مقدمة أنظمة تحكم (نظري)

تحويلات لابلاس

تحويلات لابلاس

الأهداف:

أن يتعرف المتدرب على:

١. أهمية تحويل لابلاس.
٢. تعريف تحويل لابلاس.
٣. خصائص ونظريات تحويل لابلاس.
٤. جدول تحويل لابلاس لبعض الدوال المهمة.
٥. تحويل لابلاس العكسي.
٦. حل المعادلات التفاضلية باستخدام لابلاس.

٢- ١ مقدمة:

يعتبر تحويل لابلاس من الوسائل الرياضية الهامة التي تلعب دوراً كبيراً في دراسة علم التحكم الآلي. فمن المعلوم أن أي نظام ديناميكي يمكن تمثيله بمجموعة من المعادلات الجبرية والمعادلات التفاضلية، ولكي يتم التعامل مع هذه المعادلات بالتبسيط والاختصار يلزم تحويلها جميعاً إلى معادلات جبرية، وهو ما يوفره تحويل لابلاس. وبالإضافة إلى ذلك فإن حل المعادلات التفاضلية ذاتها يتم بواسطة تحويل لابلاس.

٢- ٢ تعريف تحويل لابلاس:

يمكن القول بأن تحويل لابلاس هو عبارة عن تحويل رياضي خطي يتم فيه تحويل الدالة الزمنية إلى دالة مركبة في متغير مركب يسمى متغير لابلاس. كما يمكن به تحويل المعادلات التفاضلية (أو التفاضلية- التكاملية) إلى معادلات رياضية يمكن تبسيطها واختصارها والتعامل معها بسهولة ويسر.

ويمكن كتابة تحويل لابلاس كما يلي:

$$F(s) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

حيث إن:

أ) $F(s)$: الدالة المحولة بدلالة الكمية المركبة ($s = \sigma + j\omega$).

ب) $f(t)$: الدالة الأصلية بدلالة الزمن.

ج) L: رمز تحويل لابلاس.

كما أن تحويل لابلاس العكسي يمكن كتابته كما يلي:

$$L^{-1}(F(s)) = L^{-1}(L(f(s))) = f(s)$$
$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

ورغم أن تحويل لابلاس العكسي المعطى بالمعادلة السابقة يمكن إجراؤه على جميع الدوال ولكن مع بعض الجهد، إلا أن جداول لابلاس تغني عنه للحصول على الدوال الزمنية عند معرفة الدوال المركبة.

٢- ٣ خصائص و نظريات تحويل لابلاس:

هناك عدد كبير من النظريات المصاحبة لتحويل لابلاس والتي من شأنها أن تساعد في دراسة نظريات التحكم الآلي الخطي، كما تيسر الحصول على تحويل لابلاس لبعض الدوال الزمنية والمعادلات التفاضلية. ومن أهم هذه النظريات:

أ) نظرية الخطية:

$$L(af(t)+bg(t)) = aF(s)+bG(s)$$

ب) نظرية التناسب:

$$L(Af(t)) = AL(f(t))$$

ج) نظرية التراكب:

$$L(f(t)\pm g(t)) = F(s)\pm G(s)$$

د) تحويل تفاضل الدالة:

$$L\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$$

حيث إن $f(0)$ هي القيمة الأولية للدالة. حيث إن:

$$f^{(k-1)}(t) = \frac{d^{k-1} f(t)}{dt^{k-1}}$$

ه) تحويل تكامل الدالة:

$$L\left(\int f(t)dt\right) = \frac{F(s)}{s} + \frac{\left(\int f(t)dt\right)_{t=0}}{s}$$

$$L\left(\iint f(t)dtdt\right) = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{\left(\int f(t)dt\right)_{t=0}}{s^2} + \frac{\left(\iint f(t)dtdt\right)_{t=0}}{s}$$

و) قانون الإزاحة في مجال الزمن:

$$L(f(t-T)) = e^{-sT}F(s)$$

ز) قانون الإزاحة في مجال s :

$$L(e^{at} f(t)) = F(s-a)$$

ح) تغيير سلم محور الزمن:

$$L(f(at)) = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

ط) قانون القيمة الابتدائية:

إذا كانت $\lim_{s\to\infty} sF(s)$ معرفة فإنه يمكن الحصول على القيمة الابتدائية للإشارة $f(t)$ بالطريقة التالية:

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

ي) قانون القيمة النهائية:

إذا كانت $\lim_{s\to 0} sF(s)$ معرفة فإنه يمكن الحصول على القيمة النهائية للإشارة $f(t)$ بالطريقة التالية:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

مثال (٢- ١):

اوجد تحويل لابلاس لدالة الخطوة التالية:

$$x(t) = \begin{cases} A & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

الحل:

لإيجاد تحويل لابلاس لإشارة الخطوة، نستخدم تعريف تحويل لابلاس:

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty Ae^{-st}dt$$

$$X(s) = -\frac{A}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{A}{s}$$

وعندما يكون ارتفاع الخطوة $A=1$، يستخدم رمز $u(t)$ للدلالة عليها وتسمى إشارة خطوة الوحدة، ويكون تحويل لابلاس لإشارة خطوة الوحدة كالتالي:

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

مثال (٢- ٢):

أوجد تحويل لابلاس للدالة الأسية:

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{at} & t \ge 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

الحل:

لإيجاد تحويل لابلاس للدالة الأسية نستخدم تعريف تحويل لابلاس:

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty Ae^{at}e^{-st}dt = \int_0^\infty Ae^{-(s-a)t}dt$$

$$X(s) = -\frac{A}{s-a}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{A}{s-a}$$

٢- ٤ تحويل لابلاس لبعض الدوال الهامة:

يحتوي الجدول (٢- ١) على المزيد من تحويلات لابلاس لبعض الدوال الأساسية والمهمة، بحيث تم إيجاد التحويلات لهذه الدوال عن طريق تطبيق قانون تحويل لابلاس السابق إلى جانب الاستفادة من خصائص ونظريات تحويل لابلاس:

تحويلات لابلاس	الإشارات	اسم الدالة
1	$r(t)=\delta(t)$	دالة النبضة
$\frac{A}{s}$	$u(t)=\begin{cases}A; & t\geq 0\\ 0; & t<0\end{cases}$	دالة الخطوة
$\frac{A}{s^2}$	$r(t)=\begin{cases}At; & t\geq 0\\ 0; & t<0\end{cases}$	دالة الانحدار
$\frac{A}{s^3}$	$r(t)=At^2$	دالة التسارع
$\frac{A}{s+a}$	Ae^{-at}	الدالة الأسية
$\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$	$A\sin\omega t$	الدالة الجيبية
$\frac{As}{s^2+\omega^2}$	$A\cos\omega t$	دالة جيب التمام
$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$t^n e^{-at} \quad (n=1,2,3,....)$	
$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	
$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	

جدول (٢- ١)، تحويلات لابلاس للدوال المهمة.

٢- ٥ تحويل لابلاس العكسي:

للحصول على تحويل لابلاس العكسي فإن جدول تحويل لابلاس هو أقصر الطرق لذلك، ولكن هذا الجدول محدود ولا يحوي جميع صور الدوال الممكنة، لذلك يلزم تفكيك الدالة المراد تحويلها العكسي إلى كسور جزئية يمكن معها استعمال الجداول مباشرة، أي أن الدالة تفكك إلى مجموع عدة دوال.

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + ... + F_n(s)$$

ويكون تحويل لابلاس العكسي هو على الصورة التالية:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + ... + f_n(t)$$

وتكون الدالة $F(s)$ عادة مكونة من بسط ومقام، أي أنها تكون على الصورة:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

حيث يكون كل من البسط $B(s)$ والمقام $A(s)$ عبارة عن كثيرة حدود في المتغير المركب s. ويمكن تصور المعادلة السابقة على الصورة العامة التالية:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s+Z_1)(s+Z_2)...(s+Z_m)}{(s+P_1)(s+P_2)...(s+P_n)}$$

حيث Z_1, Z_2, ..., Z_m وكذلك P_1, P_2, ..., P_n عبارة عن أعداد حقيقية أو مركبة، مع افتراض أن رتبة المقام هي أعلى من رتبة البسط، وهو الوضع الغالب في معظم أنظمة التحكم الآلي، أي أن n أكبر من m. فإذا لم يتحقق هذا الافتراض فيجب قسمة البسط على المقام لتحويل الكسر الأخير ليحقق هذا الافتراض.

ويتوقف شكل الكسور الجزئية على ما إذا كانت الكميات P_1, P_2, ..., P_n أعداد حقيقية مختلفة، أو أن فيها كميات مكررة، أو كان فيها كميات مركبة وهي ما تظهر دائماً على شكل أزواج مركبة مترافقة. أي أن الكسور الجزئية تعتمد في الواقع على أقطاب الدالة المراد تحويلها عكسياً، وسوف نقوم الآن بدراسة جميع هذه الحالات بالتفصيل.

٢- ٥- ١ الكسور الجزئية عندما تحتوي الدالة على أقطاب مختلفة:

في هذه الحالة يمكن كتابة مفكوك الدالة على صورة كسور جزئية بسيطة كما يلي:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s+P_1} + \frac{a_2}{s+P_2} + ... + \frac{a_n}{s+P_n}$$

والثوابت $a_1, a_2, ..., a_n$ تسمى أحياناً بالمتبقي عند القطب المقابل. ولتحديد قيمة هذه الثوابت نطبق ذلك في المعادلات التالية:

$$a_1 = \left(F(s)(s+P_1)\right)\Big|_{s=-P_1}$$

$$a_2 = \left(F(s)(s+P_2)\right)\Big|_{s=-P_2}$$

$$.............$$

$$a_n = \left(F(s)(s+P_n)\right)\Big|_{s=-P_n}$$

وفي هذه الحالة فإن تحويل لابلاس العكسي من المعادلة $F(s)$ يصبح:

$$f(t) = a_1 e^{-P_1 t} + a_2 e^{-P_2 t} + ... + a_n e^{-P_n t}$$

مثال (٢- ٣):

أوجد تحويل لابلاس العكسي للدالة التالية:

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}$$

الحل:

أقطاب هذه المعادلة هي $s=-3,\ s=-1,\ s=0$

$$F(s) = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s+1} + \frac{a_3}{s+3}$$

نوجد قيم الثوابت:

$$a_1 = \left(sF(s)\right)\Big|_{s=0} = \frac{2}{3}, \quad a_2 = \left((s+1)F(s)\right)\Big|_{s=-1} = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = \left((s+3)F(s)\right)\Big|_{s=-3} = -\frac{1}{6}$$

وبالتعويض بقيم الثوابت في معادلة $F(s)$ تصبح المعادلة كالتالي:

$$F(s) = \frac{2/3}{s} - \frac{1/2}{(s+1)} - \frac{1/6}{(s+3)}$$

وبعمل تحويل لابلاس العكسي باستخدام الجدول (٢- ١) تصبح المعادلة في الزمن بالشكل التالي:

$$f(t) = \frac{2}{3}u(t) - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}$$

٢- ٥- ٢ الكسور الجزئية عندما تحتوي الدالة على أقطاب مركبة مترافقة:

إذا كانت الدالة تحتوي على قطبين P_2, P_1 مثلاً كأقطاب مركبة مترافقة، فإنه يمكن كتابة مفكوك الدالة على الصورة التالية:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{(s+P_1)(s+P_2)} + \frac{a_3}{s+P_3} + ... + \frac{a_n}{s+P_n}$$

وتحدد قيم كل من $\alpha_1,\ \alpha_2$ بضرب طرفي المعادلة بالكمية $(s+P_1)(s+P_2)$ ثم التعويض $s=-P_1$ فينتج:

$$\left|\alpha_1 s + \alpha_2\right|_{s=-P_1} = \left|F(s)(s+P_1)(s+P_2)\right|_{s=-P_1}$$

وعند التعويض بقيمة P_1 في الطرفين وهي قيمة مركبة ، فان المعادلة السابقة تعطي في الواقع معادلتين إحداهما بمساواة الكميات الحقيقية والأخرى عند مساواة الكميات التخيلية في الطرفين، ومن ثم يمكن تحديد قيم α_1, α_2.

مثال (٢- ٤):

أوجد تحويل لابلاس العكسي للدالة:

$$F(s)=\frac{(s+1)}{s(s^2+s+1)}$$

الحل:

يمكن كتابة مفكوك الدالة كما يلي:

$$F(s)=\frac{\alpha_1 s+\alpha_2}{s^2+s+1}+\frac{a}{s}$$

ويلاحظ هنا أن أقطاب الدالة هي:

$$s=0, \quad s=-0.5\pm j0.866$$

أي أن:

$$P_3=0, \quad P_1,P_2=-0.5\pm j0.866$$

وبضرب الطرفين بالكمية (s^2+s+1) والتعويض $s=-0.5\pm j0.866$ ينتج:

$$\left|\frac{s+1}{s}\right|_{s=-0.5-j0.866}=\left|\alpha_1 s+\alpha_2\right|_{s=-0.5-j0.866}$$

$$\frac{0.5-j0.866}{-0.5-j0.866}=\alpha_1(-0.5-j0.866)+\alpha_2$$

$$0.5-j0.866=\alpha_1(0.25+j0.866-0.75)+\alpha_2(-0.5-j0.866)$$

وبمساواة الكميات الحقيقية والكميات التخيلية من الطرفين ينتج:

$$-0.5\alpha_1-0.5\alpha_2=0.5$$
$$0.866\alpha_1-0.866\alpha_2=-0.866$$
$$\therefore \quad \alpha_1+\alpha_2=-1$$
$$\alpha_1-\alpha_2=-1$$
$$\alpha_2=0, \quad \alpha_1=-1$$

ولتحديد قيمة الثابت الثالث :

$$a=\left|sF(s)\right|_{s=0}=\left|\frac{s(s+1)}{s(s^2+s+1)}\right|_{s=0}=1$$

$$F(s)=\frac{-s}{s^2+s+1}+\frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{s+0.5}{(s+0.5)^2 + (0.866)^2} + \frac{0.5}{(s+0.5)^2 + (0.866)^2}$$

وباستخدام جدول تحويل الدوال (٢- ١) نوجد قيمة الدالة النهائية في الزمن، ولا ننسى أن هذه الدالة معرفة فقط في الجزء الموجب من محور الزمن:

$$f(t) = 1 - e^{-0.5t}\cos(0.866t) + 0.578e^{-0.5t}\sin(0.866t)$$

٢- ٥- ٣ الكسور الجزئية عندما تحتوي الدالة على أقطاب متكررة:

إذا كان أحد أقطاب الدالة يتكرر عدد r من المرات، فان شكل مفكوك الدالة يختلف كثيراً عن الحالات السابقة، ويصبح شكل الكسور الجزئية على الصورة التالية:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_r}{(s+P_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(s+P_2)^{r-1}} + \ldots + \frac{b_1}{(s+P_1)}$$

ولإيجاد قيم كل من الثوابت $b_1, \ldots, b_{r-1}, b_r$ نتبع الخطوات التالية:

أ) نضرب طرفي المعادلة في $(s+P_1)^r$ ثم نعوض $s = P_1$، فينتج:

$$b_r = \left|(s+P_1)^r F(s)\right|_{s=-P_1}$$

ب) نضرب طرفي المعادلة في $(s+P_1)^r$ ثم نفاضل طرفي المعادلة مرة واحدة بالنسبة إلى s، ثم نعوض $s = P_1$، فينتج:

$$b_{r-1} = \left|\frac{d}{ds}(s+P_1)^r F(s)\right|_{s=-P_1}$$

ج) نتبع نفس الطريقة السابقة في الخطوة (ب) مع معامل التفاضل مرتين بالنسبة إلى s، ينتج:

$$b_{r-2} = \frac{1}{2}\left|\frac{d^2}{ds^2}(s+P_1)^r F(s)\right|_{s=-P_1}$$

د) تتبع نفس الطريقة السابقة وفي كل مرة نزيد رتبة التفاضل مرة واحدة حتى نحصل على جميع الثوابت. ويمكن كتابة الصورة العامة:

$$b_{r-k} = \frac{1}{k!}\left|\frac{d^k}{ds^k}(s+P_1)^r F(s)\right|_{s=-P_1}$$

مثال (٢- ٥):

أوجد تحويل لابلاس العكسي للدالة:

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3}$$

الحل:

تكتب الكسور الجزئية لهذه الدالة على الصورة التالية:

$$F(s)=\frac{b_3}{(s+1)^3}+\frac{b_2}{(s+1)^2}+\frac{b_1}{(s+1)}$$

مع ملاحظة أن الأقطاب الثلاثة متكررة ثلاث مرات، أي أنها $s=-1,\quad s=-1,\quad s=-1$.

نوجد قيم الثوابت:

$$b_3=\left|F(s)(s+1)^3\right|_{s=-1}=\left|s^2+2s+3\right|_{s=-1}=2$$

$$b_2=\frac{1}{1!}\left|\frac{d}{ds}\left(s^2+2s+3\right)\right|_{s=-1}=\left|2s+2\right|_{s=-1}=0$$

$$b_1=\frac{1}{2!}\left|\frac{d}{ds}(2s+2)\right|_{s=-1}=\frac{2}{2}=1$$

نعوض بقيم الثوابت في دالة التحويل $F(s)$ فينتج:

$$F(s)=\frac{2}{(s+1)^3}+\frac{1}{(s+1)}$$

وبتحويل الدالة إلى الزمن باستخدام جدول التحويل (٢- ١) نحصل على الدالة الزمنية التالية:

$$f(t)=t^2e^{-t}+e^{-t}\qquad for\quad t\geq 0$$

٢- ٦ حل المعادلات التفاضلية الخطية بطريقة تحويل لابلاس:

في هذه الفقرة سوف نعرض بإيجاز أهم تطبيقات تحويل لابلاس ألا وهو حل المعادلات التفاضلية الخطية، والذي يتم فيه الحصول على الحل الكامل دفعة واحدة دون الحاجة إلى حساب الثوابت من الشروط الأولية، لأن الحل النهائي تدخل فيه الشروط الأولية ومنذ الخطوة الأولى، وذلك أثناء إجراء تحويل لابلاس على المعادلة التفاضلية. فلو أخذنا صورة عامة للمعادلة التفاضلية كما يلي:

$$a_n\frac{d^ny(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+......+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0y(t)=x(t)$$

ومع إعطاء الشروط الأولية للدالة $y(t)$، وتفاضلها الأول والثاني .....الخ، وفق رتبة المعادلة التفاضلية (عدد الشروط الأولية يساوي رتبة المعادلة التفاضلية). وبإجراء تحويل لابلاس على طرفي المعادلة فانه يمكن الوصول إلى تحويل لابلاس للدالة على الصورة العامة، وذلك بعد التبسيط كالتالي:

$$Y(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$$

ويكون الحل النهائي هو تحويل لابلاس العكسي للدالة المحولة في المعادلة السابقة وذلك بالاستعانة بجدول لابلاس العكسي ومفكوك الكسور الجزئية كالتالي:

$$y(s)=L^{-1}\left(\frac{B(s)}{A(s)}\right)$$

مثال(٢- ٦):

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+5y(t)=5x(t)$$
$$y(0)=1,\quad \frac{dy(0)}{dt}=2$$

الحل:

بإجراء تحويل لابلاس على المعادلة التفاضلية المعطاة والتعويض بالشروط الأولية أثناء إجراء التحويل ينتج:

$$\left(s^2Y(s)-sy(0)-\frac{dy(0)}{dt}\right)+4\big(sY(s)-y(0)\big)+5Y(s)=5X(s)$$

$$\left(s^2Y(s)-s-2\right)+4\left(sY(s)-1\right)+5Y(s)=5X(s)$$

$$\left(s^2+4s+5\right)Y(s)=5X(s)+s+6$$

فلو افترضنا أن x(t) عبارة عن دالة الخطوة ارتفاعها واحد فتحويل لابلاس لها يساوي: $X(s)=\frac{1}{s}$

وبالتالي تصبح المعادلة كالتالي:

$$Y(s)=\frac{s^2+6s+5}{s(s^2+4s+5)}$$

وتكون أقطاب هذه الدالة هي : $s=-2\pm j,\quad s=0$

وبالتالي تكون:

$$Y(s)=\frac{a_1s+a_2}{(s+2)^2+1}+\frac{a_3}{s}$$

وباستخدام طرق حساب الثوابت نجد أن: $a_1=0,\quad a_2=2,\quad a_3=1$

ويكون تحويل لابلاس العكسي هو الحل النهائي للمعادلة التفاضلية:

$$Y(s)=\frac{1}{s}+\frac{2}{(s+2)^2+1}$$

وبتحويل الدالة إلى الزمن باستخدام جدول التحويل (٢- ١) ينتج الدالة الزمنية التالية:

$$y(t)=1+2e^{-2t}\sin t \qquad t\geq 0$$

أسئلة وتمارين:

١. أوجد تحويل لابلاس للدوال التالية مستخدما قانون تحويل لابلاس:

أ) $x(t) = 10$ ، $t \geq 0$

ب) $x(t) = -10$ ، $t \geq 0$

ج) $x(t) = -3t$ ، $t \geq 0$

د) $x(t) = 2t$ ، $t \geq 0$

ه) $z(t) = e^{5t}$ ، $t \geq 0$

٢. أوجد تحويل لابلاس للدوال التالية مستعيناً بالجدول (٢- ١):

أ) $z(t) = 10e^{-7t}$ ، $t \geq 0$

ب) $x(t) = 2\sin 3t$ ، $t \geq 0$

ج) $y(t) = 10\,Cos 5t$ ، $t \geq 0$

د) $v(t) = e^{at} Cos\,\omega t$ ، $t \geq 0$

ه) $w(t) = e^{at} \sin \omega t$ ، $t \geq 0$

٣. أوجد تحويل لابلاس العكسي للدوال التالية:

أ) $F(s) = \dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$

ب) $F(s) = \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)^2}$

ج) $F(s) = \dfrac{13}{s(s^2+4s+13)}$

٤. حل المعادلات التفاضلية التالية:

أ) $2y''(t) + 7y'(t) + 3y(t) = 0 \quad , y(t) = 0, \quad y'(0) = 0$

ب) $y'''(t) + 4y''(t) + y'(t) + 3y(t) = 0 \quad , y(t) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$