الدرس الأول

البرهان الاستدلالي

البرهان الاستدلالي :-

هو أن تستخدم المفاهيم والخواص الهندسية والحقائق الهندسية التي سبق دراستها ومعرفتها في الاستدلال على الحلول والبراهين للنظريات والتمارين نظريا دون استخدام الأدوات الهندسية.

كيف تكتب البرهان في الهندسة

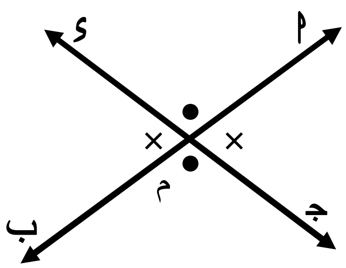
- ✓ اقرأ المسألة جيدا .
- ✓ اكتب " المعطيات " وهى المعلومات التي تم ذكرها في المسألة .
- ✓ اكتب " المطلوب " وهو ما تريد إيجاده أو إثباته .
- ✓ حاول رسم المسألة أن لم يكن الرسم موجود .
- ✓ اكتب على الرسم كل المعلومات التي تم ذكرها في المسألة مثل :- "
أطوال الأضلاع – قياسات الزوايا – تساوي أطوال الأضلاع – تساوى قياسات الزوايا – توازى الأضلاع وغيرها " .
- ✓ استخدم المعطيات التي تم ذكرها في المسألة في التوصل إلي المطلوب الذي تريده .

لاحظ أن :-

∵ تعنى ذكر سبب وتقرأ (بما أن)

∴ تعنى استنتاجا وتقرأ (إذن)

١ إذا تقاطع مستقيمان فإن كل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتين في القياس



المعطيات: $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$ مستقيمان متقاطعان في م

المطلوب: إثبات أن: ق (أ م̂ ء) = ق (ب م̂ جـ)

البرهان: ∵ (أ م̂ ء) ، (أ م̂ جـ) زاويتان متجاورتان ، $\overrightarrow{\text{مجـ}} \cup \overrightarrow{\text{مء}} = \overleftrightarrow{\text{جـء}}$

∴ ق (أ م̂ ء) + ق (أ م̂ جـ) = ١٨٠°

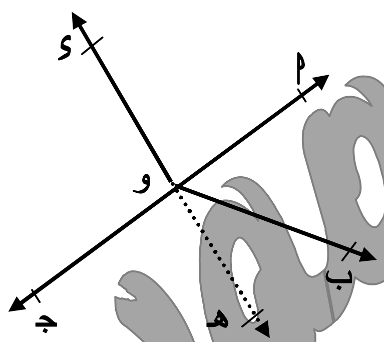
، ∵ (أ م̂ جـ) ، (ب م̂ جـ) زاويتان متجاورتان

، $\overrightarrow{\text{مأ}} \cup \overrightarrow{\text{مب}} = \overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∴ ق (أ م̂ جـ) + ق (ب م̂ جـ) = ١٨٠°

∴ ق (أ م̂ ء) + ق (أ م̂ جـ) = ق (أ م̂ جـ) + ق (ب م̂ جـ)

∴ ق (أ م̂ ء) = ق (ب م̂ جـ)   وهو المطلوب

٢ مجموع قياسات الزوايا المتجاورة المتجمعة حول نقطة يساوي ٣٦٠°



المعطيات: $\overrightarrow{\text{وأ}}$ ، $\overrightarrow{\text{وب}}$ ، $\overrightarrow{\text{وجـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{وء}}$ (٤ أشعه نقطة بدايتها و)

المطلوب: إثبات أن: مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول " و " = ٣٦٠°

العمل: نرسم المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ءو}}$ ، هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{ءو}}$

البرهان: ∵ ق (ء و̂ أ) + ق (أ و̂ ب) + ق (ب و̂ هـ) = ١٨٠°

، ق (هـ و̂ جـ) + ق (و جـ̂ ء) = ١٨٠°

∴ ق (ء و̂ أ) + ق (أ و̂ ب) + [ق (ب و̂ هـ) + ق (هـ و̂ جـ)] + ق (و جـ̂ ء) = ١٨٠° + ١٨٠° = ٣٦٠°

∴ ق (ء و̂ أ) + ق (أ و̂ ب) + ق (ب و̂ جـ) + ق (و جـ̂ ء) = ٣٦٠°   وهو المطلوب

بعض النظريات والنتائج

١ إذا قطع مستقيم مستقيمان متواريان فإن :-
كل زاويتان متبادلتان متساويتان في القياس
كل زاويتان متناظرتان متساويتان في القياس
كل زاويتان متداخلتان وفى جهة واحدة من القاطع متكاملتان (١٨٠°)

٢ المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودي علي الأخر.

٣ إذا وازي مستقيمان مستقيماً ثالثاً كانا هذان المستقيمان متوازيان.

٤ منصف الزاوية هو شعاع يقسم الزاوية إلى زاويتان متساويتان في القياس.

٥ الزاويتان المتتامتان مجموع قياسهما ٩٠ ° وضلعاها المتطرفان متعامدان.

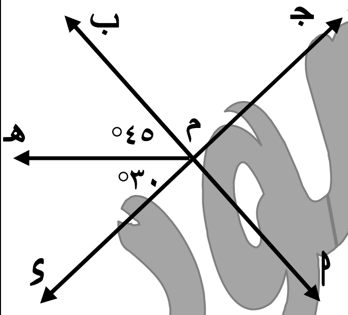
٦ الزاويتان المتكاملتان مجموع قياسهما ١٨٠° وضلعاها المتطرفان علي إستقامة واحدة .

٧ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = ١٨٠ ° .

٨ الزاوية الصفرية = صفر والزاوية القائمة = ٩٠ ° والزاوية المستقيمة = ١٨٠° .

---

(١) في الشكل المقابل :-



$\overleftrightarrow{\text{م أ}} \cap \overleftrightarrow{\text{م ب}}$ = {م}،

ق (د م̂ هـ)= ٣٠°، ق (ب م̂ هـ) = ٤٥° .

أوجد بالبرهان : ق (أ م̂ جـ) ؟

<u>المعطيات</u> : $\overleftrightarrow{\text{م أ}} \cap \overleftrightarrow{\text{م ب}}$ = {م}، ق (د م̂ هـ)= ٣٠°، ق (ب م̂ هـ) = ٤٥°

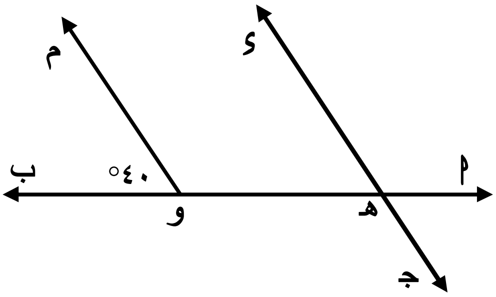
<u>المطلوب</u> : إيجاد ق (أ م̂ جـ) ؟

<u>البرهان</u> : ∵ ق (ب م̂ هـ) = ٤٥° ، ق (د م̂ هـ)= ٣٠° ∴ ق (ب م̂ ء) = ٤٥° + ٣٠° = ٧٥°

∵ $\overleftrightarrow{\text{م أ}} \cap \overleftrightarrow{\text{م ب}}$ = {م} ∴ ق (أ م̂ جـ) = ق (ب م̂ ء) (بالتقابل بالرأس)

∴ ق (أ م̂ جـ) = ٧٥° وهو المطلوب

(٢) في الشكل المقابل :-



$\overleftrightarrow{ٲب}$ ∩ $\overleftrightarrow{جء}$ = {هـ}، $\overleftrightarrow{جء}$ // $\overrightarrow{وم}$ ، و ∈ $\overleftrightarrow{ٲب}$

ق (م و̂ ب) = ٤٠° .

أوجد بالبرهان : ق (ٲ هـ̂ جـ) ؟

المعطيات : $\overleftrightarrow{ٲب}$ ∩ $\overleftrightarrow{جء}$ = {هـ}، $\overleftrightarrow{جء}$ // $\overrightarrow{وم}$ ، و ∈ ٲ ب ، ق (م و̂ ب) = ٤٠° .

المطلوب : إيجاد ق (ٲ هـ̂ جـ) ؟

البرهان : ∵ $\overleftrightarrow{جء}$ // $\overrightarrow{وم}$ ، $\overleftrightarrow{ٲب}$ قاطع لهما

∴ ق (د هـ̂ ب) = ق (م و̂ ب) = ٤٠° (بالتناظر)

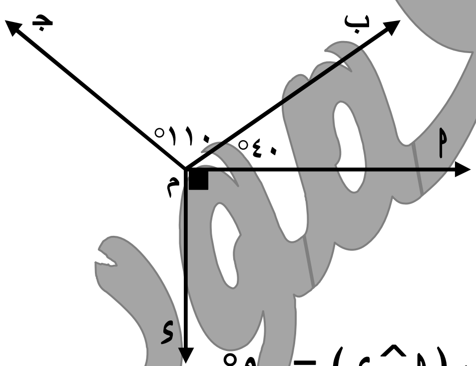
، ∵ $\overleftrightarrow{ٲب}$ ∩ $\overleftrightarrow{جء}$ = {هـ}

∴ ق (ٲ هـ̂ جـ) = ق (ء هـ̂ ب) (بالتقابل بالرأس)

∴ ق (ٲ هـ̂ جـ) = ٤٠° وهو المطلوب

---

(٣) في الشكل المقابل :-



ق (ٲ م̂ ب) = ٤٠° ، ق (ب م̂ جـ) = ١١٠°

ق (ٲ م̂ ء) = ٩٠°

أوجد بالبرهان : ق (جـ م̂ ء) ؟

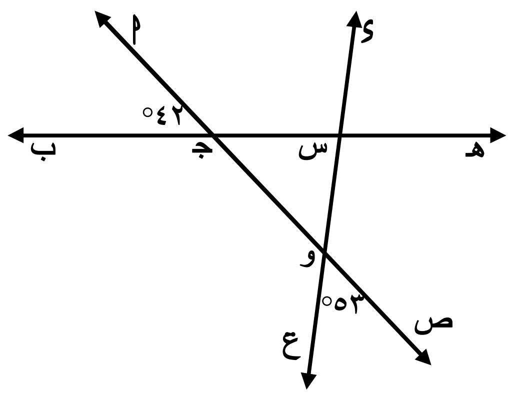
المعطيات : ق (ٲ م̂ ب) = ٤٠° ، ق (ب م̂ جـ) = ١١٠° ، ق (ٲ م̂ ء) = ٩٠°

المطلوب : إيجاد ق (جـ م̂ ء) ؟

البرهان : ∵ مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة م = ٣٦٠°

∴ ق (جـ م̂ ء) = ٣٦٠° − (٤٠° + ١١٠° + ٩٠°)

= ٣٦٠° − ٢٤٠° = ١٢٠° وهو المطلوب



(٤) في لشكل المقابل :-

أثبت أن : ق (د سَ هـ) = ٨٥° ثم أوجد :

ق (د سَ جـ) ، ق (هـ سَ و)

البرهان :

ق (س وَ جـ) = ق (ص وَ ع) (بالتقابل بالرأس) ∴ ق (س وَ جـ) = ٥٣°

ق (س جَـ و) = ق (أ جَـ ب) (بالتقابل بالرأس) ∴ ق (س جَـ و) = ٤٢°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث (س و ج) = ١٨٠°

∴ ق (و سَ جـ) = ١٨٠° − (٥٣° + ٤٢°) = ١٨٠° − ٩٥° = ٨٥°

ق (د سَ هـ) = ق (و سَ جـ) (بالتقابل بالرأس)

∴ ق (د سَ جـ) = ٨٥° المطلوب أولاً

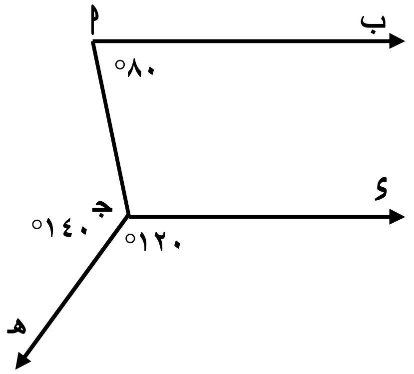
ق (د سَ هـ) + ق (د سَ جـ) = ١٨٠°

ق (د سَ جـ) = ١٨٠° − ٨٥° = ٩٥°

ق (هـ سَ و) = ق (د سَ جـ) (بالتقابل بالرأس)

∴ ق (هـ سَ و) = ٩٥° المطلوب ثانيا

(٥) في الشكل المقابل :-



ق (ب أ̂ جـ) = ٨٠° ، ق (د جـ̂ هـ) = ١٢٠°

، ق (أ جـ̂ هـ) = ١٤٠°

أثبت أن : أب ⟵ // جـ د ⟵ ؟

البرهان : ∵ ق (د جـ̂ أ) + ق (د جـ̂ هـ) + ق (أ جـ̂ هـ) = ٣٦٠°

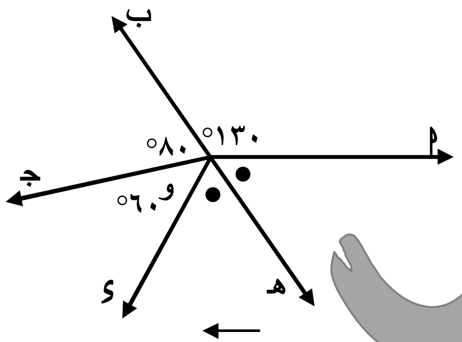
∴ ق (د جـ̂ أ) = ٣٦٠° − (١٢٠° + ١٤٠°) = ١٠٠°

∴ ق (أ ب̂ جـ) + ق (د جـ̂ أ) = ٨٠° + ١٠٠° = ١٨٠° **(وهما داخلتان وفى جهة واحدة من القاطع)**

∴ أب ⟵ // جـ د ⟵ **وهو المطلوب**

---

(٦) في الشكل المقابل :-



ق (أ و̂ ب) = ١٣٠° ، ق (ب و̂ جـ) = ٧٠°

، ق (جـ و̂ د) = ٦٠° ، وهـ ⟵ ينصف (أ و̂ د)

أثبت أن : وهـ ⟵ ، وب ⟵ **على إستقامة واحدة**

المعطيات : ق (أ و̂ ب) = ١٣٠° ، ق (ب و̂ جـ) = ٧٠° ، ق (جـ و̂ د) = ٦٠° ، وهـ ينصف (أ و̂ د)

المطلوب : إثبات أن : وهـ ⟵ ، وب ⟵ **على إستقامة واحدة** ؟

البرهان : ∵ ق (أ و̂ ب) + ق (ب و̂ جـ) + ق (جـ و̂ د) + ق (أ و̂ د) = ٣٦٠°

∴ ق (أ و̂ د) = ٣٦٠° − (١٣٠° + ٧٠° + ٦٠°) = ٣٦٠° − ٢٦٠° = ١٠٠°

، ∵ وهـ ⟵ ينصف (أ و̂ د)

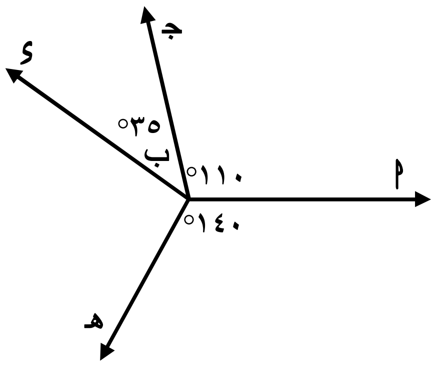
∴ ق (أ و̂ هـ) = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠°

∴ ق (أ و̂ ب) + ق (أ و̂ هـ) = ١٣٠° + ٥٠° = ١٨٠°

∴ وهـ ⟵ ، وب ⟵ **على إستقامة واحدة** **وهو المطلوب**

تمارين علي البرهان الاستدلالي

(١) في الشكل المقابل :-

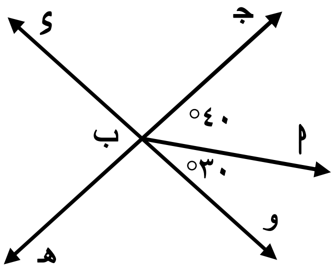


ق (أ ب̂ جـ) = ١١٠° ، ق (جـ ب̂ د) = ٣٥°

، ق (أ ب̂ هـ) = ١٤٠°

أوجد : ق (هـ ب̂ د) ؟

(٢) في الشكل المقابل :-

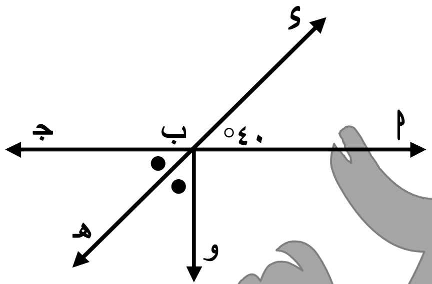


جـهـ↔ ∩ ود↔ = { ب } ، ق (ب أ̂ جـ) = ٤٠°

، ق (أ ب̂ و) = ٣٠°

أوجد : ق (د ب̂ جـ) ؟

(٣) في الشكل المقابل :-

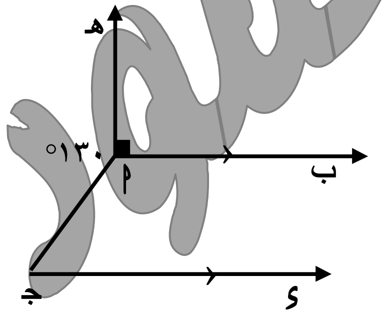


أجـ↔ ∩ دهـ↔ = { ب } ، ق (ب أ̂ د) = ٤٠°

، هـب← **ينصف** (جـ ب̂ و)

أوجد : ق (أ ب̂ و) ؟

(٤) في الشكل المقابل :-

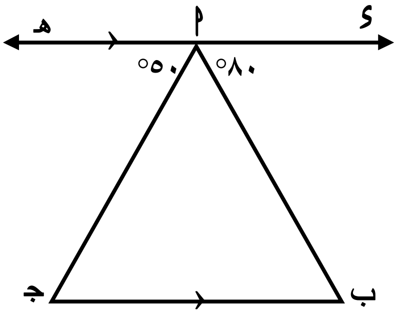


أب↔ // دجـ↔ ، ق (أ هـ̂ جـ) = ١٣٠°

، ق (هـ أ̂ ب) = ٩٠°

أوجد : ق (ب أ̂ جـ) ، ق (جـ̂) ؟

(٥) في الشكل المقابل :-

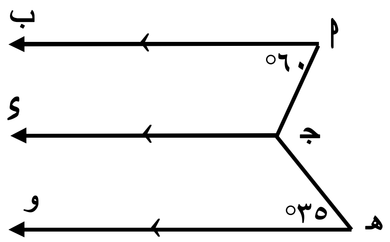


دهـ↔ // بجـ‾ ، أ ∈ دهـ ق (د أ̂ ب) = ٨٠°

، ق (هـ أ̂ جـ) = ٥٠°

أوجد قياسات زوايا Δ أ ب جـ ؟

(٦) في الشكل المقابل :-

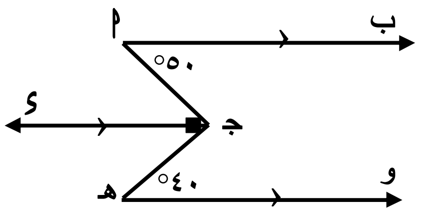


أ ب // جـ د ، أ ب // هـ و

، ق (∠أ) = ٦٠° ، ق (∠هـ) = ٣٥°

أوجد : ق (∠أ جـ هـ) ؟

(٧) في الشكل المقابل :-

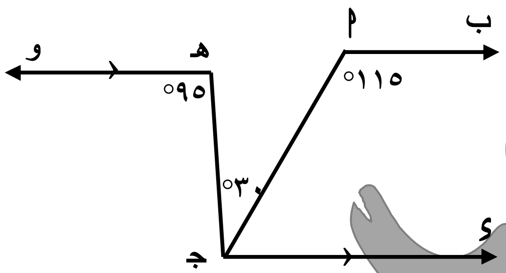


أ ب // جـ د ، ق (∠أ) = ٥٠°

، ق (∠أ جـ هـ) = ٩٠° ، ق (∠هـ) = ٤٠°

أثبت أن : أ ب // هـ و ؟

(٨) في الشكل المقابل :-

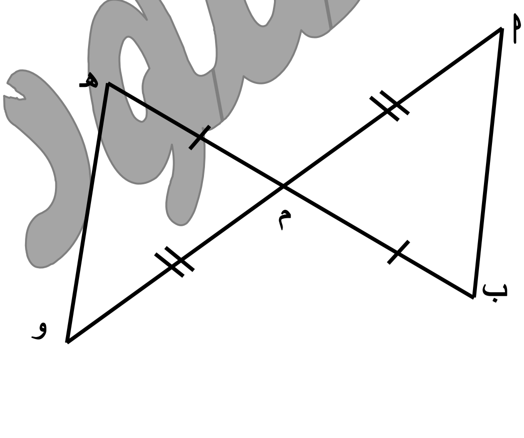


هـ و // جـ د ، ق (∠جـ هـ و) = ٩٠°

، ق (∠أ جـ هـ) = ٣٠° ، ق (∠ب أ جـ) = ١١٥°

أثبت أن : أ ب // هـ و ؟

(٩) في الشكل المقابل :-



$\overline{\text{أ د}} \cap \overline{\text{ب جـ}} = \{\text{م}\}$

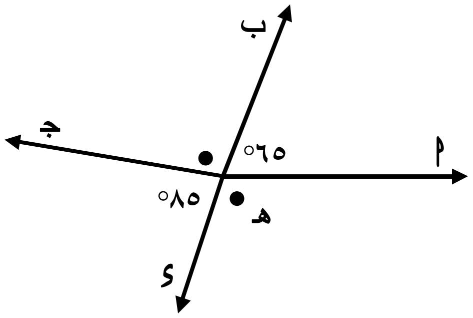
، م أ = م د ، م ب = م جـ

أثبت أن :

(١) أ ب = جـ د ؟

(٢) $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ د}}$ ؟

(١٠) في الشكل المقابل :-



هـ ﺃ ∩ هـ ب ∩ هـ جـ ∩ هـ ء = {هـ}

إذا كان : ق (ب هـ جـ) = ق (ﺃ هـ ء)

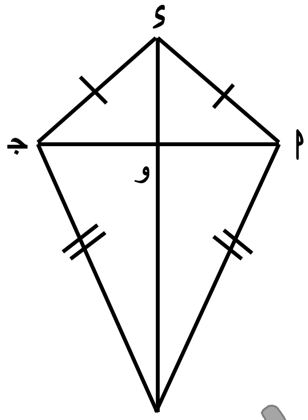
، ق (ﺃ هـ ب) = ٦٥° ، ق (جـ هـ ء) = ٨٥°

أوجد :

(١) ق (ب هـ جـ)

(٢) هل ﺃ ، هـ ، جـ على استقامة واحدة؟ ولماذا ؟

(١١) في الشكل المقابل :-



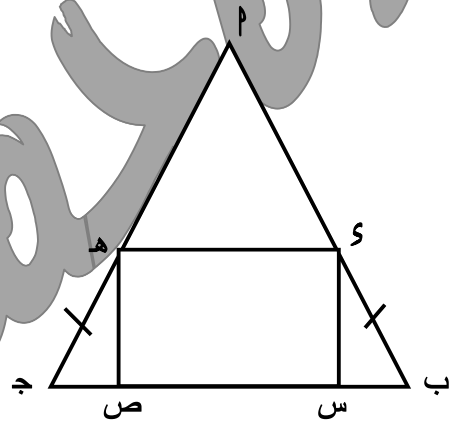
ﺃ ء = جـ ء ، ﺃ ب = ب جـ

استخدم خاصية تطابق مثلثين في إثبات أن :

(١) ء ب ينصف (ﺃ ء جـ)

(٢) ﺃ جـ ، ء ب متعامدان

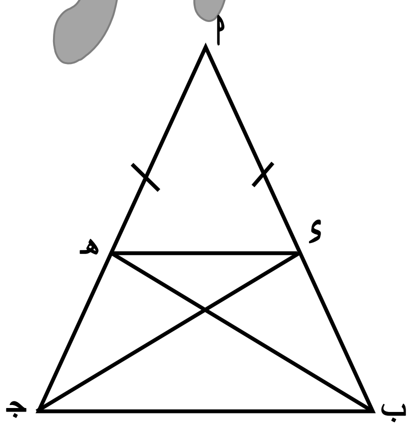
(١٢) في الشكل المقابل :-



هـ جـ = ء ب ، ء س ص هـ مستطيل

اثبت أن : ق (ﺃ ء هـ) = ق (ﺃ هـ ء)

(١٣) في الشكل المقابل :-



ﺃ ء = ﺃ هـ ، ق (ﺃ ء جـ) = ق (ﺃ هـ ب)

اثبت أن :

(١) ب هـ = جـ ء

(٢) ب ء = جـ هـ

الدرس الثاني

المضلع

الخط البسيط والخط غير البسيط

الخط البسيط : هو الخط الذي لا يقطع نفسه .

الخط غير البسيط : هو الخط الذي يقطع نفسه مرة أو أكثر .

الخط المغلق والخط المفتوح

الخط المغلق : هو الخط الذي ينتهي عند النقطة التي بدأ منها .

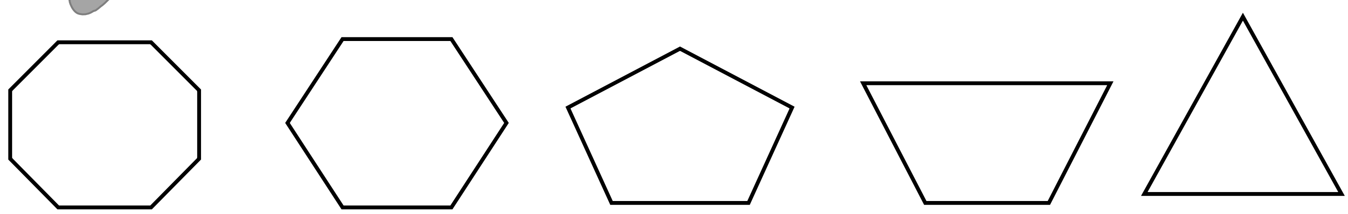
الخط المفتوح : هو الخط الذي تختلف فيه نقطة البداية عن نقطة النهاية .

المضلع

هو خط بسيط يتكون من اتحاد ثلاثة قطع مستقيمة أو أكثر ويسمي المضلع بعدد القطع المستقيمة المكونة له .

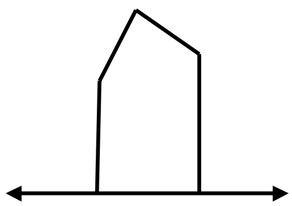
فمثلاً :

- ✓ إذا كان المضلع يتكون من ٣ قطع يسمى مضلع ثلاثي.
- ✓ إذا كان المضلع يتكون من ٤ قطع يسمى مضلع رباعي .
- ✓ إذا كان المضلع يتكون من ٥ قطع يسمى مضلع خماسي ....وهكذا



مضلع ثلاثي — مضلع رباعي — مضلع خماسي — مضلع سداسي — مضلع ثماني

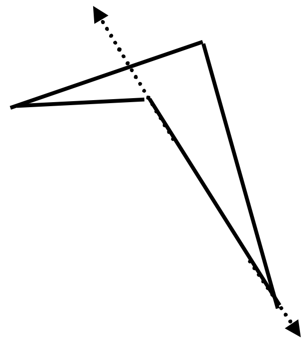
أنواع المضلع حسب زواياه



⟸ المضلع المحدب :

هو مضلع أي مستقيم يمر برأسين متتاليين تكون بقية رؤوس المضلع واقعة في أحد جانبي هذا المستقيم.

◄ يكون قياس أي زاوية من زوايا المضلع المحدب الداخلة أقل من ١٨٠ °



⟸ المضلع المقعر :

هو مضلع توجد مستقيمات تمر برأسين متتاليين وتقع بقية رؤوسه واقعة على جانبي هذه المستقيمات .

◄ توجد زاوية واحدة على الأقل من زوايا المضلع المقعر الداخلة قياسها أكبر من ١٨٠ ° (زاوية منعكسة)

((ملاحظـــــات))

- ✓ كل قطعة مستقيمة من القطع التي تكون المضلع تسمي " ضلعاً "
- ✓ كل نقطة ناتجة من تلاقى ضلعين متجاورين من أضلاع المضلع تسمي " رأساً "
- ✓ محيط أي مضلع يساوي مجموع أطوال أضلاعه يسمى " محيط المضلع "
- ✓ كل قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متتاليين في المضلع تسمى " قطراً "
- ✓ الزاوية المحصورة بين ضلعين متجاورين في المضلع تسمى " زاوية داخلة "
- ✓ الزاوية المحصورة بين أحد أضلاع المضلع وامتداد الضلع المجاور له تسمى " زاوية خارجه "
- ✓ عدد أضلاع المضلع = عدد رؤوس المضلع = عدد زوايا المضلع
- ✓ مجموع قياس الزاويتين الداخلة والخارجة عند أي رأس من رؤوس المضلع = ١٨٠ °

أنواع المضلع حسب أضلاعه

مضلع منتظم : هو مضلع جميع زواياه متساوية في القياس وجميع أضلاعه متساوية في الطول .

مضلع غير منتظم : هو مضلع ليست أضلاعه متساوية في الطول حتى وإن تساوت زواياه .

خلـــي بالك

لحساب مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه ن نستخدم ن = (ن – ٢) × ١٨٠°

لحساب عدد المثلثات التي ينقسم إليها أي مضلع نستخدم (ن – ٢)

لحساب عدد أقطار المضلع نستخدم $\frac{ن\,(ن - ٣)}{٢}$

مجموع قياسات الزوايا الخارجة لمضلع محدب (حتى المثلث) عدد أضلاعه ن يساوي ٣٦٠°

لإيجاد قياس كل زاوية داخله من زوايا المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه ن نستخدم $\frac{(ن - ٢) \times ١٨٠°}{ن}$

لإيجاد عدد أضلاع المضلع المنتظم نستخدم = $\frac{٣٦٠°}{١٨٠° - \text{الزاوية}}$

مثال ١: أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع الرباعي؟

الحـــــــــل

عدد الأضلاع ن = ٤

مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع = (ن – ٢) × ١٨٠°

مجموع قياسات الزوايا لهذا المضلع = (٤ – ٢) × ١٨٠° = ٢ × ١٨٠° = ٣٦٠°

مثال ٢: أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه ١٢ ضلع ؟

الحـــــــــل

عدد الأضلاع ن = ١٢

مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع = (ن − ٢) × ١٨٠°

مجموع قياسات الزوايا لهذا المضلع = (١٢ − ٢) × ١٨٠° = ١٠ × ١٨٠° = ١٨٠٠°

مثال ٣: أوجد قياس كل زاوية من الزوايا الداخلة للشكل السداسي المنتظم ؟

الحـــــــــل

عدد الأضلاع ن = ٦

$$\text{قياس زاوية الشكل السداسي المنتظم} = \frac{(ن - ٢) \times ١٨٠°}{ن}$$

$$= \frac{(٦ - ٢) \times ١٨٠°}{٦} = \frac{٤ \times ١٨٠°}{٦} = ١٢٠°$$

مثال ٤: أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم الذي قياس أحدى زواياه الداخلة = ١٣٥° ؟

الحـــــــــل

$$\text{عدد أضلاع المضلع المنتظم} = \frac{٣٦٠°}{١٨٠° - \text{الزاوية}}$$

$$= \frac{٣٦٠°}{١٨٠° - ١٣٥°} = \frac{٣٦٠°}{٤٥°} = ٨ \text{ أضلاع}$$

مثال٥ : أ ب جـ د شكل رباعي فيه ق(أ) : ق(ب) : ق(جـ) : ق(د) = ١ : ٢ : ٤ : ٥ أوجد قياس جميع زواياه ؟

الحـــــــــل

نفرض أن قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعي هي س ، ٢س ، ٤س ، ٥س

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعي = (٤ − ٢) × ١٨٠° = ٣٦٠°

∴ س + ٢س + ٤س + ٥س = ٣٦٠°

١٢س = ٣٦٠°

س = ٣٠°

∴ ق($\hat{أ}$) = ٣٠° ، ق($\hat{ب}$) = ٦٠°

ق($\hat{جـ}$) = ١٢٠° ، ق($\hat{د}$) = ١٥٠°

تمارين على المضلع

(١) أكمل ما يأتي :-

(١) عدد الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه ٧ أضلاع ....

(٢) عدد المثلثات التي ينقسم إليها مضلع عدد أضلاعه ٩ أضلاع ....

(٣) مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل السباعي ....

(٤) مجموع قياسات الزوايا الخارجة للشكل السداسي ....

(٥) أوجد عدد أقطار كلا من :

✓ المثلث ✓ الشكل الرباعي ✓ الشكل الخماسي

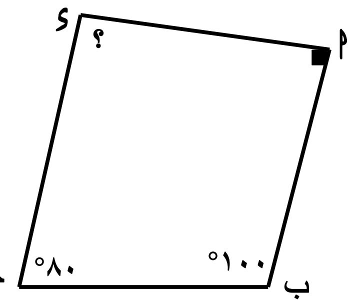
(٦) إذا كان محيط مضلع منتظم ٨٠ سم وطول ضلعه ١٠ سم فإن قياس كل زاوية من زواياه الداخلة = ...

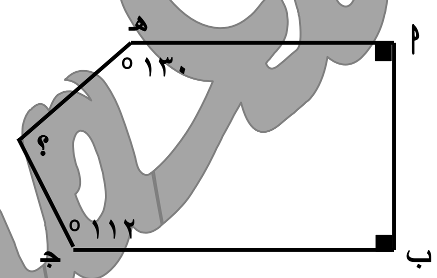
(٧) إذا كان محيط سداسي منتظم ٣٠ سم فإن :-

طول ضلعه = ... ، قياس كل زاوية من زواياه الداخلة = ...

(٨) المضلع الذي ليس له أقطار ....

(٢) في كل مما يأتي :أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالعلامة (؟) :-



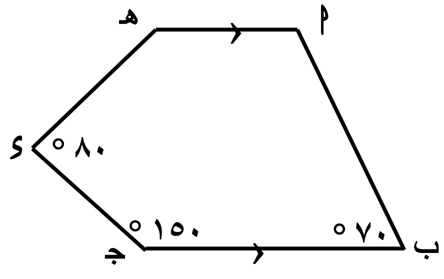


(٣) في الشكل المقابل :-

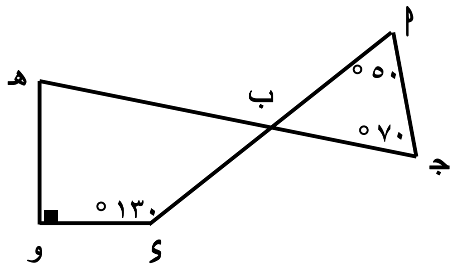
$\overleftrightarrow{أهـ}$ // $\overleftrightarrow{بج}$ ، ق(∠ب) = ٧٠°

، ق(∠ج) = ١٥٠° ، ق(∠ء) = ٨٠°

أوجد بالبرهان ق (∠هـ) ؟



(٤) في الشكل المقابل :-

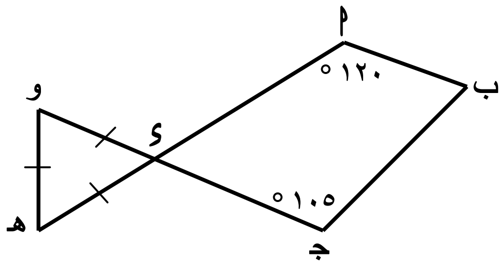


جـ هـ ∩ أ ى = { ب } ، ق (أ) = ٥٠ °

، ق(جـ) = ٧٠ ° ، ق(ى) = ١٣٠ ° ، ق(و) = ٩٠ °

أوجد بالبرهان ق (هـ) ؟

(٥) في الشكل المقابل :-

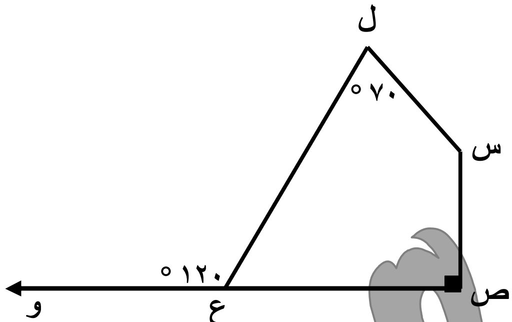


أ هـ ∩ جـ و = { ى } ، ى هـ و مثلث متساوي الأضلاع

، ق(أ) = ١٢٠° ، ق(جـ) = ١٠٥°

أوجد ق (ب) ؟

(٦) في الشكل المقابل :-

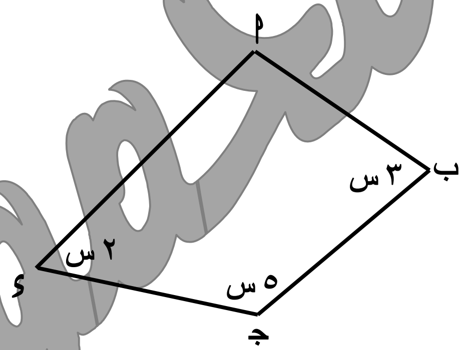


و ∈ ص ع ، ق (أ)= ٧٠ °

ق (ص)= ٩٠ ° ، ق (ل ع و)= ١٢٠°

أوجد : ق(س) ؟

(٧) في الشكل المقابل :-



أ ب جـ ى شكل رباعي فيه :

ق(أ) = ٩٠ °

أوجد قيمة س ؟

(٨) إذا كان قياس الزاوية الخارجة لمضلع منتظم يساوى ٣٠°
ما عدد أضلاع هذا المضلع ؟ وما مجموع قياسات زواياه الداخلة ؟

(٩) هل يمكن لزاوية قياسها ١٠٠° أن تكون زاوية داخله لمضلع منتظم ولماذا ؟

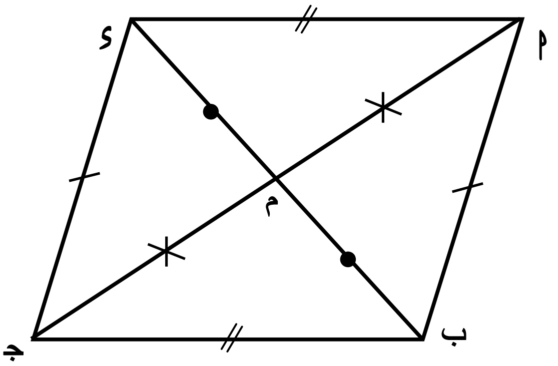
الدرس الثالث

متوازي الأضلاع وخواصه

تعريف متوازي الأضلاع

هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان.

خواص متوازي الأضلاع



❶ كل ضلعين متقابلين متساويان في الطول .

❷ كل زاويتين متقابلتين متساويتان في القياس .

❸ مجموع قياس أي زاويتين متتاليتين = **١٨٠** °

❹ القطران ينصف كلاً منهما الآخر .

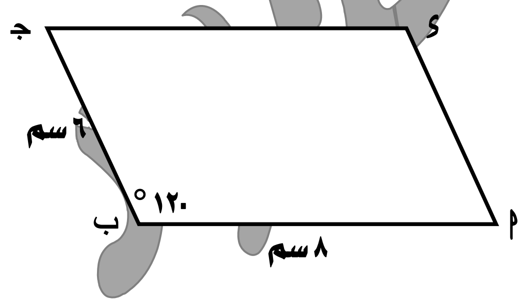
ملاحظة

☜ **الشكل الرباعي الذي فيه ضلعان متوازيان فقط هو شبه منحرف .**

☜ **محيط متوازى الأضلاع = مجموع طولى أى ضلعين متجاورين × ٢ .**

في الشكل المقابل :-

م ب جـ ء **متوازي أضلاع فيه** م ب = ٨ سم ، ب جـ = ٦ سم ، ق(ب̂)= ١٢٠ °



أوجد :-

❶ طول كل من جـ ء ، ء م

❷ قياس كلاً من (ء̂) ، (م̂) ، (جـ̂)

❸ محيط متوازي الأضلاع م ب جـ ء

الحــــــــل

م ب جـ ء متوازي أضلاع

جـ ء = م ب = ٨ سم ، ء م = جـ ب = ٦ سم (خواص متوازي الأضلاع) **المطلوب أولاً**

، ق (ء̂) = ق (ب̂) = ١٢٠ ° (خواص متوازي الأضلاع)

، ∵ ق (م̂) + ق (ب̂) = ١٨٠ ° (خواص متوازي الأضلاع)

∴ ق (م̂) = ١٨٠ ° - ١٢٠ ° = ٦٠ °

∴ ق (جـ̂) = ق (م̂) = ٦٠ ° **المطلوب ثانياً**

محيط متوازي الأضلاع م ب جـ ء = (م ب + ب جـ) = (٨ + ٦) × ٢

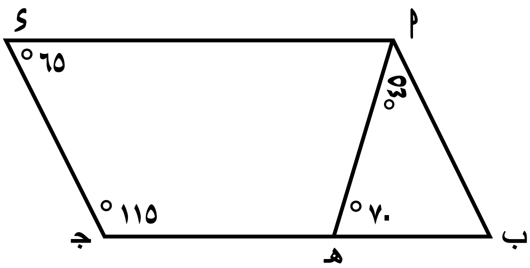
= ١٤ × ٢ = ٢٨ سم **المطلوب ثالثاً**

متي يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا تحققت إحدى الحالات الأتية

- إذا توازي فيه كل ضلعين متقابلين
- إذا تساوى فيه طولا كل ضلعين متقابلين
- إذا توازى ضلعان متقابلان فيه وتساويا في الطول
- إذا نصف القطران كل منهما الأخر
- إذا تساوى فيه قياسا كل زاويتين متقابلتين

في الشكل المقابل :-



هـ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق (ب م هـ) = ٤٥°

، ق (م هـ ب) = ٧٠° ، ق (ء) = ٦٥° ، ق (جـ) = ١١٥°

أثبت بالبرهان أن م ب جـ ء متوازي أضلاع ؟

المعطيات : هـ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق (م ب هـ) = ٤٥° ، ق (م هـ ب) = ٧٠°

، ق (ء) = ٦٥° ، ق (جـ) = ١١٥°

المطلوب : إثبات أن : م ب جـ ء متوازي أضلاع

البرهان : في Δ م ب هـ

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق (ب) = ١٨٠° – (٤٥° + ٧٠°) = ٦٥°

∴ ق (ء) = ق (ب)

، ∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعي = ٣٦٠°

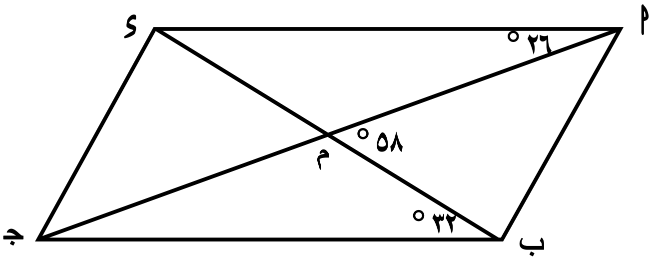
∴ ق (م ب ء) = ٣٦٠° - (٦٥° + ٦٥° + ١١٥°) = ١١٥°

في الشكل م ب جـ ء

∵ ق (م) = ق (جـ) ، ق (ء) = ق (ب)

∴ م ب جـ ء متوازي أضلاع (كل زاويتين متقابلتين متساويتان في القياس)

في الشكل المقابل :-



أ ب جـ ء شكل رباعي تتقاطع قطراه في م

، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$ ، ق (أ م̂ ب) = ٥٨ °

، ق (م ب̂ جـ) = ٣٢ ° ، ق (م أ̂ هـ) = ٢٦ °

أثبت بالبرهان أن الشكل أ ب جـ ء متوازي أضلاع

المعطيات : $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$ ، ق (أ م̂ ب) = ٥٨ °

، ق (م ب̂ جـ) = ٣٢ ° ، ق (م أ̂ هـ) = ٢٦ °

المطلوب : إثبات أن : أ ب جـ ء متوازي أضلاع

البرهان :

∵ ق (أ م̂ جـ) = ١٨٠ °

∴ ق (ب م̂ جـ) = ١٨٠ ° - ٥٨ ° = ١٢٢°

في Δ ب م جـ

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠ °

∴ ق (ب م̂ جـ) = ١٨٠ °- (١٢٢ ° + ٣٢ °) = ٢٦ °

∴ ق (ب م̂ جـ) = ق (ء أ̂ جـ) (بالتبادل)

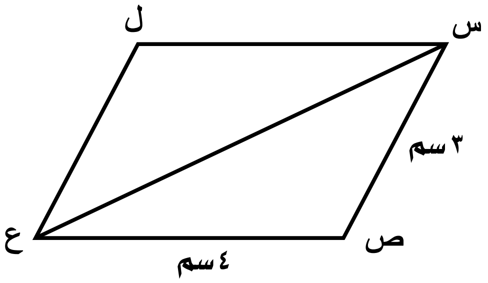
∴ $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

، ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ء جـ}}$ (معطى)

∴ الشكل أ ب جـ ء متوازي أضلاع (كل ضلعين متقابلين متوازيان)

تمارين على متوازي الأضلاع وخواصه

(١) في الشكل المقابل :-



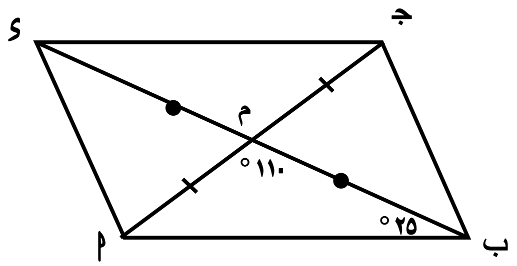
س ص ع ل **متوازي أضلاع فيه** س ص = ٣ سم

، ص ع = ٤ سم ، ق(ل سَ ع) = ٣١° ، ق (ل عَ س) = ٤٣°

أوجد بالبرهان :-

ق (صَ) ، **محيط متوازي الأضلاع** س ص ع ل

(٢) في الشكل المقابل :-



أ ب جـ ء **شكل رباعي تقاطع قطراه فيه** م ،

م أ = م جـ ، م ب = م ء

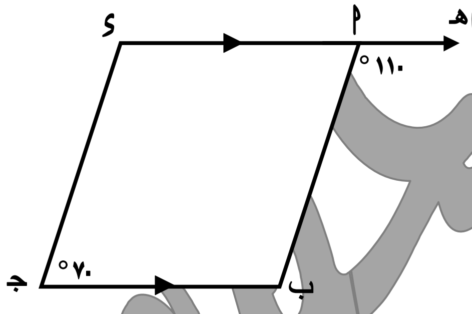
ق (أ مَ ب) = ١١٠°، ق (م بَ أ) = ٢٥°

أوجد بالبرهان :-

١) **الشكل** (أ ب جـ ء) **متوازي أضلاع**

٢) **أوجد** ق (أ جَ ء)

(٣) في الشكل المقابل :-



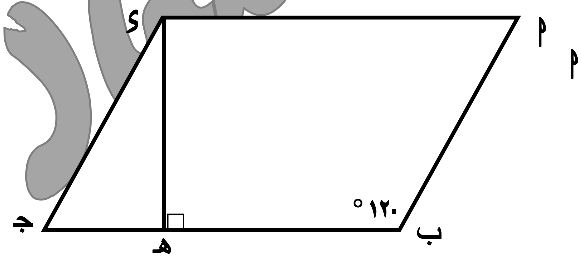
أ ب جـ ء **شكل رباعي فيه**

$\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ،

ق (ب أَ هـ) = ١١٠° ، ق (ء جَ ب) = ٧٠°

أثبت أن الشكل (أ ب جـ ء) **متوازي أضلاع**

(٤) في الشكل المقابل :-



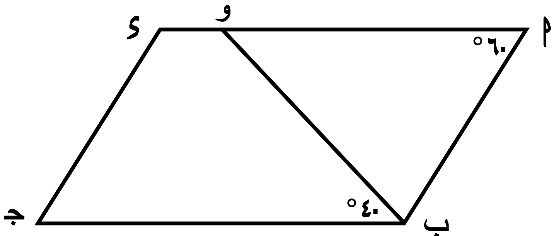
أ ب جـ ء **شكل رباعي فيه**

ق (بَ) = ١٢٠° ، $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{جب}}$

حيث $\overline{\text{ء هـ}}$ ∩ $\overline{\text{جب}}$ = { هـ }

أوجد ق (هـ ءَ جـ)

(٥) في الشكل المقابل :-

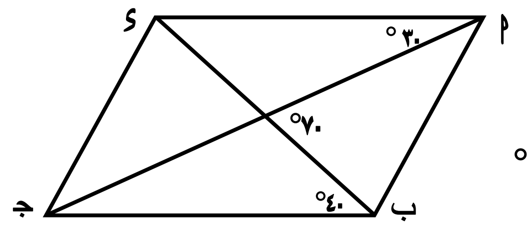


أ ب جـ ء **شكل رباعي فيه**

ق (أَ) = ٦٠ °،

ق (و بَ جـ) = ٤٠° حيث و ∈ $\overline{\text{أ ء}}$

أوجد : ق (أ بَ و)

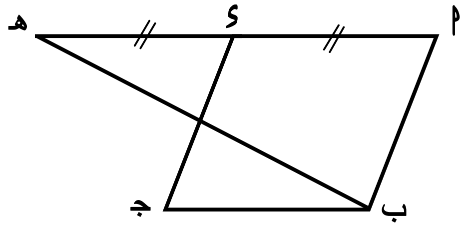


(٦) في الشكل المقابل :-

أب // ءجـ ، أجـ ∩ ءب = {م}

، ق (ء أ جـ) = ٣٠° ، ق (ء ب جـ) = ٤٠° ، ق (أ م ب) = ٧٠°

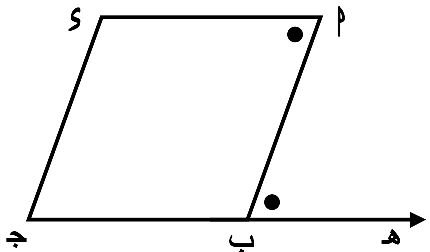
برهن أن : الشكل (أ ب جـ ء) متوازي أضلاع



(٧) في الشكل المقابل :-

أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، هـ ∈ أء بحيث أ ء = ء هـ

أثبت أن : ء جـ ، جـ هـ ينصف كلا منهما الأخر

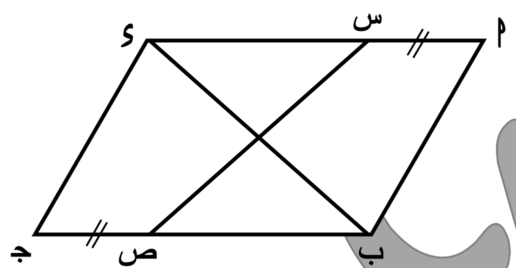


(٨) في الشكل المقابل :-

أ ب جـ ء شكل رباعي ، هـ ∈ جـ ب

، ق (جـ ب ء) = ق (هـ ب أ) = ق (أ)

أثبت ان : الشكل أ ب جـ ء متوازي أضلاع

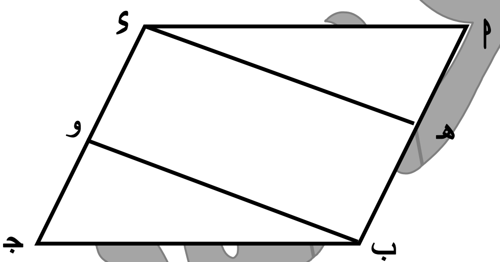


(٩) في الشكل المقابل :-

أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، س ∈ أ ء

، ص ∈ جـ ب **فإذا كان :** أ س = جـ ص

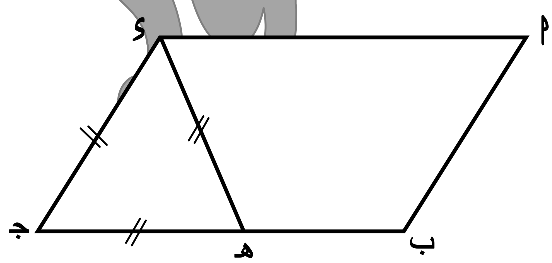
أثبت أن : س ص ، ء ب ينصف كل منهما الأخر



(١٠) في الشكل المقابل :-

أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، هـ منتصف أ ب ، و منتصف ء جـ

أثبت أن : الشكل (ء هـ ب و) متوازي أضلاع



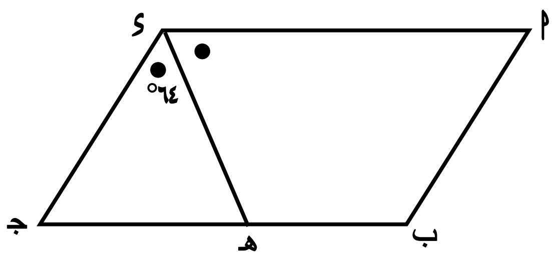
(١١) في الشكل المقابل :-

أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، هـ ∈ ب جـ

بحيث Δ ء هـ جـ متساوي الأضلاع

أثبت أن : أ ب = هـ جـ

أوجد : ق (ب) ، ق (هـ ء أ)



(١٢) في الشكل المقابل :-

أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، هـ ∈ جـ ب

، ء هـ ينصف (أ ء جـ) ، ق (هـ ء جـ) = ٦٤°

أحسب : ق (أ ب جـ) ، ق (ء هـ ب)

الدرس الرابع

متوازي الأضلاع في حالاته الخاصة

المستطيل هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة .

خواص المستطيل :-

المستطيل له خواص متوازي الأضلاع بالإضافة إلى :

❶ زواياه الأربع متساوية في القياس وقياس كل منهما ٩٠° .

❷ قطراه متساويان في الطول .

المعين هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متساويان في الطول.

خواص المعين :-

المعين له خواص متوازي الأضلاع بالإضافة إلى :

❶ أضلاعه الأربعة متساوية في الطول .

❷ قطراه متعامدان وينصفان زواياه الداخلة .

المربع هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة و فيه ضلعان متجاوران متساويان فى الطول

خواص المربع :-

المعين له خواص متوازي الأضلاع بالإضافة إلى :

❶ أضلاعه الأربعة متساوية في الطول

❷ زواياه الأربع متساوية في القياس وقياس كل منهما ٩٠°

❸ قطراه متساويان في الطول ومتعامدان وينصف كل منهما زاويتي الرأس إلى زاويتين قياس كل منهما ٤٥°

لإثبات أن الشكل الرباعي (مستطيل أو معين أو مربع)

أثبت أولاً : أن هذا الشكل متوازي أضلاع

(ثم)

✓**لإثبات أن متوازي الأضلاع مستطيل أثبت إحدى الخاصيتين الآتيتين :**

❶ **إذا كان إحدى زواياه قائمة .**

❷ **القطران متساويان في الطول .**

✓**لإثبات أن متوازي الأضلاع معين أثبت إحدى الخاصيتين الآتيتين :**

❶ **إذا كان ضلعان متجاوران فيه متساويان في الطول .**

❷ **القطران متعامدان .**

✓**لإثبات أن متوازي الأضلاع مربع أثبت إحدى الخواص الأتية :**

❶ **إذا كان إحدى زواياه قائمة وضلعان متجاوران متساويين في الطول .**

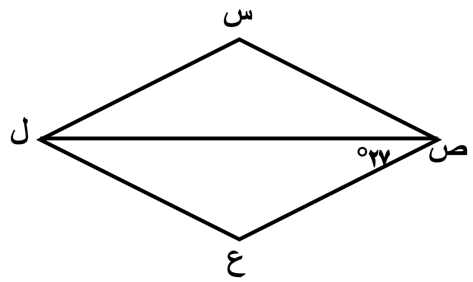
❷ **إذا كان إحدى زواياه قائمة و القطران متعامدان .**

❸ **القطران متساويين في الطول ومتعامدين .**

❹ **ضلعان متجاوران فيه متساويين في الطول وقطراه متساويين في الطول .**

تمارين علي متوازي الأضلاع في حالاته الخاصة

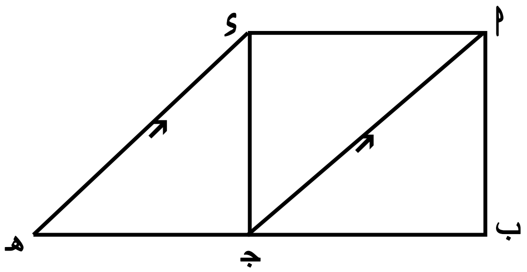
(١) في الشكل المقابل :-



س ص ع ل **معين فيه** ق (ل ص^ ع) = ٢٧ °

أحسب قياسات زوايا المعين س ص ع ل

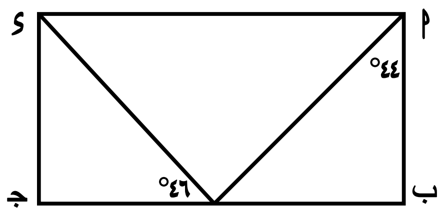
(٢) في الشكل المقابل :-



أ ب جـ د **مربع رسم** د هـ // جـ أ **ليقطع** جـ ب **في** هـ

اثبت أن : ❶ جـ هـ = ب جـ ❷ **أوجد** ق (أ د^ هـ)

(٣) في الشكل المقابل :-

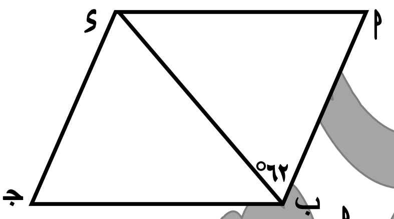


أ ب جـ د **مستطيل** ، هـ ∈ ب جـ

بحيث ق (د هـ^ جـ) = ٤٦°، ق (ب أ^ هـ) = ٤٤°

أحسب : ق (أ هـ^ د) ؟

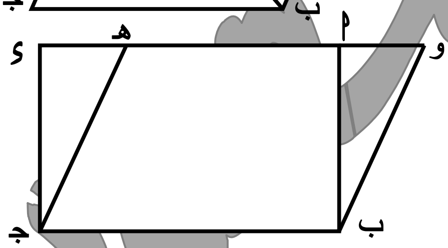
(٤) في الشكل المقابل :-



أ ب جـ د **معين،** ب د **قطرفيه** ، ق (أ ب^ د) = ٦٢°

أوجد بالبرهان : ق (أ^) ؟

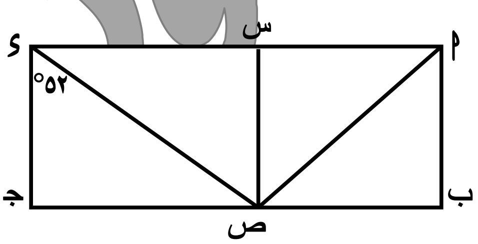
(٥) في الشكل المقابل :-



أ ب جـ د **مستطيل** ، و ب جـ هـ **متوازي أضلاع**

أثبت أن : أ و = د هـ

(٦) في الشكل المقابل :-



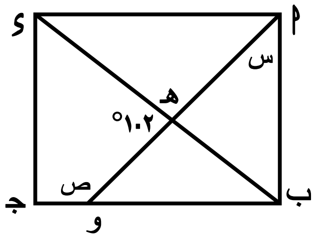
أ ب جـ د **مستطيل** ، س ∈ أ د ، ص ∈ ب جـ

بحيث يكون الشكل أ س ص ب **مربعا**

فإذا كان ق (ص د^ جـ) = ٥٢ °

أوجد بالبرهان ق (أ ص^ د) ؟

(٧) في الشكل المقابل :-

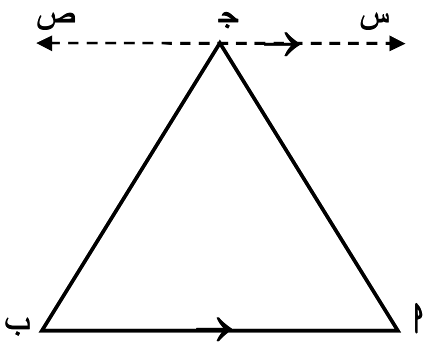


أ ب جـ د **مربع أوجد بالدرجات قيمه كل من** س ، ص ؟

(٨) أ ب جـ د **معين فيه** ق (أ ب^ جـ) = ٤٥° . **أثبت أن :** الشكل أ ب جـ د **مربع ؟**

الدرس الرابع — المثلث

نظرية ١ : مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث يساوي ١٨٠°



المعطيات : ٲ ب جـ مثلث

المطلوب : أثبات أن ق (ٲ̂) + ق (ب̂) + ق (ٲ جـ̂ ب) = ١٨٠°

العمل : نرسم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ٲ ب}}$ ويمر بالنقطة جـ

البرهان : (س جـ̂ ص) زاوية مستقيمة

ق (س جـ̂ ٲ) + ق (جـ ٲ̂ ب) + ق (ص جـ̂ ب) = ١٨٠ °

، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ٲ ب}}$

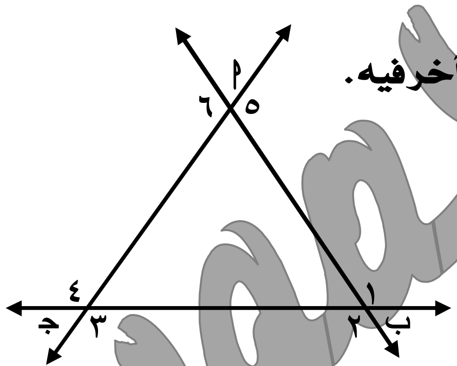
ق (س جـ̂ ٲ) = ق (ٲ̂) بالتبادل

، ق (ص جـ̂ ب) = ق (ب̂) بالتبادل

ق (ٲ̂) + ق (ٲ جـ̂ ب) + ق (ب̂) = ١٨٠ ° (وهو المطلوب)

الزاوية الخارجة للمثلث

الزاوية الخارجة للمثلث هي زاوية ناتجة من امتداد ضلع وتقاطع ضلع آخر فيه .

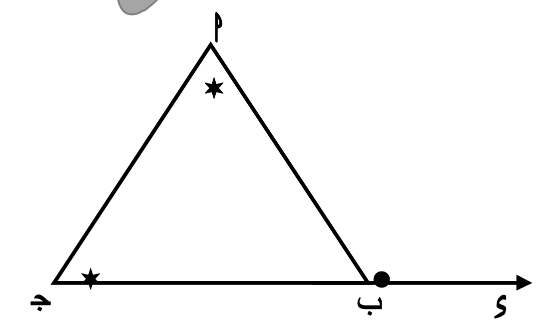


⇐ الزوايا الخارجة عن المثلث ٲ ب جـ هي :

☜ (١̂ ، ٢̂ ، ٣̂ ، ٤̂ ، ٥̂ ، ٦̂)

قياس الزاوية الخارجة للمثلث

قياس أي زاوية خارجة للمثلث يساوى مجموع قياسي الزاويتين الداخلتين عدا قياس المجاورة لها .



إذا كان ٲ ب جـ مثلث

فإن : ق (ٲ ب̂ ء) = ق (ٲ̂) + ق (جـ̂)

لاحظ أن : قياس الزاوية الخارجة للمثلث أكبر من قياس أي زاوية داخلة للمثلث عدا المجاورة لها .

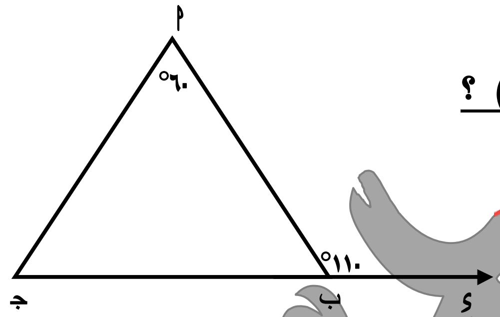
((ملاحظـــــات))

❶ إذا تساوت قياس زاويتان في مثلث قياس زاويتين في مثلث أخر كان قياس الزاوية الثالثة في المثلث الأول يساوي قياس الزاوية الثالثة في المثلث الأخر .

❷
- ✓ إذا كان مجموع قياسي زاويتين في مثلث يساوى ٩٠ ° فإن الزاوية الثالثة قائمة .
- ✓ إذا كان مجموع قياسي زاويتين في مثلث أكبر ٩٠ ° فإن الزاوية الثالثة منفرجة .
- ✓ إذا كان مجموع قياسي زاويتين في مثلث أقل ٩٠ ° فإن الزاوية الثالثة حادة .

❸ إذا ساوى قياس زاوية في مثلث مجموع قياسي الزاويتين الأخريين كان المثلث قائم الزاوية .

(١) في الشكل المقابل :-



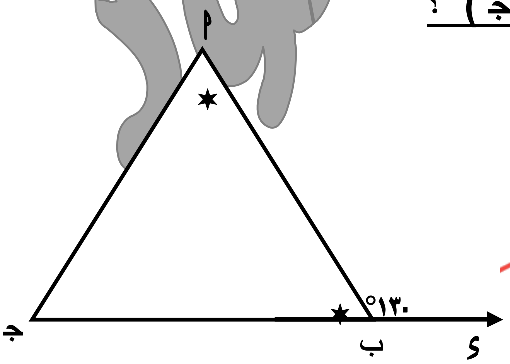
ق (أ^) = ٦٠ ° ، ق (أ ب^ ء) = ١١٠ ° . أوجد ق (أ جـ^ ب) ؟

∵ ق (أ ب^ ء) = ق (أ^) + ق (جـ^) (زاوية خارجة)

∴ ق (جـ^) = ق (أ ب^ ء) – ق (أ^)

= ١١٠° – ٦٠° = ٥٠°

(٢) في الشكل المقابل :-



ق (أ^) = ق (أ ب^ جـ) ، ق (أ ب^ ء)= ١٣٠ ° . أوجد ق (جـ^) ؟

∵ ق (ء ب^ جـ) = ١٨٠° (زاوية مستقيمة)

ق (أ ب^ جـ) = ١٨٠° – ١٣٠° = ٥٠°

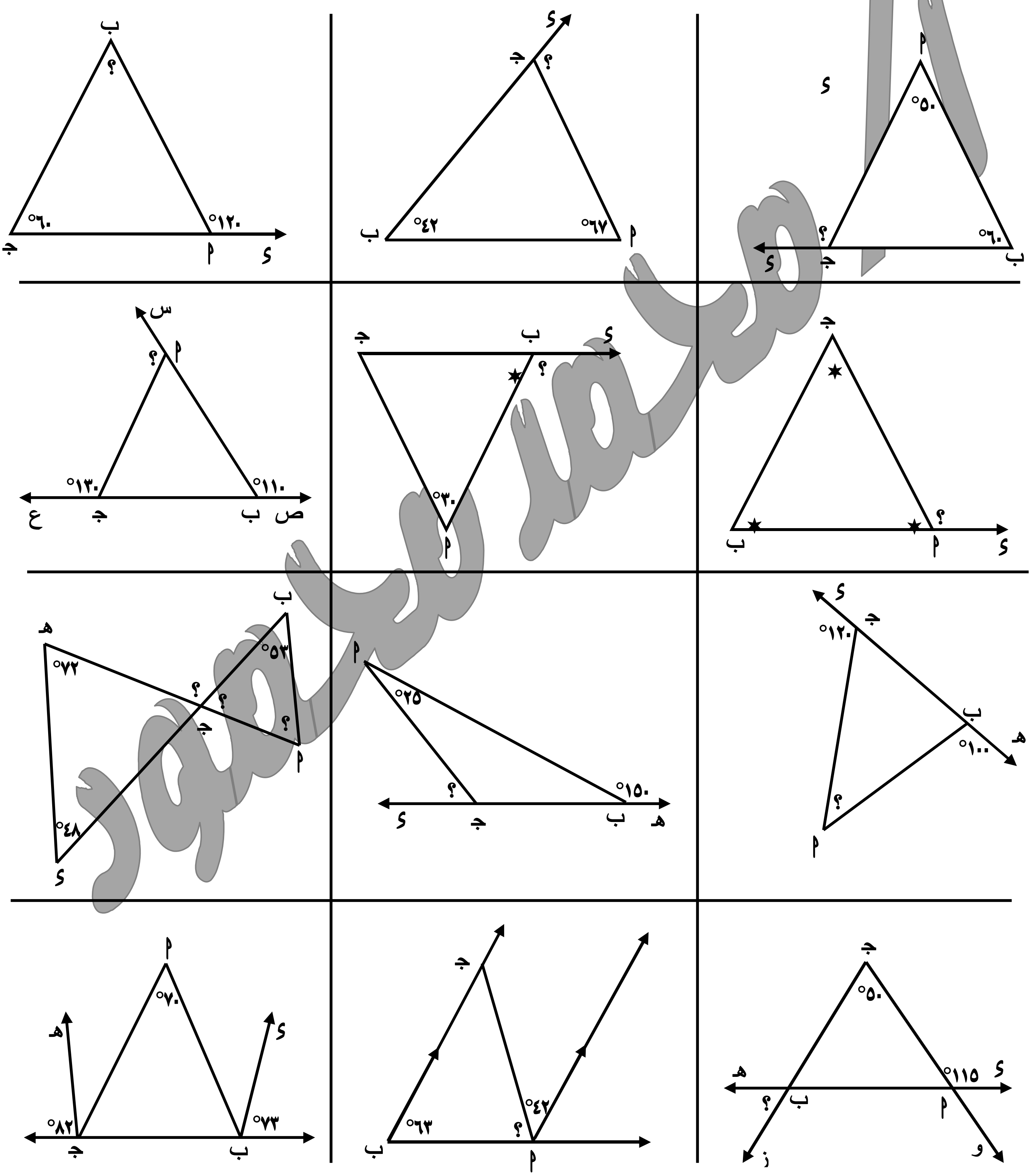
∵ ق (أ^) = ق (أ ب^ جـ) ∴ ق (أ ب^ جـ) = ٥٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠ °

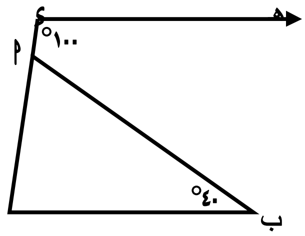
∴ ق (جـ^)= ١٨٠° - (٥٠° + ٥٠°) = ٨٠°

تمارين علي المثلث

(١) في كل من الأشكال الآتية أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالعلامة (؟) :-



(٢) في الشكل المقابل :-

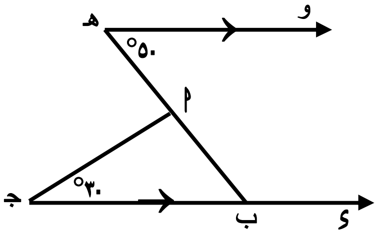


ءهـ // جب ، ق (ءˆ) = ١٠٠°

، ق (بˆ) = ٤٠°

أوجد ق (ب مˆ ء) ؟

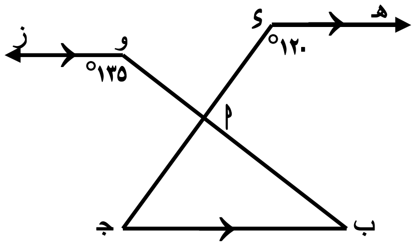
(٣) في الشكل المقابل :-



هـو // جء ، ق (هـˆ) = ٥٠° ، ق (جˆ) = ٣٠°

أوجد قياسات زوايا المثلث م ب ج ، ق (م بˆ ء) ؟

(٤) في الشكل المقابل :-

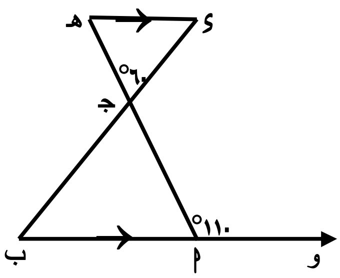


ءهـ // ول // ب ج

، ق (ج ءˆ هـ)= ١٢٠° ، ق (ل وˆ ب) = ١٣٥°

أحسب قياسات زوايا المثلث م ب ج ؟

(٥) في الشكل المقابل :

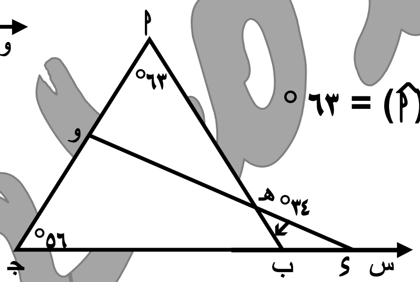


هـ ء // ب م ، ق (م جˆ و) = ١١٠°

، ء ب ∩ م هـ = {ج} ، ق (ء جˆ هـ) = ٦٠° ، و ∈ ب م

أوجد قياسات زوايا المثلثين ء ج هـ ، م ب ج ؟

(٦) في الشكل المقابل :-

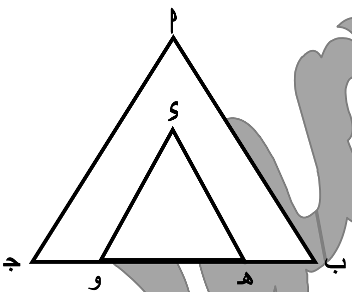


م ب ج مثلث فيه ء ∈ ج ب ، س ∈ ج ب ، ق (مˆ) = ٦٣°

، ق (جˆ)= ٥٦° ، ق (ء هـˆ ب) = ٣٤°

أوجد ق (هـ ءˆ س) ؟

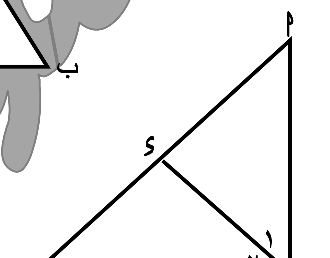
(٧) في الشكل المقابل :-



م ب ج ، ء هـ و مثلثان ، هـ ∈ ب ج ، و ∈ ب ج

، ء هـ // م ب ، ء و // م ج ، أثبت أن :. (مˆ) = ق (ءˆ) ؟

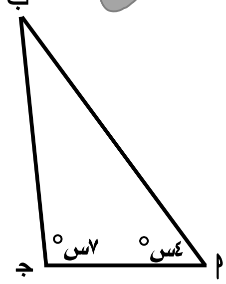
(٨) في الشكل المقابل :-



م ب ج مثلث فيه ء ∈ م ج ، ق (١ˆ) = ق (مˆ)

، ق (٢ˆ)= ق (جˆ) أثبت أن : (م بˆ ج) قائمة ؟

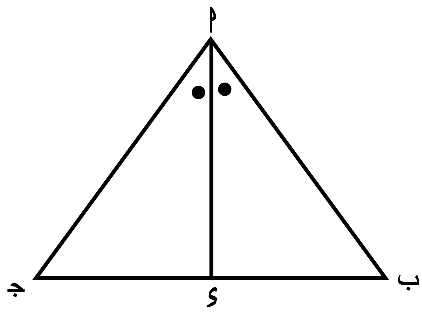
(٩) في الشكل المقابل :-



م ب ج مثلث فيه ق (مˆ)= ٢ ق (بˆ)= ٤س °

، ق (جˆ)= ٧س° أثبت أن : (جˆ) منفرجة ؟

(١٠) في الشكل المقابل :-

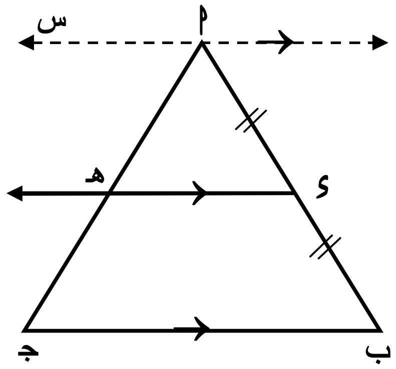


م ب ج مثلث فيه ق (مˆ) = (جˆ)

، م ء ينصف (ب مˆ ج) أثبت أن : م ب = م ج ؟

الدرس السادس — تابع المثلث

نظرية ٢ : الشعاع المرسوم من منتصف ضلع في المثلث موازياً أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث



المعطيات : ء منتصف ٯ ب ، ء هـ // ب جـ

المطلوب : أثبات أن هـ منتصف ٯ جـ

العمل : نرسم ٯ س // ب جـ

البرهان : ∵ ٯ س // هـ ء // ب جـ

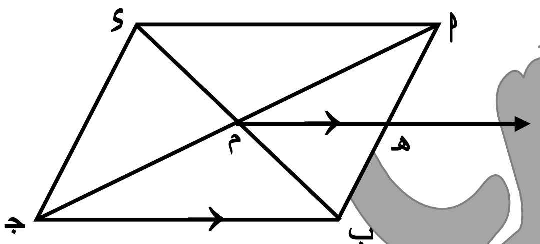
، ٯ ب ، ٯ جـ قاطعان لهم في ء ، هـ على الترتيب .

، ∵ ٯ ء = ء ب ∴ ٯ هـ = هـ جـ

هـ منتصف ٯ جـ (وهو المطلوب)

نتيجة : القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازى الضلع الثالث .

(١) في الشكل المقابل :-



ٯ ب جـ ء متوازي أضلاع ، م نقطة تقاطع قطرية

رسم م هـ // ب جـ ويقطع ٯ ب في هـ

أثبت أن : هـ منتصف ٯ ب ؟

البرهان :- ∵ ٯ ب جـ ء متوازي أضلاع

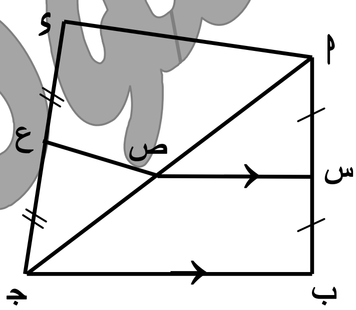
∴ م منتصف ٯ جـ

في Δ ٯ ب جـ

∵ م منتصف ٯ جـ ، م هـ // ب جـ

∴ هـ منتصف ٯ ب

(٢) في الشكل المقابل :-



س منتصف ٯ ب ، س ص // ب جـ

، ع منتصف ء جـ

اثبت أن : ص ع // ٯ ء ؟

البرهان :- في Δ ٯ ب جـ

∵ س منتصف ٯ ب ، س ص // جـ ب

∴ ص منتصف ٯ جـ

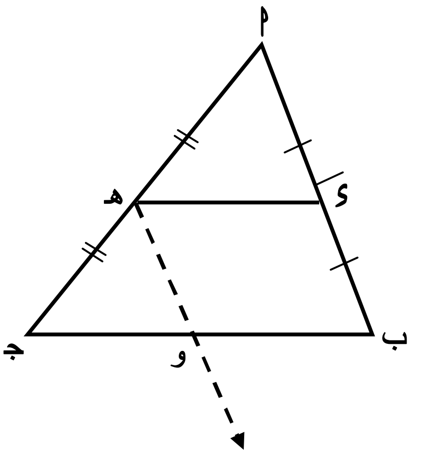
في Δ ٯ جـ ء

∵ ص منتصف ٯ جـ ، ع منتصف ء جـ

∴ ص ع // ٯ ء

نظرية ٣

طول القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفي ضلعين في مثلث يساوى نصف طول الضلع الثالث



المعطيات : ٲ ب جـ مثلث ، ى منتصف ٲ ب ، هـ منتصف ٲ جـ

المطلوب : أثبات أن ى هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ

العمل : نرسم هـ و // ٲ ب ويقطع ب جـ في و

البرهان : ∵ ى منتصف ٲ ب ، هـ منتصف ٲ جـ

∴ ى هـ // ب جـ (نتيجة)

، ∵ هـ و // ٲ ب (عملا)

، هـ منتصف ٲ جـ

∴ و منتصف ب جـ

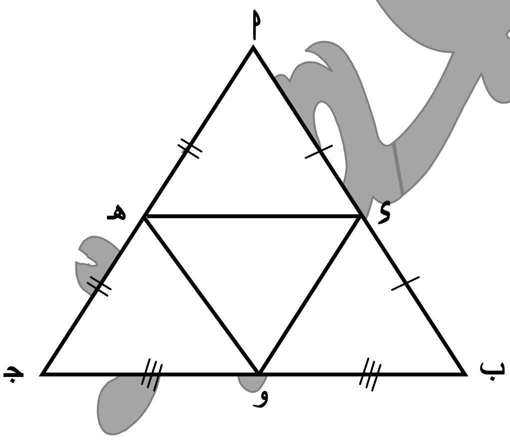
∴ ب و = $\frac{١}{٢}$ ب جـ

، ∵ الشكل ى هـ و ب متوازي أضلاع

∴ ى هـ = ب و = $\frac{١}{٢}$ ب جـ (وهو المطلوب)

---

(٣) في الشكل المقابل :-



ٲ ب = ٥ سم ، جب = ٨ سم ، جـ ٲ = ٧ سم .

أوجد محيط المثلث و ى هـ ؟

∵ ٲ ى = ى ب ، ٲ هـ = هـ جـ

∴ ى هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ ى هـ = $\frac{١}{٢}$ × ٨ = ٤ سم

∵ ٲ ى = ى ب ، ب و = و جـ

∴ ى و = $\frac{١}{٢}$ ٲ جـ ى و = $\frac{١}{٢}$ ×٧ = ٣,٥ سم

∵ ٲ هـ = هـ جـ ، جـ و = و ب

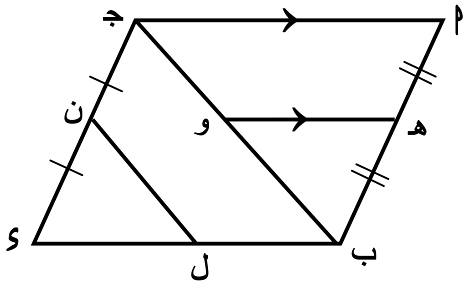
∴ و هـ = $\frac{١}{٢}$ ٲ ب و هـ = $\frac{١}{٢}$ ×٥ = ٢,٥ سم

محيط المثلث و ى هـ = مجموع أطوال أضلاعه

محيط المثلث و ى هـ = ٤ + ٣,٥ + ٢,٥ = ١٠ سم

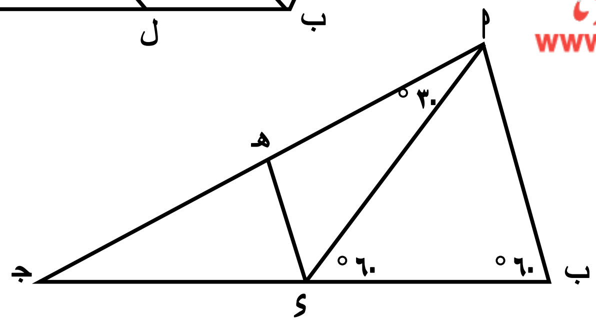
تمارين على نظرية ٢ ونتيجتها ونظرية ٣

(١) في الشكل المقابل :-



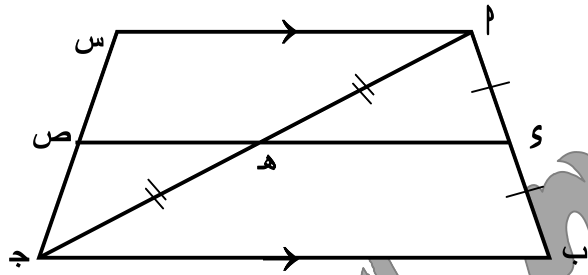
أ ب جـ مثلث فيه جـ أ = جـ ب
، هـ منتصف أ ب ، هـ و // أ جـ
، ل ، ن منتصفا ب ء ، جـ ء على الترتيب
أثبت أن : هـ و = ل ن

(٢) في الشكل المقابل :-



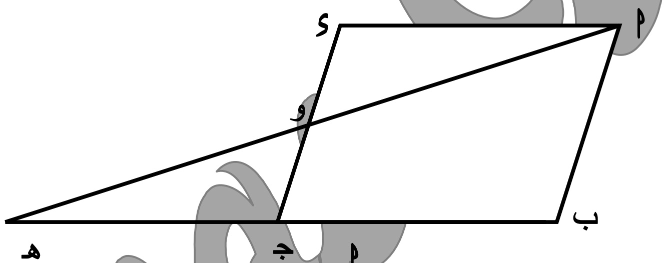
أ ب جـ مثلث فيه هـ منتصف أ جـ
ء هـ ⊥ أ جـ ، ء ∈ ب جـ ، ق (ب̂) = ٦٠°،
، ق (أ ء̂ هـ) = ٣٠° ، ق (أ ء̂ ب) = ٦٠°
أثبت أن : ء منتصف ب جـ

(٣) في الشكل المقابل :-



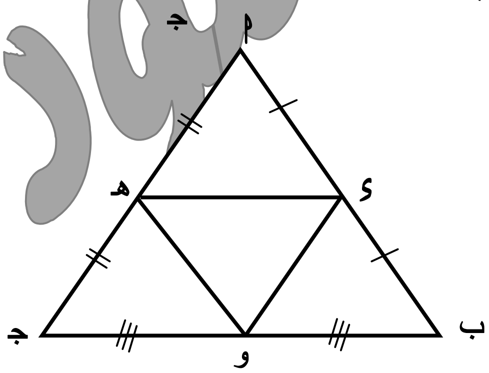
أ ء = ء ب ، أ هـ = هـ جـ
، أ س // ب جـ ، ء هـ ∩ س جـ = {ص}
أثبت أن : ص منتصف س جـ

(٤) في الشكل المقابل :-



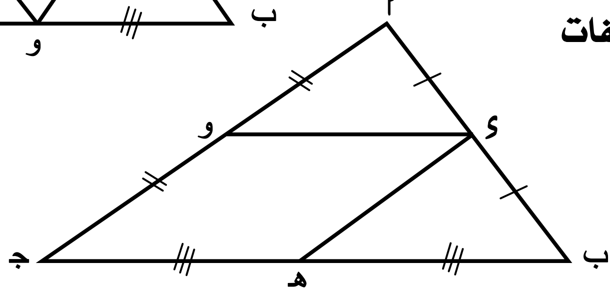
أ ب جـ ء متوازي إضلاع ، ب جـ = جـ هـ
، هـ ∈ ب جـ، رسمت أ هـ فقطعت ء جـ في و
أثبت أن أ و = و هـ

(٥) في الشكل المقابل :-



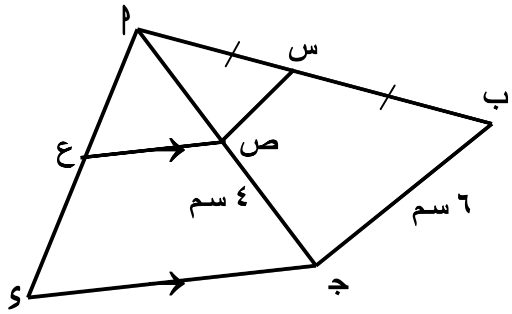
أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ٨ سم ، جـ أ = ٧ سم ، د ، هـ ، و
منتصفات أ ب ، ب جـ ، جـ أ **على الترتيب .**
أحسب محيط Δ ء هـ و

(٦) في الشكل المقابل :-



أ ب جـ مثلث فيه ء ، هـ ، و منتصفات
أ ب ، ب جـ ، جـ أ على الترتيب .
، ب جـ = ١٢ سم ، أ جـ = ١٠ سم
أوجد : محيط الشكل ء هـ جـ و

(٧) في الشكل المقابل :-



أ ب ج د **شكل رباعي فيه :-**

س ، ع **منتصفا** أ ب ، أ د **على الترتيب**

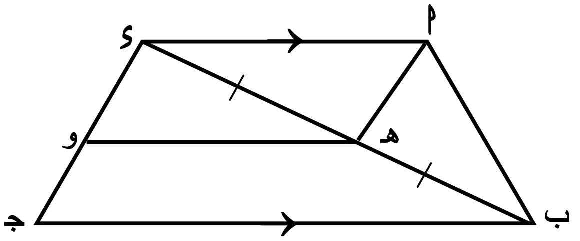
، ص ∈ أ ج **بحيث** ص ع // ج د

، ص ج = ٤ سم **فإذا كان :**

ب ج = ٦ سم ، أ ب = ١٠ سم

أوجد ❶ **طول** أ ص ❷ **محيط** Δ أ س ص

(٨) في الشكل المقابل :-

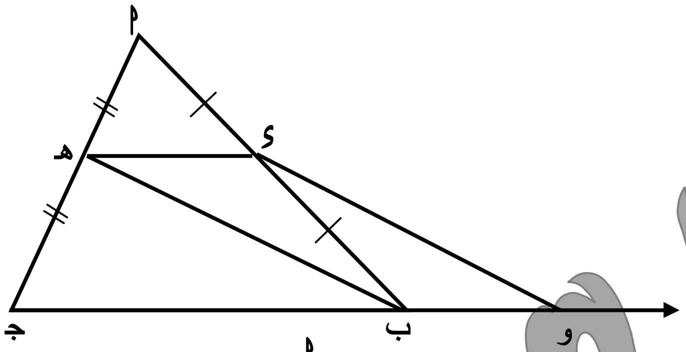


أ د // ب ج ، أ د = $\frac{1}{2}$ ب ج

، هـ **منتصف** د ب ، و **منتصف** د ج

اثبت أن : الشكل أ هـ و د **متوازي أضلاع**

(٩) في الشكل المقابل :-

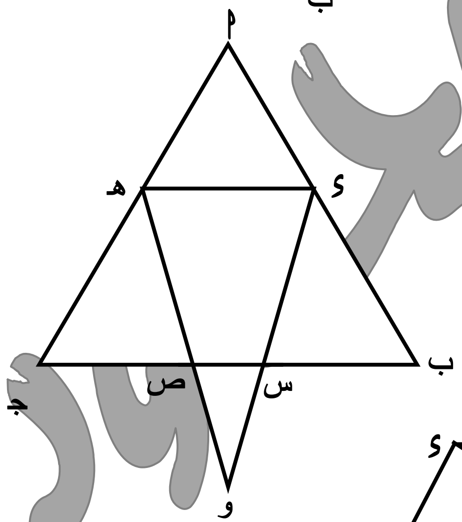


د، هـ **منتصفا** أ ب ، أ ج **على الترتيب**

، و ∈ ج ب حيث ب و = $\frac{1}{2}$ ب ج

اثبت أن : الشكل ب هـ د و **متوازي أضلاع**

(١٠) في الشكل المقابل :-

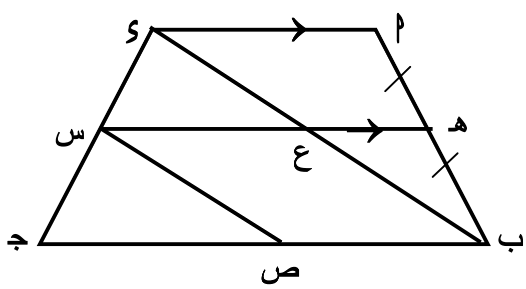


د **منتصف** أ ب ، هـ **منتصف** أ ج ، د و ∩ ب ج = { س }

، د س = س و ، ب ج = ١٢ سم

أوجد طول س ص ؟

(١١) في الشكل المقابل :-



أ ب ج د **شبه منحرف فيه :-**

أ د // ب ج ، هـ **منتصف** أ ب

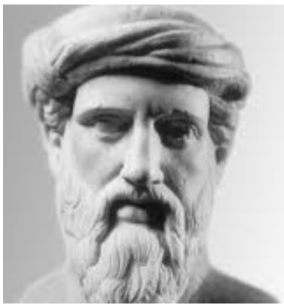
، هـ س // ب ج ، س ص // د ب

أثبت أن : ص **منتصف** ب ج

(١٢) أ ب ج د **شبه منحرف فيه** أ د // ج ب ، هـ **منتصف** أ ب رسم هـ س // ب ج **ويقطع** د ب **في** س ، د ج **في** ص ورسم ص ع // د ب **يقطع** ج ب **في** ع . **أثبت أن** : س د = ص ع ؟

الدرس السابع

نظرية فيثاغورث



نص نظرية فيثاغورث

في المثلث القائم الزاوية مساحة المربع المنشأ علي الوتر تساوي مجموع مساحتي المربعين المنشأين علي ضلعي القائمة .

أو

في المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي ضلعي القائمة.

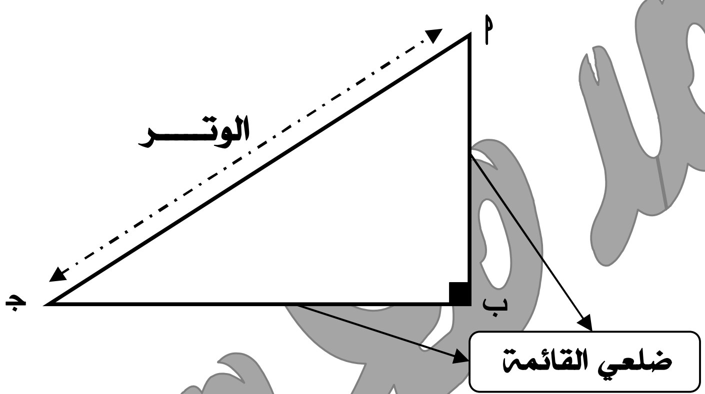
أي أنه : إذا كان أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ فإن :

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

ومنها نستنتج أن :

(أ ب)^{٢} = (أ جـ)^{٢} − (ب جـ)^{٢}

(ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} − (أ ب)^{٢}



تمارين محلولة

(١) مثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب حيث أ ب = ١٥ سم ، ب جـ = ٢٠ سم . **أوجد طول أ جـ ؟**

∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

∴ (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

= (١٥)^{٢} + (٢٠)^{٢} = ٢٢٥ + ٤٠٠ = ٦٢٥

∴ ب جـ = $\sqrt{٦٢٥}$ = ٢٥ سم

(٢) مثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب حيث أ جـ = ٥ سم ، ب جـ = ٤ سم . أوجد طول أ ب ؟

∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

∴ (أ ب)^{٢} = (أ جـ)^{٢} − (ب جـ)^{٢}

= (٥)^{٢} − (٤)^{٢} = ٢٥ − ١٦ = ٩

∴ أ ب = $\sqrt{٩}$ = ٣ سم

(٣) مثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب حيث أ جـ = ١٣ سم ، أ ب = ٥ سم . أوجد طول ب جـ ؟

∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

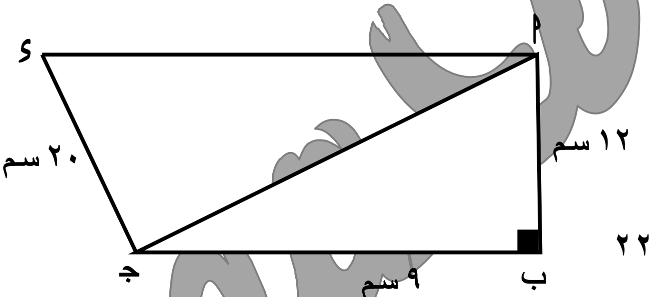
(ب جـ)^{٢} = (أ جـ)^{٢} − (أ ب)^{٢}

= (١٣)^{٢} − (٥)^{٢} = ١٦٩ − ٢٥ = ١٤٤

∴ ب جـ = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم

(١) في الشكل المقابل :-

أ ب = ١٢ سم ، ب جـ = ٩ سم ، أوجد طول أ د ؟



∵ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

∴ (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (جـ ب)^{٢}

= (١٢)^{٢} + (٩)^{٢} = ١٤٤ + ٨١ = ٢٢٥

∴ أ جـ = $\sqrt{٢٢٥}$ = ١٥ سم

∵ ، Δ أ جـ د قائم الزاوية في جـ

∴ (أ د)^{٢} = (أ جـ)^{٢} + (جـ د)^{٢}

= (١٥)^{٢} + (٢٠)^{٢} = ٢٢٥ + ٤٠٠ = ٦٢٥

∴ أ د = $\sqrt{٦٢٥}$ = ٢٥ سم