الباب الثالث عشر

الإحصاء الكمي

Quantum Statistics

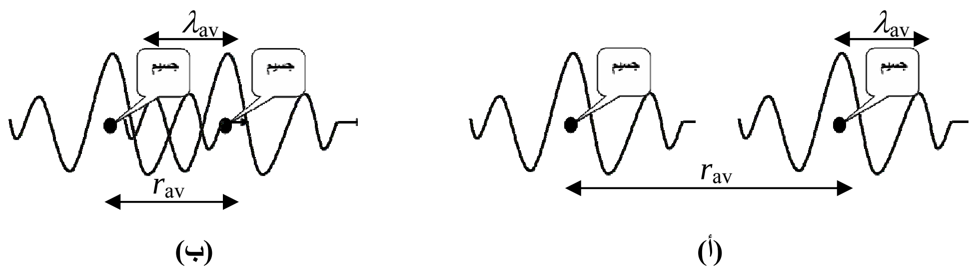
الباب الثالث عشر

الإحصاء الكمي

Quantum Statistics

من دراستنا لميكانيكا نيوتن، الميكانيكا التقليدية، نعلم أن المرء يستطيع أن يحدد إحداثيات جسم وكمية حركته الخطية بدقة متناهية، وفي وقت واحد. ولكن دراستنا لميكانيكا الكم وجدنا أن مبدأ عدم التيقن لهيزنبرج، بالصورة $\Delta r\,\Delta p >> h$، يمنع هذا التحديد. والوصفة التقليدية تعتبر مقبولة في حالة أن ثابت بلانك، h، يكون مهملا. ولوضع الشروط الواجبة للوصفة التقليدية وتحديد انتقالها إلى وصفة ميكانيكا الكم، دعونا نعتبر حركة جزيئات الغاز. إذا اعتبرنا أن $p_{\rm av}$ هي متوسط كمية الحركة الخطية للجزيئات و $r_{\rm av}$ هو متوسط المسافة بين الجزيئات (الجسيمات) المتشابهة، كما بالشكل (1)، فإن الوصفة التقليدية تتحقق عندما يتحقق الشرط:

$$r_{\rm av}\,p_{\rm av} >> h \qquad (1)$$



شكل (1): تداخل موجات دى- برولى المصاحبة لجسيم أ-حالة تقليدية ب-حالة كمية

وباستخدام موجة دي- برولى بالطول الموجي $\lambda = h/p$ نعلم أن:

$$r_{\rm av} >> \lambda_{\rm av} \qquad \text{(classical limit);}$$

$$r_{\rm av} << \lambda_{\rm av} \qquad \text{(quantum limit);}$$

وحيث إن λ_{av} هي مقياس لانتشار الجزيء في الفراغ، فإن الشرط $r_{\text{av}} >> \lambda_{\text{av}}$ يعني أن الدوال الموجية للجزيئات لا تتداخل، وبالتالي تصبح الجزيئات محددة بأماكنها.

لإيضاح ذلك بمثال رقمي، دعونا نتخيل غاز مثالياً يتكون من عدد N من الجزيئات وأن كل جزيء مستقر بمكعب طول ضلعه r_{av} وهذه المكعبات تشغل فراغاً حجمه V، بحيث:

$$r_{\text{av}}^3 N \approx V \quad \Rightarrow \quad r_{\text{av}} \approx \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \tag{2}$$

ونعلم أن العلاقة بين درجة الحرارة المطلقة T لنظام متزن ومتوسط الطاقة الحركية لجزيئاته $\bar{\varepsilon}$ هي:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{p_{\text{av}}^2}{2\text{m}} = \frac{3}{2} k_B T \quad \Rightarrow \quad p_{\text{av}} \simeq \left(3mk_B T\right)^{1/2} \tag{3}$$

ولهذا فإن:

$$\lambda_{\text{av}} = \frac{h}{p_{\text{av}}} = \frac{h}{\left(3mk_B T\right)^{1/2}} \tag{4}$$

بالتالي فإن الشرط التقليدي يصبح:

$$\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} >> \frac{h}{\left(3mk_B T\right)^{1/2}} \tag{5}$$

وهذا يعني أن الوصفة التقليدية تصبح ملائمة عندما تتحقق الشروط التالية:

1- عدد الجسيمات N بالنظام يجب أن تكون قليلة (غاز ذو كثافة منخفضة)

2- درجة الحرارة المطلقة T يجب أن تكون مرتفعة،

3- كتلة جزيء الغاز m ليست صغيرة جداً.

مثال عددي:

أ- لجزيئات الغاز عند NTP

باستخدام كثافة الجزيئات: $\rho_{molecules} = 10^{25}$ molecules m^{-3}

فإن الحجم المتاح للجزيء: $V_{molecule} = \dfrac{1}{\rho_{molecules}} = 10^{-25}\,\text{m}^3$

Quantum Statistics

∵ نصف قطر الجزيء: $r_{molecule} \approx 10^{-10} m$

∴ الحجم الحقيقي للجزيء: $V_{molecule} = \frac{4}{3}\pi(r_{molecule})^3 \approx 10^{-30}\,\text{m}^3$

بالتالي، في الغازات، نجد أن حجم الجزيء عامةً أصغر جداً من الحجم المتاح له، بالتالي فإننا نستطيع، كمبدأ، تحديد كل جزيء في الغاز، ونستطيع التعامل معه بقوانين الميكانيكا التقليدية.

ب- لإلكترونات التوصيل في المعادن:

باستخدام كثافة الإلكترونات: $\rho_{electrons} = 10^{28}\ \text{electrons m}^{-3}$

فإن الحجم المتاح للإلكترون: $V_{electron} = \frac{1}{\rho_{electrons}} = 10^{-28}\,\text{m}^3$

∵ نصف قطر الإلكترون: $r_{electron} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE\,(1\text{eV})}} = 10^{-9}\,\text{m}$

∴ الحجم الحقيقي للإلكترون: $V = \frac{4}{3}\pi(r)^3 \approx 10^{-25}\,\text{m}^3$

لهذا فإنه في المواد الموصلة، نجد أن حجم الإلكترون عامةً أكبر من الحجم المتاح له، ومنه نجد أن الدوال الموجية سوف تتداخل إلى
حد كبير. ولا نستطيع هنا تحديد الإلكترونات في المعادن، لذلك يصبح الإلكترون غير مميز، ولهذا سوف نلجأ إلى تطبيق طرق ميكانيكا الكم الإحصائية.

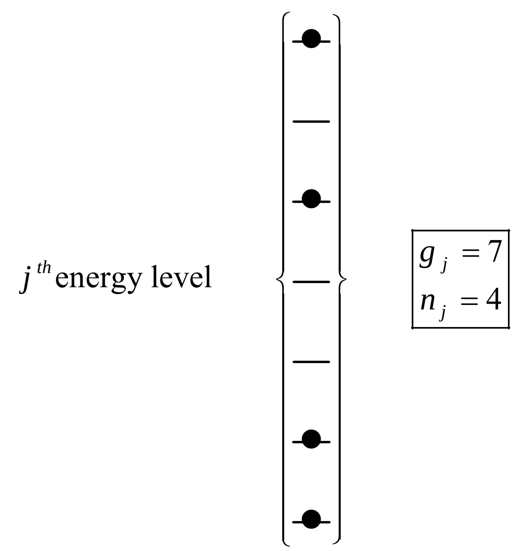
وهناك طريقتان إحصائيتان في هذا المجال، ألا وهما إحصاء فيرمي- ديراك و إحصاء بوز- اينشتين. وسوف نتكلم عنهما بالتفصيل في الفصلين التاليين، مع بعض الأمثلة التوضيحية. أما التطبيقات الخاصة بهما فسوف يتم دراستها بالأبواب التالية.

I− إحصاء فيرمي- ديراك (FD statistics)

هو إحصاء يطبق على الجسيمات غير المميزة، وتسمى فيرميون مثل الإلكترونات والبوزيترونات والبروتونات والميونز. وجسيمات الفيرميون لها دوال موجيه مضادة للتماثل (Antisymmetric wave functions) وتخضع لمبدأ باولي للاستبعاد. لذلك فإنه لا يمكن لأكثر

من جسيم أن يشغل نفس المستوى الكمي (وذلك أيضاً مع وجود الحركة المغزلية). وجسيمات الفيرميون لها الحركة المغزلية أنصاف أعداد صحيحة فردية من القيمة $\hbar$. وتعتبر جسيمات فيرمي مثالية إذا أهملت طاقة التفاعل بينهما. وتطبيقات إحصاء فيرمي- ديراك كثيرة ومهمة وخصوصاً لدراسة سلوك الإلكترونات الحرة في المعادن وأشباه الموصلات وفي دورة حياة النجوم.

ولإيجاد احتمالية الديناميكا الحرارية لحاله عينية محددة لإحصاء فيرمي- ديراك، نعلم أنه في حالة جسيمات الفيرميون فإن كل مستوى طاقة إما أن يملأ بجسيم واحد فقط، أو أن يصبح فارغاً، كما بالشكل (2).



شكل (2) : أربعة من جسيمات الفيرميون ● موزعة على سبع مستويات متساوية الطاقة ε_j

ولذلك فإنه لكل منسوب طاقة j ، حيث تكون له درجة الانتماء g_j ، نجد أن عدد الجسيمات n_j أقل من، أو تساوي g_j ، بمعنى أنه $n_j \le g_j$. وأنه لمجموعة من المستويات عددها g_j يمكن تقسيمها إلى مجموعتين: المجموعة الأولى وعددها n_j ويحتوي كل مستوى منها علي جسيم منفرد، والمجموعة الثانية فارغة من الجسيمات وعددها $\left(g_j - n_j\right)$. وتصبح المسألة كما في حالة تجربة العملات المعدنية ذات العدد N حيث عرفنا حدث الحصول على عدد الصور لأعلى

بالعدد N_1 و حدث الحصول على عدد العملات ذات الكتابة لأعلى بالعدد $N_2 = N - N_1$ ولذلك عرفنا عدد الطرق المختلفة للحصول على هذا الترتيب هو:

$$\omega = \frac{N!}{N_1!(N - N_1)!}$$

ولمسألتنا هنا نجد أن احتمالية الديناميكا الحرارية لمنسوب الطاقة j هي:

$$\omega_{FD}(j) = \frac{g_j!}{n_j!(g_j - n_j)!} \tag{1}$$

بالتالي فإن العدد الكلي للحالات المجهرية المناظر لترتيب عيني مسموح به هو ببساطة حاصل ضرب المعادلة (1) لكل مناسيب الطاقة، بمعنى أن:

$$\Omega_{FD} = \prod_{j=1}^{n} \frac{g_j!}{n_j!(g_j - n_j)!} \tag{2}$$

واجب منزلي: استخدم الطريقة التي طبقت في إحصاء ماكسويل- بولتزمان (وهي كالتالي: أخذ الوغاريتم للمعادلة (2)، استخدام تقريب استيرلنج، حساب النهاية العظمي، واستخدام معاملات لاجرانج مع التقيد بشرطي ثبوت عدد الجسيمات والطاقة) لإثبات أن توزيع فيرمي- ديراك الأكثر احتمالاً يؤول إلى:

$$n_j^* = \frac{g_j}{e^{-\alpha + \beta\varepsilon_j} + 1} \tag{3}$$

حيث الرمز n_j^* يمثل عدد جسيمات الفيرميون التي لها الطاقة ε_j و g_j هو درجة الانتماء ويعبر عن عدد المستويات التي لها نفس الطاقة ε_j.

وكما تم سابقاً فإن $\beta = \frac{1}{k_B T}$. وبالنسبة إلى معامل لاجرانج α فإننا سوف نضعه بدلالة معامل أخر يسمى الجهد الكيميائي μ بالشكل:

$$\alpha = \frac{\mu}{k_B T}$$

ويصبح توزيع فيرمي- ديراك بالصورة:

$$f_j \equiv \frac{n_j^*}{g_j} = \frac{1}{e^{(\varepsilon_j-\mu)/k_BT}+1} \tag{4}$$

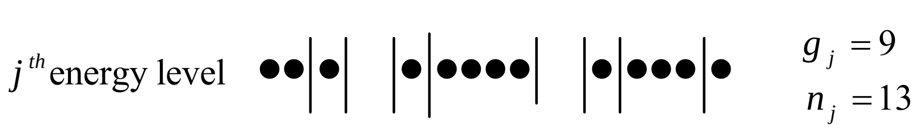
وذلك في حالة طيف الطاقة المنفصلة. وفي حالة الطيف المتصل نجد أن التوزيع يعطى بالشكل:

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_BT}+1} \tag{5}$$

II- إحصاء بوز-اينشتين (BE statistics)

هو إحصاء يطبق على الجسيمات غير المميزة وتسمى بوزون، مثل الفوتون والفونون. وجسيمات البوزون لها دوال موجيه متماثلة (Symmetric wave functions) ولا تخضع لمبدأ باولي للاستبعاد والحركة المغزلية لها تأخذ أعداد صحيحة من القيمة $\hbar$. لذلك فإنه يمكن لأي عدد من الجسيمات أن يشغل نفس المستوى الكمي. وتعتبر جسيمات البوزون مثالية إذا أهملت طاقة التفاعل بينهما. وتطبيقات إحصاء بوز- اينشتين كثيرة ومهمة وخصوصاً لدراسة سلوك جسيمات البوزون عند درجات الحرارة المنخفضة.

طريقة حساب عدد الحالات المجهرية للبوزون تعتبر أكثر تعقيداً من توزيع فيرمي- ديراك. فإنه لمنسوب الطاقة j ، سوف يكون له عدد g_j من المستويات والتي تحتوي على عدد n_j من الجسيمات غير المميزة والتي لا يوجد عليها أي قيود بالنسبة لعددها بالمستوى الواحد. ولذلك من الملائم هنا أن نتخيل، كما بالشكل (3)، ترتيب عدد n_j من الجسيمات (والتي تُمثل بالنقاط السوداء) خلال g_j من المستويات والمقسمة بواسطة (g_j-1) من الخطوط.



شكل (3): ثلاثة عشر من جسيمات البوزون ● موزعة علي تسع من المستويات المتساوية الطاقة ε_j

والآن نستطيع أن نحصل علي حالات مجهرية جديدة بواسطة خلط الخطوط والجسيمات مع احتفاظنا بالأعداد n_j و g_j ثابتة. ويظهر لنا السؤال التالي: ما هي عدد الطرق التي ترتب بها (n_j+g_j-1) من الرموز (وهي الخطوط والنقاط) في عدد (g_j-1) من الخطوط و n_j من النقاط؟ مرة أخري من تجربة العملة نجد أن عدد الحالات المجهرية لكل منسوب طاقة j هي:

$$\omega(j)=\frac{(n_j+g_j-1)!}{n_j!(g_j-1)!} \tag{1}$$

بالتالي فإن العدد الكلي للحالات المجهرية المناظر لترتيب مسموح به هو ببساطة حاصل ضرب المعادلة (1) لكل مناسيب الطاقة ، بمعنى أن:

$$\Omega_{BE}=\prod_{j=1}^{n}\frac{(n_j+g_j-1)!}{n_j!(g_j-1)!} \tag{2}$$

واجب منزلي: استخدم الطريقة التي طبقت في إحصاء ماكسويل- بولتزمان (وهي كالتالي: أخذ الوغاريتم للمعادلة (2)، استخدام تقريب استيرلنج، حساب النهاية العظمى، واستخدام معاملات لاجرانج مع التقيد بشرطي ثبوت عدد الجسيمات والطاقة) لإثبات أن توزيع بوز- اينشتين الأكثر احتمالاً يؤول إلى:

$$n_j^*=\frac{g_j}{e^{-\alpha+\beta\varepsilon_j}-1} \tag{3}$$

حيث الرمز n_j^* يمثل عدد جسيمات البوزون التي لها الطاقة ε_j و g_j هو عدد المستويات التي لها نفس الطاقة ε_j. حيث $\beta=\frac{1}{k_BT}$ و $\alpha=\frac{\mu}{k_BT}$.

ويأخذ توزيع بوز- اينشتين الصورة:

$$f_j\equiv\frac{n_j^*}{g_j}=\frac{1}{e^{(\varepsilon_j-\mu)/k_BT}-1} \tag{4}$$

وذلك في حالة طيف الطاقة المنفصلة. وفي حالة الطيف المتصل نجد أن التوزيع يعطي بالشكل:

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_BT}-1} \qquad (5)$$

والجدول التالي يلخص الفروق المهمة للتوزيعات الثلاثة.

	B.E. (Bosons)	F.D. (Fermions)	M.B.
الجسيمات	Indistinguishable غير مميزة	Indistinguishable غير مميزة	Distinguishable مميزة
الدالة الموجية	Symmetric متماثله	Antisymmetric مضاد للتماثل	متماثله و مضاد للتماثل
Spin $(s=)$	$0,\hbar,2\hbar,\cdots$	$\frac{1}{2}\hbar,\frac{3}{2}\hbar,\cdots$	$0,\frac{1}{2}\hbar,\hbar,\frac{3}{2}\hbar,\cdots$
أمثله للجسيمات	photons, phonons, ^{4}He, π-meson,	electron, proton, ^{3}He	أي جسيمات
n_i	0,1,2,…..	0,1	0,1,2,…..
$\omega(i)$	$\omega_{BE}=\frac{(n_i+g_i-1)!}{n_i!(g_i-1)!}$	$\omega_{FD}=\frac{g_i!}{n_i!(g_i-n_i)!}$	$\omega_{MB}=\frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$ (*)
Ω	$\Omega_{BE}=\prod_{i=1}^{r}\omega_{BE}$	$\Omega_{FD}=\prod_{i=1}^{r}\omega_{FD}$	$\Omega_{MB}=\prod_{i=1}^{r}\omega_{MB}$
$f(\varepsilon_i)=\frac{n_i}{g_i}$	$\frac{1}{e^{-\alpha+\beta\varepsilon_i}-1}$	$\frac{1}{e^{-\alpha+\beta\varepsilon_i}+1}$	$e^{\alpha-\beta\varepsilon_i}$
Applications تطبيقات	Photons of radiation, gas molecules at very Low temperature)	Free electrons in metal and semi-conductor (except at very H. temp.)	Gas molecules (except near 0 K), electrons at Extremely H. temp.

(*) هذه صيغة معدلة حيث قسمنا على $N!$. هذا التعديل ليس له أي ارتباط بصفات الجسيمات الفيزيائية ولكن هذه قاعدة لنموذج رياضي يعرف به الجسيمات غير مميزة.

ودوال التوزيع الثلاث للجسيمات المتطابقة وغير المميزة يمكن تمثيلها بمعادلة واحدة وهي:

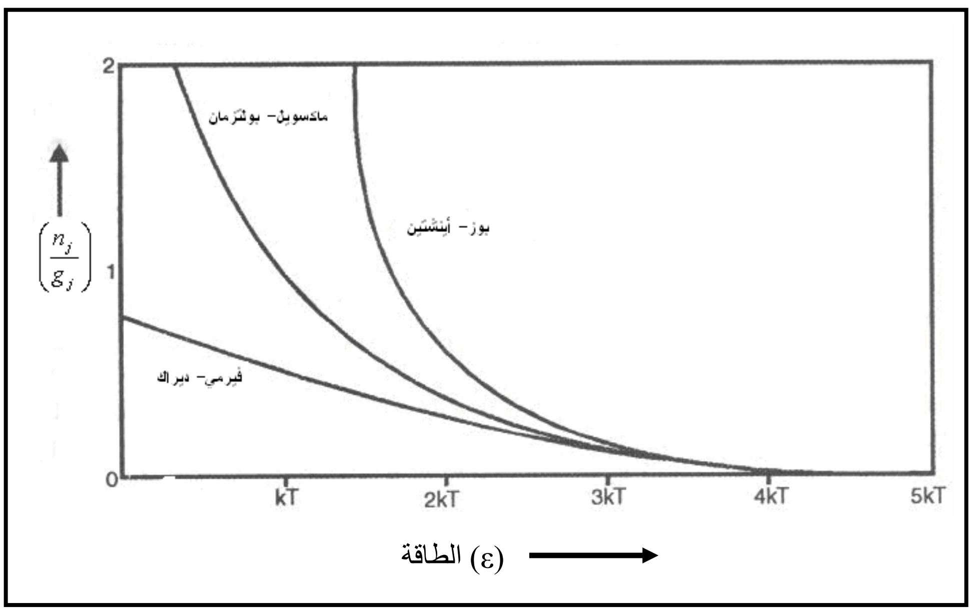
$$f_j \equiv \frac{n_j}{g_j} = \frac{1}{e^{(\varepsilon_j-\mu)/k_BT}+a}, \qquad a = \begin{cases} +1 & \text{for FD statistics} \\ -1 & \text{for BE statistics} \\ 0 & \text{for MB statistics} \end{cases}$$

تعليقات: من المعادلة السابقة نستطيع أن نستتشف الأتي:

1- **عند درجات الحرارة المرتفعة نجد أن إحصائي بوز- أينشتين وفيرمي- ديراك يؤولان إلى إحصاء ماكسويل- بولتزمان. وهذا ناتج من أن القيمة $'a'$ تصبح مهملة بالنسبة إلى القيمة $e^{(\varepsilon_i-\mu)/k_BT}$ عند درجات الحرارة المرتفعة.**

2- **عند تحقق الشرط $\frac{n_j}{g_j} << 1$ نجد أن الإحصائيات الثلاث تتطابق بغض النظر عن أي قيم لدرجات الحرارة. والشرط $\frac{n_j}{g_j} << 1$ يتحقق في حالة ما إذا كان $a << e^{(\varepsilon_i-\mu)/k_BT}$، وبالتالي يمكن إهمال القيمة $'a'$. لتتطابق التوزيعات الثلاث.**

3- **وبرسم دوال التوزيعات الثلاث مع الطاقة كما بالشكل التالي:**



نجد أن:

Quantum Statistics

أ- إحصاء بوز- أينشتين يعطي قيماً أكبر للنسبة $\left(\frac{n_j}{g_j}\right)$ وذلك مقارنةً بإحصاء ماكسويل- بولتزمان.

ب- إحصاء فيرمي- ديراك يعطي قيماً أقل للنسبة $\left(\frac{n_j}{g_j}\right)$ وذلك مقارنةً بإحصاء ماكسويل- بولتزمان.

ت- حيث إن الجسيمات بإحصاء فيرمي- ديراك تتبع قاعدة باولي للاستبعاد، لذلك فإن كل خلية طوريه سوف تتشبع بجسيم واحد فقط. وهذا يعني أن $\left(\frac{n_j}{g_j}\right) \le 1$ أو بمعني آخر أن $n_j \le g_j$.

ث- حيث إن الجسيمات بإحصائي بوز- أينشتين و ماكسويل- بولتزمان لا تتبع قاعدة باولي للاستبعاد، لذلك فإن كل خلية طوريه يمكنها أن تتشبع بجسيم أو أكثر. وهذا يعني أن $\left(\frac{n_j}{g_j}\right) \ge 1$ أو بمعني آخر أن $n_j \ge g_j$.

ج- تتساوى جميع التوزيعات الإحصائية عندما تكون طاقة المستويات 'ε_j' تحقق الشرط $\varepsilon_j >> k_B T$، وتعطي قيماً مختلفة عندما يتحقق الشرط $\varepsilon_j << k_B T$. الاختلافات تصبح واضحة جداً عندما تنخفض درجة الحرارة جداً وتقترب من الصفر المطلق.

ح- عند تساوي جميع التوزيعات الإحصائية نجد ان:

$$\frac{n_i}{n_j} = \frac{e^{-\varepsilon_i / k_B T}}{e^{-\varepsilon_j / k_B T}},$$

وكملخص لما سبق: فإنه للغازات المخففة، والمخففة هنا تعني أن عدد الجسيمات أقل جداً من عدد المستويات المسموح بها تبعاً للشرط:

$$n_j << g_j \qquad \text{for all } j$$

بمعنى أن معظم مستويات طاقة النظام فارغة. وهذا الشرط يتحقق عند درجات الحرارة المرتفعة. وللغازات المخففة نجد أن دوال التوزيع للجسيمات المتطابقة وغير المميزة للإحصاءات الثلاثة تصبح متساوية:

$$\omega_{FD} = \omega_{BE} = \omega_{MB} = \prod_{i=1}^{r} \frac{{g_i}^{n_i}}{n_i\,!}$$

III– أمثلة منوعة

1- نظام يتكون من جسيمين بداخل حجم V. إذاوجدت خليتان وكان بإمكان أي من الجسيمين التواجد بأي خلية من الخليتين. احسب عدد الحالات المجهرية إذا تحقق:

أ- أن الجسيمات تتبع إحصاء ماكسويل- بولتزمان.

ب- أن الجسيمات تتبع إحصاء بوز- أينشتين.

ت- أن الجسيمات تتبع إحصاء فيرمي- ديراك.

الحل

أ- إحصاء ماكسويل-بولتزمان: نعلم أنه في حالة إحصاء ماكسويل- بولتزمان تكون الجسيمات مميزة، فرضاً مثل A,B ، وبإمكان كل خلية أن تتشبع بجسيم أو أكثر كما بالشكل التالي:

(1)	(2)	(3)	(4)
A | B	B | A	AB | -	- | AB

وبذلك نحصل على 4 مستويات مجهرية.

ب- إحصاء بوز- أينشتين: في إحصاء بوز- أينشتين تحتوي الخلية على أي عدد من الجسيمات غير المميزة، فرضاً مثل •، كما بالشكل التالي:

(1)	(2)	(3)
● ●	● ● | -	- | ● ●

وبذلك نحصل على 3 مستويات مجهرية.

ت- إحصاء فيرمي- ديراك: في إحصاء فيرمي- ديراك لا تحتوي الخلية على أكثر من جسيم غير مميز، فرضاً مثل ● ، كما بالشكل التالي:

(1)
● | ●

وبذلك نحصل على مستوى مجهري واحد فقط.

2- نظام يتكون من ثلاثة جسيمات بداخل حجم V. إذا وجدت خليتان وكان بإمكان أي من الجسيمات الثلاثة أن توجد بأي خلية من الخليتين. احسب عدد الحالات المجهرية إذا تحقق:

أ- أن الجسيمات تَتبع إحصاء ماكسويل- بولتزمان.

ب- أن الجسيمات تَتبع إحصاء بوز- أينشتين.

ت- أن الجسيمات تَتبع إحصاء فيرمي- ديراك.

الحل

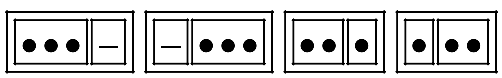
أ- إحصاء ماكسويل-بولتزمان: نعلم أنه في حالة إحصاء ماكسويل- بولتزمان تكون الجسيمات مميزة، فرضاً مثل A,B,C، وبإمكان كل خلية أن تتشبع بجسيم أو أكثر كما بالشكل التالي:

(1)	(2)	(3)	(4)
ABC | -	- | ABC	AB | C	C | AB

(5)	(6)	(7)	(8)
BC | A	A | BC	CA | B	B | CA

وبذلك نحصل على 8 مستويات مجهرية.

ب- إحصاء بوز- أينشتين: في إحصاء بوز- أينشتين تحتوي الخلية على أي عدد من الجسيمات غير المميزة، فرضاً مثل •، كما بالشكل التالي:

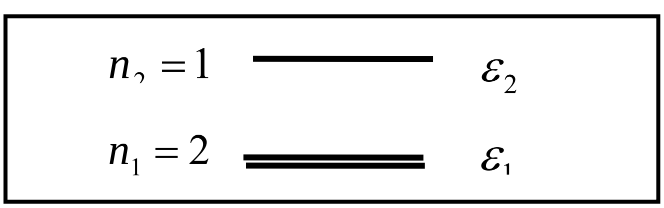


(1) (2) (3) (4)

وبذلك نحصل على 4 مستويات مجهرية.

ت- إحصاء فيرمي- ديراك: في إحصاء فيرمي- ديراك لا تحتوي الخلية على أكثر من جسيم غير مميز، ولذلك لن نحصل على أي مستوى مجهري.

3- اعتبر نظام يتكون من ثلاثة جسيمات ($N = 3$) ومنسوبين للطاقة ε_1 و ε_2 حيث $(\varepsilon_1 < \varepsilon_2)$، كما بالشكل التالي. المستوى ε_1 ثنائي الانتماء، بمعني أن $g_1 = 2$، ويتشبع بجسيمين. والمستوى ε_2 أحادي الانتماء ويتشبع بجسيم وحيد فقط. احسب عدد المستويات المجهرية لكل إحصاء.



الحل

من المعطيات السابقة نعلم أن $g_1 = 2, g_2 = 1$، وعدد الجسيمات بالمستوى الأول هو $n_1 = 2$ وبالمستوى الثاني هو $n_2 = 1$. لذلك نستطيع أن نكون الجدول التالي لكل مستوى على حدة، ومنه نحسب عدد المستويات المجهرية لكل توزيع إحصائي.

Quantum Statistics

i^{th}level	n_i	g_i	$\omega_{FD}(i)=\dfrac{g_i!}{n_i!(g_i-n_i)!}$	$\omega_{BE}(i)=\dfrac{(n_i+g_i-1)!}{n_i!(g_i-1)!}$	$\omega_{MB}(i)=\dfrac{g_i^{n_i}}{n_i!}$
1	2	2	$\dfrac{2!}{2!(2-1)!}=1$	$\dfrac{(2+2-1)!}{2!(2-1)!}=3$	$\dfrac{2^2}{2!}=2$
2	1	1	$\dfrac{1!}{1!(1-1)!}=1$	$\dfrac{(1+1-1)!}{1!(1-1)!}=1$	$\dfrac{1^1}{1!}=1$
			$\Omega_{FD}=\prod_{i=1}^{2}\omega_{FD}(i)$ $=1$	$\Omega_{BE}=\prod_{i=1}^{2}\omega_{BE}(i)$ $=3$	$\Omega_{MB}=3!\prod_{i=1}^{2}\dfrac{g_i^{n_i}}{n_i!}$ $=12$

4- نظام يتكون من جسيمين بداخل حجم V. بإمكان أي من الجسيمين أن توجد بأي مستوى من المستويات الكمية الثلاثة ذي الطاقات، $\varepsilon_1=0, \varepsilon_2=1, \varepsilon_3=3$. احسب دالة التجميع إذا تحقق:

أ- أن الجسيمات تَتبع إحصاء ماكسويل- بولتزمان.

ب- أن الجسيمات تَتبع إحصاء بوز- أينشتين.

ت- أن الجسيمات تَتبع إحصاء فيرمي- ديراك.

الحل

أ- إحصاء ماكسويل-بولتزمان: نعلم أنه في حالة إحصاء ماكسويل- بولتزمان تكون الجسيمات مميزة، فرضاً مثل A, B، وبإمكان المستوى أن يتشبع بجسيم أو أكثر كما بالجدول التالي:

ε_i	Microstates (الحالات المجهرية)					
3			AB		B	B
1		AB		B		A
0	AB			A	A	
E_i	0	2	6	1	3	4
g_i	1	1	1	2	2	2

$$Z_{MB} = \sum_i g_i e^{-\beta E_i}$$
$$= 1 + e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-6\beta\varepsilon} + 2e^{-\beta\varepsilon} + 2e^{-3\beta\varepsilon} + 2e^{-4\beta\varepsilon}$$

نلاحظ هنا أن عدد المستويات التي بها جسيمان مميزان هي 3 مستويات مجهرية، والتي بها جسيم واحد فقط هي 6 مستويات مجهرية، والمجموع الكلي للمستويات المجهرية هي 9.

ب- إحصاء بوز- أينشتين: في إحصاء بوز- أينشتين يحتوي المستوى على أي عدد من الجسيمات غير المميزة، فرضاً مثل A, A، كما بالجدول التالي:

ε_i	Microstates (الحالات المجهرية)					
3			AA		A	A
1		AA		A		A
0	AA			A	A	
E_i	0	2	6	1	3	4
g_i	1	1	1	1	1	1

$$Z_{BE} = 1 + e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-6\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon} + e^{-4\beta\varepsilon}$$

نلاحظ هنا أن عدد المستويات التي بها جسيمان مميزان هي 3 مستويات مجهرية، والتي بها جسيم واحد فقط هي 3 مستويات مجهرية، والمجموع الكلي للمستويات المجهرية هي 6.

ت- إحصاء فيرمي- ديراك: في إحصاء فيرمي- ديراك لا يحتوي المستوى على أكثر من جسيم غير مميز، فرضاً مثل A، كما بالجدول التالي:

ε_i	Microstates		
3		A	A
1	A		A
0	A	A	
E_i	1	3	4
g_i	1	1	1

$$Z_{FD} = e^{-\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon} + e^{-4\beta\varepsilon}$$

نلاحظ هنا أنه لا يوجد مستويات بها جسيمان، والمستويات المجهرية التي بها جسيم واحد فقط هي 3 مستويات، والمجموع الكلي للمستويات المجهرية هي 3.

ملاحظات:

1- بالإمكان حساب عدد المستويات المجهرية لكل توزيع إحصائي كالتالي:

لإحصاء ماكسويل- بولتزمان: نستخدم القانون:

عدد المستويات المجهرية= (عدد المستويات)$^{\text{عدد الجسيمات}}$ = $(1+1+1)^2 = 9$

لإحصاء بوز- أينشتين: نستخدم القانون:

عدد المستويات المجهرية =(عدد المستويات)(عدد الجسيمات)=(3)(2)=6

لإحصاء فيرمي- ديراك: نستخدم القانون:

عدد المستويات المجهرية =(عدد المستويات)=(3)

ولكن في إحصاء بوز- أينشتين و فيرمي- ديراك فإن القوانين المقترحة لتعداد المستويات المجهرية ليست دقيقه.

2- من الحسابات السابقة إذا عرفنا:

$P(A)$ **باحتمال وجود جسيمين بنفس المستوي**

$P(B)$ **باحتمال وجود جسيمين بمستويين مختلفين**

فمن الحسابات السابقة سوف نستطيع أن نكون الجدول التالي:

	ماكسويل- بولتزمان	.بوز- أينشتين	فيرمي- ديراك
$P(A)$	3	3	0
$P(B)$	6	3	3
$P=\dfrac{P(A)}{P(B)}$	$\frac{1}{2}$	1	0

من الجدول الأخير نلاحظ التالي:

Quantum Statistics

1- في إحصاء بوز- أينشتين نجد أن الجسيمات تميل إلى أن تتجمع بنفس المستوى أكثر من إحصاء ماكسويل- بولتزمان وينشأ عنه هذه ظاهرة تُدعي تكثف أينشتين (Einstein condensation).

2- في إحصاء فيرمي- ديراك نجد أن الجسيمات تميل إلى أن تتوزع على مستويات مختلفة أكثر من إحصاء ماكسويل- بولتزمان.

مثال: نظام يتكون من جسيمين غير مميزين. بإمكان أي من الجسيمين التواجد بأي مستوى من المستويات الكمية الثلاثة ذي الطاقات، $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = 2$. المستوى الأول $\varepsilon_1 = 0$ ثنائي الانتماء، بمعني أن $g_1 = 2$، والمستويات الأخرى أحادية الانتماء. احسب دالة التجميع والطاقة المتوسطة للنظام إذا تحقق أن الجسيمات:

أ- تتبع إحصاء فيرمي- ديراك

ب- تتبع إحصاء بوز- أينشتين

الحل

أ- إحصاء فيرمي- ديراك: سوف نحصل على التوزيع التالي للحالات المجهرية:

ε_i	Microstates (الحالات المجهرية)					
$\varepsilon_3 = 2\varepsilon$	0	0	0	a	a	a
$\varepsilon_2 = 1\varepsilon$	0	a	a	0	0	a
$\varepsilon_1 = 0$	a a	a 0	0 a	0 a	0 a	0 0
E_i	$E_0 = 0$	$E_1 = \varepsilon$	$E_2 = \varepsilon$	$E_3 = 2\varepsilon$	$E_4 = 2\varepsilon$	$E_5 = 3\varepsilon$

وتصبح دالة التجميع:

$$
\begin{aligned}
Z_{FD} &= \sum_i g_i e^{-\beta E_i} \\
&= e^{-\beta E_o} + e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2} + e^{-\beta E_3} + e^{-\beta E_4} + e^{-\beta E_5} \\
&= 1 + 2e^{-\beta\varepsilon} + 2e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon}
\end{aligned}
$$

والطاقة المتوسطة

$$U_{FD} = -\frac{1}{Z_{FD}}\frac{\partial Z_{FD}}{\partial \beta} = \frac{2\varepsilon e^{-\beta\varepsilon} + 4\varepsilon e^{-2\beta\varepsilon} + 3\varepsilon e^{-3\beta\varepsilon}}{1 + 2e^{-\beta\varepsilon} + 2e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon}}$$

$$\to \frac{3}{2}\varepsilon \qquad (\text{as}\, T \to \infty)$$

واجب منزلي: احسب قيمة Z_{FD} عند النهايات $T \to \infty$ و $T \to 0$. ما هو تعليقك على النتائج؟

ب-إحصاء بوز- أينشتين: سوف نحصل على التوزيع التالي للحالات المجهرية:

ε_i	Microstates (الحالات المجهرية)				
	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
$\varepsilon_3 = 2\varepsilon$	0	0	0	0	0
$\varepsilon_2 = 1\varepsilon$	0	0	0	a	a
$\varepsilon_1 = 0$	aa | 0	0 | aa	a | a	a | 0	0 | a
E_i	$E_1 = 0$	$E_2 = 0$	$E_3 = 0$	$E_4 = \varepsilon$	$E_5 = \varepsilon$

ε_i	Microstates (الحالات المجهرية)				
	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}
$\varepsilon_3 = 2\varepsilon$	a	a	0	a	aa
$\varepsilon_2 = 1\varepsilon$	0	0	aa	a	0
$\varepsilon_1 = 0$	a | 0	0 | a	0 | 0	0 | 0	0 | 0
E_i	$E_6 = 2\varepsilon$	$E_7 = 2\varepsilon$	$E_8 = 2\varepsilon$	$E_9 = 3\varepsilon$	$E_{10} = 4\varepsilon$

وتصبح دالة التجميع:

$$Z_{BE} = \sum_i g_i e^{-\beta E_i} = 3 + 2e^{-\beta\varepsilon} + 3e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon} + e^{-4\beta\varepsilon}$$

والطاقة المتوسطة

$$U_{BE} = -\frac{1}{Z_{BE}}\frac{\partial Z_{BE}}{\partial \beta} = \frac{2\varepsilon e^{-\beta\varepsilon} + 6\varepsilon e^{-2\beta\varepsilon} + 3\varepsilon e^{-3\beta\varepsilon} + 4\varepsilon e^{-4\beta\varepsilon}}{3 + 2e^{-\beta\varepsilon} + 3e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon} + e^{-4\beta\varepsilon}}$$

$$\to \frac{3}{2}\varepsilon \qquad (\text{as}\, T \to \infty)$$

من النتيجة النهائية للطاقة المتوسطة نجد أنه عند درجات الحرارة المرتفعة $(T \to \infty)$ أو $(\beta \to 0)$ فإن إحصاءي بوز- أينشتين و فيرمي- ديراك يؤولان إلى إحصاء ماكسويل - بولتزمان التقليدي.

واجب منزلي: احسب قيمة Z_{BE} عند النهايات $T \to \infty$ و $T \to 0$. ما هو تعليقك على النتائج؟

مثال: نظام يتكون من جسيمين غير مميزين بداخل حجم V. بإمكان أي من الجسيمين التواجد بأي مستوى من المستويات الكمية الثلاثة ذي الطاقات، $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 1\varepsilon, \varepsilon_3 = 2\varepsilon$. احسب دالة التجميع و $\overline{n_1}, \overline{n_2}$ و $\overline{n_3}$ للمستويات الثلاثة إذا تحقق أن الجسيمات:

أ- تتبع إحصاء بوز- أينشتين

ب- احسب $\overline{n_1}, \overline{n_2}$ و $\overline{n_3}$ والطاقة المتوسطة عندما $(T \to 0)$، ماهو تعليقك على النتيجة النهائية؟

الحل:

أ- لإحصاء بوز- أينشتين: سوف نحصل على التوزيع التالي للحالات المجهرية:

ε_i	Microstates (الحالات المجهرية)					
$\varepsilon_3 = 2\varepsilon$	0	0	1	0	1	2
$\varepsilon_2 = 1\varepsilon$	0	1	0	2	1	0
$\varepsilon_1 = 0$	2	1	1	0	0	0
E_i	$2\varepsilon_1 = 0$	$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$	$\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = 2\varepsilon$	$2\varepsilon_2 = 2\varepsilon$	$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3\varepsilon$	$2\varepsilon_3 = 4\varepsilon$

$$Z_{BE} = \sum_{\{n_i\}} e^{-\beta \sum_s n_s \varepsilon_s} = \sum_{i\,(energy\ levels)} g_i e^{-\beta E_i}$$

$$\begin{aligned} Z_{BE} &= e^{-2\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_3)} + e^{-2\beta\varepsilon_2} + e^{-\beta(\varepsilon_2+\varepsilon_3)} + e^{-2\beta\varepsilon_3} \\ &= 1 + e^{-\beta\varepsilon} + 2e^{-2\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon} + e^{-4\beta\varepsilon} \\ &= (1+e^{-2\beta\varepsilon})(1+e^{-\beta\varepsilon}+e^{-2\beta\varepsilon}) \end{aligned}$$

وباستخدام دالة التجميع بالشكل:

$$Z_{BE} = e^{-2\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_3)} + e^{-2\beta\varepsilon_2} + e^{-\beta(\varepsilon_2+\varepsilon_3)} + e^{-2\beta\varepsilon_3}$$

واستخدام القانون العام:

$$\overline{n_i} = -\frac{1}{\beta Z_{BE}} \left(\frac{\partial Z_{BE}}{\partial \varepsilon_i} \right)_{T,\varepsilon_j \neq \varepsilon_i}.$$

نجد أن:

$$\begin{aligned} \overline{n_1} &= -\frac{1}{\beta Z_{BE}} \left(\frac{\partial Z_{BE}}{\partial \varepsilon_1} \right)_{T,\varepsilon_j \neq \varepsilon_i} = \frac{2e^{-2\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_3)}}{Z_{BE}} \\ &= \frac{2 + e^{-\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon}}{(1+e^{-2\beta\varepsilon})(1+e^{-\beta\varepsilon}+e^{-2\beta\varepsilon})}. \end{aligned}$$

بالخطوة الأخيرة استخدمنا القيم: $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = 3$. وبالنسبة إلى $\overline{n_2}$ نجد.

$$\begin{aligned} \overline{n_2} &= -\frac{1}{\beta Z_{BE}} \left(\frac{\partial Z_{BE}}{\partial \varepsilon_2} \right)_{T,\varepsilon_j \neq \varepsilon_i} = \frac{2e^{-2\beta\varepsilon_2} + e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} + e^{-\beta(\varepsilon_2+\varepsilon_3)}}{Z_{BE}} \\ &= \frac{e^{-\beta\varepsilon}(1 + 2 + e^{-\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon})}{(1+e^{-2\beta\varepsilon})(1+e^{-\beta\varepsilon}+e^{-2\beta\varepsilon})}. \end{aligned}$$

وبالنسبة إلى $\overline{n_3}$ نجد.

$$\overline{n_3} = -\frac{1}{\beta Z_{BE}}\left(\frac{\partial Z_{BE}}{\partial \varepsilon_3}\right)_{T,\varepsilon_j \neq \varepsilon_i} = \frac{2e^{-2\beta\varepsilon_3} + e^{-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_3)} + e^{-\beta(\varepsilon_2+\varepsilon_3)}}{Z_{BE}}$$

$$= \frac{e^{-2\beta\varepsilon}(1+e^{-\beta\varepsilon}+2e^{-2\beta\varepsilon})}{(1+e^{-2\beta\varepsilon})(1+e^{-\beta\varepsilon}+e^{-2\beta\varepsilon})}.$$

وتصبح الطاقة الداخلية:

$$\mathrm{U} = \overline{n_1}\varepsilon_1 + \overline{n_2}\varepsilon_2 + \overline{n_3}\varepsilon_3$$

$$= \frac{\varepsilon e^{-\beta\varepsilon}(1+4e^{-\beta\varepsilon}+3e^{-2\beta\varepsilon}+4e^{-3\beta\varepsilon})}{(1+e^{-2\beta\varepsilon})(1+e^{-\beta\varepsilon}+e^{-2\beta\varepsilon})}.$$

وعندما T تؤول إلى الصفر، بمعني أن $e^{-\beta\varepsilon} \to 0$، نجد أن :

$$\overline{n_1} \to 2, \quad \overline{n_2} \to 0, \quad \overline{n_3} \to 0, \quad \overline{U} \to 0$$

وهنا تتجمع الجسيمات بالمستوى الأرضي

واجب منزلي: نظام يتكون من جسيمين غير مميزين بداخل حجم V. بإمكان أي من الجسيمين التواجد بأي مستوى من المستويات الكمية الثلاثة ذي الطاقات، $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = 3$.

1- احسب $\overline{n_1}, \overline{n_2}$ و $\overline{n_3}$ للمستويات الثلاثة إذا تحقق أن الجسيمات تتبع إحصاء فيرمي-ديراك

2- احسب $\overline{n_1}, \overline{n_2}$ و $\overline{n_3}$ عندما $(T \to \infty)$، ماهو تعليقك على النتيجة النهائية؟
