المؤثرات operators

مقدمة:

في الفيزياء الكلاسيكية إذا أردنا إيجاد قيمة أي كمية فيزيائية لجسم ماكروسكوبي "مثل السرعة أو الطاقة الكلية أو كمية الحركة" فإننا نستخدم أجهزة القياس المناسبة في كل حالة "مثلاً نستخدم الرادار لتعيين سرعة سيارة أو طائرة".

أما في ميكانيكا الكم إذا أردنا إيجاد قيمة أي كمية فيزيائية لجسم ميكروسكوبي فإننا نبحث أولاً عن شكل المؤثر الذي يمثل هذه الكمية الفيزيائية، ثم نوجد حل معادلة القيمة الملائمة لهذا المؤثر للحصول علي القيم الملائمة التي تمثل نتيجة عملية قياس الكمية الفيزيائية. فمثلاً إذا أردنا أن نوجد الطاقة الكلية E لإلكترون ذرة الهيدروجين، نوجد أولاً الشكل المناسب لمؤثر الهاميلتونيان $\hat{H}$ الذي يمثل الطاقة الكلية للإلكترون محل الدراسة، ثم نحل معادلة شرودنجر $\hat{H}\,\psi = E\,\psi$ للحصول علي القيم الملائمة E_n والتي تمثل المقادير المطلوب قياسها.

ولأن المؤثرات تلعب دوراً رئيسياً في ميكانيكا الكم سنهتم في هذا الجزء بدراسة المؤثرات وخواصها والعلاقات الرياضية والفيزيائية بين هذه المؤثرات.

المؤثر:

يمكن تعريف المؤثر بأنه رمز يعني طلب اجراء عملية رياضية ما علي ما يلي هذا الرمز. فمثلاً المؤثر $\partial/\partial x$ يعني طلب اجراء التفاضل الجزئي للدالة التي تلي هذا المؤثر، وكذلك المؤثر sin يعني طلب حساب قيمة دالة الجيب للزاوية التي تلي هذا المؤثر.

ويمكن تعريف المؤثر بطريقة أخري كالآتي: المؤثر $\hat{A}$ هو كيان رياضي يؤثر علي أي دالة لتحويلها إلي دالة أخري. أي أن المؤثر $\hat{A}$ عملية رياضية "تعبير رياضي" عندما تؤثر علي الدالة g تحولها إلي دالة أخري u. ويمكن كتابة هذا التعريف رياضياً كالآتي:

$$\hat{A}\,g = u \qquad (1)$$

معادلة القيمة الملائمة "أو المميزة أو الذاتية أو المسموحة" لمؤثر:

إذا كانت الدالة u دالة متصلة وقيمتها محدودة في كل الفراغ المعرف، وكان تأثير المؤثر $\hat{A}$ علي الدالة u هو نفس الدالة u مضروبة في مقدار عددي ثابت a، أي أن:

$$\hat{A}\,u = a\,u \qquad (2)$$

سميت هذه المعادلة بمعادلة القيمة الملائمة "أو القيمة المميزة" للمؤثر، وسميت كل من u، a بالدالة الملائمة للمؤثر والقيمة الملائمة للمؤثر علي الترتيب.

لاحظ لو أن الدالة u تحقق العلاقة السابقة ولكنها ليست متصلة أو قيمتها غير محدودة عند أي نقطة في الفراغ المعرف، فلا يمكن تسميتها بالدالة الملائمة للمؤثر.

فمثلاً كل من الدالتين $u_1 = exp(-x)$، $u_2 = exp(x)$ تحققان العلاقة السابقة $\hat{A}\,u = a\,u$ للمؤثر $\hat{A} = d^2/dx^2$ حيث $a = 1$ في الحالتين، ولكن الدالة u_2 دالة غير محدودة عندما x تؤول إلي مالا نهاية. ولذلك فإن u_1 هي دالة ملائمة للمؤثر $\hat{A}$، وقيمتها الملائمة هي 1، أما الدالة u_2 لاتصلح كدالة تصف سلوك جسم كمي ولذلك لاتستخدم في نظرية الكم ولايمكن تسميتها بالدالة الملائمة للمؤثر $\hat{A}$.

طيف المؤثر:

تسمي جميع القيم الملائمة التي يمكن الحصول عليها من المؤثر $\hat{A}$ بطيف المؤثر $\hat{A}$. وهناك نوعان من طيف المؤثر، الأول الطيف المتقطع "الغير مستمر" وفيه تكون قيم a متقطعة وغير متصلة. والثاني هو الطيف المتصل "المستمر" وفيه تكون قيم a متصلة أي أنها تأخذ جميع القيم المسموحة في مدي معين من مدي الأرقام العددية.

القيمة المتوسطة "المتوقعة" لمؤثر:

إذا كانت الدالة g دالة متصلة وقيمتها محدودة في كل الفراغ المعرف، ولكنها ليست دالة ملائمة للمؤثر $\hat{A}$ أي انها تحقق العلاقة (1) ولاتحقق العلاقة (2). في تلك الحالة إذا أردنا إيجاد قيمة قياس الكمية الفيزيائية A "والتي يمثلها المؤثر $\hat{A}$" علي دالة الحالة g "والتي هي ليست دالة ملائمة للمؤثر" فإننا نجري عمليات قياس كثيرة ثم نعين متوسط القيم التي حصلنا عليها من كل عمليات القياس وتسمي تلك القيمة بالقيمة المتوسطة $\bar{A}$ للمؤثر $\hat{A}$. ويتم حساب ذلك رياضياً من العلاقة:

$$\overline{A} = \frac{\int g^*\,\hat{A}\,g\,d\tau}{\int g^*\,g\,d\tau} \qquad (3)$$

ويلاحظ من العلاقة (3) أنه لو أن g دالة ملائمة "مميزة" للمؤثر $\hat{A}$ "أي تحقق العلاقة (2)" فإن القيمة المتوسطة $\bar{A}$ ستساوي القيمة الملائمة "المميزة" a حيث:

$$\overline{A} = \frac{\int g^* \hat{A} g\, d\tau}{\int g^* g\, d\tau} = \frac{a \int g^* g\, d\tau}{\int g^* g\, d\tau} = a$$

خواص المؤثرات المستخدمة في ميكانيكا الكم:

1- مؤثرات خطية Linear operators:

المؤثرات المستخدمة في ميكانيكا الكم يجب أن تكون خطية. والمؤثر $\hat{A}$ يكون مؤثراً خطياً إذا استوفى العلاقتين الآتيتين :

$$\hat{A}(C\psi) = C\hat{A}\psi$$

$$\hat{A}\ (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + ...) = \hat{A}\ \psi_1 + \hat{A}\ \psi_2 + \hat{A}\ \psi_3 + ...$$

حيث C مقدار ثابت. ويمكن جمع العلاقتين السابقتين في العلاقة التالية:

$$\hat{A}\ (C_1\psi_1 + C_2\psi_2 + \cdots) = C_1\hat{A}\ \psi_1 + C_2\hat{A}\psi_2 + \cdots \quad (4)$$

وبذلك فإن المؤثرات c = ثابت، x "الإزاحة"، d/dx ، d^2/dx^2 هي مؤثرات خطية. أما المؤثر $\sqrt{\quad}$ ، والمؤثر ln فهما مؤثران غير خطيان.

2- مؤثرات هيرميتية Hermitian operator:

القيم الملائمة للمؤثرات الخطية إما أعداد حقيقية أو أعداد مركبة "تخيلية". والمؤثرات الخطية التي ينتج عنها طيف مركب لاتصلح لأن تمثل الكميات الفيزيائية "لأنه لايمكن أن يكون ناتج قياس الكميات الفيزيائية كميات تخيلية". لذلك فالمؤثرات المستخدمة في ميكانيكا الكم يجب أن تكون خطية ذات طيف حقيقي وتسمي تلك المؤثرات الخطية ذات الطيف الحقيقي بالمؤثرات الهيرميتية. ويمكن إثبات أن شرط أن يكون المؤثر $\hat{A}$ مؤثراً هيرميتياً هو:

$$\int \psi_m^* \left(\hat{A}\ \psi_n\right) d\,\tau d = \int \psi_n \left(\hat{A}\ \psi_m\right)^* d\,\tau \quad (5)$$

وذلك بفرض أن ψ_m ، ψ_n دالتان ملائمتان للمؤثر $\hat{A}$ وأن a_m، a_n هما القيمتان الملائمتان لهما:

$$\hat{A}\psi_n = a_n\psi_n \quad (6)$$

$$\hat{A}\psi_m = a_m \psi_m \qquad (7)$$

وبضرب العلاقة (6) من اليسار في ψ_m^* ثم إجراء التكامل علي كل الفراغ المعرف، وبأخذ المرافق للعلاقة (7) ثم ضربها من اليسار في ψ_n ثم إجراء التكامل علي كل الفراغ المعرف نحصل علي:

$$\int \psi_m^* \left(\hat{A}\psi_n\right) d\tau = a_n \int \psi_m^* \psi_n \, d\tau \qquad (8)$$

$$\int \psi_n \left(\hat{A}\psi_m\right)^* \, d\tau = a_m^* \int \psi_n \psi_m^* \, d\tau \qquad (9)$$

وبطرح العلاقة (9) من (8) نحصل علي:

$$\int \psi_m^* \left(\hat{A}\psi_n\right) d\tau - \int \psi_n \left(\hat{A}\psi_m\right)^* \, d\tau = \left(a_n - a_m^*\right) \int \psi_m^* \psi_n \, d\tau \qquad (10)$$

بما أن طيف المؤثر $\hat{A}$ طيف حقيقي، أي أن $a_m^* = a_m$، فإن الطرف الأيمن للعلاقة (10) دائماً مساوياً للصفر. لأنه عندما $m = n$ يكون $\int \psi_m^* \psi_n \, d\tau = 1$ ولكن $a_m^* = a_n$. وعندما $m \neq n$ يكون $a_m^* \neq a_n$ ولكن $\int \psi_m^* \psi_n \, d\tau = 0$. وبذلك نحصل علي شرط أن يكون المؤثر $\hat{A}$ مؤثراً هيرميتياً "العلاقة (5)":

$$\int \psi_m^* \left(\hat{A}\, \psi_n\right) d\,\tau d = \int \psi_n \left(\hat{A}\, \psi_m\right)^* \, d\,\tau \qquad (5)$$

ويجب ملاحظة أن التكاملات في العلاقة (5) تكون علي كل الفراغ المعرف.

نظريات هامة علي المؤثرات الهيرميتية:

النظرية الأولي:

القيم الملائمة للمؤثر الهيرميتي قيم حقيقية.

وللإثبات ذلك نفرض أن ψ_n دالة ملائمة للمؤثر الهيرميتي $\hat{A}$ وأن a_n القيمة الملائمة:

$$\hat{A}\psi_n = a_n \psi_n \qquad (11)$$

بأخذ المرافق للعلاقة (11):

$$\left(\hat{A}\psi_n\right)^* = a_n^* \psi_n^* \qquad (12)$$

وبضرب كل من العلاقة (11)، (12) من اليسار في ψ_n^*، ψ_n علي لترتيب ثم إجراء التكامل علي كل الفراغ المعرف نحصل علي:

$$\int \psi_n^* \left(\hat{A}\psi_n\right) d\tau = a_n \int \psi_n^* \psi_n \, d\tau = a_n \qquad (13)$$

$$\int \psi_n \left(\hat{A}\psi_n\right)^* \, d\tau = a_n^* \int \psi_n \psi_n^* \, d\tau = a_n^* \qquad (14)$$

ولأن المؤثر $\hat{A}$ مؤثر هيرميتي فيكون الطرفان الأيسران للعلاقتين (13)، (14) متساويين، وبالتالي نحصل علي:

$$a_n = a_n^*$$

وهذا لايتحقق إلا عندما تكون a_n عددا حقيقياً.

النظرية الثانية:

أي دالتين ملائمتين للمؤثر الهيرميتي ولهما قيمتين ملائمتين مختلفتين هما دالتان متعامدتان.

ولإثبات ذلك نفرض أن ψ_m، ψ_n دالتان ملائمتان للمؤثر الهيرميتي $\hat{A}$ وأن a_m، a_n هما القيمتان الملائمتان لهما:

$$\hat{A}\psi_n = a_n \psi_n \qquad (15)$$

$$\hat{A}\psi_m = a_m \psi_m \qquad (16)$$

وبضرب العلاقة (15) من اليسار في ψ_m^* ثم إجراء التكامل علي كل الفراغ المعرف نحصل علي:

$$\int \psi_m^* \left(\hat{A}\psi_n\right) d\tau = a_n \int \psi_m^* \psi_n \, d\tau \qquad (17)$$

ولأن المؤثر $\hat{A}$ مؤثر هيرميتي، فإن الطرف الأيسر للعلاقة (17) يساوى:

$$\int \psi_m^* \left(\hat{A}\psi_n\right) d\tau = \int \psi_n \left(\hat{A}\psi_m\right)^* \, d\tau = a_m \int \psi_n \psi_m^* \, d\tau \qquad (18)$$

وذلك باستخدام العلاقة (16) والنظرية السابقة والتي تنص علي أن a_m عدد حقيقي. ومن العلاقتين (17)، (18) نجد أن:

$$\left(a_n - a_m\right) \int \psi_m^* \psi_n \, d\tau = 0 \qquad (19)$$

وحيث أن $a_m \neq a_n$ عندما $m = n$، فنحصل علي:

$$\int \psi_m^* \psi_n \, d\tau = 0 \qquad ; \quad n \neq m \qquad (20)$$

وهذا هو شرط تعامد الدالتان الملائمتان ψ_m ، ψ_n للمؤثر الهيرميتي $\hat{A}$.

نتيجة علي النظرية الثانية "الإنحلال أو التفسخ degeneracy":

في حالة الإنحلال من الرتبة n "التفسخ n-fold degenerate" والتي تقابلنا في بعض الأنظمة الكمية يكون هناك n دالة ذاتية ψ_i مختلفة "غير معتمدة خطية linearly independent" لها نفس القيمة الذاتية a للمؤثر $\hat{A}$. وطبقاً للنظرية السابقة تكون تلك الدوال الذاتية المختلفة ψ_I غيرمتعامدة. أي أنه في حالة:

$$\hat{A}\psi_i = a\psi_i \qquad \forall\, i = 1,2,\cdots,n$$

$$\int \psi_m^* \psi_n \, d\tau \neq 0 \qquad ; m,n \in i \;,\; m \neq n$$

ويمكن تلخيص تلك النتيجة في العبارة " **الدوال المنحلة لن تكون دوالاً متعامدة**".

النظرية الثالثة:

مجموعة الدوال الملائمة ψ_i والتي لها نفس القيمة الذاتية a للمؤثر $\hat{A}$ والتي تمثل حالة الإنحلال من الرتبة n، تكون فراغاً جزئياً بعده n ويسمي الفراغ المتعلق بالقيمة الذاتية a. وأي تركيبة خطية من تلك المجموعة تمثل دالة ذاتية للمؤثر.

ولإثبات ذلك سوف ندرس حالة إنحلال من الرتبة 2 وبفرض أن:

$$\hat{A}\psi_1 = a\psi_1$$

$$\hat{A}\psi_2 = a\psi_2$$

وبفرض التركيبة الخطية:

$$\psi = C_1\psi_1 + C_2\psi_2$$

وبالتأثير عليها بالمؤثر $\hat{A}$ نحصل علي:

$$\begin{aligned}\hat{A}\psi &= \hat{A}C_1\psi_1 + \hat{A}C_2\psi_2 \\ &= C_1\hat{A}\psi_1 + C_2\hat{A}\psi_2 = C_1 a\psi_1 + C_2 a\psi_2 \\ &= a(C_1\psi_1 + C_2\psi_2) \\ &= a\psi\end{aligned}$$

أي أن التركيبة الخطية ψ دالة ذاتية للمؤثر $\hat{A}$.

مثال:

هل المؤثر $\hat{A}=d/dx$ مؤثر هيرميتي أم غير هيرميتي؟

الحل:

لحل هذا المثال سنحسب طرفي العلاقة (5) كل علي حدى ، ثم نبحث هل الطرفين متساويين فيكون المؤثر هيرميتي أم غير متساويين فيكون المؤثر غير هيرميتي.

أولاً: نحسب الطرف الأيسر:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \left(\hat{A}\,\psi_2\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \left(\frac{d}{dx}\psi_2\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \frac{d\psi_2}{dx}\, dx$$

ثانياً: نحسب الطرف الأيمن مستخدمين نظرية التكامل بالتجزيء والتي وتنص علي:

$$\int u\, d\mathrm{v} = u\,\mathrm{v} - \int \mathrm{v}\, du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_2 \left(\hat{A}\,\psi_1\right)^* dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2 \left(\frac{d}{dx}\psi_1\right)^* dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2 \frac{d\psi_1^*}{dx}\, dx$$

$$= \psi_2\,\psi_1^*\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \frac{d\psi_2}{dx}\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^* \frac{d\psi_2}{dx}\, dx$$

$\psi_2\,\psi_1^*\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$ لأن الدالة ψ دالة حالة فيجب أن تكون محدودة "أي تؤول للصفر عند المالانهاية". وواضح أن:

$$\int \psi_1^* \frac{d\psi_2}{dx}\, dx \neq -\int \psi_1^* \frac{d\psi_2}{dx}\, dx$$

أي أن الطرف الأيسر لايساوي الطرف الأيمن وبالتالي فإن المؤثر $\hat{A}=d/dx$ مؤثر غير هيرميتي.

مثال:

هل المؤثر $\hat{A}=i\;d/dx$ مؤثر هيرميتي أم غير هيرميتي؟

الحل:

لحل هذا المثال سنحسب طرفي العلاقة (5) كل علي حدى ، ثم نبحث هل الطرفين متساويين فيكون المؤثر هيرميتي أم غير متساويين فيكون المؤثر غير هيرميتي.

أولاً: نحسب الطرف الأيسر:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1^*\left(\hat{A}\,\psi_2\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_1^*\left(i\frac{d}{dx}\psi_2\right)dx = i\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1^*\frac{d\psi_2}{dx}dx$$

ثانياً: نحسب الطرف الأيمن مستخدمين نظرية التكامل بالتجزيء والتي وتنص علي:

$$\int u\,d\mathrm{v} = u\,\mathrm{v} - \int \mathrm{v}\,du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_2\left(\hat{A}\,\psi_1\right)^* dx = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_2\left(i\frac{d}{dx}\psi_1\right)^* dx = -i\int_{-\infty}^{\infty}\psi_2\frac{d\psi_1^*}{dx}dx$$

$$= -i\psi_2\psi_1^*\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1^*\frac{d\psi_2}{dx}dx = i\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1^*\frac{d\psi_2}{dx}dx$$

$-i\psi_2\psi_1^*\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$ لأن الدالة ψ دالة حالة فيجب أن تكون محدودة "أي تؤول للصفر عند المالانهاية". وواضح أن الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن وبالتالي فإن المؤثر $\hat{A}=i\,d/dx$ مؤثر هيرميتي.

3- المؤثرات المتبادلة وأقواس التبادل :

عندما تدعو الحاجة إلي التأثير بمؤثرين $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ معاً علي نفس الدالة ψ فيجب أن نولي أهمية كبيرة إلي أي المؤثرين يؤثر أولاً وأيهما يؤثر ثانياً. فبصفة عامة $\hat{A}\hat{B}\psi \neq \hat{B}\hat{A}\psi$.

ويسمي المقدار $\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$ بمبادلة المؤثرين "أو تبادل العكوس "commutator" ويكتب في الصورة المختصرة:

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

ويسمي المؤثران اللذان يؤديان إلي نفس النتيجة إذا أُبدِلَ ترتيب تأثيرهما بأنهما مؤثران متبادلان، وهما يحققا العلاقة:

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] = 0$$

أما المؤثران اللذان لايعطيا نفس النتيجة إذا أُبدِلَ ترتيب تأثيرهما بأنهما مؤثران غير متبادلان، وهما يحققا العلاقة:

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] \neq 0$$

نظريات هامة علي خواص أقواس التبادل:

النظرية الأولي:

لو كان لدينا المؤثران $\hat{B},\hat{A}$ لهما نفس المجموعة الكاملة المعايرة "المسواة" والمتعامدة من الدوال الذاتية ψ_n فإن المؤثرين يكونان متبادلان.

أي أن المطلوب إثبات أن:

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] = 0$$

عندما يكون:

$$\hat{A}\psi_n = a_n\psi_n$$

$$\hat{B}\psi_n = b_n\psi_n$$

بضرب المعادلة الأولي من اليسار في $\hat{B}$ والثانية في $\hat{A}$ نحصل علي:

$$\hat{B}\,\hat{A}\psi_n = a_n\,\hat{B}\psi_n = a_n\,b_n\psi_n$$

$$\hat{A}\,\hat{B}\psi_n = b_n\,\hat{A}\psi_n = b_n\,a_n\psi_n$$

وبطرح العلاقتين السابقتين نحصل علي:

$$\hat{A}\,\hat{B}\psi_n - \hat{B}\,\hat{A}\psi_n = 0$$

أي أن:

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] = 0$$

النظرية الثانية:

لو كان لدينا المؤثران $\hat{B},\hat{A}$ وكانا متبادلين فإن المؤثرين لهما نفس المجموعة الكاملة المعايرة "المسواة" والمتعامدة من الدوال الذاتية ψ_n.

هذه النظرية عكس النظرية السابقة. ولإثبات ذلك نفرض أن المؤثر $\hat{A}$ له مجموعة الدوال الذاتية المتعامدة والمسواة ψ_n أي أن:

$$\hat{A}\psi_n = a_n \psi_n$$

بضرب هذه المعادلة من اليسار في $\hat{B}$ نحصل علي:

$$\hat{B}\,\hat{A}\psi_n = a_n\,\hat{B}\psi_n$$

وبما أن المؤثرين متبادلين أي أن:

$$\hat{B}\,\hat{A}\psi_n = \hat{A}\,\hat{B}\psi_n$$

فمن العلاقتين السابقتين نحصل علي:

$$\hat{A}\,\hat{B}\psi_n = a_n\,\hat{B}\psi_n$$

أي أن $\hat{B}\psi_n$ دالة ذاتية للمؤثر $\hat{A}$ ولها نفس القيمة الذاتية a_n وحيث أن $\hat{B}\psi_n$، ψ_n ليستا حالة أنحلال فلابد أن يكون:

$$\hat{B}\psi_n = \textbf{constant}\ \psi_n = b_n\psi_n$$

أي أن المؤثر $\hat{B}$ له نفس مجموعة الدوال الذاتية المتعامدة والمسواة ψ_n.

خواص أقواس التبادل:

هناك العديد من خواص أقواس التبادل سنذكر هنا بعضاً منها:

$$[\hat{A},\hat{B}] = -[\hat{B},\hat{A}]$$

$$[\hat{A},\hat{A}] = 0$$

$$[\hat{A},\hat{B}] + [\hat{B},\hat{A}] = 0$$

$$[\hat{A},\hat{B}+\hat{C}] = [\hat{A},\hat{B}] + [\hat{A},\hat{C}]$$

$$[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}] = [\hat{A},\hat{C}] + [\hat{B},\hat{C}]$$

$$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}] = [\hat{A},\hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$$

$$[\hat{A}\hat{B},\hat{C}] = [\hat{A},\hat{C}]\hat{B} + \hat{A}[\hat{B},\hat{C}]$$

$$[\hat{A}_1\hat{A}_2,\hat{B}_1\hat{B}_2] = \hat{B}_1[\hat{A}_1\hat{A}_2,\hat{B}_2] + [\hat{A}_1\hat{A}_2,\hat{B}_1]\hat{B}_2$$

$$\left[\hat{A},\ \left[\hat{B},\hat{C}\right]\right]+\left[\hat{C},\ \left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]+\left[\hat{B},\ \left[\hat{C},\hat{A}\right]\right]=0$$

$$\left[\hat{A},\hat{B}^{n}\right]=n\,B^{n-1}\left[\hat{A},\hat{B}\right]$$

$$\left[\hat{A}^{n},\hat{B}\right]=n\,A^{n-1}\left[\hat{A},\hat{B}\right]$$

مثال :

أثبت أن:

$$\left[x,\ \frac{d}{dx}\right]=-1$$

$$\left[\frac{d}{dx},x\right]=+1$$

الحل :

لإثبات ذلك نحسب قيمة:

$$\int\left[x,\frac{d}{dx}\right]f(x)dx=\int x\frac{d}{dx}f(x)dx-\int\frac{d}{dx}x\ f(x)dx$$

الحد الثاني في الطرف الأيمن يمكن حسابه من قانون تفاضل حاصل ضرب دالتين ويساوي:

$$\int\frac{d}{dx}x\,f(x)dx=\int x\frac{d}{dx}f(x)dx+\int f(x)dx$$

$$\therefore\ \int\left[x,\frac{d}{dx}\right]f(x)dx=-\int\ f(x)dx$$

أي أن:

$$\left[x,\frac{d}{dx}\right]=-1$$

وبالمثل:

$$\int\left[\frac{d}{dx},x\right]f(x)dx=\int\frac{d}{dx}x\,f(x)dx-\int x\frac{d}{dx}\ f(x)dx$$

$$= \int x\frac{d}{dx}f(x)dx + \int f(x)dx - \int x\frac{d}{dx}f(x)dx$$

$$= \int f(x)dx$$

أي أن:

$$\left[\frac{d}{dx}, x\right] = +1$$

مثال :

احسب:

$$[\hat{x}, \hat{p}_x]$$

الحل :

$\hat{p}_x$ هو مؤثر كمية الحركة في اتجاه x ويساوي $-i\hbar\,\partial/\partial x$، $\hat{x}$ هو مؤثر الإحداثي x ويساوي x. والمطلوب الآن حساب قيمة:

$$\int[\hat{x}, \hat{p}_x]\, f(x)\partial x = -i\hbar\int x\frac{\partial}{\partial x}f(x)\partial x + i\hbar\int\frac{\partial}{\partial x}x\; f(x)\partial x$$

$$= -i\hbar\int x\frac{\partial}{\partial x}f(x)\partial x + i\hbar\int x\frac{\partial}{\partial x}f(x)\partial x + i\hbar\int f(x)\partial x$$

$$= i\hbar\int f(x)\partial x$$

أي أن:

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$$

وبالمثل يمكن اثبات أن:

$$[\hat{p}_x, \hat{x}] = -i\hbar$$

$$[\hat{p}_y, \hat{y}] = -i\hbar \text{،}$$

$$[\hat{p}_z, \hat{z}] = -i\hbar \text{،}$$

ومن هذا يتبين أن مؤثرات كمية الحركة والإحداثيات هي مؤثرات غير متبادلة، أي لايمكن قياسهما معاً في آن واحد.

مثال :

احسب:

$$\left[\,\hat{p}_x\,,\hat{p}_y\,\right]$$

الحل :

$\hat{p}_x$ هو مؤثر كمية الحركة في اتجاه x ويساوي $-i\hbar\,\partial/\partial x$، $\hat{p}_y$ هو مؤثر كمية الحركة في اتجاه y ويساوي $-i\hbar\,\partial/\partial y$ والمطلوب الآن حساب قيمة:

$$\int\left[\hat{p}_x\,,\hat{p}_y\right]f(x,y)\partial x\,\partial y=(-i\hbar)^2\int\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\partial x\,\partial y$$

$$-(-i\hbar)^2\int\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\partial x\,\partial y$$

$$=0$$

أي أن:

$$\left[\,\hat{p}_x\,,\hat{p}_y\,\right]=0$$

وبالمثل يمكن اثبات أن:

$$\left[\,\hat{p}_x\,,\hat{p}_z\,\right]=0$$

$$\left[\,\hat{p}_y\,,\hat{p}_z\,\right]=0 \text{،}$$

ومن هذا يتبين أن المؤثرات التي تمثل مركبات كمية الحركة هي مؤثرات متبادلة، أي يمكن تحديد المركبات الثلاثة لكمية الحركة بدقة تامة في آن واحد.

مثال :

اثبت أن:

$$\left[\,\hat{A},\hat{B}\,\hat{C}\,\right]=\left[\,\hat{A},\hat{B}\,\right]\hat{C}+\hat{B}\left[\,\hat{A},\hat{C}\,\right]$$

الحل :

$$\left[\hat{A},\hat{B}\hat{C}\right] = \hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{B}\hat{C}\hat{A}$$

بإضافة وطرح المقدار $\hat{B}\hat{A}\hat{C}$ إلي الطرف الأيمن نحصل علي:

$$\left[\hat{A},\hat{B}\hat{C}\right] = \hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{B}\hat{C}\hat{A}+\hat{B}\hat{A}\hat{C}-\hat{B}\hat{A}\hat{C}$$

وبإعادة ترتيب حدود الطرف الأيمن نحصل علي:

$$\begin{aligned}\left[\hat{A},\hat{B}\hat{C}\right] &= \hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{B}\hat{A}\hat{C}+\hat{B}\hat{A}\hat{C}-\hat{B}\hat{C}\hat{A}\\ &= \left(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\right)\hat{C}+\hat{B}\left(\hat{A}\hat{C}-\hat{C}\hat{A}\right)\\ &= \left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{C}+\hat{B}\left[\hat{A},\hat{C}\right]\end{aligned}$$