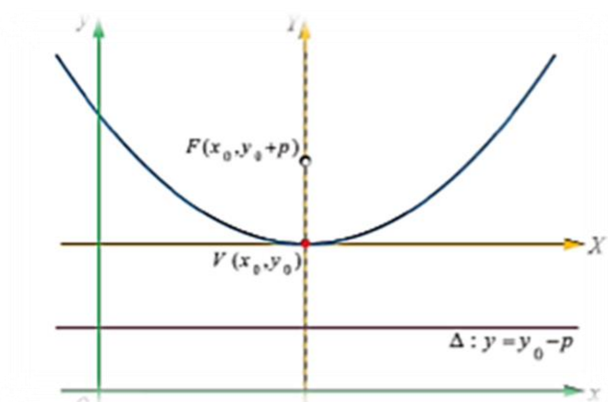
الجمهورية العربية السورية
وزارة التربية
المركز الوطني للمتميزين

2015 - 2014

القطع المكافئ... خصائصه وتطبيقاته

حلقة بحث مقدمة لمادة الرياضيات



إعداد الطالبة: هلا غازي ديب
إشراف الأستاذ: حبيب عيسى

المقدمة

إنّ الثـورة المعرفيّـة والتكنولوجيـا التـي خاضـها العـالم منـذ انتهـاء الحـرب العالميّـة الثانيّـة حتـى وقتنـا هـذا، قـد أفضـت إلـى العديـد مـن الاختراعـات والتطـورات فـي مختلـف مجـالات الحيـاة، ولاسـيما فـي مجال الفضاء الخارجي وعلم الذرة والإشعاع، والكثير من المجالات الأخرى.....

وقـد درسـت القطـوع مـن قبـل العديـد مـن العلمـاء مـن أمثـال عـالم الهندسـة الإغريقـي أبولونيـوس والـذي كتـب بتوسـع فـي الرياضـيات البحتـة والتقليديـة، بالإضـافة إلـى العـالم الفيزيـائي ماكسـويل الـذي بحـث في كيفية انشاء المنحنيات والقطوع المخروطيّة منذ كان عمره 14 سنه.

وعلـى الـرغم مـن معرفـة العلمـاء للقطـوع منـذ زمـن بعيـد، إلـى أن اسـتخدامها لـم ينشـط بشـكل واسـع إلا عنـدما بـدأ الانسـان بغـزو الفضـاء، وإرسـال المراكـب الفضـائية إلـى الكـون الخـارجي ومـا ترتـب عليـه من دراستها، ومعرفة توابع حركتها، وما إلى هنالك من أمور رياضيّة وفيزيائيّة.

القطوع المخروطيّة وأهميتها في حياتنا

نلاحظ وجود القطع المخروطية بحياتنا بشكل كبير؛ فعند دراسة حركة الأجرام السماوية فنجد أنها تسلك قطعاً مكافئاً إذا تجاوزت سرعتها السرعة الكونيّة الثانية حول أحد الأجرام الأخرى، وفي الذرة والإلكترون يلاحظ المختصون بأن الإلكترونات تدور حول النواة على مدارات إهليجية أيضاً.

أما السّفن التي تبحر في البحر فإنها تعتمد على نظام يدعى ب "لوران اللاسلكي" الذي يعتمد اعتماداً كلياً على هذه القطوع؛ حيث يعمل على حساب فرق الزمن بين تلقي الإشارات اللاسلكية من زوج من محطات بث ترسل إشاراتها بنفس الوقت وذلك بتقاطع منحني القطع الزائد في نقطة واحدة تكون موقع السفينة، وكذلك تستخدم القطوع المخروطية في رسم المسارات للمسبارات الفضائية أثناء سفرها في الفضاء الخارجي، أما بالنسبة لانتشار الضوء فيعتمد مطورو السيارات في دراسة القطوع من أجل تحقيق أفضل إنارة لضوء السيارة على أكبر مسافة ممكنة، فيصنع ضوى السيارة بهيئة مجسم مكافئ وضع في بؤرته مصباحاً، عندما ينطلق شعاع ضوئي من المصباح ينعكس هذا الشعاع على السطح المجسم وبصورة أفقية، وكذلك بالنسبة لجميع الأشعة المنطلقة من المصباح مما يؤدي إلى إنارة الطريق أمام السيّارة وبالمثل الأشعة الواردة إلى السطح القطعي المكافئ موازيةً لمحور تناظره تنعكس لتتجمع في المحرق. وتستعمل الخاصة نفسها للقطوع المكافئة في تصميم مرايا التلسكوبات وعدسات النظّارات، وفي صنع هوائيات الرّادارات، وهوائيات استقبال البث الفضائي، وكذلك تستخدم في تصميم الصواريخ البالستية، وأكثر ما نجد القطع المكافئ في مسار القذيفة المنطلقة بزاوية مائلة.

وكذلك جهاز تخطيط القلب واعتماد المهندسون على دراستها في بناء منشئاتهم الهندسيّة (جسور وأبراج وناطحات سحاب وطواحين هواء).

وهناك الكثير الكثير من التطبيقات الأخرى والفوائد للقطوع المخروطية في حياتنا الحديثة، فما هي هذه القطوع ؟؟ وماهي الخصائص التي حولتها من مجرد منحنيات عشوائية إلى هذه الأهمية التي هي بها الآن؟؟

سنتعرف على هذا كله في هذا البحث.

الباب الأول: دراسة القطوع المخروطية دراسة عامة

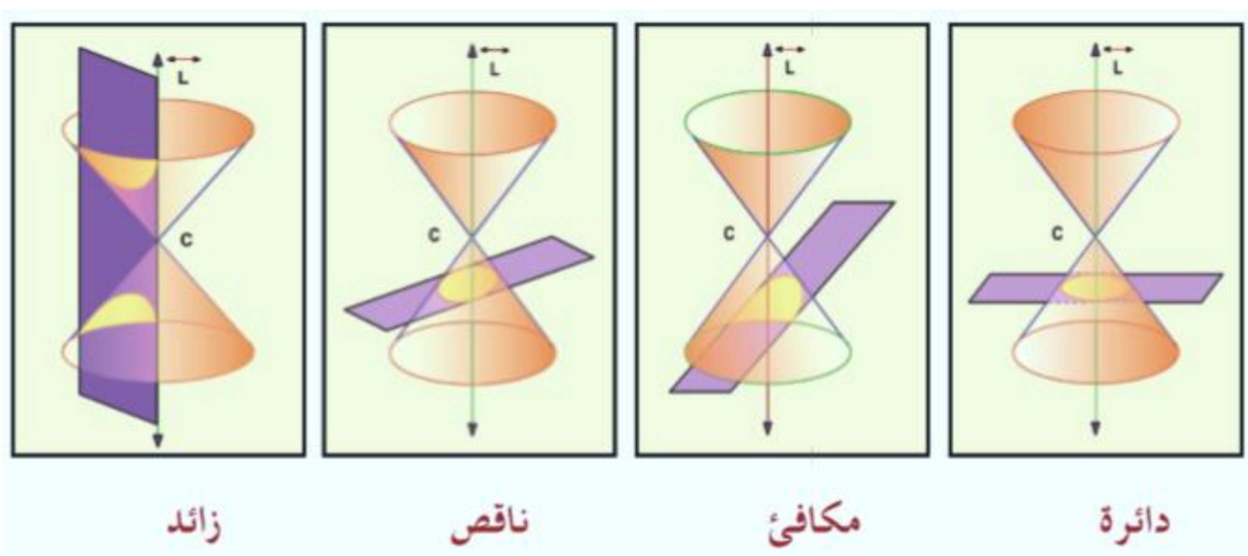
الفصل الأول: تولّد القطوع المخروطيّة

يـتم الحصـول علـى القطـوع المخروطيّـة (الـدائرة القطـع المكـافئ القطـع النـاقص القطـع الزائـد) هندسـياً من تقاطع مستوي مع سطح مخروط دائري قائم؛ ولهذا تسمى باسم القطوع المخروطيّة.

فإذا قطع سطح المخروط الدائري القائم:

- بمسـتوٍ عمـودي علـى محـور المخـروط ويـوازي القاعـدة ولا يحـوي رأس المخـروط، فـإن المقطـع يمثل شكلاً هندسياً يسمى الدائرة (Circle).
- بمســتوٍ مــوازٍ لأحــد مولّداتــه، فــإن المقطــع يمثــل شــكلاً هندســيّاً يســمى القطــع المكــافئ (Parabola).
- بمسـتوٍ غيـر مـوازٍ لقاعدتِـهِ ولا يـوازي أحـد مولّداتـه، فـإن المقطـع يمثـل شـكلاً هندسـيّاً يسـمى القطع الناقص (Ellipse).
- بمسـتوٍ يـوازي محـور المخـروط الـدائري القـائم ويقطـع مولّـدين مـن مولّـدات المخـروط، فـإن المقطع يمثل

القطع الزائد (Hyperbola).



الشكل 1

الفصل الثاني: التعريف العام للقطوع المخروطية

ليكن Δ مستقيماً ما في المستوي، في حالة نقطة ما P في المستوي، نرمز بالرمز $d(P,\Delta)$ إلى المسافة بين النقطة P والمستقيم Δ، وهي المسافة أيضاً بين P ومرتسمها القائم على Δ.

لنأخذ في المستوي مستقيماً Δ، ونقطة F لا تقع على المستقيم Δ. وليكن عدداً موجباً تماماً. نهدف إلى دراسة المجموعة C المكونة من نقاط المستوي التي نسبة بعدها عن F إلى بعدها عن Δ تساوي e، أي:

$$P \in C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{PF}{d\,(P,\Delta)} = e$$

لإجراء هذه الدراسة سنختار معلماً مناسباً $\left(O,\underset{i}{\rightarrow},\underset{j}{\rightarrow}\right)$ بحيث تنطبق O على F، ويكون Δ موازياً لمحور التراتيب Oy، ومعادلته $x=-k$، حيث $k>0$.

لتكن $p(x,y)$ نقطة ما في المستوي، عندئذ:

$$PF = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{و} \qquad d(P,\Delta) = |x+k|$$

إذن تنتمي P إلى C إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$\sqrt{x^2+y^2} = e|x+k|$$

وبالتربيع نجد:

$$\mathrm{x}^2+y^2 = e^2(x^2+2xk+k^2)$$

أو :

$$(1) \qquad (1-e^2)x^2-2e^2kx+y^2-e^2k^2=0$$

لدينا هنا حالتين:

- في حالة $e = 1$ عندئذ تكتب المعادلة (1) بالشكل:

$$y^2 = 2k(x + \frac{k}{2})$$

وهـــي معادلـــة القطـــع المكـــافئ ذروتـــه $\left(-\frac{k}{2}, 0\right)$ ومحرقـــه $F(0,0)$، ودليلـــه Δ الـــذي معادلتـــه $x = -k$.

- في حالة $e \neq 1$ هنا تكتب المعادلة (1) بالشكل:

$$(1 - e^2)\left(x^2 - 2\frac{e^2k}{1 - e^2}\right) + y^2 - e^2k^2 = 0$$

وبالإتمام إلى مربع كامل بالنسبة إلى x نجد:

$$(1 - e^2)\left(x^2 - 2\frac{e^2k^2}{1-e^2}x + \frac{e^4k^2}{(1-e^2)^2}\right) + y^2 = e^2k^2 + \frac{e^4k^2}{1-e^2}$$

$$(1 - e^2)\left(x^2 - \frac{e^2k}{1 - e^2}\right)^2 + y^2 = e^2k^2\left(1 + \frac{e^2}{1 - e^2}\right)$$

$$(1 - e^2)\left(x - \frac{e^2k}{1 - e^2}\right)^2 + y^2 = \frac{e^2k^2}{1 - e^2}$$

$$\frac{\left(x - \frac{e^2k^2}{1-e^2}\right)^2}{\frac{e^2k^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{e^2k^2}{1-e^2}} = \qquad (2)$$

وهنا نجد حالتين:

✓ حالة $0 < e < 1$ وهنا نضع:

$$b = \frac{ek}{\sqrt{1-e^2}} \text{ و } a = \frac{ek}{1-e^2} \text{ و } y_0 = 0 \text{ و } x_0 = \frac{e^2k}{1-e^2}$$

فتأخذ المعادلة (2) الشكل:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

نلاحظ أن $b = a\sqrt{1-e^2} < a$ إذن هذه معادلة قطع ناقص مركزه (x_0, y_0)، محوره المحرقي منطبق على محور الفواصل، وطول قطره الكبير $2a = \frac{2ek}{1-e^2}$، وطول قطره الصغير $2b = \frac{2ek}{\sqrt{1-e^2}}$ ، أمّا نصف البعد المحرقي C، فيساوي:

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{e^2k^2}{(1-e^2)^2} - \frac{e^2k^2}{1-e^2}$$

$$= \frac{e^2k^2(1-1+e^2)}{(1-e^2)^2} = \frac{e^4k^2}{(1-e^2)^2} = e^2a^2$$

ومنه $c = ea = \frac{e^2k}{1-e^2} = x_0$. أما محرقا القطع فهما عند $(0,0)$ و $(2c, 0)$. وهذه تكون معادلة القطع الناقص.

✓ حالة $e > 1$ وهنا نضع:

$$x_0 = \frac{e^2k}{1-e^2} \text{ و } y_0 = 0 \text{ و } a = \frac{ek}{e^2-1} \text{ و } b = \frac{ek}{\sqrt{e^2-1}}$$

فتأخذ المعادلة (2) الشكل:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

وتكون هذه معادلة قطع زائد مركزه (x_0, y_0) ومحوره المحرقي منطبق على محور الفواصل، وطول قطره الرئيسي $2a = \frac{2ek}{e^2-1}$، أمّا نصف البعد المحرقي c، فيساوي:

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{e^2k^2}{(e^2-1)^2} + \frac{e^2k^2}{e^2-1}$$

$$= \frac{e^2k^2(1+e^2-1)}{(e^2-1)^2} = \frac{e^4k^2}{(e^2-1)^2} = e^2a^2$$

ومنه $c = ea = \frac{e^2k}{e^2-1} = -x_0$، أما محرقا القطع فهما عند $(0,0)$ و $(-2c, 0)$.

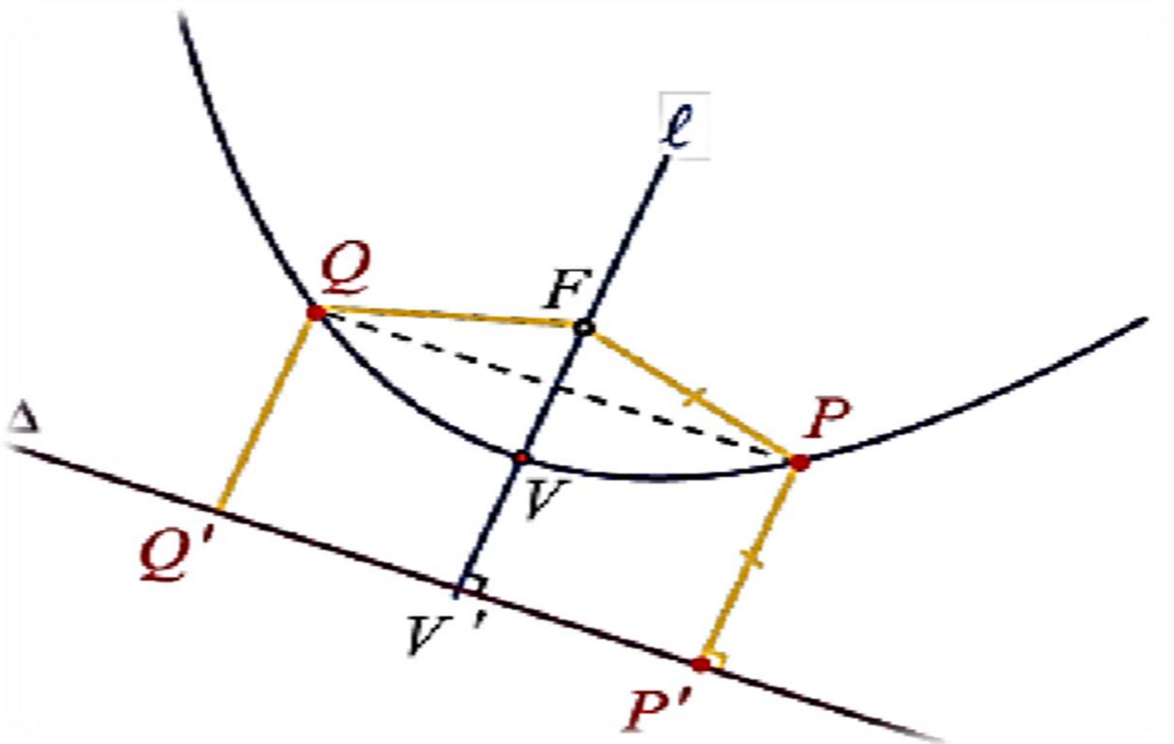
وهذه تكون معادلة قطع زائد أحد محرقيه النقطة F.[1]

[1] الهندسة التحليلية، وزارة التربية والتعليم السوريّة الثالث ثانوي

الباب الثاني: التعريف بالقطع المكافئ (Parabola)

الفصل الأول: تعريف القطع المكافئ

هو مجوعة نقاط المستوي التي تبعد عن نقطة ما F بعداً يساوي بعدها عن مستقيم آخر Δ، حيث Δ مستقيم ثابت و $F \notin \Delta$.



الشكل 2

الفصل الثاني: عناصر القطع المكافئ

- محرق القطع F.
- دليل القطع Δ.
- ذروة القطع V: هي منتصف المسافة بين المحرق F وبعد F عن الدليل Δ.
- محور تناظر القطع l: هو المستقيم المار بالمحرق F وعمودي على الدليل Δ.
- الوتر المحرقي: كل قطعة مستقيمة تمر بمحرق القطع المكافئ ويقع طرفاها على القطع.
- الوتر المحرقي الأساسي: هو الوتر المحرقي الذي يوازي الدليل Δ وطوله يساوي $4|p|$.
- المستقيم المماس: هو مستقيم لا يوازي محور تناظر القطع ويوجد نقطة واحدة مشتركة بينه وبين القطع المكافئ.
- الناظم للقطع المكافئ: المستقيم العمودي على مماس القطع المكافئ في نقطة التماس.
- وسيط القطع P: وهي البعد بين Δ أو F عن الذروة V وهو بعد ثابت $(P > 0)$.

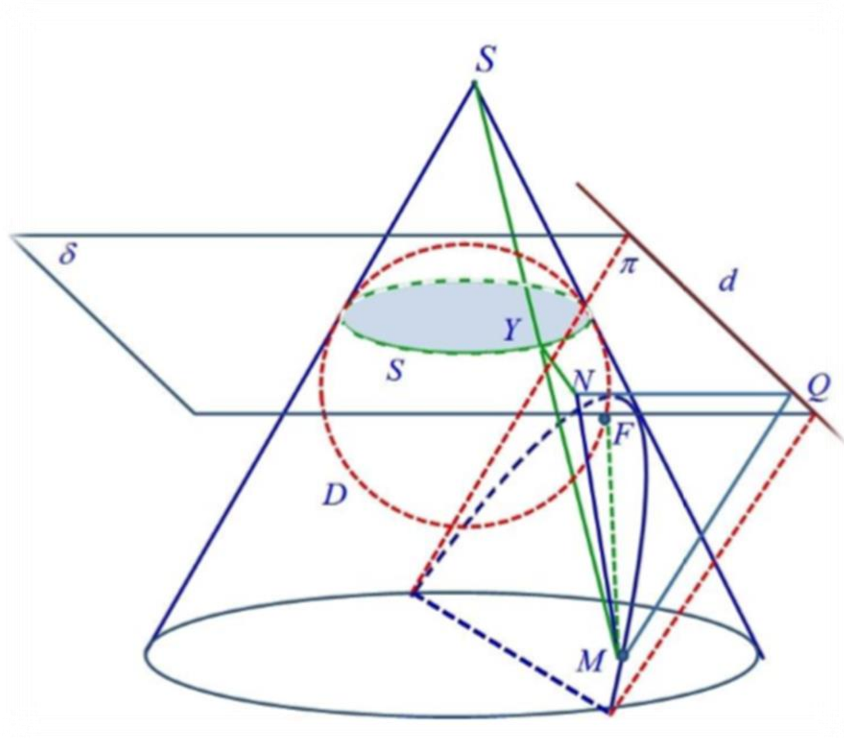
ومن التعرف نجد أن النقطة P تنتمي للقطع إذا وفقط إذا تحققت المساواة $PF = PP`$ حيث $P`$ هي المسقط القائم للنقطة P على Δ.

الفصل الثالث: تولد القطع المكافئ

نظرية: إذا قطع مستوي π مخروطاً دورانياً K وكان موازياً لأحد مولّداته، فإن المقطع الحاصل يكون قطعاً مكافئاً.

البرهان:

لنأخذ الكرةD، التي تمس جميع مولدات المخروط وفق الدائرة S وكذلك تمس المستوي π في النقطة F. نفرض δ المستوي الذي يحوي المقطع S. ليكن d هو الفصل المشترك للمستوين π , δ نختار نقطة لا على التعيين $M \in$ π ∩ K، ننظر في مولد المخروط PM، وليكن $Y \in S \cap PM$ عندها يكون $MY = MF$ لكونهما مماسين للكرة D، ومرسومين من نقطة واحدة.



الشكل 3

ليكن MN عمودياً على δ، NQ عمودي على d. عندئذ يكون المثلثان MNQ, MNY طبوقان (الضلع القائمMN مشترك، بينما الزاويتين ∠NMY , ∠NMQ مساويتان للزاوية بين المحور ومولد المخروط).

ولهذا فإن $MY = MQ$ وتبعاً لذلك فإن MF = MQ مهما كانتM على المقطع المدروس وإضافة إلى ذلك فإن MQ عمودي علىd.

وبناءً على ذلك فإن المقطع المفروض هو قطع مكافئ بالمحرق F والدليلd.

الفصل الرابع: المعادلة المختزلة للقطع المكافئ

ليكن P القطع المكافئ الذي دليله Δ ومحرقه F. نختار جملة إحداثية متعامدة مبدؤهاO منطبق على ذروة القطع P ومحور تراتيبها Oy منطبق على محور تناظر P، بحيث تكون إحداثيات F هي $(0,p)$.

لنأخذ حالة $P>0$، في هذه الحالة تكون معادلة الدليلΔ هي $y=-p$.

تنتمي النقطة $p(x,y)$ إلى القطع المكافئ P بحيث $PF=PP`$، أي:

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$$

وبتربيع الطرفين والاختصار نجد:

$$x^2+(y-p)^2=(y+p)^2$$
$$x^2+y^2-2py+p^2=y^2+2py+p^2$$

وعليه نستنتج أن المعادلة القياسية لقطعٍ مكافئٍ ذروته في مبدأ الإحداثيات، ومحور تناظره هو محور التراتيب، هي:

$$x^2=4py$$

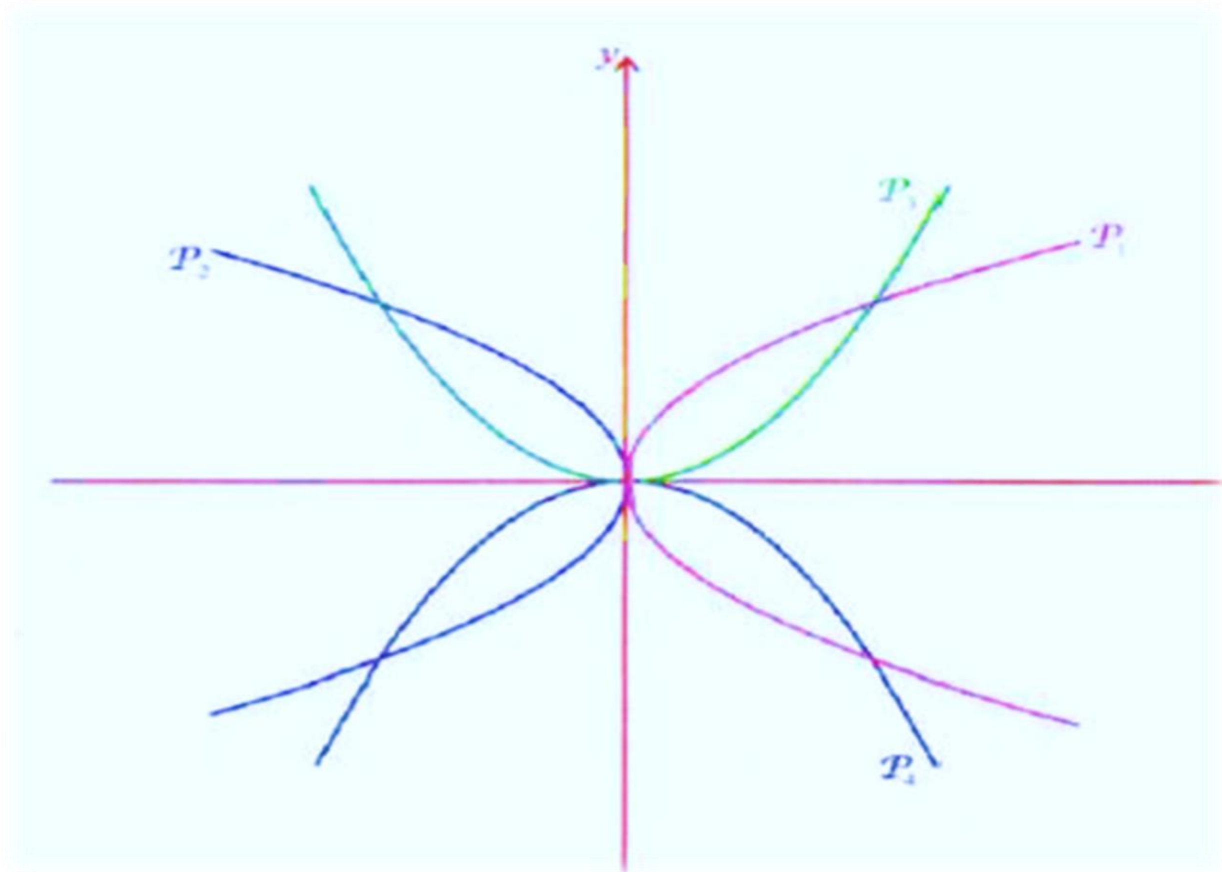
ويكون القطع مفتوحاً من الأعلى (أو من جهة التراتيب الموجبة) عندما $p>0$، ومفتوحاً من الأسفل (أو من جهة التراتيب السالبة) عندما $p<0$.

وبنفس الأسلوب يمكن إيجاد الشكل القياسي لمعادلة قطع مكافئ تنطبق ذروته على محور الإحداثيات، وينطبق محوره على محور الفواصل Ox باختيار المحرق عند $F(p,0)$ ومعادلة الدليل $x=-p$، وباتباع الخطوات السابقة نحصل على الشكل القياسي لمعادلة القطع المكافئ ويكون بالشكل: $y^2=4px$

ويكون القطع مفتوحاً من اليمين (أو من جهة الفواصل الموجبة) عندما $p>0$ ،ومفتوحة من اليسار (أو من جهة الفواصل السالبة) عندما $p<0$.[2]

[2] الهندسة التحليلية، وزارة التربية والتعليم السوريّة، الثالث ثانوي

رقم القطع	P_1	P_2	P_3	P_4
معادلته	$y^2 = 4px$	$y^2 = -4px$	$x^2 = 4py$	$x^2 = -4py$
المحور	Ox	Ox	Oy	Oy
الذروة	$O(0,0)$	$O(0,0)$	$O(0,0)$	$O(0,0)$
جهة التقعر	جهة الفواصل الموجبة	جهة الفواصل السالبة	جهة التراتيب الموجبة	جهة التراتيب السالبة
المحرق	$F(p,0)$	$F(-p,0)$	$F(0,p)$	$F(0,-p)$
معادلة الدليل	$\Delta: x = -p$	$\Delta: x = p$	$\Delta: y = -p$	$\Delta: y = p$



الشكل 4

الباب الثالث: المعادلة العامة لقطع مكافئ محور تناظره يوازي أحد محوري الإحداثيّات

الفصل الأول: المعادلة العامة لقطع مكافئ محور تناظره يوازي محور التراتيب

لإيجاد الصيغة العامة لمعادلة قطع مكافئ ذروته النقطة $V(x_0, y_0)$، محور تناظره يوازي محور التراتيب Oy ، ولأن المحرق F واقع على محور القطع، فإن إحداثيي المحرق هما: $(x_0, y_0 + p)$ حيث $p \neq 0$ ، وعندئذ تكون معادلة الدليل $y = y_0 - p$ ونلاحظ هذا في الشكل المجاور (حالة $p > 0$).

معادلة القطع المكافئ في الجملة $\left(V, \vec{i}, \vec{j}\right)$ هي $x^2 = 4p$ حسب ما أوجدناه سابقاً.

ودساتير الانتقال من الجملة $\left(V, \vec{i}, \vec{j}\right)$ إلى الجملة $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ هي

$$x = x_0 + X \qquad \text{و} \qquad y = y_0 + Y$$

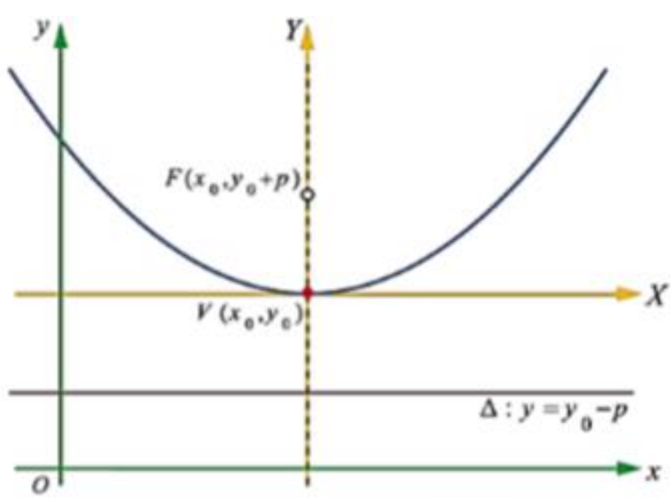
وعليه تكون معادلة القطع في الجملة $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي:

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$$

فتكون الشكل القياسي لمعادلة القطع المكافئ الذي ذروته عند (x_0, y_0)، ومحور تناظره المستقيم الذي معادلته $x = x_0$، هي:

$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$.

فإذا كان $p > 0$ كان القطع مفتوحاً من الأعلى (أو من جهة التراتيب الموجبة)، وإذا كان $p < 0$ كان القطع مفتوحاً من الأسفل (أو من جهة التراتيب السالبة).



الشكل 5

كما يمكن كتابة المعادلة بالشكل $y = ax^2 + bx + c : a \neq 0$

ويكون ذلك بنشر العلاقة $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$ وإصلاحها.

الفصل الثاني: المعادلة العامة لقطع مكافئ محور تناظره يوازي محور الفواصل

بأسلوب مماثل للحالة السابقة نبرهن أن الصيغة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي ذروته عند (x_0, y_0)

ومحور تناظره المستقيم الذي معادلته $y = y_0$، هي:

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$$

فإذا كان $p > 0$ كان القطع مفتوحاً من اليمين (أو من جهة الفواصل الموجبة) وإذا كان $p < 0$ كان القطع مفتوحاً من اليسار (أو من جهة الفواصل السالبة).

كما يمكن كتابتها بالشكل $x = ay^2 + by + c : a \neq 0$

رقم القطع	معادلته	الذروة	جهة التقعر
P_1	$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$	$V(x_0, y_0)$	بجهة الفواصل الموجبة
P_2	$(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$	$V(x_0, y_0)$	بجهة الفواصل السالبة
P_3	$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$	$V(x_0, y_0)$	بجهة التراتيب الموجبة
P_4	$(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$	$V(x_0, y_0)$	بجهة التراتيب السالبة

رقم القطع	المحرق	معادلة الدليل
P_1	$F(x_0 + p, y_0)$	$\Delta: x = x_0 - p$
P_2	$F(x_0 - p, y_0)$	$\Delta: x = x_0 + p$
P_3	$F(x_0, y_0 + p)$	$\Delta: y = y_0 - p$
P_4	$F(x_0, y_0 - p)$	$\Delta: y = y_0 + p$

مثال (1):

لإيجاد بؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ $y^2 = 8x$

الحل:

$$y^2 = 8x$$

ونعلم أن المعادلة القياسية لهذا القطع هي

$$y^2 = 4px$$

$$\Rightarrow 4\mathrm{p} = 8 \Rightarrow \mathrm{p} = 2$$

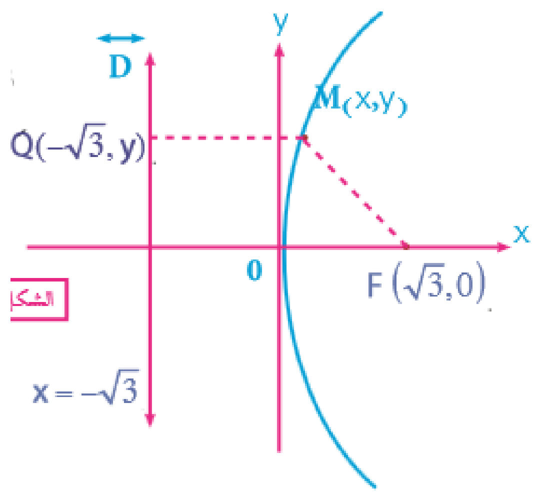
أما البؤرة $F(p,0) = F(2,0)$

ومعادلة الدليل $x = -p \Rightarrow \mathrm{x} = -2$

مثال (2):

لإيجاد معادلة القطع المكافئ إذا علم أن بؤرته $(\sqrt{3},0)$ والرأس في نقطة الأصل:

البؤرة $\mathrm{F}(\sqrt{3},0)$ ولتكن النقطة $M(x,y)$ من نقط منحني القطع المكافئ ، والنقطة $Q(-\sqrt{3},y)$ هي نقطة تقاطع العمود المرسوم من النقطة M إلى الدليل D ومن تعريف القطع المكافئ:



الشكل 6

$$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+\sqrt{3})^2 + (y-y)^2}$$

وبتربيع الطرفين نجد

$$(x-\sqrt{3})^2 + y^2 = (x+\sqrt{3})^2$$

$$x^2 + 2\sqrt{3}x - 3 + y^2 = x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$$

$$y^2 = 4\sqrt{3}x$$

ومن هنا نكون قد أوجدنا معادلة قطع مكافئ علمت بؤرته

مثال (3):

لدينا معادلة القطع المكافئ $(y+1)^2 = 4(x-2)$

لنعين الرأس البؤرة، معادلة المحور ، معادلة الدليل

$$(y+1)^2 = 4(x-2)$$

وبالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

$$\Rightarrow \mathrm{k} = -1 \,, \mathrm{h} = 2$$

فتكون احداثيات الرأس $(h,k) = (2,-1)$

$$4p = 4 \Rightarrow \mathrm{p} = 1$$

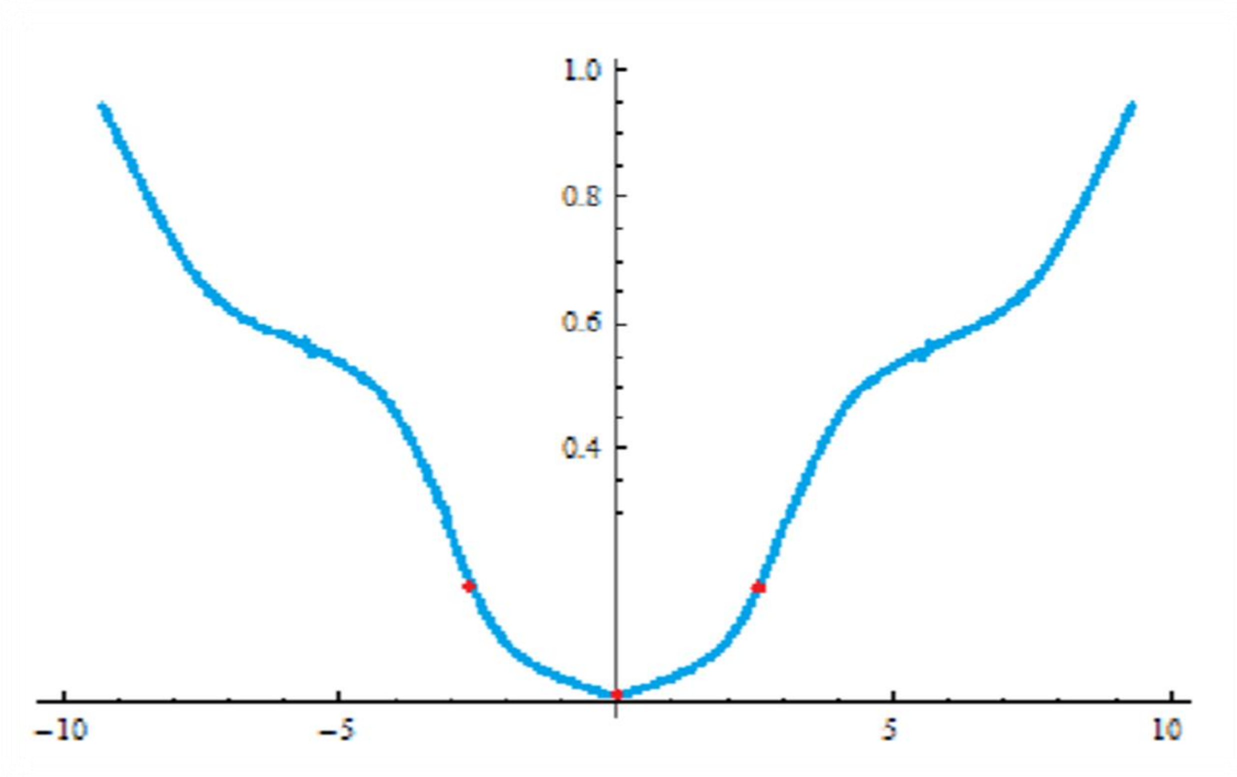
أما احداثيات البؤرة $F = (p+h,k) = F(1+2,-1) = F(3,-1)$

ومعادلة المحور $y = k \Rightarrow \mathrm{y} = -1$

معادلة الدليل $x = -p + h = -1 + 2 = 1 \Rightarrow \mathrm{x} = 1$

الفصل الثالث: دراسة تغيرات تابع

لكي نحدد القطع المكافئ ونرسمه نحتاج لتحديد ثلاثة من نقاطه فقط فكيف علمنا أنه لن يغير مساره في نقطة من النقاط ويصبح هكذا مثلاً:



الشكل 7

تكون المعادلة القياسية للقطع المكافئ في هذه الحالة من الشكل (لا يمكن دراسة تغيرات هذا القطع اذا كان محور تناظره موازٍ لمحور الفواصل):

$$a(x-x_0)^2 = y - y_0$$

فإذا حسبنا ميل هذا التابع عن طريق اشتقاقه بالنسبة لـx نجد أنه:

$$2z(x-x_0)+0 = \frac{dy}{dx}$$

وهو متزايد تماماً في المجال]$x_0, +\infty$[وفي ازدياد دائم مع ازدياد x لذلك لا يمكن أن يقل ميل التابع في إحدى نقاطه (لأنَّ الميل يكون موجب تماماً في هذا المجال)، وينعدم الميل عندما $x = x_0$ (حيث يصبح

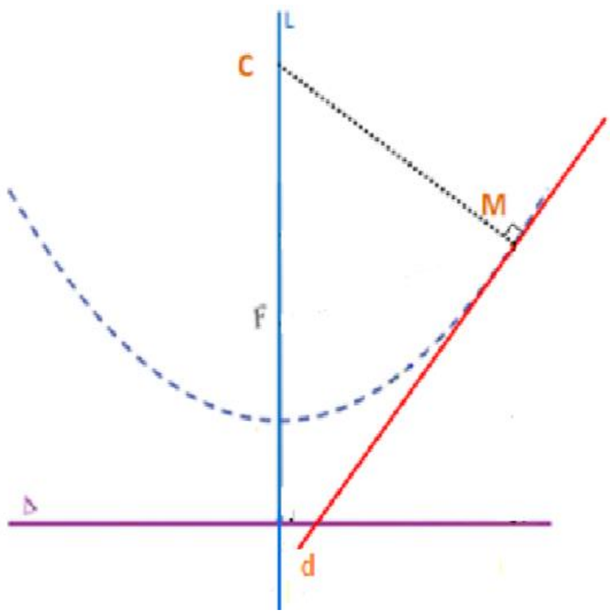
موازي لمحور الفواصل)، أما في المجال $]-\infty, x_0[$ فيكون متناقص تماماً وكذلك لا يمكن أن يتزايد في هذا المجال (لأن الميل يكون سالب تماماً في هذا المجال).

الباب الرابع: مماس القطع المكافئ وأهم خصائصه

الفصل الأول: مماس القطع المكافئ

ليكن P القطع المكافئ، ولتكن M نقطة من هذا القطع، نقول أن المستقيم d يمس القطع في النقطة M، إذا تحقق الشرطان:

1. المستقيم d لا يوازي محور تناظر القطع.
2. النقطة M هي النقطة الوحيدة المشتركة بين القطع P والمستقيم d.

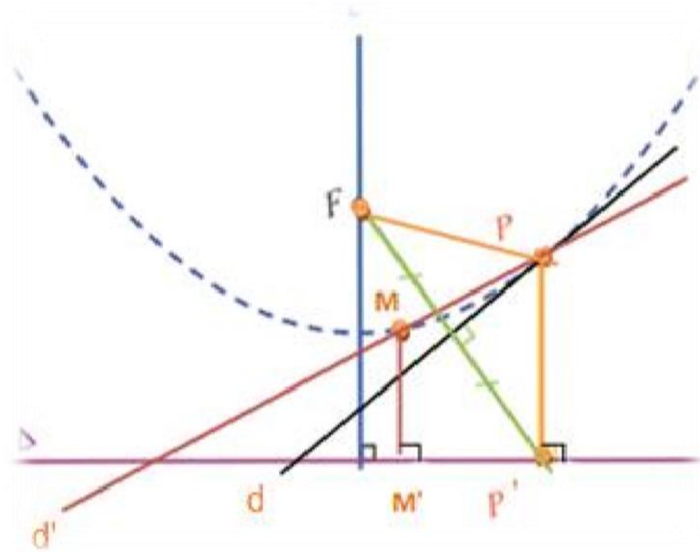


الشكل 8

الفصل الثاني: خواص مماس القطع المكافئ

نتيجة 1

مماس القطع المكافئ منصف للزاوية المتشكلة بين الناظم المرسوم من نقطة التماس والقطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة التماس والمحرق



الشكل 9

البرهان: إذا افترضنا أن d ليس منصف، نرسم منصف للزاوية $\angle FPP`$ فيقطع القطع في النقطة $M$ متساوية البعد عن $F, P`$ لأن M نقطة من محور القطعة المستقيمة $FP`$ لأن المثلث $FPP`$ متساوي الساقين وبالتالي $\mathrm{FM} = \mathrm{P`M}$ نرسم من $M$ عموداً على $\Delta$ فيقطعه في $\mathrm{M`}$ فيكون $FM = M`M$ وهذا مستحيل لأن $\mathrm{P`M}$ وتر في المثلث القائم $MM`P`$ و $M`M$ ضلع قائمة في ذلك المثلث فيكون الفرض الذي فرضناه خاطئ، ومنه المماس منصف للزاوية $FPP`$.

عكس النتيجة 1: منصف الزاوية المتشكلة بين الناظم المرسوم ونقطة التماس والقطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة التماس والمحرق يكون مماساً للقطع المكافئ.

البرهان:

إذا لم يكن المنصف مماس نرسم المماس للقطع في رأس الزاوية فيكون المماس منصفاً للزاوية.

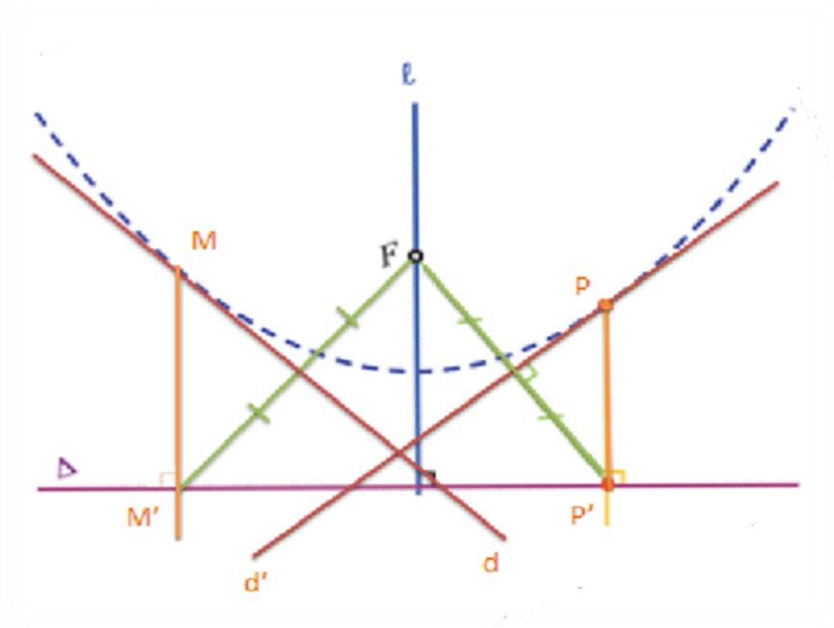
نتيجة 2:

محور أي قطعة مستقيمة أحد طرفيها محرق القطع والثانية نقطة من الدليل هو مماس للقطع.

نتيجة 3:

لا يوجد للقطع المكافئ مماسان متوازيان.

البرهان:

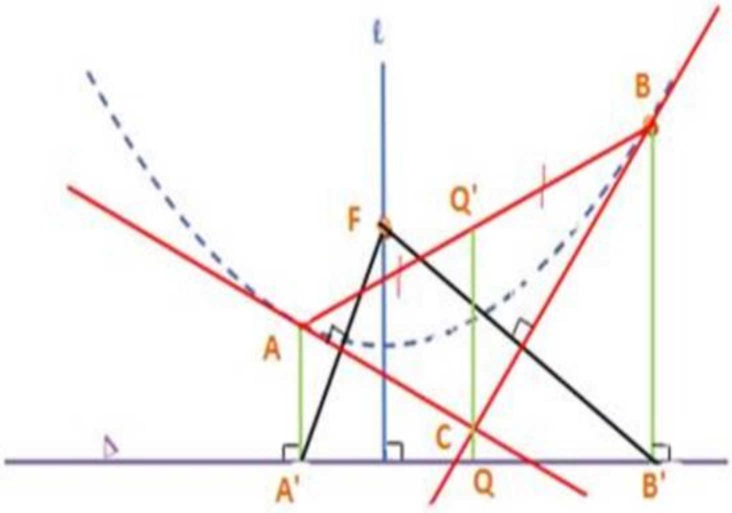


الشكل 10

نفرض أن d مماس للقطع في M، وأن $M`$ مرتسم $M$ على $\Delta$ فيكون $d$ محور $[M`F]$، ونفرض أن $d`$ مماس للقطع في $P$، و $P`$ مرتسم P على Δ فيكون $d`$ محور $[P`F]$ وإذا كان $d//d`$ فإن $M`F//P`F$ لأن العمودين على مستقيمين متوازيين متوازيان، ومنه مستقيمان متوازيان يشتركان بنقطة واحدة، إذاً هما منطبقان، والنقط $P`, F, M`$ على استقامة واحدة، أي $F \in \Delta$ وهذا غير ممكن، إذاً لا يوجد مماسان متوازيان للقطع المكافئ.

نتيجة 4:

المستقيم المتوسط المرسوم من تقاطع المماسين (C) في مثلث أرخميدس (ABC) يكون عمودي على الدليل.



الشكل 11

البرهان:

نصل $FA` = FB`$ فتكون C نقطة من محور `FB أي $CF = CB`$ وهي نقطة من محور $FA`$ أي $CF = CA`$ ومنه C نقطة من محور القطعة المستقيمة $[A`B`]$ (1)

لأنها $AA`//QQ`//BB`$ أعمدة على مستقيم واحد، وحسب نظرية تالس لهذه المستقيمات المتوازية والقاطعان $AB, A`B$ نجد أنَّ:

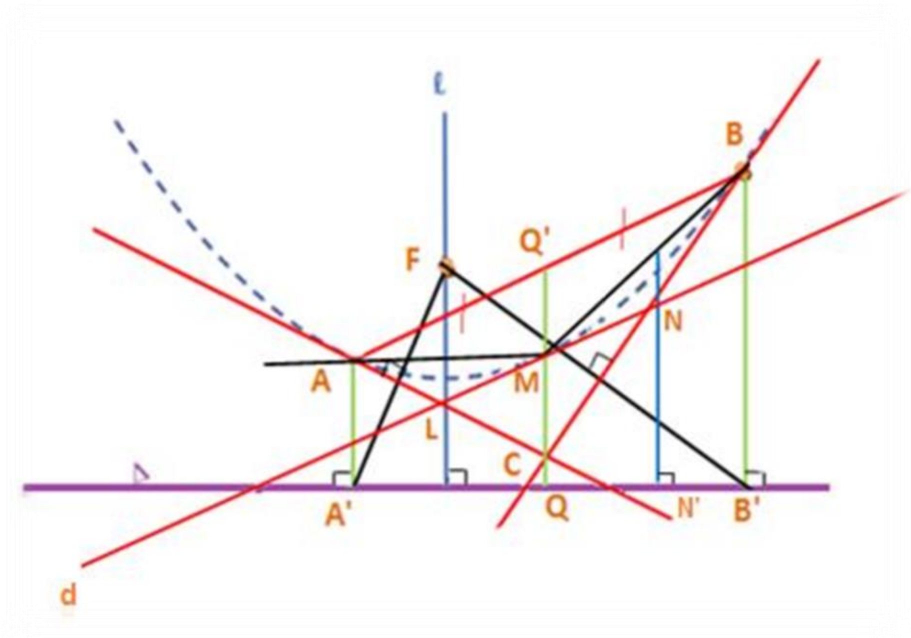
$$1 = \frac{AQ`}{Q`B} = \frac{A`Q}{QB`} \Rightarrow Q`B = AQ`$$

محور القطعة المستقيمة $[A`B`]$ يمر من منتصف AB ⇐ محور القطعة المستقيمة $[A`B`]$ هو متوسط في المثلث ABC (2)

من (1) و(2) نجد أن المتوسط المرسوم من C

نتيجة 5:

المماس d من نقطة تقاطع متوسط أرخميدس العمودي على الدليل مع القطع M يوازي القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتي التماس $[AB]$.



الشكل 12

البرهان:

نرسم مثلثي أرخميدس MNB , ALM حسب نظرية تالس حيث QQ\`//NN\`//BB\` (1)

$MN`$ متوسط في المثلث MNB (2)

من (1) و (2) نجد:

$\frac{CN}{NB} = 1$

وكذلك بالنسبة للمثلث ALM فنجد$1 = \frac{CN}{NB} = \frac{CL}{LA}$ وحسب نظرية تالس $AB//d$

نتيجة 6:

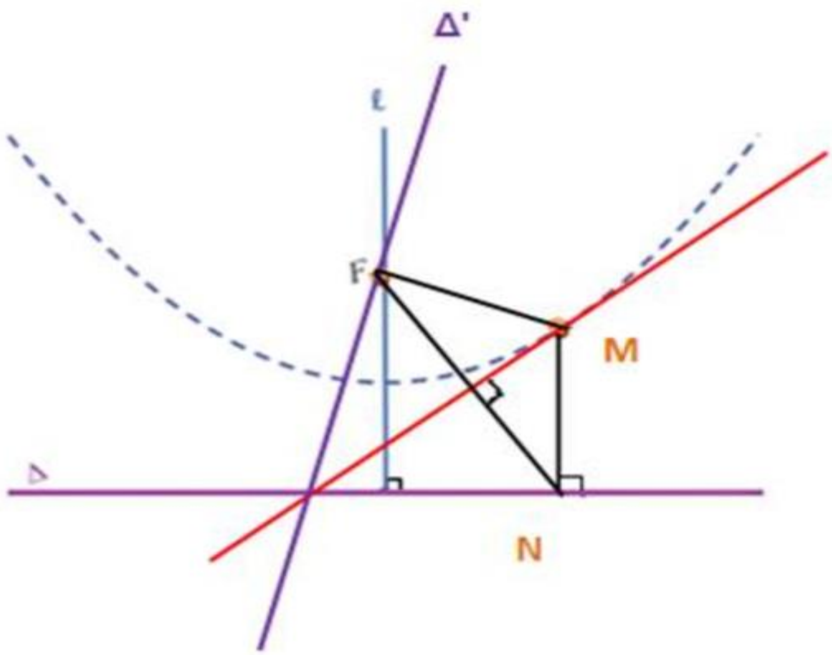
أي نقطة نظيرة المحرق بالنسبة لمماس ما للقطع تنتمي للدليل.

الإثبات:

نرسم عمود من نقطة التماس على الدليل فيقطعه في N، نصل NF فيكون المماس محور هذه القطعة وبالتالي:

N نظيرة F بالنسبة للمماس ⇐ F` نفسها

N ⇐ F` تنتمي للدليل.



الشكل 13

نتيجة 7:

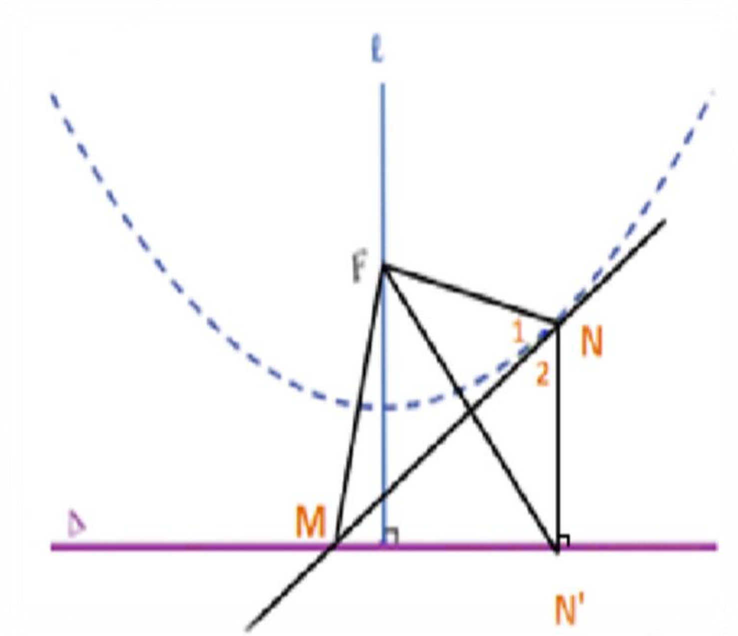
المحرق ينتمي إلى المستقيم الذي يكون نظيراً للدليل بالنسبة لمماس ما.

الإُثبات:

نظير الدليل بالنسبة للمماس هو نظائر جميع نقاط الدليل وبما أن F` نظيرة المحرق بالنسبة للماس تنتمي للدليل فهي تنتمي للدليل فإن نظيرة $F$` تنتمي لـΔ` وهي نفسها F.

نتيجة 8:

القطعة المستقيمة من المماس والمحدود بنقطة التماس ونقطة تقاطعه مع الدليل ترى من المحرق ضمن زاوية قائمة.



الشكل 14

الإثبات:

MN , $1 = 2$, $NN` =$ $FN$ضلع مشترك ⇐ المثلثان $MNN`, MNF$ متطابقان ⇐ $\angle F$ قائمة.

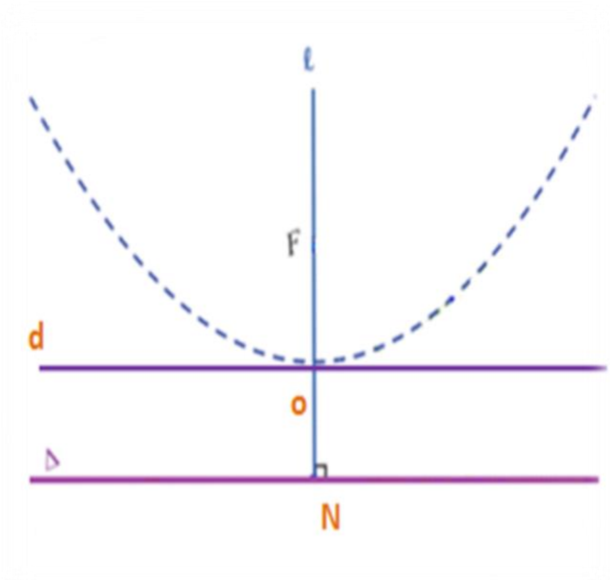
نتيجة 9:

المماس للقطع المكافئ في ذروته يوازي الدليل.

البرهان:

بما أن المماس d هو محور لـFN فهو عمودي عليه في O.

Δعمودي على FN (محور القطع) في N والعمودان على مستقيم واحد متوازيان ومنه $d//\Delta$.



الشكل 15

نتيجة 10:

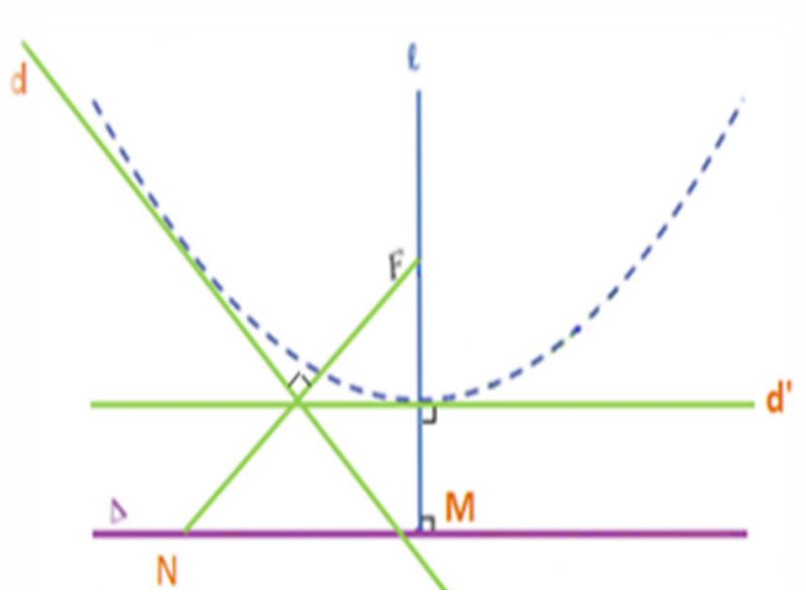
نقطة تقاطع مماس للقطع المكافئ مع مماس له في ذروته هي المسقط القائم للمحرق على ذلك المماس.

البرهان:

d محور القطعة المستقيمة $[FN]$

d` في المثلث FMN يوازي القاعدة MN ويمر من منتصف FM، إذاً هو يمر من منتصف FN.

إذاً نقطة تقاطع d` مع d هي منتصف FN فيكون FN عمود على d في تلك النقطة.



الشكل 16

نتيجة 11:

المماس يقطع محور القطع في نقطة N هي نظيرة `M (المسقط القائم للنقطة M على محور القطع) بالنسبة للذروة V.

الإثبات:

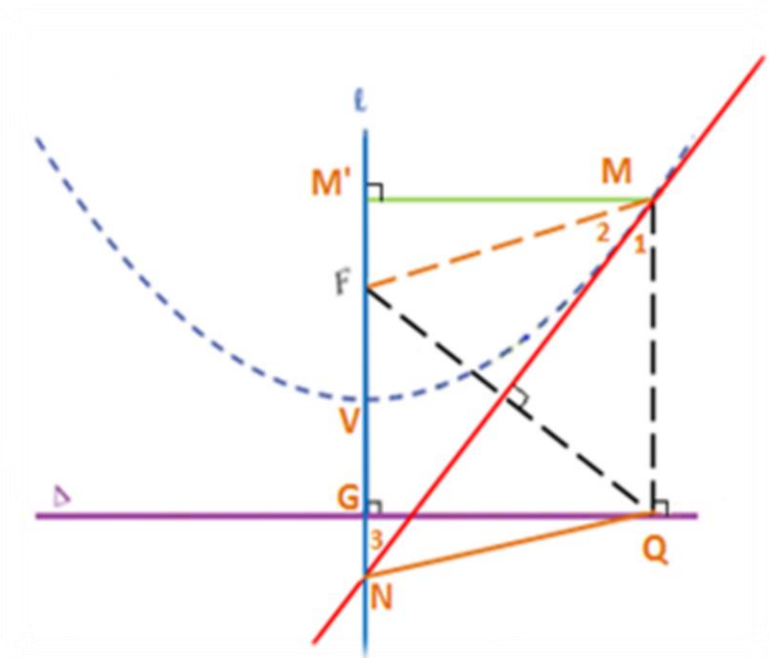
نصل FM ثم نرسم ناظم M على Δ فيقطعه في Q ثم نصل NQ.

$\angle 3 = \angle 1$ بالتبادل الداخلي (1).

$\angle 2 = \angle 1$ منصف داخلي (2).

من (1) و (2) نجد: $\angle 2 = \angle 3$ ومنه FMN مثلث متساوي الساقين $\Leftarrow \mathrm{FM} = \mathrm{FN}$ (3)

$$\mathrm{MQ} = \mathrm{FM} \quad (4)$$



الشكل 17

من (3) و (4) نجد:

$FN = MQ$

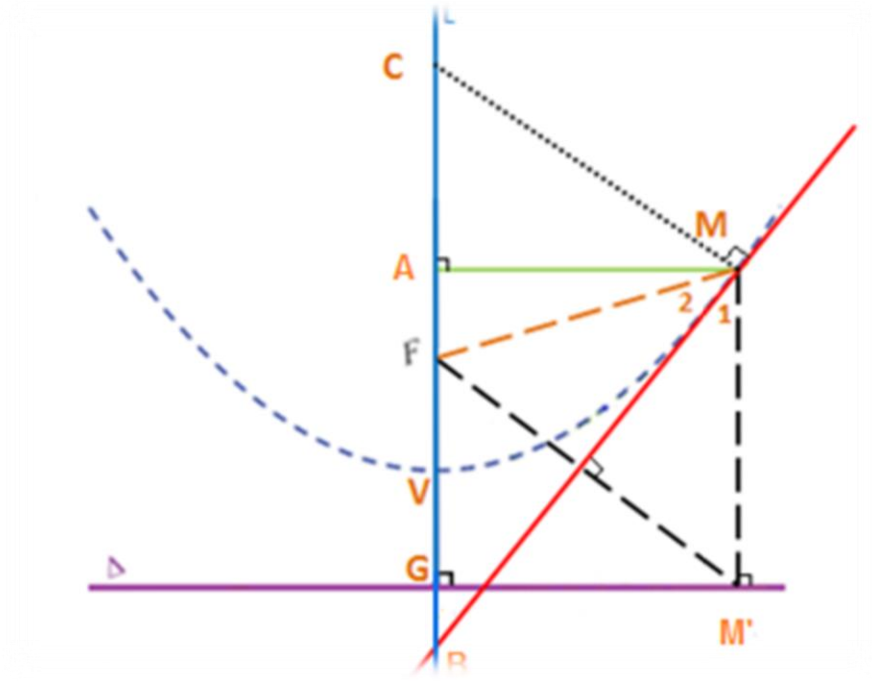
ولدينا $MQ = M`G \Leftarrow FN = M`G$

وبما أن $\mathrm{VG} = \mathrm{FV} \Leftarrow GN = M`F$

ومنه $M`V = NV$ وبالتالي $N$ هي نظيرة $M`$ بالنسبة للذروة V.

نتيجة 12:

A مسقط نقطة التماس M على محور القطع، وB نقطة تقاطع المماس مع المحور، وبفرض أنّ النَّاظم في M يقطع المحور في C، أثبت أن F منتصف $[BC]$ ثمّ أثبت أن $[CA] = 2p$.



الشكل 19

الإثبات:

بما أن العمودين على مستقيم واحد متوازيان

إذاً $MC//FM` , AM//GM`$

$\Leftarrow AMC = GM`F$ (أضلاعهما متوازية مثنى مثنى) (1)

وبما أن البعد بين مستقيمين متوازيين ثابت

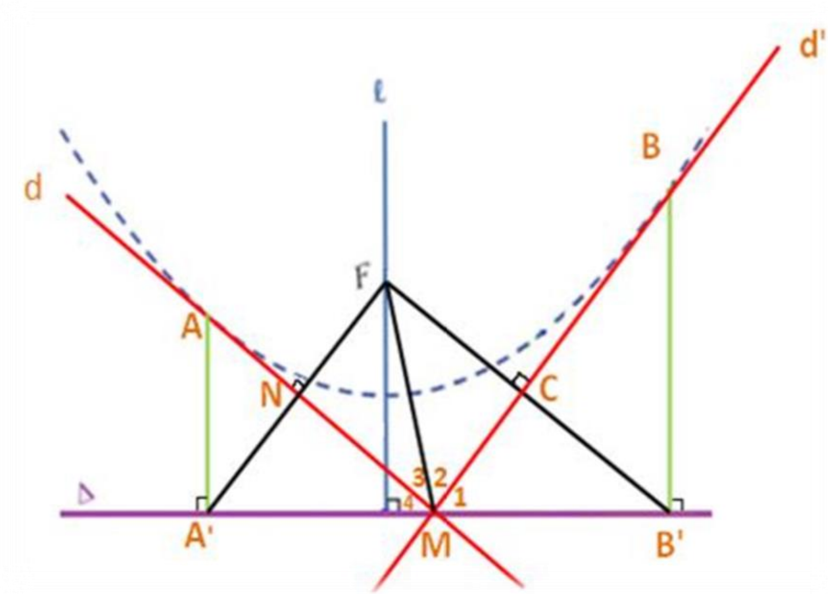
$\Leftarrow AM = GM$ (2)

من (1) و (2) نجد أن المثلثين القائمين $ACM , GFM`$ متطابقان ومن التطابق $CA = FG$

ومنه $CA = 2p$، فإن $FC = 2p + FA$ ومنه $\mathrm{FB} = 2\mathrm{p} + \mathrm{GB} \Leftarrow F$ منتصف $[CB]$ "من النتيجة 11"

نتيجة 13:

إذا تعامد مماسان للقطع المكافئ فهما يتقاطعان بنقطة من دليله وتكون نقطتا التماس ومحرق القطع تنتمي إلى مستقيم واحد.



الشكل 20

البرهان:

إذا لم تكن M تنتمي للدليل، نصل $MF, MB`, MA`$ فيكون

$\angle 2 = \angle 1$ لأن المثلثين $CMF, CMB`$ متطابقان

$\angle 4 = \angle 3$ لأن المثلثين $NMA`, FNM$ متطابقان

$\angle 2 + \angle 3 = 90°$ وكذلك $\angle 4 + \angle 1 = 90°$

ومنه $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$ بنفس الطريقة نجد أن AFB على استقامة واحدة

النتيجة 14:

من كل نقطة من الدليل يمكن رسم مماسين للقطع وهما متعامدان.

البرهان:

المثلثان $CMF, CMB`$ متطابقان، لذلك فإن $\angle 2 = \angle 1$، كذلك المثلثان $NMA`, FNM$ متطابقان

ومنه $\angle 4 = \angle 3$، ولكن $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$

وبالتعويض بالعلاقات السابقة $\angle 2(\angle 2 + \angle 3) = 180$

ومنه $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$

الفصل الثالث: إنشاء القطع المكافئ

هناك طريقتين لإنشاء القطع المكافئ

الطريقة الأولى:

لرسم القطع المكافئ P ابتداءً من تحديد المحرق F والدليل Δ ونستطيع تحيد الإنشاء بالخطوط التالية:

1. نرسم من F عموداً على Δ فيقطعه في D
2. نحدد منتصف القطعة المستقيمة $[FD]$ ولتكن النقطة O، فتكون $O \in P$ وهي ذروة القطع.
3. للحصول على باقي نقاط القطع، نقوم بإنشاء المستقيمات التي تحقق الشرط الآتي $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \ldots . \perp [FD]$.
4. نعين نقطتي تقاطع كل من المستقيمات مع الدائرة (F, DH)، حيث H هي النقطة التي يعامد فيها المستقيم .... $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ نصف المستقيم $[DF)$.
5. نحدد نقاط التقاطع فيتشكل لدينا نقطتان $M, M`$ ونجد

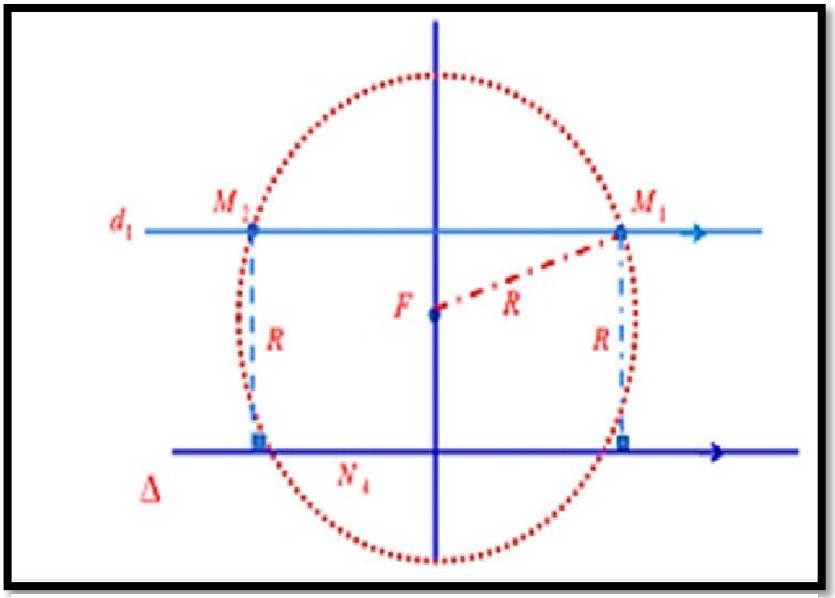
ولدينا $MF = M`F$ $\mathrm{MN} = \mathrm{DH} = \mathrm{R} \Leftarrow \mathrm{MN} = \mathrm{MF} = \mathrm{R} \Leftarrow M \in \mathrm{P}$

وبنفس الطريقة نستنتج باقي نقاط القطع وذلك بتنقيل موضع H على نصف المستقيم $[DF)$.[3]

[3] الهندسة التحليلية، المركز الوطني للمتميزين، الثالث ثانوي

الطريقة الثانية

لإنشاء نقط من قطع مكافئ P، Δ دليل هذا القطع، و F محرقه، و p وسيط القطع نقوم بالخطوات التالية:



الشكل 21

1. نرسم دائرة مركزها المحرق F ونصف قطرها R لا على التعيين.
2. نرسم مستقيم d_1 يوازي دليل القطع ويبعد عنه مسافة تساوي R في نصف المستوي الذي يحوي F.
3. نعين نقطتي تقاطع المستقيمين والدائرة ولتكن M_1, M_2 .
4. نعين مرتسمات كل من M_1, M_2 على الدليل ولتكن N_1, N_2.
5. $M_1N_1 = M_2N_2 = R$ لأن البعد بين المستقيم Δ و d_1 يساوي نصف قطر الدائرةR.
6. نستنتج أن النقطتين M_1, M_2 نقطتان من القطع لأن $M_1F = M_2F = N_1M_! = N_2M_2$.

نكرر الخطوات السابقة من أجل دائرة جديدة وفي كل مرة نحصل على نقطتين تنتميان إلى هذا القطع.[4]

[4] الهندسة التحليلية، المركز الوطني للمتميزين، الثالث ثانوي

الباب الرابع: أهم الخواص العدسية للقطع المكافئ

الخاصة الأولى:

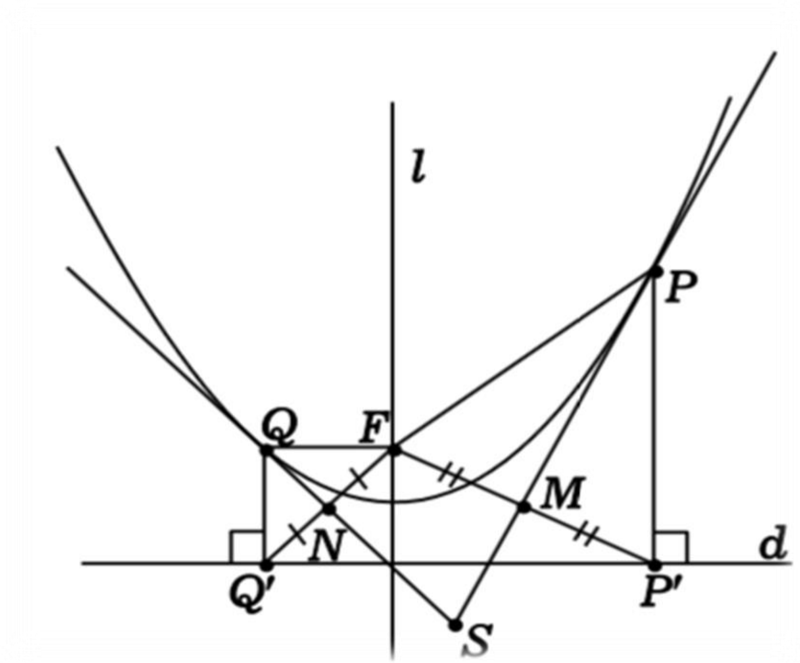
مماس القطع المكافئ في النقطة p هو عبارة عن محور القطعة المستقيمة $FP`$ حيث النقطة $P`$ مرتسم P على d.

البرهان:

سنتبع في هذا البرهان طريقة نقض الفرض، وذلك بأن نفترض أن محور القطعة المستقيمة $FP`$

يشترك مع القطع بنقطة أخرى غير النقطة P نرمز لها بـ R (كما في الشكل المجاور)، عندها ستكون $FR = RP`$

لأنَّ النقطة R تقع على محور القطعة المستقيمة $FP`$.



الشكل 22

وبالتالي إذا كانت $P \neq R$ فسنحصل على مثلث قائم الزاوية $RP`R`$ فيه الضلع القائمة تساوي الوتر، إنَّ التناقض الذي حصلنا عليه بيّن لنا أن الفرض خاطئ، ويبرهن هذه الخاصة.[5]

الخاصة الثانية:

القطع المكافئ يقع كاملاً في جهة واحدة بالنسبة لأي مماس له.

[5] الهندسة التحليلية، المركز الوطني للمتميزين، الثالث ثانوي

الخاصة الثالثة:

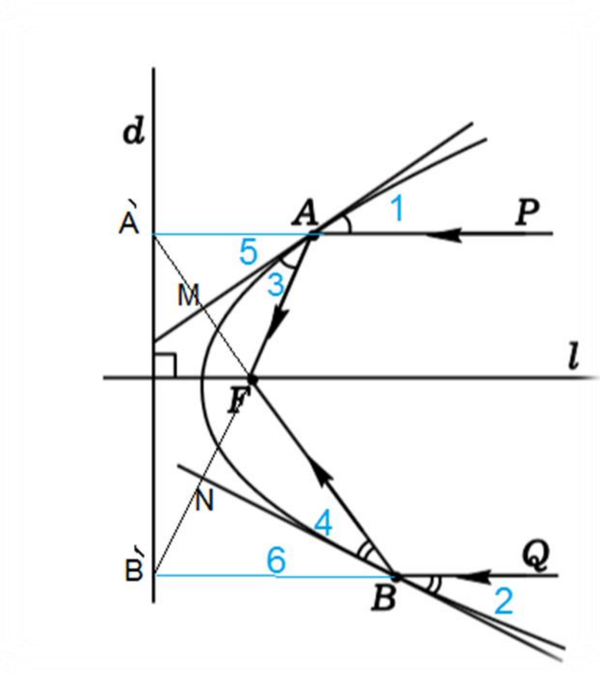
ليكن l هو محور القطع المكافئ و F هو المحرق، فهذا يؤدي أن $\angle MPP' = \angle MPF$ (كما في الشكل السابق).

البرهان:

حسب خواص القطع المكافئ لدينا $FP = PP'$ فالمثلث FPP' متساوي الساقين، والمستقيم الواصل بين رأس المثلث ومنتصف القاعدة هو منصف أيضاً، فالزاويتان $\angle MPP'$ و $\angle MPF$ متساويتان.

الخاصة الرابعة:

إذا كان $PA//l$ فإن المستقيمين FA و PA يشكلان زاويتين متساويتين مع مماس القطع المكافئ في النقطة A (زاوية الإسقاط تساوي زاوية الانعكاس من مرآة القطع المكافئ).



الشكل 23

البرهان:

بسبب التقابل بالرأس نجد:

$$\angle 1 = \angle 5 \, , \angle 2 = \angle 6$$

مماس القطع في A هو محور $A'F$

ومنه $A'M = MF$ والمماس هو منصف في هذا المثلث

$$\angle 3 = \angle 5 \Rightarrow \angle 3 = \angle 1$$

وكذلك مماس القطع في B هو محور $B'F$

ومنه $P'N = NF$ فالمماس هو منصف هذا المثلث

$$\angle 4 = \angle 6 \Rightarrow \angle 4 = \angle 2$$

ومنه نكون قد أثبتنا أن $\angle 1 = \angle 3$ و $\angle 2 = \angle 4$ وبهذا نكون قد أتمينا البرهان.

الخاصة الخامسة:

من كل نقطة من دليل القطع المكافئ نرى القطع المكافئ بزاوية قائمة.

تطبيقات القطع المكافئ في حياتنا اليوميّة

بعد تعرفنا على القطع المكافئ ودرسنا أهم خواصه، فسنتطرق إلى أهمية القطع المكافئ في حياتنا اليوميّة وما له من دور كبير في الاختراعات العلميّة الحديثة، حيث أصبح محوراً في العديد من الدراسات، وبات محور اهتمام الفيزيائيين والفلكيين وعلماء الفضاء والرياضيات ومطورو الأجهزة الالكترونيّة والأسلحة وغيرها.......

ويمكن ملاحظة القطع المكافئ في:

- مجال تطوير الأسلحة الحربية: إن دراسة القطع المكافئ تمكن مطورو الأسلحة الحربية والقذائف من تحديد مسار حركة القذيفة، فيكفي تحديد موقع المدفع وموقع العدو فيقوم المدفع آلياً بتحديد الزاوية المناسبة للإطلاق من أجل بلوغ الهدف بدقة كبيرة.
- من خلال الماء المتدفق من إحدى نوافير المياه.
- صناعة ضوء السيارة، فيتم صناعته على شكل مجسم مكافئ توضع في بؤرته مصباح، وعندما ينطلق شعاع ضوئي من المصباح (البؤرة) ينعكس على سطح المجسم ويتجه أفقياً، وكذلك تفعل جميع الأشعة؛ وبذلك ينار الطريق أمام السيارة على بعد أمتار دون تبديد للطاقة.
- التقاط الأمواج التي تأتي من الخارج لتتجمع في نقطة واحدة، وتكون هذه النقطة هي بؤرة قطع مكافئ، فعندما تأتي الأشعة وتنعكس على سطح الجسم، تتجه تلك الأمواج أو الأشعة نحو البؤرة؛ وهكذا يمكن إنتاج طاقة بهذه الطريقة، ونشاهد هذه الحالة في الهوائيات المقعرة التي يُلتقط من خلالها القنوات التلفزيونيّة الفضائيّة وفي مرايا التلسكوب[6].

[6] الهندسة التحليلية، وزارة التربية والتعليم السورية، الثالث ثانوي

نتائج البحث

وجدنا أن القطوع المخروطية هي مجموعة نقاط بعدها عن نقطة معينة على بعدها عن مستقيم معين هي نسبة ثابتة، وهي ثلاث أنواع (المكافئ الناقص والزائد).

القطع المكافئ هو عبارة عن مجموعة نقاط، بعد هذه النقاط عن نقطة ثابتة يساوي بعدها عن مستقيم ثابت.

تسمى هذه النقطة بؤرة القطع المكافئ أما المستقيم فيسمى دليل القطع.

هناك خواص عديدة لمماس القطع لأي نقطة من نقاطه وناظم هذا المماس، وأهمها:

- منصف الزاوية المتشكلة بين الناظم المرسوم ونقطة التماس والقطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة التماس والمحرق يكون مماساً للقطع المكافئ.
- لا يوجد للقطع المكافئ مماسان متوازيان.
- المستقيم المتوسط المرسوم من تقاطع المماسين في مثلث أرخميدس يكون عمودي على الدليل.
- أي نقطة نظيرة المحرق بالنسبة لمماس ما للقطع تنتمي للدليل.
- المحرق ينتمي إلى المستقيم الذي يكون نظيراً للدليل بالنسبة لمماس ما.
- لقطعة المستقيمة من المماس والمحدود بنقطة التماس ونقطة تقاطعه مع الدليل ترى من المحرق ضمن زاوية قائمة.
- لقطعة المستقيمة من المماس والمحدود بنقطة التماس ونقطة تقاطعه مع الدليل ترى من المحرق ضمن زاوية قائمة.
- المماس للقطع المكافئ في ذروته يوازي الدليل.
- نقطة تقاطع مماس للقطع المكافئ مع مماس له في ذروته هي المسقط القائم للمحرق على ذلك المماس.
- من كل نقطة من الدليل يمكن رسم مماسين للقطع وهما متعامدان.
- من كل نقطة من دليل القطع المكافئ نرى القطع المكافئ بزاوية قائمة.

المصادر والمراجع

- كتاب رياضيات الهندسة التحليلية، للصف الثاني ثانوي، الجمهورية العربية السورية، بحث القطوع المخروطيّة.
- كتاب رياضيات الهندسة، دليل الطالب، الصف الثالث ثانوي، المركز الوطني للمتميزين.
- كتاب الرياضيات الجبر لمنهاج الثاني ثانوي، المركز الوطني للمتميزين.
- كتاب الهندسة الصف الثاني ثانوي، الجمهورية العربية السوريّة.
- الموقع الإلكتروني: www.4shared.com .
- Thomas' Calculus

فهرس الأشكال التوضيحية

الفهرس