالتي في الشكل 6-12.



الشكل 6-12

تقع الشبكة γ بين منبع، قوته المحركة الكهربائية E_S ومقاومتها لداخلية R_S ، وحمل R_L . لدينا في هذه الحالة:

$$V'_L = E_S \times \frac{R_L}{R_S + R_L}$$

$$V_L = E_S \times \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} / (R_S + R_1 + \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L})$$

تعطى A_L بالعلاقة:

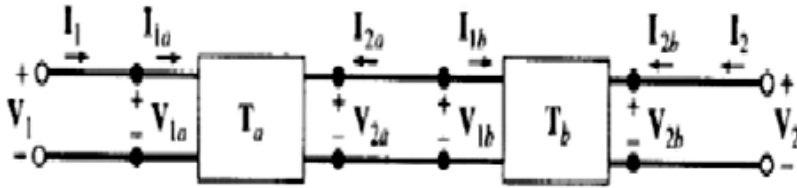
$$A_L = \frac{R_L}{R_S + R_L} \times \frac{(R_S + R_1)(R_L + R_2) + R_2 R_L}{R_2 R_L}$$

$$= 1 + \frac{R_S R_L + R_1 R_L + R_1 R_2}{R_2 (R_S + R_L)} \quad (6 - 34)$$

وهي تساوي الواحد أو أكبر من الواحد دوماً.

6-8 تسلسل الشبكات وتكرارها

في أكثر الأحيان تُربط شبكتان رباعيتا الأطراف أو أكثر ببعضهما على شكل سلسلة بحيث يتصل مخرج الأولى بمدخل الثانية ومخرج الثانية بمدخل الثالثة، وهكذا. ونحصل في النهاية على شبكة رباعية الأطراف مدخلها هو مدخل الشبكة الأولى، ومخرجها هو مخرج الشبكة الأخيرة كما في الشكل 6-13 الذي يمثل شبكتين، T_a و T_b ، مربوطتين على هذا النحو. يظهر على الشكل تيارات وتوترات الدخل والمخرج لكل شبكة: (I_{1a} ، V_{1a} لدخل الأولى و I_{1b} ، V_{1b} لدخل الثانية؛ I_{2a} ، V_{2a} لمخرج الأولى و I_{2b} ، V_{2b} لمخرج الثانية)، وكذلك توترا و تيارا الدخل والمخرج للشبكة الناتجة عن ربطهما (I_1 ، V_1 للدخل و I_2 ، V_2 للمخرج).



الشكل 6-13

لا توجد في عملية الربط هذه ممانعة حمولة للشبكة الأولى؛ بل تصبح الشبكة الثانية هي ممانعة الحمولة للشبكة الأولى. فإذا كان لها (أي الشبكة الثانية)

ممانعة دخل Z_i ، تصبح هذه الممانعة عندئذ هي ممانعة الحمولة للشبكة الأولى. والآن، إذا كان للشبكة الأولى، قبل الربط، نسبة ضياع إدخال A_L فإنها ستتغير بعد الربط بسبب تغير ممانعة حمولتها. ومن المرغوب فيه أن يكون لكل شبكة ضياع إدخال معين خاص بها ومستقل عن الشبكة الأخرى. لذا نقول: إنه من المستحسن ألا يؤدي ربط الشبكات ببعضها بصورة تسلسلية إلى تغيير ضياع الإدخال الخاص بكل منها عن القيمة التي نريدها. وبعبارة أخرى نقول: إذا فرضنا أن نسبة ضياع إدخال الشبكة الأولى هو A_L وأردنا أن نحافظ على هذه النسبة دون تغيير بعد إدخال الشبكة الثانية فإنه ينبغي أن يكون لهذه الأخيرة ممانعة دخل تساوي ممانعة الحمولة للشبكة الأولى.

إذا طبقنا هذا الشرط عند تصميم شبكة ما، أي إذا جعلنا ممانعة دخل الشبكة Z_i تساوي ممانعة حمولتها Z_L ، قيل عنها إنها شبكة تكرارية iterative network. وتدعى قيمة الممانعة الخاصة التي تجعل الشبكة تكرارية الممانعة التكرارية أو الممانعة المميزة.

لنأخذ الآن مثلاً على شبكة رباعية الأطراف مكونة من مقاومات صرفة، ونجد الشرط الذي يجب أن يتحقق كي تكون تكرارية، ثم نحسب نسبة ضياع الإدخال لهذه الشبكة عندما تكون تكرارية.

لنطبق الآن شرط التكرار على الشبكة γ المبينة في الشكل 6-12، فنكتب:

$$R_i = R_1 + \frac{R_2 \times R_L}{R_2 + R_L} \quad (6-35)$$

والشرط الذي يجعل هذه الشبكة تكرارية هو:

$$R_i = R_L \quad (6-36)$$

من العلاقتين (6-35) و (6-36) نجد:

$$R_1 R_2 + R_1 R_L - R_L^2 = 0 \quad (6-37)$$

ومن العلاقتين (6-34) و (6-37) نجد قيمتي R_1 و R_2 ، وهما:

$$R_1 = R_L \times \frac{A_L - 1}{A_L}; \quad R_2 = \frac{R_L}{A_L - 1} \quad (6-38)$$

أو يمكن أن نجد نسبة ضياع الإدخال A_L للشبكة التكرارية من العلاقة (6-38)،
بدلالة عناصر الشبكة وحمولتها كالاتي:

$$A_L = \frac{R_L}{R_L - R_1} = 1 + \frac{R_L}{R_2} \quad (6 - 39)$$

وتجدر الإشارة هنا إلى أن النسبة A_L لا علاقة لها بمقاومة المنبع الداخلية R_S عندما تعمل الشبكة في شروط التشغيل التكراري، كما هو واضح من العلاقة (6-39).

استناداً إلى النتيجة السابقة نقول: إذا عملت الشبكة في شروط التشغيل التكراري فإن نسبة ضياع الإدخال تحسب عندئذ بموجب التعريف كالاتي:

$$A_L = \frac{\text{توتر الحمولة بدون الشبكة}}{\text{توتر الحمولة مع الشبكة}} = \frac{I_1 R_L}{I_2 R_L} = \frac{I_1}{I_2} \quad (6 - 40)$$

بموجب العلاقة (6-36) نكتب، $I_1 R_L = I_1 R_i = V_{11'}$

كما أن : $I_2 R_L = V_{22'}$

وبذلك يمكن إعادة كتابة المعادلة (6-40) على النحو الآتي:

$$A_L = \frac{V_{11'}}{V_{22'}} = \frac{I_1}{I_2} \quad (6 - 41)$$

أي إن نسبة ضياع الإدخال A_L للشبكة التكرارية تساوي نسبة التيار (أو التوتر) في دخل الشبكة إلى التيار (أو التوتر) في الحمولة.

مثال 6-

وضعنا في دارة الشكل 5-6 مقاومة حمولة قيمتها $R_L = 10\Omega$. احسب ممانعة الدخل لهذه الشبكة، ثم احسب ضياع الإدخال لها إذا كان توتر إشارة الدخل $V_1 = 2V$.

الحل:

يمكن حساب ممانعة الدخل لرباعي الأطراف المحمّل بعدة طرق:

1- من العلاقة (6-29) التالية:

$$Z_i = \frac{V_1}{I_1} = z_{11} - \frac{z_{12}^2}{z_{22} + Z_L}$$

حيث حسبنا من قبل الوسطاء z لدارة الشكل 5-6 ووجدنا أنها تساوي:

$$z_{11} = 18\Omega, \quad z_{12} = z_{21} = 6\Omega, \quad z_{22} = 9\Omega$$

نعوض في العلاقة السابقة قيم كل من ممانعة الحمولة والوسطاء z فنجد:

$$Z_i = 16.1\Omega$$

2- بالحساب المباشر عند النظر إلى الشبكة من طرفي الدخل ووضع الحمولة

$$Z_i = 12 + \frac{6(3+10)}{6+13} = 16.1\Omega \quad R_L = 10\Omega \text{ بين طرفي الخرج فنجد:}$$

3- من حساب النسبة $\frac{V_1}{I_1}$ بعد غلق الخرج بمقاومة الحمولة.

لحساب ضياع الإدخال نحسب أولاً نسبة ضياع الإدخال A_L من العلاقة:

$$A_L = \frac{V_2'}{V_2}$$

حيث: V_2' و V_2 التوتر بين طرفي الحمولة Z_L من دون وجود الشبكة وبوجودها على الترتيب.

من الواضح أن $V_2' = 2V$. ولحساب V_2 نحسب أولاً التوتر V_6 بين طرفي

المقاومة 6Ω بتطبيق قانون تجزئة التوتر، ثم نحسب بعدها التوتر بين طرفي

مقاومة الحمولة 10Ω بتطبيق قانون تجزئة التوتر بين المقاومتين 2Ω و 10Ω .

$$V_6 = \frac{2 \times \frac{6 \times 13}{6+13}}{12 + \frac{6 \times 13}{6+13}} = 0.51V$$

ولحساب التوتر بين طرفي الحمولة نكتب:

$$V_2 = 0.51 \times \frac{10}{10+3} = 0.39V$$

وعليه، تكون نسبة ضياع الإدخال لهذه الشبكة $A_L = 5.13$

أما ضياع الإدخال $G(\text{dB})$ فيحسب من العلاقة:

$$G(\text{dB}) = 20 \log_{10} A_L$$

وبالتعويض في هذه العلاقة نجد أن ضياع الإدخال هو: $G = 14.20\text{dB}$
فالشبكة تعمل إذن على توهين الإشارة المطبقة على دخلها؛ لأن ضياع الإدخال موجب.

6-9 المرشحات الكهربائية

المرشح اسم يطلق على جهاز يحدث توهيناً في شدة التيار أو التوتر في مجال مرغوب من التواترات. إذا رجعنا إلى الدارتين اللتين درسناهما في الشكلين 5-6 و 6-12، نرى أن العناصر المكونة للشبكة رباعية الأطراف فيهما كانت مقاومات صرفة، وكانت النتيجة حصول توهين في شدة التيار الجاري في الحمولة، ولكنه مستقل عن تواتر الإشارة المطبقة. وهذا يعني أن الشبكة رباعية الأطراف المكونة من مقاومات صرفة تحدث توهيناً في إشارة الخرج يبقى نفسه مهما تغير تواتر الإشارة المطبقة. وعليه، فإن شبكة كهذه لا تستطيع أن تقوم بدور مرشح.

والآن، إذا أبقينا على الشبكة كما هي ولكن جعلنا حمولتها ممانعة بدلاً من مقاومة صرفة، فإن إشارة الخرج في الممانعة ستكون تابعة لتواتر إشارة الدخل التي يعطيها المنبع. فإذا كان المنبع الذي يغذيها يعطي إشارة فيها عدد من التواترات إضافة إلى التواتر الأساسي، فإن التوهين سيصيب تواترات معينة، تحددنا حمولة الخرج العقدية، التي قد لا تتفق مع التواترات التي نرغبها. وعليه، إذا أردنا تصميم شبكة رباعية الأطراف تقوم بدور مرشح للإشارة في مجال مرغوب من التواترات يجب أن تحتوي الشبكة على عناصر ردية، أي تحريضيات أو مكثفات أو كليهما. يمكن عد رباعي الأطراف عديم الضياع، أي الخالي من العناصر المقاومة، مرشحاً ممتازاً وقریباً من المثالي. إن وجود المقاومات في رباعي الأطراف سيؤدي، كما وجدنا، إلى تخامد منتظم في الشدة من أجل كل التواترات.

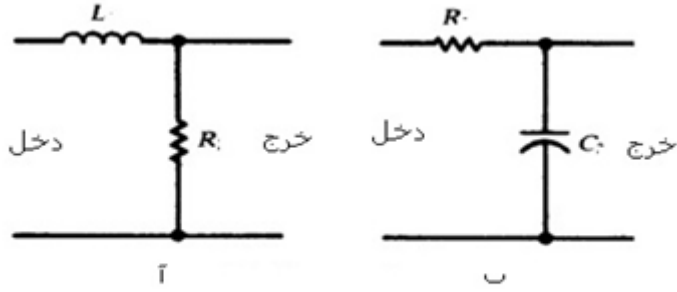
المرشح المثالي هو الذي يسمح للتيارات (أو التوترات) التي تشكل تواتراتها عصابة معينة من التواترات بالمرور من دون تخامد، ويوقف أو يمنع مرورها إذا وقعت تواتراتها خارج مجال العصابة. لذا فالربح يكون معدوماً خارج مجال العصابة ويساوي الواحد داخل هذا المجال. يطلق اسم العصابة النافذة على حزمة التواترات التي يسمح المرشح بتمريرها.

6-10 أنواع المرشحات

تصنف المرشحات إلى عدة أصناف حسب الخاصة التي تميزها وتعرف بها. فمن حيث التركيب هناك: المرشحات المنفعلة والمرشحات الفاعلة: تتشكل المرشحات المنفعلة من تجميع عناصر منفعلة: كالمقاومات والمحرضات والمكثفات. وسميت كذلك لأنها لا تعتمد على منابع طاقة خارجية، كما أنها لا تحتوي على مركبات فاعلة مثل الترانزستورات. أما المرشحات الفاعلة فهي على العكس من ذلك تحتوي على منابع ومركبات فاعلة إضافة إلى العناصر المنفعلة. ومن حيث حزمة التواترات التي يمررها المرشح هناك: مرشحات تمرير علوي، أو تمرير سفلي، أو تمرير عصابي، أو إيقاف عصابي. ومن حيث العرض هناك: مرشحات تماثلية ومرشحات رقمية. وهناك تصنيفات أخرى لا مجال لذكرها هنا. وسنركز في دراستنا هذه على المرشحات المنفعلة وأنواعها بدءاً من الدراسة الوصفية وصولاً إلى الدراسة التحليلية. سنبدأ بعرض وصفي لأنواع المرشحات المنفعلة انطلاقاً من سلوك الرديات التحريضية والوسعية عندما يتغير التواتر.

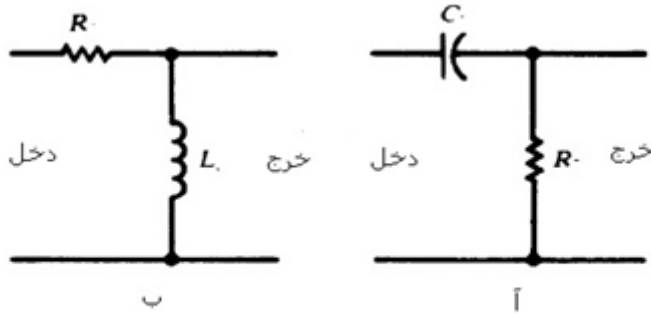
من المعلوم جيداً أن المحرضات توقف الإشارات ذات التواترات العالية، وتمرر الإشارات ذات التواترات المنخفضة. بينما تقوم المكثفات بالعملية العكسية. فالمرشح الذي تمر فيه الإشارة عبر محرضة، كما في الجزء أ من الشكل 6-14، أو الذي تؤمن فيه المكثفة طريقاً إلى الأرض، كما في الجزء ب من الشكل نفسه،

يكون فيه توهين الإشارات ذات التواترات المنخفضة أقل منها للإشارات ذات التواترات المرتفعة؛ لذا فإن مرشحاً كهذا هو مرشح تمرير سفلي.



الشكل 6-14 مرشح تمرير سفلي

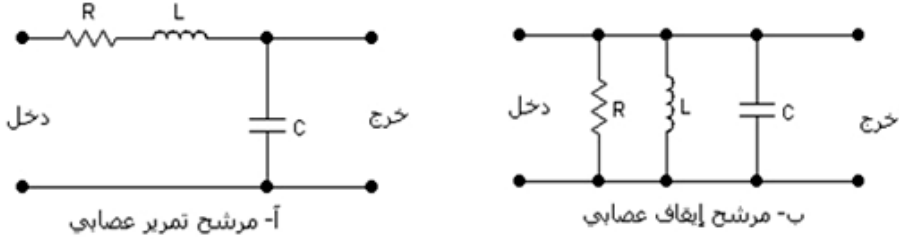
أما إذا مرت الإشارة عبر مكثفة، كما في الجزء آ من الشكل 6-15، أو كان لها طريق إلى الأرض من خلال محرّضة، كما في الجزء ب من الشكل نفسه، فالمرشح يحدث عندئذ توهيناً للإشارات ذات التواترات العالية أقل منه للإشارات ذات التواترات المنخفضة، والمرشح في هذه الحالة هو مرشح تمرير علوي.



الشكل 6-15 مرشح تمرير علوي

إن الدارة المكونة من مكثفة وتحريضية ومقاومة موصولة على التسلسل، كما في الجزء آ من الشكل 6-16، تشكل مرشح تمرير عصابي، يمرر عصابة من التواترات حول تواتر التجاوب. وبالمقابل، فإن الدارة المكونة من مكثفة وتحريضية ومقاومة موصولة على التفرع، كما في الجزء ب من الشكل 6-16

تشكل مرشح إيقاف عصابي، توقف عصابة من التواترات تقع حول تواتر التجاوب.



الشكل 6-16

أما المقاومات فليس لها خصائص انتقائية للتواترات، ولكنها تضاف إلى المحرضات والمكثفات من أجل تعيين الثابتة الزمنية للدائرة، ومن ثم تعيين التواترات التي تستجيب لها.

إن المرشحات الحقيقية لا تتمتع بانتقاء جيد وثابت من أجل جميع التواترات الواقعة بين التواتر $f=0$ والتواتر $f=\infty$ ؛ لذا كان لا بد من وضع اصطلاح يحدد مجال التواترات التي ينتقياها مرشح ما ويعد عمله عندها جيداً.

من أجل تسهيل الدراسة، اصطلح على أن انتقاء المرشح يكون جيداً إذا أوقف التواترات التي تقابل انخفاضاً يزيد على 3 dB في شدة الإشارة (تيار أو توتر) المطبقة على مدخل المرشح. أي إن مثل هذا المرشح يسمح بمرور الإشارات التي تقابل تواتراتها انخفاضاً في الشدة يعادل 3dB. إذن يكون:

$$20 \log \frac{I_0}{I} = -3$$

$$\frac{I_0}{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنها يكون:

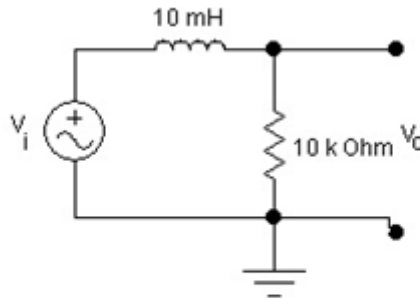
فالتواتر الذي يكون عنده تيار الخرج I_0 مساوياً $\frac{1}{\sqrt{2}}$ من قيمته العظمى يسمى **تواتر القطع**. ويشكل تواتر القطع حداً فاصلاً بين التواترات التي يسمح المرشح بتمريرها والتواترات التي يوقفها، أو تكون شداتها ضعيفة.

6-11 أمثلة على المرشحات

تتناول هذه الفقرة دراسة المرشحات بأنواعها كتلك التي توجد في الشكل 6-14 وما بعده، أي المرشحات التي تتألف داراتها من عنصر مقاومة وعنصر ردية. وتتركز هذه الدراسة على رسم دارة المرشح المدروس وتحديد قيمة كل عنصر فيها، ثم نبدأ بإيجاد العلاقة التي تمثل تخامد المرشح F وهي تمثل نسبة تيار الخرج إلى تيار الدخل أو نسبة توتر الخرج إلى توتر الدخل. ومنها نرسم تغيرات تخامد المرشح F بدلالة تواتر الإشارة المطبقة f . كما سندرس تغير طور هذه النسبة مع التواتر، ونعين تواتر القطع f_c للمرشح المدروس. لقد استعنا بالبرنامج الحاسوبي Electronics Workbench، والبرنامج MathCAD professional edition لرسم التخميد F والطور ϕ بدلالة التواتر لكل الأمثلة المدروسة في هذا الفصل.

6-11=1 تمرير السفلي:

أ-مرشح التمرير السفلي RL: يمثل الشكل 6-17 دارة لمرشح سفلي يمرر كل التواترات التي هي أقل من تواتر معين f_c بدون توهين أو تخميد كما سنرى، ويوقف كل التواترات التي هي أعلى من هذا التواتر.



الشكل 6-17

نحسب توتر الخرج V_o من الشكل فنجد:

$$V_o = \frac{R}{R+j\omega L} V_i$$

ونحسب التخميد F من العلاقة:

$$F = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R+j\omega L} = \frac{1}{1+j\omega \frac{L}{R}}$$

نحصل على القيمة المطلقة للتخميد F من العلاقة الآتية:

$$|F| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 \frac{L^2}{R^2}}}$$

كما نحصل على طور التخميد φ من العلاقة:

$$\varphi = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

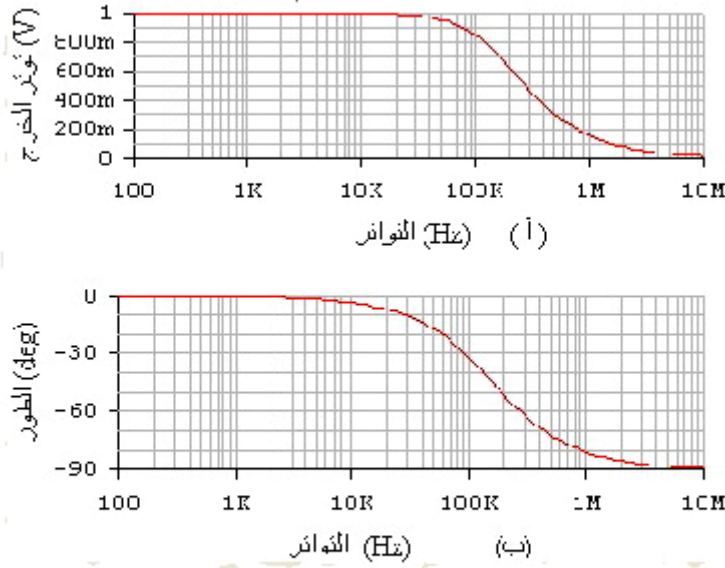
حيث $\omega = 2\pi f$.

مثال 7-

إذا أخذنا هنا توتر الدخل V_i مساوياً فلط واحد، وعندها يكون $F=V_o$ ، أي إن F تمثل التخميد وتوتر الخرج بآن معاً. نرسم تحولات $|F|$ و φ بدلالة التواتر على ورقة نصف لوغاريتمية كي تتسع لمجال التواترات الواسع، فنحصل على الشكل 6-18 بجزئيه (أ) و (ب).

إذا أنعمنا النظر في الجزء (أ) من الشكل 6-18، وهو يمثل تغيرات التخميد F بدلالة التواتر f ، نلاحظ أن قيمة توتر الخرج تبقى مساوية لقيمة توتر الدخل تقريباً حتى 50 كيلو هرتز ولا تهبط إلى $1/\sqrt{2}$ من قيمة توتر الدخل إلا في جوار 150 كيلو هرتز تقريباً التي تمثل تواتر القطع كما سنرى بالحساب. كما نلاحظ أنها تكاد تتعدم بعد تواترات تزيد على 1MHz.

وإذا أنعمنا النظر في الجزء (ب) من الشكل، وهو يمثل تغيرات الطور φ بدلالة التواتر f ، نلاحظ أن توتر الخرج يبقى على وفاق في الطور مع توتر الدخل حتى 50 كيلو هرتز تقريباً، ثم يتأخر عنه بما يقارب 90 درجة بعد 1MHz، ويبلغ هذا التأخر 45 درجة عند تواتر القطع.



الشكل 6-18 مرشح سفلي RL

لنعين الآن تواتر القطع لهذا المرشح. وجدنا أن المرشح يقوم بترشيح الإشارة بصورة مقبولة بعد أن يصبح توتر (أو تيار) الخرج مساوياً $1/\sqrt{2}$ من توتر (أو تيار) الدخل. إذا طبقنا ذلك على العلاقة التي تعطي قيمة التخامد F نجد:

$$|F| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 \frac{L^2}{R^2}}} = 1/\sqrt{2}$$

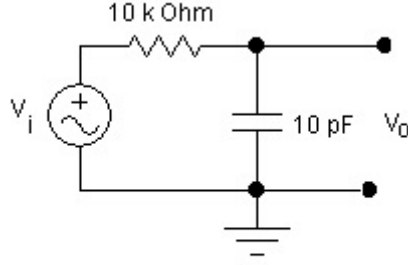
بتبسيط هذه العلاقة نجد أن تواتر القطع f_c يعطى بالعلاقة:

$$f_c = \frac{R}{2\pi L}$$

إذا وضعنا في هذه العلاقة قيمتي R و L في دائرة الشكل وهما $R=10 \text{ k}\Omega$ و

$L=10\text{mH}$ نجد قيمة تواتر القطع لهذا المرشح وهي: $f_c = 159 \text{ kHz}$

ب- مرشح التمرير السفلي RC: يمثل الشكل 6-19 دائرة لمرشح سفلي مكون من مكثفة C ومقاومة R . إن كل ما قيل عن المرشح السفلي RL ينطبق تماماً على هذه الحالة، ولا يختلف سوى بمجال التواترات التي يمررها المرشح، وهي



الشكل 6-19

تتعلق بقيم العناصر المكونة له كما رأينا.

نحسب توتر الخرج V_o من الشكل فنجد:

$$V_o = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} V_i$$

ونحسب التخميد F من العلاقة:

$$F = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

وقيمته المطلقة من العلاقة:

$$|F| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}$$

ويعطى فرق الطور ϕ بين توتر الخرج وتوتر الدخل بالعلاقة:

$$\phi = -\tan^{-1} \omega CR$$

مثال 8-

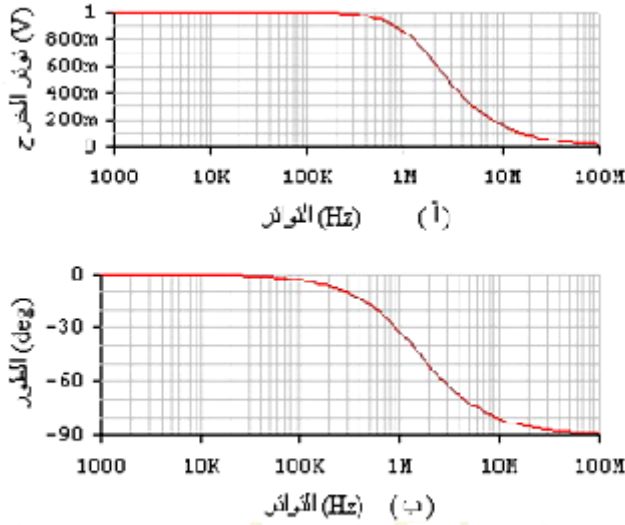
نرسم تحولات $|F|$ و ϕ بدلالة التواتر على ورقة نصف لوغارتمية كما فعلنا للمرشح السابق فنحصل على الشكل 6-20 بجزئيه (أ) و (ب). ونلاحظ أن تغيرات F و ϕ بدلالة التواتر متماثلة في المرشحين.

نعين تواتر القطع لهذا المرشح بنفس الطريقة التي طبقناها على المرشح السابق فنكتب:

$$|F| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} = 1/\sqrt{2}$$

من هذه العلاقة نجد أن تواتر القطع لهذا المرشح يعطى بالعلاقة:

$$f_c = \frac{1}{2\pi CR}$$



الشكل 6-20 مرشح سفلي RC

وكما فعلنا من أجل المرشح السابق، نعوض في هذه العلاقة قيمة كل من R و C بما تساويه حيث لدينا: $R=10\text{ k}\Omega$ و $C=10\text{ pF}$ فنجد قيمة تواتر القطع لهذا المرشح السفلي $f_c = 1.59\text{ MHz}$. وإذا أنعمنا النظر في الجزء (ب) من الشكل نلاحظ أن تواتر القطع يقع بين 1 و 2 ميغا هرتز.

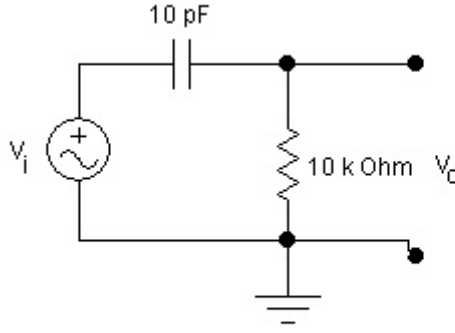
6-11-2 مرشحات التمرير العلوي:

أ- مرشح التمرير العلوي RC: يمثل الشكل 6-21 دائرة لمرشح علوي مكون من مقومة R ومكثفة C. نلاحظ أن دائرة المرشح العلوي تنتج عن دائرة المرشح السفلي بتبديل موضعي العنصرين R و C فيها.
توتر الخرج:

$$V_o = \frac{R}{R+1/j\omega C} V_i = \frac{1}{1-j/\omega CR} V_i$$

وطويلة توتر الخرج، أو التخمين F ، بفرض أن توتر الدخل $V_i = 1$ هي:

$$|F| = \frac{1}{\sqrt{1+1/\omega^2 C^2 R^2}}$$



الشكل 21-6

نلاحظ أنه إذا كان $\frac{1}{\omega^2 C^2 R^2} \ll 1$ ، أي $\omega \ll \frac{1}{CR}$ أو $f \gg \frac{1}{2\pi CR}$ فإن $|F|=1$. وهذا يعني أن المرشح يمرر كل التواترات التي هي أكبر من $\frac{1}{2\pi CR}$ ويخمد ما عداها، فهو مرشح علوي. أما الطور ϕ فيعطى بالعلاقة:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{1}{\omega CR}$$

مثال 9-

يعطي الشكل 22-6 تغيرات كل من التخامد F وفرق الطور ϕ بين توتري الدخل والخرج لهذا المرشح بدلالة التواتر. ونلاحظ من الشكل أن تواتر القطع يقع بين 1 و 2 ميغا هرتز. وسنجد أن قيمته تساوي بالحساب 1.59 MHz . كما نلاحظ أن ϕ تهبط من 90 درجة عند التواترات المنخفضة إلى الصفر عند التواترات العالية.

نعين تواتر القطع من العلاقة:

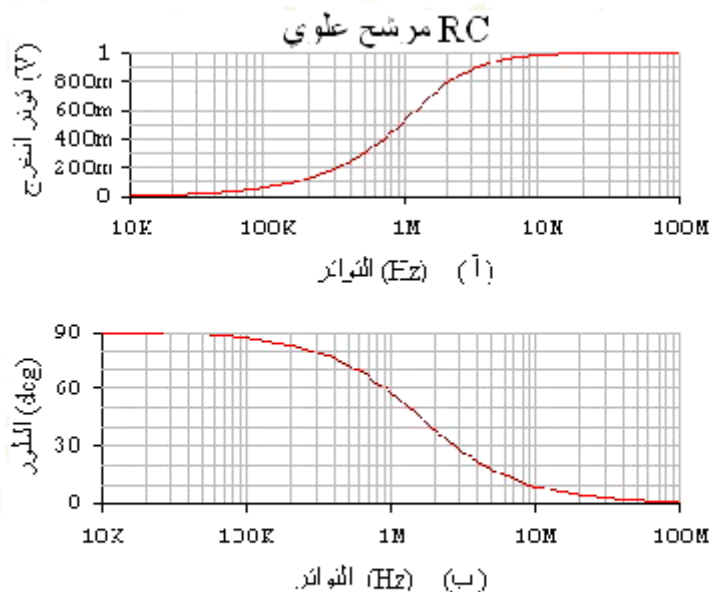
$$|F| = \frac{1}{\sqrt{1+1/\omega^2 C^2 R^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f_c = \frac{1}{2\pi CR}$$

فنجد:

وهي نفس العلاقة التي تعطي تواتر القطع للمرشح السفلي RC . وعليه، يكون

تواتر القطع للمرشح العلوي المكون من مقاومة $R = 10 \text{ k}\Omega$ ومكثفة سعتها $C = 10 \text{ pF}$ ساوياً 1.59 MHz .



الشكل 6-22

ب-مرشح التمرير العلوي RL : يمثل الشكل 6-23 دائرة لمرشح علوي مكونة من مقاومة $R=10 \text{ k}\Omega$ وتحريضية $L=10 \text{ mH}$. ونلاحظ هنا أيضاً أن هذه الدائرة تنتج من دائرة المرشح السفلي RL في الشكل 6-17 بعد المبادلة بين موضعي العنصرين.

تواتر الخرج:

$$V_0 = \frac{j\omega L}{R+j\omega L} V_i$$

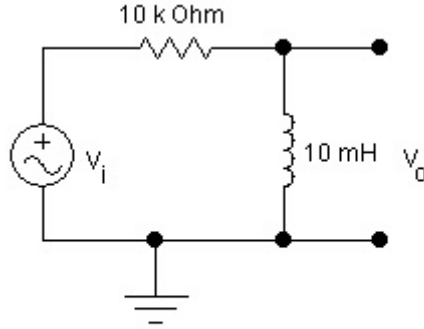
$$F = \frac{V_0}{V_i} = \frac{j\omega L}{R+j\omega L} = \frac{1}{1-j\frac{R}{\omega L}} \quad \text{والتخميد } F \text{ هو:}$$

تعطى طويلته $|F|$ بالعلاقة:

$$|F| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}}$$

ويعطى طوره φ بالعلاقة:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{R}{\omega L}$$



الشكل 6-23

مثال 10-

تشير العلاقة التي تعطي طويلة F إلى أنه عندما يكون $\frac{R}{\omega L} \gg 1$ ، أو $\frac{R}{L} \ll \omega$ أي: $f \gg \frac{R}{2\pi L} = 159 \text{ kHz}$ فإن $F \approx 1$ والمرشح يمرر الإشارة بدون تخميد، فهو مرشح علوي كما يظهر في الجزء (أ) من الشكل 6-24.

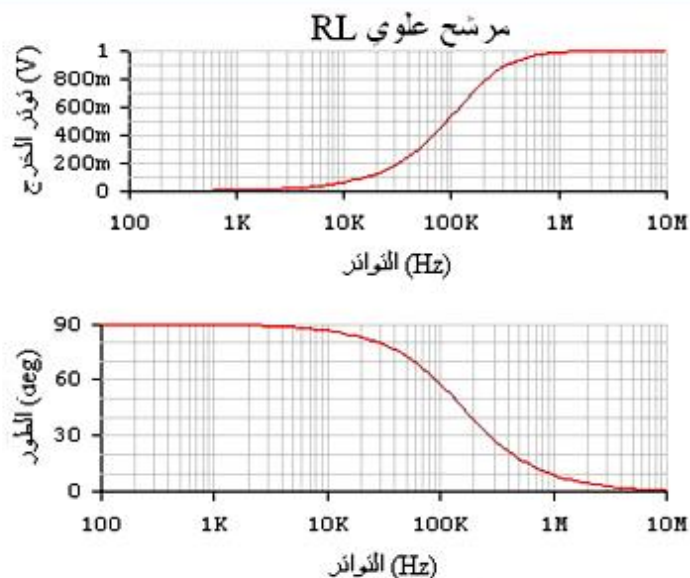
نعين تواتر القطع بكتابة $|F| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ فنجد تواتر القطع f_c .

$$f_c = \frac{R}{2\pi L}$$

وهو نفس تواتر القطع للمرشح السفلي.

وفي حالة دائرة الشكل 6-23 يكون تواتر القطع لهذا المرشح مساويا 159 kHz . يعطي الشكل 6-24 جزئيه (أ) و (ب) تغيرات كل من التخميد F وفرق الطور φ بين توتري الخرج والدخل لهذا المرشح بدلالة التواتر. يبين الجزء (أ) أن تواتر القطع يقع بين 100 و 200 كيلو هرتز. كما يشير الجزء (ب) من الشكل

إلى أن توتر الخرج يكون متقدماً بزاوية تقارب 90 درجة عند التواترات المنخفضة، ويكون على وفاق في الطور عند التواترات العالية. ويكون فرق الطور مساوياً 45 درجة عند تواتر القطع.



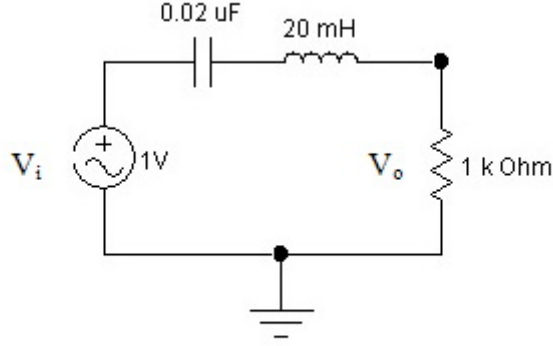
الشكل 6-24

6-11-3 مرشحات التمرير العصابي:

سندرس مرشحاً بسيطاً هو الدارة RCL التسلسلية، ونأخذ الخرج بين طرفي المقاومة R كما هو مبين في الشكل 6-25. لقد وجدنا عند دراسة التجاوب في مثل هذه الدارة أنها تمرر عصابة من التواترات تقع على جانبي تواتر التجاوب f_0 الذي يساوي 7.96 KHz هرتز من أجل دارة الشكل 6-25.

نحسب توتر الخرج فنجد:

$$V_o = \frac{R}{R+j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} V_i$$



الشكل 6-25

فيكون التخميد F :

$$|F| = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR}\right)}$$

فإذا أخذنا $V_i = 1$ فلط فإن التخميد F يصبح مساوياً لتوتر الخرج V_o .
وتعطي طولية التخميد F بالعلاقة:

$$|F| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR}\right)^2}}$$

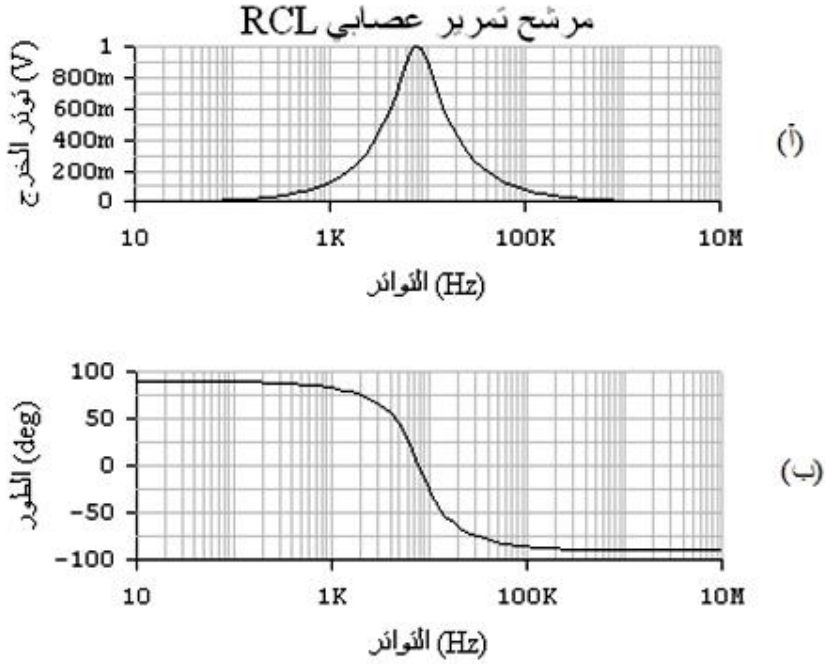
ويعطي طوره ϕ بالعلاقة:

$$\phi = -\tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR} \right)$$

مثال 11-

يبين الشكل 6-26 جزئيه (أ) و (ب) تغيرات كل من F ، أي توتر الخرج، و ϕ ، أي فرق الطور بين توتر الخرج وتوتر الدخل، بدلالة التواتر. يمكننا الاستعانة بالجزء (أ) من الشكل لتعيين تواتر التجاوب وتواتري القطع اللذين يحددان نقطتي نصف القدرة. يشير الجزء (ب) من الشكل إلى تقدم توتر الخرج على توتر الدخل بمقدار 90 درجة من أجل التواترات $f \ll f_0$ ، ثم ينعدم هذا

الفرق في الطور عند تواتر التجاوب، وبعدها يتأخر تواتر الخرج بمقدار 90 درجة من أجل تواترات $f \gg f_0$. أما تواترا القطع f_{c1} و f_{c2} فيقابلان فرقاً في الطور قدره 45 درجة قبل تواتر التجاوب و -45 درجة بعد تواتر التجاوب.



الشكل 6-26

لتعيين تواتري القطع نضع: $|F| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ فنحصل على المعادلة التالية:

$$R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = 2R^2$$

يمكن إعادة كتابة هذه المعادلة على النحو التالي:

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} - R\right)\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} + R\right) = 0$$

نحل هذه المعادلة كي نجد قيمة ω فنقول: إما أن يكون:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} - R = 0$$

وحل هذه المعادلة بالنسبة لـ ω يعطينا قيمتين لـ ω :

$$\omega_2 = \frac{R}{2L} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4L}{CR^2}} \right]$$

والقيمة الثانية سالبة وبالتالي فهي مرفوضة.

أو أن يكون:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} + R = 0$$

وحل هذه المعادلة يعطي أيضاً قيمتين لـ ω ، الأولى:

$$\omega_1 = \frac{R}{2L} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4L}{CR^2}} \right]$$

والثانية سالبة فهي مرفوضة.

ولما كانت $\omega = 2\pi f$ فبإمكاننا حساب تواتري القطع من العلاقتين السابقتين

$$\text{فنجد: } f_{c1} = 4.9 \text{ kHz} \quad \text{و} \quad f_{c2} = 12.9 \text{ kHz}$$

6-11-4 مرشحات الوقف العصابي:

سندرس مرشحاً بسيطاً هو الدارة RCL التفرعية، ونأخذ الخرج بين طرفي المقاومة R كما هو مبين في الشكل 6-27. لقد وجدنا عند دراسة التجاوب في مثل هذه الدارة أنها توقف عصابة من التواترات تقع على جانبي تواتر التجاوب f_0 ، الذي يساوي 3.56 KHz كيلو هرتز من أجل القيم الموجودة على دارة الشكل 6-27.

سنكتفي هنا بإيجاد التخميد F وتواتري القطع. نكتب توتر الخرج بالرجوع إلى الشكل 6-27 فنجد:

$$V_o = \frac{R}{R + \frac{L/C}{j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}} V_i$$

ومنها نجد التخميد F :

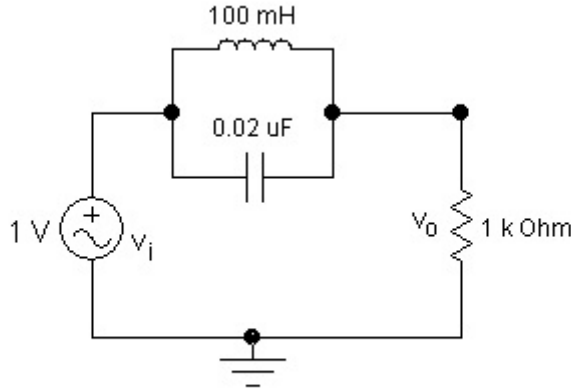
$$F = \frac{V_o}{V_i} = \frac{jR(\omega L - 1/\omega C)}{\frac{L}{C} + jR(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{1}{1 - j\frac{L}{CR(\omega L - 1/\omega C)}}$$

والتي تعطى قيمتها بالعلاقة:

$$|F| = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{C^2 R^2 (\omega L - 1/\omega C)^2}}}$$

ويعطى طورها بالعلاقة:

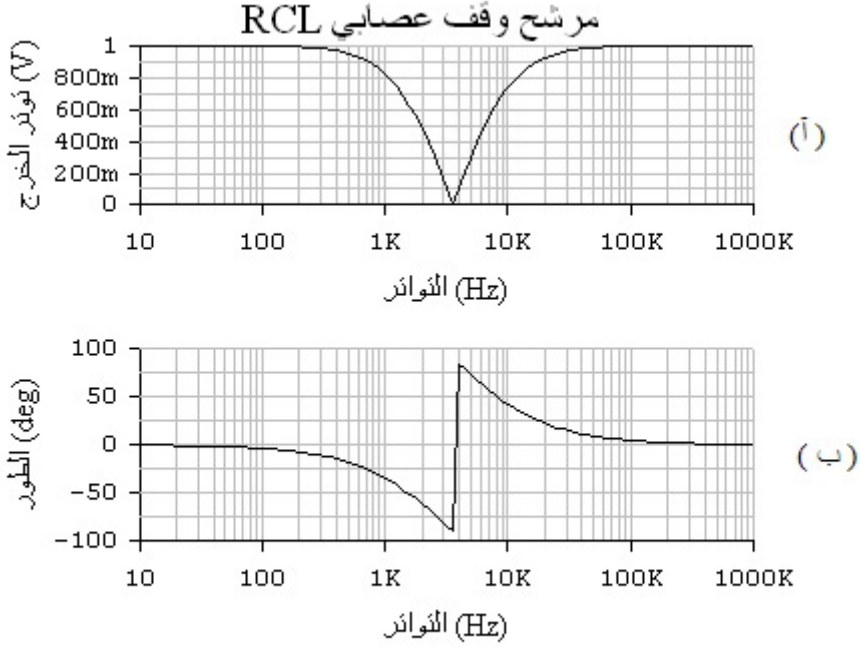
$$\varphi = \tan^{-1} \left[\frac{1}{CR(\omega L - 1/\omega C)} \right]$$



الشكل 6-27

مثال 12-

يبين الشكل 6-28 جزئيه (أ) و (ب) تغيرات F وتغيرات طورها φ بدلالة التواتر f . يشير الجزء (ب) من الشكل إلى أن توتري الدخل والخرج متفان بالطور عند التواترات المنخفضة والعالية على حد سواء، يتأخر توتر الخرج بزاوية تصل إلى 90 درجة تقريباً قبيل تواتر التجاوب، ثم يتقدم بزاوية تقارب 90 درجة بعيد تواتر التجاوب.



الشكل 28-6

لإيجاد تواتري القطع نضع: $|F| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ونحصل على العلاقة:

$$1 + \frac{L^2}{C^2 R^2} \frac{1}{(\omega L - 1/\omega C)^2} = 2$$

التي يمكن إعادة كتابتها على النحو التالي:

$$(\omega L - 1/\omega C)^2 - \left(\frac{L}{CR}\right)^2 = 0$$

ونكتب هذه الأخيرة على شكل جدائين :

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} + \frac{L}{CR}\right) \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} - \frac{L}{CR}\right) = 0$$

لدينا هنا معادلتان للحل، بحلها نجد تواتري القطع لهذا المرشح. وكما فعلنا في حالة مرشح التمرير العصابي تعطينا كل معادلة هنا جذرين أحدهما سالب مرفوض ويبقى لدينا جذران موجبان واحد من كل معادلة. هذان الجذران هما:

$$\omega_1 = \frac{1}{2CR} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4CR^2}{L}} \right]$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2CR} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4CR^2}{L}} \right]$$

بتعويض كل حد بما يساويه في المعادلتين نجد:

$$f_1 = 1.3 \text{ kHz}, \quad f_2 = 9.3 \text{ kHz} \quad \text{مع العلم أن } f_0 = 3.6 \text{ kHz}$$

يمكن مقارنة هذه القيم بالقيم التي يعطيها الشكل 6-28 .

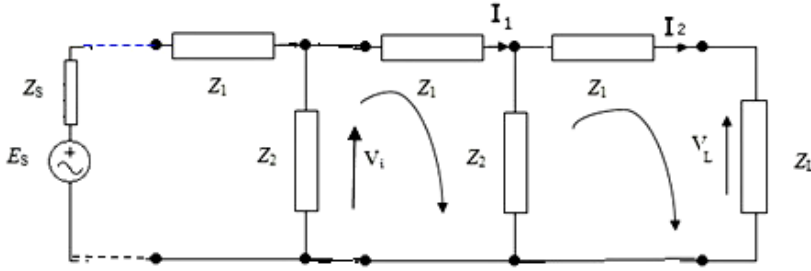
6-12 رباعيات الأطراف كمرشحات كهربائية

رأينا عند دراسة الدارة RCL التسلسلية والدارة RCL التفرعية أننا نحصل على عملية ترشيح في كلتا الدارتين حول تواتر معين هو تواتر التجاوب. فالدارة التسلسلية تؤدي دور مرشح تمرير عصابي بينما تؤدي الدارة التفرعية دور مرشح إيقاف عصابي. لكن هذا النوع من المرشحات غير ملائم لترشيح عصابة من التواترات؛ إضافة إلى ذلك فإن رباعي أطراف واحد، سواء أكان شبكة من النوع T أم من النوع π ، لا يمكن أن يشكل مرشحاً مثالياً لحزمة من التواترات. لذا فإننا نربط على التعاقب عدداً من رباعيات الأطراف المتماثلة. ونكرر هنا ما ذكرناه في حالة الشبكات المكونة من مقاومات صرفة فنقول: حتى لا يتغير ضياع الإدخال في الشبكة الأصلية فإننا نختار ممانعة دخل رباعي الأطراف مساوية لممانعة الحمولة، أي نفرض أن الشبكة تكرارية. تسمى ممانعة الحمولة في هذه الحالة الممانعة المميزة . وتتناول الفقرة التالية حساب هذه الممانعة.

6-13 الممانعة المميزة لرباعي الأطراف

لتعيين ممانعة الحمولة Z_L التي تحقق الشرط الذي يجعل الشبكة رباعية الأطراف شبكةً تكرارية، نفرض - للسهولة - أن رباعيات الأطراف الموصولة وصلاً

تسلسلياً هي شبكات من النوع T ومتناظرة. سندرس رباعي أطراف واحد من هذه المجموعة، وهو الأخير منها، الذي يتصل بممانعة الحمولة Z_L والمبين في الشكل 6-29. تظهر على الشكل جهات التيارات والتوترات التي نتبناها في هذه الدراسة.



الشكل 6-29

لنكتب معادلتَي العروة للعروتين المستقلتين 1 و 2 المبينتين على الشكل، فنحصل على المعادلتين الآتيتين:

$$V_1 = (Z_1 + Z_2)I_1 - Z_2I_2 \quad (6-42)$$

$$0 = -Z_2I_1 + (Z_1 + Z_2 + Z_L)I_2$$

ولكن $V_L = I_2Z_L$. وبالتعويض في المعادلة الأخيرة تصبح:

$$-V_L = -Z_2I_1 + (Z_1 + Z_2)I_2 \quad (6-43)$$

وإذا تذكرنا أن الشبكة يجب أن تكون تكرارية، أي $V_1 = Z_L I_1$ فإن المعادلتين السابقتين تصبحان:

$$V_1 = (Z_1 + Z_2)I_1 - Z_2I_2 = Z_L I_1 \quad (6-44)$$

$$V_L = Z_2I_1 - (Z_1 + Z_2)I_2 = Z_L I_2 \quad (6-45)$$

نحسب قيمة Z_L من المعادلتين الأخيرتين فتعطي الأولى:

$$Z_L = (Z_1 + Z_2) - Z_2 \frac{I_2}{I_1} \quad (6-46)$$

وتعطي الثانية:

$$Z_L = Z_2 \frac{I_1}{I_2} - (Z_1 + Z_2) \quad (6 - 47)$$

وبحذف I_1 و I_2 من المعادلتين الأخيرتين نحصل على قيمة Z_L بدلالة Z_1 و Z_2 فنجد:

$$Z_L = Z_C = \pm \sqrt{(Z_1 + Z_2)^2 - Z_2^2} \quad (6 - 48)$$

تمثل المعادلة (6-48) الشرط الذي يجب أن يتحقق بين عناصر أي رباعي أطراف وبين ممانعة الحمولة Z_L حتى يكون رباعي الأطراف تكرارياً. ونسمي الممانعة التي تحقق هذا الشرط والمعطاة بالمعادلة (6-48) الممانعة المميزة لرباعي الأطراف، ونرمز لها بالرمز Z_C . وفي الحقيقة إذا كانت ممانعة الحمولة في مرشح رباعي أطراف مؤلف من n شبكة رباعية الأطراف موصولة ببعضها الواحدة تلو الأخرى، فإن تخامد التيار غير المرغوب فيه من جراء استعمال مرشح بهذه المواصفات سيكون أشد n مرة من التخامد الذي يحدثه واحد منها فقط عندما يعمل لوحده.

6-14 تعيين تواترات القطع للمرشح

إذا كان المرشح عديم الضياع (أي لا توجد فيه عناصر مقاومة) فإن كلاً من Z_1 و Z_2 مقدار تخيلي صرف، يمكن كتابته على النحو الآتي:

$$Z_1 = ja \quad , \quad Z_2 = jb \quad (6 - 49)$$

حيث a و b مقداران حقيقيان موجبان في حالة التحريضيات وسالبان في حالة الوسعيات.

نسمي النسبة $F = I_2/I_1$ تخميد المرشح. ولكن بالرجوع إلى المعادلتين (6-46) و(6-47) يمكن إعادة كتابة التخميد F على النحو الآتي:

$$F = \frac{V_L}{V_1} = \frac{I_2}{I_1} \quad (6 - 50)$$

إذا عوضنا قيمة F في المعادلة (6-46) نجد:

$$Z_L = (Z_1 + Z_2) - Z_2 F \quad (6 - 51)$$

ومنها نحسب F فنجد:

$$F = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} - \frac{Z_L}{Z_2} \quad (6 - 52)$$

نعوض عن Z_L في المعادلة (6-52) بماتساويه من المعادلة (6-48) فنحصل على التخماد F بدلالة ممانعات الشبكة:

$$F = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} \pm \frac{\sqrt{(Z_1 + Z_2)^2 - Z_2^2}}{Z_2} \quad (6 - 53)$$

بتعويض Z_1 و Z_2 بما تساويه في المعادلة (6-49) وإصلاح العلاقة الناتجة نحصل على قيمة التخماد بدلالة رديات الشبكة وهي:

$$F = \frac{a+b}{b} \pm j \sqrt{1 - \left(\frac{a+b}{b}\right)^2} \quad (6 - 54)$$

وهنا نميز حالتين:

الحالة الأولى: $\left(\frac{a+b}{b}\right)^2 < 1$ أي:

$$1 > \frac{a+b}{b} > -1 \quad (6 - 55)$$

يمكننا في هذه الحالة أن نضع: $\cos \varphi = \frac{a+b}{b}$ بالتعويض في المعادلة (6-52) نجد:

$$F = \cos \varphi \pm j \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$$

أو نكتب التخماد F على الشكل:

$$F = \cos \varphi \pm j \sin \varphi = e^{\pm j \varphi} \quad (6 - 56)$$

وبالرجوع إلى المعادلة (6-50) نكتب:

$$I_1 = F I_2 = I_2 \angle \pm \varphi \quad (6 - 57)$$

تشير المعادلة (6-57) إلى أنهم من أجل التواترات المكونة للمجال المعرف

بالمعادلة (6-55) تكون شدة تيار الخرج مساوية لشدة تيار الدخل، ولكنها مخالفة

لها في الطور.

الحالة الثانية: $\left(\frac{a+b}{b}\right)^2 > 1$ أي $\frac{|a+b|}{|b|} > 1$ يمكن أن نفرض في هذه الحالة $\cosh\varphi = \frac{a+b}{b}$ فيكتب التخماد F عندئذ على النحو الآتي:

$$F = \cosh\varphi \pm \sqrt{\cosh^2\varphi - 1} \quad (6-58)$$

وبالرجوع إلى خواص الدوال القطعية نكتب المعادلة (6-58) على الشكل التالي:

$$F = \cosh\varphi \pm \sinh\varphi = e^{\pm\varphi} = m \quad (6-59)$$

وبتعويض قيمة F هذه في المعادلة (6-50) نحصل على:

$$I_1 = mI_2 \quad (6-60)$$

تشير المعادلة (6-60) إلى أن تيار الخرج على وفاق في الطور مع تيار الدخل ولكن طويلته مُخَمَّدة، وهي أخفض من تيار الدخل بـ m مرة. وخلاصة القول إن العصابة النافذة للمرشح معرفة في المجال الآتي:

$$1 > \frac{a+b}{b} > -1 \quad (6-61)$$

ففي داخل العصابة النافذة تحافظ شدة التيار على قيمتها لكن طورها يتغير، أما خارج مجال العصابة النافذة فإن شدة التيار تتخامد لكن طورها لا يتغير. وعليه، فباختيار عدد مناسب من رباعيات الأطراف يمكننا أن نحقق التخامد المرغوب خارج العصابة. إذا كان التخامد الموافق للمرشح واحد هو $m_1 = e^\varphi$ ، فإن التخامد الموافق لـ n مرشح متعاقب يكون $m = e^{n\varphi}$.

6-15 تطبيقات على المرشحات

6-15-1 مرشح تمرير سفلي:

تتألف دارة مرشح التمرير السفلي من تحريضييتين ومكثفة موصولة بحيث تشكل

شبكة T متناظرة، كما في الجزء (أ) من الشكل 6-30. فعند التواترات المنخفضة تسلك التحريضات سلوك دارات قصيرة، وتكون ممانعة المكثفة عالية جداً؛ لذا فإن شدة التيار لا يصيبها اضمحلال. أما عند التواترات العالية فدور الممانعات ينعكس، وبذلك يتحقق مفهوم الترشيح. لمعرفة تواتري القطع في العصابة النافذة لهذا المرشح، نطبق العلاقة (6-61) على رباعي الأطراف في الجزء (أ) من الشكل 6-30، حيث لدينا هنا:

$$a = \omega L , \quad b = -1/\omega c$$

وعليه يكون:

$$\frac{a+b}{b} = 1 - \omega^2 Lc$$

وتأخذ المتراجحة (6-61) الشكل الآتي:

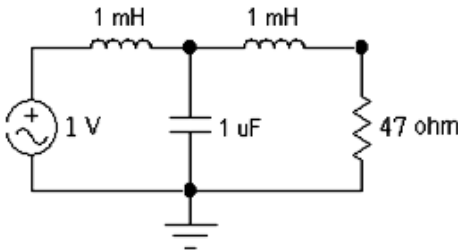
$$-1 < 1 - \omega^2 Lc < 1$$

التي نحلها بالنسبة لـ ω فنجد:

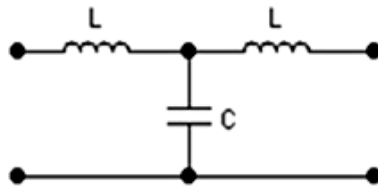
$$0 < \omega < \sqrt{\frac{2}{Lc}} \quad (6-62)$$

ويعطي هذا الشرط تواتري القطع وهما:

$$\omega_1 = 0 , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2}{Lc}} \quad (6-63)$$



(ب) الدارة العملية



(أ) الدارة النظرية

الشكل 6-30 مرشح سفلي

تدل العلاقة (6-63) على أن دائرة الشكل المذكور هي دائرة مرشح سفلي، لأنه يسمح لكل التواترات التي هي أقل من $\omega_2 = \sqrt{\frac{2}{LC}}$ بالمرور خلاله بسهولة، ويوقف كل التواترات التي هي أكبر من ω_2 .

مثال على مرشح سفلي:

مثال 13-

يمثل الجزء (ب) من الشكل 6-30 الدارة العملية لمرشح سفلي وقد وضعت عليها القيم التالية للتحرضية والمكثفة ومقاومة الخرج: $C=1\mu F$ ، $L = 1mH$ و $R=47\Omega$. تُحسب قيمة R من العلاقة (6-48) بحيث تكون Z_C مقاومة صرفة. بعد التعويض عن الممانعات Z في هذه العلاقة بقيمها السابقة تصبح:

$$Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}(2 - \omega^2 LC)}$$

ولكي تكون الممانعة المميزة مقاومة صرفة R يجب أن يكون ما تحت الجذر موجباً. يحدد هذا الشرط تواتر القطع للمرشح الذي يعطى بالعلاقة:

$$\omega < \sqrt{\frac{2}{LC}}$$

وهي نفس العلاقة (6-63). وتحدد هذه العلاقة أيضاً قيمة المقاومة R التي هي $R = \sqrt{L/C} \approx 47\Omega$ على مدى واسع من التواترات. بوضع القيم العددية لعناصر المرشح في العلاقتين السابقتين نجد أن تواتر القطع هو $f_c = 7 \text{ kHz}$ تقريباً.

لإيجاد التخمد وفرق الطور لهذا المرشح، نكتب معادلة العروة الثانية للدائرة بأخذ الجهة الاصطلاحية للتيارات فنجد:

$$\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] I_2 - j \frac{I_1}{\omega C} = 0$$

وبذلك يكون التخمد:

$$F = \frac{I_2}{I_1} = \frac{j}{\omega c R + j(\omega L - \frac{1}{\omega c})}$$

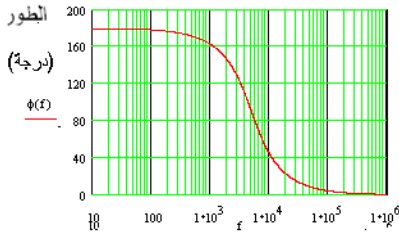
$$F = \frac{1}{\omega c} \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega c})^2}}$$

وقيمته:

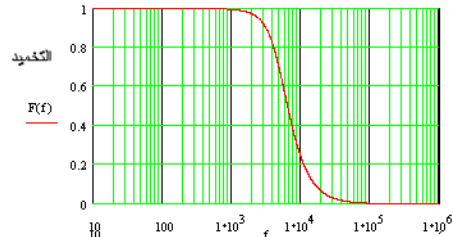
أما فرق الطور ϕ مقدراً بالدرجات فيعطى بالعلاقة:

$$\phi(f) = 90^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{R}$$

يبين الجزء (أ) من الشكل 6-31 تغيرات التخميد أوتوتر خرج المرشح بدلالة التواتر f ، كما يبين الجزء (ب) منه تغير زاوية فرق الطور ϕ ، مقدرة بالدرجات، بدلالة التواتر. ويظهر من الشكل أن الدارة تسلك سلوك مرشح سفلي تواتر القطع فيه قريب جداً من 7 كيلو هرتز كما هو متوقع من الحساب النظري. ويلاحظ أن إشارة الخرج لا يصيبها أي تخميد قبل تواتر القطع، ولكن طورها يتغير من 180 درجة إلى الصفر عند تواترات أعلى من تواتر القطع، كما تكون إشارة الخرج قريبة جداً من الصفر بعد تواتر القطع لكنها تكون متفقة في الطور مع إشارة الدخل.



(ب) التواتر f (هرتز)



(أ) التواتر f (هرتز)

الشكل 6-31 مرشح سفلي

6-15-2 مرشح تمرير علوي

يتألف من مكثفتين وتحريضية موصولة بحيث تشكل شبكة T متناظرة، كما في الجزء (أ) من الشكل 6-32. إذا أنعمنا النظر في الشكل نرى أن دارة مرشح التمرير العلوي تنتج من دارة مرشح التمرير السفلي بعد المبادلة بين

التحريضيات والمكثفات في الدارة الأولى. وهذا المرشح يوقف التواترات المنخفضة ويمرر بسهولة التواترات العالية، لذا فإنه يؤدي دور مرشح تمرير علوي.

لمعرفة تواتري القطع والعصابة النافذة، نكتب الشرط (6-61) ونطبقه على دارة الشكل 6-32.

لدينا هنا: $a = -1/\omega c$, $b = \omega L$ وعليه يكون:

$$\frac{a+b}{b} = 1 - \frac{1}{\omega^2 Lc}$$

يصبح شرط تحديد المجال:

$$-1 < 1 - \frac{1}{\omega^2 Lc} < 1$$

$$0 > \frac{1}{\omega^2 Lc} > 2$$

وحل هذه المتراحة بالنسبة لـ ω هو:

$$\infty > \omega > 1/\sqrt{2Lc} \quad (6-64)$$

ويعطي هذا الشرط تواتري القطع وهما:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2Lc}} , \omega_2 = \infty \quad (6-65)$$

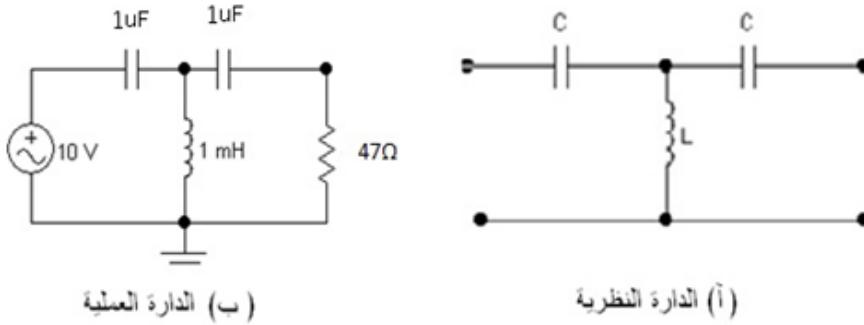
تدل المعادلة (6-65) على أن هذه الدارة هي دارة مرشح علوي، لأنه يسمح لكل التواترات التي هي أكبر من $\omega_1 = 1/\sqrt{2Lc}$ بالمرور خلاله بسهولة، ويوقف كل التواترات التي هي أقل من هذا التواتر.

مثال على مرشح علوي:

مثال 14-

يمثل الجزء (ب) من الشكل 6-32 الدارة العملية لمرشح علوي وقد وضعت عليها القيم التالية للتحرضية والمكثفة ومقاومة الخرج: $C=1\mu F$ ، $L = 1 \text{ mH}$ و $R=47 \Omega$. نحسب قيمة R من العلاقة (6-48) بحيث تكون Z_c مقاومة صرفة.

بعد التعويض عن الممانعات Z في هذه العلاقة بقيمتها السابقة نجد أن القيمة المناسبة للمقاومة R هي 47Ω على مدى واسع من التواترات.



الشكل 6-32 مرشح علوي

لإيجاد التخميد وفرق الطور لهذا المرشح، نكتب معادلة العروة الثانية للدائرة بأخذ الجهة الاصطلاحية للتيارات فنجد:

$$\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right) \right] I_2 + j\omega L I_1 = 0$$

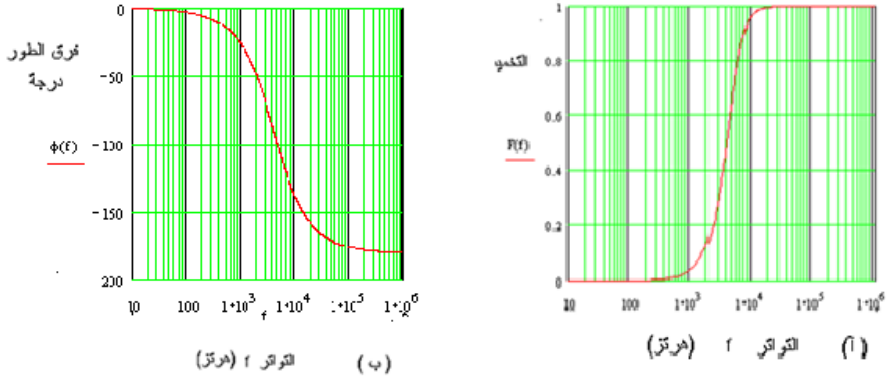
$$F = \frac{-j\omega L}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)} \quad \text{وبذلك يكون التخامد:}$$

$$F = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c}\right)^2}} \quad \text{وتكون قيمته:}$$

أما فرق الطور ϕ مقدراً بالدرجات فيعطى بالعلاقة:

$$\phi(f) = -90^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega c}}{R}$$

يبين الجزء (أ) من الشكل 6-33 تغيرات التخميد أو توتر خرج المرشح بدلالة التواتر f ، كما يبين الجزء (ب) منه زاوية فرق الطور ϕ بين الخرج والدخل بدلالة التواتر f مقدرة بالدرجات. ويظهر من الشكل أن الدائرة تسلك سلوك مرشح علوي تواتر القطع فيه قريب جداً من 4 كيلو هرتز كما هو متوقع من الحساب النظري.



الشكل 6-33 مرشح علوي

6-15-3 المرشح العصابي

هو المرشح الذي يمرر أو يوقف عصابة من التواترات. ففي الحالة الأولى يسمى مرشح تمرير عصابي، ويسمى في الحالة الثانية مرشح إيقاف عصابي.

أ-مرشح تمرير عصابي

يمثل الجزء (أ) من الشكل 6-34 نوعاً بسيطاً لمرشح تمرير عصابي. سنحسب

فيما يأتي العصابة النافذة لهذا المرشح. لدينا هنا:

$$a = \frac{1}{2} \omega L - \frac{1}{\omega C}, \quad b = \omega L$$

وعليه يكون:

$$\frac{a+b}{b} = 3/2 - \frac{1}{\omega^2 LC}$$

يتحدد مجال العصابة النافذة من العلاقة:

$$-1 < 3/2 - \frac{1}{\omega^2 LC} < 1$$

يعطينا هذا الشرط:

$$\sqrt{\frac{2}{5LC}} < \omega < \sqrt{\frac{2}{LC}} \quad (6-66)$$

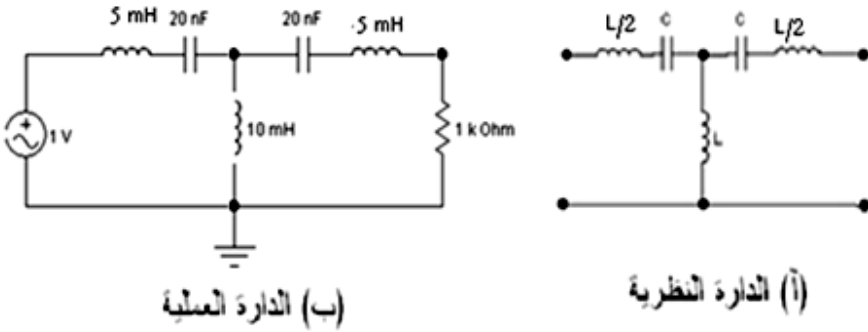
وتدل هذه العلاقة على أن هذا المرشح يمرر عصابة من التواترات محصورة بين التواترتين:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2}{5LC}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2}{LC}}$$

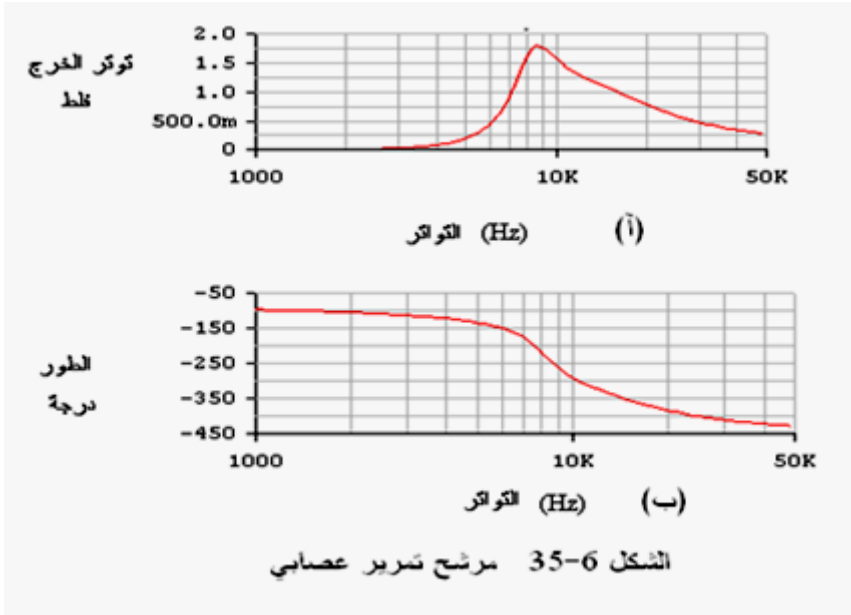
مثال على مرشح تمرير عسافي:

مثال 15-

يمثل الجزء (ب) من الشكل 6-34 الدارة العملية لمرشح تمرير عسافي وقد وضعت عليها قيم المكثفات والتحريضيات وحمولة الخرج. كما يبين الشكل 6-35 بجزئيه (أ) و (ب) تغيرات توتر خرج المرشح وطور هذا التوتر بدلالة



الشكل 6-34 مرشح تمرير عسافي

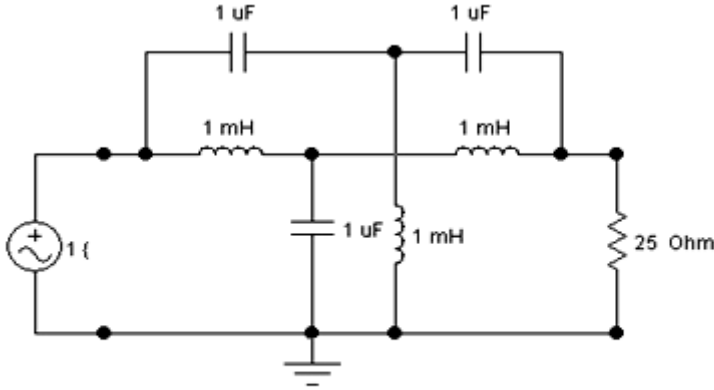


التواتر f . ويظهر من الشكل أن الدارة تسلك سلوك مرشح عصابي يمرر حزمة من التواترات تقع بين التواترين 12.4 kHz و 7.4 kHz ، وهما قريبان جداً من تواتري القطع $f_2 \approx 16$ kHz و $f_1 \approx 7$ kHz اللتين تعطيانهما العلاقة (6-66) .

ب- مرشح إيقاف عصابي

مثال 16-

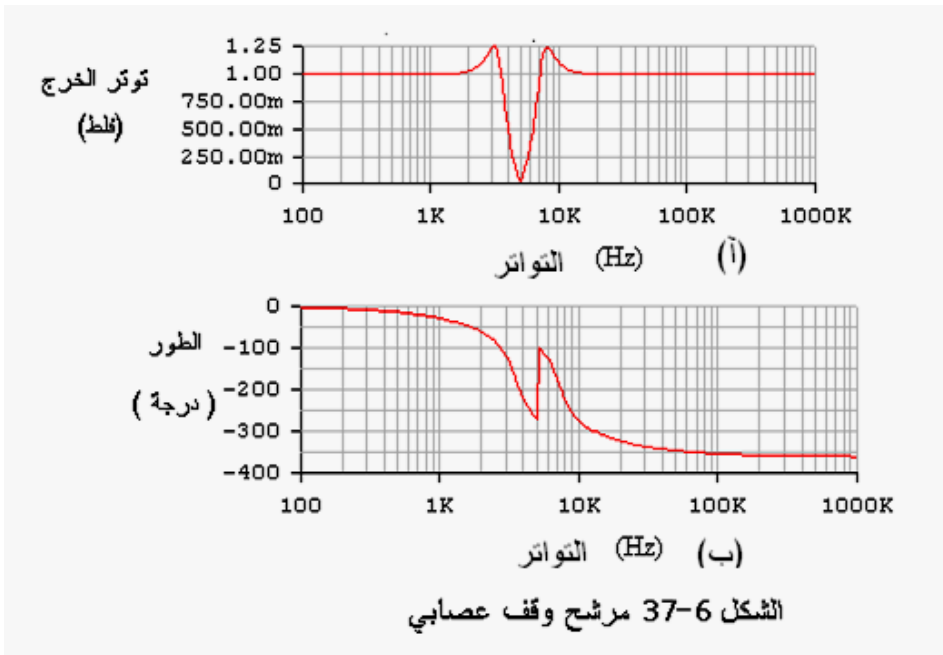
يمثل الشكل 6-36 دارة أحد أنواع مرشحات الإيقاف العصابي. وإذا أنعمنا النظر في دارته نلاحظ أنه ينتج عن ربط مرشح تمرير سفلي على التفرع مع مرشح تمرير علوي. فالأول يمرر التواترات المنخفضة التي هي أقل من التواتر



الشكل 6-36 مرشح وقف عصابي

والثاني يمرر التواترات العالية التي هي أعلى من التواتر $\omega_1 = \sqrt{\frac{2}{LC}}$ ، وبذلك يوقف المرشح مرور عصابة من التواترات محدودة بالتواترين ω_1 و $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$ ، ويمرر بسهولة كل التواترات الواقعة خارج هذا المجال . نعوض عن C و L بقيمتيهما في دارة المرشح فنحصل على تواتري القطع $f_1 = 3.56$ kHz و $f_2 = 7.12$ kHz ، وهما متوافقتان مع ما يعطيه الجزء (ب) من الشكل 6-37.

يمثل الجزء (أ) من الشكل 6-37 تغيرات توتر خرج المرشح بدلالة التواتر في المجال من 100Hz إلى 1 MHz، ويبين الشكل بوضوح أن تواتري القطع يقعان إلى يسار ويمين التواتر 5kHz. كما يمثل الجزء (ب) منه تغيرات الطور بدلالة التواتر في مجال التواتر نفسه.



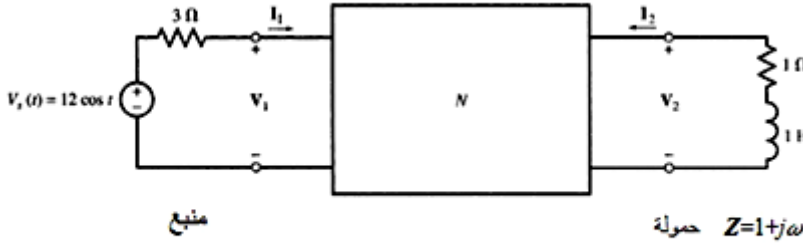
مسائل على الفصل السادس

1-6 تعطي الوسطاء Z للشبكة رباعية الأطراف المبينة في الشكل م-6 كالآتي:

$$z_{11} = j2\omega + \frac{1}{j\omega}, z_{12} = z_{21} = j2\omega, z_{22} = j2\omega + 4$$

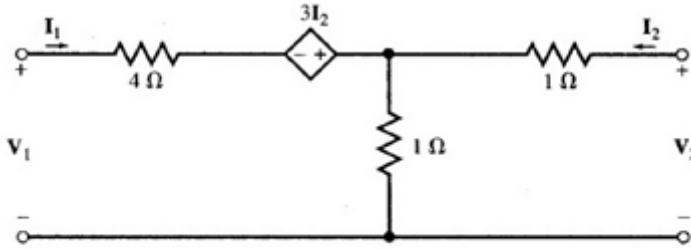
وصلنا الشبكة إلى منبع وحمولة كما هو في الشكل م-6، والمطلوب حساب:

$$.I_1, I_2, V_1, V_2$$



الشكل م 1-6

2-6 احسب الوسطاء Z للدارة المبينة في الشكل م 2-6 .



الشكل م 2-6

3-6 تعطي الوسطاء h لجهاز رباعي الأطراف H كما يأتي:

$$h_{11} = 500 \Omega, h_{12} = 10^{-4}, h_{21} = 100, h_{22} = 2(10^{-6})\Omega$$

ارسم نموذجاً لدارة الجهاز مكوناً من مقاومتين ومنبعين غير مستقلين تظهر عليه

قيمة كل عنصر.

4-6 بإجراء اختبار مناسب على الشبكة رباعية الأطراف المبينة في الشكل م-6

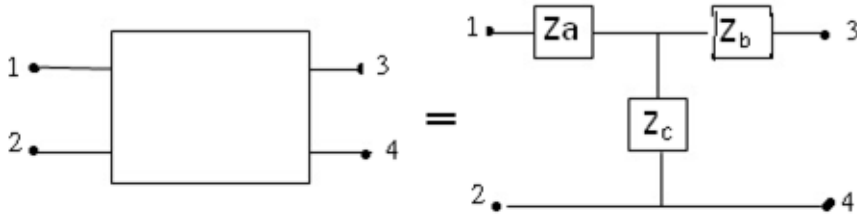
3 في حالتي الدارة المفتوحة والدارة القصيرة تبين ما يأتي:

أ-قيست الممانعة $(250+j100)\Omega$ بين الطرفين 1 و 2 مع جعل الطرفين 3 و 4 دائرة مفتوحة.

ب-قيست الممانعة $(400+j300)\Omega$ بين الطرفين 1 و 2 مع جعل الطرفين 3 و 4 دائرة قصيرة.

ج-قيست الممانعة $(200+j0)\Omega$ بين الطرفين 3 و 4 مع جعل الطرفين 1 و 2 دائرة مفتوحة.

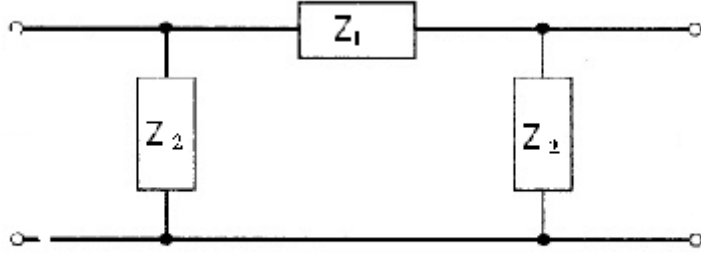
استخرج الممانعات Z_a ، Z_b ، Z_c للشبكة المكافئة.



الشكل م 3-6

6-5 لتكن الشبكة π المتناظرة والمبينة في الشكل م 6-4: أ-أوجد ممانعة الدخل والشبكة مفتوحة الخرج. ب- أوجد ممانعة الدخل والشبكة محملة بممانعة خرج Z_c . ج- أوجد الممانعة التكرارية لهذه الشبكة. د- إذا كان Z_1 و Z_2 مقاومتين صرفيتين وكانت المقاومة التكرارية للشبكة تساوي 100Ω ، أوجد قيمتي Z_1 و Z_2 كي تنتج الشبكة تخامداً في القدرة يساوي 20 dB لدى إدخالها بين منبع وحمولة. هـ- إذا جعلنا Z_1 مكثفة سعتها C_1 وأبقينا Z_2 مقاومة صرفية، ماهو الدور الذي يلعبه هذا المرشح بالنسبة للتواترات المختلفة؟ أوجد قيمتي C_1 و R_2 كي يكون تواتر القطع مساوياً 10^6 Hz عند تخامد قدره 3dB .

6-6 يمكن بناء مرشح إما على شكل T أو على شكل π كما هو مبين في الشكل



الشكل م 4-6

م 5-6 . عين الممانعتين المميزتين لكلا التركيبين.

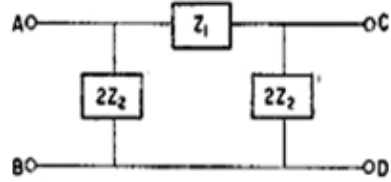
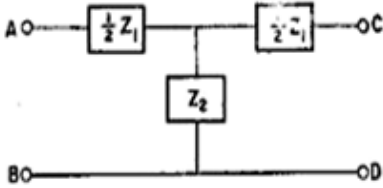
م 6-7 نسمي في دارتي الشكل م 5-6 الممانعات الآتية:

Z_0 = الممانعة بين A و B عندما تكون C و D مفتوحتين.

Z_{SC} = الممانعة بين A و B عندما تكون C و D دائرة قصيرة.

Z_0 = الممانعة المميزة.

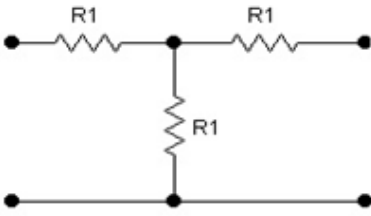
برهن صحة العلاقة: $Z_0 = \sqrt{Z_{OC}Z_{SC}}$



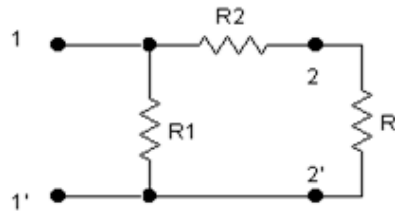
الشكل م 5-6

م 6-8 لتكن الشبكة من النوع Γ المبينة في الشكل م 6-6. نضع مقاومة حمولة R في خرج هذه الشبكة، والمطلوب: أ- عين قيمة R بدلالة R_1 و R_2 حتى تكون هذه الشبكة تكرارية. ب- عين R_1 و R_2 حتى يكون للشبكة ضياع إدخال يساوي 20 dB وذلك بفرض $R=600\Omega$.

9-6 يمثل الشكل م 7-6 دائرة لمخمدة على شكل الحرف T ، ممانعتها التكرارية 600Ω . كم يجب أن تكون قيم المقاومات المكونة لها حتى تحدث ضياعاً قدره: آ- 10 dB ، ب- 20 dB ؟



الشكل م7-6



الشكل م 6-6

الفصل السابع

التحريض المتبادل والمحولات

7-1 التحريض المتبادل

نتكلم على التحريض المتبادل بين دارتين متجاورتين إذا تحرّضت قوة محرّكة كهربائية (ق.م.ك)، أو توتر، في إحدى الدارتين بسبب تغير التيار الكهربائي المار في الدارة الأخرى. ومن المعلوم أن تغير التيار $i(t)$ المار في محرّضة تحريضها الذاتي L سوف يحرض فيها توتراً $v(t)$ يعطى بموجب قانون فارادي بالعلاقة:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (7 - 1)$$

وهو ناتج عن تغير التدفق الذي يجتاز المحرّضة.

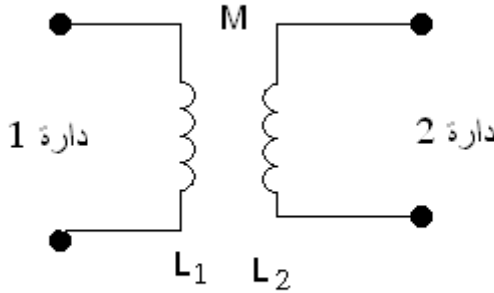
يقال عن الدارتين المتجاورتين إنهما دارتان مقترنتان مغنطيسياً. ينتج عن هذا الاقتران انتقال جزء من التدفق المغنطيسي الذاتي من إحدى الدارتين إلى الأخرى بسبب التحريضية المتبادلة M بين الدارتين. ويعتمد هذا الاقتران على الترتيبات الفيزيائية للّفات في الدارتين وعلى معدل تغير التيار في كل منهما. هذا ويمكن زيادة هذا الاقتران بلف إحدى الدارتين فوق الأخرى. كما يمكن جعل هذا الاقتران أعظماً بوضع نواة من الحديد اللين داخل لفات كل منهما تؤمن طريقاً للتدفق المغنطيسي. وترتبط M مع التحريضيتين الذاتيتين L_1 و L_2 للدارتين المقترنتين بالعلاقة:

$$M = k\sqrt{L_1L_2} \quad (7 - 2)$$

حيث k عامل الاقتران، وتقدر M بالهنري H مثل التحريضية الذاتية L .

يبين الشكل 7-1 الدارة المكافئة المثالية للتحريض المتبادل بين دارتين مقترنتين مغنطيسياً، حيث L_1 و L_2 هما التحريضيتان الذاتيتان للدارتين، و M التحريضية

المتبادلة بينهما كما ذكرنا أعلاه. ويشكل الملفان المقترنان شبكة رباعية الأطراف، أو ذات ممرين كما يظهر من الشكل.



الشكل 1-7

إذا وجدت دارتان مقترنتان مغناطيسياً، ثم مر تيار متغير $i_1(t)$ في الأولى فإنه يولد تدفقاً مغناطيسياً متغيراً في الثانية. وهذا يؤدي إلى نشوء توتر متحرض $v_2(t)$ في الثانية، ناتج عن تغير تيار الدارة الأولى وعن جزء التدفق المغناطيسي الذي يصل إليها. وبالمثل فإن التيار المتغير $i_2(t)$ في الثانية يولد توتراً متحرضاً $v_1(t)$ في الأولى.

بناءً على ما تقدم، يمكننا أن نكتب التوتر المتحرض في الدارة الثانية من جراء تغير التيار في الدارة الأولى كالآتي:

$$v_2(t) = M_{12} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (7 - 3)$$

ونكتب التوتر المتحرض في الدارة الأولى جراء تغير التيار في الدارة الثانية كما يأتي:

$$v_1(t) = M_{21} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (7 - 4)$$

حيث M_{12} هي التحريضية المتبادلة بين الدارة الأولى والثانية، و M_{21} هي التحريضية المتبادلة بين الدارة الثانية والأولى. وهما متساويتان وتساوي كل منهما M .

يعطى التوتر الكلي بين طرفي كل من الدارتين الأولى والثانية الناتج عن التحريض الذاتي والتحريض المتبادل معاً بالعلاقتين الآتيتين:

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \pm M \frac{di_2(t)}{dt} \quad (7-5)$$

$$v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \pm M \frac{di_1(t)}{dt} \quad (7-6)$$

تمثل المعادلتان (7-5) و(7-6) التوترين الآيين للدارتين في نطاق الزمن.

يمكن كتابة المعادلتين السابقتين في نطاق التواتر ومن أجل تطبيق منبع جيبى في الحالة المستقرة كما يأتي:

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 \pm j\omega M I_2 \quad (7-7)$$

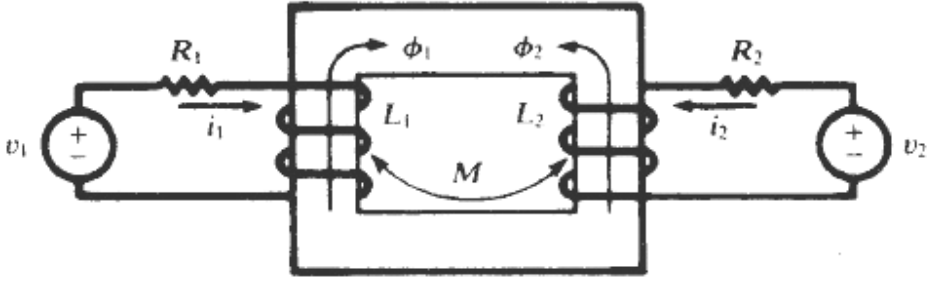
$$V_2 = j\omega L_2 I_2 \pm j\omega M I_1 \quad (7-8)$$

إن اختيار إشارة الحد الذي يحوي M في المعادلات الأربع الأخيرة، والذي يمثل جزء التوتر المتحرض الناتج عن التحريضية المتبادلة، يحدده جهة التيارين في الدارتيْنالتي تعتمد على جهة لف الأسلاك، وسنعالج ذلك في الفقرة الآتية.

7-2 تحليل الدارات المقترنة مغنطيسياً

يبين الشكل 7-2 ملفين ملفوفين على لب مشترك يجعل الاقتران محكماً. لتعيين الإشارات الصحيحة على توترات التحريضية المتبادلة، نطبق قاعدة اليد اليمنى على كل ملف ونعين جهة التدفق للأولى وللثانية. فإذا كان التدفقان يدعمان بعضهما بعضاً، تكون إشارات توترات التحريضية المتبادلة مثل إشارات توترات التحريضية الذاتية، فتوضع إشارة الزائد (+) في كل معادلة من المعادلات الأربع (7-5) - (7-8)، أما إذا كان التدفقان متعاكسين تكون الإشارات في المعادلات سالبة.

بالرجوع إلى الشكل 7-2 نجد أن التدفقين Φ_1 و Φ_2 متعاكسان، وعليه ينبغي وضع إشارة ناقص (-) في كل معادلة من المعادلات الأربع السابقة.



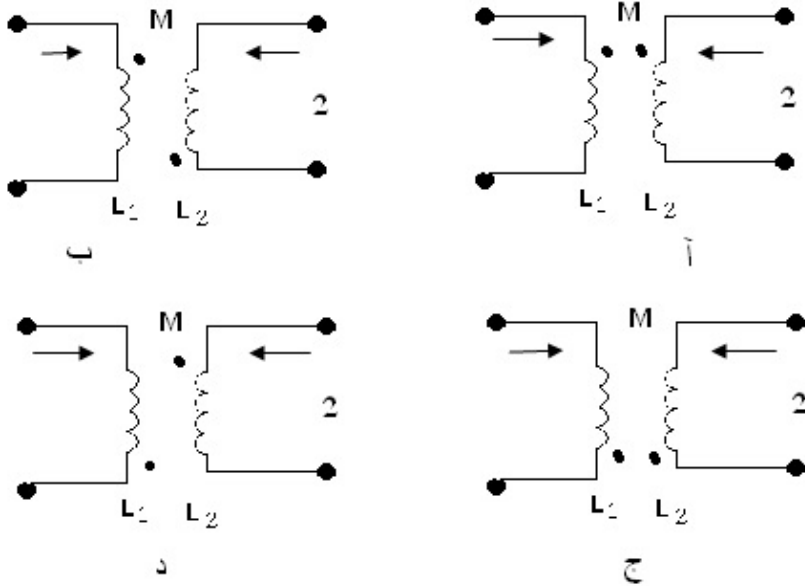
الشكل 2-7

3-7 قاعدة النقطة

يمكن تعيين إشارة توتر التحريضية المتبادلة إذا كان اتجاه اللف مبيناً على الدارة، كما هو الحال في الشكل 2-7. أما إذا لم تكن جهة لف الأسلاك مبينة، فمن العسير تحديد الإشارة الصحيحة. لذلك، ولتبسيط المسألة وللحصول على الإشارة الصحيحة، تُعَلَّم الملفات، في مخطط الدارة، بنقاط توضع على أطرافها المتماثلة القطبية أنياً. فإذا دخل تيار الدارة الأولى الملف الأول عند النقطة ودخل تيار الدارة الثانية الملف الثاني عند النقطة أيضاً كانت إشارة توتر التحريض المتبادل موجبة (+). أما إذا دخل أحد التيارين الملف عند النقطة وخرج التيار الآخر من الملف عند النقطة كانت إشارة توتر التحريض المتبادل سالبة (-). وبذلك لا تعود هناك حاجة لتمثيل جهة اللفات على القلبالمبين بالصورة، كما في الشكل 2-7، ونكتفي بالتمثيل المبين في الشكل 3-7، الذي يختصر العملية بوضع نقطة على طرف الملف. ونلخص فيما يأتي قاعدة النقطة:

1- إذا دخل التياران المفروضان الملفين المقترنين عند طرفين منقطَّين أو خرجا منهما عند طرفين منقطَّين، فأشارة الحد الذي يحوي M تكون مثل إشارة الحد الذي يحوي L .

2- إذا دخل أحد التيارين عند طرف منقط وخرج التيار الآخر عند طرف منقط
 فإشارة الحد الذي تحوي M تكون معاكسة لإشارة الحد الذي تحوي L.



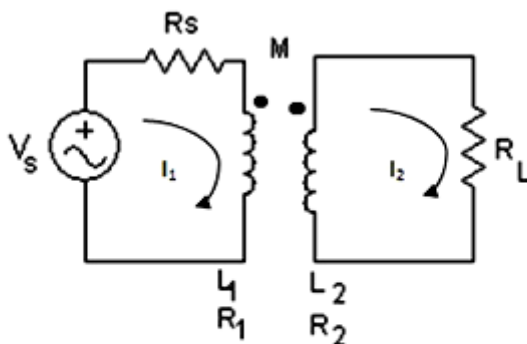
الشكل 3-7

يمثل الشكل 3-7 مختلف الأوضاع الممكنة للنقاط على أطراف الملفات. كما
 تمثل الأسهم المبينة على الشكل جهات التيارات في الدارتين الأولى والثانية، وقد
 اختيرت عشوائياً. لنطبق الآن قاعدة النقطة على أجزاء الشكل من أجل تحديد
 إشارة الحدود التي تحوي M. نلاحظ أن التيارين في الجزء آ من الشكل يدخلان
 الملفين عند النقطتين فإشارة M يجب أن تكون موجبة. أما في الجزء ب من
 الشكل فإن التيار الأول يدخل عند النقطة بينما يخرج التيار الثاني عند النقطة،
 وعليه يجب أن تكون إشارة M سالبة. إذا انتقلنا إلى الجزء ج من الشكل نلاحظ
 أن التيارين يخرجان عند النقطة، فإشارة M يجب أن تكون موجبة. وأخيراً،

يخرج التيار الأول في الجزء د من الشكل عند النقطة بينما يدخل التيار الثاني عند النقطة، وعليه، يجب أن تكون إشارة M سالبة.

مثال 1-

نستعمل التحريض المتبادل لقرن حمولة هي مقاومة $R_L = 10 \Omega$ بمنبع توتر قوته المحركة الكهربائية $V_S = 100 \text{ V}$ ومقاومته الداخلية $R_S = 5 \Omega$ كما هو مبين في الشكل 4-7. وقد كانت قيمة التحريض الذاتي للملف الأول: $L_1 = 0.1 \text{ H}$ ومقاومته الداخلية $R_1 = 10 \Omega$ ؛ وقيمة التحريض الذاتي للملف الثاني: $L_2 = 0.2 \text{ H}$ ومقاومته الداخلية $R_2 = 15 \Omega$ ؛ وكانت قيمة التحريض المتبادل $M = 0.1 \text{ H}$. احسب تيار المولد والحمولة عندما يكون لللفات: آ- نفس الجهة (أي كما هو مبين بمواضع النقط في الشكل)، ب- أن يكون لللفات جهتان متعاكستان. افرض أن التواتر الزاوي للمنبع $\omega = 100 \text{ rad/s}$.



الشكل 4-7

الحل:

آ- لدينا في هذه الدارة عروتان مقترنتان بتحريض متبادل $M = 0.1 \text{ H}$. ولدى كتابة معادلتَي العروتين نلاحظ أن إشارة التحريض المتبادل يجب أن تكون

سالبة في هذه الحالة، لأن التيار I_1 يدخل عند النقطة بينما يخرج التيار I_2 من النقطة. وعليه، فمعادلتا العروة لهذه الدارة تكتبان على النحو الآتي:

معادلة العروة الأولى:

$$(R_S + R_1 + j\omega L_1)I_1 - j\omega MI_2 = 100\angle 0^\circ$$

ومعادلة العروة الثانية:

$$-j\omega MI_1 + (R_2 + R_L + j\omega L_2)I_2 = 0$$

وبالتعويض عن كل حد بما يساويه تصبح المعادلتان السابقتان:

$$(15 + j10)I_1 - j10I_2 = 100\angle 0^\circ$$

$$-j10I_1 + (25 + j20)I_2 = 0$$

بحل هاتين المعادلتين نجد:

$$I_1 = 5.206\angle -24^\circ 46' \quad I_2 = 1.626\angle 26^\circ 34' A$$

ب- عندما تتعكس جهة اللفات في الملفين تظهر النقطتان عند طرفين متقابلين من اللفات، وتصبح إشارة التحريض المتبادل موجبة عندئذ، وتأخذ المعادلتان السابقتان الشكل الآتي:

$$(15 + j10)I_1 + j10I_2 = 100\angle 0^\circ$$

$$j10I_1 + (25 + j20)I_2 = 0$$

وبحلها نجد:

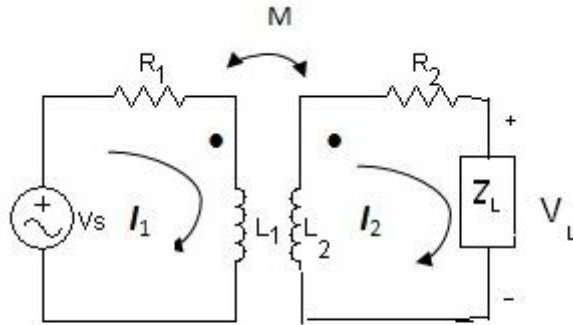
$$I_1 = 5.206\angle -24^\circ 46' A \quad I_2 = 1.626\angle -153^\circ 26' A$$

ونلاحظ هنا أن طور التيار I_2 في الحالة ب يختلف عن طوره في الحالة أ بزاوية تساوي 180° بسبب عكس اللفات. كما نلاحظ أن I_1 الم يتغير لأن I_2 يجري دوماً في اتجاه يعاكس التدفق الذي يحدثه I_1 .

4-7 المحوِّلة

المحوِّلة نوع من الشبكات رباعية الأطراف تستعمل في عمليات التوفيق بين الممانعات في الشبكات رباعية الأطراف، كما تستعمل في عملية نقل الطاقة

الكهربائية من دارة إلى أخرى بواسطة نواقل مقترنة مغنطيسياً هي ملفات المحولة. تتألف المحولة البسيطة من ملفين ملفوفين على نواتين غير معدنيتين يملؤهما الهواء. يطلق اسم الأولية على لفات المحولة الموصولة إلى منبع التغذية، كما يطلق اسم الثانوية على اللفات الموصولة إلى الحمل. يدعى التوتر بين طرفي الأولية توتر الأولية، كما يدعى التوتر بين طرفي الثانوية توتر الثانوية. وبالمثل، يسمى التيار المار في الأولية تيار الأولية، ويسمى التيار المار في الثانوية تيار الثانوية، انظر الشكل 5-7.



الشكل 5-7

يعتمد عمل المحولة على مبدئين، الأول أن التيار الكهربائي يولد حقلاً مغنطيسياً، والثاني أن تغير الحقل المغنطيسي داخل الملف السلكي يحرض توتراً بين طرفي الملف. إن التيار المتغير الجاري في لفات الأولية يولد تدفقاً مغنطيسياً متغيراً في قلب المحولة، ومن ثم يولد حقلاً مغنطيسياً متغيراً في لفات الثانوية. وهذا الحقل المغنطيسي المتغير يحرض قوة محرّكة كهربائية أو فلتية في لفات الثانوية.

في دراستنا للمحولة، نميز بين نوعين من المحولات التي تعمل على مبدأ التحريض المتبادل. النوع الأول هو المحولة الخطية التي هي نموذج ممتاز للمحولة الخطية العملية المستعملة في مجال التواترات الراديوية أو التواترات

الأعلى. والنوع الثاني هو المحولة المثالية التي تمثل نموذجاً لاقتران مغنطيسي شديد في المحولة الفيزيائية، ويكون عامل الاقتران مساوياً الواحد. ويتحقق ذلك بجعل قلب المحولة مادة ذات مغنطيسية حديدية.

5-7 المحولة الخطية

يبين الشكل 5-7 محولة بعروتين حدد عليهما التياران العرويان. سنفرض أن المحولة خطية، وهذا يستوجب أن يكون الاقتران المغنطيسي بين الأولى والثانوية ضعيفاً، ويتحقق ذلك بجعل النواتين من الهواء أو من مادة لا تؤدي إلى علاقة لا خطية بين التدفق المغنطيسي والتيار.

بإهمال السعة المتوزعة بين لفات المحولة يمكننا أن نمثل المحولة المؤلفة من زوج من الملفات الهوائية بدارة مكافئة كالدارة المبينة في الشكل 5-7. تشير الرموز L_1 و L_2 و M إلى التحريضية الذاتية للأولى والثانوية والتحريض المتبادل بينهما على الترتيب. تمثل المقاومتان R_1 و R_2 المقاومة الفعالة للأولى الموصولة على التسلسل مع L_1 ، والمقاومة الفعالة للثانوية الموصولة على التسلسل مع L_2 على الترتيب. ونفرض أن ممانعة الحمولة Z_L مؤلفة من مقاومة R_L وردية X_L ، أي: $Z_L = R_L + jX_L$. نطبق التحليل العروي على عروتي المحولة فنحصل على المعادلتين الآتيتين:

$$\begin{aligned} V_S &= (R_1 + j\omega L_1)I_1 - j\omega MI_2 \\ 0 &= -j\omega MI_1 + (R_2 + j\omega L_2 + Z_L)I_2 \end{aligned}$$

يمكننا تبسيط هاتين المعادلتين بوضع:

$$Z_{11} = R_1 + j\omega L_1, \quad Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 + Z_L$$

وبذلك تصبح المعادلتان السابقتان:

$$V_S = Z_{11}I_1 - j\omega MI_2 \quad (7-9)$$

$$0 = -j\omega MI_1 + Z_{22}I_2 \quad (7-10)$$

إذا نظرنا إلى المحولة من جانب الأولية نجد أن لها ممانعة دخل Z_{in} تعطى بالعلاقة:

$$Z_{in} = \frac{V_S}{I_1}$$

من العلاقة (7-9) نجد:

$$Z_{in} = Z_{11} - j\omega M \frac{I_2}{I_1}$$

لكن المعادلة الثانية تعطي:

$$\frac{I_2}{I_1} = j\omega \frac{M}{Z_{22}}$$

نعوض النسبة I_2/I_1 في المعادلة الأخيرة فنجد ممانعة دخل المحولة بدلالة التواتر ω تعطى بالعلاقة:

$$Z_{in} = \frac{V_S}{I_1} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} \quad (7-11)$$

ولكن لدينا:

$$Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 + R_L + jX_L$$

$$R_{22} = R_2 + R_L, \quad X_{22} = \omega L_2 + X_L$$

يمكن إعادة كتابة العلاقة (7-11) على الشكل الآتي:

$$Z_{in} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{R_{22} + jX_{22}} \quad (7-12)$$

إذا جعلنا المعادلة (7-12) مُنطَقةً وذلك بضرب الحد الثاني منها بالمرافق العقدي للمخرج نحصل على المعادلة:

$$Z_{in} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} + \frac{-j\omega^2 M^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} \quad (7-13)$$

تشير المعادلة (7-13) إلى أنه عندما ننظر إلى الدارة الكلية للمحولة من جانب الأولية فإنها تبدو كما لو أنها ذات ممر وحيد لها ممانعة فعالة Z_{eff} تعطى بالعلاقة:

$$Z_{eff} = R_1 + R_{ref} + j(X_1 + X_{ref}) \quad (7-14)$$

حيث R_{ref} و X_{ref} المقاومة والرديّة المنعكستان من الأوليّة على الثانويّة، وتعطيان بالعلاقتين التاليتين كما تشير العلاقة (7-13):

$$R_{ref} = \frac{\omega^2 M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2} R_{22} \quad (7 - 15)$$

$$X_{ref} = \frac{-\omega^2 M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2} X_{22} \quad (7 - 16)$$

تشير المعادلتان (7-15) و (7-16) إلى أنه إذا اعدنا المحولة كشبكة ثنائية الأطراف (ذات ممر وحيد) فإن ممانعة الأوليّة Z_{11} تتغير، فتزداد المقاومة R_1 بمقدار المقاومة المنعكسة R_{ref} وتزداد الرديّة X_1 بمقدار X_{ref} . ولما كانت X_{ref} سالبة، كما تشير المعادلة (7-16) فإن الرديّة تنقص بالمقدار نفسه. أي إن إضافة دارة ثانويّة يؤدي إلى زيادة مقاومة الممر الوحيد بمقدار R_{ref} وإلى نقصان رديّته بمقدار X_{ref} .

7-6 انتقال القدرة في المحولة الخطيّة

سندرس الآن انتقال القدرة العظمى من دارة الأوليّة إلى دارة الثانويّة. إذا استبدلنا بالمحولة شبكة مكافئة لها ذات طرفين أو لها ممر وحيد، وذات ممانعة فعالة تعطياها المعادلة (7-14)، أمكننا أن نضع شرطي انتقال القدرة العظمى على الشكل التالي:

$$R_{ref} = R_1 , X_1 + X_{ref} = 0$$

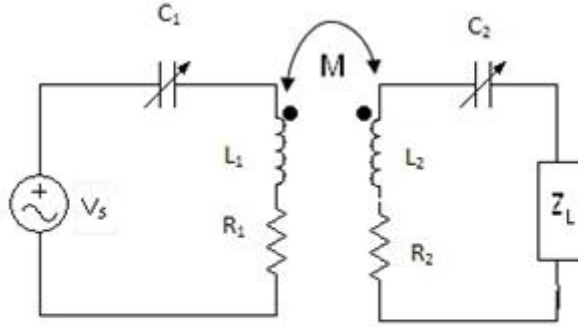
وبالرجوع إلى المعادلتين (7-15) و (7-16) يكتب الشرطان السابقان على النحو التالي:

$$R_1 = \frac{\omega^2 M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2} R_{22} \quad (7 - 17)$$

$$X_1 = \frac{\omega^2 M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2} X_{22} \quad (7 - 18)$$

يمكن تحقيق هاتين المعادلتين بسهولة إذا اشتملت المحولة على ترتيبات يمكن بواسطتها التحكم بقيم عناصر الدارة وتغييرها. وعلى سبيل المثال، يمكن أن

نغير X_1 و X_{22} بوضع مكثفتين متغيرتين في دارتي الأولى والثانوية كما هو مبين في الشكل 6-7 . وكذلك يمكن تغيير التحريض المتبادل M للمحولة وذلك بوضع ملفات متحركة أو بوضع نواة حديدية.



الشكل 6-7

لو وضعت مكثفتان متغيرتان C_1 و C_2 في دارتي الأولى والثانوية على الترتيب، تصبح قيمتا X_1 و X_{22} كما يأتي:

$$X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \quad (7-19)$$

$$X_{22} = \omega L_2 + X_L - \frac{1}{\omega C_2} \quad (7-20)$$

وتبقى المعادلات السابقة كلها منطبقة على دائرة الشكل 6-7 .
من المعادلة (7-17) نجد:

$$X_{22} = \sqrt{\frac{\omega^2 M^2 R_{22} - R_1 R_{22}^2}{R_1}} \quad (7-21)$$

تدل المعادلة (7-21) على أن X_{22} تتعين بدلالة M وباقي العناصر الثابتة في الدارتين؛ مما يدل على أن شرط انتقال القدرة العظمى في المحولة يمكن أن يتم بتغيير أحد العناصر X_{22} أو X_1 أو M فقط مع تثبيت العنصرين الآخرين. وقد أصبح هذا التغيير ممكناً بفضل الإجراءات الجديدة التي أدخلت في دائرة الشكل 6-7.

كما تدل المعادلة (7-21) على أن X_{22} تأخذ قيمة حقيقية إذا كان ما تحت الجذر موجباً أي:

$$\omega M \geq \sqrt{R_1 R_{22}}$$

وعندها تعطى قيمة القدرة العظمى المنتقلة من دائرة الأولية إلى دائرة الثانوية بالعلاقة:

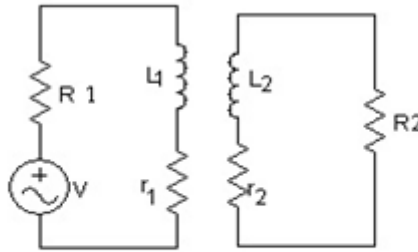
$$P_{max} = \frac{V_s^2}{4R_1} \quad (7-22)$$

أما إذا كان $\omega M < \sqrt{R_1 R_{22}}$ فإن X_{22} تأخذ قيمة تخيلية، وعندها لا يتحقق شرط انتقال القدرة العظمى المعطى بالعلاقة (7-18)، وبالتالي فلن تنتقل قدرة عظمى مهما تكن قيمة X_{22} و X_1 .

7-7 انتقال القدرة في المحولة المثالية

تمثل R_1 المقاومة الداخلية للمنبع في المحولة المثالية، كما تمثل R_2 مقاومة الحمولة. وتمثل المقاومتان r_1 و r_2 المقاومتين الداخليتين لملفي الأولية والثانوية L_1 و L_2 على الترتيب كما هو مبين في الشكل (7-7). وعليه نكتب:

$$R_{22} = R_2 + r_2, \quad X_1 = \omega L_1, \quad X_{22} = \omega L_2$$



الشكل 7-7

لكن الجزء الردي في المحولة المثالية أكبر بكثير من الجزء المقاوم في كل من الملفين، أي:

$$\omega L_1 \gg r_1, \quad \omega L_2 \gg r_2$$

وبذلك تصبح المقاومة المنعكسة والردية المنعكسة في المحولة المثالية:

$$R_{ref} = \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} R_2 \quad (7 - 23)$$

$$X_{ref} = \frac{-\omega^2 M^2 L_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} \quad (7 - 24)$$

كما يتحقق في المحولة المثالية أيضاً: $\omega L_2 \gg R_2$

وبذلك تصبح المقاومة والردية المنعكستان:

$$R_{ref} = \frac{M^2}{L_2^2} R_2, \quad X_{ref} = \frac{-\omega M^2}{L_2}$$

وإذا تذكرنا أن: $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ كما جاء في العلاقة (7-2)، تصبح

المقاومة والردية المنعكستان في المحولة المثالية:

$$R_{ref} = \frac{K^2 L_1}{L_2} R_2, \quad X_{ref} = -\omega K^2 L_1 \quad (7 - 25)$$

ولما كان الاقتران في المحولة المثالية محكماً، فإن عامل الاقتران k يكون قريباً جداً من الواحد، وعندها تصبح المقاومة المنعكسة:

$$R_{ref} = \frac{L_1}{L_2} R_2 \quad (7 - 26)$$

فإذا كان n_1 و n_2 يمثلان عدد لفات الأولية والثانوية على الترتيب، فإن نسبة التحريضية الذاتية للأولية إلى التحريضية الذاتية للثانوية تساوي مربع نسبة عدد لفات الأولية إلى عدد لفات الثانوية. لذا يمكن إعادة كتابة المقاومة المنعكسة فتأخذ الشكل الآتي:

$$R_{ref} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 R_2 = T^2 R_2 \quad (7 - 27)$$

حيث T هي نسبة عدد لفات الأولية إلى الثانوية.

كما أن الردية المنعكسة تعطى عندئذ بالعلاقة :

$$X_{ref} = \frac{-\omega k L_1 L_2}{L_2} = -k\omega L_1 = -\omega L_1 \quad (7 - 28)$$

وبذلك تصبح الممانعة الفعالة للأولية:

$$Z_{eff} = R_1 + r_1 + R_2 T^2 + j(\omega L_1 - \omega L_1)$$

وبفرض $R_1 \ll r_1$ يمكن كتابة الممانعة الفعالة للأولية كالاتي:

$$Z_{eff} \approx R_1 + R_2 T^2 \quad (7-29)$$

وتدل هذه المعادلة (7-29) على أن المنبع الذي مقاومته الداخلية R_1 يغذيحمولة أومية قيمتها $R_2 T^2$ ، كما أنه ينقل قدرة عظمى إلى الحمولة عندما يكون:

$$T = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \quad \text{أو} \quad R_1 = R_2 T^2 \quad (7-30)$$

ولا بد أن نشير في النهاية إلى أنه حتى لو لم تكن المحولة مثالية فإن وجود الثانوية يزيد من مقاومتها وينقص من رديتها.

8-7 أمثلة محلولة

مثال 2-

لدينا في دارة الشكل 8-7 : $M=0.1 \text{ H}$, $R=10 \Omega$, $L_1=0.2 \text{ H}$, $L_2=0.1 \text{ H}$.
 أحسب: أ- المقاومة والردية المنعكستين R_{ref} و X_{ref} ، ب- الممانعة الفعالة Z_{eff} ،
 ج- التيار i_1 من أجل $v_1 = 142.3 \cos 100t$.
 الحل:

أ- تعطى المقاومة والردية المنعكستان بالعلاقتين:

$$R_{ref} = \frac{\omega^2 M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2} R_{22} \quad , \quad X_{ref} = \frac{-\omega^2 M^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2} X_{22}$$

حيث : $\omega = 100$ ، $R_1 = R_2 = 0$ ، $R_L = R = 10\Omega$. وعليه يكون:

$$X_L = 0 \quad \text{لأن} \quad X_{22} = \omega L_2 + X_L = \omega L_2 \quad , \quad R_{22} = R_2 + R_L = R = 10\Omega$$

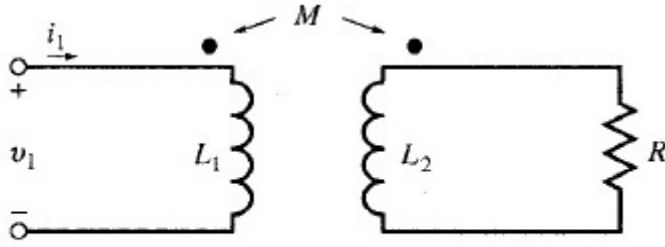
وبتعويض كل حد بما يساويه في العلاقتين السابقتين نجد المقاومة والردية المنعكستين:

$$R_{ref} = 5\Omega \quad X_{ref} = 15\Omega$$

ب- الممانعة الفعالة تعطى بالعلاقة:

$$Z_{eff} = R_1 + R_{eff} + j(\omega L_1 - X_{eff})$$

وبتعويض كل حد بما يساويه نجد:



الشكل 8-7

$$Z_{eff} = 0 + 5 + j(20 = 5) = 5 + j15 = 5\sqrt{10}\angle 71.6^\circ \Omega$$

ج- حساب التيار i_1 :

$$I_1 = \frac{V_1}{Z_{eff}} = \frac{142.3\angle 0^\circ}{5\sqrt{10}\angle 71.6^\circ} = 9\angle -71.6^\circ A$$

أما الصيغة الزمنية للتيار فهي:

$$i_1(t) = 9\sqrt{2} \cos(100t - 71.6^\circ)$$

مثال 3-

وشيعتان مقترنتان بالتحريض، تعطى التحريضية الذاتية للأولى $L_1 = 50 \text{ mH}$ ، وللثانية $L_2 = 200 \text{ mH}$ ، وعامل الاقتران $k = 0.50$. إذا كان التيار الجاري في

$$i_1(t) = 5.0 \sin 400t \text{ A}$$

احسب التوتر عند الوشيعة الثانية.

الحل:

يعطى التوتر المتحرض في الوشيعة الثانية بالعلاقة:

$$v_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt}$$

نحسب M من العلاقة:

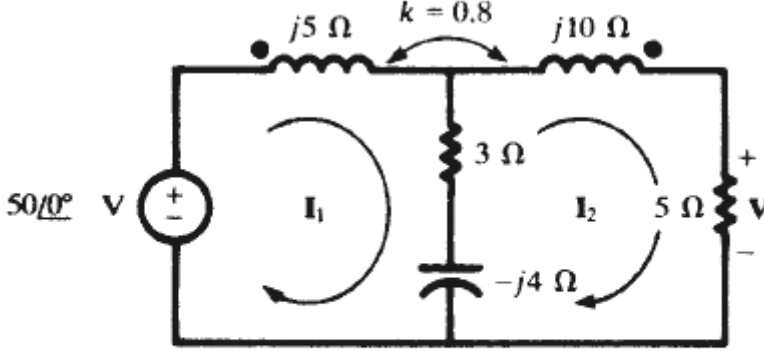
$$H = 50 \text{ m} M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0.50\sqrt{50 \times 200}$$

نعوض في العلاقة الأولى فنجد:

$$v_2(t) = 0.05 \times 200 \cos 400t = 100 \cos 400t \text{ V}$$

مثال 4 -

آ- احسب التوتر V للدارة المقترنة المبينة في الشكل 9-7. ب- أعد الحساب بعد عكس قطبية إحدى الوشيعتين.



الشكل 9-7

الحل:

آ- نحسب التوتر V بين طرفي المقاومة 5Ω من العلاقة: $V = 5I_2$ ولحساب I_2 ، نكتب معادلات تحليل الدارة وفق التحليل العروي ثم نحلها ونجد I_2 . ولكن قبل ذلك لنحسب أولاً التحريضية المتبادلة M والرديية المتبادلة ωM من العلاقة:

$$\omega M = \omega k \sqrt{L_1 L_2} = k \sqrt{\omega L_1 \times \omega L_2}$$

بالرجوع إلى الشكل نجد: $\omega L_1 = 5\Omega$, $\omega L_2 = 10\Omega$, $k = 0.8$

وبالتعويض في العلاقة السابقة نجد: $\omega M = 0.8\sqrt{50} = 5.66\Omega$

لنكتب الآن معادلتَي العروتين لدارة الشكل 9-7:

$$(j5 - j4 + 3)I_1 - (3 - j4)I_2 - j5.66I_2 = 50\angle 0^\circ$$

$$-(3 - j4)I_1 - j5.66I_1 + (5 + 3 - j4 + j10)I_2 = 0$$

وبعد إصلاح المعادلتين تصبحان:

$$(3 + j1)I_1 - (3 + j1.66)I_2 = 50$$

$$-(3 + j1.66)I_1 + (8 + j6)I_2 = 0$$

نحسب التيار I_2 من العلاقة:

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_z}$$

حيث:

$$\Delta_z = \begin{bmatrix} 3 + j4 & -3 - j1.66 \\ -3 - j1.66 & 8 + j6 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 3 + j4 & 50 \\ -3 - j1.66 & 0 \end{bmatrix}$$

بعد التعويض والحساب نجد:

$$I_2 = 8.62 \angle -24.79^\circ \text{ A}$$

$$V = 43.1 \angle -24.79^\circ \text{ V} \quad \text{وبذلك يكون التوتر } V$$

ب- عند عكس قطبية إحدى الوشيعتين تتغير إشارة $\omega M = 5.66$ فقط في المعادلتين السابقتين، فتصبح سالبة وتكون النتيجة أن نحصل على مجموعة المعادلتين الآتيتين:

$$(3 + j1)I_1 + (-3 + j9.66)I_2 = 50$$

$$(-3 + j9.66)I_1 + (8 + j6)I_2 = 0$$

وحل هاتين المعادلتين يعطي: $I_2 = 3.82 \angle -112.12^\circ \text{ A}$

$$V = 19.1 \angle -112.12^\circ \text{ V} \quad \text{ويصبح التوتر في هذه الحالة:}$$

مثال 5-

أوجد مكافئ تيفنين ونورتون بين الطرفين ab للدائرة المقرونة المبينة في الشكل 10-7 .

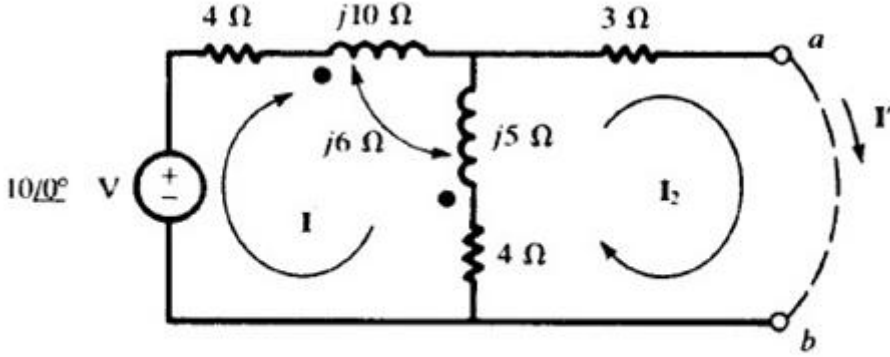
الحل:

نحسب أولاً توتر الدارة المفتوحة V_T من العلاقة:

$$V_T = I_1(4 + j5) - j6I_1 = I_1(4 - j1)$$

نحسب I_1 من العلاقة:

$$I_1 = \frac{10 \angle 0^\circ}{4 + j10 + j5 + 4 - j6} = \frac{10}{8 + j9} = (0.552 - j0.621) \text{ A}$$



الشكل 10-7

وتكتب بالشكل الطوري على النحو الآتي:

$$I_1 = 0.831 \angle -48.366^\circ \text{ A}$$

وبالتعويض في العلاقة الأولى نحصل على توتر تيفنين:

$$V_T = (0.552 - j0.621)(4 - j1) = (1.587 - j3.036) \text{ V}$$

ويكتب بالشكل الطوري على النحو الآتي:

$$V_T = 3.426 \angle -62.40^\circ \text{ V}$$

ونحسب ثانياً تيار الدارة القصيرة I_N ، وبذلك نحصل على ممانعة تيفنين Z_T

$$\text{من العلاقة: } Z_T = V_T / I_N$$

ولإيجاد تيار الدارة القصيرة نقصر الطرفين a و b ونكتب معادلتى العروة

لعروتي دائرة الشكل 10-7 مع ملاحظة أن $I_N = I_1$ فنجد:

$$(8 + j15)I_1 - (4 + j5)I_N + j6I_N = 10$$

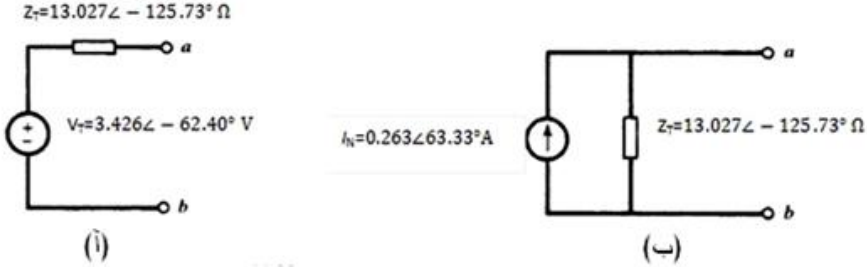
$$(7 + j5)I_N - (4 + j5)I_1 + j6I_1 = 0$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد I_N :

$$I_N = 0.118 + j0.235 = 0.263 \angle 63.33^\circ \text{ A}$$

وبذلك تكون ممانعة تيفنين:

$$Z_T = \frac{V_T}{I_N} = \frac{3.426 \angle -62.40^\circ}{0.263 \angle 63.33^\circ} \Omega = 13.027 \angle -125.73^\circ \Omega$$



الشكل 11-7

مما سبق نجد أن مكافئ تيفنين هو المبين في الجزء آ من الشكل 11-7، ومكافئ نورتون هو المبين في الجزء ب من الشكل 11-7.

مثال 6- الدارة T المكافئة للمحولة.

برهن أنه عند وصل الطرفين السفليين لمحرضتين مقترنتين مغنطيسياً في محولة (الجزء آ من الشكل 12-7)، يمكن عندئذ نمذجة هذه المحولة بعناصر دارة ليست مقترنة مغنطيسياً.

الحل:

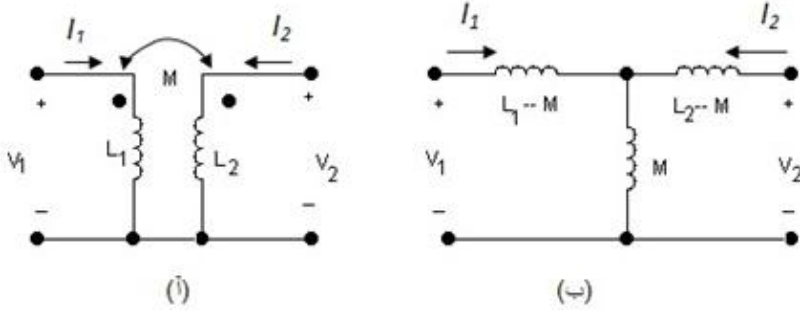
إذا شكلنا الدارة المبينة في الجزء ب من الشكل 12-7 نلاحظ أن معادلتى العروة هي نفسها للدارتين الممثلتين في الجزعين آ و ب. فمعادلتا العروتين في الجزء آ من الشكل هما:

$$V_T = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2$$

ومعادلتا العروتين في الجزء ب من الشكل هما:

$$V_1 = j\omega(L_1 - M + M)I_1 + j\omega MI_2$$

$$V_2 = j\omega MI_1 + j\omega(M + L_2 - M)I_2$$

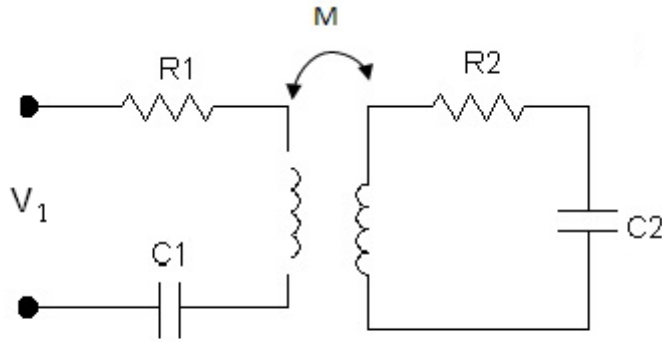


الشكل 7-12

وبعد إصلاح هاتين المعادلتين فإنهما يؤولان إلى المعادلتين السابقتين للمحولة. نستنتج مما سبق أنه يمكن تمثيل دائرة المحولة التي يتصل طرفها السفليان بدارة مكافئة على شكل حرف T ، كما هو مبين في الجزء ب من الشكل 7-12.

مسائل على الفصل السابع

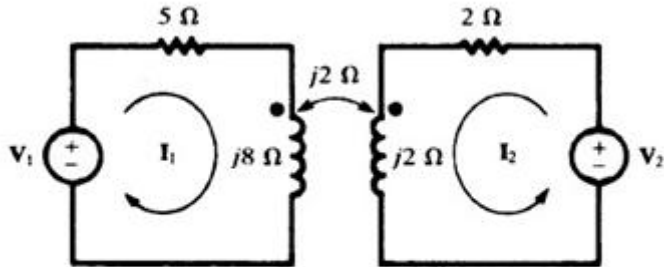
1-7 لتكن الدارة المقترنة بالتحريض والمبينة في الشكل م-7. احسب المقاومة الكلية والرديية الكلية الفعالتين المتعلقتين بالأولية. يعطى: $V_1=100\text{ V}$, $f=(10^6/2\pi)\text{ Hz}$, $R_1=15\Omega$, $L_1=200\mu\text{H}$, $L_2=100\mu\text{H}$, $M=75\mu\text{H}$, $C_2=10^4\text{ pF}$, $C_1=5000\text{ pF}$.



الشكل م 1-7

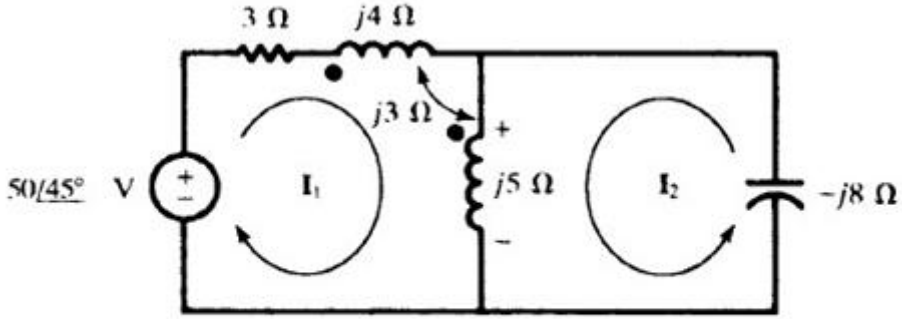
2-7 احسب النسبة V_2/V_1 للدارة المقترنة المبينة في الشكل م-7. الجواب:

$$V_2/V_1 = 1-j1$$



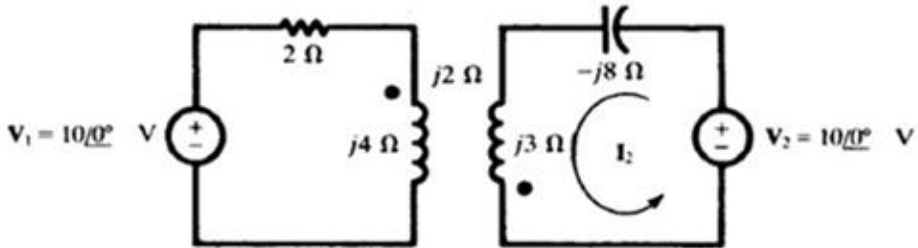
الشكل م 2-7

7-3 احسب التوتر بين طرفي ملف الثانوية الذي تساوي رديته التحريضية 5Ω ، كما هو مبين في الشكل 7-3 مع اعتبار القطبية هي المحددة بالنقطتين على الشكل. الجواب: $29.27\angle 49.72^\circ \text{ V}$.



الشكل م 3-7

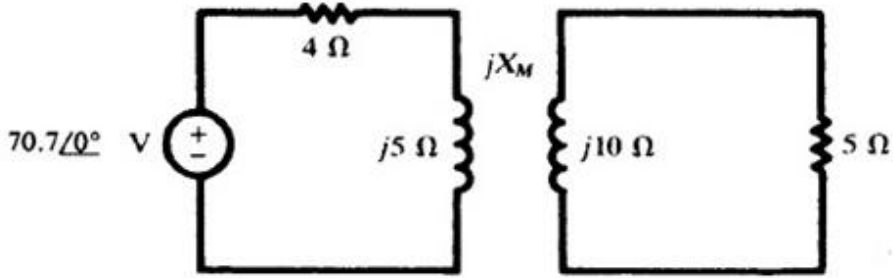
7-4 احسب مركبتي التيار I_2 الناتجتين عن كل منبع من المنبعين V_1 و V_2 في الدارة المقترنة المبينة في الشكل م 7-4. الجواب: $1.72\angle 86.05^\circ \text{ A}$ ، $0.77\angle 112.6^\circ \text{ A}$.



الشكل م 4-7

7-5 ارجع إلى دارة الشكل م 7-2 واحسب: آ- V_2 من أجل أن يكون $I_1 = 0$. ب- التوتر الذي يظهر على الرديّة التحريضية 8Ω في هذه الحالة. الجواب: (+ عند النقطة) $141.4\angle -45^\circ \text{ V}$ ، $100\angle 0^\circ \text{ V}$.

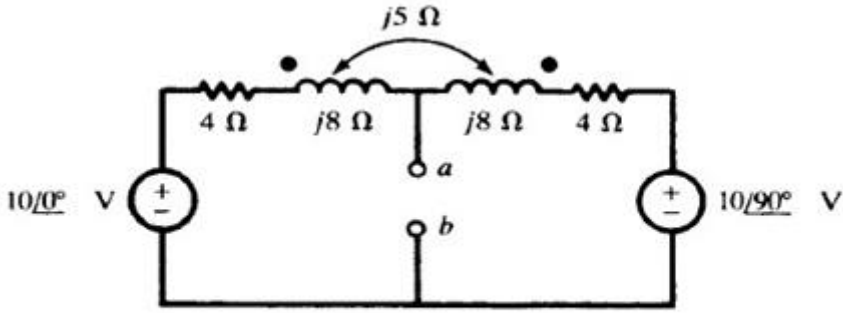
6-7 احسب الردية المتبادلة X_M للدارة المقترنة في الشكل م5-7 إذا كانت القدرة الوسطية في المقاومة 5Ω تساوي 45.24 W . الجواب: 4Ω .



الشكل م5-7

7-7 أوجد مكافئ تيفنين ومكافئ نورتون بين الطرفين a و b للدارة المقترنة المبينة في الشكل م6-7.

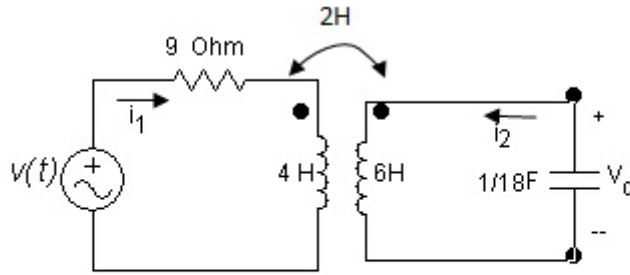
الجواب: $Z_T = 6.80\angle 72.9^\circ \Omega$ $V_T = 7.07\angle 45^\circ \text{V}$, $I_N = 1.04\angle -27.9^\circ \text{A}$



الشكل م6-7

8-7 لتكن الدارة المقترنة بالتحريض والمبينة في الشكل م7-7، ويغذيها توتر متناوب $v(t)$ معطى بالعلاقة: $v(t) = 30 \cos(3t - 60^\circ) \text{ V}$ ، والمطلوب: آ- احسب التوتر $v_c(t)$ بين طرفي المكثفة. الجواب: $v_c(t) = 8.49 \cos(3t + 165^\circ) \text{ V}$

ب- احسب الممانعة التي ترى من المنبع. الجواب: $9(1+j) \Omega$.



الشكل م 7-7

الفصل الثامن

أنصاف النواقل

8-1 مقدمة

يتناول هذا الفصل عرضاً مبسطاً لفيزياء أنصاف النواقل التي تشكل الأرضية اللازمة لفهم عمل العديد من العناصر والنبائط الإلكترونية المكونة للدارات الكهربائية والإلكترونية وتشغيلها، والتي سنخصص لها فصلاً مستقلاً. وسنقدم هنا المفاهيم الأساسية لأنصاف النواقل متخذين كمثال عليها العنصرين الهامين منها ألا وهما السليكون Si والجرمانيوم Ge.

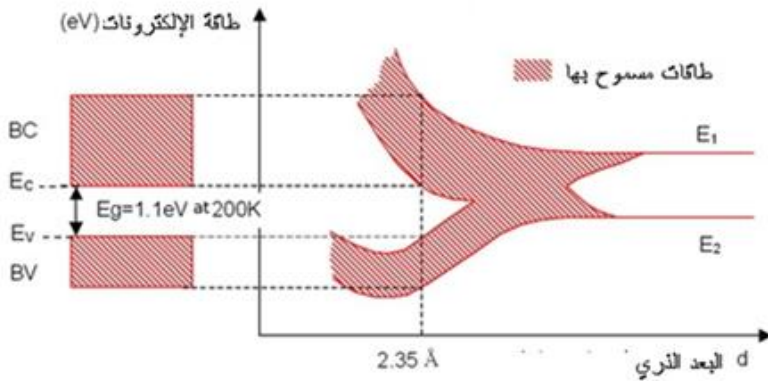
تشكل أنصاف النواقل الأساس الذي تقوم عليه الإلكترونيات الحديثة اليوم. وهناك العديد من النباط والأجهزة الإلكترونية تدخل في تطبيقات صناعية واسعة مبنية على خواص أنصاف النواقل. نذكر منها على سبيل المثال لا الحصر الديودات بأنواعها المستخدمة كحساسات أو مقومات أو مصدرة للضوء، والترانزستورات بأنواعها، والخلايا الشمسية، والألواح الفوتوفلطية الشمسية التي تحول الطاقة الضوئية مباشرة إلى طاقة كهربائية، والدارات المتكاملة الرقمية والتمثيلية.

أنصاف النواقل صنف من المواد تقع مقاومتها الكهربائية في درجة حرارة الغرفة في المجال $10^{-3} \Omega.cm$ و $10^8 \Omega.cm$ ، فهي متوسطة بين النواقل الجيدة ($10^{-6} \Omega.cm$) والعوازل (من 10^{14} إلى $10^{22} \Omega.cm$). تنشأ صفات النقل فيها من الإثارة الحرارية، أو الشوائب، أو من العيوب في الشبكة البلورية. وترجع أهميتها الكبيرة إلى أن خواصها الكهربائية شديدة الحساسية لتراكيز ضئيلة من شوائب تُضاف إليها بعملية تسمى التطعيم.

ينشأ التيار في أنصاف النواقل من جريان الشحنة الكهربائية السالبة التي تحملها الإلكترونات والشحنة الموجبة التي تحملها الثقوب. والمواد نصف الناقل الشائعة هي جوامد بلورية أهمها وأكثرها استعمالاً في الصناعة الإلكترونية على النطاق التجاري عنصران مشهوران هما السليكون Si والجرمانيوم Ge. لكن أنصاف النواقل اللابلورية والسائلة والعضوية موجودة أيضاً.

2-8 عصابات الطاقة

لننظر إلى ذرة سليكون معزولة، فمستويات طاقتها تكون كمّاة. وعند تقريب ذرتين متماثلتين من بعضهما، فإن مستويات الطاقة المكمّاة تصبح هجينة، وتنتشر إلى مستويين مختلفين نظراً للتفاعل المتبادل بين الذرتين. وبصورة أعم، عندما تتقارب N ذرة من بعضها أكثر فأكثر، حتى تصبح المسافة الفاصلة بين كل ذرتين هي البعد الذري نفسه d في حالة التوازن، فإن مستويات الطاقة تنتشر إلى N مستوي. هذه المستويات N تكون قريبة جداً من بعضها بعضاً إذا كانت N كبيرة (كما هو الحال في البلورة) بحيث تشكل في نهاية المطاف عصابة طاقة مستمرة.



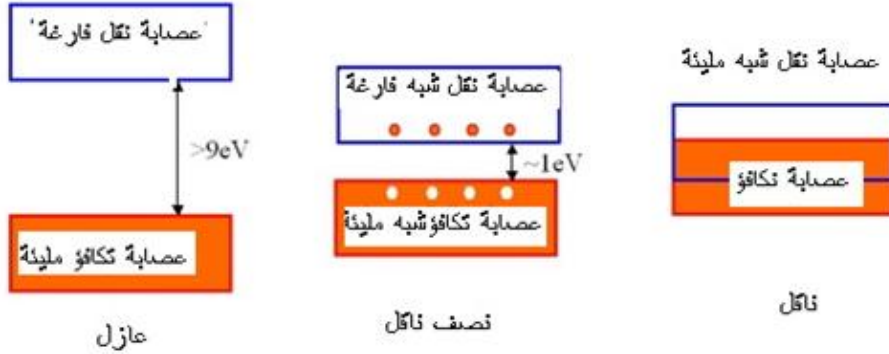
الشكل 8-1: تشكيل عصابات الطاقة للإلكترونات في بلورة سليكون لها بنية شبكة الألماس.

لننظر الآن في ذرات السليكون المرتبة وفق شبكة دورية، لكن وسيط هذه الشبكة (أو بعدها الذري) كبير جداً؛ وذلك من أجل أن نعد أولاً أن كل ذرة كأنها معزولة. رمزنا للمستويين اللذين لهما أعلى طاقة بـ E_1 و E_2 . لنقلص الآن البعد الذري للشبكة الذرية: فمستويات الطاقة تنشط وتتشكل عصاباتين مستمرتين تعرفان باسم عصابة النقل CB وعصابة التكافؤ VB. يظهر على الشكل 8-1 تشكيل هذه العصابات بدلالة البعد الذري d.

توجد في بلورة السليكون (حيث $d = 2,35 \text{ \AA}$)، عاصبتان مستمرتان للطاقة هما (VB و CB)، مفصولتان بمنطقة محظورة تسمى "فرجة gap" عرضها E_g لا يمكن للإلكترونات أن تشغل سويا فيهما. يُعد عرض الفرجة سمة من السمات المميزة لمادة نصف الناقل. يرمز لأدنى مستوى طاقة من عصابة النقل بالرمز E_c ولأعلى مستوى طاقة في عصابة التكافؤ بالرمز E_v فيكون عرض فرجة الطاقة، على سبيل المثال، مساوياً $E_g = E_c - E_v$. تمثل عاصبتا النقل والتكافؤ E_c و E_v الطاقات المتاحة للإلكترونات، أوطاقات الحالات التي يحتمل أن تشغلها الإلكترونات: فهي لا توفر أية معلومات عن شغل الإلكترونات الفعال لحالات الطاقة فيها.

8-3 العوازل وأنصاف النواقل والنواقل

يمكن تصنيف المواد الصلبة إلى ثلاث مجموعات: المواد العازلة وأنصاف النواقل والنواقل. فالعوازل مواد لها ناقلية نوعية كهربائية $\sigma = 10^{-8} \text{ S.cm}^{-1}$ (فهي للماس تساوي $10^{-14} \text{ S.cm}^{-1}$)؛ وأنصاف النواقل ناقليتها النوعية تقع في المجال: $10^{-5} < \sigma < 10^3 \text{ S.cm}^{-1}$ (فهي للسليكون تتراوح بين 10^{-5} و $10^{-1} \text{ S.cm}^{-1}$)، أما النواقل فهي مواد ناقلاتها الكهربائية النوعية عالية، (فالفضة مثلاً ناقليتها النوعية 10^6 S.cm^{-1}).



الشكل 8-2 : تمثيل عصابات الطاقة

تعتمد الخواص الكهربائية لمادة ما على الإسكان الإلكتروني في عصابات الطاقة المختلفة المسموح بها، أي على عدد الإلكترونات الحرة في تلك العصابات. والنقل الكهربائي هو نتيجة لحركة تلك الإلكترونات داخل كل عصابة. وعندما يطبق حقل كهربائي على المادة، تبدأ الإلكترونات بالحركة بعكس جهة الحقل. إن عصابة الطاقة الفارغة (التي لا يوجد فيها إلكترونات حرة) لا تستطيع المساهمة في تشكيل تيار كهربائي. كذلك هو الحال أيضاً في عصابة الطاقة الممتلئة بشكل كامل بالإلكترونات. في الواقع، يمكن أن يتحرك الإلكترون، ويترك موقعه، بشرط أن يجد موقعاً شاغراً في مكان آخر (موقع آخر متاح داخل عصابة الطاقة التي ينتمي إليها، يسمى هذا الموقع المتاح "ثقباً" hole)، يمكن أن يذهب إليه. تسمى المواد التي تكون فيها عصابات الطاقة ممتلئة بشكل كامل أو فارغة تماماً العوازل. هذا هو الحال عندما تتجاوز فرجة الطاقة القيمة 9 eV ، وذلك لأن فرجة بهذا القدر لا تستطيع الإلكترونات في عصابة التكافؤ اجتيازها للوصول إلى عصابة النقل في درجة الحرارة العادية (300 K تقريباً)، حيث تكون طاقتها الحرارية حينئذ 25 ملي إلكترون فلت تقريباً، وهي طاقة غير كافية لذلك. في هذه

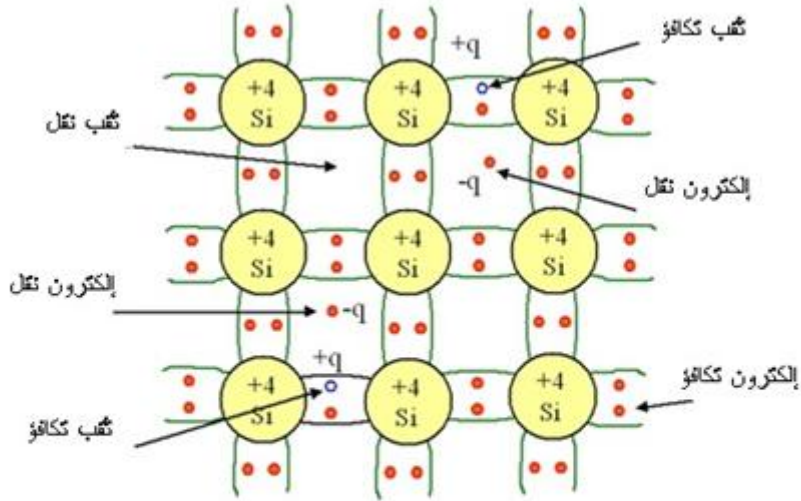
الحالة تكون عصابة التكافؤ (وجميع عصابات الطاقة الأخفض) ممثلة بالكامل، وتكون عصابة النقل فارغة، كما في الجزء الأيسر من الشكل 8-2. إن نصف الناقل هو في المقام الأول عازل في درجة الصفر المطلق. ومع ذلك، ونظراً لأن فرجته الطاقية أقل بالمقارنة مع العوازل، (حوالي 1 إلكترون فلت)، فبإمكان بعض الإلكترونات في عصابة التكافؤ في درجة حرارة الغرفة الانتقال إلى عصابة النقل مخلفة وراءها ثقباً في عصابة التكافؤ، كما يظهر على الجزء الأوسط من الشكل 8-2. وتكون النتيجة أن نصف الناقل في درجة الحرارة العادية تكون فيه إلكترونات حرة في عصابة النقل وثقوب حرة في عصابة التكافؤ. ولما كان النقل الكهربائي مرتبطاً مباشرةً بعدد الإلكترونات في عصابة النقل التي هي شبه فارغة وبعدها الثقوب في عصابة التكافؤ التي هي شبه ممثلة بالكامل (أي مشغولة بالإلكترونات) فبإمكاننا أن نتوقع أن تكون الناقلية الكهربائية لنصف ناقل كهذا صغيرة جداً.

أما في النواقل فلا تكون عصابات النقل وعصابات التكافؤ منفصلة بل تتراكب فوق بعضها، لذا فليس هناك فرجة طاقة، كما يظهر على الجزء الأيمن من الشكل 8-2. ينتج عن هذا أن عصابة النقل تكون مشغولة جزئياً (حتى في درجات الحرارة المنخفضة)، مما يؤدي إلى ناقلية كهربائية عالية.

8-4 أنصاف النواقل الأصيلة (الذاتية)

نصف الناقل الأصيل أو الذاتي *intrinsic semiconductor* هو نصف ناقل نقي وغير مطعم بشوائب غريبة وخالٍ من العيوب، وهذا يعني أن الثقوب في عصابة التكافؤ هي الشواغر الناجمة عن الإلكترونات التي أثرت حرارياً إلى عصابة النقل، على عكس أنصاف النواقل المطعمة التي تزود فيها الثقوب أو الإلكترونات من ذرة "غريبة" تقوم بدور شائبة. وفي درجة الصفر المطلق لا يوجد في نصف الناقل الأصيل حاملات شحنة. لكن عندما ترتفع درجة الحرارة،

تتولد أزواج من الإلكترونات والثقوب نتيجة إثارة إلكترونات عصابة التكافؤ حرارياً عبر فرجة الطاقة إلى عصابة النقل. هذه الأزواج من الإلكترونات والثقوب هي حاملات الشحنة الوحيدة في نصف الناقل الأصيل. من المعلوم أن كل ذرة في الشبكة البلورية للجرمانيوم Ge أو السليكون Si أو الكربون C محاطة بأربع ذرات مجاورة لكل منها أربعة إلكترونات في مدارها الخارجي. وتشارك كل ذرة في هذه البلورة بإلكتروناتها الأربعة مع جيرانها الأربعة، كما في الشكل 8-3.



الشكل 8-3: رسم بياني للروابط الإلكترونية في أنصاف لنواتل الأصيلية (Si)

تنشأ قوى الربط في هذه الرابطة من التفاعل بين الإلكترونات المشتركة الذي تمليه قواعد الميكانيك الكمومي. يعرف هذا الربط بالربط التكافؤي، وفيه يشكل كل زوج من الإلكترونات رابطة تكافؤية. ونتيجة لهذه الرابطة لا توجد إلكترونات حرة متوفرة للشبكة البلورية في البنية الماسية التكافؤية.

يمكن تصور عملية توليد أزواج الإلكترونات والثقوب بطريقة وصفية اعتماداً على كسر الروابط الإلكترونية في الشبكة البلورية لنصف الناقل. إذا كسرت إحدى الروابط الإلكترونية في السليكون وانزع إلكترون التكافؤ من موضعه في الرابطة، بحيث يصبح حراً وقادراً على التجوال في الشبكة البلورية، فإنه يتولد إلكترون نقل مخلّفاً وراءه رابطة محطّمة (أي ثقباً)، كما يظهر في الشكل 8-3. إن الطاقة اللازمة لكسر الرابطة هي طاقة فرجة الطاقة E_g .

يساعدنا هذا الطراز على تصور الآلية الفيزيائية لتوليد أزواج الإلكترونات والثقوب، لكنه يبقى طرازاً وصفيّاً. أما من أجل فهم أفضل لسلوك أنصاف النواقل ومن أجل الحساب الكمي، فنحن بحاجة لدراسة أكثر عمقاً تتناول بالتفصيل كثافة الإلكترونات وكثافة الثقوب في عصابتي النقل والتكافؤ على التوالي. إن ذلك لا يتحقق إلا باستعمال طراز آخر هو طراز عصابات الطاقة، وهذا ما سنفعله في فقرة لاحقة.

يبين الشكل 8-3 أنه في أنصاف النواقل الأصلية (بدون شوائب)، يرتبط وجود كل إلكترون في عصابة النقل بوجود ثقب في عصابة التكافؤ. نستنتج أن كثافة الإلكترونات في عصابة النقل n تساوي كثافة الثقوب في عصابة التكافؤ p في نصف الناقل الأصلي. وعليه يتحقق في نصف الناقل الأصلي العلاقة: $n=p=n_i$

8-5 أنصاف النواقل المطعّمة (اللاذاتية)

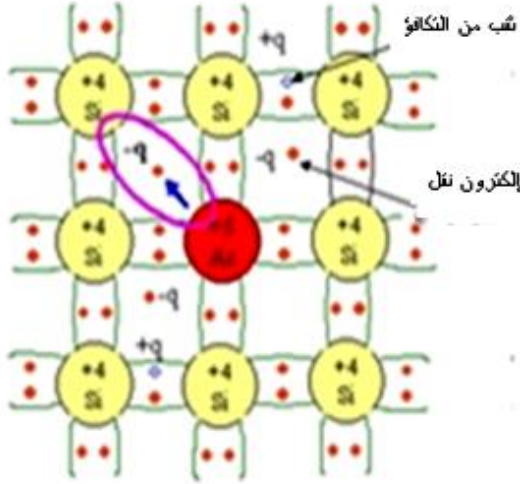
يمكن خلق حاملات شحنة (إلكترونات أو ثقوب) في أنصاف النواقل، إضافة إلى حاملات الشحنة التي تنشأ حرارياً، وذلك بإدخال شوائب إلى البلورة عمداً. تدعى هذه العملية "التطعيم doping". وهي التقنية الأكثر انتشاراً لتغيير الناقلية النوعية لأنصاف النواقل. وهكذا، فنصف الناقل اللاذاتي أو المُوَدَّ *extrinsic semiconductor* هو نصف ناقل مطعّم بشائبة معينة قادرة على تعديل عميق في خصائصه الكهربائية، مما يجعله مناسباً للتطبيقات الإلكترونية (الديودات

والترانزستورات، وما إلى ذلك) أو التطبيقات الإلكترونية (مصادر للضوء ومكاشيف). وبالتطعيم يمكن تغيير نوع حاملات الشحنة المسيطرة في عملية النقل الكهربائي، بحيث تكون إلكترونات أو ثقوباً. تؤدي عملية التطعيم إلى نوعين من أنصاف النواقل المطعمة: النوع n ، تكثر فيه الإلكترونات والنوع p تغلب عليه الثقوب. وهكذا، فعند تطعيم بلورة بحيث تكون كثافتا حاملتي الشحنة في وضع التوازن n_0 و p_0 مختلفتين عن كثافة حامل الشحنة الأصيل n_i ، يقال عن نصف الناقل إنه لا ذاتي.

آ-نصف الناقل من النوع n

هو نصف ناقل ذاتي كالسليكون Si أو الجرمانيوم مثلاً، أُدخلت فيه شوائب من العمود الخامس في الجدول الدوري للعناصر (كالزرنيخ As أو الفسفور p أو الإثمد أو الأنتيموان Sb). من المعروف أن كل ذرة لعنصر في العمود الخامس كالزرنيخ As لها خمسة إلكترونات تكافؤ، فعندما تدخل في شبكة Si البلورية تكفي أربعة منها لإكمال الروابط التكافؤية مع ذرات السليكون المجاورة الذي له أربعة إلكترونات تكافؤ، ويبقى الإلكترون الخامس زائداً وليس له مكان في بنية الربط في الشبكة البلورية لذا يكون ارتباطه ضعيفاً بذرة As، ويكفي قدر ضئيل من الطاقة الحرارية لتمكين هذا الإلكترون من التغلب على القوة الكولونية التي تربطه بذرة الشائبة، ومن ثم يُمنح أو يُعطى للشبكة البلورية ككل. وبذلك يكون هذا الإلكترون حراً للمشاركة في نقل التيار. يبين الشكل 8-4 إدخال ذرة زرنيخ مكان إحدى ذرات Si وتشكل إلكترون حر من الإلكترون الزائد. كما يظهر على الشكل أيضاً تشكل إلكترونات نقل وثقوب تكافؤ نتيجة الإثارة الحرارية. تسمى الذرة الشائبة من العمود الخامس التي تمنح الإلكترون الذرة المانحة أو الذرة المعطية *doner*. ويسمى نصف الناقل المطعم بذرات مانحة نصف ناقل من النوع n ، تكون فيه كثافة الإلكترونات أكبر كثيراً من كثافة الثقوب المتولدة

حرارياً، لذا تكون الإلكترونات في هذا النوع هي حاملات الشحنة الأكثرية، كما تسمى الثغوب حاملات الشحنة الأقلية.

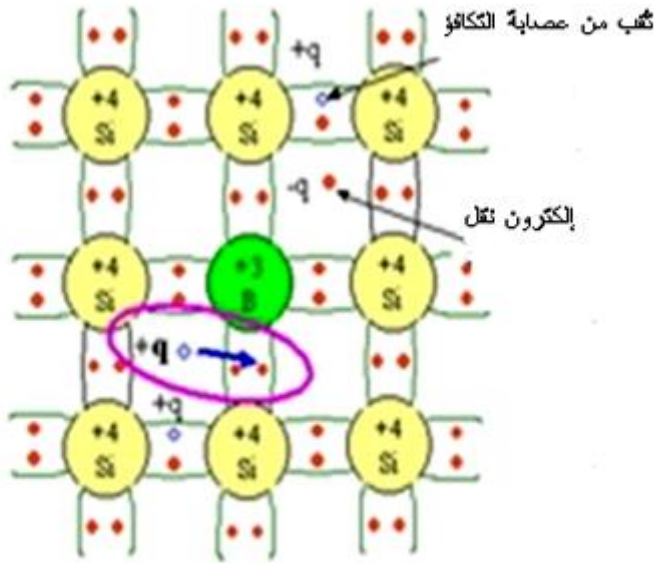


الشكل 4-8: تطعيم Si بالزرنيخ As للحصول على نصف ناقل من النوع n

ب- نصف الناقل من النوع p

هو نصف ناقل ذاتي كالسليكون Si أو الجرمانيوم Ge، أُدخلت فيه شوائب من العمود الثالث في الجدول الدوري للعناصر (كالبور B أو الإنديوم In أو الغاليوم Ga أو الألمنيوم Al). عند إضافة السليكون بشائبة ثلاثية التكافؤ كالألمنيوم Al مثلاً، فإن إلكترونات التكافؤ الثلاثة فيها تساهم بالرابطة التكافؤية فتبقى رابطة واحدة غير مكتملة. وتستطيع هذه الرابطة غير المكتملة، بقدر ضئيل من الطاقة، أن تنتقل إلى ذرات أخرى عندما تُبادل إلكترونات الرابطة مواضعها، أي عندما تثار الإلكترونات في عصابة التكافؤ لتملأ الرابطة مخلفة وراءها ثقباً في عصابة التكافؤ. تسمى الذرة الشائبة من العمود الثالث التي تأخذ الإلكترونات من عصابة التكافؤ "الأخذة أو المتقبّل acceptor"، وتشكل شوائب العمود الثالث شوائب

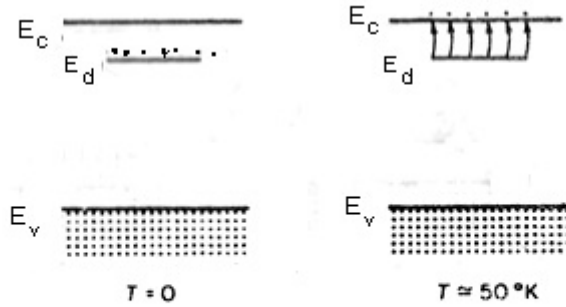
أخذة في كل من Ge و Si . إن عملية التطعيم بالشوائب الأخذة يمكن أن تخلق نصف ناقل كثافة الثقوب في عصابة التكافؤ فيه أكبر بكثير من كثافة الإلكترونات في عصابة النقل، وبذلك تشكل الثقوب فيه حاملات الشحنة الأكثرية، بينما تشكل الإلكترونات الحاملات الأقلية. يسمى نصف الناقل المطعم بهذه الطريقة نصف الناقل من النوع p .



الشكل 5-8 تطعيم Si بالبور B للحصول على نصف ناقل من النوع p

يبين الشكل 5-8 إدخال ذرة بور B مكان إحدى ذرات Si ونشوء ثقب حرّ مكان الرابطة غير المكتملة. كما يظهر على الشكل أيضاً نشوء إلكترونات نقل وثقوب تكافؤ نتيجة الإثارة الحرارية. ويظهر على الشكل أيضاً انتقال إلكترونات من روابط الذرات المجاورة لملء الثقب، فتكون النتيجة كما لو أن الثقب انتقل. هناك تصور آخر للحديث عن تشكل الإلكترونات الحرة والثقوب الحرة الناتجة

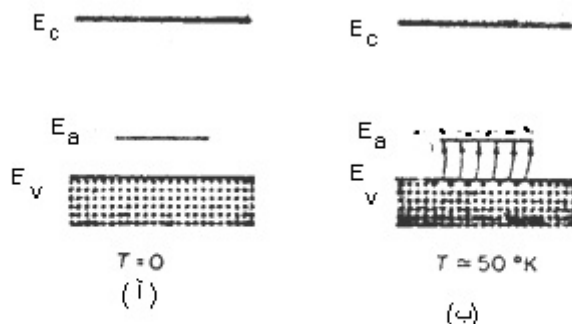
عن عملية التطعيم بدلاً من طراز الرابطة التكافؤية الأنف الذكر والممثل بالشكلين (4-8) و (5-8) ألا وهو طراز سويات الطاقة في البنية الطاقية. فعند إدخال الشوائب إلى بلورة تامة من نصف ناقل، تنشأ سويات طاقة إضافية في بنية عصابة الطاقة، وهي تقع عادة في فرجة الطاقة بين عصابتي النقل والتكافؤ. فمثلاً، عند ما تدخل شائبة من العمود الخامس في الجدول الدوري إلى الشبكة البلورية للجرمانيوم أو السليكون تنشأ سوية طاقة قريبة جداً من عصابة النقل. وفي درجة الصفر المطلق 0°K تكون هذه السوية ممثلة بالإلكترونات، لكن إثارتها لا تتطلب إلا طاقة قليلة جداً كي تنتقل إلكتروناتها إلى عصابة النقل، كما يظهر على الشكل (6-8) في جزئيه (أ) و (ب). وهكذا، ففي درجات حرارة تقع في المجال $50-100^\circ\text{K}$ تستطيع هذه السوية أن تمنح كل إلكتروناتها إلى عصابة النقل. لذلك تدعى سوية الطاقة هذه سوية المانحة ويرمز لها بالرمز E_d ، كما تدعى شوائب العمود الخامس في الجدول الدوري الشوائب المانحة.



الشكل 6-8 منح الإلكترونات من السوية المانحة إلى عصابة النقل

كما أن عملية التطعيم بشوائب من العمود الثالث تُدخل سويات إشابة في Ge و Si في فرجة الطاقة وقريبة جداً من عصابة التكافؤ. وتكون هذه السويات فارغة من الإلكترونات في درجة الصفر المطلق، لكن في درجات منخفضة من الحرارة تتوفر طاقة كافية لإثارة الإلكترونات في عصابة التكافؤ إلى سوية

الشائبة مخفة ورائها تقوباً في عصابة التكافؤ، كما هو مبين في الشكل (7-8) جزئيه (أ) و (ب). ولما كان هذا النوع من الشوائب يأخذ إلكترونات من عصابة التكافؤ لذا فإن هذه السوية تدعى سوية الآخذة أو المتقبّل ويرمز لها بالرمز E_a .



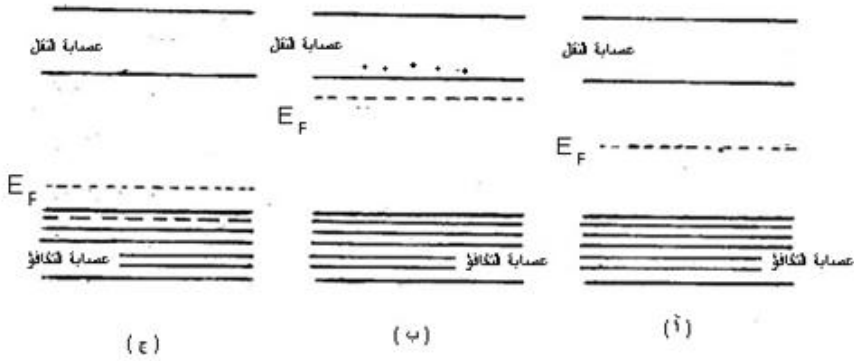
الشكل 7-8 أخذ الإلكترونات من سوية الآخذة إلى عصابة التكافؤ

وتجدر الإشارة إلى أن عملية التطعيم تؤدي إلى زيادة نوع واحد من حاملات الشحنة، إما إلكترونات في نصف الناقل من النوع n أو تقوب في نصف الناقل من النوع p ، وليس الاثنين معاً كما هو الحال في عملية التآين الحراري. كما تجدر الإشارة إلى أن الذرة الشائبة سواء أكانت مانحة أم آخذة تكون معتدلة، وعندما تثار تتأين؛ فتعطي الشائبة المانحة إلكترونات سالباً إلى عصابة النقل وتصبح هي أيوناً موجب الشحنة، أما الشائبة الآخذة فتأخذ إلكترونات من عصابة التكافؤ وينشأ مكانه تقب موجب الشحنة في عصابة التكافؤ وتصبح هي أيوناً سالباً. وهذه الأيونات الموجبة أو السالبة لا تسهم في عملية النقل الكهربائي بسبب كتلتها الكبيرة.

6-8 مستوى طاقة فرمي

يمكن للإلكترونات في الجسم الصلب أو نصف الناقل أن تشغل مستويات طاقة

مختلفة. ففي مدة زمنية قصيرة نجد أن بعض هذه المستويات مشغولة بالإلكترونات أكثر من غيرها، وذلك حسبما تكتسب أو تفقد طاقة في وصولها إلى وضع التوازن. من بين مستويات الطاقة المختلفة التي يمكن أن تشغلها الإلكترونات هناك مستوى طاقة فرمي التي من أجلها يكون احتمال الانشغال مسوياً 50%. ويعد مستوى طاقة فرمي أكثر قيم الطاقة أهمية؛ لأنه يعد مرجعاً تقارن بالنسبة له طاقة الإلكترونات والثقوب في المادة نصف الناقل، ويمز له بالرمز E_F .



الشكل 8-8 موضع مستوى طاقة فرمي نصف الناقل

يقع مستوى فرمي في منتصف المسافة بين عصابتي النقل والتكافؤ في نصف الناقل الأصيل، كما يشير إلى ذلك الجزء (أ) من الشكل (8-8) وذلك لأن كثافة الإلكترونات في عصابة النقل تساوي كثافة الثقوب في عصابة التكافؤ، أي $n = p$. أما من أجل نصف الناقل من النوع n المطعم بذرات مانحة فإن مستوى فرمي يقع قريباً من عصابة النقل، كما في الجزء (ب) من الشكل (8-8)، لأن كثافة الإلكترونات في عصابة النقل أكبر بكثير من كثافة الثقوب في عصابة التكافؤ، أي $n \gg p$. وهذا يعني أنه توجد مستويات طاقة مشغولة بالإلكترونات فوق منتصف فرجة الطاقة. وبالمقابل فإن مستوى فرمي في نصف الناقل من النوع p يقع فوق عصابة التكافؤ وقريباً منها كما في الجزء (ج) من الشكل.

7-8 الكتلة الفعالة

ليست حركة الإلكترونات في البلورة حرة تماماً؛ لأنها موجودة في بئر كمون دوري للشبكة البلورية؛ لذا لا نتوقع أن تكون حركة الإلكترون في البلورة كحركته في الفضاء الحر. وعليه فإن تطبيق معادلات الإلكتروديناميك العادية على حامل الشحنة في الجسم الصلب يستلزم استعمال قيمة لكتلته مختلفة عن كتلته العادية تسمى الكتلة الفعالة ويرمز لها بالرمز m^* . تنتج هذه الكتلة الفعالة عندما نأخذ بالحسبان معظم تأثيرات الشبكة البلورية بحيث يمكن للإلكترونات والثقوب أن تعامل كحاملات شحنة "حرة تقريباً" في معظم المعادلات. يعطي الجدول 1 قيمة الكتلة الفعالة m_n^* للإلكترون والكتلة الفعالة m_h^* للثقب بدلالة كتلة الإلكترون الحر خارج البلورة m_0 ، في كل من السليكون والجرمانيوم.

الجدول 1: الكتلة الفعالة للإلكترون والثقب في السليكون والجرمانيوم.

نصف الناقل Ge	نصف الناقل Si
الكتلة الفعالة للإلكترون: $m_n^* = 0.55m_0$	الكتلة الفعالة للإلكترون: $m_n^* = 1.1 m_0$
الكتلة الفعالة للثقب: $m_h^* = 0.37m_0$	الكتلة الفعالة للثقب: $m_h^* = 0.59m_0$

8-8 تركيز حاملات الشحنة

من الضروري معرفة كثافة حاملات الشحنة في نصف الناقل إذا أردنا حساب خواصه الكهربائية. إن حساب كثافة حاملات الشحنة الأكثرية في المادة المطعمة غالباً ما يكون سهلاً وواضحاً وخاصة إذا كانت الإشابة كثيفة؛ لأن كل ذرة شائبة تعطي حاملاً واحداً من حاملات الشحنة الأكثرية إذا كان التطعيم بشوائب

نموذجية. أما كثافة حاملات الشحنة الأقلية فليست كذلك، فضلاً على أن تبعية كثافة حاملات الشحنة لدرجة الحرارة ليست بهذه السهولة أيضاً. فللحصول على معادلة تعطي كثافات حاملات الشحنة يجب معرفة توزيع هذه الحاملات على حالات الطاقة المتاحة. ومن أجل ذلك يجب تطبيق طرائق إحصائية واستعمال تابع التوزيع المناسب.

لحساب كثافة الإلكترونات وكثافة الثقوب نستعمل تابع توزيع فرمي الذي يعطي احتمال انشغال سوية طاقة متوفرة E بالإلكترون في درجة الحرارة المطلقة T ، والذي يُعطى بالعلاقة:

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{(E - E_F)/kT}} \quad (8 - 1)$$

حيث k هو ثابت بولتزمان ويساوي $1.38 \times 10^{-23} \text{ J / }^\circ\text{K}$ ، و E_F هي طاقة سوية فرمي، وتدل على أن احتمال انشغال سوية طاقة تقع عند سوية فرمي بالإلكترون يساوي $1/2$.

يمكن استعمال تابع توزيع فرمي لحساب كثافة الإلكترونات في عصابة النقل وكثافة الثقوب في عصابة التكافؤ في درجة حرارة معينة، إذا علمنا كثافة الحالات المتوفرة $N(E)$ في العصابتين. تعطي عندئذ كثافة الإلكترونات في عصابة النقل بالعلاقة:

$$n = \int_{E_C}^{\infty} f(E) N(e) dE \quad (8 - 2)$$

كما تعطي كثافة الثقوب في عصابة التكافؤ بالعلاقة:

$$p = \int_{-\infty}^{E_v} [1 - f(E)] N(E) dE \quad (8 - 3)$$

إن نتيجة مكاملة المعادلة (8-2) هي النتيجة نفسها التي نحصل عليها إذا مثلنا كل الحالات الإلكترونية المتوزعة في عصابة النقل بكثافة فعالة N_C للحالات تقع عند طرف عصابة النقل E_C . وبذلك يمكننا كتابة كثافة إلكترونات عصابة النقل كحاصل جداء الكثافة الفعالة عند E_C في احتمال الانشغال عند E_C ، أي:

$$n = N_C f(E_C) \quad (8 - 4)$$

وبمناقشة مماثلة، نكتب كثافة الثقوب في عصابة التكافؤ كحاصل جداء الكثافة

الفعالة N_V عند طرف عصابة التكافؤ E_V في احتمال الانشغال عند E_V ، أي:

$$p = N_V [1 - f(E_V)] \quad (8 - 5)$$

تعطي كثافة الحالات الفعالة N_C في درجة الحرارة T بالعلاقة:

$$N_C = 2 \left(\frac{2\pi m_n kT}{h^2} \right)^{3/2} \quad (8 - 6)$$

كما تعطى N_V بالعلاقة:

$$N_V = 2 \left(\frac{2\pi m_h kT}{h^2} \right)^{3/2} \quad (8 - 7)$$

حيث m_n و m_h الكتلتان الفعالتان للإلكترون والثقب على التوالي، و h ثابت بلانك، و k ثابت بولتزمان.

إذا فرضنا أن سوية فرمي تقع تحت طرف عصابة النقل بأكثر من عدة kT ، أي $E_C - E_F \gg kT$ ، فإن المعادلة (8-4) تعطي كثافة الإلكترونات بالعلاقة:

$$n = N_C e^{-(E_C - E_F)/kT} \quad (8 - 8)$$

إذا فرضنا أن سوية فرمي تقع فوق طرف عصابة التكافؤ بأكثر من عدة kT ، أي $E_F - E_V \gg kT$ ، فإن المعادلة (8-5) التي تعطي كثافة الثقوب تؤول إلى العلاقة:

$$p = N_V e^{-(E_F - E_V)/kT} \quad (8 - 9)$$

يمكن البرهان بسهولة على صحة العلاقة:

$$np = n_i^2 \quad (8 - 10)$$

حيث n_i كثافة الحاملات الأصلية التي تعطى، بعد تعويض المعادلتين (8-8) و (8-9) في المعادلة (8-10)، بالعلاقة:

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{-E_g/2kT} \quad (8 - 11)$$

8-9 آلية النقل في أنصاف النواقل

توجد آليتان تقوم بموجبهما حاملات الشحنة بعملية النقل الكهربائي في أنصاف

النواقل، هما: الانسياق والانتثار. يحدث النقل بالانسياق عندما يوجد حقل كهربائي مطبق على نصف الناقل. ويحدث النقل بالانتثار عندما يوجد تدرج في توزيع كثافة حاملات الشحنة مع البعد في المادة.

8-9-1 تيار الانسياق:

تنساق الثقوب مع جهة الحقل وتنساق الإلكترونات إلى الجهة المعاكسة، وبذلك يكون تيار النقل بالانسياق الناتج عنهما في جهة واحدة، ويساوي مجموع مساهمتهما. تعطى كثافة تيار انسياق الإلكترونات بالعلاقة :

$$J_n = nev_n = ne\mu_n E = \sigma_n E \quad (8 - 12)$$

وتعطى كثافة تيار انسياق الثقوب بالعلاقة:

$$J_p = pev_p = pe\mu_p E = \sigma_p E \quad (8 - 13)$$

على اعتبار أن $v = \mu E$ حيث μ هي الحركية وتعرّف بأنها السرعة بوحدة الحقل. وعليه، تكون كثافة تيار الانسياق الكلي:

$$J = J_n + J_p = e(n\mu_n + p\mu_p)E \quad (8 - 14)$$

حيث n و p كثافتا الإلكترونات والثقوب على الترتيب، v_n و v_p سرعة الإلكترونات وسرعة الثقوب على الترتيب، μ_n و μ_p حركيتاهما على الترتيب، E الحقل الكهربائي المطبق، e شحنة الإلكترون، σ_n و σ_p الناقلية النوعية للإلكترونات وللثقوب على الترتيب.

إذا كان نصف الناقل من النوع n كانت كثافة تيار الانسياق: $J \approx ne\mu_n E$ وذلك لأن $n \gg p$ في نصف الناقل من النوع n وإذا كان نصف الناقل من النوع p كانت كثافة تيار الانسياق: $J \approx pe\mu_p E$ وذلك لأن $p \gg n$ في نصف الناقل من النوع p .

8-9-2 تيار الانتثار:

لحساب كثافة تيار انتثار حامل الشحنة، سواء كان إلكترونات أم ثقوباً، ننتقل من العلاقة الأساسية

$$J = Nqv \quad (8 - 15)$$

حيث N كثافة حامل الشحنة، و q شحنته، و v سرعة انتشاره التي تعطى بالعلاقة:

$$v = -D \frac{dN}{dx} \quad (8 - 16)$$

حيث D ثابت يسمى ثابت الانتثار، ويعطى بالعلاقة:

$$D = \frac{\tau kT}{2m} \quad (8 - 17)$$

حيث T درجة الحرارة المطلقة، k ثابت بولتزمان، τ الزمن الحر الوسطي و m كتلة حامل الشحنة. بتعويض السرعة v المعطاة بالعلاقة (8-16) في العلاقة (8-15) تصبح هذه الأخيرة:

$$J = -NqD \frac{dN}{dx} \quad (8 - 18)$$

من أجل تيار الإلكترونات J_n لدينا: $q = -e$ و $N = n$ و $D = D_n$ ، وبالمثل يكون لدينا من أجل تيار الثقوب J_p : $q = e$ و $N = p$ و $D = D_p$. وأخيراً نجد أن كثافة تيار انتثار الإلكترونات تعطى بالعلاقة:

$$J_n = eD_n \frac{dn}{dx} \quad (8 - 19)$$

وتعطى كثافة تيار انتثار الثقوب بالعلاقة:

$$J_p = -eD_p \frac{dp}{dx} \quad (8 - 20)$$

الجدول 2: ثوابت انتشار الإلكترون والتعب في السليكون والجرمانيوم.

نصف الناقل	ثابت انتشار الإلكترون D_n	ثابت انتشار التعب D_p
Si	$33.8 \times 10^{-4} . m^2 . s^{-1}$	$13.0 \times 10^{-4} . m^2 . s^{-1}$
Ge	$98.8 \times 10^{-4} . m^2 . s^{-1}$	$46.8 \times 10^{-4} . m^2 . s^{-1}$

يتعلق ثابت الانتثار D بنوع المادة وبدرجة الحرارة وكذلك بنوع حامل الشحنة. ويعطي الجدول 2 قيمة هذا الثابت من أجل السليكون والجرمانيوم في الدرجة

300°K . ولما كانت الحركية μ تعطى بالعلاقة:

$$\mu = \frac{e\tau}{2m}$$

فإن ثابت الانتثار يكتب عندئذ بدلالة الحركية على النحو الآتي:

$$D = kT/e\mu \quad (8-21)$$

وتعرف هذه العلاقة بعلاقة أينشتاين.

8-10 الناقلية النوعية لنصف الناقل الأصيل

تعرف الناقلية النوعية σ بالعلاقة:

$$\sigma = \frac{J}{E}$$

لإيجاد ناقلية نصف الناقل الأصيل σ_i نعوض لمن العلاقة (8-14) فنجد:

$$\sigma_i = e(n\mu_n + p\mu_p)$$

ولما كان $n=p=n_i$ في نصف الناقل الأصيل تصبح العلاقة الأخيرة:

$$\sigma_i = en_i(\mu_n + \mu_p) \quad (8-22)$$

تحسب n_i من العلاقة (8-11)، ويعوض عن N_C و N_V من العلاقتين (8-6) و

(8-7) على الترتيب وتأخذ المعادلة (8-22) الشكل الآتي:

$$n_i = AT^{3/2}e^{-E_g/2kT} \quad (8-23)$$

حيث E_g عرض فرجة الطاقة في نصف الناقل، و A ثابت يعطى بالعلاقة:

$$A = \sqrt{N_C N_V} \quad , \quad T \text{ درجة الحرارة المطلقة.}$$

8-11 الناقلية النوعية لنصف الناقل المطعم

تحسب الناقلية النوعية σ لنصف الناقل من العلاقة:

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p) \quad (8-24)$$

أ- إذا كان نصف الناقل من النوع n فإن الإلكترونات تكون هي حاملات الشحنة

الأكثرية أي:

$n \gg p$ ، وعليه فإن العلاقة (8-24) تؤول إلى:

$$\sigma \cong en\mu_n \quad (8 - 25)$$

ب- إذا كان نصف الناقل من النوع p فإن الثقوب تكون هي حاملات الشحنة الأكثرية، وتكون الإلكترونات هي الحاملات الأقلية، أي يتحقق: $n \gg p$. وهنا تؤول العلاقة (8-24) إلى:

$$\sigma \cong ep\mu_p \quad (8 - 26)$$

يعطي الجدول 3 قيمة الحركية μ (واحدتها $\text{cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$) للإلكترونات والثقوب في السليكون والجرمانيوم الأصليين.

الجدول 3: قيمة حركيات الإلكترونات والثقوب للسليكون والجرمانيوم الأصليين.

الحركية في الدرجة 300 K	Si أصيل	Ge أصيل
$\mu_n (\text{cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1})$	1400	3900
$\mu_p (\text{cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1})$	450	1900

هذا، وتتناقص قيمة الحركية لنصف الناقل مع زيادة التطعيم، وأعلى قيمة للحركية تكون في نصف الناقل الأصلي.

8-12 أمثلة نموذجية وحسابات كمية

سنجري بعض الحسابات على أنصاف النواقل، وبوجه خاص على الجرمانيوم والسليكون، لإيجاد بعض القيم الفيزيائية التي تحدد خواصها الكهربائية، مثل تركيز حاملات الشحنة فيها والناقلية وتأثير التطعيم على هذه الخواص.

وسنستعمل في حساباتنا الثوابت الفيزيائية التالية عند اللزوم:

شحنة الإلكترون $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ، ثابت بلان $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ ، ثابت بولتزمان $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ ، كتلة الإلكترون الحر السكونية $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$

وسنأخذ الكتلة الفعالة للإلكترون والتعب من القيم المعطاة في الجدول 1 إلا إذا أعطيت قيم غيرها.

مثال 1- حساب كثافة الحالات الفعالة للإلكترونات في عصابة النقل N_C وكثافة الحالات الفعالة للثقوب N_V في عصابة التكافؤ للجرمانيوماً الأصلي وذلك في الدرجة 300°K .

الحل:

من العلاقتين (8-6) و (8-7) :

$$N_V = 2 \left(\frac{2\pi m_h kT}{h^2} \right)^{3/2}, \quad N_C = 2 \left(\frac{2\pi m_n kT}{h^2} \right)^{3/2}$$

نعوض عن كل حد بما يساويه في العلاقتين السابقتين حيث:

$$m_h = 0.37m_o = 0.37 \times 9.11 \times 10^{-31} = 3.37 \times 10^{-31} \text{kg}$$

$$\text{و } m_n = 0.55m_o = 0.55 \times 9.11 \times 10^{-31} = 5.01 \times 10^{-31} \text{ kg فنجد:}$$

$$N_V = 3.71 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}, \quad N_C = 1.03 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$$

مثال 2- حساب كثافة حاملات الشحنة في الجرمانيوم الأصلي الذي فرجة طاقته $E_g = 0.66 \text{ eV}$ في الدرجة 300°K .

الحل:

كثافة الإلكترونات = كثافة الثقوب في نصف الناقل الأصلي. تعطي العلاقة (8-11) في حالة Ge:

$$n = p = n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{-E_g/2kT}$$

وبعد التعويض عن N_C و N_V من المثال 1 نجد: $n_i = n = p = 2.22 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$

ملاحظة: يجب الانتباه عند التعويض عن قيمة E_g المعطاة بالإلكترون فلت أن تحول إلى جول بضربها في شحنة الإلكترون، أو تحويل $2kT$ إلى إلكترون فلت بقسمتها على شحنة الإلكترون.

مثال 3- حساب الناقلية النوعية σ في نصف الناقل الأصيل، بأخذ الجرمانيوم الأصيل كمثال على ذلك حيث:

$$\mu_p = 1900 \text{ cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \mu_n = 3900 \text{ cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

الحل:

تعطى الناقلية النوعية لنصف الناقل الأصيل بالعلاقة (8-11) الآتية:

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p)$$

ولما كان $n_i = p$ تصبح هذه العلاقة:

$$\sigma_i = en_i(\mu_n + \mu_p)$$

وبالتعويض عن n_i من المثال 2 وعن التحريكتين بقيمتيهما بعد جعل واحدتهما

$$\sigma = 2.06 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{وذلك بالقسمة على } 10^4 \text{ نجد: } \sigma = 2.06 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$$

ملاحظة: S تعني سيمنز، واحدة الناقلية في الجملة الدولية، وهي مقلوب أوم.

مثال 4- حساب تركيز الإلكترونات الحرة في الجرمانيوم بعد تطعيمه بالزرنيخ بمعدل ذرة شائبة واحدة من الزرنيخ لكل مليون ذرة من الجرمانيوم كي يصير من النوع n ، وذلك بفرض أن كل ذرات الزرنيخ تتأين في درجة الحرارة العادية، وتسهم بالإلكترونات الحرة. تعطى كثافة الجرمانيوم 4.56 gcm^{-3} ، ووزنه الذري 72.6 g ، وعدد أفوغادرو 6.024×10^{23} ذرة/مول.

الحل:

لمعرفة تركيز الإلكترونات الحرة التي تعطيها ذرات الزرنيخ المانحة، يجب معرفة تركيز ذرات الجرمانيوم أي عدد ذرات الزرنيخ في المتر المكعب التي أدخلت إلى الجرمانيوم. ومن أجل ذلك نقول: لما كان كل 72.6 g تحتوي على عدد من الذرات يساوي عدد أفوغادرو أي: 6.024×10^{23} ذرة، فإن 5.46 g (الموجودة في 1 cm^3 من الجرمانيوم) تحتوي على N ذرة في 1 cm^3 حيث:

$$N = \frac{5.46 \times 6.024 \times 10^{23}}{72.6} \frac{1}{\text{cm}^3} = 4.53 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$$

هذا هو عدد ذرات الجرمانيوم الموجودة في 1 cm^3 وبذلك يكون عدد ذرات الجرمانيوم في 1 m^3 مساوياً $N = 4.53 \times 10^{28}$.

أما عدد ذرات الزرنيخ الشائبة بمعدل ذرة واحدة لكل مليون ذرة جرمانيوم فهو:

$$n = \frac{4.53 \times 10^{28}}{10^6} \text{ m}^{-3} = 4.53 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$$

وبفرض أن كل ذرة معطية تتأين وتعطي إلكترونات حراً واحداً إلى عصابة النقل، فتكون كثافة الإلكترونات الحرة الناتجة عن التطعيم مساوية $4.53 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$. إذا تذكرنا أن كثافة الإلكترونات الحرة في الجرمانيوم الأصلي هي $2.2 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ (كما حسبناه في المثال 2)، نلاحظ أن عملية التطعيم قد زادت من عدد حاملات الشحنة (الإلكترونات في هذا المثال) بمقدار ثلاث مراتب في القيمة، أي ضاعفته ألف مرة. هذا، ولا زال يوجد، بالإضافة إلى هذا العدد، عدد آخر من الإلكترونات الحرة n_i ناتجة عن التأين الحراري ولكنه أصغر من العدد الناتج عن التطعيم بألف مرة في مثالنا هذا.

مثال 5- حساب كثافة الثقوب الحرة في الجرمانيوم المطعم بالزرنيخ بالمعدل الوارد في المثال 4 .

الحل:

إن كثافة الثقوب في نصف الناقل المطعم بذرات مانحة لا تبقى كما هي عليه مساوية لقيمتها n_i في المادة الأصلية بعد التطعيم، بل تقل عنها، بسبب عملية إعادة اتحاد الإلكترونات بالثقوب، وتحسب من العلاقة: (8-10)

$$np = n_i^2$$

التي تبقى صحيحة في أي نصف ناقل مهما كان نوعه. إذا طبقنا هذه العلاقة على الجرمانيوم من النوع n المعني هنا حيث: $n = 4.53 \times 10^{22} m^{-3}$ ، $n_i = 2.2 \times 10^{19} m^{-3}$ لوجدنا:

$$p = \frac{n_i^2}{n} = \frac{(2.2 \times 10^{19} m^{-3})^2}{4.53 \times 10^{22} m^{-3}} = 4.86 \times 10^{15} m^{-3}$$

وهي أقل من كثافتها في الجرمانيوم الأصيل بما يقارب 10^4 مرة . ومن هنا يظهر تحقق العلاقة $n \gg p$ في نصف الناقل من النوع n .

مثال 6- حساب الناقلية النوعية σ للجرمانيوم من النوع n المطعم بالزرنيخ بالمعدل الوارد في المثال 4 .

الحل: تعطى الناقلية النوعية بالعلاقة:

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p)$$

ولما كان نصف الناقل من النوع n فإنه يتحقق $n \gg p$ ، وعليه تصبح علاقة الناقلية النوعية:

$$\sigma \cong en\mu_n$$

حيث: $n = 4.53 \times 10^{22} m^{-3}$ ، أما μ_n فهي لنصف الناقل المطعم أقل من نصف الناقل الأصيل، ولكن سنأخذها هنا مساوية لها أي $\mu_n = 0.39 m^2 \cdot V^{-1} \cdot s^{-1}$. نعوض في العلاقة السابقة فنجد: $\sigma = 2.83 \times 10^3 S \cdot m^{-1}$. وبمقارنتها

مع ناقلية الجرمانيوم الأصيل التي حسبناها في المثال 3 نجد أنها ازدادت ألف مرة.

مسائل على الفصل الثامن

8-1 احسب عدد إلكترونات النقل في 1cm^3 من السليكون الأصيل في درجة الحرارة: آ- 300°K ، ب- 200°K ، ج- 400°K . افرض أن فرجة الطاقة في السليكون تساوي 1.1eV .

8-2 احسب الناقلية النوعية والمقاومة النوعية للسليكون الأصيل في الدرجة 300°K . تؤخذ حركية الإلكترون وحركية الثقب للسليكون من الجدول 3 .
بفرض أن كل الذرات المانحة تسهم بالإلكترونات الحرة، احسب الناقلية النوعية والمقاومة النوعية في الدرجة 300°K للسليكون من النوع n الذي طعم بذرات مانحة بمعدل ذرة واحدة لكل مليون ذرة من السليكون. تعطى كثافة السليكون 2.33g.cm^{-3} ، ووزنه الذري 28.08، وعدد أفوغادرو 6.024×10^{23} ذرة/مول.

8-3 احسب الناقلية النوعية والمقاومة النوعية في الدرجة 300°K لكل من: آ- السليكون النقي، و ب- الجرمانيوم النقي. افرض أن كثافة حاملات الشحنة في الجرمانيوم النقي هي $2.5 \times 10^{13}\text{cm}^{-3}$ وللسليكون النقي $1.6 \times 10^{10}\text{cm}^{-3}$ في الدرجة 300°K . استعمل قيم الحركيات المعطاة في الجدول 3.

8-4 احسب سرعتي انسياق الإلكترونات والثقوب في الدرجة 300°K من أجل حقل كهربائي قيمته 100 V.cm^{-1} في كل من: آ- الجرمانيوم، ب- السليكون. استعمل القيم المعطاة في الجدول 3 من أجل قيم الحركيات.

8-5 احسب ثابتتي انتشار الثقب D_p والإلكترون D_n في الدرجة 300°K في كل من الجرمانيوم والسليكون. استعمل قيم الحركيات المعطاة في الجدول 3 .

8-6 استعمل نتائج المسألة 8-5 لحساب الأزمنة الحرة الوسطية للثقوب والإلكترونات في كل من الجرمانيوم والسليكون.

الفصل التاسع

الوصلة p-n والديودات الوصلية

9-1 مقدمة:

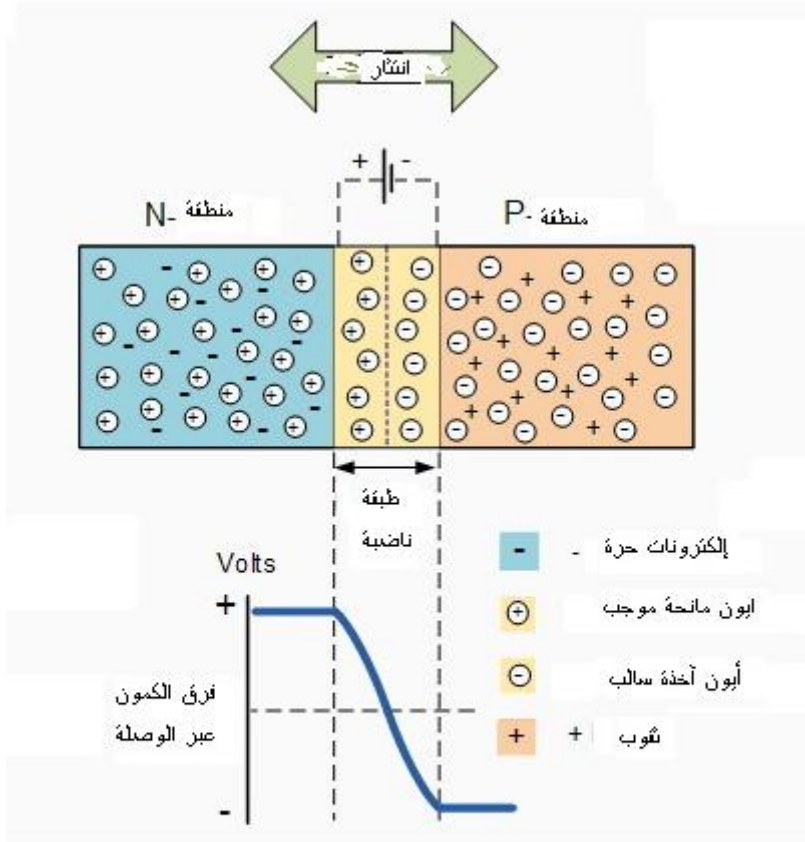
رأينا في الفصل السابق كيف نحول نصف الناقل الصرف كالسليكون أو الجرمانيوم إلى نصف ناقل من النوع n أو النوع p وذلك بتطعيمه بشائبة من العمود الخامس في الجدول الدوري كالزرنينخ As أو بشائبة من العمود الثالث كالبور B . هذا شيء حسن وجيد، لأنه مكّننا من تغيير الخواص الكهربائية لنصف الناقل، ولكن ما الفائدة من وراء ذلك؟ إن نصف الناقل سواء كان من النوع n أم من النوع p لا يمكنه أن يعمل سوى القليل من تلقاء نفسه لكونه مادة معتدلة كهربائياً. ولكن عندما نصل (أو نلحم) هذين النوعين معاً فإنهما يسلكان سلوكاً مغايراً جداً إذ يشكّلان ما يعرف باسم الوصلة p-n . وهذه الوصلة تسلك سلوك ديود (ثنائي) له تطبيقات كهربائية وإلكترونية كثيرة. كما أنه إذا أضيف لهذه الوصلة نصف ناقل آخر من النوع n أو p حصلنا على الترانزستور الوصلي pnp أو npn الذي يشكل الحجر الأساس في الإلكترونيات الحديثة.

نتناول في هذا الفصل فيزياء الوصلة pn وآلية عملها كديود بطريقة يغلب عليها الأسلوب الوصفي، لأن هذه المواضيع ستدرس دراسة تحليلية مفصلة في مقررات لاحقة. وسنستعرض بعض التطبيقات العملية للديودات بأنواعها المختلفة. وسيخصص الفصل التالي للترانزستورات الوصلية وآلية عملها وبعض تطبيقاتها.

9-2 فيزياء الوصلة p-n

عند وصل مادتين من نصف ناقل كالسليكون مثلاً، إحدهما من النوع n والثانية

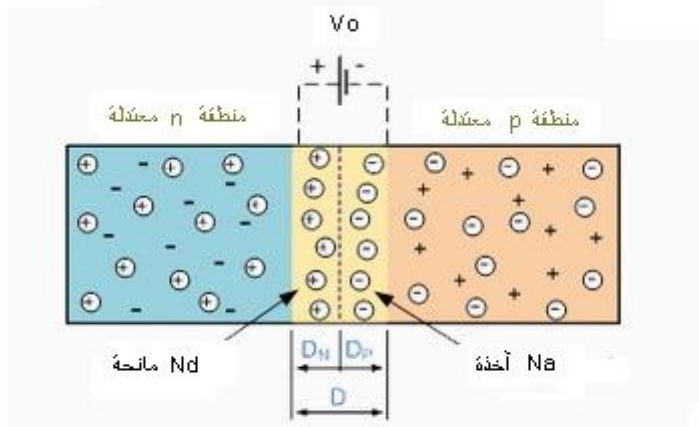
من النوع p، ينشأ لدينا للوهلة الأولى تدرج كبير جداً في كثافة حاملات الشحنة بين المادتين الموجودتين على جانبي منطقة الاتصال التي نسميها الوصلة. ولما كان هذا الوضع غير متوازن، لذا تشرع بعض الإلكترونات الحرة التي أعطتها الذرات الشائبة المانحة في المادة من النوع n بالهجرة عبر الوصلة التي تشكلت



الشكل 1-9

حديثاً لتملأ الثقوب في السليكون من النوع p مشكلة فيها أيونات سالبة ومخلفة وراءها في السليكون من النوع n أيونات معطية موجبة الشحنة كثافتها N_d ، هي

ما تبقى من الذرات الشائبة المانحة التي هاجرت إلكتروناتها. كما أن الثقوب من الذرات الشائبة الآخذة تهاجر عبر الوصلة في الاتجاه المعاكس إلى المنطقة التي يوجد فيها تركيز كبير من الإلكترونات الحرة. وتكون النتيجة أن تمتلئ كثافة شحنة السليكون من النوع p على امتداد الوصلة بأيونات الذرات الآخذة المشحونة سلباً بكثافة تساوي N_a ، وتصبح كثافة شحنة النوع n على امتداد الوصلة موجبة وتساوي N_d . إن انتقال شحنة الإلكترونات والثقوب عبر الوصلة هو ما يدعى الانتثار كما يظهر في الشكل 9-1.



الشكل 9-2

تستمر عملية الانتثار من الجانبين وفي الاتجاهين إلى أن يصبح عدد الإلكترونات التي عبرت الوصلة كبيراً بما يكفي كي يوقف أو يمنع مزيداً من حاملات الشحنة من عبور الوصلة. وفي النهاية تنشأ حالة من التوازن (وضع معتدل من الناحية الكهربائية) ينشأ عنها منطقة تسمى " حاجز كمون" يحيط بمنطقة الوصلة حيث تدفع الذرات المانحة الثقوب كما تدفع الذرات الآخذة الإلكترونات. ونظراً لعدم تمكن حاملات الشحنة الحرة من الاستقرار في وضع يوجد فيه حاجز كمون، تصبح المنطقة على جانبي الوصلة ناضبة تماماً من حاملات الشحنة الحرة من أي نوع كان، بالمقارنة مع المادتين من النوع n

والنوع p البعديتين عن الوصلة. تسمى المنطقة المحيطة بالوصلة " الطبقة الناضبة"، انظر الشكل 9-1.

يجب أن تكون الشحنة على جانبي الوصلة متساوية ومتعاكسة كي تؤمن شرط الشحنة المعتدلة حول الوصلة. إذا كانت المنطقة الناضبة تمتد مسافة D ، فينبغي تبعاً لذلك أن تمتد مسافة D_p في السليكون من النوع p وتمتد مسافة D_n في السليكون من النوع n، كما هو مبين على الشكل 9-2 ، وكي يتحقق شرط اعتدال الشحنة أو التوازن يجب أن تتحقق العلاقة الآتية:

$$D_p \cdot N_a = D_n \cdot N_d \quad (9-1)$$

تمثل N_d كثافة حاملات الشحنة الحرة من الإلكترونات في السليكون من النوع n نتيجة تطعيمه بشوائب مانحة، وتمثل N_a كثافة حاملات الشحنة الحرة من الثقوب في السليكون من النوع p نتيجة تطعيمه بشوائب آخذة.

ولما كانت المادة من النوع n قد فقدت إلكترونات، والمادة من النوع p فقدت ثقوباً، فإن المادة من النوع n أصبحت موجبة الشحنة بالنسبة للمادة من النوع p. وهكذا، فوجود أيونات الذرات الشائبة على جانبي الوصلة يؤدي إلى نشوء حقل كهربائي " دفين " في هذه المنطقة التي يكون فيها كمون الجانب n موجباً بالنسبة للجانب p . والمشكلة الآن هي أن حاملات الشحنة الحرة تحتاج إلى بعض الطاقة الإضافية كي تصبح قادرة على اجتياز الوصلة في المنطقة الناضبة.

إن هذا الحقل الكهربائي الدفين الذي ولدته عملية الانتثار خلق " فرق كمون دفين" بين طرفي الوصلة، وله كمون دارة مفتوحة (أي عند انحياز معدوم) يساوي:

$$V_o = V_T \ln \left(\frac{N_d N_a}{n_i^2} \right) \quad (9 - 2)$$

حيث V_o توتر الوصلة عندما يكون الانحياز المطبق عليها معدوماً، V_T الفلطية الحرارية وتعطى بـ kT مقدرة بالفلط حيث k ثابت بولتزمان و T درجة

الحرارة المطلقة، وقيمة هذا التوتر في درجة حرارة الغرفة تساوي 26 mV .
 N_a و N_d هما تركيزا الشوائب المانحة والأخذة على الترتيب، و n_i تركيز
الحاملات الأصيلية في المادة نصف الناقل المصنوعة منها الوصلة، والتي هي
السليكون في مثالنا هذا.

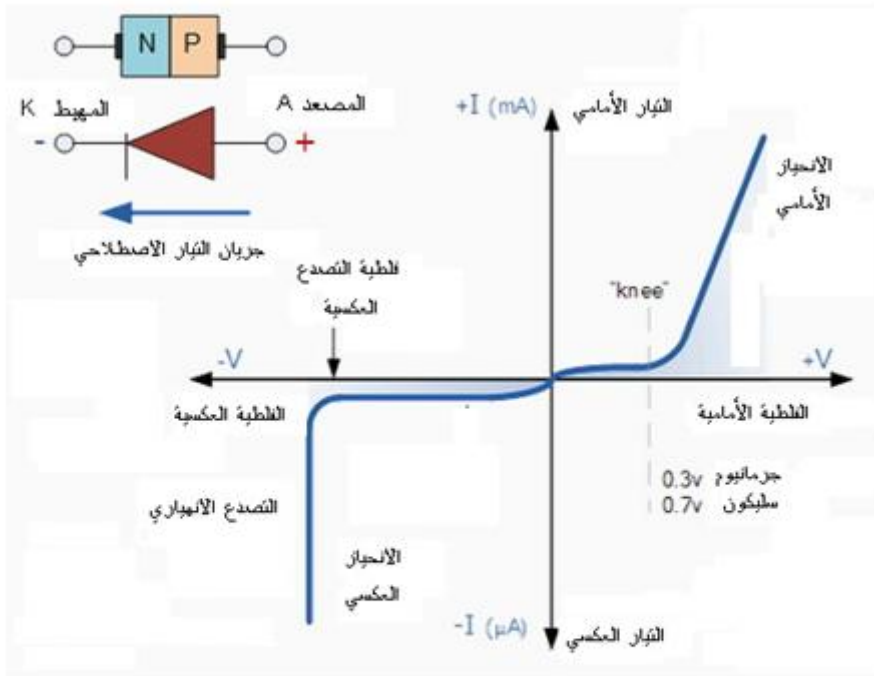
إن تطبيق فلطية خارجية موجبة ومناسبة (انحياز أمامي) بين طرفي الوصلة
p-n يستطيع أن يزود الإلكترونات والثقوب الحرة بطاقة إضافية . وإن الفلطية
الخارجية اللازمة للتغلب على حاجز الكمون الموجود الآن، تعتمد كثيراً على
نوع مادة نصف الناقل المستعمل ودرجة حرارته. والقيمة النموذجية لفلطية
الطبقة الناضبة (أي حاجز الكمون) في درجة حرارة الغرفة تساوي 0.6 - 0.7
فلط للسليكون و 0.35 - 0.3 فلط للجرمانيوم. تجدر الإشارة إلى أن حاجز
الكمون هذا موجود دائماً في النبيطة حتى ولو لم تكن موصولة إلى أي منبع
طاقة.

إن لهذا الكمون الدفين مغزى كونه يعاكس جريان كل من الإلكترونات والثقوب
عبر الوصلة، وهذا ما دعى لتسميته " حاجز كمون ". من الناحية العملية، تشكل
الوصلة p-n داخل بلورة أحادية من نصف ناقل، وليس بوصل أو لحم قطعتين
منفصلتين من نصف الناقل. ويتم ذلك في أثناء تصنيع بلورة نصف الناقل
المنصهرة بإضافة الذرات الشائبة المانحة والأخذة إلى البلورة المنصهرة على
التناوب وبمقادير محسوبة. وبعد صنع الوصلة تلحم تماسات كهربائية على كلا
الجانبين p و n بأسلاك لتمكن من توصيلها كهربائياً مع الدارة الخارجية. تدعى
الوصلة التي صنعت على هذا النحو "ديود الوصلة p-n".

9-3 الديود الوصلي

تعني كلمة "ديود" أبسط نبيطة من أنصاف النواقل، تتمتع بميزة إمرار التيار في
جهة واحدة. على كل حال، الديود، يختلف عن المقاومة من حيث إنه لا يسلك

سلوكاً خطياً بالنسبة للفلطية المطبقة؛ بل تكون العلاقة بين الفلطية والتيار في الديود علاقة أسية؛ لذا لا يمكننا أن نصف عمله بواسطة معادلة بسيطة مثل قانون أوم.



الشكل 3-9 رموز الديود الوصلني ومميزات $I-V$ السكونية

إذا طبقت فلطية موجبة مناسبة (انحياز أمامي) بين طرفي الوصلة $p-n$ ، فبإمكانها إمداد الإلكترونات الحرة والثقوب الحرة بطاقة إضافية تكفيها لعبور الوصلة لدى تناقص عرض المنطقة الناضبة حول الوصلة $p-n$. وإذا طبقت فلطية سالبة (انحياز عكسي) أدى ذلك إلى سحب الشحنات الحرة بعيداً عن الوصلة، فينتج عن ذلك زيادة في عرض المنطقة الناضبة. ويكون تأثير ذلك

زيادة المقاومة الفعالة للوصلة ذاتها أو إنقاصها؛ الأمر الذي يسمح بمرور التيار خلال الديود أو يصدّه أو يمنع مروره.

تتسع الطبقة الناضبة عندما تزداد الفلطيّة العكسية المطبقة على الوصلة، وتضيق عندما تزداد الفلطيّة الأمامية المطبقة على الوصلة، وهذا يرجع إلى الاختلافات في الخواص الكهربائيّة على الجانبين والناجمة عن التغيرات الفيزيائيّة التي أخذت مجراها.

إن إحدى نتائج هذه الخواص هي تقويم التيار المتناوب، كما تشير إلى ذلك المنحنيات المميزة السكونية للتيار بدلالة التوتر (المميزات I-V) للديودات الوصلية. يحدث تقويم التيار نتيجة لمرور تيار لا متناظر عندما تتغير قطبية فلطيّة الانحياز كما هو مبين على الشكل 9-3.

قبل استعمال الوصلة pn كنبطة عملية أو كنبطة تقويم نحتاج أولاً بوضع الوصلة في حالة انحياز، أي نصل طرفيها بفرق كمون. تشير عبارة "انحياز عكسي" على محور الفلطيّة في الشكل 9-3 إلى تطبيق فلطيّة (فرق كمون) خارجية تزيد من حاجز الكمون. بينما تعني عبارة "انحياز أمامي" تطبيق فلطيّة خارجية تنقص من حاجز الكمون. يوجد على المنحني منطقتان للتشغيل وثلاثة " انحيازات" ممكنة في ديود وصلي نموذجي. وهذه الانحيازات هي:

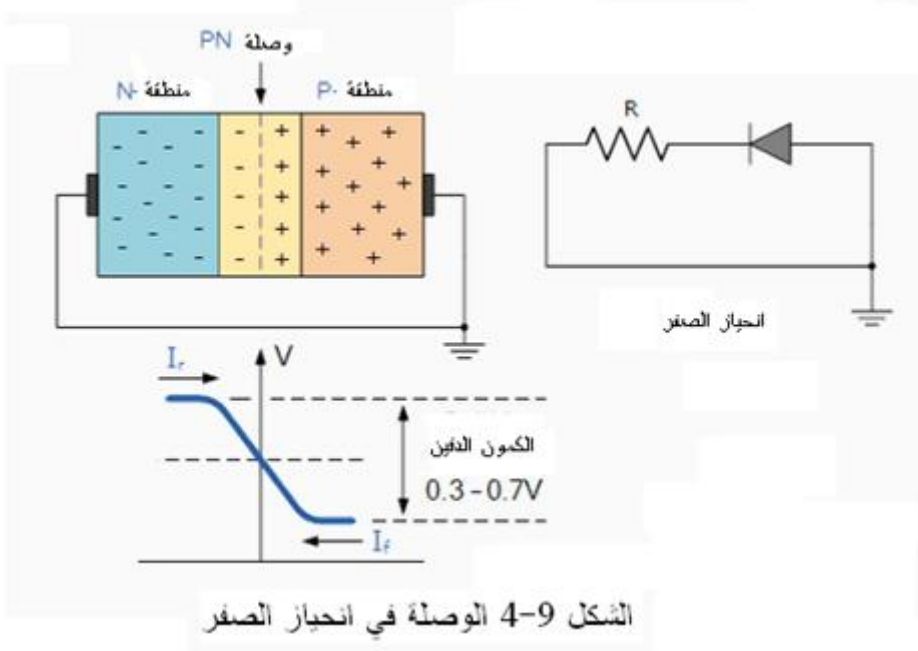
1-انحياز الصفر: لا توجد فلطيّة خارجية مطبقة على الوصلة p-n ، كما في الشكل 9-4.

2-انحياز عكسي: الفلطيّة الموصولة إلى الوصلة سالبة، وذلك بوصل قطب المنبع السالب إلى طرف النوع p ووصل قطب المنبع الموجب إلى طرف النوع n . تكون نتيجة هذا الانحياز زيادة عرض الوصلة p-n ، كما في الشكل 9-5.

3-انحياز أمامي: يوصل قطب المنبع الموجب إلى طرف النوع p من الوصلة، ويوصل قطبه السالب إلى الطرف من النوع n . وتكون النتيجة إنقاص عرض الوصلة p-n ، كما في الشكل 9-7.

9-4 الديوود في غياب الانحياز (بدون انحياز)

قد يُخيل للقارئ أننا إذا قصرنا طرفي الديود، أي إذا وصلنا ناقلاً إلى طرفي الوصلة السائبين، فإن تياراً سيجري في دائرة خارجية نظراً لوجود فرق الكمون V_0 بينهما. إلا أن هذا الافتراض غير صحيح؛ لأن كمون التماس بين الناقل الخارجي ونصف الناقل من النوع n في منطقة اتصالهما، يساوي ويعاكس فرق كمون التماس بين ذلك الناقل ونصف الناقل من النوع p في منطقة اتصالهما. وهكذا تكون النتيجة أن القوة المحركة الكهربائية الصافية في الدارة المغلقة تساوي الصفر، فلا يجري أي تيار في الدارة.



والحقيقة، أنه عندما يوضع الديود في شروط انحياز الصفر، كما في الشكل 4-9، لا توجد طاقة كامنة خارجية مطبقة على الوصلة n-p. إذا قصرنا طرفي الديود فإن بعض الثقوب في منطقة النوع p (حاملات الشحنة الأكثرية)، التي يكون لها طاقة كامنة كافية لتتغلب على حاجز الكمون، سوف تنتقل بالانتثار عبر الوصلة من المنطقة p إلى المنطقة n متسلقةً حاجز الكمون. يسمى التيار الناتج عن هذا

الانتقال تيار الثقوب الأكثرية. كما أن الثقوب المتولدة حرارياً في المنطقة من النوع n (حاملات الشحنة الأقلية) يمكنها أن تتساق عبر الوصلة من المنطقة n إلى المنطقة p تحت تأثير الحقل الكهربائي الدفين، وتشكل تياراً معاكساً هو تيار الثقوب الأقلية. ويحدث الشيء نفسه بالنسبة للإلكترونات الأكثرية في المنطقة n التي تنتشر إلى المنطقة p مشكلة تيار الإلكترونات الأكثرية والذي يعاكسه تيار الإلكترونات الأقلية في المنطقة p المنساقعة إلى المنطقة n تحت تأثير الحقل الكهربائي الدفين.

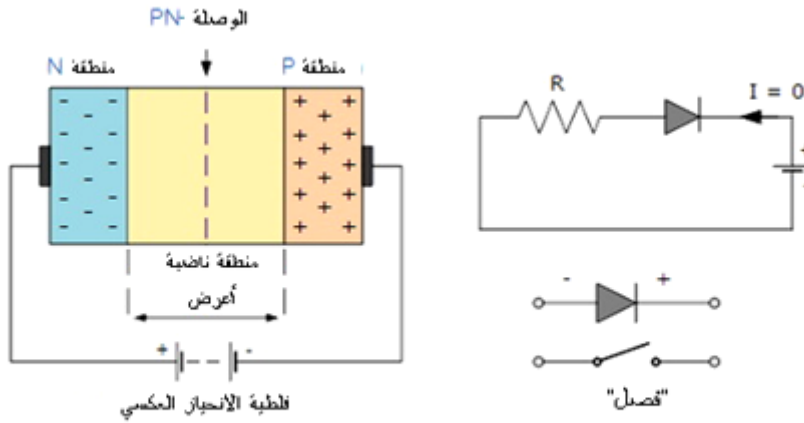
لكن وجود حاجز الكمون لا يشجع انتشار مزيد من حاملات الشحنة الأكثرية عبر الوصلة، بل على العكس فهو يساعد حاملات الشحنة الأقلية (قليل من الإلكترونات في المنطقة p وقليل من الثقوب في المنطقة n) كي تتساق عبر الوصلة. وبعدها يأخذ التوازن مجراه عندما يتساوى تيار حاملات الشحنة الأكثرية مع تيار حاملات الشحنة الأقلية لكل من الثقوب والإلكترونات، وعندها ينعدم تيار الإلكترونات كما ينعدم تيار الثقوب، وتكون محصلة التيار الذي يجري في الدارة معدومة. عندما يحدث هذا يقال عن الوصلة أنها في حالة توازن ديناميكي.

إن حاملات الشحنة الأقلية تتولد باستمرار، بفعل الطاقة الحرارية، لذا فإن هذه الحالة من التوازن يمكن أن تنهار بارتفاع درجة الحرارة الوصلة $p-n$ مما يؤدي إلى زيادة في توليد حاملات الشحنة الأقلية. وهذا بدوره يؤدي إلى زيادة في تيار التسرب، ولكن لا يمكن أن يسري تيار كهربائي لأنه لا توجد دارة متصلة بالوصلة $p-n$.

أما عند تطبيق انحياز أمامي على الوصلة فإن تيار الحاملات الأكثرية يزداد ويسمى عندئذ "التيار الأمامي" ويرمز له بالرمز I_F . وعند تطبيق انحياز عكسي يكون تيار الحاملات الأقلية هو المهيمن ويسمى عندئذ "التيار العكسي" ويرمز له بالرمز I_R .

9-5 الديوود الوصلي في الانحياز العكسي

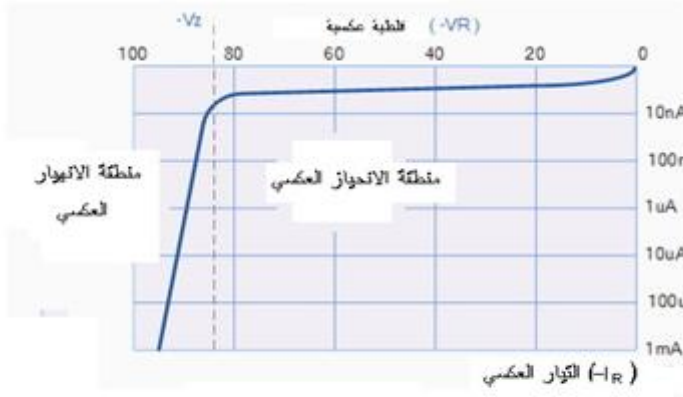
عند وضع الديوود في الانحياز العكسي، تطبق فلطية موجبة على منطقة النوع n وفلطية سالبة على منطقة النوع p ، الشكل 9-5. فالفلطية الموجبة على المادة من النوع n تجذب الإلكترونات نحو المربط الموجب بعيداً عن الوصلة، بينما تجذب الفلطية السالبة الثقوب في المنطقة p بعيداً عن الوصلة نحو المربط السالب. وتكون النتيجة اتساع المنطقة الناضبة نظراً لنقص الإلكترونات والثقوب وتتسأ ممانعة عالية ويكاد الديوود أن يصبح عازلاً. وتكون النتيجة تشكل حاجز كمون عالٍ يعمل على منع التيار من الجريان عبر المادة نصف الناقلة. يمثل هذا الوضع قيمة عالية لمقاومة الوصلة $p-n$ وتياراً شبه معدوم عملياً يجري عبر الديوود الوصلي مع ازدياد فلطية الانحياز العكسي، كما في الشكل 9-6. يسلك الديوود في هذا الوضع سلوك دائرة مفتوحة، وكأنه قاطعة في وضع "الفصل".



الشكل 9-5 الوصلة في الانحياز العكسي

لكن تياراً تسرباً صغيراً جداً يجري خلال الوصلة، تقدر قيمته بالمكروأمبير (μA). وأخيراً، إذا زيدت فلطية الانحياز العكسي V_R إلى قيمة عالية بما فيه

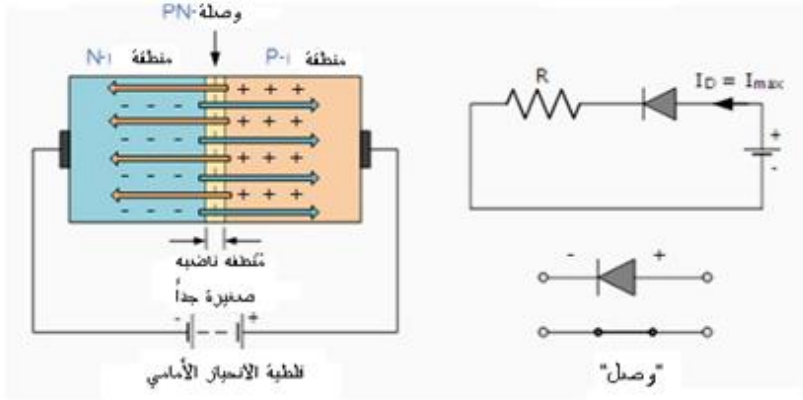
الكافية، فإنها سوف تؤدي إلى فرط تسخين الوصلة p-n وفشل يؤدي إلى مفعول التصدع والانهييار حول الوصلة قد يجعل من الديود دائرة قصيرة مؤدياً إلى جريان تيار أعظمي في الدارة يهبط إلى الأسفل هبوطاً درجياً حاداً يظهر على المنحني المميز السكوني كما في الشكل 9-6. تدعى هذه الظاهرة التصدع الانهياري. هذا ويمكن أن يكون لهذه الظاهرة في بعض الأحيان تطبيقات عملية في دارات تنظيم الفلطية وثبيتها.



الشكل 9-6 المنحني المميز للديود الوصل في الانحياز العكسي

9-6 الديود في الانحياز الأمامي أو المباشر

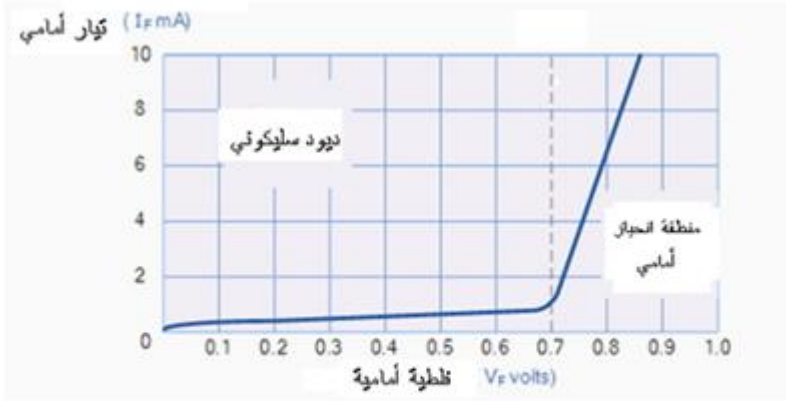
يوضع الديود في شروط الانحياز الأمامي بوصل فلطية المنبع السالبة إلى طرف مادة النوع n، وبوصل فلطية المنبع الموجبة إلى طرف مادة النوع p كما في الشكل 9-7. تتحرك الثقوب في المنطقة p عبر الوصلة إلى المنطقة n، كما تتحرك الإلكترونات في المنطقة n عبر الوصلة إلى المنطقة p. ويحدث أن تتحد حاملات الشحنة المتعاكسة في المنطقة الناضبة؛ فتؤدي إلى خفض حاجز الكمون عند الوصلة p-n كما رأينا.



الشكل 9-7 الوصلة في الانحياز الأمامي

مع زيادة فلطية الانحياز الأمامي فوق الصفر بضعة أعشار الفلطة، نلاحظ أنه لا يمر إلا تيار ضئيل في الديود. فإذا أصبحت الفلطة الخارجية المطبقة على الديود أكبر من فلطية حاجز كمون الديود، الذي يساوي 0.7 فلط من أجل ديود مصنوع من السليكون، و 0.3 فلط من أجل ديود مصنوع من الجرمانيوم، استطاعت حاملات الشحنة التغلب على حاجز الكمون وبدأ التيار بالجريان. يزداد هذا التيار سريعاً من أجل زيادات طفيفة في الفلطة. وهذا يؤدي إلى منحٍ مميز سكوني كالمبين في الشكل 9-8. يسلك الديود في هذا الوضع سلوك دائرة قصيرة وكأنه قاطعة في وضع "الوصل". وهكذا، ففي الانحياز الأمامي يجري تيار تسهم فيه كل من الإلكترونات والثقوب ويكون أكبر بكثير من التيار الذي يجري في مقاومة مصنوعة من نصف الناقل.

عندما يعمل الديود في شروط الانحياز الأمامي، يكون فرق الكمون الحقيقي بين طرفيه ضئيلاً جداً ويبقى ثابتاً بفعل الطبقة الناضبة. وفي هذه الحال تكون الممانعة التي يبديها الديود أمام التيار صغيرة جداً. وتتسبب المقاومة الداخلية للديود بصورة كلية إلى وجود حاجز الكمون؛ مع اعتمادها جزئياً على بلورة



الشكل 8-9 المنحني المسيز للديود الوصلي في الانحياز الأمامي

نصف الناقل. ولما كان باستطاعة الديود أن ينقل تياراً لا نهائياً بعد تجاوز فلتية انحياز حاجز الكمون، لذا يفضل وصل مقاومة على التسلسل مع الديود لتحديد شدة التيار. إن تجاوز قيمة التيار الأمامي الأعظمي المحددة من قبل الشركة الصانعة يؤدي إلى تبديد قدرة حرارية أكبر مما هو مصمم لتحملها، وتكون النتيجة فشلاً سريعاً في عمل الديود وتؤدي إلى تلفه.

7-9 المنحني المميز السكوني (I-V) للديود الوصلي p-n

يبين الشكل 9-3 منحنيًا مميزاً نموذجياً للديود وصلي p-n، يظهر عليه كل من التيار الأمامي والتيار العكسي بدلالة الفلتية. عندما تزداد الفلتية الأمامية من الصفر إلى بضعة أعشار الفلت تقريباً، فإن كلاً من حاملات الشحنة الأكثرية والأقلية تسهم في نقل التيار؛ لذا فالمنحني لا يكون خطياً. ومع زيادة الانحياز الأمامي المطبق على الديود، تصل حاملات الشحنة الأقلية إلى درجة الإشباع، ويصبح التيار بعدها عائداً إلى حركة حاملات الشحنة الأكثرية، لذا يكون خطياً إلى حد كبير ومحدوداً بمقاومة الدارة الخارجية.

وعندما يكون الديود في شروط الانحياز العكسي، يجري فيه تيار ضعيف تسهم فيه حاملات الشحنة الأقلية فقط، ويبقى هذا التيار العكسي ثابتاً تقريباً مع ازدياد الفلطية العكسية، ويسمى تيار الإشباع العكسي حتى تصل الفلطية العكسية إلى القيمة التي يحدث عندها الانهيار، فيزداد التيار فجأة إلى قيمة عالية جداً.

أما المعادلة التي تعطي قيمة التيار بدلالة الفلطية المطبقة فهي:

$$I = I_S \left(e^{\frac{eV}{kT}} - 1 \right) \quad (9 - 3)$$

حيث: I هو التيار الكلي للديود، I_S هو تيار الإشباع العكسي، V هي الفلطية المطبقة، T هي درجة الحرارة المطلقة، K هو ثابت بولتزمان، e هي شحنة الإلكترون.

ففي الانحياز الأمامي تؤخذ إشارة V موجبة فيزداد التيار الأمامي ازدياداً أسياً، وعندما يمكن إهمال الواحد في العلاقة السابقة؛ لأن $e^{eV/kT} \gg 1$ في هذه الحالة، وتعطى معادلة التيار الأمامي بالعلاقة:

$$I_F \cong I_S e^{eV/kT} \quad (9 - 4)$$

وفي الانحياز العكسي تؤخذ إشارة V سالبة، ويقترّب عندها الحد الأسّي من الصفر، إذ يصبح

$$e^{eV/kT} \ll 1$$

وينتهي التيار الكلي إلى تيار الإشباع. وتصبح معادلة التيار

العكسي:

$$I_R \cong I_S \quad (9 - 5)$$

إن تيار الإشباع العكسي I_S مستقل عن الفلطية V ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$I_S = AT^2 e^{-\left(\frac{E_g}{kT}\right)} \quad (9 - 6)$$

حيث A ثابت، و E_g فرجة الطاقة للمادة المصنوع منها الديود.

من البديهي أن تيار الإشباع العكسي موجود في شروط الانحياز الأمامي والعكسي على حد سواء؛ لذا فهو مستقل عن الانحياز.

إن المنحني المميز في الشكل 9-3 يدل على أن الديود الوصلي p-n يتمتع بخاصة تقويم التيار المتناوب. فهو لا يمرر أي قيمة معتبرة للتيار عندما تكون الفلظية المطبقة عليه في شروط الانحياز العكسي (أي سالبة)، بينما يسمح للتيار بالمرور بسهولة عندما تكون الفلظية المطبقة عليه في شروط الانحياز الأمامي (أي موجبة). فإذا كانت الفلظية المطبقة على الديود متناوبة، فإنه لا يسمح إلا بتمرير النوبة الموجبة التي تضعه في حالة الانحياز الأمامي.

9-8 الديود الوصلي في الدارات الكهربائية

لما كان الديود عنصراً لا خطياً، كما يشير إلى ذلك المنحني المميز I-V، فإن طرق تحليل أي دارة كهربائية يوجد بين عناصرها ديود وصلي يتطلب معرفة الدارة المكافئة لهذا الديود بدلالة عناصر دارة خطية. وعليه فإن طرق التحليل التي تكلمنا عليها في الفصول السابقة لا يصح استعمالها هنا؛ لأن الدارة غير خطية في هذه الحالة. إن تحليل الدارات الكهربائية التي تحتوي على عناصر لا خطية كالديودات، مثلاً، لمعرفة التيار الذي يجري في الديود والفلظية بين طرفيه، يمكن إنجازه بإحدى طريقتين: الطريقة الأولى: بيانية، والطريقة الثانية: هي إحدى الطرق السابقة بعد الاستعاضة عن الديود بدارته المكافئة.

9-8-1 الطريقة البيانية:

تتطلب الطريقة البيانية معرفة المنحني المميز للعنصر اللاخطي؛ أي تغيرات التيار I بدلالة الفلظية V ممثلة بيانياً. لكن المنحنيات المميزة للديودات، كتلك المرسومة في الشكل 9-3 غير متوفرة لكل أنواع الديودات المصنعة؛ لأن الشركات الصانعة لا تزود مثل تلك المعطيات بل تكتفي بتقديم نماذج تمثل الخواص الوسطية لديودات من صنف معين؛ لذا تبقى مسألة إيجاد المنحني المميز لديود ما من المهمات التي يجب أن يقوم بها من يحلل الدارة. كما يمكن رسم مثل هذه المنحنيات بيانياً إذا عرفت المعادلة التي تعطي تيار الديود بدلالة

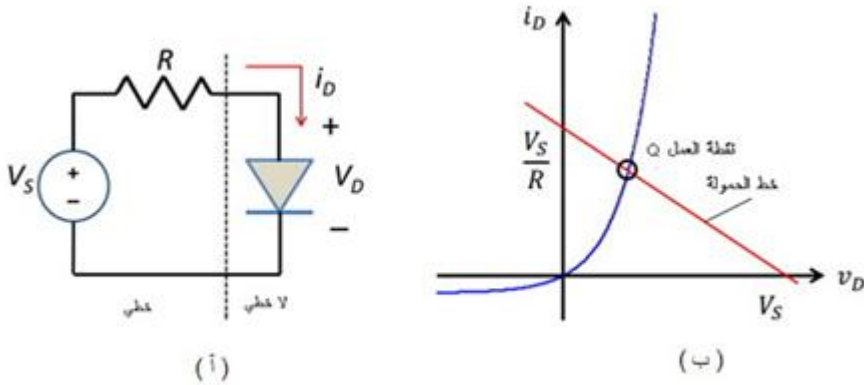
الفلطية المطبقة عليه. وبعد الحصول على المنحني المميز للديود بيانياً يجب إظهار خواص التيار بدلالة فلطية الدارة خارج الديود بصورة بيانية، وعلى الرسم نفسه الذي رسم عليه المنحني المميز. إن نقطة تقاطع المنحنيين المرسمين تمثل الحل الذي يعطي تيار الدارة والفلطية المطلوبين.

وكمثال على هذه الطريقة في التحليل نأخذ الدارة المبينة في الجزء (أ) من الشكل 9-9. تحتوي هذه الدارة على عنصر لا خطي هو الديود ومقاومة R موصولتان على التسلسل مع منبع توتر V_S . يظهر على الجزء (ب) من الشكل المنحني المميز $I-V$ للديود الموجود في الجزء (أ). نطبق على دارة الجزء (أ) قانون كرشوف في العروة، فنجد:

$$V_D = V_S - Ri_D$$

حيث V_D الفلطية بين طرفي الديود و i_D التيار الذي يجري فيه. إذا أعدنا كتابتها على الشكل:

$$i_D = \frac{V_S}{R} - \frac{V_D}{R}$$



الشكل 9-9

فإنها تمثل مستقيماً. فإذا رُسم هذا المستقيم على الشكل نفسه الذي رسم فيه المنحني المميز للديود (الجزء ب من الشكل) فإنهما يتقاطعان في نقطة تمثل إحداثياتها الفلطية بين طرفي الديود والتيار المار فيه، وهما المجهولان المطلوب

معرفتهما من تحليل الدارة. تسمى نقطة تقاطعهما نقطة العمل أو النقطة Q، كما يسمى هذا المستقيم خط الحمولة. يقطع هذا المستقيم محور التيار عند القيمة $\frac{V_S}{R}$ ، ويقطع محور الفلطية عند القيمة V_S ، وميله $-1/R$.
 يبدي الديود مقاومة ديناميكية تحسب من أجل أي فلطية V_D تطبق على الديود وتعطى بالعلاقة:

$$r_D = \frac{\Delta V_D}{\Delta i_D}$$

وتحسب القدرة المتبددة في الديود عند نقطة العمل بالعلاقة:

$$P_Q = V_Q \times i_Q$$

9-8-2 طريقة الدارة المكافئة للديود:

يمكن أن نستعمل دارة مكافئة للديود من أجل تحليله ولتصميم الدارات التي تحتوي على ديودات. من أجل ذلك يُمثل الديود بجملة من العناصر الخطية كالمقاومات والمكثفات والتحريضيات والمنابع وغيرها والتي يكون لها المميزات V-انفسها التي للديود تقريباً. إن استعمال الدارة المكافئة بدلاً من الديود يمكن من استعمال طرائق تحليل الدارة الخطية المعروفة لتعيين أداء الدارة بسهولة أيسر من استعمال الطرق اللاخطية. ومن أجل وضع دارة مكافئة للديود يجب تمثيله في تحليل الدارة بواسطة نموذج خطي يصف خواصه المميزة في مجال منطقة تشغيل التيارات والتوترات. وهناك نماذج عديدة مقترحة لتمثيل الديود في الدارة الكهربائية مبنية على تمثيل تقريبي للمنحني المميز له بخطوط مستقيمة في الانحياز الأمامي والعكسي. وسنعرض فيما يلي لأهم النماذج التقريبية المستعملة في تحليل الدارات المحتوية على ديودات.

9-9 نماذج الديود التقريبية

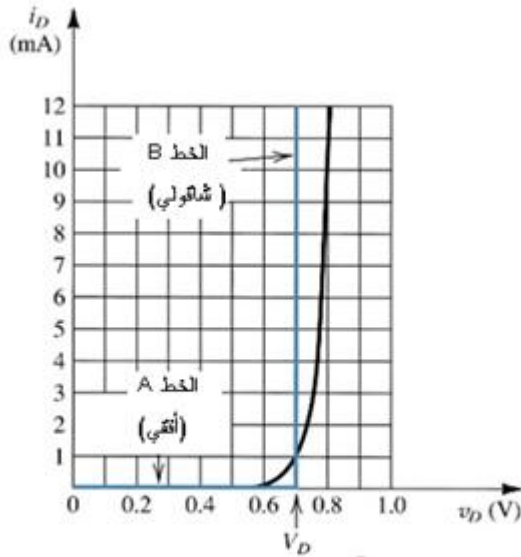
من أهم النماذج التقريبية للديود نموذجان يسمحان بتسهيل تحليل الدارات وتصميمها. النموذج الأول يدعى نموذج هبوط الفلطية الثابت، أما النموذج

التقريبي الثاني للديود فيدعى نموذج القطع الخطية.

9-9-1 نموذج هبوط الفلظية الثابت:

يمثل المنحني المميز للديود، وفق هذا النموذج، بخطين؛ إذ يعد التيار في الانحياز الأمامي معدوماً حتى تصل الفلظية المطبقة على الديود إلى قيمة حاجز الكمون V_b ، كما يمثل الجزء المنحني منه بخط صاعد شاقولياً.

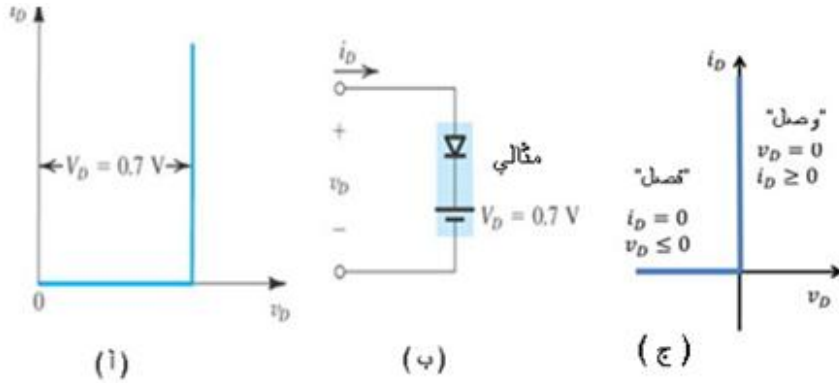
يبين الشكل 9-10 منحنيًا مميزًا تقريبياً لديود من السليكون في الانحياز الأمامي



الشكل 9-10

بخطين مستقيمين، الأول A أفقي على محور الفلظية (أي تيار معدوم)، والثاني شاقولي B يمثل بصورة تقريبية الصعود الأسّي للتيار الذي يبدأ من فلظية حاجز الكمون للديود. وإذا أردنا أن نعبر عن هذا الرسم بكلمات نقول: إذا كان الديود في الانحياز الأمامي، فإن الفلظية الهابطة بين طرفيه هي $V_D = V_b$. أما إذا لم يكن في الانحياز الأمامي فإنه يكون في الانحياز العكسي وعندئذ يكون التيار المار فيه معدوماً، ويمكن عندئذ أن تأخذ الفلظية V_D الهابطة بين طرفيه أي قيمة أصغر من V_b . إذا تبيننا هذا النموذج يمكن عندئذ رسم المنحني المميز للديود

في الانحياز الأمامي كما في الجزء (أ) من الشكل 9-11، كما يمكن تمثيل دارته المكافئة كما في الجزء (ب) من الشكل نفسه أي مؤلفة من ديود مثالي مقاومته الداخلية معدومة موصول على التسلسل مع منبع توتر قيمته 0.7 فلت من أجل السليكون.



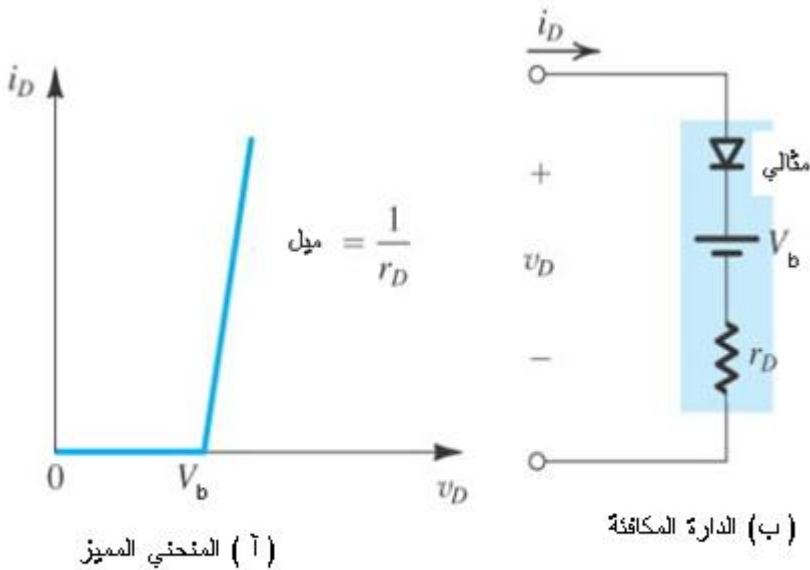
الشكل 9-11 نموذج هبوط الفلتية الثابت

تعني عبارة مثالي الموضوع على الرسم ديوداً هبوط الفلتية فيه معدوم وليس له مقاومة داخلية، والمنحني المميز المقرب له ممثل في الجزء (ج) من الشكل، وهذا يعني أن الديود يكون دائرة قصيرة (أي في حالة وصل) في الانحياز الأمامي ودائرة مفتوحة (أي في حالة فصل) في الانحياز العكسي.

9-9-2 نموذج القطع الخطية

وفق هذا النموذج يمثل المنحني المميز للديود في الانحياز الأمامي بقطعتين مستقيمتين، تنطبق الأولى على محور الفلتية (تيار معدوم) حتى فلتية حاجز الكمون تقريباً. أما القطعة الثانية فمستقيم مائل يبدأ من حيث تنتهي القطعة الأولى، ويعني ميله المحدود أن للديود مقاومة داخلية غير معدومة. وهذه هي المقاومة الديناميكية r_D في الانحياز الأمامي. إذا أردنا التعبير عن مدلول الرسم البياني نقول إن هذا النموذج يعني أنه إذا كان الديود في الانحياز الأمامي، فإن

الفلطية الهابطة بين طرفيه تكون مساوية $V_D = V_b$. أما إذا لم يكن في الانحياز الأمامي، فإنه يكون عندئذ في الانحياز العكسي ويكون التيار المار فيه صفراً ، ويمكن أن تأخذ V_D أي قيمة أصغر من V_b . يبين الجزء (أ) من الشكل 9-12 هذا النموذج الخطي للديود، كما يبين الجزء (ب) منه الدارة المكافئة للديود، وهي تتألف في هذا النموذج من ديود مثالي ومنبع توتر، تساوي قيمته فلطيةً حاجز الكمون V_b ، موصولة على التسلسل مع مقاومة الديود الديناميكية r_D . وهذا النموذج أفضل من النموذج السابق بتضمنه مستقيماً مائلاً تُستنتج المقاومة الداخلية للديود r_D من ميله لأن ميله يعطي مقلوب هذه المقاومة.

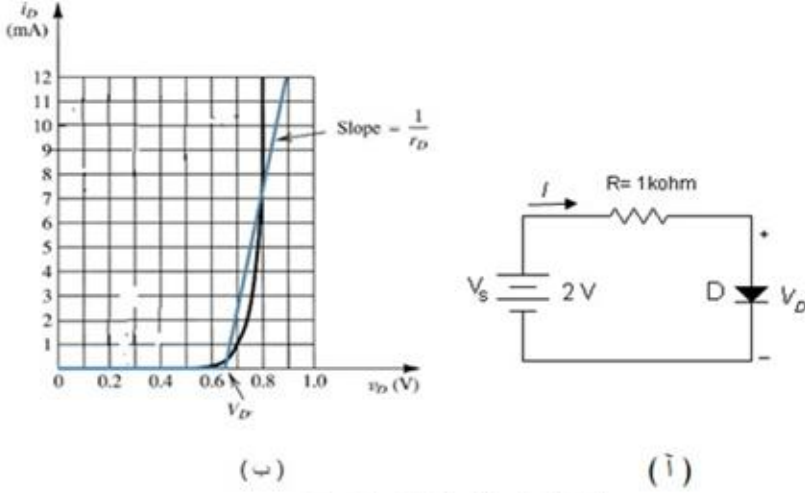


الشكل 9-12 النموذج الخطي للديود

9-10 أمثلة على استعمال نماذج الديود

مثال 1- نموذج هبوط الكمون الثابت:

عَيِّن التيار I في الدارة المبينة في الجزء (أ) من الشكل 9-13 مستعملًا نموذج هبوط الفلطيّة الثابت المبين في الجزء (ب) من الشكل 9-11، علماً بأنّ الديود المستعمل هو من السليكون. كيف يصبح الجواب لو كان $V_S = 0.5 \text{ V}$ ؟



الشكل 9-13 المثالان 1 و 2

الحل:

إذا استعملنا نموذج هبوط الفلطيّة الثابت فإن الدارة التقريبية المكافئة تصبح كالدارة المبينة في الشكل 9-14. إذا فرضنا أن الديود في الانحياز الأمام (أي في حالة وصل) بحيث يكون $V_D = 0.7 \text{ V}$ واستعملنا قانون كرشوف في العروة على دارة الشكل 9-14 نجد:

$$2 - IR - V_D = 0 \quad \text{أو}$$

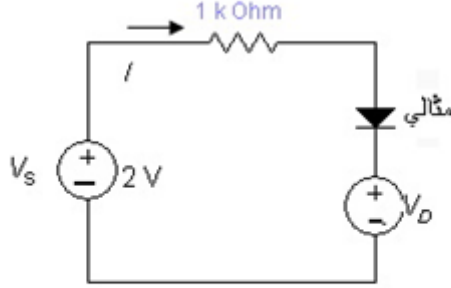
$$I = \frac{2 - V_D}{R} = \frac{2 - 0.7}{1000} = 1.3 \text{ mA}$$

إن الإشارة الموجبة لهذا التيار تشير إلى أن الفرضية الأولية التي وضعناها في البدء بأن الديود في حالة "وصل" (أي هو في الانحياز الأمامي) صحيحة.

والآن، إذا كان $V_S = 0.5 \text{ V}$ فإن قانون كرشوف يعطي:

$$I = \frac{0.5 - V_D}{R} = \frac{0.5 - 0.7}{1000} = -0.2 \text{ mA}$$

ولما كان التيار سالباً في هذه الحالة، فإن الديود يجب أن يكون في الانحياز العكسي. وهذا يعني أن فرضيتنا الأولى بأن النقل أمامي كانت خاطئة. والبديل عن ذلك في هذه الحالة أن نضع $I = 0$ و $V_S = 0.5 \text{ V}$.



الشكل 9-14 ، المثال 1

مثال 2 النموذج الخطي:

عين التيار/في الدارة المبينة في الجزء (أ) من الشكل 9-13 مستعملاً النموذج الخطي للديود المبين في الجزء (ب) من الشكل نفسه. احسب كذلك هبوط الفلطية الأمامية بين طرفي الديود، ماذا تستنتج؟

الحل

يمكن تعيين V_D و r_D من الجزء (ب) من الشكل 9-13 الذي يمثل المنحني

المميز للديود. بالرجوع إلى الجزء (ب) من الشكل نجد: $V_D = 0.65 \text{ V}$

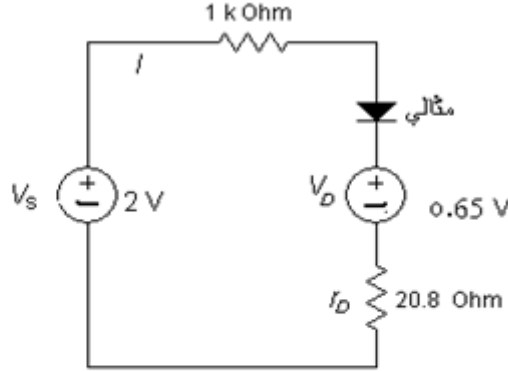
ونحسب قيمة r_D من مقلوب ميل المستقيم فنجد:

$$r_D = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{0.9 - 0.65}{12 \times 10^{-3}} = 20.8 \Omega$$

وتكون الدارة المكافئة بموجب هذا النموذج هي المبينة في الشكل 9-15. إذا فرضنا أن الديود في حالة " وصل "، فبتطبيق قانون كرشوف في العروة على هذه الدارة نجد:

$$2 - I \times 1000 - 0.65 - 20.8 \times I = 0$$

التي نحسب منها شدة التيار I ، فنجد: $I = 1.32 \text{ mA}$.
وهذه القيمة للتيار قريبة جداً من القيمة 1.3 mA التي وجدناها من تطبيق نموذج هبوط الفلظية الثابت.



الشكل 9-15 ، مثال 2

ومرة ثانية نقول: إن القيمة الموجبة لهذا التيار تشير إلى صحة ما فرضناه بأن
الديود في حالة " وصل ".
لنحسب الآن هبوط الفلظية الأمامية بين طرفي الديود. من قانون كرشوف في
العروة نجد:

$$V_D = 2 - 1000 \times 1.321 \times 10^{-3} = 0.68 \text{ V}$$

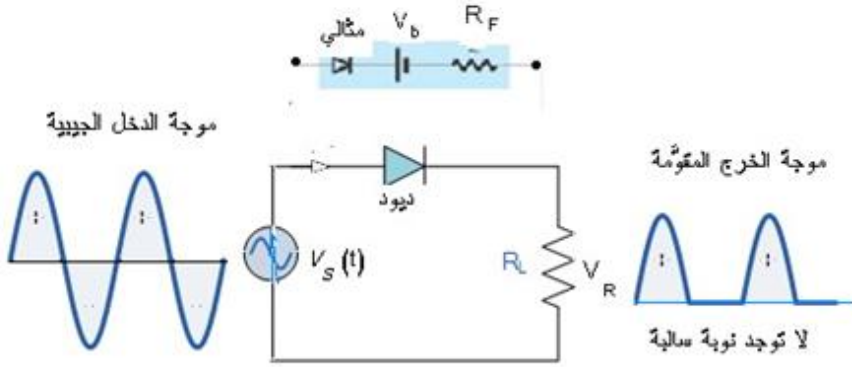
ولما كانت قيمة V_D موجبة فهذا يعني أن الديود في حالة " وصل ". وبالرجوع إلى
الدارة المكافئة في الشكل 9-15 نجد:

$$V_{\text{مثالي}} = V_D - 0.65 - 20.8 \times 1.32 \times 10^{-3} = 0.0025 \approx 0^+$$

وبالفعل فإن انحياز الديود المثالي تجاوز الصفر بقيمة موجبة فهو في حالة نقل.

9-11 تقويم التيار المتناوب

إذاً نعمنا النظر في النموذج الخطي للديود، وهو النموذج الذي دارته المكافئة ممثلة في الجزء (ب) من الشكل 9-12 ومنحنيه المميز في الجزء (أ) منه، نجد أن الديود لا يمرر التيار إلا عندما تكون الفلطيّة المطبقة عليه موجبة وأكبر من فلطيّة حاجز الكمون V_b . إذا تجاوزت الفلطيّة الأمامية المطبقة على الديود هذه القيمة فإن التيار الأمامي يصبح محدوداً بالمقاومة R_F . إذا كانت الفلطيّة المطبقة على الديود متناوبة، فإن التيار سوف يمر في نصف النوبة الموجب فقط. وهذا يعني أن الديود قد قوّم التيار، أي وحدّ جهته. سنستعمل هذا النموذج لوصف عمل الديود كمقوم للتيار المتناوب.



الشكل 9-16 دائرة تقويم نصف موجة

كي نوضح عمل الديود كمقوم، ننظر في دائرة الشكل 9-16 التي تسمى دائرة تقويم نصف موجة. تتألف هذه الدائرة من ديود وصلي D ، موصول على التسلسل مع مقاومة حمولة R_L ومنبع توتر متناوب $v_S(t)$. يظهر على الشكل الدائرة المكافئة للديود D مرسومة فوقه، وهي كما في الجزء (ب) من الشكل 9-12. يظهر على الشكل أيضاً موجة فلطيّة الدخل الجيبية وموجة فلطيّة الخرج المقومة $v_R(t)$ التي تتشكل بين طرفي مقاومة الحمولة R_L .

نفرض أن منبع التغذية يعطي توتراً جيبياً من الشكل:

$$v_s(t) = V_S \sin \omega t$$

عندما يصبح $V_S > V_b$ ينقل الديود تياراً I_D في نصف النوبة الموجبة، تحسب قيمته من العلاقة:

$$i_D = \frac{v_s(t) - V_b}{R_F + R_L}$$

فمأجل $v_s(t) > V_b$ ينشأ بين طرفي مقاومة الحمولة توتر تعطي قيمته من العلاقة:

$$v_R(t) = R_L i_D(t) = \frac{R_L}{R_F + R_L} [v_s(t) - V_b]$$

أما من أجل $v_s(t) < V_b$ فإن $v_R(t) = 0$

إذا كان $V_S \gg V_b$ فإن $v_R(t)$ يعطى بتقريب جيد بالعلاقة:

$$v_R(t) = \frac{R_L}{R_F + R_L} V_S \sin \omega t$$

وذلك خلال نصف النوبة الموجب لفلطية الدخل. أي إن $v_R(t)$ يجب أن يكون مساوياً $v_s(t)$ تقريباً؛ لأن $R_F \ll R_L$. ولما كانت حمولة الدارة مقاومة صرفاً، فإن التيار الذي يجري فيها يكون متناسباً مع الفلطية بين طرفي مقاومة الحمولة R_L . أما خلال نصف النوبة السالب لفلطية الدخل المتتابة فسيكون الديود في الانحياز العكسي ولا يجري فيه أي تيار؛ لذا تكون الفلطية صفراً بين طرفي الحمولة R_L .

تعطى موجة التيار خلال نصف الموجة الموجب بالعلاقة:

$$i_D(t) = \frac{V_S}{R_F + R_L} \sin \omega t = I_D \sin \omega t$$

وهو مقدار متغير مع الزمن وفق دالة جيبية، ولكنه موجب دوماً (أي وحيد الجهة) لأنه موجود خلال نصف الدور الذي يكون فيه التيار موجباً. لذلك يكون لهذا التيار قيمة وسطية \bar{I}_F يقيسها مقياس الأمبير المستمر (DC)، وتحسب من العلاقة:

$$\bar{I}_F = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi i_F(t) dt = \frac{1}{2\pi} \frac{V_S}{R_F + R_L} \int_0^\pi \sin \omega t d(\omega t)$$

بإجراء التكامل نجد:

$$\bar{I}_F = \frac{V_S}{\pi(R_F + R_L)} = \frac{I_D}{\pi} = 0.318I_D$$

وتعطي الفلطية الوسطية بين طرفي الحمولة بالعلاقة :

$$\bar{V}_R = \frac{R_L}{\pi(R_F + R_L)} V_S$$

وبفرض $R_F \ll R_L$ ، وهو محقق دوماً، تصبح الفلطية الوسطية بين طرفي الحمولة:

$$\bar{V}_R = \frac{V_S}{\pi} = 0.318V_S$$

هذا، ويمكن قياس القيمة المنتجة أو قيمة الجذر التربيعي لمتوسط مربعات التيار أو التوتر (أي القيمة rms) بواسطة مقياس أمبير أو مقياس فلت متناوب (AC) .
نحصل على قيمة التيار المنتجة I_{rms} في الانحياز الأمامي من العلاقة:

$$I_{rms} = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi I_D^2 \sin^2(\omega t) d(\omega t) \right]^{1/2}$$

وبإجراء عملية الاستكمال والجذر نجد:

$$I_{rms} = \frac{1}{2} I_D$$

وبالمثل نحسب الفلطية المنتجة V_{Rrms} بين طرفي الحمولة R_L ونحصل على:

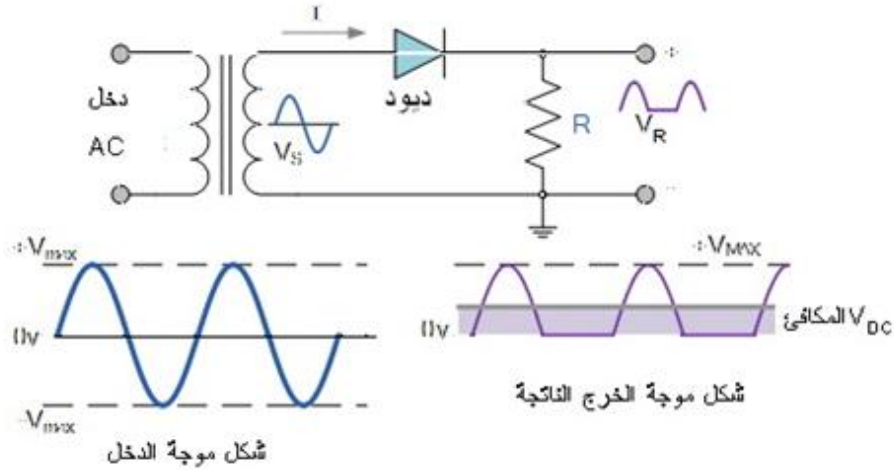
$$V_{Rrms} = \frac{1}{2} V_S$$

يمكن استعمال الديودات منفردة، كما في الشكل 9-16 ، كما يمكن وصلها معاً لتشكيل دارات لمقومات متنوعة كدارات تقويم نصف موجة، أو موجة كاملة أو على هيئة جسر .

9-12 تقويم نصف موجة

المقوم دائرة تحول التيار المتناوب (AC) إلى تيار مستمر (DC) يظهر في خرجها. تؤخذ فلطية دخل المقوم عادة من محولة خافضة أو رافعة للفلطية. تعد

دارة مقوم نصف الموجة من أبسط دارات التقويم على الإطلاق. يبين الشكل 9-17 دارة لمقوم نصف موجة، وتظهر على الشكل أيضاً موجة فلتية الدخل الجيبية وفلتية الخرج المقومة.

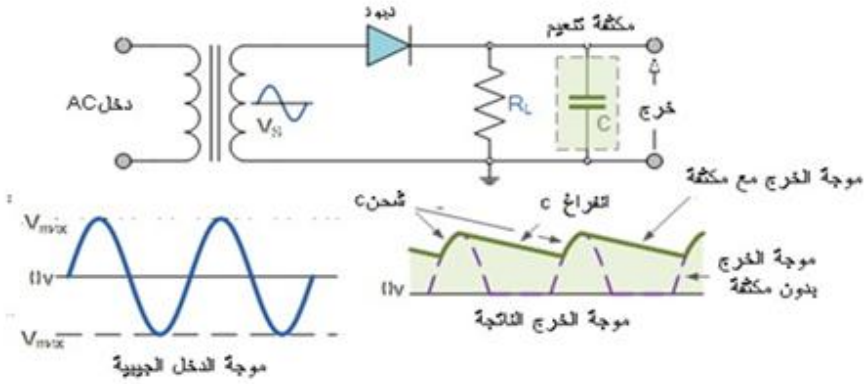


الشكل 9-17 مقوم نصف موجة

إن تقويم نصف موجة ينتج عنه فلتية خرج وتيار خرج تتغيران بصورة متناوبة بين الصفر وقيمة عظمى موجبة، كما أنه لا يستفاد إلا من نصف الموجة، ورغم أن موجة الخرج مستمرة إلا أن فيها تجعدات أو تموجات غير مرغوبة تتكرر بتواتر موجة الدخل الجيبية نفسها بسبب انتقال الديود بين وضعين وصلو فصل.

وفي أغلب الأحيان نرغب أن ينتج عن التقويم تيار مستمر " ثابت " القيمة وخالٍ من أية تموجات. يمكن تحقيق ذلك بوصل مكثفة كبيرة بين طرفي خرج الفلتية على التوازي مع مقاومة الحمولة R_L كما هو مبين في الشكل 9-18. تُشحن المكثفة في نصف الموجة الموجب ثم تنفرد في أثناء النصف السالب من الموجة

الجيبية ، وبذلك تقل التعرجات في موجة الخرج المقوّمة وتصبح أكثر نعومة، كما يظهر على الشكل 9-18.

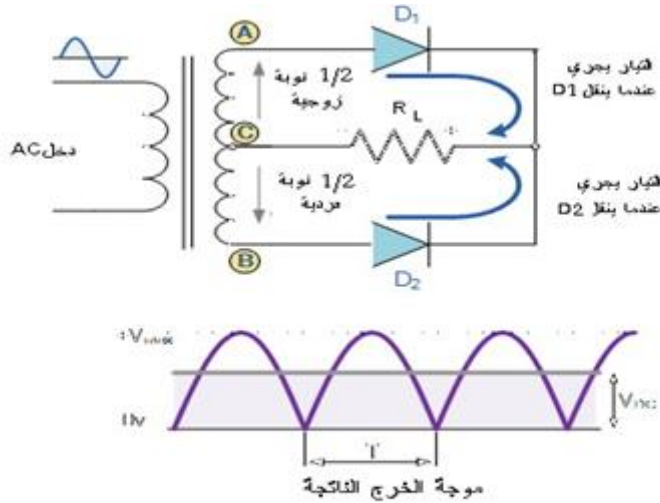


الشكل 9-18 مقوم نصف موجة مع مكثفة تنعيم

إن تنعيم موجة الخرج وتقليل التموجات باستعمال مكثفة كبيرة في دائرة تقويم نصف موجة ليس عملياً؛ لأن التكلفة والحجم يضعان حداً لذلك. فمن أجل الحصول على تيار خرج كبير بوجود مكثفة بقيمة معينة يجب أن تكون مقاومة الحمولة صغيرة، وهذا يجعل الثابتة الزمنية للدائرة صغيرة؛ الأمر الذي يؤدي إلى تفريغ أسرع للمكثفة، ومن ثم زيادة التموجات في موجة الخرج. إن الحل الأفضل للحصول على التنعيم الأمثل يكون باستعمال تقويم كامل الموجة. يستعمل تقويم نصف الموجة، في تطبيقات القدرة المنخفضة نظراً لمساوئه الكثيرة. ففي هذا النوع من التقويم تكون سعة الخرج أصغر من سعة الدخل، كما أن الخرج أقرب ما يكون إلى تيار مستمر نبضي. لهذه الأسباب وغيرها وللتغلب على هذه المساوئ توصل عدة ديودات معاً لتشكّل مقوماً لموجة كاملة.

9-13 مقوم الموجة الكاملة

يستعمل مقوم الموجة الكاملة للتغلب على مساوئ مقوم نصف الموجة. يمكن تحقيق ذلك بجعل التيار يمر عبر ديود في كلا نصفي النوبة لموجة فلطية الدخل بدلاً من مروره في نصف النوبة الموجب فقط. تسمى الدارة التي تسمح بذلك مقوم موجة كاملة. وكما هو الحال في دائرة تقويم نصف موجة، فإن دائرة مقوم الموجة الكاملة تولد فلطية خرج أو تيار خرج مستمر تماماً أو تكون قريبة جداً من DC الصرف. إن لمقومات الموجة الكاملة بعض الميزات على مقومات نصف الموجة. فالقيمة الوسطى لفلطية الخرج تكون فيها أعلى مما هي في مقومات نصف الموجة، كما أن التموجات فيها أقل بكثير من مثيلاتها في مقومات نصف الموجة، فينتج عن ذلك موجة خرج ناعمة.



الشكل 9-19 دائرة مقوم موجة كاملة

يستعمل في مقومات الموجة الكاملة، كما في الشكل 9-19، ديودان، واحد لكل نصف نوبة. كما تستعمل محولة متعددة الملفات، تكون فيها الثانوية مقسومة

بالتساوي إلى نصفين بواسطة وصلة مركزية مشتركة C تبرز عند منتصفها. يؤدي هذا الترتيب إلى جعل كل ديود ينقل بدوره عندما يصبح طرف الأنود (المصعد) فيه موجباً بالنسبة إلى مركز المحولة C ، فيولد خرجاً في نصفي النوبة؛ أي إن الخرج في هذه الحالة يصبح ضعف ما كان عليه في حالة مقوم نصف موجة، ويصبح المقوم أكثر فعالية إذ تصل فعاليته إلى 100% كما تشير موجة الخرج المرسومة تحت دارة المقوم في الشكل 9-19.

تتألف دارة مقوم الموجة الكاملة من ديودين موصولين إلى مقاومة حمولة واحدة R_L بحيث يمر تيار كل ديود خلالها عندما يكون في الانحياز الأمامي. عندما تكون النقطة A من المحولة موجبة بالنسبة للنقطة المركزية C ، فإن الديود D_1 ينقل تياراً في الاتجاه الأمامي، كما هو مبين بالأسهم على الشكل. وعندما تكون النقطة B موجبة (في النصف السالب من النوبة) بالنسبة إلى النقطة C ، فإن الديود D_2 ينقل تياراً في الاتجاه الأمامي ويكون التيار الجاري في مقاومة الحمولة في جهة واحدة في نصفي النوبة. كما يمتلئ الفراغ الذي كان موجوداً بين نصفي الموجة الموجبتين؛ لأن أحد الديودين ينقل التيار في نصف الموجة السالب، وبذلك فإن متوسط خرج الفلطية المستمر V_{dc} بين طرفي المقاومة يصبح ضعف ما كان عليه في مقوم نصف الموجة ويصبح مساوياً $0.637 V_{max}$.

وبفرض عدم وجود ضياع نكتب:

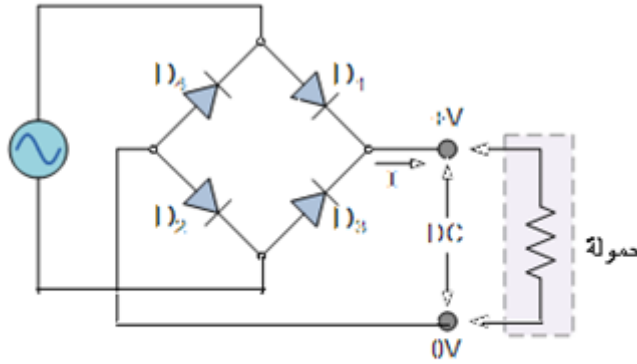
$$V_{dc} = \frac{2V_{max}}{\pi} = 0.637V_{max} = 0.9V_{rms}$$

حيث V_{max} هو قيمة سعة الفلطية (القيمة العظمى) التي يعطيها نصف ملف الثانوية، و V_{rms} هو القيمة المنتجة أو قيمة الجذر التربيعي لمتوسط مربعات الفلطية بين طرفي نصف ملف الثانوية.

إن فلتية الذروة لموجة الخرج هي نفسها كما كانت في حالة مقوم نصف موجة شريطة أن يكون ملفاً نصفياً الثانوية لهما القيمة المنتجة rms نفسها .

9-14 مقوم الموجة الكاملة الجسري

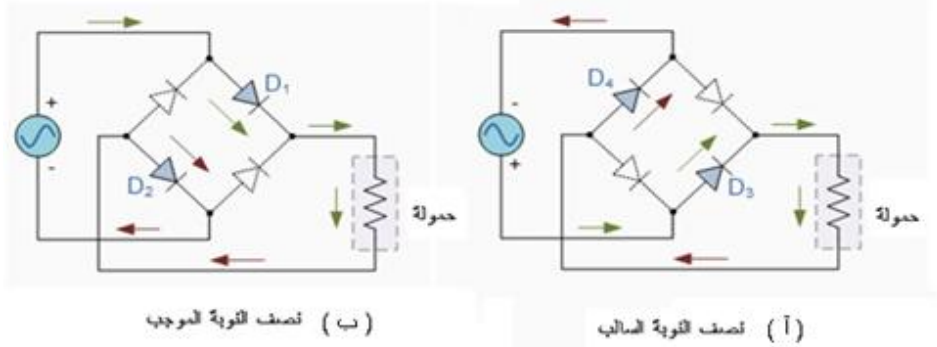
إن مقوم الموجة الجسري نوع آخر من الدارات التي تنتج موجة الخرج نفسها التي تنتجها دارة مقوم الموجة الكاملة المذكورة أعلاه. يستعمل هذا النوع من المقومات أربعة ديودات موصولة على هيئة "جسر" في حلقة مغلقة لينتج عنها الخرج المطلوب. من محاسن الدارة الجسرية أنها لا تتطلب محولة ذات مأخذ مركزي، وبذلك يقل حجمها وتخفض تكلفتها. توصل لفات الثانوية بأحد طرفي الشبكة الجسرية للديودات وتوصل مقاومة الحمولة بالطرف الآخر كما هو مبين في الشكل 9-20.



الشكل 9-20 دارة مقوم بجسر الديودات

ترتّب الديودات الأربعة المشار إليها بـ D_1 إلى D_4 على هيئة أزواج متسلسلة بحيث لا ينقل التيار إلا ديود واحد فقط من الديودين خلال كل نصف نوبة. في أثناء نصف النوبة الموجب لمنبع التغذية المتناوب، ينقل الديودان D_1 و D_2 على التسلسل في حين يكون الديودان D_3 و D_4 في انحياز عكسي، ويكون التيار

الجاري في الحمولة كما هو مبين في الجزء (ب) من الشكل 9-21. وفي أثناء نصف النوبة السالب لمنبع التغذية المتناوب ينقل الديودان D_3 و D_4 على التسلسل، بينما يكون الديودان D_1 و D_2 في الانحياز العكسي فلا يمر فيهما تيار. ويكون التيار الجاري في الحمولة، كما هو مبين في الجزء (أ) من الشكل 9-21



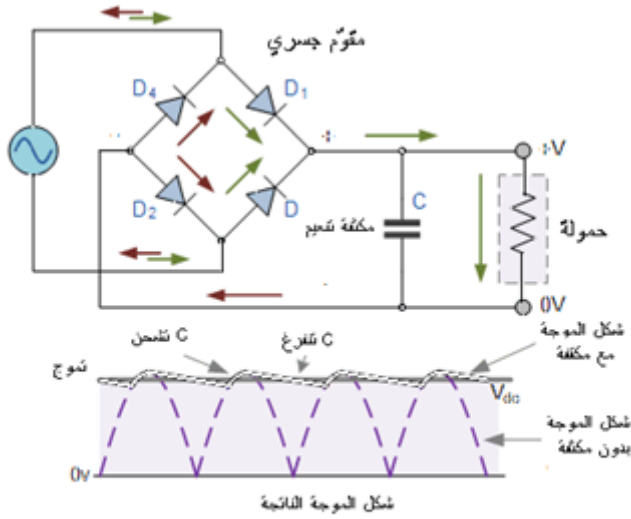
الشكل 9-21 عملية التقيوم في جسر الديودات

ولما كان التيار الجاري في الحمولة وحيد الجهة، فإن الفلظية المشككلة بين طرفي الحمولة تكون أيضاً وحيدة الجهة كما في الحالة السابقة لمقوم الموجة الكاملة بالديودين؛ لذا فإن متوسط الفلظية المستمرة بين طرفي الحمولة يساوي $0.637 V_{max}$. لكن ما يحدث في الواقع هو أن التيار يجري في كل نصف نوبة في ديودين بدلاً من ديود واحد فقط؛ لذا فإن سعة فلظية الخرج تنقص عن V_{max} بمقدار ضعف حاجز الفلظية للديود المستعمل، أي بمقدار $2 \times 0.7 = 1.4 V$ من أجل ديودات من السليكون. ويكون تواتر التموجات في هذه الحالة مساوياً ضعف تواتر منبع التغذية، أي 100 هرتز من أجل تغذية بتواتر 50 هرتز.

يبين الشكل 9-22 مقوم موجة كاملة جسري وضع في خرجه مكثفة تعميم. إن مكثفة التعميم تقلب خرج الموجة المقومة إلى خرج فلظية مستمر وناعم. وعلى العموم فإن دارات منابع التغذية المستمرة DC تستعمل مكثفات تعميم قيمتها

100 μF أو أكثر. إن فلطية التعرجات العظمى الموجودة في دارة مقوم موجة كاملة لا تتعين فقط بقيمة مكثفة التنعيم مقدره بالفاراد C، ولكن أيضاً بتواتر للتموجات f مقدرًا بالهرتز وبتيار الحموله I_L مقدرًا بالأمبير، وتعطى بالعلاقة:

$$V_{ripple} = \frac{I_L}{fC} \text{ volts}$$



الشكل 9-22 تقويم موجة كاملة مع مكثفة تنعيم

مسائل على الفصل التاسع

9-1 إذا كانت كثافة تيار الإشباع في وصلة p-n من نصف ناقل تساوي 25 $\mu\text{A}/\text{cm}^2$ في الدرجة 300°K ، احسب الفلطيية التي يجب تطبيقها على هذه الوصلة لتعطي تياراً أمامياً (مباشراً) كثافته $5 \text{ A}/\text{cm}^2$.

9-2 ديود وصلي من الجرمانيوم، يساوي تيار الإشباع فيه $10 \mu\text{A}$ في الدرجة 300°K . احسب تيار الإشباع لهذا الديود في الدرجة 400°K . افرض أن $E_g = 0.7 \text{ eV}$ للجرمانيوم.

9-3 أعد المسألة السابقة من أجل ديود من السليكون الذي يعطي تيار إشباع قدره $0.01 \mu\text{A}$ في الدرجة 300°K . افرض أن $E_g = 1.2 \text{ eV}$ للسليكون.

9-4 لدى تطبيق انحياز عكسي على ديود وصلي، يمر تيار قدره $1 \mu\text{A}$. احسب التيار الأمامي التقريبي عندما يطبق انحياز أمامي قدره 0.1 V على الديود. إذا كان للديود مقاومة داخلية تساوي 1Ω ، ما هي قيمة الفلطيية اللازم تطبيقها على اليود في الدرجة $T = 300^\circ\text{K}$ للحصول على فرق في الكمون بين طرفيه $V_D = 0.1 \text{ V}$ ؟

9-5 ديود وصلي من الجرمانيوم مطبق عليه انحياز أمامي 0.2 V . احسب التيار المار فيه آ- في درجة حرارة الغرفة (300°K). ب- في الدرجة 400°K .

9-6 أعد المسألة 9-5 من أجل ديود من السليكون.

الفصل العاشر

الترانزستورات الوصلية

1-10 مقدمة

في حديثنا عن الديودات الوصلية، في الفصل التاسع، قلنا: إن الديود الوصلي مكون من قطعتين من مادة نصف ناقلة كالسليكون أو الجرمانيوم إحداها من النوع n والأخرى من النوع p متصلتين معاً وتشكلان الوصلة $p-n$ أو ما يعرف بالديود الوصلي. وذكرنا أيضاً أنه إذا أُضيف لهذه الوصلة قطعة ثالثة من نصف الناقل نفسه ومن النوع n أو p حصلنا على الترانزستور الوصلي. فالترانزستور يبدو وكأنه مكون من ثلاث طبقات ووصلتين متسلسلتين بحيث تكون القطعة المشتركة من نوع مغاير لنوع القطعتين الطرفيتين. فإذا كانت القطعة المشتركة من النوع n حصلنا على الترانزستور الوصلي $p-n-p$ ، وإذا كانت القطعة المشتركة من النوع p حصلنا على الترانزستور الوصلي $n-p-n$. ولا بد من الإشارة هنا إلى أن الاتصال بين الطبقات الثلاث ليس اتصالاً ميكانيكياً ولا بالالتحام بل يحدث إما بإنماء طبقة فوق أخرى أثناء صناعة بلورة نصف الناقل، أو بعملية انتثار مقصودة لشوائب معينة في نصف ناقل فتقلبه من النوع n إلى النوع p أو بالعكس.

إن اكتشاف خاصية تضخيم التيار في أنصاف النواقل عام 1948 على يد العالمين باردين و براتين في مختبرات "تلفون بل" كان إشارة البدء لصنع أول جهاز إلكتروني يضخم التيار كما يفعل تماماً الأنبوب الإلكتروني ثلاثي المساري المخلّي. وقد اختارا لاكتشافهما اسم ترانزستور transistor المنحوتة من الكلمتين: الأولى transfer وتعني انتقال، والثانية resistor وتعني مقاومة، وذلك بحذف fer من أواخر الأولى و res من أوائل الثانية. وقد أطلقا هذا الاسم

على جهازهما المكتشف؛ لأنه كان قادراً على التحكم بالمقاومة الداخلية للنبیطة (الجهاز) ثلاثية الأطراف الجديدة. وبالفعل فإن الترانزستور يتحكم في التيار الذي يجري في دارة أولى بواسطة التيار الذي يجري في دارة ثانية، وتلك هي الميزة الأساسية للترانزستور.

ومنذ اكتشاف الترانزستور والأبحاث الحثیثة والجادة لتطویره وتحسينه على مستوى الصناعات الإلكترونية. ونظراً لصغر حجم النبائط الإلكترونية المصنوعة من أنصاف النواقل، فإنها تتجزأ اليوم أعمالاً عظيمة لم يكن بالإمكان القيام بها إلا باستعمال أحجام كبيرة جداً من الأجهزة الأخرى التي كانت تعمل على الأنابيب الإلكترونية المخلاة. يضاف إلى ذلك حسن أداء الأجهزة المصنوعة من أنصاف النواقل وسهولة استعمالها.

ومما لا شك فيه أن الترانزستورات تتمتع بميزات وفوائد كثيرة تجعلها تتفوق على مثيلاتها من الأنابيب الإلكترونية وتحل محلها. نذكر فيما يلي بعضاً من هذه الميزات على سبيل المثال:

- 1- لا يتطلب تشغيل الترانزستورات سوى توترات منخفضة (عدة فلفات فقط).
- 2- لا تستهلك الترانزستورات سوى طاقة ضئيلة، وهذا يجعل مردودها عالياً.
- 3- يمكن أن تعمل الترانزستورات في أية لحظة؛ لأنها لا تتطلب تسخيناً قبل التشغيل كما الحال في الأنابيب الإلكترونية. والحقیقة أنها تعمل في درجة الحرارة العادية بكفاية أفضل من عمل الأنابيب الإلكترونية في درجات حرارة عالية.
- 4- تُعمر الترانزستورات طويلاً، ولا توجد تأثيرات زمنية على عملها عندما تعمل في مجالات التشغيل الصحيحة وفي الشروط المحددة.
- 5- تقاوم الصدمات والاهتزازات من دون أن تتضرر من ذلك.
- 6- تؤمن المرونة واليسر في تصميم الدارات الكهربائية وفي اندماجها في التركيب الميكانيكي بسبب قابليتها للتركيب في أي توجيه فيزيائي.

يتناول هذا الفصل وصفاً للبنية الفيزيائية والمميزات الكهربائية وطرق تشغيل الترانزستور الوصلي.

10-2 أنواع الترانزستورات

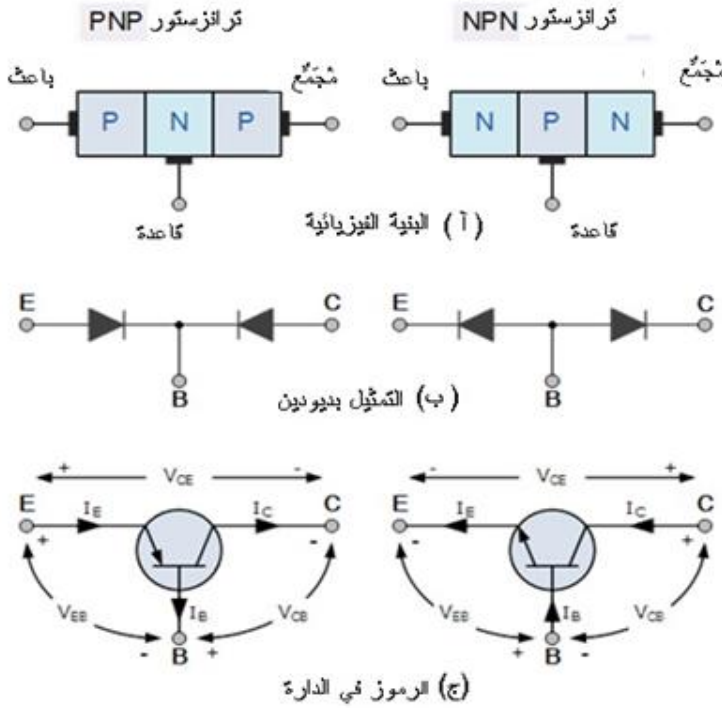
يمكن تصنيف الترانزستورات إلى صنفين:

الصنف الأول يعمل بفعل حاملات الشحنة من النوعين الأكثرية والأقلية معاً، لذا يعرف الترانزستور من هذا الصنف بأنه **ثنائي القطبية**، ويدخل في زمرة الترانزستورات الوصلية. وفي هذا النوع من الترانزستورات يتم التحكم في التيارات الداخلية بواسطة وصلتين اثنتين من وصلات p-n . أما الصنف الثاني فيعمل بفعل حاملات الشحنة الأكثرية فقط؛ لذا يعرف بأنه **وحيد القطبية**. وهو تركيبية مختلفة للوصلات p-n، يعرف باسم ترانزستور مفعول الحقل وهو يختلف في تشغيله عن الترانزستور الوصلي لكنه يمكن أن يستعمل في دارات إلكترونية مشابهة لدارات الترانزستور الوصلي. سنقصر دراستنا في هذا الفصل على الترانزستور الوصلي.

10-3 الترانزستور الوصلي ثنائي القطبية

تتألف البنية الأساسية للترانزستور الوصلي ثنائي القطبية من وصلتين pn تشكلان ثلاثة أطراف توصيل، ولكل طرف من هذه الأطراف اسم يعرفه ويميزه عن الطرفين الآخرين. وهذه الأطراف هي: الباعث E والقاعدة B والمجمّع C. يظهر الجزء (أ) من الشكل 10-1 البنية الفيزيائية للترانزستور، كما يظهر الجزء (ب) منه تمثيل الترانزستور بديودين متصلين من الخلف، أما الجزء (ج) من الشكل فيظهر رمز الديود في مخطط الدارة والرموز المستعملة للتيارات وفروق الكمون المختلفة في الترانزستور. يوجد نوعان رئيسان من الترانزستورات ثنائية القطبية هما pnp و npn. يشير السهم في رمز

الترانزستور دائماً إلى جهة جريان التيار الاصطلاحي بين طرف القاعدة وطرف الباعث فيه. إن جهة السهم في كل منهما هي دائماً من منطقة النوع p الموجب إلى منطقة النوع n السالب لكلا النوعين، كما هو الحال في رمز الديود النموذجي تماماً (الجزء ج من الشكل) .



الشكل 1-10 بنية الترانزستور ثنائي القطبية

الترانزستورات ثنائية القطبية هي نبائط تحكّم وضبط، بمعنى أنها تتحكم بكمية التيار الذي يجري فيها بصورة يكون فيها متناسباً مع فلتية الانحياز المطبقة على طرف القاعدة، وهي بذلك تقوم بدور قاطعة تحكّم بالتيار. عندما يعمل الترانزستور في حالة التشغيل العادي، يكون الديود المكون من وصلة القاعدة والباعث في حالة انحياز أمامي، ويكون الديود المتشكل من وصلة المجمع

والقاعدة في حالة انحياز عكسي. إن مبدأ تشغيل نوعي الترانزستور pnp و npn ، هو نفسه بالضبط والاختلاف الوحيد بينهما يتعلق بالانحياز المطبق على كل منهما وفي قطبية منبع التغذية لكل نوع منهما.

الترانزستورات نبائط (أجهزة) فاعلة ثلاثية الأطراف مصنوعة من مواد نصف ناقلة مختلفة يمكن أن تقوم إما بدور العازل أو الناقل وذلك بتطبيق إشارة فلطية صغيرة. إن مقدرة الترانزستور على التحول بين هذين الوضعين يمكنه من القيام بوظيفتين أساسيتين: وظيفة التحويل، أي الفصل والوصل switching ، في الإلكترونيات الرقمية. والوظيفة الثانية هي وظيفة التضخيم في الإلكترونيات التماثلية. وعلى هذا تستطيع الترانزستورات ثنائية القطبية أن تعمل ضمن ثلاثة مجالات مختلفة. هذه المجالات هي:

1-المجال الفعال: يعمل الترانزستور في هذا المجال عمل مضخم، ويكون تيار المجمع مساوياً تيار القاعدة مضروباً بعامل التضخيم.

2-مجال الإشباع: يكون الترانزستور في هذا المجال في حالة الوصل الكامل Fully-ON ، ويعمل كقاطعة، ويكون التيار الجاري في المجمع هو تيار الإشباع.

3-مجال الانقطاع cut-off : يكون الترانزستور في هذا المجال في حالة الفصل الكامل، ويعمل كقاطعة ويكون تيار المجمع معدوماً.

10-4 تركيبات الترانزستور ثنائي القطبية

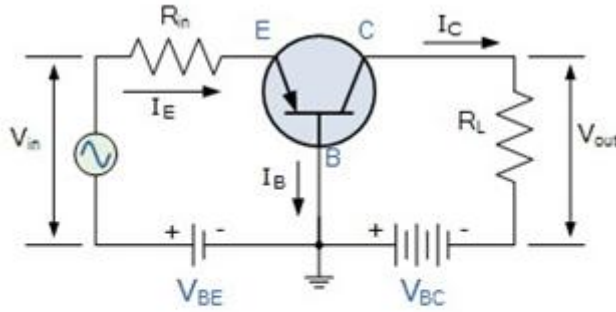
نظراً لكون الترانزستور ثنائي القطبية نبيطة ذات ثلاثة أطراف؛ لذا يوجد من حيث المبدأ ثلاث طرق لوصله في دارة إلكترونية يكون فيها أحد الأطراف مشتركاً بين كل من الدخل والخرج، أي الطرف الذي يوصل إلى منبعي التغذية معاً. إن كل طريقة من طرق التوصيل هذه تكون استجابتها لإشارة الدخل

مختلفة عن الأخرى في دارة ما؛ لأن الميزات السكونية للترانزستور تتغير مع كل ترتيب للدارة. إن طرق التوصيل الثلاث هي:

- 1-تركيبة القاعدة المشتركة: تحقق ربحاً في الفلطيّة ولا تحقّقه في التيار.
- 2-تركيبة الباعث المشترك: تحقق ربحاً في كل من الفلطيّة والتيار.
- 3-تركيبة المجمع المشترك: تحقق ربحاً في التيار ولا تحقّقه في الفلطيّة

10-4-1 تركيبة القاعدة المشتركة

في تركيبة القاعدة المشتركة أو تركيبة القاعدة المؤرّضة (الموصولة بالأرض) يكون طرف القاعدة B، كما يدل الاسم، مشتركاً بين كل من إشارة الدخل وإشارة الخرج مع كون إشارة الدخل مطبقة بين طرفي القاعدة والباعث. تؤخذ إشارة الخرج المقابلة من بين طرفي القاعدة والمجمع كما هو مبين في الشكل 10-2 مع تأريض طرف القاعدة أو وصله إلى نقطة ذات فلطيّة مرجعية ثابتة.



الشكل 10-2 الترانزستور في دارة القاعدة المشتركة

إن تيار الدخل الجاري نحو الباعث يكون كبيراً؛ لأنه يمثل مجموع تيارى القاعدة والمجمع، أي:

$$I_E = I_C + I_B \quad (10 - 1)$$

لذا فإن خرج تيار المجمع I_C يكون أقل من دخل تيار الباعث I_E . ويكون ربح التيار α :

$$\alpha = \frac{I_C}{I_E} \quad (10 - 2)$$

تشير هاتان العلاقتان إلى أن ربح التيار α لهذا النوع من الدارات يكون أقل من الواحد. وبعبارة أخرى نقول إن تركيبة القاعدة المشتركة "تُضعف" إشارة الدخل.

إن هذا النوع من المضخمات التي تستعمل هذه التركيبة تشكل دائرة مضخم للفلطية غير عاكس، أي تكون إشارتنا الفلطية V_{in} والفلطية V_{out} "على وفاق في الطور" في هذه التركيبة. إن هذا النوع من الترتيبات في الترانزستور ليست شائعة جداً نظراً لميزات ربح الفلطية العالي وغير المعتاد فيها. وتمثل مميزات خرجها مميزات ديود في الانحياز الأمامي بينما تمثل مميزات الدخل فيها مميزات ديود ضوئي معرض للإنارة.

وكذلك فإن هذا النوع من تركيبات الترانزستور ثنائي القطبية تكون فيه نسبة مقاومة الخرج إلى مقاومة الدخل عالية، أو بتعبير أكثر أهمية: تكون نسبة مقاومة الحمولة R_L إلى مقومة الدخل R_{in} عالية مما يكسبه "ربحاً في المقاومة" .

وبعدئذٍ فإن ربح الفلطية A_V لتركيبة القاعدة المشتركة يعطى بالعلاقة الآتية:

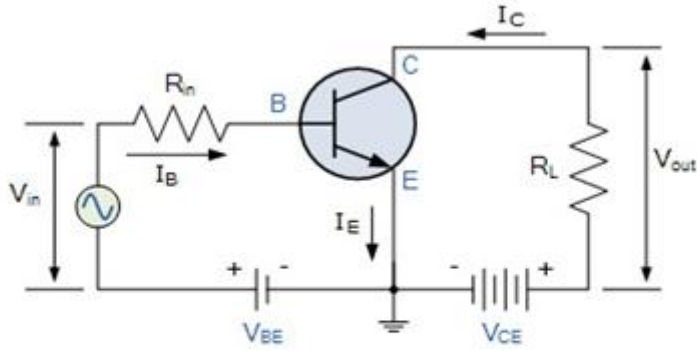
$$A_V = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{I_C \times R_L}{I_E \times R_{in}} = \alpha \frac{R_L}{R_{in}} \quad (10 - 3)$$

حيث النسبة I_C/I_E تمثل ربح التيار α وتمثل النسبة R_L/R_{in} ربح المقاومة.

إن دائرة القاعدة المشتركة لا تستعمل إلا في دارات المضخمات ذات المرحلة الأولى في أغلب الأحيان مثل المضخم الأولي للمكرفون أو مضخمات التواتر الراديوي نظراً لاستجابتها الجيدة عند التواترات العالية.

10-4-2 تركيبة الباعث المشترك

تُطبق إشارة الدخل في ترقية الباعث المشترك أو الباعث المؤرّض بين القاعدة والباعث، بينما تؤخذ إشارة الخرج من بين المجمع والباعث، كما يبين الشكل 10-3. إن هذا النوع من الترتيبات هو أكثر الدارات استعمالاً من أجل المضخمات القائمة على الترانزستورات والتي تمثل الطريقة المعتادة في توصيلة الترانزستور ثنائي القطبية.



الشكل 10-3 دائرة مضخم بتركيبة الباعث المشترك

إن ترقية المضخم ذي الباعث المشترك تنتج أعلى تيار وأعلى ربح قدرة يمكن أن تعطيه أية ترقية من ترتيبات الترانزستور ثنائي القطبية الأخرى. ويرجع الفضل في ذلك بصورة رئيسة إلى ممانعة الدخل المنخفضة؛ لأنها موصولة إلى وصلة pn موضوعة في حالة الانحياز الأمامي، بينما تكون ممانعة الخرج عالية؛ لأنها مأخوذة من وصلة pn موضوعة في حالة الانحياز العكسي. إن التيار الداخل إلى الترانزستور، في هذه الترقية، يساوي مجموع التيارين الخارجين منه، أي:

$$I_E = I_C + I_B \quad (10 - 4)$$

كما أن ربح التيار في ترقية الباعث المشترك يكون كبيراً؛ لأن مقاومة الحمولة موصولة على التسلسل مع المجمع. يُرمز لهذا الربح بالرمز β ويعرّف بأنه

نسبة تيار المجمع إلى تيار القاعدة، ونكتب:

$$\beta = \frac{I_C}{I_B} \quad (10 - 5)$$

من العلاقتين (10-2) و (10-5) نجد:

$$I_C = \alpha I_E = \beta I_B \quad (10 - 6)$$

وبالتعويض في العلاقة (10-1) نجد:

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta+1} \quad , \quad \beta = \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad (10 - 7)$$

لما كانت العلاقات الكهربائية بين هذه التيارات الثلاثة I_C و I_E و I_B تتعين بالبنية الهندسية للترانزستور نفسه، فأى تغير صغير في تيار القاعدة I_B ، سينتج عنه تغير أكبر بكثير في تيار المجمع I_C . وعندئذٍ، فإن أي تغير في التيار الجاري في القاعدة سيتحكم بالتيار في دائرة الباعث- المجمع. إن β النموذجية تقع بين 20 و 200 لمعظم الترانزستورات ذات الأهداف العامة.

10-4-3 تركيبة المجمع المشترك

في تركيبة المجمع المشترك، أو المجمع المؤرّض، يكون المجمع مشتركاً وذلك بوصله إلى منبعي التغذية. توصل إشارة الدخل إلى القاعدة مباشرة، بينما تؤخذ إشارة الخرج من حمولة الباعث كما هو مبين في الشكل 10-4. يعرف هذا النوع من تركيبات الدارة عادة باسم مُتَبَعِ الباعث. وهذه التركيبة للترانزستور مفيدة جداً من أجل تطبيقات توفيق الممانعات بسبب ممانعة الدخل العالية جداً، حيث تقع في مجال مئات الكيلو أوم في حين تكون ممانعة خرجها صغيرة نسبياً. في تركيبة الباعث المشترك يكون ربح التيار مساوياً القيمة β تقريباً للترانزستور نفسه. وفي تركيبة المجمع المشترك تكون مقاومة الحمولة موصولة على التسلسل مع الباعث. وهذا يجعل تيارها مساوياً تيار الباعث. ولما كان تيار الباعث هو حاصل جمع تيار المجمع والقاعدة، فإن تيار مقاومة الحمل في هذه

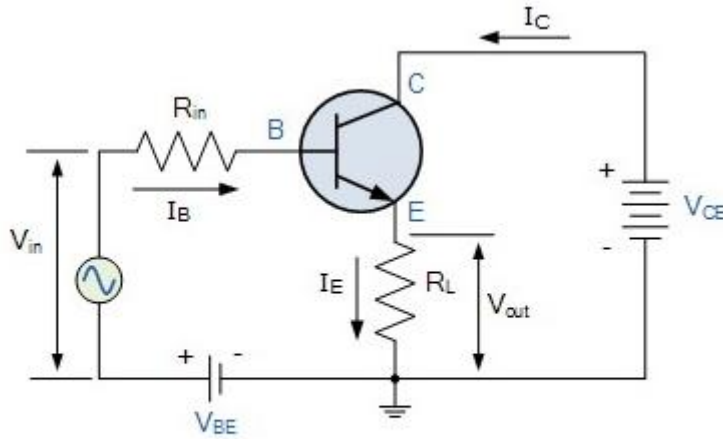
التركيبية يكون أيضاً مساوياً مجموع تيار المجمع وتيار دخل القاعدة الجاري فيها، أي:

$$I_E = I_C + I_B \quad (10-8)$$

ويكون عندئذ ربح تيار الدارة A_I :

$$A_I = \frac{I_E}{I_B} = \frac{I_C + I_B}{I_B} \quad (10-9)$$

$$A_I = \frac{I_C}{I_B} + 1 = \beta + 1 \quad (10-10)$$

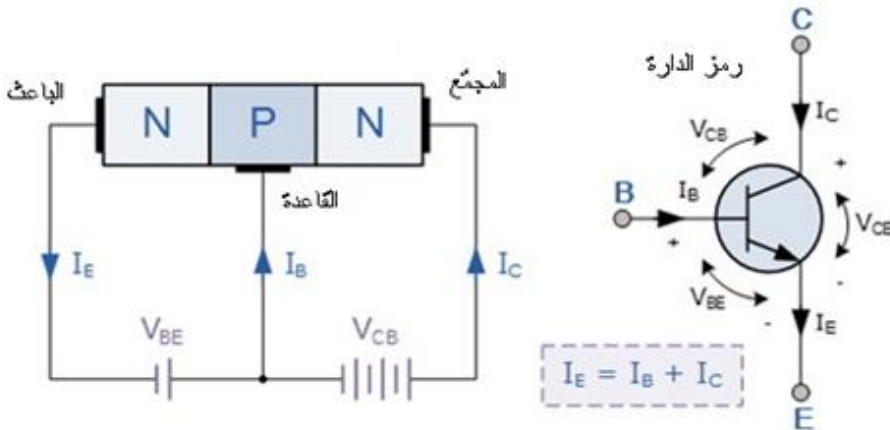


الشكل 10-4 الترانزستور في تركيبية المجمع المشترك

إن هذا النوع من تركيبات الترانزستور هو دارة غير عاكسة بمعنى أن إشارة فلطية الدخل V_{in} وإشارة فلطية الخرج V_{out} يكونان متفتتين في الطور. إن ربح الفلطية لهذه التركيبية أقل من الواحد دائماً. إن مقاومة الحمولة للترانزستور في تركيبية المجمع المشترك تتلقى كلاً من تيار القاعدة والمجمع فتعطي ربح تيار كبير، كما هو الحال في تركيبية الباعث المشترك؛ لذا فهي تؤمن تضخيماً كبيراً للتيار يصاحبه ربح قليل للفلطية.

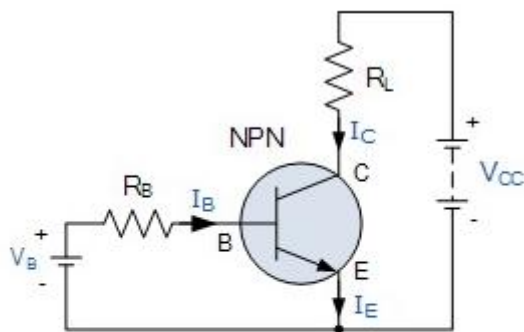
10-5 الترانزستور NPN

سندرس الآن بالتفصيل تركيبية الباعث المشترك للترانزستورات npn مع مثال على بناء ترانزستور npn وعلى مميزات التيار الجاري. يبين الشكل 10-5 بنية ترانزستور npn والفلطيات الطرفية له. لاحظ على الشكل أن السهم يعرف الباعث وجريان التيار الاصطلاحي، فهو يشير إلى الخارج من أجل ترانزستور من النوع npn. الفلطية بين القاعدة والباعث V_{BE} موجبة عند القاعدة وسالبة عند الباعث؛ لأن طرف القاعدة يكون دائماً موجباً بالنسبة للباعث في الترانزستور npn. وكذلك فإن فلطية التغذية للمجمع V_{CE} موجبة بالنسبة للباعث. وهكذا، فشرط النقل في الترانزستور npn هو أن يكون المجمع دائماً أكثر إيجابية بالنسبة لكل من القاعدة والباعث. وهذا الكلام ينطبق على ما قلناه من قبل من أن النقل في الترانزستور يتحقق بوضع الوصلة المؤلفة من الباعث والقاعدة في الانحياز الأمامي، ووضع الوصلة المؤلفة من القاعدة والمجمع في الانحياز العكسي.



الشكل 10-5 تركيبية الترانزستور npn

عندما يوضع الترانزستور npn في دارة كهربائية توصل منابع التوتر إلى أطرافه الثلاثة كما هو مبين في الشكل 6-10 . يوصل المجمع إلى فلطية التغذية V_{CC} من خلال مقاومة الحمولة R_L ، التي تقوم أيضاً بالحد من التيار الأعظمي المار في النبيطة. وتوصل فلطية تغذية القاعدة V_B إلى القاعدة من خلال مقاومة R_B التي بدورها تُستعمل أيضاً للحد من تيار القاعدة الأعظمي.



الشكل 6-10 توصيل الترانزستور npn

نحن نعلم أن الترانزستور هو جهاز يعمل على التيار، وأن تياراً كبيراً I_C يجري فيه بين طرفي المجمع والباعث عندما يوضع في حالة " الوصل الكامل". لكن هذا لا يحدث إلا عندما يدخل تيار انحياز صغير I_B إلى طرف قاعدة الترانزستور في الوقت نفسه مما يتيح للقاعدة أن تقوم بدور دخل مُتَحَكِّم بالتيار.

إن ربح التيار في ترانزستور من النوع npn هو نسبة هذين التيارين، أي I_C/I_B ، يدعى ربح التيار المستمر DC للترانزستور ويعطى الرمز (β) . يمكن أن تكون قيمة β كبيرة تصل إلى 200 من أجل ترانزستورات نموذجية، وهذه النسبة الكبيرة بين I_C و I_B هي التي تجعل الترانزستور npn جهازاً مفيداً

للتضخيم عندما يستعمل في المجال الفعال؛ لأن I_B يقدّم الدخل و I_C يقدم الخرج. لاحظ أن (β) ليس لها أبعاد لكونها نسبة تيارين.

كما أن ربح تيار الترانزستور من طرف المجمع إلى طرف الباعث، I_C/I_E يدعى (α) ، وهو تابع للترانزستور نفسه لأنه يمثل انتشار الإلكترونات عبر الوصلة. ولما كان تيار الباعث ينتج من تيار القاعدة الصغير جداً مضافاً إليه تيار المجمع الكبير جداً، فإن قيمة (α) تكون قريبة جداً من الواحد. وتقع هذه القيمة بين 0.950 و 0.999 من أجل ترانزستور نموذجي يعمل على إشارة ذات قدرة صغيرة.

6-10 العلاقة بين α و β في ترانزستور npn

يعطى ربح التيار المستمر DC بالعلاقة:

$$\text{ربح التيار المستمر} = \beta = \frac{\text{تيار الخرج}}{\text{تيار الدخل}} = \frac{I_C}{I_B} \quad (10 - 11)$$

ويعطي قانون كرشوف في التيار العلاقة:

$$I_E = I_B + I_C \quad (10 - 12)$$

ولدينا أيضاً:

$$\frac{I_C}{I_E} = \alpha \quad (10 - 13)$$

من العلاقتين (10-12) و (10-13) نكتب:

$$I_B = I_E(1 - \alpha) \quad (10 - 14)$$

وبالتعويض في العلاقة (10-11) نجد:

$$\beta = \frac{I_C}{I_B} = \frac{I_C}{I_E(1-\alpha)} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad (10 - 15)$$

وبضم الوسيطين α و β يمكننا أن نحصل على صيغتين رياضيتين يعطينا العلاقة بين مختلف التيارات الجارية في الترانزستور. هذه العلاقات هي:

$$\alpha = \beta(1 - \alpha) \quad \text{أو} \quad \alpha = \frac{\beta}{\beta+1} \quad (10 - 16)$$

$$\beta = \alpha(1 + \beta) \quad \beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

إذا كان $\alpha = 0.99$ فإن $\beta = \frac{0.99}{0.01} = 99$.

إن قيم β تتغير من 20 تقريباً في ترانزستورات القدرة ذات التيار العالي إلى ما يزيد على 1000 في ترانزستورات القدرة المنخفضة ذات التواتر العالي. لكن قيمة β لمعظم ترانزستورات npn النموذجية تقع في المجال 50 إلى 200 ، ويمكن إيجادها في لوائح المعطيات التي تزودها الشركات الصانعة.

نلاحظ من المعادلة (10-11) أنه إذا كان تيار القاعدة I_B معدوماً فإن التيار المار في المجمع I_C سيكون معدوماً أيضاً. كذلك عندما يكون تيار القاعدة مرتفعاً فإن تيار المجمع سيكون مرتفعاً أيضاً. ينتج عن ذلك أن تيار القاعدة يمكنه أن يتحكم بتيار المجمع. إن إحدى أهم خصائص الترانزستور الوصلي ثنائي القطبية هي أن باستطاعة تيار صغير في القاعدة أن يتحكم بتيار كبير في المجمع كما سنرى في المثال الآتي.

مثال 1

يبلغ ربح التيار المستمر (β) 200، في ترانزستور من النوع npn . احسب تيار القاعدة I_B اللازم كي ينقل تياراً قدره 4 mA في مقاومة حمولة.
الحل:

نحسب هذا التيار من العلاقة:

$$I_B = \frac{I_C}{\beta} = \frac{4 \times 10^{-3}}{200} = 20 \mu A$$

وهكذا نجد: $\beta = 200$, $I_C = 4 \text{ mA}$, $I_B = 20 \mu A$.

هناك نقطة أخرى يجب تذكرها تتعلق بالترانزستورات من النوع npn ، ألا وهي فلطية المجمع V_C التي يجب أن تكون أكثر إيجابية بالنسبة لفلطية الباعث V_E ، وذلك كي تسمح للتيار بالجريان في الترانزستور بين وصلة المجمع والباعث. كذلك يوجد هبوط كمون بين طرفي القاعدة والباعث يقارب 0.7 V

(هو الكمون الحاجز لديود واحد) ، من أجل ترانزستور من السليكون، نظراً لأن مميزات الدخل للترانزستور npn هي لديود بانحياز أمامي. وفي ضوء ذلك يجب أن تكون فلطية القاعدة V_{BE} لترانزستور من النوع npn أكبر من هذه القيمة (0.7V)، وإلا فإن الترانزستور لن ينقل بهذه القيمة. يعطى تيار القاعدة في الترانزستور بالعلاقة:

$$I_B = \frac{V_B - V_{BE}}{R_B} \quad (10 - 17)$$

حيث: I_B هو تيار القاعدة، V_B هي فلطية انحياز القاعدة، V_{BE} هي هبوط الفلطية بين القاعدة والباعث وتساوي 0.7 V من أجل السليكون و R_B هي مقاومة دخل القاعدة. بزيادة I_B يزداد V_{BE} تدريجياً ببطء حتى يصل إلى 0.7V، لكن I_C يرتفع بصورة أسية.

مثال 2

تبلغ فلطية الانحياز المستمرة $V_B = 10\text{ V}$ لترانزستور من النوع npn ، وتبلغ مقاومة دخل القاعدة $R_B = 100\text{k}\Omega$. ماذا ستكون قيمة تيار القاعدة الداخل إلى الترانزستور؟

الحل:

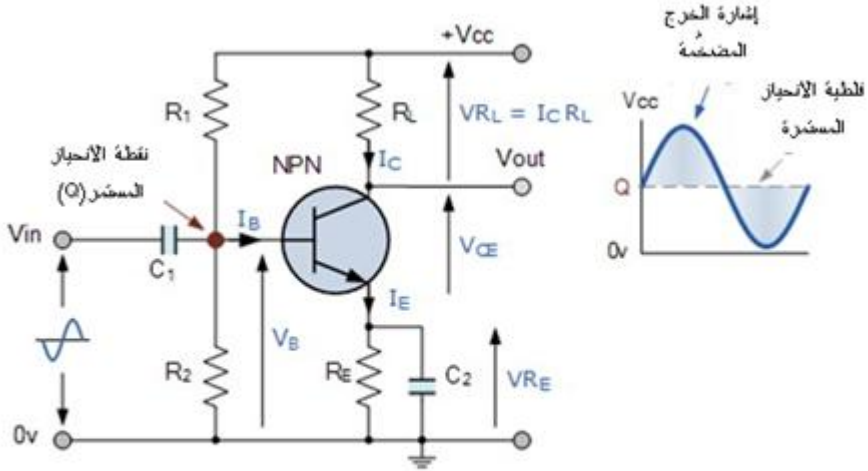
نحسب قيمة تيار قاعدة الترانزستور من العلاقة (10-17) فنجد:

$$I_B = \frac{10 - 0.7}{100\text{k}\Omega} = 93\mu\text{A}$$

10-7 تركيبية الباعث المشترك

وجدنا أن الترانزستور npn يمكن استعماله كقاطعة تغلب تيارات الحمولة إلى حالة " وصل on " أو "فصل off" عن طريق التحكم بإشارة القاعدة لوضعه في أحد مجالين: إما الإشباع أو الانقطاع. وبالإضافة إلى ذلك، يمكن أن يستعمل

الترانزستور أيضاً في مجاله الفعال لإنتاج دائرة تضخم أي إشارة صغيرة متناوبة AC تطبق على طرف القاعدة ويكون الباعث مؤرّضاً. فإذا طُبِّقت فلطية انحياز مناسبة على طرف القاعدة منالترانزستور بحيث تضعه دائماً ضمن مجاله الفعال الخطي، فالدارة الناتجة هي دائرة مضخم عاكس؛ وتدعى مضخم باعث مشترك بمرحلة واحدة، كما في الشكل 10-7. تدعى تركيبية المضخم ذي الباعث المشترك لترانزستور npn هذه "المضخم من الصنف A".

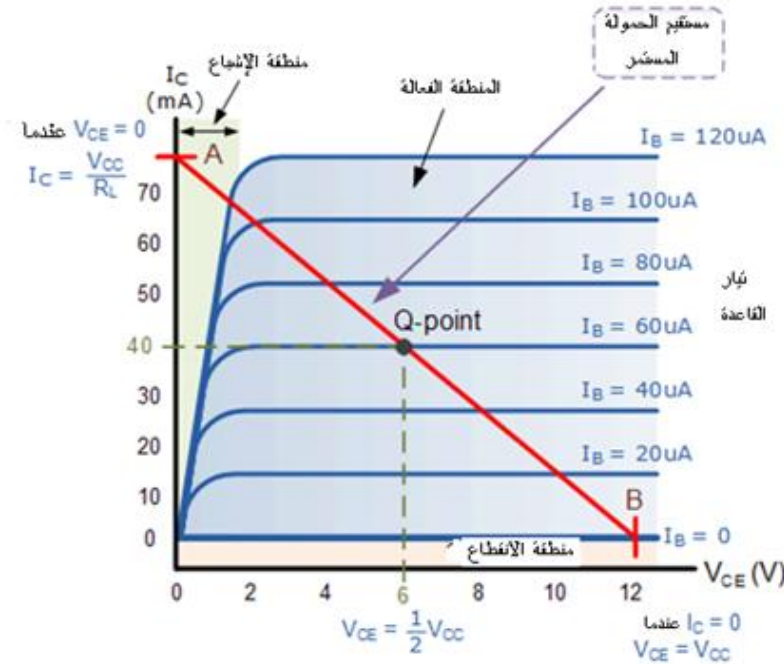


الشكل 10-7 دائرة مضخم باعث مشترك من مرحلة واحدة

إن تشغيل المضخم من الصنف A هو أحد الأصناف التي يكون فيها انحياز طرف قاعدة الترانزستور بطريقة تجعل وصلة القاعدة-الباعث في انحياز أمامي. وتكون النتيجة أن الترانزستور يعمل دائماً في منتصف الطريق بين المجالين: الانقطاع والإشباع، وبذلك يسمح لمضخم الترانزستور أن يولد بدقة أية إشارة دخل متناوبة بنصفها الموجب والسالب والمترابطة على فلطية الانحياز المستمرة هذه. ولو لم توجد "فلطية الانحياز" هذه لما استطاع المضخم أن يضخم سوى نصف واحد من موجة الدخل. إن تركيبية مضخم الباعث

المشترك والتي تستعمل ترانزستوراً من النوع npn تطبيقات عديدة، ولكنها غالباً ما تستعمل في دارت التواتر السمعى كمرحلة المضخم الأولي ومرحلة مضخم القدرة.

بالإشارة إلى تركيبة الباعث المشترك المبين في الشكل 10-7 ، توجد أسرة من المنحنيات تعرف بالمنحنيات المميزة للخروج، تربط تيار خرج المجمع I_C بفلطية المجمع V_{CE} عند قيم مختلفة لتيار القاعدة I_B ، كما في الشكل 10-8. تُطبق منحنيات مميزات الخرج على الترانزستور من أجل ترانزستورات لها القيمة β نفسها.



الشكل 10-8 المنحنيات المميزة للخروج في ترانزستور ثنائي القطبية نموذجي

يمكن أيضاً رسم "خط الحمولة المستمر DC" على منحنيات مميزات الخرج لإظهار كل نقاط التشغيل الممكنة عند تطبيق قيم مختلفة لتيار القاعدة. من

الضروري أن نضع القيمة الأولية للفلطية V_{CE} بشكل صحيح كي نسمح لفلطية الخرج أن تتغير للأعلى و للأسفل لدى تضخيم إشارات الدخل AC ويدعى هذا إعداد نقطة التشغيل أو النقطة Q ، وهذا مبين على الشكل 10-8.

إن أهم عامل تجب ملاحظته هو تأثير V_{CE} على تيار المجمع I_C عندما يكون V_{CE} أكبر من 1.0 فلط تقريباً. يمكننا أن نرى أن I_C لا يتأثر بتغيرات V_{CE} فوق هذه القيمة وبدلاً من ذلك فإنه يمكن التحكم فيه كلياً بواسطة تيار القاعدة I_B . عندما يحدث هذا يمكننا القول عندئذ إن دائرة الخرج تمثل دائرة " منبع تيار ثابت".

إذا عدنا إلى دائرة الباعث المشترك في الشكل 10-7 نجد أن تيار المجمع I_C هو التيار المار في مقاومة الحمولة R_L التي يوجد بين طرفيها فرق في الكمون يساوي: $(V_{CC} - V_{CE})$ ، فبتطبيق قانون أوم على هذه المقاومة يمكننا أن نحسب تيار المجمع فنجد:

$$I_C = \frac{V_{CC} - V_{out}}{R_L} = \frac{V_{CC} - V_{CE}}{R_L} \quad (10 - 18)$$

إن تغيرات I_C بدلالة V_{CE} في هذه المعادلة تمثل بخط مستقيم ميله $1/R_L$ هو خط الحمولة التحريكي لدائرة الشكل 10-7. تدعى المعادلة (10-18) معادلة خط الحمولة في حالة التيار المستمر من أجل تركيبة المجمع المشترك. يمكن رسم خط الحمولة هذا على الشكل 10-8 الذي يظهر منحنيات الخرج المميزة للترانزستور كالاتي: يبدأ هذا الخط من نقطة الإشباع (A) الواقعة على محور التيار I_C التي تتعين عندما يكون $V_{CE} = 0$ ، وينتهي عند نقطة الانقطاع (B)، الواقعة على محور التوتر V_{CE} التي تتعين عندما يكون $I_C = 0$. إن أية نقطة تقع على هذا الخط المستقيم تمثل المنطقة الفعالة للترانزستور. ومن تقاطع خط الحمولة مع المنحنيات المميزة للخرج نحصل على نقطة تشغيل الترانزستور Q. نعين الآن الموقع الفعلي لخط الحمولة على المنحنيات المميزة كالاتي:

$$I_C = \frac{V_{CC}-0}{R_L} = \frac{V_{CC}}{R_L} \text{ عندما } V_{CE} = 0 \text{ يصبح}$$

$$\text{وعندما } I_C = 0 \text{ يصبح } 0 = \frac{V_{CC}-V_{out}}{R_L} \text{ وهذا يعطي } V_{CC} = V_{CE} .$$

وبعدئذ يمكن استعمال المنحنيات المميزة للخروج من أجل ترانزستور في تركيبة الباعث المشترك للتنبؤ بتيار المجمع I_C ، عندما يعطى V_{CE} وتيار القاعدة I_B . يمكن أيضاً إنشاء خط الحمولة على المنحنيات لتعيين نقطة تشغيل ملائمة، أو النقطة Q التي يمكن وضعها بضبط تيار القاعدة.

وبعدئذ يمكننا أن نعرف الترانزستور npn على أنه في وضع الفصل *off* بصورة طبيعية لكنه سينقلب إلى وضع الوصل *on* بتيار دخل صغير ولفظية للقاعدة صغيرة وموجبة بالنسبة للباعث، وهذا سيؤدي إلى مرور تيار كبير في وصلة المجمع- الباعث. إن الترانزستورات npn تنقل عندما يكون V_C أكبر بكثير من V_E .

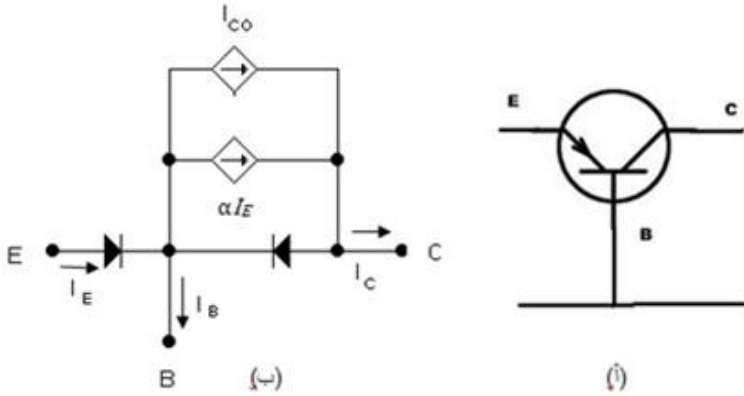
10-8 الدارة المكافئة للترانزستور

ذكرنا أنه يمكن النظر إلى الترانزستور كما لو أنه مكون من وصلتين من الوصلات pn متصلتين من الخلف، وبينما أن تيار خرج الترانزستور هو تيار الدخل المضخم، وهو يمثل تيار الحاملات الأكثرية في الانحياز الأمامي. والحقيقة أننا أهملنا تأثيرات أزواج الإلكترونات والثقوب المتولدة حرارياً في الوصلة المنحازة عكسياً، وينتج عن هذه التأثيرات تيارات إضافية داخل الترانزستور يكون لها دور مهم في تشغيل الترانزستور نظراً لعملية التضخيم التي تطرأ على التيار. يدعى التيار الناتج عن هذه الثقوب أو الإلكترونات تيار التهريب، وهو ما أطلقنا عليه اسم تيار الإشباع العكسي للوصلة pn ورمزنا له بالرمز I_S ، ويعطى بالمعادلة (6-9). نرسم لتيار الإشباع العكسي هنا بالرمز I_{CO} ، ويمكن أن يسهم في تيار المجمع لأن وصلة القاعدة - المجمع في الترانزستور تكون في حالة انحياز عكسي.

بناء على ما ذكر أعلاه، يتألف تيار خرج الترانزستور من مركبتين: الأولى تيار التهريب، I_{CO} ، والثانية تيار الدخل المضخم αI_E ، كما تبين المعادلة (10-19):

$$I_C = \alpha I_E + I_{CO} \quad (10 - 19)$$

يمكننا استعمال هذه الأفكار لبناء دارة كهربائية مكافئة للترانزستور في شروط التغذية المستمرة. يبين الجزء (ب) من الشكل 9-10 الدارة المكافئة للترانزستور المرسوم في الجزء (أ) من الشكل نفسه الذي يمثل ترانزستوراً في تركيبية القاعدة المشتركة. يمكن استعمال هذه الدارة المكافئة في تحليل الترانزستور بطريقة رياضية.



الشكل 9-10 الدارة المكافئة للترانزستور في تركيبية القاعدة المشتركة وفي شروط التغذية المستمرة

سنركز اهتمامنا على عمل الترانزستور في الحالة المستقرة التي تنشأ عندما يطرأ على التوترات والتيارات تغيرات متناوبة صغيرة السعة تقع حول نقطة التشغيل، في منطقة المميزات الخطية للترانزستور. يمكن عد وسطاء الجهاز ثابتة في هذه المنطقة. وهذا يسمح باستعمال نموذج للدارة يحتوي هذه الوسطاء، واستعمال طرائق تحليل الدارة الخطية التي وردت في الفصول السابقة.

إن مفتاح تحليل الإشارة الصغيرة هو وضع دارة مكافئة للترانزستور في حالة التيار المتناوب لتشغيله في شروط الإشارة الصغيرة، أي إن تغيرات التوتر

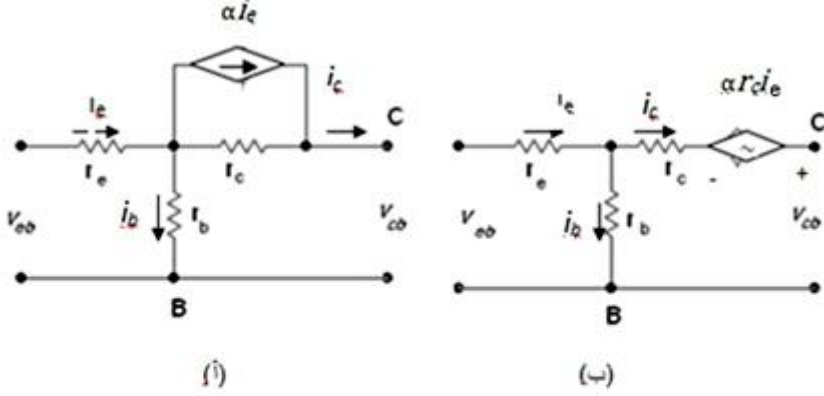
والتيار حول نقطة التشغيل تكون صغيرة السعة بالنسبة للمركبة المستمرة. وبعد ذلك يمكن تحليل عمل الدارة رياضياً بإحدى الطرق المعروفة، باستعمال نظرية تيفينين، أو نظرية نورتون، أو بواسطة طرائق التحليل العروي أو أي طريقة من الطرق الأخرى التي عالجتها في الفصول السابقة. إن الدارة المكافئة للترانزستور تبقى نفسها بغض النظر عن التركيبة التي يوضع فيها الترانزستور، سواء أكان في تركيبة الباعث المشترك أم المجمع المشترك أم القاعدة المشتركة.

توجد دارات مكافئة كثيرة مقترحة، إلا أن الشركات الصانعة للترانزستورات كثيراً ما تقدم لوائح تحتوي على معلومات تتعلق بتشغيل الترانزستور في مجالات التواترات المنخفضة. وتتعلق تلك المعلومات بنوعين من الدارات المكافئة: الدارة المكافئة على الشكل T والدارة المكافئة المختلطة. وسنقصر الدراسة هنا على هذين النوعين فقط من الدارات المكافئة.

10-9 الدارة المكافئة T

يمكن استعمال الدارة المكافئة في الشكل 10-9 التي تحتوي على مولدي التيار $I_E \alpha$ و I_{CO} في تحليل الدارة لدى تطبيق إشارة متناوبة، بعد إجراء بعض التعديلات عليها. فتيار التهريب I_{CO} مقدار ثابت ووحيد الجهة لذا لا يعد عاملاً يدخل في دراسة المقادير المتناهية في الصغر. إذا رمزنا للمقادير الآتية بأحرف صغيرة فإن المولد $I_E \alpha$ يصبح $I_e \alpha$ ، كما إن المركبات المتغيرة لتيارات الدارة تصبح I_c و I_b و I_e . وأخيراً نضيف مقاومة لكل طرف في الدارة ترمز إلى المقاومة المحدودة للمادة، ولمقاومة الحاجز في وصلة نصف الناقل، ولكي تؤمن عنصراً مشتركاً لإرجاع الإشارة من عروة الخرج إلى عروة الدخل. إذا طبقنا التعديلات السابقة فإننا نحصل على الجزء (أ) من الشكل 10-10 ، الذي يمثل الدارة المكافئة T التي تحتوي على مولد التيار غير المستقل، وهي

شبكة رباعية الأطراف من النوع T فاعلة؛ لأنها تحتوي على مولد تيار في فرع المجمع.



الشكل 10-10 دائرة المكافئة للترانزستور في تركيب القاعدة المشتركة

(أ) دائرة مولد تيار مكافئة (ب) دائرة مولد توتر مكافئة

إن دراسة الدارة قد تكون أكثر ملاءمة إذا استعضنا عن مولد التيار (المؤلف من منبع تيار على التفرع مع مقاومة R_c) بمولد توتر مكافئ له باستعمال نظريتي تيفينين ونورتون. يقودنا هذا التحويل إلى الدارة المكافئة الجديدة المبينة في الجزء (ب) من الشكل 10-10، حيث حلت المقاومة R_c على التسلسل مع منبع التوتر $R_c i_c$ محل منبع التيار السابق كما هو معروف. يمكن استعمال أية دائرة من دارتي الشكل 10-10 عند دراسة الدور الذي يقوم به الترانزستور في دائرة كهربائية وتحليله.

10-10 الدارة المكافئة ذات الوسطاء المختلطة

لما كان الترانزستور نببئة ذات أربعة أطراف، فبإمكاننا تمثيله بصندوق مغلق وكتابة المعادلات العامة التي تربط المقادير الموجودة عند طرفي الدخل وطرفي الخرج، وهذه المقادير هي التيارات والتوترات. يبين الجزء (أ) من الشكل 10-10

11 تمثيلاً عاماً للجهاز، حيث يُعدّ ما في داخل الصندوق (أي الترانزستور) ممثلاً لشبكة رباعية الأطراف خطية ذات عناصر فاعلة ومتماثلة الاتجاهين. ونظراً لأن الشروط الخارجية قابلة للقياس، فإن النبيطة الموجودة داخل الصندوق يمكن أن تُعرّف بجملة مكونة من أربعة وسطاء تدخل في زوج من المعادلات الآتية التي تربط بين المقادير الخارجية.

يمكننا إذن وصف الصندوق بعدد من معادلات الشبكة كالتالي ناقشناها في الفصل السادس، ويقابل كل زوج من تلك المعادلات دائرة مكافئة تصف محتويات الصندوق. سنقصر الدراسة هنا على الدائرة المكافئة للترانزستور ذات الوسطاء المختلطة والتي تتعين بالمعادلتين (6-17) و (6-18)، اللتين تربطان تغيرات كل من توتر الدخل v_1 وتيار الخرج i_2 بالتغيرات التي تحدث في كل من تيار الدخل i_1 وتوتر الخرج v_2 واللّتين نكتبهما كالآتي:

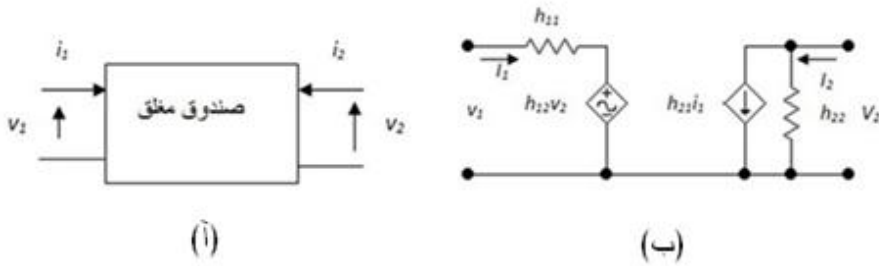
$$v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2 \quad (10 - 20)$$

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2 \quad (10 - 21)$$

سنبحث الآن عن الدائرة المكافئة التي تمثلها المعادلتان السابقتان. من تفحص هاتين المعادلتين نرى أنه ينبغي أن يكون للوسيط h_{11} أبعاد ممانعة، وللوسيط h_{22} أبعاد قبولية، بينما نرى أن كلا من h_{12} و h_{21} هي مقادير ليس لها أبعاد. ونظراً لتنوع طبيعة الوسطاء h سميت الوسطاء المختلطة أو الهجينة. كما تسمى الدائرة المكافئة التي تمثلها المعادلتان (10-20) و (10-21) الدائرة المكافئة المختلطة لاحتوائها وسيطي الممانعة والقبولية معاً. تعد الدائرة المكافئة ذات الوسطاء المختلطة من أكثر الدارات المستعملة انتشاراً في تحليل دارات الترانزستور. ومما ساعد على كثرة استعمالها سهولة قياس الوسطاء h لهذه الدائرة.

تشير المعادلة (10-20) إلى أن مدخل الترانزستور يسلك سلوك مقاومة قيمتها

h_{11} على التسلسل مع منبع توتر يساوي $h_{12}v_2$. كما تشير المعادلة (10-21) إلى أن مخرج الترانزستور يسلك سلوك مقاومة قيمتها $1/h_{22}$ على التفرع مع منبع تيار شدته $h_{21}i_1$. لقد مثلنا الترانزستور بصندوق مغلق في الجزء (أ) من الشكل 10-11، ويمثل الجزء (ب) من الشكل نفسه الدارة المكافئة ذات الوسطاء المختلطة للترانزستور كما يمثل المعادلتين السابقتين معاً.



الشكل 10-11 الترانزستور شبكة رباعية الأطراف

10-11 طريقة قياس الوسطاء h

سنبين فيما يأتي طريقة قياس الوسطاء h . إذا جعلنا طرفي الخرج دائرة قصيرة فيشروط الإشارة المتناوبة؛ أي $v_2 = 0$ نجد:

$$h_{11} = v_1/i_1, \quad h_{21} = i_2/i_1$$

أما إذا فتحنا الدخل؛ أي جعلنا $i_1 = 0$ فإننا نجد:

$$h_{22} = i_2/v_2, \quad h_{12} = v_1/v_2$$

وبذلك نعرف الوسطاء h كما يأتي:

h_{11} : ممانعة الدخل عند قصر دائرة الخرج،

h_{22} : قبولية الخرج عند فتح دائرة الدخل،

h_{12} : نسبة توتر الدخل إلى توتر الخرج عند فتح دائرة الدخل،

h_{21} : تكبير التيار، أو ربح التيار عند فتح دائرة الخرج.

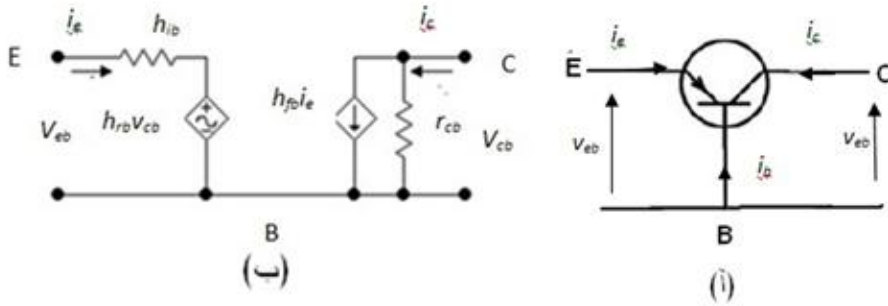
يمكن تحقيق قصر أو فتح الدارة لدى قياس وسطاء الترانزستور تجريبياً في المختبر عن طريق إدخال مكثفات أو تحريضيات مناسبة. فوصل مكثفة ذات سعة كبيرة بين طرفي الخرج، مثلاً، يؤدي إلى قصر الدارة أمام الإشارة المتناوبة، من دون أن يكون له تأثير في الشروط السكونية. وبالمثل، فإن وضع خانق (ملف ذو نواة حديدية) ذي تحريضية كبيرة في مدخل تيار التغذية سيؤدي إلى فتح الدارة بشكل أساسي أمام الإشارة المتناوبة.

إذا انتقلنا الآن من تمثيل الترانزستور بصندوق مغلق إلى تمثيله برمزه المعتاد الذي اصطلحنا عليه فيما سبق، فإننا سنجد أنفسنا أمام ثلاث تركيبات مختلفة يمكن أن يوضع فيها الترانزستور عندما يحل محل الصندوق المغلق، وذلك حسب الطرف الذي يعد مشتركاً. ولما كان لكل تركيبية من التركيبات السابقة وسطاؤها المختلطة الخاصة بها، فإن تحديد الوسطاء يتطلب منا وضع بعض المصطلحات والرموز والتقيدها.

أوصى المعهد الأمريكي للمهندسين الكهربائيين (AIEE) ومعهد مهندسي الراديو (IRE) باستعمال المصطلحات التالية للدلالة على رموز وسطاء الترانزستور كخطوة نحو تقنين مصطلحات الترانزستور. ونحن بدورنا نتبنى هنا تلك المصطلحات التي نلخصها فيما يأتي:

- 1- يُستعاض عن القرائن الرقمية للوسيط h بقرائن حرفية مكونة من حرفين.
- 2- يرمز أحد الحرفين في كل وسيط إلى التركيبية التي وضع فيها الترانزستور. فيوضع الحرف b لتركيبية القاعدة المشتركة، والحرف e لتركيبية الباعث المشترك، والحرف c لتركيبية المجمع المشترك.
- 3- يرمز الحرف الثاني إلى مدلول خاص للوسيط يتعلق بنوع العمل، فمثلاً: يشير الحرف i إلى الدخل، والحرف o إلى الخرج، أما الحرف r فيدل على النسبة العكسية، ويدل الحرف f على النسبة الأمامية.

استناداً إلى المصطلحات السابقة والرموز التي تبينها للتيارات والتوترات في الترانزستور من قبل نستطيع أن نمثل الدارة المكافئة المختلطة للترانزستور في أية تركيبة كانت. وسنقتصر هنا على تمثيل الدارة المكافئة للترانزستور في تركيبة القاعدة المشتركة كما يظهر في الشكل 10-12 .



الشكل 10-12 الدارة المكافئة ذات الوطاء المختلطة

يبين الجزء (أ) من الشكل 10-12 الترانزستور في تركيبة القاعدة المشتركة. كما يبين الجزء (ب) من الشكل نفسه الدارة المكافئة ذات الوطاء المختلطة للترانزستور السابق.

يبين الجدول الآتي التقابل بين الوطاء h في مختلف تركيبات الترانزستور بعد استعمال المصطلحات السابقة:

نوع الوظيفة	المجمّع المشترك	الباعث المشترك	القاعدة المشتركة	الوسيط
ممانعة الدخل	h_{ic}	h_{ie}	h_{ib}	$=h_{11}$
نسبة التوتر العكسي	h_{rc}	h_{re}	h_{rb}	$=h_{12}$
تكبير التيار	h_{fc}	h_{fe}	h_{fb}	$=h_{21}$
قبولية الخرج	h_{oc}	h_{oe}	h_{oe}	$=h_{22}$

الملاحق

ملحق 1: مسائل عامة محلولة

1- تتألف دائرة تسلسلية من تحريضية قيمتها 20 mH ومكثفة سعنتها 0.02 μF.
 آ- عين تواتر التجاوب لهذه الدارة، ب- عين المقاومة الداخلية للتحريضية إذا كان عامل الجودة Q = 50 في وضع التجاوب وأن المكثفة عديمة الضياع،
 ج- احسب العرض العصابي Δω لهذه الدارة، د- احسب تواتري نصف القدرة.
 الحل:

آ- يعطى تواتر التجاوب لهذه الدارة بالعلاقة: $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
 وبتعويض كل حد بما يساويه في هذه العلاقة نجد: $\omega_o = 5 \times 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$
 وهذا يعطي $f_o = 7.962 \text{ KHz}$.

ب- تحسب المقاومة الداخلية للملف من علاقة عامل الجودة $Q = \frac{\omega_o L}{r}$
 وبتعويض كل حد بما يساويه في هذه العلاقة نجد: $r = 20 \Omega$.

ج- يحسب العرض العصابي من العلاقة $\Delta\omega = \frac{\omega_o}{Q}$
 بالتعويض نجد: $\Delta\omega = 1 \text{ krad.s}^{-1}$

د- تواترا نصف القدرة: من العلاقتين:

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{\omega_o}{2Q} + \omega_o \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}$$

بعد التعويض نجد:

$$\omega_2 = 5.05 \times 10^4 \text{ rad.s}^{-1} \quad \text{و} \quad \omega_1 = 4.95 \times 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$$

2- تتألف دائرة من مقاومة $R=1\text{k}\Omega$ ومكثفة $C=300\mu\text{F}$ موصولتان، عبر قاطعة S، على التسلسل مع منبع توتر $v_s(t)$. أوجد التوتر المتشكل بين طرفي المكثفة $v_s(t)$ بعد غلق القاطعة S في الحالتين التاليتين:

- أ- منبع التوتر مستمر ويساوي 100 V ، علماً $v_c(0) = 30\text{ V}$.
 ب- منبع التوتر جيبي ومن الشكل $v_s(t) = 150 \cos 100t\text{ V}$ و $v_c(0) = 0\text{ V}$.
 الحل:

أ- التوتر بين طرفي المكثفة من أجل منبع توتر مستمر $v_s(t) = 100\text{ V}$. نكتب
 توتر المنبع المستمر على الشكل: $v_s(t) = 100e^{st}$ حيث $s=0$. وتكون
 الاستجابة القسرية من الشكل $v_{cF}(t) = V_{cF}e^{st}$. نحسب V_{cF} من علاقة
 مجزئ الكمون:

$$V_{cF} = \frac{1/sC}{R+1/sC} V_s = \frac{V_s}{1+RSc} = \frac{100}{1} = 100\text{ V}$$

وبذلك تصبح الاستجابة القسرية: $v_{cF}(t) = V_{cF}e^{st} = 100\text{ V}$

أما الاستجابة الطبيعية فهي من الشكل: $v_{cN}(t) = V_{cN}e^{st}$
 حيث V_{cN} ثابت يتعين من شروط البدء، وقيمة s هي التي تعدم الممانعة، أي
 $Z(s) = R+sL = 0$ ويتحقق ذلك من أجل $s = -1/Rc = -3.33$ ، وتصبح الاستجابة
 الطبيعية:

$$v_{cN}(t) = V_{cN}e^{-3.33t}$$

وتكون الاستجابة الكلية:

$$v_{ct}(t) = 100 + V_{cN}e^{-3.33t}$$

ومن شروط البدء لدينا $v(0) = 30\text{ V}$ ، نعوض في المعادلة الأخيرة فنجد:

$$V_{cN} = -70\text{ V}$$

وتأخذ الاستجابة الكلية الشكل:

$$v_{ct}(t) = 100 - 70e^{-3.33t}$$

ب- من أجل منبع جيبي ومن الشكل $v_s(t) = 150 \cos 100t$

الاستجابة الطبيعية هي نفسها التي وجدناها في الحالة الأولى قبل تعيين الثابت،
 أي:

$$v_{cN}(t) = V_{cN}e^{-3.33t}$$

أما الاستجابة القسرية فتتبعين كما يلي: نكتب توتر القسر على الشكل:

$$v_s(t) = \text{Re}\{V_s e^{jst}\} = \text{Re}\{150e^{j100t}\}$$

حيث $s = j\omega = j100$ وتكون الاستجابة القسرية من الشكل:

$$v_{CF}(t) = \text{Re}\{V_{CF} e^{j100t}\}$$

وتتبعين V_{CF} في نطاق التواتر (أو نطاق s) من علاقة مجزئ الكمون كما سبق:

$$V_{CF} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} V_s = \frac{V_s}{1 + j\omega CR} = \frac{150}{1 + j30}$$

$$= 0.166 - j4.99 = 4.99 \angle -88.09^\circ V$$

للحصول على $v_{CF}(t)$ في نطاق الزمن نعوض عن V_{CF} هذه في العلاقة السابقة

ف نجد:

$$v_{CF}(t) = \text{Re}\{V_{CF} e^{j100t}\} = \text{Re}\{4.99e^{-j88.09^\circ} \times e^{j100t}\}$$

ويمكن كتابة هذه العلاقة الأخيرة على النحو التالي:

$$v_{CF}(t) = 4.99 \cos(100t - 88.09^\circ)$$

بضم هذه إلى الاستجابة الطبيعية نحصل على الاستجابة الكلية:

$$v_c(t) = V_{CN} e^{-3.33t} + 4.99 \cos(100t - 88.09^\circ)$$

من شروط البدء لدينا $v_c(0) = 0$ نحصل على:

$$V_{CN} = 4.99 \times \cos 88.09^\circ = 0.175 V$$

وأخيراً تكون الاستجابة الكلية:

$$v_c(t) = 0.175 e^{-3.33t} + 4.99 \cos(100t - 88.09^\circ) V$$

3- لتكن الدارة المبينة في الشكل، حيث v_s معطاة بالعلاقة:

$$v_s = 4 \cos(4t - 60^\circ) V$$

أ- اكتب معادلات العروة المستقلة وفق التحليل العروي. ب- اكتب معادلات

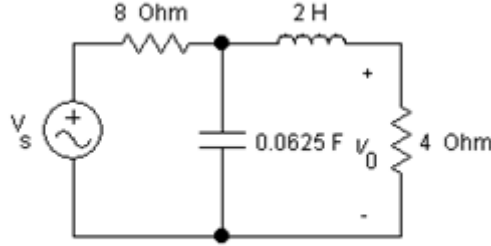
العقدة المستقلة وفق التحليل العقدي. ج- احسب التيار المار في المقاومة 4Ω ،

وذلك بإيجاد مكافئ تيفينين لجزء الدارة الواقع إلى يسار هذه المقاومة 4Ω ،

د- نضع بدلاً من المقاومة 4Ω ممانعة Z_L ، عين قيمة هذه الممانعة بحيث

تنتقل إليها أعظم قدرة، واحسب التيار المار فيها.

الحل:



أ-معادلات العروة: لدينا عروتان نفرض أن التيار في كل منهما يجري باتجاه دوران عقارب الساعة. لدينا هنا $\omega=4$ ، فيكون $j\omega L=j8\Omega$ ، $1/j\omega C = -j4\Omega$. لنكتب معادلة العروة الأولى (اليسرى):

$$(8 - j4)I_1 + j4I_2 = 4\angle -60^\circ$$

ومعادلة العروة الثانية (اليمنى):

$$(4 + j8 - j4)I_2 + j4I_1 = 0$$

وبعد الإصلاح نكتب المعادلتين على النحو التالي:

$$(8 - j4)I_1 + j4I_2 = 2 - j3.46$$

$$(1 + j1)I_2 + j1I_1 = 0$$

ب-معادلة العقدة: توجد عقدة واحدة فقط والأخرى مرجعية، نفرض توتر هذه العقدة V ، معادلتها:

$$\left(\frac{1}{8} + j0.25 + \frac{1}{4+j8}\right)V = \frac{2-j3.46}{8}$$

حيث يمثل الطرف الثاني من المعادلة منبع التيار الذي يصب في العقدة والمكافئ لمنبع التوتر. تبسط معادلة العقدة السابقة فتصبح:

$$(0.175 + j0.15)V = 0.5\angle -60^\circ = 0.25 - j0.43$$

ج-حساب التيار المار في المقاومة 4Ω بتطبيق طريقة تيفينين:

لنحسب أولاً ممانعة تيفينين Z_T : نفتح الدارة بين طرفي المقاومة 4Ω ونقصر منبع التوتركما في الشكل، ثم ننظر إلى الدارة من هذين الطرفين فتبدو كملف موصل على التسلسل مع المكثفة والمقاومة 8Ω الموصولتان على التفرع. أي إن ممانعة تيفينين هي:

$$Z_T = j\omega L + \frac{R \times \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega CR}$$

وبالتعويض نجد:

$$Z_T = j8 + \frac{8}{1 + j2} = j8 + 1.6 - j3.2$$

$$= (1.6 + j4.8) \Omega = 5.06 \angle 71.6^\circ \Omega$$

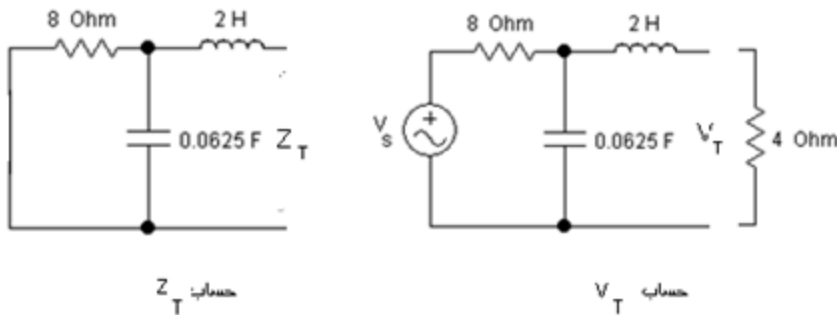
لنحسب الآن توتر تيفينين V_T : نعيد إدخال المنبع ونبقي طرفي المقاومة مفتوحين، كما في الشكل، فيكون توتر تيفينين هو التوتر بين طرفي المكثفة. فبتطبيق قانون مجزئ الكمون على المقاومة 8Ω والمكثفة نجد:

$$V_T = V_C = \frac{\frac{1}{j\omega C} \times V_S}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{V_S}{1 + j\omega CR} = \frac{4 \angle -60^\circ}{1 + j2}$$

$$= \frac{4 \angle -60^\circ}{2.24 \angle 63.4^\circ} = 1.79 \angle -123.4^\circ V$$

أو:

$$V_T = -0.97 - j1.50 = 1.79 \angle 57^\circ V$$



ملاحظة: كان يمكن إيجاد V_T بطرق أخرى، منها، مثلاً، أن نضع في معادلة العروة الأولى $I_2 = 0$ ثم نجد I_1 ، فيكون توتر تيفينين هو جداء I_1 في ممانعة المكثفة.

وأخيراً نحسب التيار المار في المقاومة 4Ω من العلاقة:

$$I = \frac{V_T}{Z_T + R} = \frac{1.79 \angle 57^\circ}{1.6 + j4.8 + 4} = \frac{1.79 \angle 57^\circ}{7.4 \angle 40.6^\circ} = 0.26 \angle 16.4^\circ A$$

د- يجب أن تكون الممانعة Z_L هي المرافق العقدي لممانعة تيفينين كي تنتقل أعظم قدرة إليها. أي يجب أن يكون:

$$Z_L = Z_T^* = (1.6 - j4.8) \Omega$$

وتكون قيمة التيار الذي يمر في هذه الحمل مساوية:

$$I = \frac{V_T}{2R_T} = \frac{1.79 \angle 57^\circ}{2 \times 1.6} = 0.56 \angle 57^\circ A$$

4- يطبق توتر قدره $V = (200 + j100) V$ على عنصر دائرة ممانعته $Z = (10 + j10) \Omega$. أ- ضع التوتر بالصيغة الطورية، ب- ضع الممانعة بالصيغة الطورية، ج- احسب التيار المار في العنصر وضعه بالصيغة الطورية، د- احسب عامل القدرة. ، هـ- احسب القدرة التي يمتصها العنصر.
الحل:

$$V = (200 + j100) = 223.6 \angle 26.6^\circ V$$

$$Z = 10 + j10 = 14.4 \angle 45^\circ \Omega$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{223.6 \angle 26.6^\circ}{14.4 \angle 45^\circ} = 15.8 \angle -18.4^\circ A$$

عامل القدرة η يساوي جيب تمام زاوية فرق الطور ϕ بين التيار المار في العنصر والتوتر المطبق عليه، وهي تساوي زاوية طور الممانعة Z . إذن فزاوية فرق الطور تساوي 45° ، ويكون عامل القدرة:

$$\eta = \cos \phi = \cos 45^\circ = 0.707$$

حساب القدرة الممتصة:

تُمتص القدرة في مقاومة العنصر التي تساوي هنا 10Ω ، وتحسب من العلاقة:

$$P = I^2 R = (15.8)^2 \times 10 = 2496.4 \approx 2500 \text{ W}$$

أو تحسب من العلاقة:

$$P = V \times I \times \cos \varphi = 223.6 \times 15.8 \times \cos 45^\circ = 2498 \text{ W}$$

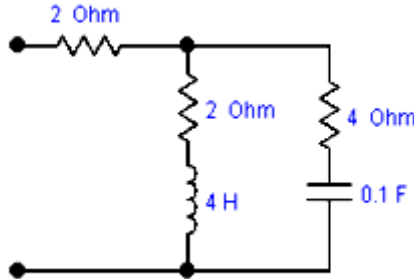
أو نحسبها من علاقة القدرة العقدية. من المعلوم أن القدرة الحقيقية تساوي الجزء

الحقيقي من القدرة العقدية التي تعطى بالعلاقة:

$$\begin{aligned} P = V \cdot I^* &= 223.6 \angle 26.6^\circ \times 15.8 \angle + 18.4^\circ \\ &= 223.6 \times 15.8 \angle 45^\circ = 3532.8 \angle 45^\circ \\ &= 3532.8 \cos 45^\circ + j 3532.8 \sin 45^\circ \\ &= 2497.7 + j 2497.7 \end{aligned}$$

وبذلك تكون القدرة الحقيقية $2497.7 \approx 2500 \text{ W}$ وهي نفس النتيجة السابقة.

- 5- لتكن الدارة المبينة في الشكل. عين عدد ومواضع أصفار وأقطاب $Y(s)$.
عين كذلك قيمة $Y(s)$ عندما $s=0$.



الحل

$$\text{نضع} \quad z_1 = 4 + \frac{1}{s_c} = 4 + \frac{1}{0.1s}, \quad z_2 = 2 + 4s$$

فيكون:

$$y_1 = \frac{1}{4 + \frac{1}{0.1s}} = \frac{0.1s}{1 + 0.4s} = \frac{s}{10 + 4s} \quad y_2 = \frac{1}{2 + 4s}$$

وتكون قبولية الفرعين:

$$y_3 = y_1 + y_2 = \frac{4s^2 + 6s + 10}{16s^2 + 48s + 20}$$

أما الممانعة الكلية فهي:

$$Z(s) = 2 + \frac{1}{y_3} = 2 + \frac{16s^2 + 48s + 20}{4s^2 + 6s + 10} = \frac{24s^2 + 60s + 40}{4s^2 + 6s + 10}$$

وأخيراً تكون القبولية الكلية للدائرة:

$$Y(s) = \frac{1}{z(s)} = \frac{4s^2 + 6s + 10}{24s^2 + 60s + 40}$$

تحدث الأصفار عندما $Y = \infty$ أي:

$$24s^2 + 60s + 40 = 0 \quad \text{ويتحقق ذلك من أجل } s_1 = -1.25 + j0.32 \quad \text{و } s_2 = -1.25 - j0.32$$

وهما عقديان . أي لدينا صفران عقديان هما s_1 و s_2

وتحدث الأقطاب عندما $Y = 0$ أي:

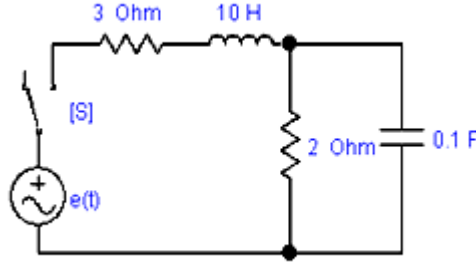
$$4s^2 + 6s + 10 = 0 \quad \text{وهذا يتحقق أيضاً من أجل } : s_1 = -0.75 + j1.39 \quad \text{و } s_2 = -0.75 - j1.39$$

وهما عقديان أيضاً

6- استخراج التيار $i(t)$ من أجل $t > 0$ للدائرة المبينة في الشكل حيث القوة المحركة الكهربائية لمنبع التوتر $e(t) = 20 \cos t / 2$ ، وتغلق القاطعة في اللحظة $t = 0$ عندما كان $e(t) = 10 \text{ V}$ ومتناقصاً. نفرض عدم وجود طاقة مخزونة في المكثفة في اللحظة $t = 0$.

الحل

الاستجابة الكلية هي مجموع الاستجابتين القسرية والاستجابة الطبيعية . لنبدأ بإيجاد الاستجابة القسرية أولاً.



بما أن صيغة التابع $e(t)$ لا تعطي للمنبع القيمة 10 V من أجل $t=0$ ، لذا يجب أن تعدل صيغة القوة المحركة الكهربائية للمنبع كي تأخذ الشكل العام التالي:
 $e(t)=20\cos(t/2\pm\varphi)$ وتعين φ بحيث يتحقق الشرط $e(0)=10\text{ V}$. إذا فعلنا ذلك نجد: $10 = 20 \cos\varphi$ التي ينتج عنها $\varphi = +60^\circ$ ، أخذنا الإشارة + لأن e متناقص. وتأخذ الصيغة الموافقة للقوة المحركة الكهربائية الشكل التالي :

$$e(t) = 20\cos(t / 2 + 60)$$

وصيغتها الطورية هي: $E = 20\angle 60^\circ\text{V}$.

أما الصيغة الطورية للتيار فهي $I = \frac{E}{Z(j\omega)}$ حيث $\omega = 1/2$ والممانعة

$$Z(j\omega) = 3 + j\omega L + \frac{2 \times \frac{1}{j\omega}}{2 + \frac{1}{j\omega}} = 3 + j5 - \frac{j40}{2 - j20} = 6.92\angle 44^\circ\Omega$$

ويعطى التيار بالتمثيل الطوري :

$$I = \frac{20\angle 60^\circ}{6.92\angle 44^\circ} = 2.89\angle 16^\circ\text{A}$$

ولوضعه بالصيغة الزمنية نكتب :

$$i(t) = \text{Re } 2.89e^{j16} \times e^{jt/2}$$

$$i(t) = 2.89\cos(t / 2 + 16)\text{A}$$

وهذه هي الاستجابة القسرية. أما الاستجابة الطبيعية فنحصل عليها من أصفار تابع الممانعة $z(s)$ ، فنكتب:

$$z(s) = 3 + 10s + \frac{20}{1 + 20s} = 0$$

ينعدم $z(s)$ من أجل: $s_1 = -0.18 + j0.29$ و $s_2 = -0.18 - j0.29$

ويكون شكل الاستجابة الطبيعية:

$$i_N(t) = e^{-0.18t} (Ae^{j0.29t} + Be^{-j0.29t})$$

حيث A و B ثابتان تتعينان من الشروط الابتدائية. وتصبح الاستجابة الكلية:

$$i_T(t) = 2.89 \cos(t/2 + 16) + e^{-0.18t} (Ae^{j0.29t} + Be^{-j0.29t})$$

عندما $t = 0$ كانت الدارة مفتوحة أي $i_T(0) = 0$. كما أن فرق الكمون بين طرفي المكثفة كان مساوياً $e(0)$ في تلك اللحظة أي:

$$e(0) = L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$$

يعطي الشرط الأول $0 = 2.89 \cos(16^\circ) + A + B$

أو $A + B = -2.78$

كما يعطي الشرط الثاني:

$$2 \cos 60^\circ = -0.5 \times 2.89 \sin 16^\circ - 0.18(A+B) + j0.29A - j0.29B$$

أو $1.398 = -0.18(A+B) + j0.29(A-B)$

بحل هاتين المعادلتين نجد:

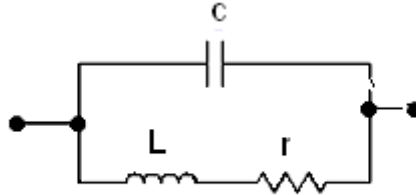
$$B = -1.39 + j3.27 \quad \text{و} \quad A = -1.39 - j3.27$$

وبالتعويض عن A وعن B بهاتين القيمتين في معادلة الاستجابة الكلية نجد صيغة التيار المطلوبة.

7- مكثفة مثالية سعتها C موصولة على النفرع مع تحريضية L مقاومتها الداخلية r ،

أ- عين تواتر التجاوب لهذه الدارة، ثم بين أنها تكافئ في حالة التجاوب مقاومة صرفة قيمتها: $R_D = \frac{L}{rC}$

ب- تطبيق: وشيعة تحريضيتها 120 mH وعامل جودتها 8 موصولة على النفرع مع مكثفة سعتها $60 \mu \text{F}$. يغذيها منبع توتر جيبي متغير التواتر. عين تواتر التجاوب لهذه الدارة وممانعتها التحريكية R_D عند التجاوب.



الحل

يحدث التجاوب عندما ينعدم الجزء التخيلي من الممانعة العقدية للدارة. تعطى قبولية الدارة بالعلاقة:

$$Y = j\omega c + \frac{1}{r + j\omega L} = j\omega c + \frac{r - j\omega L}{r^2 + \omega^2 L^2}$$

$$Y = \frac{r}{r^2 + \omega^2 L^2} + j\omega(c - \frac{L}{r^2 + \omega^2 L^2}) \quad \text{أو}$$

فشرط حدوث التجاوب أن تكون القبولية ناقلية صرفة، أي أن ينعدم الجزء التخيلي من علاقة القبولية، أي:

$$c - \frac{L}{r^2 + \omega^2 L^2} = 0$$

ومنها نجد أن التواتر ω_r الذي يحدث عنه التجاوب يعطى بالعلاقة:

$$\omega_r \frac{1}{\sqrt{Lc}} \sqrt{1 - \frac{cr^2}{L}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{cr^2}{L}}$$

حيث:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{Lc}}$$

وتكون الممانعة في وضع التجاوب مقاومة صرفة R_D ، وتحسب من العلاقة:

$$\frac{1}{R_D} = \frac{r}{r^2 + \omega^2 L^2} = \frac{cr}{L}$$

وذلك بالاستفادة من علاقة شرط التجاوب. وأخيراً نجد:

$$R_D = \frac{L}{cr}$$

ب- التطبيق: إذا عرفنا عامل الجودة كما في الدارة التسلسلية بالعلاقة:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r}$$

فإن تواتر التجاوب يمكن أن يعطى بدلالة عامل الجودة بالعلاقة التالية:

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}$$

وتعطى عندئذ المقاومة التحريكية بالعلاقة

$$R_D = Q^2 r$$

لنحسب ω_0 من العلاقة:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{Lc}} = 372.68 \text{ Hz.}$$

فيكون تواتر التجاوب $\omega_r = 369.755 \text{ Hz}$ والمقاومة الداخلية للملف:

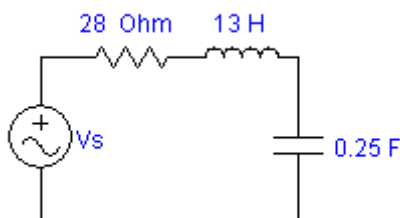
$$r = \frac{\omega_0 L}{Q} = 5.59 \Omega$$

وتكون المقاومة التحريكية في وضع التجاوب $R_D = Q^2 r = 357.76 \Omega$.

8- يعطى توتر المكثفة في دائرة الشكل بالعلاقة:

$$v_c(t) = 4te^{-2t} V$$

والمطلوب: آ- أوجد صيغة التيار الجاري في الدارة. ب- احسب الطاقة المخزونة في كل من المكثفة والملف في اللحظة $t = 5 \text{ s}$. ج- أوجد صيغ التوتر لكل من الملف والمقاومة والتوتر الكلي v_s . افرض أن شحنة المكثفة كانت معدومة في اللحظة $t=0$.



الحل:

آ- التيار الجاري في الدارة:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = c \frac{dv_c(t)}{dt} = c \frac{d}{dt} [4te^{-2t}] = e^{-2t} (1 - 2t)$$

ب- الطاقة المخزونة في المكثفة:

$$W_c(t) = \frac{1}{2} c v_c^2(t) + W_c(0) = \frac{1}{2} c [v_c^2(t) - v_c^2(0)]$$

ولكن $v_c(0) = 0$ إذن $W_c(0) = 0$ ، وتكون طاقة المكثفة:

$$W_c(t) = \frac{1}{2} \times 0.25 (4te^{-2t})^2 = 2t^2 e^{-4t}$$

أما الطاقة المخزونة في الملف:

$$W_L(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) + \frac{1}{2} Li^2(0)$$

ولكن $i(0) = 1$ إذن

$$W_L(t) = 6.5e^{-4t} (1-2t)^2 + 6.5$$

، $W_C(5\text{ms}) = 4.9 \times 10^{-5} \text{ J}$ بالتعويض في اللحظة $t = 5 \text{ s}$ نجد:

$$W_L(5\text{ms}) = 12.74 \text{ J}$$

ج- التوتر في الملف:

$$v_L(t) = L \frac{di}{dt} = -52e^{-2t} (1-t)$$

والتوتر في المقاومة:

$$v_R(t) = Ri(t) = 28e^{-2t} (1-2t)$$

أما التوتر الكلي $v_s(t)$ فيساوي مجموع التوترات الثلاث :

$$v_s(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = -24e^{-2t}$$

9- في الدارة المبينة في الشكل، أوجد الصيغ الطورية لكل من I_R و I_C و V_R و

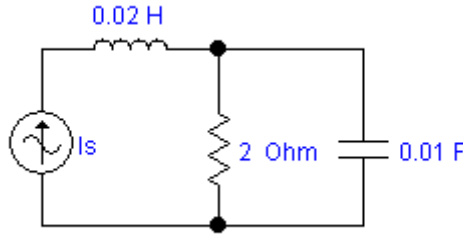
V_C و V_L ، وذلك بفرض أن $I_s = 2 \angle 0^\circ$ و $\omega = 50 \text{ rad/s}$

الحل

بتطبيق قانون تجزئة التيار نجد I_C و I_R :

$$I_C = \frac{Y_C}{Y_C + Y_R} I_s = \frac{j0.5}{0.5(1+j)} 2 \angle 0^\circ = \sqrt{2} \angle 45^\circ \text{ A}$$

$$I_R = \frac{Y_R}{Y_R + Y_C} I_s = \frac{0.5}{j0.5 + 0.5} 2 \angle 0^\circ = \sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ A}$$



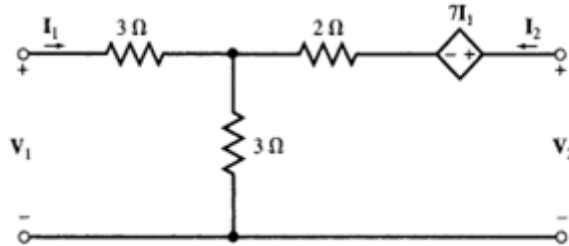
لحساب V_R و V_C نلاحظ من الشكل أن $V_C = V_R$ ، وعليه يكون:

$$V_R = RI = 2 \times \sqrt{2} \angle -45^\circ V$$

أما V_L فنحسبها كما يلي:

$$V_L = I_s \cdot Z_L = 2 \angle 0^\circ \times j50 \times 0.02 = 2 \angle 90^\circ$$

10- أوجد الوسطاء Z لدائرة الشكل.



الحل:

نكتب معادلتين العروتين:

$$V_1 = 6I_1 + 3I_2 \quad \text{معادلة عروة الدخل تعطي:}$$

$$V_2 = 10I_1 + 5I_2 \quad \text{معادلة عروة الخرج تعطي:}$$

من المعادلتين نجد أن الوسطاء Z للدائرة هي:

$$Z_{11} = 6, \quad Z_{12} = 3, \quad Z_{21} = 10, \quad Z_{22} = 5$$

ملحق 2: الثوابت الفيزيائية

عدد أفوكادرو	N_A	6.022×10^{23} atoms per mole
نصف قطر بور	a_0	52.9177 picometer 0.529177 Angstrom
ثابت بولتزمان	k	1.38×10^{-23} Joule/Kelvin 8.62×10^{-5} electron Volt/Kelvin
شحنة الإلكترون	q	1.602×10^{-19} Coulomb
كتلة الإلكترون السكونية	m_0	9.11×10^{-31} kilogram 5.69×10^{-16} eV s ² cm ⁻²
نفوذية الخلاء	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ Henry/meter
سماحية الخلاء	ϵ_0	8.854×10^{-12} Farad/meter 8.854×10^{-14} Farad/centimeter
ثابتة بلانك	h	6.625×10^{-34} Joule second 4.134×10^{-15} electron Volt second
ثابتة بلانك المختزلة	\hbar	1.054×10^{-34} Joule second
كتلة البروتون	M	1.67×10^{-27} Kilogram
ثابتة رايدبرغ	R	2.17991×10^{-18} Joule 13.6058 electron Volt
سرعة الضوء في الخلاء	c	2.998×10^8 meter/second 2.998×10^{10} centimeter/second
الفلطية الحرارية (عند T= 300K)	$V_t = \frac{kT}{q}$	25.86 milliVolt

المصطلحات العلمية

المصطلح العربي	المصطلح الإنكليزي
A	
قدرة ممتصة	absorbed power
أخذة،	acceptor
شائبة أخذة	acceptor impurity
فاعل، فعال	active
عنصر فاعل	active element
قبولية	admittance
وسطاء قبولية	admittance parameters
محولة بنواة هوائية	air-core transformer
تيار متناوب	alternating current (a.c)
أمبير	ampere
أمبير-ساعة	ampere-hour
سعة	amplitude
حاسوب تماثلي	analog computer
طرائق التحليل	analysis methods
تواتر زاوي، تردد زاوي	angular frequency
مصعد، أنود	anode
قدرة ظاهرة	apparent power
مخمدة	attenuator

averagepower	قدرة وسطية
average value	قيمة وسطية، قيمة متوسطة
B	
band	عصابة
Band-pass filter	مرشح تمرير عصابي
bandwidth	عرض عصابي
battery	بطارية
bias	انحياز
bilateral element	عنصر متماثل الطرفين
bipolar junction transistor (BJT)	ترانزستور وصلي ثنائي القطبية
bond	رابطة
boundary conditions	شروط حدية
branch	فرع
branch current	تيار فرعي
break down	تصدع، انهيار
C	
capacitance	مواصلة
capacitive reactance	ردية وسعية
capacitive susceptance	طواعية وسعية
capacitor	مكثفة
capacitor discharge	انفراغ المكثفة

cascade connection	وصل على التعاقب
cathode	كاتود، مهبط
characteristic curve	منحني مميّز
characteristic impedance	ممانعة مميزة
charge	شحنة
charge carrier	حامل شحنة
circuit analysis	تحليل الدارة
circuit diagram	مخطط الدارة
circuit element	عنصر الدارة
circuit in s –domain	دارة في نطاق التواتر (s)
close coupling	اقتران مُحكَم
coil	ملف
collector	مُجمَع (في الترانزستور)
Column	عمود
complex frequency	تواتر عقدي
complex number	عدد عقدي
complex power	قدرة عقدية
concentration	تركيز
conductance	ناقلية
conduction band	عصابة النقل
conductor	ناقل
connection in parallel	وصل على التفرع، وصل على

	التوازي
connection in series	وصل على التسلسل
constant quantities	مقادير ثابتة
contact	تماس
continuous	مستمر
continuous current	تيار مستمر
controlled source	منبع غير مستقل، منبع تابع
convergence	تقارب
converting between z- and y – parameters	تحويل بين الوسطاء z والوسطاء y
cosine	جيب التمام، تجب
cosine wave	موجة تجب
Coupled circuits	دارات مقرونة
coupled coils	ملفات مقرونة
coupling	اقتران
coupling admittance	قبولية الاقتران
coupling coefficient	معامل الاقتران
covalent band	عصابة التكافؤ
Cramer's rule	قاعدة كرامر
critically damped	متخامد تخامداً حرجاً
crystal	بلورة
current source	منبع تيار

current divider	مُجَزَّى تيار
current-controlled source	منبع تيار غير مستقل
Cut-off frequency	تواتر القطع
D	
damped oscillation	اهتزازة متخامدة
damping	تخامد
DC steady state	حالة مستقرة بتيار مستمر
delta connection	توصيل مثلثي
delta network	شبكة مثلثية
density	كثافة
dependent source	منبع غير مستقل
depletion layer	طبقة ناضبة
determinant	معين
determinant method	طريقة المعينات
diagonal	قطري
diagram	مخطط
differential	تفاضلي
differential equation	معادلة تفاضلية
diffusioin	انتثار
diffusionconstant	ثابتة الانتثار
digital computer	حاسوب رقمي
diode	ديود

diode models	نماذج الديود
direct current (dc)	تيار مستمر
discharge	انفراغ
discontinuity	انقطاع
doner	معطية، مانحة
doner impurity	شائبة ملنحة، شائبة معطية
dot rule	قاعدة النقطة
drift	انسحاق
drift current	تيار الانسحاق
drift velocity	سرعة الانسحاق
dynamic resistance	مقاومة تحريكية
E	
effective power	قدرة منتجة
effective value	قيمة منتجة
efficiency	مردود
electric charge	شحنة كهربائية
electric current	تبار كهربائي
electric field	حقل كهربائي
electric network	شبكة كهربائية
electric potential	كمون كهربائي، جهد كهربائي
electric power	قدرة كهربائية
electrical units	واحدات كهربائية
electromotive force (emf)	قوة محركة كهربائية (ق.م.ك.)

electron charge	شحنة الإلكترون
electron conduction	نقل بالإلكترونات
electron volt	إلكترون فاط
element	عنصر
elements in parallel	عناصر موصولة على التفرع
elements in series	عناصر موصولة على التسلسل
emission	إصدار
emitter	باعث (في الترانزستور)
Energy	طاقة
energy band	عصابة الطاقة
energy exchange	تبادل الطاقة
energy gap	فرجة الطاقة
equivalent circuit	دائرة مكافئة
equivalent delta connection	وصل مثلثي مكافئ
equivalent Y connection	وصل نجمي مكافئ
Euler's formula	صيغة أولر
exponential	أسّي
exponential decay	تضاؤل أسّي
exponential function	دالة أسّية
exponential source	منبع أسّي
extrinsic semiconductor	نصف ناقل مُطعم (لا ذاتي)
F	
Faraday's law	قانون فارادي

Farads	فاراد
feedback	تغذية راجعة
field effect transistor (FET)	(FET) ترانزستور مفعول الحقل
filter	مرشّح
final-value	قيمة نهائية
first-order circuit	دارة من المرتبة الأولى
flux	تدفق
flux linkage	رباط التدفق
forbidden band	عصابة محظورة
forbidden gap	فرجة محظورة
force	قوة
forced response	استجابة قسرية
forward-bias	انحياز أمامي
four-terminal network	شبكة رباعية الأطراف
frequency domain	نطاق التواتر
frequency response	استجابة للتواتر
G	
gain	ربح، كسب
gap	فُرجة
generator	مولّد
Giga	10^6 جيجا =
graph	رسم بياني، شكل
graphical analysis	تحليل بياني

grid	شبكة (في أنبوب إلكتروني)
H	
half-power frequencies	تواتر نصف القدرة
half-power points	نقطتا نصف القدرة
half-wave	نصف موجة
harmonics	توافقيات
high-pass filter	مرشح تمرير علوي
horsepower	حصان بخاري
h-parameters	hالوسطاء
hybrid	هجين، مختلط
hybrid parameters	وسطاء مختلطة
I	
ideal diode	ديود مثالي
ideal source	منبع مثالي
Ideal transformer	محولة مثالية
imaginary part	الجزء التخيلي (من مقدار عقدي)
impedance	ممانعة
impedance matching	مواءمة الممانعات، توفيق الممانعات
impedance parameters	وسطاء ممانعة
impurity	شائبة
impurity atom	ذرة شائبة
in parallel	على التفرع
in phase	توافق في الطور

in series	على التسلسل
independent source	منبع مستقل
Inductance	تحريضية
Inductive reactance	ردية تحريضية
Inductive susceptance	طواعية تحريضية
inductor	محرّضة
initial conditions	شروط ابتدائية
initial-value	قيمة ابتدائية
input admittance	قبولية الدخل
Instantaneous value	قيمة آنية
Input	دخل
Input impedance	ممانعة الدخل
Input resistance	مقاومة الدخل
Instantaneous power	قدرة آنية
Insulator	عازل
Integrated circuit	دارة متكاملة
Integrator	مكامل
Integrator circuit	دارة مكامل
Intrinsic semiconductor	نصف ناقل أصيل (ذاتي)
Inverter	عاكس
Inverting circuit	دارة عاكسة
ionization	تأين
iron-core transformer	محوّلة بلب حديدي

iterative network	شبكة تكرارية
J	
Junction	وصلة
Junction diode	ديود وصلي
Junction transistor	ترانزستور وصلي
K	
kinetic energy	طاقة حركية
Kirchhoff's current law (KCL)	قانون كرشوف في التيار
Kirchhoff's law	قانون كرشوف
Kirchhoff's voltage law (KVL)	قانون كرشوف في الفلطيّة
L	
lag	تأخر
lead	تقدّم
leakage current	تيار التسرب
Lenz's law	قانون لينز
linear element	عنصر خطي
linear transformer	محوّلة خطية
load	حمولة، حمل
load line	خط الحمولة
loop	عروة
loop analysis	تحليل عروي
loop current method	طريقة التيارات العروية
loss	فقد، ضياع

low-pass filter	مرشح تمرير سفلي
M	
magnetic flux density	شدة التدفق المغنطيسي
magnetizing current	تيار مُمغِبِط
magnetic flux linkage	رباط التدفق المغنطيسي
magnitude	مقدار، طويَلة
majority	أكثرية
majority carriers	حاملات الشحنة الأكثرية
matching impedance	ممانعة مواعمة
matching resistance	مقاومة مواعمة
matrix	مصفوفة
maximum power transfer	انتقال القدرة العظمى
maximum power transfer theorem	نظرية انتقال القدرة العظمى
mean value	قيمة متوسطة
mesh	حلقة من شبكة
mesh (loop) current	تيار عروي
minimum	أصغري
minority carriers	حاملات الشحنة الأقلية
mobility	حركية
mutual coupling	اقتران متبادل
mutual impedance	ممانعة متبادلة
mutual inductance	تحريضية متبادلة
N	

natural	طبيعي
natural frequency	تواتر طبيعي
natural response	استجابة طبيعية
Neper	نيبر
network	شبكة
nodal analysis	تحليل عقدي
node	عقدة
node voltage	توتر (فلطية) العقدة
noninverting	غير عاكس
nonlinear element	عنصر لا خطي
nonperiodic	لا دوري
Norton equivalent	مكافئ نورتون
Norton's theorem	نظرية نورتون
n-p-n transistor	ترانزستور
n-type semiconductor	n نصف ناقل من النوع
O	
Ohm's law	قانون أوم
op amp	مضخم عملياتي
open loop	عروة مفتوحة
one port network	شبكة ذات ممر وحيد (ثنائية الأطراف)
open-circuit	دائرة مفتوحة
open-loop gain	ربح العروة المفتوحة
operation point	نقطة العمل

operational amplifier	مضخم عملياتي
order	رتبة، مرتبة، نظام
oscillation	اهتزازة
oscillator	هزازة
out put	خرج
P	
p- type semiconductor	P نصف ناقل من النوع
parallel resonance	تجاوب تفرعي
parallel-connected impedances	ممانعات موصولة على التفرع
parameter	وسيط
pass band filter	مرشح تمرير عصابي
passive	منفعل
passive filter	مرشح منفعل
passive element	عنصر منفعل
Passive network	شبكة منفعة
periodic	دوري
Periodic function	دالة دورية
Phase	طور
phase angle	زاوية الطور
phase diagram	مخطط طوري
phase difference	فرق الطور
phase shift	انزياح الطور
phase shifter circuit	دائرة مزيجة للطور

phasor	مقدار طوري
pico	10^{-12} بيكو =
pi-equivalent	مكافئ Π ، مكافئ مثلثي
pi-equivalent network	شبكة مكافئة من النوع Π (المثلثي)
pi-network	شبكة Π ، شبكة مثلثية
pi-Ticonversion	تحويل من توصيل مثلثي إلى نجمي
plane angle	زاوية مستوية
p-n-p transistor	p-n-p ترانزستور
polar form	شكل قطبي
Polarity	قطبية
poles and zeros	الأقطاب والأصفار
potential barrier	حاجز الكمون
potential energy	طاقة كامنة
potentiometer	مقياس كمون
power factor	عامل القدرة
power transfer	انتقال القدرة
primary	أولي
primary winding	ملف الأولية (في المحولة)
principal node	عقدة اساسية
pulse	نبضة
pulse function	دالة نبضية
pulse source	منبع نبضي
Q	

Q factor	عامل الجودة
Q point	نقطة العمل
quadratic	تربيعي
quality factor	عامل الجودة
quiescent poin	نقطة العمل، نقطة السكون
R	
radian	راديان
radius	نصف القطر
random	عشوائي
reactive	ردّي
range	مجال
reactive element	عنصر ردي
reactive power	قدرة ردية
real part	الجزء الحقيقي (من عدد عقدي)
real power	قدرة حقيقية
rectifier	مُقوم
reference node	عقدة مرجعية
reflected impedance	ممانعة منعكسة
reflected resistance	مقاومة منعكسة
resistance	مقاومة
resistivity	مقاومية، مقاومة نوعية
resistor	عنصر المقاومة
resonance	تجاوب

response	استجابة
reverse-biased	انحياز عكسي
RLC circuit in parallel	تفرعية RCL دائرة
RLC circuit in serie	تسلسلية RCL دائرة
RMS value	قيمة الجذر التربيعي لمتوسط المربعات، القيمة المنتجة
root-mean-square current	الجذر التربيعي لمتوسط مربعات التيار، القيمة المنتجة للتيار
root-mean-square voltage	الجذر التربيعي لمتوسط مربعات الفلطية، القيمة المنتجة للفلطية
row	سطر
S	
s –domain	(التواتر) S في نطاق
saturation current	تيار الإشباع
sawtooth waveform	شكل موجي كأسنان المنشار
scalar	سلمي ، عددي
secondary	ثانوي
Secondary winding	ملف الثانوية (في المحولة)
second-order circuit	دائرة من المرتبة الثانية
self-admittance	قبولية ذاتية
self-inductance	تحريضية ذاتية
semiconductor	نصف ناقل
series equivalent circuit	دائرة مكافئة تسلسلية
series resonance	تجاوب تسلسلي
series-parallel conversion	تحويل من وصل تسلسلي إلى تفرعي

short-circuit	دارة قصيرة
SI units	واحدات الجملة الدولية
Siemens	سيمنز (مقلوب الأوم)
sign convention	اصطلاح الإشارة
signal	إشارة
simple node	عقدة بسيطة
sine wave	موجة جيب
single crystal	بلورة أحادية
sinusoidal	جيبى
sinusoidal function	دالة جيبية
sinusoidal steady state	حالة مستقرة جيبية
sinusoidal steady-state circuit	دارة في الحالة المستقرة الجيبية
software	برمجيات
source-free circuit	دارة خالية من المصادر
star connection	توصيل نجمي
static resistance	مقاومة سكونية
stationary conditions	شروط مستقرة
steady state	حالة مستقرة
step function	دالة درجية
step response	استجابة لدالة درجية
superposition	انضمام
superposition theorem	نظرية الانضمام
susceptance	طواعية

switching	تحويل بين وصل وفصل
symmetric	متناظر
symmetric matrix	مصفوفة متناظرة
symmetrical network	شبكة متناظرة
T	
T –parameters	T وسطاء الشبكة النجمية
T-equivalent	مكافئ نجمي، مكافئ من نوع T
T-equivalent network	(T شبكة مكافئة نجمية (من نوع
Tera	10^{12} تيرا =
terminal	طَرَف
Tesla	تسلا (واحدة التحريض المغنطيسي)
The´venin equivalent	مكافئ ثيفينين
The´venin equivalent voltage	توتر مكافئ ثيفينين
The´venin's theorem	نظرية ثيفينين
time constant	ثابتة زمنية
Time domain	في نطاق الزمن
time response	استجابة بدلالة الزمن
tow-terminal network	شبكة ثنائية الأطراف
transfer	نقل، انتقال
transfer impedance	ممانعة الانتقال
transfer resistance	مقاومة الانتقال
transformer	محوّلة
transient analysis	تحليل الحالة العابرة

transient current	تيار الحالة العابرة
transient voltage	توتر الحالة العابرة
transistor	ترانزستور
transition	انتقال
trigonometric	مثلثاتي
trigonometric form	صيغة مثلثائية
tuning	توليف
two-port network	شبكة ذات ممرين، شبكة رباعية الأطراف
U	
unilateral element	عنصر متمائل الطرفين
unit	واحدة
unit cell	خلية الواحدة
univalent	أحادي التكافؤ
V	
valence	تكافؤ
valence band	عصابة التكافؤ
valve	صمام
vector operator	مؤثر متجه
velocity	سرعة
voltage	فلطية، جهد، توتر
voltage divider	مجزئ فلطية، مجزئ توتر
voltage division	تجزئة الفلطية

voltage drop	هبوط الفلطية
voltage follower	متتبع الفلطية
voltage source	منبع فلطية، منبع توتر
voltage-controlled source	منبع توتر غير مستقل
volt-ampere characteristics	الخواص المميزة فلط-أمبي
volt-ampere reactive	فلط-أمبير ردّي (واحدة قدرة)
W	
Watt	واط
wattmeter	مقياس قدرة
waveform	شكل موجي
wavelength	طول موجي
Weber	فيبر (واحدة تدفق)
work function	دالة العمل
Y	
Y- network	شبكة نجمية، Y شبكة
Y- parameters	وسطاء القبولية، Y وسطاء
Z	
Z –parameters	وسطاء الممانعة، Z وسطاء
zero bias	انحياز معدوم

المراجع العلمية

1-المراجع الإنكليزية:

1-*Engineering Circuit Analysis*: William H.Hayt, Jr. and Jack E. Kemmewely, Fourth Edition,(1987); McGraw-Hill Series in Electrical Engineering.

2-*Elementary Linear CircuitAnalysis*: Leonard S. Bobrow, Second edition,(1987) ; HRW Series in Electrical Engineering.

3-*Electronic Engineering*:Charles L. Alley and Kenneth W. Atwood, second edition, (1963), John Willey & sons, Inc.

4- *Analysis of electric circuits* (translated from Russian): G.Zeveke, P.Ionkin, A. Netushil, S. Strakhov,(1969), Mir publishers.

5- *Theory and problems of Electric Circuits*: Mahmood Nahvi and Joseph A. Edminister, Fourth edition,(2003), Schaum's outline series, McGraw-Hill.

6-Schaum's outlines of "*Theory and problems of basic circuits*", John R.O'malley.

7- *Introduction to semiconductor physics*: R.B.Adler, A.C.Smith, R.L.LonginiJohn, (1964), Wiley & Sons,Inc.

8-*Electric Circuit Theory*:R. Yorke (1983),Pergamon press.

9-[htt://www.electronics-tutorials-ws/diode/diode](http://www.electronics-tutorials-ws/diode/diode)

10-[htt://www.electronics-tutorials-ws/transistor/transistor](http://www.electronics-tutorials-ws/transistor/transistor)

2-المراجع العربية:

- 1-المدخل إلى دراسة الإلكترونيات: محمد قعقع، مطبوعات جامعة دمشق(1989).
- 2-الإلكترونيات (1): حسن اسماعيل وضيف الله منصور، مطبوعات جامعة تشرين (1997).
- 3-الإلكترونيات: الياس أبو شاهين، مطبعة محمد هاشم الكتبي (1976).
- 4-أسس الإلكترونيات: عبد الوهاب دويدري، منشورات جامعة حلب (1981).

اللجنة العلمية:

- الدكتور محمد سعيد محاسنة
- الدكتور فوزي عوض
- الدكتور معن سليم

المدقق اللغوي:

- الدكتور فخري بوش

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة لمديرية الكتب والمطبوعات