تحليل تابعي (١)　　　　　　　　　　　　　　　　المحاضرة الأولى عملي

لتكن X مجموعة ما ولتكن $f : X \times X \to \mathbb{R}$ بالشكل

1) $f(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

2) $f(x,y) \leq f(x,z)+f(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$

تحقق من أنه تابع مسافة.

$\boxed{1}$ من أجل $x=x \Rightarrow f(x,x)=0$

$\boxed{2}$ متراجحة المثلث محققة.

$\boxed{3}$ من 2 نجد أنه من أجل $z=x$

$$f(x,y) \leq f(x,x)+f(y,x) \Rightarrow f(x,y) \leq f(y,x)$$

هذه العلاقة صحيحة من أجل أي عنصرين الآن باستبدال كل x ب y وبالعكس نجد

$$f(y,x) \leq f(x,y) \Rightarrow f(x,y)=f(y,x)$$

$\boxed{4}$ لنستبدل في العلاقة 2 كل x ب y فنجد

$$0 \leq f(y,z)+f(y,z) = 2f(y,z)$$

$$\Rightarrow f(y,z) \geq 0$$

ليكن f تابعاً قابلاً للاشتقاق ومستمراً على المجموعة الأعداد الغير سالبة $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x \geq 0\}$ ومحققاً للشروط الآتية.

1　$f(0)=0$ ، $f(x)>0$ إذا كان $x>0$

2　$f(x)$ غير متناقص من أجل $x \geq 0$

3　$\frac{f(x)}{x}$ غير متزايد من أجل $x>0$ ، $f(x,y)=f(|x-y|)$

تحقق من أنه تابع مسافة.

1) $f(x,x)=f(|x-x|)=f(0)=0$

2) إذا كان $x \neq y$ فإن $|x-y|>0$ أو $x-y \neq 0$

$f(x,y)=f(|x-y|)>0$

3) بما أن $|x-y|=|y-x|$

فإن $f(|x-y|)=f(|y-x|)$ وبالتالي $f(x,y)=f(y,x)$

4) بقي علينا أن نبرهن متراجحة المثلث. أياً كان العددين $a,b>0$ والذي من أجلها

$0<b \leq a$ لنضع الآن

$$\left[\begin{array}{l} x-y=a \\ y-z=b \end{array}\right. \Rightarrow x-z=a+b$$

لكن بالتأكيد $0<a<a+b$

لبرهان متراجحة المثلث يكفي أن نبرهن أن

$$f(a+b) \leqslant f(a) + f(b)$$

$$d(a,b) = f(a) + f(b) - f(a+b)$$

$$= f(b) - [f(a+b) - f(a)]$$

لنطبق مبرهنة لاغرانج على التابع f في المجال $[a, a+b]$ عندئذ

$$f(a+b) - f(a) = b.\, f'(\xi) \quad \boxed{1}$$

استناداً للشرط 3 يكون التابع $\frac{f(x)}{x}$ قابل للاشتقاق ومستمر

$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' \leqslant 0$. لحسب المشتق

$$\frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} \leqslant 0 \Rightarrow x f'(x) - f(x) \leqslant 0$$

$$\Rightarrow f'(x) \leqslant \frac{f(x)}{x} \quad \boxed{2} \quad x \neq 0$$

« محققة من أجل جميع النقاط ومن أجل ξ » لأن $a < \xi < a+b$

ومنه فإنه يكون لدينا $f'(\xi) \leqslant \frac{f(\xi)}{\xi} \quad \boxed{3}$

بتعويض $\boxed{3}$ في $\boxed{1}$ $\quad f(a+b) - f(a) \leqslant b.\, \frac{f(\xi)}{\xi}$

وبالتالي نجد أن

$$d(a+b) \geqslant f(b) - b.\, \frac{f(\xi)}{\xi} \quad \boxed{4}$$

واستناداً للشرط 3 يكون لدينا $\quad \frac{f(a)}{a} \geqslant \frac{f(\xi)}{\xi}$

وبالتالي فإن العلاقة $\boxed{4}$ تأخذ الشكل

$$d(a+b) \geqslant f(b) - \frac{b}{a} f(a)$$

$$= \frac{a f(b) - b f(a)}{a}$$

استناداً إلى شرط الشك $\quad \frac{f(b)}{b} \geqslant \frac{f(a)}{a} = \frac{a f(b) - b f(a)}{a}$

وبالتالي $\quad \frac{a f(b) - b f(a)}{a} > 0 \Rightarrow$

$$a f(b) - b f(a) \geqslant 0$$

عندئذ تأخذ العلاقة:

$$d(a+b) \geqslant f(b) - \frac{b}{a} f(a)$$

$$0 \leqslant d(a+b) = f(a) + f(b) - f(a+b)$$

ومنه نجد

$$f(a+b) \leqslant f(a) + f(b)$$

وهذا ما يثبت متراجحة المثلث.

برهن أنه في أي فضاء متري يكون $\overline{B(x_0,r)} \subset B[x_0,r]$

حيث $\overline{B[x_0,r)}$ لصاقة الكرة التي مركزها x_0 ونصف قطرها r

$B[x_0,r]$ الكرة المغلقة التي مركزها x_0 ونصف قطرها r.

لكي أبرهن هذه العلاقة نفرض أن x نقطة من $\overline{B(x_0,r)}$

عندئذ توجد متتالية من النقاط $\{x_n\}$ من $B(x_0,r)$ متقاربة لـ x

ولنبرهن على أن x ينتمي إلى $B[x_0,r]$

لنقدر المسافة بين x و x_0

$$d(x,x_0) \leqslant d(x,x_n) + d(x_n,x_0) \leqslant r + d(x,x_n)$$

باختيار n كبير بقدر كاف يمكن جعل $d(x,x_n) < \varepsilon$

كما يكون $n > n_0(\varepsilon)$ وعندما $n \to \infty$

بالانتقال إلى النهاية في العلاقة السابقة عندما $n \to \infty$

$$d(x,x_0) \leqslant r$$

وبالتالي $x \in B[x_0,r]$

وهو المطلوب.

أورد مثالاً يكون فيه اللصاقة لا تساوي

$$\overline{B(x_0,r)} \neq B[x_0,r]$$

لتكن X مجموعة ما تحتوي على أكثر من عنصر ولنعرف على هذه المجموعة مسافة

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & , \quad x \neq y \\ 0 & , \quad x = y \end{cases}$$

لنأخذ المجموعة المشكلة من العنصر الوحيد $\{x\}$ ولنأخذ الكرة $B(x_0,1)$

كرة مفتوحة لصاقتها $\overline{B(x_0,1)}$

$$\{x_0\} = \overline{B(x_0,1)}$$

من ناحية ثانية $B[x_0,1]=X$

وبالتالي $\{x_0\} \neq X$

إضافة:

برهن على سبيل المثال أنه في الفضاء $C[0,1]$ يكون

$B(x_0,r) = B[x_0,r]$

انتهت المحاضرة الأولى.

التحليل التابعي (1) — المحاضرة الثانية عملي

1) ليكن $C^{(1)}[0,1]$ فضاء جميع التوابع القابلة للاشتقاق مستمرة على المجال $[0,1]$ ولتكن المسافة فيه معرفة بالعلاقة

$$\rho(x,y)=\max_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|$$

برهن أن هذا الفضاء ليس تاماً.

ط1): لنستعرض تابع وايرشتراس $f(t)=\sum_{K=1}^{\infty} a^K\cos(b^K\pi t)$

حيث $0<a<1$، b عدد فردي بحيث $a.b>1+\frac{3}{2}\pi$

إن التابع $f(t)$ الذي يمثل مجموع سلسلة متقاربة بانتظام حدودها توابع مستمرة هذا التابع معروف في التحليل الرياضي أنه غير قابل للاشتقاق في أية نقطة من نقاط المجال $[0,1]$ (مع العلم أنه تابع مستمر لمجموع السلسلة تابعية من التوابع المستمرة ومتقاربة بانتظام). إذا وجدنا متتالية وهي متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة $\sum_{K=1} a^K\cos(b^K\pi t)$ أساسية في $C^{(1)}[0,1]$ (كونها متقاربة بانتظام) لكن نهايتها وهو التابع $f(t)$ لا ينتمي إلى $C^{(1)}[0,1]$ لأنه غير قابل للاشتقاق في المجال $[0,1]$ وهو المطلوب أي $C^{(1)}[0,1]$ بالمسافة المعرفة غير تام.

ط2: سنبرهن أن الفضاء $C^{(1)}[0,1]$ غير تام ببرهان أنه مجموعة غير مغلقة في $C[0,1]$ لو فرضنا أن $C^{(1)}[0,1]$ مغلقة باعتبارها مجموعة جزئية من $C[0,1]$ عندها $\overline{C^{(1)}[0,1]}=C^{(1)}[0,1]$ هذا من جهة ومن جهة أخرى لدينا: مجموعة كثيرات الحدود بالمعاملات العادية كثيفة في الفضاء $C[0,1]$ وبالتالي هي كثيفة في $\underline{C^{(1)}[0,1]}$ ولنرمز لها بـ $C_0[0,1]$

$$C_0[0,1]\subseteq C^{(1)}[0,1]\subseteq C[0,1]\Rightarrow \overline{C_0[0,1]}\subseteq \overline{C^{(1)}[0,1]}\subseteq \overline{C[0,1]}=C[0,1]$$

إذاً $\overline{C^{(1)}[0,1]}=C[0,1]$ لكن الفضائيين ليسا متساويين $C^{(1)}[0,1]\neq C[0,1]$ وهذا تناقض إذاً $C^{(1)}[0,1]$ ليست مغلقة $\Leftarrow$ $C^{(1)}[0,1]$ غير تام.

2) ليكن X فضاء متري تام وليكن A مؤثراً يطبق X في نفسه وبحيث أن A^n مؤثراً ضاغطاً من أجل عدد طبيعي n برهن على وجود نقطة ثابتة لمؤثر A.

باستخدام ما برهناه تحقق من أن حلول المعادلات

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(t)dt=\varphi(x)$$

من أجل $n\in N$ في النقاط $C[0,\alpha]$ هي فقط الحلول التافهة (الصفرية).

في الواقع لنعرف مؤثراً A حيث

$$A: C[0,\alpha]\longrightarrow C[0,\alpha]$$

$$A\varphi(x)=\int_0^x\varphi(t)dt$$

عندها من أجل أي $n\in N$ يكون

$$A^n\varphi(x)=\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(t)dt$$

$$A^2\varphi(t) = A(A\varphi(t)) = A\left(\int_0^x \varphi(t)\,dt\right) = \int_0^x\int_0^t \varphi(u)\,du = \int_0^x \frac{(x-t)}{1!}\varphi(t)\,dt$$

حسب دراسة سابقة علينا إيجاد عدد طبيعي $p\in N$ بحيث يكون المؤثر A^{pn} ضاغطاً
أي يمكن إيجاد $p\in N$ يكون $\frac{\alpha^{pn}}{(pn)!}<1$ يكون المؤثر A^{pn} ضاغط للمؤثر
A شرطه $\alpha<1$ لكن من أجل المؤثر A^n شرطه $\frac{\alpha^n}{n!}<1$
عندها يوجد نقطة ثابتة للمؤثر A^n ولتكن $\varphi_0(x)$ وحسب ما عرضناه سابقاً في
هذا التمرين سيكون φ_0 هي نفسها النقطة الثابتة للمؤثر أي $A\varphi_0=\varphi_0 \Leftarrow$

$$\int_0^x \varphi_0(t)\,dt=\varphi_0(x) \Rightarrow \varphi_0(x)=\varphi_0'(x) \quad ; \quad \varphi_0(0)=0$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi_0}{dx}=\varphi_0(x) \Rightarrow \frac{d\varphi_0}{\varphi_0}=dx \Rightarrow \ln\left|\frac{\varphi_0}{c}\right|=x$$

$$\Rightarrow \varphi_0(x)=c\,e^x$$

$$x=0 \Rightarrow 0=\varphi_0(0)=c \Rightarrow c=0 \Rightarrow \quad \varphi_0(x)=0 \quad \forall\, 0\le x\le \alpha$$

$$\Rightarrow \varphi\equiv 0$$

$\boxed{٣}$ برهن أن متتالية الكسور المستمرة (x_n) متقاربة وأوجد نهايتها

$$2,\ 2+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}},\ \dots$$

$$x_1=2,\ x_2=2+\frac{1}{x_1},\ x_3=2+\frac{1}{x_2}, \dots\ x_n=2+\frac{1}{x_{n-1}} \quad \forall n\ge 2$$

$x_1=2,\ x_2=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ واضح إذاً أن $\{x_n\}$ معرفة وتدريجياً لدينا

واضح أن $2\le x_n\le \frac{5}{2}=2+\frac{1}{x_{n-1}} \quad \forall n\ge 1$

إذاً لنستعرض في الحال $[2,\frac{5}{2}]$ المؤثر $f(x)=2+\frac{1}{x} \quad \forall x\in[2,5/2]$
إن f مؤثراً ضاغطاً لأن:

$\forall x,y\in[2,5/2] \Rightarrow d(f(x),f(y))$

$$=|f(x)-f(y)|=\left|2+\frac{1}{x}-2-\frac{1}{y}\right|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\left|\frac{y-x}{x\cdot y}\right|$$

$$=\frac{|x-y|}{x\cdot y}=\frac{d(x,y)}{x\cdot y}\le\frac{1}{4}\,d(x,y)$$

$$\Rightarrow d(f(x),f(y))\le\frac{1}{4}\,d(x,y) \quad \forall x,y\in[2,5/2]$$

حيث $0<\alpha=\frac{1}{4}<1$ إذاً f ضاغط
وحسب مبدأ المؤثرات الضاغطة يوجد حل وحيد للمعادلة في

$f(x)=x \qquad [2,5/2]$

ولكن x^* حيث x $f(x^*)=f(x)$

$\Rightarrow 2+\frac{1}{x^*}=x^* \Rightarrow x^*=1+\sqrt{2} \quad \in[2,5/2]$

واضح أن المتتالية $\{x_n\}$ المفروضة تمثل متتالية التقريبات المتتالية لنقطة ثابتة للتابع.

$x_1=2,\ x_2=f(x_1)=2+\frac{1}{2},\ x_3=f(x_2)=2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}},\ \ldots$

وبالتالي فإن النقطة الثابتة للمؤثر f هي نفسها نهاية المتتالية المفروضة x_n

$\lim_{n\to\infty} x_n = x^* = 1+\sqrt{2}$

إذاً $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة ونهايتها $1+\sqrt{2}$

$\boxed{4}$ لتكن جملة المعادلات الجبرية الخطية $x_i=\sum_{m=1}^{\infty} a_{im}x_m+a_i$

تأكد من أنه إذا تحققت الشروط:

a) $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|<\infty$, $a=\sup_m \sum_{i=1}^{\infty}|a_{im}|<1$

فإنه يوجد حل وحيد للجملة وحيث $x^*=(x_1^*,\ldots)$ $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^*|<\infty$

لنتعرف في الفضاء l_1 المؤثر A، $Ax=y$ حيث $x=(x_1,\ldots)$

و $y=(y_1,\ldots)$ والمسافة هي $\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|$

$y_i=\sum_{m=1}^{\infty} a_{im}x_m+a_i$

لنبرهن أن A ضاغط $\forall\ x=(x_1,x_2,\ldots),\ z=(z_1,z_2,\ldots)\in l_p \Rightarrow$

$\rho(Ax,Az)=\sum_{i=1}^{\infty}|(Ax)_i-(Az)_i|$

$=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{m=1}^{\infty}a_{im}x_m+a_i-\sum_{m=1}^{\infty}a_{im}z_m-a_i\right|$

$=\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{m=1}^{\infty}a_{im}(x_m-z_m)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|a_{im}|\cdot|x_m-z_m|$

$\leqslant \sup_m |a_{im}|$

$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sup_m|a_{im}|\,|x_m-z_m|$

لا تتعلق بـ m

$=\sum_{i=1}^{\infty}\sup_m|a_{im}|\sum_{m=1}^{\infty}|x_m-z_m| = \rho(x,z)\sum_{i=1}^{\infty}\sup_m|a_{im}|$

$=\sup_m\sum_{i=1}^{\infty}|a_{im}|\,\rho(x,z)$

ولدينا فرضاً $0<a=\sup_m\sum_{i=1}^{\infty}|a_{im}|<1$

إذاً A ضاغط عندها يوجد حل وحيد $AX=X$

عندها يوجد حل وحيد للمعادلة المفروضة.

b) $\sup_i |a_i| < \infty$ $\beta = \sup_i \sum_{m=1}^{\infty} |a_{im}| < 1$ إذا كان
فإنه يوجد للجملة المذكورة حل وحيد

$\sup_i |x_i^*| < \infty$

لنستعرض في الفضاء m المؤثر A بالمسافة

$\rho(x,y) = \sup_i |x_i - y_i|$; $x = (x_1, \dots)$, $y = (y_1, \dots)$

$$y_i = \sum_{m=1}^{\infty} a_{im} x_m + a_i$$

$(Ax = y)$

لنبرهن أن A ضاغط

$\forall x = (x_1, x_2, \dots)$ و $z = (z_1, z_2, \dots) \in m \Rightarrow$

$$\rho(Ax, Az) = \sup_i |(Ax)_i - (Az)_i|$$

$$= \sup_i \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{im} x_m + a_i - \sum_{m=1}^{\infty} a_{im} z_m - a_i \right|$$

$$= \sup_i \left| \sum_{m=1}^{\infty} a_{im} (x_m - z_m) \right|$$

$$\leq \sup_i \sum_{m=1}^{\infty} |a_{im}| . |x_m - z_m|$$

$\leftarrow \sup$

$$\leq \sup_i \sum_{m=1}^{\infty} |a_{im}| . \sup_m |x_m - z_m|$$

$$= \rho(x,z) \sup_i \sum_{m=1}^{\infty} |a_{im}|$$

$$= \rho(x,z) . \beta$$

علماً أن $0 < \beta < 1$ فرضاً

فالمؤثر A ضاغط.

إذا يوجد للمعادلة حل $Ax = x$ حسب مبدأ المؤثرات الضاغطة

إذاً يوجد لجملة المعادلات المفروضة حل وحيد.

انتهت المحاضرة الثانية

تحليل تابعي (1)

دورة: برهن أن العلاقة $\rho(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$ الحاضرة الثالثة عملي.

تحقق مسافة في $\mathbb{R}$

$$1)\ \rho(x,x) = \frac{|x-x|}{1+|x-x|} = \frac{0}{1+0} = 0$$

$$2)\ \rho(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = \frac{|y-x|}{1+|y-x|} = \rho(y,x)$$

$$3)\ \rho(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = 0 \Rightarrow |x-y| = 0 \Rightarrow x = y$$

$$4)\ \rho(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = \frac{|x-z+z-y|}{1+|x-z+z-y|}$$

بالاستفادة من المتراجحة $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \dfrac{|a|}{1+|a|} + \dfrac{|b|}{1+|b|}$

$$\Rightarrow \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) \qquad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$$

ليكن f تابعاً معرفاً على X ويأخذ قيماً في $\mathbb{R}$ (X مجموعة ما) موجبة برهن أن التابع

$$\rho(x,y) = \begin{cases} f(x) + f(y) & ; x \neq y \\ 0 & ; x = y \end{cases}$$

تحقق من أنها مسافة.

$1)\ \rho(x,x) = 0$ وضوحاً $\qquad 2)\ \rho(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

$$3)\ \rho(x,y) = \begin{cases} f(x) + f(y) & ; x \neq y \\ 0 & ; x = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\rho(x,y) = \begin{cases} f(y) + f(x) & ; x \neq y \\ 0 & ; x = y \end{cases} \Rightarrow \rho(x,y) = \rho(y,x)$$

$$4)\ \rho(x,y) = f(x) + f(y) \leq f(x) + f(z) + f(z) + f(y)$$

$$\Rightarrow \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$$

$$x = y \quad \rho(x,y) = 0 \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) \qquad \forall x,y,z \in X$$

إذا كان X فضاءً مترياً وكانت $\{x_n\}$ متتالية متقاربة إلى x_0 برهن أن هذه النهاية وحيدة.

لبرهان الوحدانية نفرض العكس، نفرض $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ و $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0$

من أجل $\varepsilon > 0$ عددان طبيعيان n_1, n_2

$$d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad ; n > n_1 \quad , \quad d(x_n, y_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad ; n > n_2$$

$$\Rightarrow n > \max(n_1, n_2) \Rightarrow d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, y_0)$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow x_0 = y_0$$

وبالتالي النهاية وحيدة.

إذا كانت $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متتاليتين من X متقاربتين على الترتيب إلى x_0، y_0 وكان $\rho(x_n, y_n) \to 0$ برهن أن $x_0 = y_0$

من استمرار تابع المسافة $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0(\varepsilon) ; n > n_0 \Rightarrow$

$$\rho(x_n, x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} , \rho(y_n, y_0) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_0)| \leq \rho(x_n, x_0) + \rho(y_n, y_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
$$\rho(x_0, y_0) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = 0 \Rightarrow x_0 = y_0$$

لتكن $\{t_n\} \subset R$ متتالية عددية (مثبتة) ولتكن X مجموعة جميع التوابع المستمرة من R هل يحقق التابع

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{|x(t_n) - y(t_n)|}{1 + |x(t_n) - y(t_n)|}$$

$$1)\ \rho(x, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{|x(t_n) - x(t_n)|}{1 + |x(t_n) - x(t_n)|} = 0$$

$$2)\ \rho(x, y) = 0 \Rightarrow |x(t_n) - y(t_n)| = 0$$

الآن ليكن $\overline{\{t_n\}} = R$ ، أي $\{t_n\}$ كثيفة في R

$$\forall t \in R\ \exists t_{n_i} \underset{n_i \to \infty}{\longrightarrow} t \quad , \quad x(t) = x(\lim_{n_i \to \infty} t_{n_i}) = \lim_{n_i \to \infty} x(t_{n_i})$$

$$= \lim_{n_i \to \infty} y(t_{n_i}) = y(\lim_{n_i \to \infty} t_{n_i}) = y(t) \Rightarrow x(t) = y(t)$$

* في حالة n ليست كثيفة في R يمكننا اختيار تابعين $x(t), y(t)$

$$x(t_n) = y(t_n)\ \forall n \Rightarrow x(t) \neq y(t)$$

في هذه الحالة $\rho(x,y)$ ليس مسافة

$$3)\ \rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{|y(t_n) - x(t_n)|}{1 + |y(t_n) - x(t_n)|} = \rho(y, x)$$

$$4)\ \rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{|x(t_n) - z(t_n) + z(t_n) - y(t_n)|}{1 + |x(t_n) - z(t_n) + z(t_n) - y(t_n)|}$$

بالاستفادة من المتراجحة
$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

$$\Rightarrow \rho(x, y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{|x(t_n) - z(t_n)|}{1 + |x(t_n) - z(t_n)|} + \frac{|z(t_n) - y(t_n)|}{1 + |z(t_n) - y(t_n)|} \right)$$
$$\leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

أثبت الحاصرة الثالثة على

تحليل تابعي <1> المحاضرة الرابعة علي

نعرف في الفضاء المتري (X,ρ) مسافة مكافئة $\tilde{\rho}(x,y)$ بحيث تكون كل مجموعة جزئية منه محدودة

$$\tilde{\rho}(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

ارشاد: ضع

1) $\tilde{\rho}(x,x)=\frac{\rho(x,x)}{1+\rho(x,x)}=\frac{0}{1+0}=0$ لأن ρ مسافة

2) $\forall x,y\in X,\ \tilde{\rho}(x,y)=0 \Rightarrow \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}=0 \Rightarrow \rho(x,y)=0 \Rightarrow x=y$

لأن ρ تابع مسافة

3) $\tilde{\rho}(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}=\frac{\rho(y,x)}{1+\rho(y,x)}=\tilde{\rho}(y,x)\quad \forall x,y\in X$

4) $\tilde{\rho}(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$

بما أن ρ مسافة على X فإن

$$\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)\quad \forall x,y,z\in X$$

لنعرف $t\geq 0$ و $f(t)=\frac{t}{1+t} \Leftarrow f'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}>0$

وبالتالي f متزايد

$$\Rightarrow f(\rho(x,y))\le f(\rho(x,z))+\rho(z,y))$$

$$\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}\le\frac{\rho(x,z)+\rho(z,y)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)}=$$

$$\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)}+\frac{\rho(z,y)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)}$$

$$\le\frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)}+\frac{\rho(z,y)}{1+\rho(z,y)}$$

$$\Rightarrow \tilde{\rho}(x,y)\le\tilde{\rho}(x,z)+\tilde{\rho}(z,y)\quad \forall x,y,z\in X$$

لنبرهن تكافؤ المتتاليتين:

• لتكن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى x_0 بالنسبة للمسافة ρ أي

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=0$$

لنبرهن أن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى x_0 بالنسبة للمسافة $\tilde{\rho}$.

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{\rho}(x_n,x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{\rho(x_n,x_0)}{1+\rho(x_n,x_0)}=\frac{0}{1+0}=0$$

لتكن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى x_0 بالنسبة للمسافة $\tilde{\rho}$ أي

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{\rho}(x_n,x_0)=0$$

ولنبرهن أن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى x_0 بالنسبة للمسافة ρ.

لدينا $\rho(x,y)=\dfrac{\tilde{\rho}(x,y)}{1-\tilde{\rho}(x,y)}$ $\forall x,y\in X$

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{\rho}(x_n,x_0)}{1-\tilde{\rho}(x_n,x_0)}=\frac{0}{1-0}=0$$

إذاً $\tilde{\rho}$ و ρ مسافتين متكافئتين.

• لتكن $M\subset(X,\tilde{\rho})$ مجموعة جزئية ما ولنبرهن أنها محدودة

$$\tilde{\rho}(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}<\frac{\rho(x,y)}{\rho(x,y)}=1 \quad \forall x,y\in X$$

$$\forall x,y\in M \Rightarrow \tilde{\rho}(x,y)\leq 1 \Rightarrow x\in \bar{S}(y,1),\ M\subseteq \bar{S}(y,1)$$

حيث y مثبت من M.

هذا يعني أن M مجموعة محدودة (لأننا وجدنا كرة مغلقة واحدة على الأقل تحوي M).

يمكن القول $M\subseteq \bar{S}(x_0,r)$ حيث $1\leq r$ حيث $x_0\in X$

احسب المسافة $\rho(x,y)$ في الفضاء $L^p[0,1]$ إذا كان $x(t)=t^3$, $y(t)=t^5$ ثم استنتج المسافة في الحالة الخاصة $p=1,2$ «دورة».

$$\rho(x,y)=\left(\int_0^1|x(t)-y(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \Rightarrow \rho^p(x,y)=\int_0^1 t^{3p}|1-t^2|^p\,dt$$

لنجري تغيراً في التكامل

$$u=t^2 \Rightarrow t=u^{1/2} \Rightarrow dt=\frac{1}{2}u^{-1/2}$$

$$\rho^p(x,y)=\int_0^1 u^{\frac{3p}{2}}(1-u)^p\,\frac{1}{2}u^{-1/2}\,du=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{3p-1}{2}}(1-u)^p\,du$$

$$=\frac{1}{2}B\left(\frac{3p+1}{2},\,p+1\right)$$

$$\rho^p(x,y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3p+1}{2}\right)\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{5p+3}{2}\right)}$$

$$\rho(x,y) = \frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{\Gamma(\frac{3p+1}{2})\cdot\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{5p+3}{2})}\right)^{1/p}$$

$$p=1 \Rightarrow \rho(x,y) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(2)\cdot\Gamma(2)}{\Gamma(4)} = \frac{1}{12}$$

$$p=2 \Rightarrow \rho^2(x,y) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{7}{2})\cdot\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{13}{2})} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{7}{2})\cdot 2!}{\frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\Gamma(\frac{7}{2})}$$

$$\rho^2(x,y) = \frac{8}{693} \Rightarrow \rho(x,y) = \sqrt{\frac{8}{693}}$$

أوجد المسافة في الفضاء $C[0,1]$ بين التابعين

a) $x(t) = t^3 \,,\, y(t) = t^5$

$$d(x,y) = \max_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)| = \max_{0\le t\le 1}|t^3-t^5|$$

$f(t) = t^3 - t^5$ لنوجد القيم التي ينعدم عندها مشتق التابع

$$f'(t)=0 \Rightarrow 3t^2-5t^4=0 \Rightarrow t^2(3-5t^2)=0$$

إما $t=0$ أو $t=\mp\sqrt{\frac{3}{5}}$ لكن $t=-\sqrt{\frac{3}{5}} \notin C[0,1]$

إذاً $t=0 \,,\, t=\sqrt{\frac{3}{5}}$ ينعدم عندها المشتق نعوض في عبارة التابع

$$t=0 \Rightarrow |(0)^3-(0)^5| = 0$$

$$t=\sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow \left|\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3-\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^5\right| = \frac{3}{5}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}\left|1-\frac{3}{5}\right| = \frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$t=1 \Rightarrow |(1)^3-(1)^5| = 0$$

وبالتالي التابع $f(t)$ يبلغ قيمته العظمى في النقطة $t=\sqrt{\frac{3}{5}}$ وتكون المسافة $d(x,y) = \frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}$

b) $x(t) = \sin \pi t \,,\, y(t) = \cos \pi t$

$$d(x,y) = \max_{0\le t\le 1}|\sin\pi t - \cos\pi t|$$

$$= \max_{0\le t\le 1}\sqrt{2}\left|\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\frac{\pi}{4}}\sin\pi t - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin\frac{\pi}{4}}\cos\pi t\right|$$

نأخذ أمثال $\sin$ و $\cos$ ونجمعهم مع التربيع والكل تحت الجذر

$$= \sqrt{2}\max_{0\le t\le 1}\left|\sin\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

لنوجد نقاط انعدام مشتق التابع

$$f(t) = \sin(\pi t - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow f'(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \cdot \cos(\pi t - \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow \pi t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi K \quad K \in \mathbb{Z}$$

$t = \frac{3}{4} + K$ سنختار النقاط التي تنتمي للمجال $[0,1]$

$K=0 \Rightarrow t = \frac{3}{4} \in [0,1]$ $\quad K=1 \Rightarrow t = \frac{7}{4} \notin [0,1]$

$K=-1 \Rightarrow t = \frac{-1}{4} \notin [0,1]$

$$t = \frac{3}{4} \Rightarrow |\sin(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4})| = 1$$

$$t = 0 \Rightarrow |\sin(-\frac{\pi}{4})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$t = 1 \Rightarrow |\sin(\pi - \frac{\pi}{4})| = |\sin\frac{\pi}{4}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow d(x,y) = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$$

ملاحظة: « نأخذ القيمة العظمى ولذلك نعوض قيم المجال التي تكون أكبر قيمة هي التي نعوضها تابع المسافة »

دورة: لتكن X مجموعة نقاط في مستوٍ ولتكن المسافة على X معرفة بالعلاقة

$$\rho(M,N) = |x-u| + |y-v|$$

حيث $M(x,y)$, $N(u,v)$

وليكن المؤثر A معرفاً بالمصفوفة $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

نفرض أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون A ضاغطاً هو أن يكون

$$\max(|a|+|c|, |b|+|d|) < 1$$

$\Leftarrow$ نفرض $\alpha = \max(|a|+|c|, |b|+|d|) < 1$

ولنبرهن أن A ضاغط

$$\forall M(x,y), N(u,v) \in \mathbb{R}^2$$

$$AM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

$$= (ax+by, cx+dy)$$

$$AN = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au+bv \\ cu+dv \end{pmatrix} = (au+bv,\ cu+dv)$$

$$\begin{aligned}
\rho(AM, AN) &= \rho\big((ax+by,\ cx+dy),\ (au+bv,\ cu+dv)\big) \\
&= |ax+by-au-bv| + |cx+dy-cu-dv| \\
&= |a(x-u)+b(y-v)| + |c(x-u)+d(y-v)| \\
&\leq |a|.|x-u| + |b|.|y-v| + |c|.|x-u| + |d|.|y-v| \\
&= \underbrace{(|a|+|c|)}_{\leq\alpha}|x-u| + \underbrace{(|b|+|d|)}_{<\alpha}|y-v| \\
&\leq \alpha|x-u| + \alpha|y-v| = \alpha(|x-u|+|y-v|) \\
&= \alpha\,\rho(M,N)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho(AM,AN) \leq \alpha\,\rho(M,N) \qquad \forall M,N\in\mathbb{R}^2$$

وبما أن $\alpha<1$ مفروضاً فإن A ضاغط.

نفرض A ضاغط ولنبرهن أن

$$\max\{|a|+|c|,\ |b|+|d|\}<1$$

بما أن A مؤثر ضاغط إذاً يوجد ثابت $0<\alpha<1$ بحيث

$$\rho(AM,AN) \leq \alpha\,\rho(M,N) \qquad \forall M,N\in\mathbb{R}^2$$

لنضع $y=0, v=0$ فنجد

$$\rho(AM,AN) = |ax+by-au-bv| + |cx+dy-cu-dv|$$

$$\leq \alpha(|x-u|+|y-v|)$$

$$|ax-au| + |cx-cu| \leq \alpha(|x-u|)$$

$$|a|.|x-u| + |c|.|x-u| \leq \alpha(|x-u|) \Rightarrow$$

نقسم على $|x-u|\neq 0$ فنجد

$$|a|+|c| \leq \alpha < 1 \Rightarrow |a|+|c|<1$$

بشكل مشابه نحصل

$$|b|+|d| \leq \alpha < 1 \Rightarrow |b|+|d|<1$$

$\Rightarrow \max\{|a|+|c|, |b|+|d|\} < 1$

وهو المطلوب.

انتهت المحاضرة الرابعة.

برهن أن القطع الناقص

$$M=\{x=(\xi_1,\xi_2,\dots)\in l_2 \;;\; \sum_{n=1}^{\infty} n^2\xi_n^2\le 1\}$$

هو مجموعة محدبة في l_2

ولنفترض مجموعة العناصر $M \ni x=(\xi_1,\xi_2,\dots)$ ، $M\ni y=(\tau_1,\tau_2,\dots)$

$$Z=tx+(1-t)y \;;\; t\in[0,1]$$

$$Z=t(\xi_1,\xi_2,\dots)+(1-t)(\tau_1,\tau_2,\dots)$$

$$=(t\xi_1+(1-t)\tau_1,\; t\xi_2+(1-t)\tau_2,\dots)$$

لنبرهن أن $Z\in M$ من أجل $m\in N$ لدينا

$$\sum_{n=1}^{m} n^2(t\xi_n+(1-t)\tau_n)^2=$$

$$\sum_{n=1}^{m} n^2(t^2\xi_n^2+2t(1-t)\xi_n\tau_n+(1-t)^2\tau_n^2)$$

$$=t^2\sum_{n=1}^{m} n^2\xi_n^2+2t(1-t)\sum_{n=1}^{m} n^2\xi_n\tau_n+(1-t)^2\sum_{n=1}^{m} n^2\tau_n^2$$

حسب متراجحة بونياكوفسكي

$$\sum_{n=1}^{m}|a_nb_n|\le\left(\sum_{n=1}^{m}|a_n|^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{n=1}^{m}|b_n|^2\right)^{1/2}$$

$$\sum_{n=1}^{m} n^2|\xi_n\tau_n|=\sum_{n=1}^{m}|n\xi_n|\cdot|n\tau_n|\le\left(\sum_{n=1}^{m}|n\xi_n|^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{n=1}^{m}|n\tau_n|^2\right)^{1/2}$$

$$\sum_{n=1}^{m} n^2(t\xi_n+(1-t)\tau_n)^2\le$$

$$t^2\sum_{n=1}^{m} n^2\xi_n+2t(1-t)\left(\sum_{n=1}^{m} n^2\xi_n^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{n=1}^{m} n^2\tau_n^2\right)^{1/2}+(1-t)^2\sum_{n=1}^{m} n^2\tau_n^2$$

لدينا $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\xi_n^2\le 1$ ، $\sum_{u=1}^{\infty} n^2\tau_n^2\le 1$

بالانتقال إلى اللانهاية في العلاقة الأخيرة $m\longrightarrow\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(t\xi_n+(1-t)\tau_n)^2\le t^2+2t(1-t)+(1-t)^2=1$$

وبالتالي $Z\in M$ وبالتالي المجموعة M محدبة.

هل التوابع الآتية نظائم في مجموعة تعريفها

a) $x\longrightarrow \max\limits_{a\le t\le\frac{a+b}{2}}|x(t)| \;;\; x\in C[a,b]$

$\|x\|=0 \Rightarrow \max\limits_{a\le t\le \frac{a+b}{2}}|x(t)|=0 \Rightarrow x(t)=0 \quad ; t\in[a,\frac{a+b}{2}]$

في الحالة العامة $x(t)\neq 0$ على $[a,b]$ وبالتالي ليس نظيم.

b) $x \longrightarrow |x(a)|+\max\limits_{a\le t\le b}|x'(t)| \quad ; x\in C^{(1)}[a,b]$

لنبرهن مع موضوعات النظيم

1) $\|x\|\geq 0$ واضح

$$\|x\|=0 \iff x=\Theta$$

$$\|x\|=0 \Rightarrow |x(a)|+\max_{a\le t\le b}|x'(t)|=0$$

$$|x(a)|=0 \quad و \quad \max_{a\le t\le b}|x'(t)|=0$$

$x(a)=0,\ x'(t)=0 \ ; t\in[a,b]$

$x(a)=0\ ,\ x(t)=c$ const

$\forall t\in[a,b] \qquad x(t)=0 \Leftarrow c=0 \Leftarrow$

$\|x\|=0 \Leftarrow x(t)=0 \ ; t\in[a,b]$

2) $\|x+y\|=|x(a)+y(a)|+\max\limits_{a\le t\le b}|x'(t)+y'(t)|$

$$|x'(t)+y'(t)|\le |x'(t)|+|y'(t)| \le \max_{a\le t\le b}|x'(t)|+\max_{a\le t\le b}|y'(t)|$$

بما أن المتراجحة محققة $\forall t\in[a,b]$

$$\max_{a\le t\le b}|x'(t)+y'(t)|\le \max_{a\le t\le b}|x'(t)|+\max_{a\le t\le b}|y'(t)|$$

$$\Rightarrow \|x+y\|\le |x(a)|+|y(a)|+\max_{a\le t\le b}|x'(t)|+\max_{a\le t\le b}|y'(t)|$$

$$\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$$

3) $\|\lambda x\| = |\lambda x(a)|+\max\limits_{a\le t\le b}|\lambda x'(t)|$

$$=|\lambda|.|x(a)|+|\lambda|\max_{a\le t\le b}|x'(t)|$$

$$=|\lambda|.\|x\| \quad ; \lambda\in K$$

c) $x \longrightarrow |x(a)-x(b)| + \max\limits_{a\le t\le b} |x'(t)| \qquad x\in C[a,b]$

$\|x\| \geq 0 \iff x=\theta$

$\|x\|=0 \Rightarrow |x(a)-x(b)| + \max\limits_{a\le t\le b}|x'(t)| = 0$

$|x(a)-x(b)|=0$ و $\max\limits_{a\le t\le b}|x'(t)|=0$

$x(a)=x(b)$; $x'(t)=0 \quad \forall t\in[a,b] \Rightarrow x(t)=c$

$\Rightarrow x(t)=x(a)=x(b)=c\neq 0$

لأن $x(a)\neq 0$ في الحالة العامة $\Leftarrow$ $x(t)\neq 0$ وبالتالي ليس نظيم.

هل تشكل المجموعة

$$L=\{x=(\varepsilon)_{K=1}^{\infty}\in E ;\ \sum_{K=1}^{\infty}\varepsilon_K=0 \text{ و } \varepsilon_K\in\mathbb{R}\}$$

فضاءً جزئياً في E إذا كان

a) $E=L_1$

b) $E=L_p$ حيث $(1<p)$

a) من الواضح أن L تشكل متنوعة خطية في L_1

$\forall x, y\in L ; x=(\varepsilon)_{K=1}^{\infty}$, $y=(\tau)_{K=1}^{\infty} \Rightarrow \sum\limits_{K=1}^{\infty}\varepsilon_K=0$; $\sum\limits_{K=1}^{\infty}\tau_K=0$

$x+y=(\varepsilon_K+\tau_K)_{K=1}^{\infty}=(\varepsilon)_{K=1}^{\infty}+(\tau)_{K=1}^{\infty}$

$\sum\limits_{K=1}^{\infty}(\varepsilon_K+\tau_K)=\sum\limits_{K=1}^{\infty}\varepsilon_K+\sum\limits_{K=1}^{\infty}\tau_K=0+0=0 \Rightarrow x+y\in L$

$\forall x\in L$ و $\lambda\in K$, $x=(\varepsilon)_{K=1}^{\infty}$

$\sum\limits_{K=1}^{\infty}(\lambda\varepsilon_K)=\lambda\sum\limits_{K=1}^{\infty}\varepsilon_K=\lambda.0=0 \Rightarrow \lambda.x\in L$

ولنبرهن أن L مغلقة.

لنأخذ متتالية $x_n=(\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots)$ ولنفرض أنها متقاربة

للعنصر $x_0=(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \dots)$ لنبرهن أن $x_0\in L$

لدينا $\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_0\in\mathbb{N}$ و $n>n_0 \Rightarrow$

$$\|x_n-x_0\|=\sum_{K=1}^{\infty}|\alpha_K^{(n)}-\alpha_K^{(0)}|<\varepsilon$$

لنبرهن $\sum_{K=1}^{\infty} a_K^{(0)} = \sum_{K=1}^{\infty} (a_K^{(0)} - a_K^{(n)}) + \sum_{K=1}^{\infty} a_K^{(n)}$

$$|\sum_{K=1}^{\infty} a_K^{(0)}| = |\sum_{K=1}^{\infty} a_K^{(0)} - a_K^{(n)}| \leq \sum_{K=1}^{\infty} |a_K^{(n)} - a_K^{(0)}| < \varepsilon$$

حيث $\varepsilon > 0$ ثابت كيفي

$$\Rightarrow \sum_{K=1}^{\infty} a_K^{(0)} = 0 \Rightarrow x_0 \in L$$

مغلقة $\Leftarrow L$ فضاء جزئي من l_1

ب) إن L لن تشكل فضاء جزئي في l_p عندما $1<p$

- واضح أن L متنوعة خطياً

- إلا أن L ليست مغلقة لأن:

لتكن المتتالية من عناصر L المتتالية

$$x_n = (1, \frac{-1}{n}, \frac{-1}{n}, \dots, \frac{-1}{n}, 0, 0, \dots) \in L$$

ولكن $x_0 = (1, 0, 0, \dots)$

$$\| x_n - x_0 \| = (|1-1|^p + |\frac{-1}{n} - 0|^p + |\frac{-1}{n} - 0|^p + \dots + |\frac{-1}{n} - 0|^p)^{1/p}$$

$$= (\underbrace{\frac{1}{n^p} + \frac{1}{n^p} + \dots + \frac{1}{n^p}}_{n \text{ مرة}} + 0 + 0 + \dots)^{1/p}$$

$$= \left(\frac{n}{n^p}\right)^{1/p} = n^{\frac{1-p}{p}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

أي أن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى x_0 ولكن $x_0 \notin L$ (واضح)

إذاً وجدنا متتالية من عناصر L ومتقاربة إلى عنصر خارج L إذاً L ليست مغلقة وبالتالي ليست فضاء جزئي

انتهت المحاضرة الخامسة

تحليل تابعي (1) — المحاضرة السادسة عملي

مبرهنة:

إذا كان $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ معرفين على الفضاء الخطي المنظم X وكان X فضاء باناخ بالنسبة لكل من النظيمين وكان أحد النظيمين مهيمنا للآخر فإن هذين النظيمين متكافئين.

تمرين: هل الفضاء ℓ_1 تام بالنسبة للنظيم $\|x\|_1 = \sup_k |\xi_k|$

حيث $x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ عنصر من ℓ_1

لدينا $\|x\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$ نعلم أن ℓ_1 فضاء باناخ بالنسبة للنظيم $\|\cdot\|_2$ ولدينا $\|\cdot\|_1$ فاضح لـ $\|\cdot\|_2$ لأن:

$$\|x\|_1 = \sup_k |\xi_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| = \|x\|_2 \quad \forall x \in \ell_1$$

ولكن هذين النظيمين غير متكافئين لأن:

لتكن المتتالية $x_n = (\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n \text{ مرة}}, 0, 0, \ldots)$ إن المتتالية السابقة متقاربة

إلى العنصر الصفري $\theta(0, 0, \ldots)$ بالنسبة للنظيم $\|\cdot\|_1$ لأن

$$\|x_n - \theta\|_1 = \|x_n\|_1 = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

لكنها ليست متقاربة إلى θ بالنسبة للنظيم $\|\cdot\|_2$ لأن

$$\|x_n - \theta\|_2 = \|x_n\|_2 = 1 \not\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

حسب المبرهنة السابقة (نقض المبرهنة السابقة) نجد أن ℓ_1 ليس فضاء باناخ (ليس فضاء تام) بالنسبة للنظيم $\|\cdot\|_1$.

مبرهنة الوحدانية في التوابع التحليلية

إذا كان التابعان $f_1(z), f_2(z)$ تحليليين في ساحة D وإذا تطابقت قيمهما على متتالية من النقاط $\{a_n\}$ متقاربة إلى نقطة داخلية a من الساحة D فإن $f_1(z) = f_2(z)$ في كل مكان في D

تمرين دورة: برهن أن الفضاء الخطي الجزئي المغلق ℓ (الفضاء الجزئي المولد) لجميع الأشعة من الشكل

$$x_n = (1, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{2n}}, \frac{1}{2^{3n}}, \ldots)$$

هو مجموعة كثيفة في كل مكان من ℓ_2

نعلم أنه حتى تكون ℓ كثيفة في ℓ_2 يكفي أن نبرهن أنه لا يوجد سوى العنصر الصفري يعامد ℓ (يعامد العناصر x_n)

ليكن $x \in \ell_2$ يعامد جملة العناصر $\{x_n\}$ حيث

$$x = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots)$$

$$x_n = (1, \left(\frac{1}{2^n}\right)^1, \left(\frac{1}{2^n}\right)^2, \left(\frac{1}{2^n}\right)^3, \dots)$$
$$\quad K=0 \quad K=1 \quad K=2 \quad K=3$$

نرمز $z_n = \frac{1}{2^n}$

عالماً $x_n \perp x$ لكل $n \geq 1$

$$(x, x_n) = 0 \quad \forall n \geq 1$$
$$\Rightarrow \sum_{K=0}^{\infty} z_n^K \, \varepsilon_K = 0$$

x_n مركبة ، x مركبة

لنضع التابع التالي

$$f(z) = \sum_{K=0}^{\infty} z^K \varepsilon_K = \sum_{K=0}^{\infty} \varepsilon_K . z^K$$

لدينا في كرة واحدة

$$K = \{ z \in K \ , \ |z| < 1 \}$$
$$|\varepsilon_K z^K| \leq \frac{1}{2} (|\varepsilon_K|^2 + |z|^{2K})$$

$\left(ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \quad a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \right.$ عندها $\left. (a-b)^2 \geq 0 \right)$

$$\sum_{K=1}^{\infty} |\varepsilon_K z^K| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{K=0}^{\infty} |\varepsilon_K|^2 + \sum_{K=1}^{\infty} |z|^{2K} \right) < \infty$$

لأن $z \in K$, $x \in \ell_2$

إذاً $\sum_{K=1}^{\infty} \varepsilon_K z^K$ متقاربة بانتظام في الساحة K إذاً التابع $f(z)$ تحليلي في K ولكن $f(z_n) = \sum_{K=0}^{\infty} z_K z_n^K = 0$

إذاً لدينا $f(z)$ يطابق التابع الصفري على المتتالية $\{z_n\}$ ولكن المتتالية $\{z_n\}$ تمتاز بوجود نقطة تجمع لها (نهاية لها) وهي الصفر

$$\lim_{n \to \infty} z_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0 \in K$$

حسب مبرهنة الوحدانية في التوابع التحليلية يكون

$$f(z) \equiv 0 \quad \forall z \in K$$
$$f(z) = \sum_{K=0}^{\infty} \varepsilon_K . z^K = 0 \quad \forall z \in K$$

إذاً

$$\varepsilon_K = 0 \quad \forall K \geq 0$$

ومنه $x = \theta$

وهو المطلوب

انتهت المحاضرة السادسة.

التحليل التابعي (1)   المحاضرة الأولى

الفصل الأول   الفضاءات المترية

• **الارتباط التابعي:**

لتكن X و Y مجموعتين ما ولتكن لدينا قاعدة معلومة تقابل وفقها كل عنصر $x\in X$ بعنصر وحيد معرف تماماً $y\in Y$ عندئذٍ نقول إنه لدينا مؤثر $y=f(x)$ معرف على المجموعة X و مجموعة قيمه متوضعة في المجموعة Y ونقول أيضاً أنه لدينا تطبيق للمجموعة X في المجموعة Y وفي الحالة الخاصة عندما تكون قيم المؤثر حقيقية فإن المؤثر يسمى دالياً.

ملاحظة:

إذا طبق $y=f(x)$ المجموعة X على المجموعة Y فإنه من الواضح من أجل كل عنصر $y\in Y$ يوجد على الأقل صورة عكسية واحدة x أما في الحالة التي يوجد فيها من أجل كل عنصر $y\in Y$ فقط صورة عكسية واحدة $x\in X$ فإن التطبيق x على y المحقق بالعلاقة $y=f(x)$ يسمى تطبيقاً غامراً ومتبايناً وحيد القيمة بالتبادل.

• تسمى المجموعة التي عرفت فيها بشكل أو بآخر مفهوم نهاية متتالية بفضاء وتسمى الفضاءات التي عناصرها توابع أو متتاليات عددية بفضاءات تابعية.

متى نقول عن المجموعة X أنها مرتبة جزئياً؟

لنفرض أنه في المجموعة X قد عرفت علاقة ترتيب من أجل بعض أزواج عناصرها a وb وc بحيث $a<b$ ولنفرض أيضاً أن هذه العلاقة تحقق الشروط الآتية:

1) من $a<b$ و $b<c$ ينتج $a<c$.

2) $a<a$

3) من $a<b$ و $b<a$ ينتج $a=b$

عندئذٍ نقول إن المجموعة X مرتبة جزئياً ويسمى العنصران a وb واللذان من أجلهما تتحقق العلاقة $a<b$ أو $b<a$ بعنصرين مقارنين.

ملاحظة:

تسمى المجموعة X مرتبة أي مرتبة خطياً أو مرتبة كلياً إذا كان من أجل أي عنصرين مختلفين منها a وb إما $a<b$ أو $b<a$

متى نقول عن مجموعة أنها محدودة من الأعلى؟

نقول عن مجموعة جزئية Y من مجموعة مرتبة جزئياً أنها محدودة من الأعلى إذا وجد عنصر مثل b بحيث أن $y<b$ من أجل جميع العناصر $y\in Y$ ويسمى العنصر b حداً أعلى للمجموعة Y ويسمى أصغر حد أعلى للمجموعة بالحد الأعلى الأصغري أو

أو الحد الأعلى للمجموعة . وبالشكل تماماً نعرف المجموعة المحدودة من الأدنى والحد الأدنى و الحد الأدنى الأعظمي أو الحد الأدنى للمجموعة.

؟ فمثلاً يسمى العنصر $z_0 \in X$ عنصراً أعظمياً إذا لم يوجد في X عنصر مثل $(z_0 \neq x)$ محقق للعلاقة $z_0 < x$.

متى نقول عن مجموعة مرتبة أنها مرتبة تماماً وأعط مثالاً ؟

نقول عن مجموعة مرتبة أنها مرتبة تماماً إذا وجد في أي مجموعة جزئية منها غير خالية عنصر أصغري يسبق جميع عناصر المجموعة الجزئية .

مثلاً : لتكن X هي مجموعة الأعداد الحقيقية ولتكن العلاقة $>$ هي العلاقة $\leqslant$ عندئذ من الواضح أنه أياً كانت الأعداد الحقيقية c و b و a فإن :

1) $a \leqslant a$ ،

2) إذا كان $a \leqslant b$ وكان $b \leqslant c$ فإن $a \leqslant c$

3) إذا كان $a \leqslant b$ وكان $b \leqslant a$ فإن $a = b$

وبالتالي فإن العلاقة $\leqslant$ هي علاقة ترتيب جزئي من أجل الأعداد الحقيقية . وفي هذه الحالة نلاحظ أن الأعداد الحقيقية فعلياً مرتبة كلياً.

تدكي عن الفضاء المتري :

لتكن X مجموعة غير خالية . نسمي التطبيق $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ مسافة على X إذا حقق من أجل جميع العناصر $x, y, z \in X$ الموضوعات الآتية.

1) $d(x, x) = 0$

2) $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

3) $d(x, y) = d(y, x)$ خاصية التناظر

4) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ متراجحة المثلث

نسمي المجموعة X مع المسافة المعرفة عليها d فضاءً مترياً ونرمز لذلك ب (X, d) وعادةً نحذف d ونكتب فقط X كرمز للفضاء المتري.

. نسمي التابع $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ والمحقق للخواص الثلاث الأولى نصف مسافة . ونسمي (X, d) فضاء نصف متري في هذه الحالة.

ملاحظات :

1) المسافة d بشكل دائم ليست سالبة.

من أجل $x, y \in X$ ينتج أن : $d(x, y) + d(y, x) \geqslant d(x, x)$

أي أن $2d(x,y) \geqslant 0$

وبالتالي فإن: $d(x,y) \geqslant 0$

(2) إذا كانت x, y, x', y' عناصر من X فإن:

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leqslant d(x,x') + d(y,y')$$

في الواقع بما أننا نعلم أن: $d(x,y) \leqslant d(x,x') + d(x',y)$

$$\leqslant d(x,x') + d(x',y') + d(y',y)$$

فإننا نجد أن: $d(x,y) - d(x',y') \leqslant d(x,x') + d(y',y)$

وبمبادلة مواضع x, y بمواضيع x', y' نجد أن

$$d(x',y') - d(x,y) \leqslant d(x',x) + d(y,y')$$

ومن المتراجحتين الأخيرتين نحصل على العلاقة المطلوبة.

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leqslant d(x,x') + d(y,y')$$

(3) كل مجموعة غير خالية X يمكن تحويلها إلى فضاء متري.

لتعريف مسافة d على النحو

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & , \; x \neq y \\ 0 & , \; x = y \end{cases}$$

بسهولة يمكن التأكد من أن d مسافة على X وتسمى d في هذه الحالة مسافة تافهة ويسمى الفضاء (X,d) فضاءً مترياً وتفصيلاً لاحقاً سنسمي عناصر الفضاء المتري نقاطاً.

ونشير أخيراً إلى أن كل مجموعة Y متوضعة في الفضاء المتري X ومعرفة بنفس المسافة المعرفة بين عناصر X تكون هي نفسها فضاءً مترياً وتسمى فضاءً جزئياً من الفضاء X

تعرف نهاية متتالية.

تسمى العنصر x من الفضاء المتري X نهاية لمتتالية العناصر $x_1, \dots, x_n, \dots$ من X إذا كان $d(x_n, x) \to 0$ عندما $n \to \infty$ وفي هذه الحالة سنكتب $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ أو $x_n \to x$

ملاحظات هامة:

- ليكن X فضاء متري ما ولتكن d تابع مسافة فيه

$$\{x \in X \mid d(x,a) < r\} = S(a,r)$$

تسمى كرة مفتوحة مركزها a ونصف قطرها r

$$\{x \in X \mid d(x,a) \leq r\} = \overline{S}(a,r)$$

كرة مغلقة مركزها a ونصف قطرها r.

«نسمي أية كرة مركزها النقطة x جواراً للنقطة x».
بسهولة نرى أن النقطة x تكون نهاية للمتتالية $\{x_n\}$ فقط وفقط عندما يحتوي أي جوار للنقطة x على جميع حدود المتتالية بدءاً من رقم معين.
• نسمي مجموعة النقاط المحتواة كلياً داخل كرة ما مجموعة محددة.

• إذا كانت المجموعة $M \subset X$ فإن النقطة $a \in X$ تسمى نقطة تجمع أو نقطة تراكم لهذه المجموعة إذا احتوت أي جوار للنقطة a على الأقل على نقطة من المجموعة $M \setminus a$ أي إذا كان $S(a,r) \cap (M \setminus a) \neq \phi$ من أجل أي عدد r.

• تسمى المجموعة $\overline{M}$ الناتجة عن المجموعة M بالإضافة نقاط تجمعها إلصاقة المجموعة M.
من خواص اللصاقة.

1) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$
2) $M \subseteq \overline{M}$
3) $\overline{(\overline{M})} = \overline{\overline{M}} = \overline{M}$

كما أن لصاقة المجموعة الخالية هي المجموعة الخالية.
• تسمى المجموعة M مجموعة مغلقة إذا كانت $\overline{M} = M$
تسمى المجموعة M مجموعة مفتوحة إذا كانت متممتها $X \setminus M$ مغلقة.

• نقول إن المجموعة M كثيفة في G إذا كانت $G \subseteq \overline{M}$.
في حالة خاصة نقول إن المجموعة $\overline{M}$ كثيفة في كل مكان في الفضاء X إذا كانت $\overline{M} = X$ ونقول إن المجموعة M ليست كثيفة في أي مكان في الفضاء X إذا احتوت أية كرة في داخلها من هذا الفضاء على كرة خالية من نقاط المجموعة M.

انتهت المحاضرة الأولى

4

التحليل التابعي (1)

الفضاء $L^P(E)$

لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن μ قياساً معرفاً ومتمماً على σ-جبر المجموعات القيوسة في X ولتكن E مجموعة قيوسة ما من X و P عدداً معطى و $P>1$ لنرمز ب L^P لمجموعة جميع التوابع القيوسة f والمحدودة تقريباً في كل مكان على E والتي من أجلها يتقارب التكامل

$$\int_E |f|^P d\mu < +\infty$$

سنعتبر في الفضاء L^P أن التابعين التكافئين متطابقان. لسهولة يمكن التأكد أن L^P فضاء خطي. في الواقع إذا كان $f \in L^P$ فإنه من أجل أي ثابت c يكون $cf \in L^P$.

ليكن الآن $f, g \in L^P$ ولنضع

$$E_1 = E[\,|f(x)| \leq |g(x)|\,] \quad ; \quad E_2 = E \setminus E_1$$

عندئذ من أجل $x \in E_1$ يكون لدينا

$$|f(x) + g(x)|^P \leq (|f(x)| + |g(x)|)^P$$
$$\leq 2^P |g(x)|^P$$

وبالتالي فإن

$$\int_E |f+g|^P d\mu \leq 2^P \int_{E_1} |g|^P d\mu < \infty$$

وبالمثل نجد أن:

$$\int_{E_2} |f+g|^P d\mu \leq 2^P \int_{E_2} |f|^P d\mu < \infty$$

وتبعاً لذلك يكون

$$\int_E |f+g|^P d\mu < +\infty$$

أي أن $f+g \in L^P$

إن دراسة الفضاء L^P ذات صلة وثيقة أخرى بالخط نفسه هو الفضاء L^q (على نفس المجموعة E) حيث إن q و P مرتبطين بالعلاقة $\frac{1}{P} + \frac{1}{q} = 1$

نسمي هذان الأسان بالمترافقين ينتج أن $q = \frac{P}{P-1} > 1$

ونلاحظ أنه إذا كان $P = 2$ فإن $q = 2$

إذا كان أيضاً $P \neq 2$ فإن $P \neq q$

5

برهان على صحة المتراجحة العددية الآتية

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

إن هذه المتراجحة العددية محققة من أجل جميع $a, b \geq 0$
إذا كان أحد العددين a أو b معدوماً فإن المتراجحة محققة وضوحاً لذلك سنعتبر
أن a, b من الإشارتين مختلفتين ولنضع $m = \frac{1}{p}$ عندئذ يكون $(0 < m < 1)$
لنستعرض التابع $\varphi(t) = t^m - mt \Leftarrow \varphi'(t) = m(t^{m-1} - 1)$
وبالتالي فإن $\varphi'(t) > 0$ من أجل $t < 1$ و $\varphi'(t) < 0$ من أجل $1 < t$ وفقاً
لذلك يكون التابع $\varphi(t)$ متزايداً في المجال $]0, 1[$ ومتناقصاً في المجال
$]1, +\infty[$ ويأخذ قيمة أعظمية عندما $t = 1$ لذلك يكون $\varphi(t) \leq \varphi(1)$
ومن أجل جميع قيم $0 < t$ أي أن

$$t^m - mt \leq 1 - m \Rightarrow t^m - 1 \leq m(t - 1)$$

لنضع $t = \frac{a}{b}$ عندئذ تأخذ المتراجحة الأخيرة الشكل
$\frac{a^m}{b^m} - 1 \leq m\left(\frac{a}{b} - 1\right)$ وبالضرب بـ b نجد $a^m \cdot b^{1-m} \leq ma + (1-m)b$
وبما أن $m = \frac{1}{p} \Leftarrow 1 - m = \frac{1}{q}$ وبالتعويض في العلاقة السابقة نحصل على

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

برهان صحة متراجحة هولدر:

$$\left|\int_E fg \, d\mu\right| \leq \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int_E |g|^q d\mu\right)^{1/q}$$

ليكن لدينا $f \in L^p$ و $g \in L^q$ تابعين كيفيين ولنفرض أولاً أن كلاً من
التكاملين $I_1 = \int_E |f|^p d\mu$ و $I_2 = \int_E |g|^q d\mu$
أكبر من الصفر ولنضع في المتراجحة

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

$$a = \frac{1}{I_1} |f(x)|^p \quad , \quad b = \frac{1}{I_2} |g(x)|^q$$

عندئذ من المتراجحة $a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$ ينتج أن

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq I_1^{1/p} \cdot I_2^{1/q} \left\{ \frac{|f(x)|^p}{p I_1} + \frac{|g(x)|^q}{q I_2} \right\}$$

وبما أن الطرف الأيمن تابع جمعي على المجموعة E فإنه استناداً إلى خواص التوابع
يكون الجداء $f \cdot g$ أيضاً تابعاً جمعياً وفقاً لذلك نجد أن:

$$\left|\int_E f.g\, d\mu\right| \leqslant I_1^{1/p}.I_2^{1/q}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) = I_1^{1/p}.I_2^{1/q}$$

وهذه المتراجحة تتحقق أيضاً في الحالة التي يكون فيها أحد التكاملين I_1 أو I_2 معدوماً وذلك لأنه في هذه الحالة يكون f أو g مكافئاً للصفر

بذلك نجد أنه من أجل أي تابعين $f \in L^p$ و $g \in L^q$ يكون الجداء $f.g$ تابعاً جمعياً وتتحقق المتراجحة.

نلاحظ أنه انطلاقاً من متراجحة هولدر من أجل $p=q=2$ نحصل على متراجحة بونياكوفسكي بالشكل

$$\left(\int_E f.g\, d\mu\right)^2 \leqslant \left(\int_E f^2 d\mu\right).\left(\int_E g^2 d\mu\right)$$

برهان على صحة متراجحة منكوفسكي

$$\left(\int_E |f+g|^p d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_E |g|^p d\mu\right)^{1/p}$$

ليكن f و g تابعين كيفيين من L^p ولنضع

$$I_1 = \int_E |f|^p d\mu \quad , \quad I_2 = \int_E |g|^p d\mu \quad , \quad I = \int_E |f+g|^p d\mu$$

ولنبرهن على أن

$$I^{1/p} \leqslant I_1^{1/p} + I_2^{1/p}$$

في الحالة التي يكون فيها $I=0$ فإن المتراجحة السابقة تكون تافهة لذلك سنفرض أن $I \neq 0$ ولنفرض أن q هو العدد المرافق مع p. بما أن التابع $|f+g|^p$ جمعي فإن التابع $|f+g|^{p/q} \in L^q$ ونلاحظ أن: $\frac{p}{q} = p-1$

وبالتالي فإن:

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant (|f(x)|+|g(x)|)|f(x)+g(x)|^{p-1} \quad *$$

بتطبيق متراجحة هولدر على الجداء $|f|.|f+g|^{p-1}$ وبالأخذ بعين الاعتبار أن $(p-1)q=p$ نجد

$$\int_E |f|.|f+g|^{p-1} d\mu \leqslant I_1^{1/p}.I^{1/q}$$

وبالمثل أيضاً

$$\int_E |g|.|f+g|^{p-1} d\mu \leqslant I_2^{1/p}.I^{1/q}$$

عندئذٍ من $*$ ينتج أن

$$I \leqslant (I_1^{1/p} + I_2^{1/p})\, I^{1/q}$$

وهذا بدوره يؤدي إلى المتراجحة

$$I^{1/p} \leqslant I_1^{1/p} + I_2^{1/p}$$

هكذا من أجل أي تابعين $f, g \in L^p$ تتحقق المتراجحة.

برهن على صحة متراجحة هولدر من أجل الجاميع

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i||\eta_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q\right)^{1/q}$$

لتكن X مجموعة متتاليات الأعداد الحقيقية $x = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots\}$ والتي من أجلها $\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i|^p < \infty$ وإلى جانب هذا الفضاء ندرس الفضاء L^q حيث $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ وهو مجموعة المتتاليات العددية $y = \{\eta_1, \dots, \eta_n, \dots\}$ والتي من أجلها $\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q < \infty$

الآن نعوض a, b في المتراجحة $a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$

نجد:

$$a = \frac{|\varepsilon_i|^p}{\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i|^p}, \quad b = \frac{|\eta_i|^q}{\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q}$$

نجد

$$\frac{|\varepsilon_i| \cdot |\eta_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{|\varepsilon_i|^p}{p \sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i|^p} + \frac{|\eta_i|^q}{q \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q}$$

وبالجمع على i نأخذ تتحقق المتراجحة.

من متراجحة هولدر من أجل الجاميع وهي الحالة الخاصة التي يكون فيها $p = q = 2$ نحصل على متراجحة بونيا كوفسكي من أجل الجاميع

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i| \cdot |\eta_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^2\right)^{1/2}$$

برهن على صحة متراجحة مينكوفسكي من أجل الجاميع

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i + z_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^q\right)^{1/q}$$

لتكن $x = \{\varepsilon_i\}$ من L^p وكذلك $y = \{z_i\}$

نلاحظ أنه إذا كان $Z = \{\varepsilon_i\} \in L^p$ فإن $Z_1 = \{|\varepsilon_i|^{p-1}\} \in L^p$

لنستعرض $\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i + z_i|^p$

وبتطبيق متراجحة هولدر مرتين على المتتاليات

$$\{|\varepsilon_i + z_i|^{p-1}\} \in L^p, \quad \{\varepsilon_i\} \in L^p, \quad \{z_i\} \in L^p$$

نجد

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i + z_i|^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i + z_i|^{p-1} |\varepsilon_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i + z_i|^{p-1} |z_i|\right)$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i + z_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^p\right)^{1/p} \right]$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i + z_i|^p\right)^{1/q} \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^p\right)^{1/p} \right]$$

وبقسمة الطرفين على

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i + z_i|^p\right)^{1/q}$$

وبملاحظة أن $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$

نحصل على المطلوب.

برهن صحة العلاقة العددية.

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

للبرهان سنفرض أولاً أن a و b من إشارة واحدة ويمكننا أن نعتبر أن $a>0$ ، $b>0$ عندئذ

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} = \frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$$

أما إذا كان a و b من إشارتين مختلفتين وفي هذه الحالة تتحقق المتراجحة لنفرض الآن أن $|a| \geqslant |b|$ عندئذ يكون $|a+b| \leqslant |a|$

لنفترض التابع $f(x) = \frac{x}{1+x}$ فنجد $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$

أي أن $f(x)$ متزايد وهذا يعني أن

$$f(|a+b|) < f(|a|)$$

وبالتالي فإن

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

انتهت المحاضرة الثانية

أمثلة من الفضاءات المترية والتقارب فيها.

١- المحور الحقيقي:

لتكن $X = \mathbb{R}$ حيث إن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية إذا كان $x, y \in \mathbb{R}$

فنضع $d(x,y) = |x-y|$ إن موضوعات المسافة واضحة.

كما أن التقارب في هذا الفضاء هو التقارب العادي المعروف بالنسبة للمتتاليات العددية.

٢- الفضاء الاقليدي: دورة

لتكن $X = E_n$ الفضاء العددي ذي الـ n بعد حيث كل عنصر منه هو مجموعة مرتبة من الأعداد الحقيقية إذا كان $x = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n\}$ ، $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$

ولنضع $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i - \eta_n)^2\right)^{1/2}$

بسهولة يمكن التأكد من موضوعات المسافة.

لتكن $z = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n\}$

$$d(x,z) = \left(\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i - \varepsilon_i)^2\right)^{1/2}$$
$$= \left[\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i - \eta_i + \eta_i - \varepsilon_i)^2\right]^{1/2}$$
$$\leq \left[\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i - \eta_i)^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{i=1}^{n}(\eta_i - \varepsilon_i)^2\right]^{1/2}$$
$$\Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

لتكن $x_k = \{\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \ldots, \varepsilon_n^{(k)}\}$ حيث $k = 1, 2, \ldots$

$$d(x_k, x) \to 0 \quad \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i^{(k)} - \varepsilon_i)^2} \to 0\right) \text{ for } k \to \infty$$

وهذا مكافئ للشرط $\varepsilon_i^{(k)} \to \varepsilon_i$ مع $i = 1, 2, \ldots n$ ومن أجل $k \to \infty$

بذلك نجد أن التقارب في هذا الفضاء هو تقارب بالاحداثيات.

٣- فضاء التوابع المستمرة ذو المسافة التشيبيشيفية دورة

لتكن $X = C[0,1]$ مجموعة جميع التوابع المستمرة والمعرفة على المجال $[0,1]$ و

لنعرف مسافة على هذه المجموعة بالعلاقة:

$$d(x,y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$$

لنتأكد من موضوعات المسافة.

$$d(x,z) = |x(t) - z(t)| = |[x(t) - y(t)] + [y(t) - z(t)]|$$
$$\leq |x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)|$$
$$\leq \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |y(t) - z(t)|$$

$$\Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

لنستعرض التقارب في الفضاء $C[0,1]$

لتكن $\{x_n\}$ متتالية من عناصر الفضاء $C[0,1]$ متقاربة إلى العنصر x

$$d(x_n,x) \longrightarrow 0 \quad n \longrightarrow \infty$$

هذا يعني أن $\max|x_n(t) - x(t)| \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty$

أي أنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $n_0(\varepsilon)$ بحيث

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$$

من أجل $n \geq n_0(\varepsilon)$ وبالتالي فإن $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$

من أجل $n \geq n_0(\varepsilon)$ ومن أجل جميع $t \in [0,1]$.

إن هذا يعني أن المتتالية $\{x_n(t)\}$ تتقارب بانتظام إلى $x(t)$

بسهولة يمكن التأكد من العكس أي أنه إذا كانت المتتالية $\{x_n(t)\}$ متقاربة بانتظام إلى $x(t)$ فإن $d(x_n,x) \longrightarrow 0$

٤- فضاء التوابع الحقيقية المحدودة

لنستعرض مجموعة جميع التوابع المحدودة $x(t)$ للمتحول الحقيقي t والمعرفة على المجال $[0,1]$ لنعرف مسافة على هذه المجموعة بالعلاقة

$$d(x,y) = \sup_t |x(t) - y(t)|$$

بسهولة يمكن التأكد من أن جميع موضوعات المسافة محققة ويرمز لفضاء التوابع الحقيقية المحدودة مقروناً بالمسافة المعرفة $M[0,1]$ وبسهولة نجد أن التقارب في هذا الفضاء هو تقارب بانتظام كما أن $M[0,1] \supset C[0,1]$

إذا كانت التوابع مستمرة فإن $\sup$ تخلف الـ $\max$

٥- فضاء المتتاليات العددية المحدودة: دورة.

لتكن X مجموعة جميع المتتاليات العددية المحدودة

$$x = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots\}$$

هذا يعني أنه من أجل كل عنصر x يوجد ثابت K_x وبحيث إن $|\varepsilon_i| \leq K_x$ من أجل جميع الأعداد i.

لتكن $x = \{\varepsilon_i\}$ ، $y = \{\eta_i\}$ من المجموعة X ولنعرف المسافة على X بالعلاقة

$$d(x,y) = \sup_i |\varepsilon_i - \eta_i|$$

من الواضح أنه يكفينا التأكد من تحقق موضوعة المثلث.
أياً كانت العناصر $x=\{\xi_i\},\ y=\{\eta_i\},\ z=\{\xi_i\}$
من X لدينا

$$|\xi_i-\xi_i| \leq |\xi_i-\eta_i|+|\eta_i-\xi_i|$$
$$\leq \sup|\xi_i-\eta_i|+\sup|\eta_i-\xi_i|$$
$$\leq d(x,y)+d(y,z)$$

وبالتالي فإن:

$$\sup_i|\xi_i-\xi_i|=d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$$

يسمى الفضاء الناتج بفضاء المتتاليات العددية المحدودة ويرمز له عادة بـ m.
لتكن x_n, x عناصر من m، $x=\{\xi_i\}$ و $x_n=\{\xi_i^{(n)}\}$
ولنفرض أن المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة إلى x أي أن
$d(x_n,x)\to 0$ عندما $n\to\infty$
هذا يعني أنه من أجل أي عدد موجب $\varepsilon>0$ يوجد عدد طبيعي $n_0=n_0(\varepsilon)$ بحيث أن

$$d(x_n,x)=\sup_i|\xi_i^{(n)}-\xi_i|<\varepsilon \quad ; \quad n\geq n_0(\varepsilon)$$

ومنه فإن

$$|\xi_i^{(n)}-\xi_i|<\varepsilon \quad ; \quad n\geq n_0(\varepsilon)\ ,\ \forall i$$

بسهولة نرى أنه وبالعكس إذا كان $|\xi_i^{(n)}-\xi_i|<\varepsilon$ من أجل $n\geq n_0(\varepsilon)$
وجميع i فإن $d(x_n,x)\to 0$ عندما $n\to\infty$
وبالتالي فإن التقارب في m هو تقارب بالاحداثيات ومنتظم بالنسبة لدليل الاحداثيات.
٦- فضاء جميع المتتاليات العددية.
لتكن X مجموعة جميع المتتاليات العددية الحقيقية لنعرف في هذه المجموعة مفهوم الانتقال إلى النهاية بفرض أن $x_n=\{\xi_i^{(n)}\}$ تتقارب إلى $x=\{\xi_i\}$
إذا كان $\xi_i^{(n)}\to\xi_i$ من أجل جميع $i=1,2,\ldots$
عندئذ نحصل على فضاء غير متري والذي نرمز له بـ S. ولنبين أنه يمكن تمتير الفضاء S.
لتكن $x=\{\xi_i\}\in S$ ، $y=\{\eta_i\}\in S$
ولنضع

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}$$

بسهولة يمكن التأكد من موضوعات المسافة محققة ولنتأكد من موضوعة المثلث

$$d(x,z)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|\xi_i-\zeta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|\xi_i-\eta_i+\eta_i-\zeta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i+\eta_i-\zeta_i|}$$

$$\leq\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|\eta_i-\zeta_i|}{1+|\eta_i-\zeta_i|}$$

$$=d(x,y)+d(y,z)$$

لنبين أن التقارب بمفهوم المسافة المعرفة هو تقارب بالإحداثيات « إلا أنه ليس متقارب بانتظام في الحالة العامة ».

في الحقيقة لتكن $x=\{\xi_i\}$ ، $x_n=\{\xi_i^{(n)}\}$ ، $x_n\to x$

هذا يعني أن
$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}<\varepsilon$$

من أجل $n\geq n_0$ و ε ثابت كيفي هذا يعني أن $|\xi_i^{(n)}-\xi_i|\to 0$ عندما $n\to\infty$

لنفرض العكس $|\xi_i^{(n)}-\xi_i|\to 0$ ، $n\to\infty$

من أجل كل عدد i. لنأخذ عدداً ε كيفياً موجباً $(\varepsilon>0)$ ولنختر أولاً عدد m

بحيث $\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}$ عندئذ يكون

$$d(x_n,x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}+\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}$$

$$<\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}+\frac{\varepsilon}{2}$$

وبما أن عدد الحدود في المجموع المتبقي منته وثابت فإنه يمكننا اختيار $n_0(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}<\frac{\varepsilon}{2}$$

ومن أجل $n \geq n_0(\varepsilon)$ وعندئذ من أجل $n \geq n_0(\varepsilon)$ يكون لدينا

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

وهو المطلوب.

مما برهناه ينتج أن التقارب بمفهوم المسافة يتطابق مع التقارب السابق المعرف في الفضاء S وبالتالي فإن تعريف المسافة هذه يؤدي إلى تمتر الفضاء S

انتهت المحاضرة الثالثة

<5>

٧- فضاء التوابع المحدودة والقابلة للقياس:

لتكن X مجموعة جميع التوابع القيوسة على المجال $[0,1]$ ولتكن $x(t), y(t), z(t)$ والتي قيمها العظمى الأساسية محدودة. لنعتبر أن التابعين $x(t), y(t) \in X$ متطابقان إذا كانا متساويان تقريباً في كل مكان. لنعرف المسافة بين أي تابعين $x(t)$ ، $y(t)$ بالعلاقة:

$$d(x,y) = \underset{[0,1]}{\text{Vrai max}} |x(t) - y(t)|$$

لنتأكد من موضوعات المسافة.

1) بما أن $|x(t) - y(t)| \geq 0$ فإن $\sup\limits_{[0,1]\setminus E} |x(t) - y(t)| \geq 0$ وإضافة إلى ذلك فإنه من الواضح أن $d(x,y) = 0$ إذا كان $x(t) = y(t)$ تقريباً في كل مكان.

بالعكس إذا كان $d(x,y) = 0$ فإنه من أجل أية مجموعة ذات قياس معدوم مثل E_{xy} يكون $\sup\limits_{[0,1]\setminus E_{xy}} |x(t) - y(t)| = 0$

أي أن $x(t) = y(t)$ خارج المجموعة E_{xy} وبالتالي فإن $x(t) = y(t)$ تقريباً في كل مكان.

2) $d(x,y) = d(y,x)$ وضوحاً.

3) لتكن $x(t), y(t), z(t)$ توابع من المجموعة X ولتكن E_{xz}, E_{yz} مجموعتين قياس كل منهما معدوم وبحيث أن

$$d(x,z) = \sup_{[0,1]\setminus E_{xz}} |x(t) - z(t)|$$

$$d(y,z) = \sup_{[0,1]\setminus E_{yz}} |y(t) - z(t)|$$

لنضع $E_{xy} = E_{xz} \cup E_{yz}$ عندئذ يكون

$$\sup_{[0,1]\setminus E_{xy}} |x(t) - y(t)| \leq \sup_{[0,1]\setminus E_{xy}} |x(t) - z(t)| + \sup_{[0,1]\setminus E_{xy}} |z(t) - y(t)|$$

$$\leq \sup_{[0,1]\setminus E_{xz}} |x(t) - z(t)| + \sup_{[0,1]\setminus E_{yz}} |z(t) - y(t)|$$

$$= d(x,z) + d(z,y)$$

أكثر من ذلك فإن

$$d(x,y) = \underset{[0,1]}{\text{Vrai max}} |x(t) - y(t)|$$
$$\leq d(x,z) + d(z,y)$$

وهو المطلوب.

يرمز عادةً لفضاء التوابع المحدودة والقابلة للقياس على المجال $[0,1]$ بـ $\tilde{M}[0,1]$

لنبين طبيعة التقارب في هذا الفضاء:

لتكن $x(t), x_n(t)$ توابع من الفضاء $\tilde{M}[0,1]$ ولتكن $d(x_n,x) \to 0$ عندما $n \to \infty$ إن ذلك يعني أنه من أجل $0 < \varepsilon_K$ معطى يكون:

$$d(x_n,x) = \min_E \{ \sup_{[0,1]\setminus E} |x_n(t) - x(t)| \} < \varepsilon_K$$

من أجل $n_0(\varepsilon_K) \leq n$ عندئذ توجد مجموعة مثل E_K وقياسها معدوم وبحيث أن
$$\sup_{[0,1]\setminus E_K} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon_K$$

من أجل $n_0(\varepsilon_K) \leq n$

ولذلك فإن $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon_K$ من أجل $n_0(\varepsilon_K) \leq n$:

من أجل أية نقطة $t \in [0,1]\setminus E_K$.

لنأخذ الآن متتالية $\{\varepsilon_m\}$ حيث أن $\varepsilon_m \to 0$ عندما $m \to \infty$

ولتكن E_m المجموعات الموافقة للمتتالية المذكورة ولتكن $\varepsilon > 0$ كيفياً عندئذ يكون لدينا
$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon_K < \varepsilon$$

من أجل $n_0(\varepsilon_K) \leq n$ وجميع $t \in \left([0,1] \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m \right)$

بذلك نجد أن $x_n(t) \to x(t)$ تقريباً في كل مكان على المجال $[0,1]$ وبانتظام على المجموعة ذات القياس التام المشار إليها.

بالعكس: لتكن المتتالية $\{x_n(t)\}$ متقاربة بانتظام تقريباً في كل مكان إلى $x(t)$ وبالتالي فإنه من أجل أي $\varepsilon > 0$ يوجد $n_0(\varepsilon)$ ومجموعة E_ε قياسها معدوم وبحيث أن $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$ من أجل $n_0(\varepsilon) \leq n$ وأية نقطة $t \in [0,1]\setminus E_\varepsilon$

وعندئذ يكون

$$\sup_{t\in[0,1]\setminus E_\varepsilon}|x_n(t)-x(t)|\leqslant \varepsilon$$

من أجل $n_0(\varepsilon)\leqslant n$ ومن هذا ينتج بدوره أن

$$\min_E\{\sup_{t\in[0,1]\setminus E}|x_n(t)-x(t)|\}\leqslant \varepsilon$$

من أجل $n_0(\varepsilon)\leqslant n$ ومن هذا ينتج بدوره أن

$$\min_E\{\sup_{t\in[0,1]\setminus E}|x_n(t)-x(t)|\}\leqslant \varepsilon$$

من أجل $n_0(\varepsilon)\leqslant n$ أي أن $d(x_n,x)\to 0$ عندما $n\to\infty$

وبالتالي فإن التقارب في الفضاء $\tilde{M}[0,1]$ هو تقارب بانتظام تقريباً في كل مكان.

٨- فضاء التقارب بالقياس:

لتكن X مجموعة جميع التوابع $x(t)$ القيوسة والمعرفة على المجال $[0,1]$ ولنعتبر أن التابعين المتساويين تقريباً في كل مكان متطابقان. لنعرف مسافة بالمساواة

$$d(x,y)=\int_0^1\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\,dt$$

يمكننا التأكد من موضوعات المسافة.

بالنسبة لمتراجحة المثلث.

$$d(x,y)=\int_0^1\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\,dt$$

$$=\int_0^1\frac{|x(t)-z(t)+z(t)-y(t)|}{1+|x(t)-z(t)+z(t)-y(t)|}$$

وبالاستفادة من المتراجحة،

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

$$\leqslant\int_0^1\frac{|x(t)-z(t)|}{1+|x(t)-z(t)|}+\int_0^1\frac{|z(t)-y(t)|}{1+|z(t)-y(t)|}$$

$$\leqslant d(x,z)+d(z,y)$$

وبذلك يكون قدتم المطلوب

نرمز للفضاء الناتج ب $S[0,1]$ ويمكن البرهان على أن التقارب في $S[0,1]$ هو تقارب بالقياس.

٩- فضاء التوابع القابلة للمكاملة من الدرجة P.

لتكن X مجموعة جميع التوابع $x(t)$ المنتمية لـ $L^P[0,1]$ إذا كان $x(t) \in L^P[0,1]$ و $y(t) \in L^P[0,1]$ فإننا نضع

$$d(x,y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^P dt\right)^{1/P}$$

بسهولة يمكن التحقق من صحة موضوعات المسافة أما موضوعة المثلث فتنتج من متراجحة مينكوفسكي من أجل التكاملات. نسمي $L^2[0,1]$ بفضاء هيلبرت التابعي

لتكن المتتالية $\{x_n(t)\} \in L^P[0,1]$ متقاربة إلى التابع $x(t) \in L^P[0,1]$

أي أن $\int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^P dt \to 0$ عندما $n \to \infty$ عندئذ نقول إن $\{x_n(t)\}$ تتقارب وسطياً من الدرجة P إلى التابع $x(t)$ في الحالة $P = 2$ نقول ببساطة تتقارب وسطياً.

١٠- فضاء المتتاليات العددية L_P $(P \geq 1)$.

لتكن X مجموعة جميع المتتاليات العددية الحقيقية و $L_P \ni x = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots\}$

إذا كانت $x = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots\}$ ، $L_P \ni y = \{\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots\}$

فإننا نعرف المسافة بالعلاقة.

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varepsilon_i - \eta_i|^P\right)^{1/P}$$

بسهولة يمكن التأكد من موضوعات المسافة أما موضوعة المثلث فتنبع من متراجحة مينكوفسكي للمجاميع نسمي الفضاء L_2 بفضاء هيلبرت الاحداثي.

يمكن البرهان على أن تقارب المتتالية $x_n = \{\varepsilon_i^{(n)}\}$ إلى العنصر $x = \{\varepsilon_i\}$ في الفضاء L_P يعني أن:

1) $\varepsilon_i^{(n)} \to \varepsilon_i$ من أجل $n \to \infty$ من أجل جميع i.

2) من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد مثل $N_0(\varepsilon)$ بحيث إن

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |\varepsilon_i^{(n)}|^P < \varepsilon^P \quad , \forall N > N_0(\varepsilon), \ \forall n$$

انتهت المحاضرة الرابعة

الفضاءات المترية التامة:

في التحليل الرياضي يعتبر الدور الذي يلعبه اختبار التقارب لكوشي في مجموعة الأعداد الحقيقية هو الدور الأهم لكونه اختباراً لازماً وكافياً. وهذا الاختبار يمكن نقله كلياً إلى الفضاء الاقليدي ذي الـ n البعد E_n

نظرية:

الشرط اللازم والكافي كي توجد نهاية محدودة لمتتالية النقاط $\{x_m\}$ من E_n هو أن يكون $d(x_m, x_k) \to 0$ عندما $m, k \to \infty$

البرهان:

كفاية الشرط: في الواقع لتكن $x_m = \{\varepsilon_1^{(m)}, \dots, \varepsilon_n^{(m)}\}$ ، ولتكن $x_k = \{\varepsilon_1^{(k)}, \dots, \varepsilon_n^{(k)}\}$ عندما $d(x_m, x_k) \to 0$ عندما $m, k \to \infty$ من هنا

ينتج أن $\varepsilon_i^{(m)} - \varepsilon_i^{(k)} \to 0$ من أجل كل عدد i.

لذلك واعتماداً على اختبار كوشي لوجود نهاية محدودة للمتتالية العددية، فإن $\varepsilon_i = \lim\limits_m \varepsilon_i^{(m)}$ وعندئذ فإن $x_m \to x = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$

لزوم الشرط:

لنفرض الآن أن $\{x_k\}$ متتالية متقاربة إلى x_0 يعني

$$d(x_k, x_0) \to 0 ,\ k \to \infty$$

سوف نبرهن أن هذه المتتالية تحقق اختبار كوشي للفضاء E_n.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \quad , \forall k > k_0$$

يكون $\quad d(x_k, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k > k_0$

وبالتالي يكون $\quad d(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall m > n_0(\varepsilon)$

باستخدام متراجحة المثلث

$$\begin{aligned} d(x_k, x_m) &\leq d(x_k, x_0) + d(x_0, x_m) \\ &\leq d(x_k, x_0) + d(x_m, x_0) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

تكون هذه العلاقة محققة عندما $k, m > n_0(\varepsilon)$ وهو المطلوب.

مثال:

لتكن X مجموعة من الأعداد العادية ولتكن المسافة بين r_1, r_2 معرفة بالعلاقة $d(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$ عندئذ بسهولة يمكن التأكد من أن X فضاء متري

لنأخذ المتتالية $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{4}, \dots, r_n = \frac{1}{2^n}, \dots$

إن هذه المتتالية تتقارب في نفسها، كما أنها متقاربة إلى $r_0 = 0$ لنأخذ الآن

المتتالية $r_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ هذه المتتالية متقاربة في نفسها إلا أنه

لا توجد لها نهاية في الفضاء X وذلك لأن $\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

والعدد e ليس عادياً.

تعريف:

إذا كانت كل متتالية متقاربة في نفسها في الفضاء المتري X متقاربة إلى نقطة من الفضاء فإن الفضاء X يسمى فضاء تام.

المجموعة المغلقة في فضاء تام هي بحد ذاتها فضاء تام.

الفضاء $C[0,1]$

لتكن $\{x_n(t)\}$ متتالية من الفضاء $C[0,1]$ ولنفرض أن:

$$d(x_n, x_m) \to 0 , \quad n, m \to \infty$$

هذا يعني أنه من أجل المتتالية $\{x_n(t)\}$ تتحقق شرط كوشي للتقارب المنتظم على المجال $[0,1]$ لنفرض أن $x_0(t)$ هو نهاية المتتالية $\{x_n(t)\}$ بما أن نهاية متتالية من التوابع المستمرة والمتقاربة بانتظام هو تابع مستمر على المجال $[0,1]$ فإن $x_0(t) \in C[0,1]$ و $d(x_n, x_0) \to 0$ وبالتالي فإن $C[0,1]$ تام بمفهوم المسافة التشيبيشيفية.

الفضاء m (فضاء المتتاليات المحدودة)

لتكن $\{x_n\}$ متتالية من عناصر الفضاء m ومتقاربة في نفسها فإن مقابل كل عدد $\varepsilon > 0$ معطى يوجد عدد مثل $n_0(\varepsilon)$ بحيث إن المتراجحة $d(x_n, x_k) < \varepsilon$ تتحقق من أجل جميع $n, k \geq n_0(\varepsilon)$ أي أن

$$\sup_i |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(k)}| < \varepsilon$$

من ذلك ينتج أن

$$\sup |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(k)}| < \varepsilon$$

من أجل $n, k \geq n_0(\varepsilon)$ بانتظام بالنسبة لـ i. لنثبت i عندئذ استناداً للعلاقة $\sup |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(k)}| < \varepsilon$

تتحقق المتتالية $\{\xi_i^{(1)}, \dots, \xi_i^{(n)}, \dots\}$ شرط كوشي في وجود النهاية وبالتالي فإنها تتقارب إلى العدد ξ_i وبذلك نحصل على متتالية الأعداد

$$\{\xi_1, \dots, \xi_n, \dots\}$$

لنجعل الآن K في العلاقة $*$ تسعى إلى اللانهاية عندئذ نجد أن المتراجحة

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i| \leq \varepsilon$$

تتحقق من أجل $n \geq n_0(\varepsilon)$ ومن أجل جميع i ومنه نجد أن

$$|\xi_i| \leq |\xi_i^{(n_0)} - \xi_i| + |\xi_i^{(n_0)}| \leq \varepsilon + K_{n_0}$$

إضافة إلى أن المتراجحة تتحقق من أجل جميع i، وهذا يعني أن $\{\xi_i\}$ متتالية محدودة أي أن $x_0 = \{\xi_i\} \in m$ ومن $|\xi_i^{(n)} - \xi_i| \leq \varepsilon$ نجد

$$\sup |\xi_i^{(n)} - \xi_i| \leq \varepsilon$$

أي أن $d(x_n, x_0)$ من أجل $n \geq n_0(\varepsilon)$ وبما أن $\varepsilon > 0$ كيفي فإننا من ذلك ينتج أن $x_n \to x_0$ عندما $n \to \infty$ وهذا ما يبرهن على أن الفضاء m تام.

الفضاء c (فضاء المتتاليات المتقاربة).

لنبين أن الفضاء c المستعرض مجموعة جزئية من m هو مجموعة مغلقة في m واستناداً إلى ما ذكرنا في الفضاء m يكون c تاماً.

لتكن $\{x_n\}$ حيث $x_n = \{\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_i^{(n)}, \ldots\}$ متتالية من عناصر الفضاء c

لنفرض أن $x_n \to x_0$ حيث $x_0 = \{\xi_1^{(0)}, \ldots, \xi_i^{(0)}, \ldots\}$

ولنبرهن على أن $\{\xi_i^{(0)}\}$ متتالية متقاربة.

في الحقيقة

$$|\xi_i^{(0)} - \xi_j^{(0)}| \leq |\xi_i^{(0)} - \xi_i^{(n)}| + |\xi_i^{(n)} - \xi_j^{(n)}| + |\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(0)}|$$
$$\leq 2d(x_n, x_0) + |\xi_i^{(n)} - \xi_j^{(n)}|$$

ليكن $\varepsilon > 0$ عدداً معطى ولنختر أولاً n كبيرة بقدر كاف وبحيث يكون $d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{4}$ ولنثبت ذلك العدد n. بما أن $\{\xi_i^{(n)}\}$ متتالية متقاربة فإنه يوجد عدد مثل n_0 بحيث إنه من أجل $i, j \geq n_0$ يكون $|\xi_i^{(n)} - \xi_j^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{2}$

عندئذ يكون $|\xi_i^{(0)} - \xi_j^{(0)}| < \varepsilon$ من أجل $i, j \geq n_0$ أي أن $\{\xi_i^{(0)}\}$ متتالية متقاربة وهكذا فإن $x_0 \in C$ وهو المطلوب.

إن فضاء التوابع المستمرة $C[0,1]$ بالنسبة للمسافة

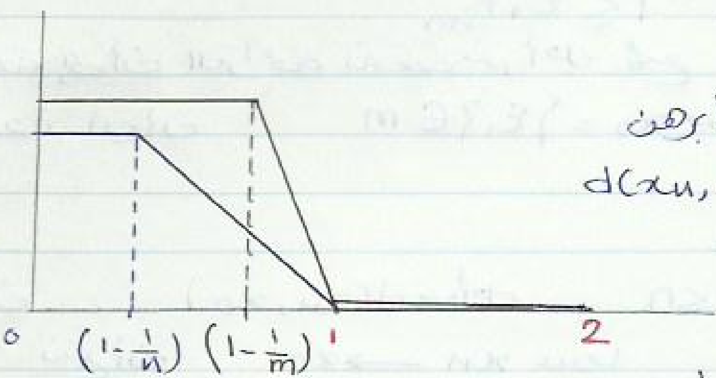
$$d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\,dt$$

هو فضاء غير تام

مثال: برهن أنه غير تام بالنسبة للمسافة

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \leq t \leq 1-\frac{1}{n} \\ n(1-t) & ; \quad 1-\frac{1}{n} \leq t \leq 1 \\ 0 & ; \quad 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

لنرسم الخط البياني



نفرض $m > n$ عندئذ سوف أبرهن

$d(x_n, x_m) \longrightarrow 0 \qquad n,m \longrightarrow \infty$

لنحسب $|x_n - x_m|$

$$\int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)|\,dt = \int_0^{1-\frac{1}{n}} 0 + \int_{1-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{m}} [1-m(1-t)]\,dt$$

$$+ \int_{1-\frac{1}{m}}^{1} [m(1-t) - n(1-t)]\,dt + \int_1^2 0 = \frac{m-n}{2nm} < \frac{m}{2mn} = \frac{1}{2n}$$

لنفرض أن هذه المتتالية متقاربة إلى $x(t)$ نجد

$$d(x_n, x) = \int_0^2 |x_n(t) - x(t)|\,dt$$

$$= \int_0^{1-\frac{1}{n}} |1 - x(t)|\,dt + \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} |n(1-t) - x(t)|\,dt$$

$$+ \int_1^2 |x(t)|\,dt$$

جميع التكاملات موجبة وتسعى إلى الصفر فهذا يؤدي إلى أن كل تكامل يسعى إلى الصفر

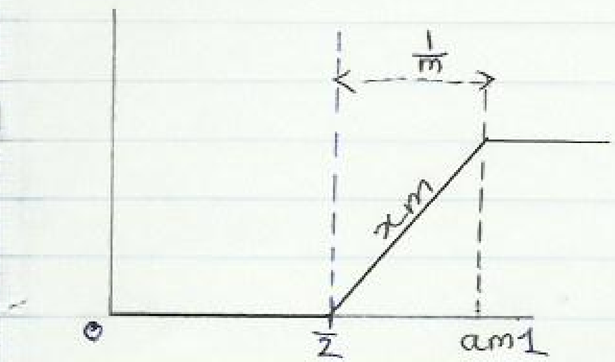
$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

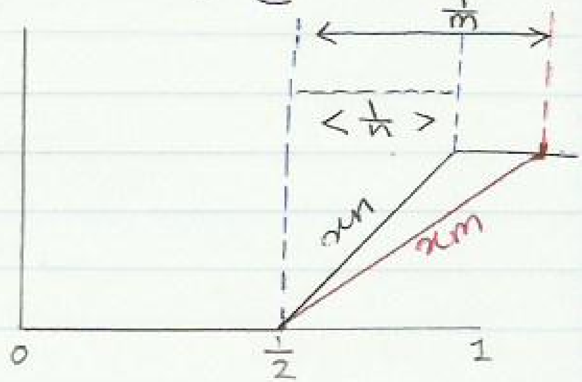
غير مستمر وبالتالي لا ينتمي إلى $C[0,2]$

مثال: لتكن $\{x_m(t)\}$ متتالية من التوابع من هذا الفضاء معرفة بالعلاقة

$$x_m(t) = \begin{cases} 0 & ; \ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ m(t-\frac{1}{2}) & ; \ \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{m} \\ 1 & ; \ \frac{1}{2}+\frac{1}{m} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

إن هذه المتتالية هي متتالية أساسية بمفهوم المسافة أعلاه. في الواقع من أجل أي عدد معطى $\varepsilon > 0$ يكون $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ من أجل $m, n > \frac{1}{\varepsilon}$ وتمثل المسافة في هذه الحالة مساحة المثلث المبين في الشكل.





لنبين أن هذه المتتالية ليست متقاربة إلى تابع من الفضاء $C[0,1]$

لنفرض أن $\{x_m(t)\}$ متقاربة إلى عنصر $x(t)$ من $C[0,1]$

عندئذ يكون

$$d(x_m, x) = \int_0^1 |x_m(t) - x(t)|\,dt$$

$$= \int_0^{1/2} |x(t)|\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} |x_m(t) - x(t)|\,dt + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{1} |1 - x(t)|\,dt$$

وبما أن التوابع المكاملة غير سالبة فإن كلاً من التكاملات في الطرف الأيمن من العلاقة الأخيرة تكون كذلك أي غير سالب وبالتالي فإن العلاقة $d(x_m, x) \to 0$ تقتضي أن تقترب كل من التكاملات إلى الصفر وبما أن $x(t)$ تابع مستمر يجب أن يكون

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

وهذا غير ممكن من أجل تابع مستمر وبالتالي فإن $\{x_m(t)\}$ لا يمكن لها أن تتقارب إلى تابع منتظم إلى $C[0,1]$ وهذا بدوره يؤدي إلى أن الفضاء $C[0,1]$ غير تام بالنسبة للمسافة المعرفة أعلاه.

انتهت المحاضرة الخامسة.

<6>

اتمام الفضاءات المترية:

ليكن X, Y فضائين متريين ولتكن $d_X(x_1, x_2)$ المسافة بين العنصرين x_1, x_2 من الفضاء X و $d_Y(y_1, y_2)$ المسافة بين العنصرين y_1, y_2 من الفضاء Y. إذا وجد تطبيق وحيد القيمة بالتبادل (غامر ومتباين) بين عناصر الفضائين X, Y وحيث تكون المسافة بين كل عنصرين من أحد الفضائين مساوية للمسافة بين صورتيهما في الفضاء الآخر فإننا نقول إن الفضائين X, Y إيزومتريان (متساويا المسافة)

ليكن X_0 فضاءً مترياً معلوماً وغير تام أي إنه في هذا الفضاء توجد متتاليات متقاربة في نفسها (أساسية) إلا أنها لا تملك نهاية في X_0.

لنبين أنه في هذه الحالة يوجد فضاء متري آخر X تام ويحتوي على مجموعة جزئية X' كثيفة في كل مكان في X وإيزومترية مع X_0. نسمي الفضاء X بفضاء الإتمام للفضاء X_0.

$\boxed{1}$ لنستعرض جميع المتتاليات الممكنة $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}, \dots$ المشكلة من عناصر الفضاء X_0 والمتقاربة في نفسها

$\boxed{2}$ لننسب إلى الصف نفسه أية متتاليتين $\{x_n\}$ و $\{x'_n\}$ متقاربتين في نفسيهما والتي من أجلها $d(x_n, x'_n) \to 0$ عندما $n \to \infty$ ولنعتبر هذه الصفوف $\tilde{x}$ عناصر من فضاء جديد X $\boxed{3}$ لنأخذ عنصرين $\tilde{x}$ و $\tilde{y}$ من X ولنأخذ في كل صف من الصفوف $\tilde{x}$ و $\tilde{y}$ متتالية $\{x_n\}$، $\{y_n\}$ ولنبين وجود النهاية $\lim_n d(x_n, y_n)$ في الحقيقة لدينا

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n) \quad *$$

ومنه نجد $\boxed{1}$ $d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n)$

بمبادلة دور كل من n, m نجد

$$d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) \quad \boxed{2}$$

من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ نجد $|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m)$

إن الطرف الأيمن من هذه المتراجحة يسعى إلى الصفر عندما $n, m \to \infty$ لذا فإن المتتالية العددية $\{d(x_n, y_n)\}$ تحقق شرط كوشي وبالتالي تكون النهاية $\lim_n d(x_n, y_n)$ موجودة.

$\boxed{4}$ لنعرف الآن مسافة في X بالعلاقة: $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_n d(x_n, y_n)$

ولنبين أن هذه المسافة المعرفة لا تتعلق باختيارنا للمتتاليتين $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ في الصفين الواقعتين. لنأخذ متتاليتين أخريين $\{x'_n\}$ و $\{y'_n\}$ من نفس الصفين

من نفس الصنفين $\tilde{x}$ و $\tilde{y}$ ، عندئذ يكون

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n)$$

ومنه نجد أن $\lim_n d(x_n, y_n) \leq \lim_n d(x'_n, y'_n)$

وبالمثل نجد العكس $\lim_n d(x'_n, y'_n) \leq \lim_n d(x_n, y_n)$

وبالتالي فإن $\lim_n d(x_n, y_n) = \lim_n d(x'_n, y'_n)$

لنتأكد الآن من تحقق موضوعات المسافة . عبا أن $d(x_n, y_n) \geq 0$ فإن

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_n d(x_n, y_n) \geq 0$$

وبالتالي فإن المساواة $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_n d(x_n, y_n) = 0$ تعني بالفرض أن المتتاليتين $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ تنتميان إلى الصنف نفسه .

وعبا أن $\{x_n\}$ متتالية كيفية من الصنف $\tilde{x}$ و $\{y_n\}$ متتالية كيفية من الصنف $\tilde{y}$ فإن $\tilde{x} = \tilde{y}$. $d(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(\tilde{y}, \tilde{x})$ محققة وضوحاً .

إذا كانت $\{x_n\} \in \tilde{x}$ و $\{y_n\} \in \tilde{y}$ و $\{z_n\} \in \tilde{z}$ فإنه من الواضح أن

$$d(\tilde{x}, \tilde{z}) = \lim_n d(x_n, z_n) \leq \lim_n d(x_n, y_n) + \lim_n d(y_n, z_n)$$
$$= d(\tilde{x}, \tilde{y}) + d(\tilde{y}, \tilde{z})$$

$\boxed{5}$ لنبرهن على أن X فضاء تام . لنأخذ متتالية $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n, \ldots\}$ من العناصر من X ومتقاربة في نفسها . أي أن $d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_m) \to 0$ ، $n, m \to \infty$

في كل صنف $\tilde{x}_n$ نأخذ متتالية ما $\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_K^{(n)}, \ldots\}$ وعبا أن هذه المتتالية متقاربة في نفسها فإنه يمكننا اختيار مثل K_n حيث إن

$$d(x_p^{(n)}, x_K^{(n)}) < \frac{1}{n} \quad , \quad p > K_n$$

لنستعرض الآن المتتالية $\{x_{K_1}^{(1)}, x_{K_2}^{(2)}, \ldots, x_{K_n}^{(n)}, \ldots\}$ ولنبين أنها متقاربة في نفسها لدينا

$$d(x_{K_n}^{(n)}, x_{K_m}^{(m)}) \leq d(x_{K_n}^{(n)}, x_p^{(n)}) + d(x_p^{(n)}, x_p^{(m)}) + d(x_p^{(m)}, x_{K_m}^{(m)}) \quad \boxed{3}$$

ليكن $\varepsilon > 0$ عدداً معطى عبا أن $d(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \to 0$ ، $n, m \to \infty$

فإنه يوجد عدد مثل n_0 حيث إنه من أجل $n, m \geq n_0$ يكون

$d(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) = \lim_p (x_p^{(n)}, x_p^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{2}$ لذلك من أجل $n, m \geq n_0$ ومن أجل p كبير بقدر كاف يكون لدينا $d(x_p^{(n)}, x_p^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\boxed{4}$ وفقاً لذلك يمكننا اعتبار n_0 بحيث إن $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{4}$ وباعتبار p كبيراً بتثبيت n, m مع تحقيقهما للشرط $m, n \geq n_0$

وبحيث إن $K_m < p$ ، $K_n < p$ عندئذ وتبعاً لاختيار K_m, K_n نجد

$$d(x_p^{(n)}, x_{K_n}^{(n)}) < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad d(x_p^{(m)}, x_{K_m}^{(m)}) < \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \boxed{5}$$

من $\boxed{3}$ و $\boxed{4}$ و $\boxed{5}$ ينتج أنه من أجل $n, m \geq n_0$ يكون $d(x^{(n)}_{k_n}, x^{(m)}_{k_m}) < \varepsilon$

أي أن المتتالية $\{x^{(n)}_{k_n}\}$ متقاربة في نفسها.

لنرمز للصف الحاوي على المتتالية $\{x^{(n)}_{k_n}\}$ بـ $\tilde{x}$. ولنبين أنه $\tilde{x}_n \longrightarrow \tilde{x}$

وضوحاً لدينا

$$d(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = \lim_{n} d(x^{(n)}_p, x^{(p)}_{k_p})$$
$$\leq \lim_{p} d(x^{(n)}_p, x^{(n)}_{k_n}) + \lim d(x^{(n)}_{k_n}, x^{(p)}_{k_p})$$
$$< \frac{1}{n} + \lim_{p} d(x^{(n)}_{k_n}, x^{(p)}_{k_p}) \quad \boxed{6}$$

بما أن المتتالية $\{x^{(n)}_{k_n}\}$ متقاربة في نفسها فإنه من أجل $\varepsilon > 0$ معطى

يوجد عدد مثل n_0 بحيث أنه $d(x^{(n)}_{k_n}, x^{(p)}_{k_p}) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\boxed{7}$ من أجل $n \geq n_0$

وفقاً لذلك ودون المس بعمومية المسألة يمكننا اعتبار $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ من $\boxed{6}$ و $\boxed{7}$

ينتج أنه من أجل $n \geq n_0$ يكون $d(\tilde{x}_n, \tilde{x}) < \varepsilon$ أي أن المتتالية $\{\tilde{x}_n\}$

متقاربة إلى العنصر $\tilde{x}$ وبذلك نكون قد برهنا على أن الفضاء X تام.

لنتعرض الآن المتتاليات الوقفية أي المتتاليات من الشكل $\{x, x, \ldots, x, \ldots\}$

والمتقاربة في نفسها وضوحاً وبالتالي فإن كلاً منها تنتمي إلى صف ما والذي بدوره عنصر من X

من الواضح أنه لصف واحد فقط لذلك الصف ينتمي متتالية واحدة فقط توقفية. إذا الآن الآن

$\{x, x, \ldots, x, \ldots\} \in \tilde{x}$ و $\{y, y, \ldots, y, \ldots\} \in \tilde{y}$

فإنه من الواضح أن $d(x, y) = d(\tilde{x}, \tilde{y})$

$\boxed{8}$ لنبين الآن أن X_0 ايزومتري مع فضاء جزئي X'، من الفضاء X وكثيف في كل مكان في X

لننسب إلى X' جميع الصفوف $\tilde{x}$ والتي تضمن المتتاليات التي تنتمي إليها توجد متتالية

توقفية $\{x, x, \ldots, x, \ldots\}$ ولنبين الصفوف $\tilde{x} \in X'$ والعناصر X والتي تعطي

تشكل المتتالية التوقفية المنسوبة إلى $\tilde{x}$ يوجد تقابل وحيد القيمة بالتبادل وإضافة إلى ذلك

إذا كان $\{x\} \in \tilde{x}$ و $\{y\} \in \tilde{y}$ فإن $d(x, y) = d(\tilde{x}, \tilde{y})$ وبالتالي

فإن هذا التقابل بين X_0 و X' هو تقابل ايزومتري (متساوي القياس).

بسهولة نرى أن X' كثيف في كل مكان في X. أي إنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ وأي عنصر

$\tilde{x} \in X$ يوجد عنصر مثل $\tilde{x}_\varepsilon \ni X'$ بحيث إن $d(\tilde{x}, \tilde{x}_\varepsilon) < \varepsilon$ في الواقع ليكن $\tilde{x}$ صفاً

يحوي داخله متتالية متقاربة في نفسها $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ ولنأخذ عدداً مثل n

بحيث يكون $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ من أجل $n < m$ ولنبني المتتالية التوقفية $\{x_n, x_n, \ldots, x_n, \ldots\}$

ولنرمز بـ $\tilde{x}_\varepsilon$ للصف الذي يحتوي على هذه المتتالية.

من الواضح أن $\tilde{x}_\varepsilon \ni X'$ كما أن $d(\tilde{x}, \tilde{x}_\varepsilon) = \lim_{m} d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$

وهو المطلوب.

[٦] لنبين الآن أن فضاء الاتمام لـ X وحيد بغض النظر عن ايزومترية . أي أنه يوجد فقط فضاء واحد X بغض النظر عن ايزومترية (مع فضاء آخر) تام ويحتوي على مجموعة جزئية كثيفة ايزومترية مع X في الحقيقة ليكن Y فضاءً تاماً يحتوي داخله X الكثيف في كل مكان ، عندئذ كل نقطة $\tilde{y} \in Y$ تكون نهاية لمتتالية ما

$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subset X$ وعبا أن هذه المتتالية متقاربة في نفسها فإنها تعرف عنصراً $\tilde{x} \in X$ ولنضع هذا العنصر في تقابل مع العنصر $\tilde{y}$. لنفرض الآن العكس . ليكن العنصر $\tilde{\xi} \in X$ مفضلاً ولتكن $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$ المتتالية الأساسية من الصف $\tilde{\xi}$ بما أن هذه المتتالية الأساسية تعرف في الفضاء التام Y فإنها تعرف عنصراً ما $\tilde{\eta} \in Y$ ولنقابل هذا العنصر بالعنصر $\tilde{\xi}$. بذلك نحصل على تقابل بين عناصر الفضائين X, Y وحيد القيمة وعبا أنه بالإضافة إلى ذلك لدينا

$$d(\tilde{x}, \tilde{\xi}) = \lim_{n} d(x_n, \xi_n) = d(\tilde{y}, \tilde{\eta}) \quad *$$

فإن التقابل هو تقابل ايزومتري .

مثال:

لنأخذ الفضاء l'_p المشكل من جميع الحل الرتيبة $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k_1}, 0, 0, \dots\}$ حيث ξ_i أعداد حقيقية أما k_1 عدد طبيعي إذا كان $y = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{k_2}, 0, 0, \dots\}$,

$x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k_1}, 0, 0, \dots\}$ وكان $k_1 \le k_2$ فإننا نضع

$$d(x, y) = \Big(\sum_{i=1}^{k_1} |\xi_i - \eta_i|^p + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} |\eta_i|^p \Big)^{1/p}$$

إن l'_p فضاء جزئي من l_p كما أنه غير تام ، وذلك لأنه على سبيل المثال المتتالية

$$x_1 = \{1\}, \quad x_2 = \{1, \tfrac{1}{2}\}, \dots, \quad x_n = \{1, \tfrac{1}{2}, \dots, \tfrac{1}{2^{n-1}}\}, \dots$$

متقاربة في نفسها

$$d(x_n, x_m) = \Big(\sum_{i=m}^{n-1} \frac{1}{2^{ip}} \Big)^{1/p} \longrightarrow 0 \quad , \quad m, n \to \infty \quad , \quad m < n$$

إلا أنه لا توجد لها نهاية في l'_p لنرمز بـ X فضاء الاتمام l'_p للفضاء l_p وعبا أنه من ناحية أخرى من الواضح أن l'_p محتوى في l_p وكثيف في كل مكان فيه فإن X ايزومتري مع l_p وبذلك نجد أن فضاء الاتمام l_p يعود إلى فضاء ايزومتري مع l_p .

مثال: ليكن $C_0[0,1]$ فضاء كثيرات الحدود المعرفة على المجال $[0,1]$ ولنفرض أنه في هذا الفضاء متري عرفت المسافة بالعلاقة $d(p, q) = \max |p(t) - q(t)|$

من الواضح أن الفضاء $C_0[0,1]$ غير تام وعبا أن $C_0[0,1]$ محتوى وكثيف في كل مكان في الفضاء $C[0,1]$ فإن فضاء الاتمام للفضاء $C_0[0,1]$ يتحول إلى فضاء ايزومتري مع $C[0,1]$

مثال: لتكن $L'^p[0,1]$ فضاء التوابع المستمرة والمعرفة على المجال $[0,1]$ والمزود بالمسافة

$$d(x,y) = \left(\int_0^1 |x(t)-y(t)|^p \, dt\right)^{1/p}$$

إن $L'^p[0,1]$ فضاء غير تام وذلك لأن متتالية التوابع المستمرة المتقاربة وسطياً بالأس p إلى تابع متقطع هي متتالية أساسية في $L'^p[0,1]$ إلا أنه لا توجد لها نهاية في هذا الفضاء. بإتمام الفضاء $L'^p[0,1]$ نحصل على فضاء ايزومتري مع $L^p[0,1]$

مبرهنات حول الفضاءات التامة.

مبرهنة (1): لتكن X فضاءً مترياً تاماً ولنفرض أنه في هذا الفضاء توجد متتالية من الكرات المغلقة المتوضعة كل منها في الأخرى (أي الكرة التي تلي محتواة داخل الكرة السابقة) والتي أنصاف أقطارها تسعى إلى الصفر، عندئذ توجد نقطة واحدة وواحدة فقط تنتمي إلى جميع هذه الكرات.

البرهان: لتكن الكرات $\bar S(a_1,\varepsilon_1), \bar S(a_2,\varepsilon_2), \dots, \bar S(a_n,\varepsilon_n), \dots$

حسب الفرض لدينا $(\bar S_n = \bar S(a_n,\varepsilon_n))$ ؛ $\bar S_1 \supset \bar S_2 \supset \dots \supset \bar S_n \supset \dots$

ولنستعرض متتالية مراكز هذه الكرات $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

بما أن $\bar S_n \supset S_{n+p}$ فإن $\bar S(a_n,\varepsilon_n) \ni a_{n+p}$ ولذلك فإن

$d(a_{n+p},a_n) \le \varepsilon_n$ وبالتالي فإن: $d(a_{n+p},a_n) \to 0$ عندما $n \to \infty$

أي إن متتالية المراكز متقاربة في نفسها. وبما أن الفضاء X تام فإن هذه المتتالية تتقارب إلى عنصر $a \in X$. لنأخذ كرة ما $\bar S_K$ (K عدد مثبت) عندئذ تكون النقاط $a_K, a_{K+1}, \dots, a_{K+n}, \dots$ منتمية إلى تلك الكرة ونتيجة لكون الكرات $\bar S_K$ مغلقة فإن النهاية a للمتتالية $a_K, a_{K+1}, \dots, a_{K+n}, \dots$ تنتمي أيضاً إلى $\bar S_K$ بذلك يكون $a = \lim_n a_n$ أي أن a تنتمي إلى جميع الكرات.

لنفرض الآن أنه يوجد نقطة أخرى b مختلفة عن a وتنتمي إلى جميع الكرات أي أن $d(a,b) = \delta > 0$ بما أن النقطتين $a, b \in \bar S_n$ مع $n = 1, 2, \dots$ فإنه يكون لدينا

$$\delta = d(a,b) \le d(a,a_n) + d(a_n,b) \le 2\varepsilon_n$$

وهذا غير ممكن وذلك لأن $\varepsilon_n \to 0$ عندما $n \to \infty$

مبرهنة (2):

يكفي إذا كان تقاطع أية متتالية من الكرات المغلقة والمتوضعة واحدة في الأخرى والتي أقطارها تسعى للصفر غير خال في فضاء متري X فإن الفضاء X يكون تاماً.

البرهان:

لتكن $\{x_n\}$ متتالية أساسية. ولنختر n_K بحيث يكون

$$d(x_{n_{K+p}}, x_{n_K}) < \frac{1}{2^K}$$

من أجل أي عدد $0 < p$. لتكن S_K كرة مغلقة نصف قطرها $\frac{1}{2^{K-1}}$ ومركزها في
النقطة x_{n_K} ، في هذه الحالة يكون لدينا: $\overline{S}_{K+1} \subset \overline{S}_K$
في الواقع إذا كان $x \in \overline{S}_{K+1}$ فإن

$$d(x, x_{n_K}) \leq d(x, x_{n_{K+1}}) + d(x_{n_{K+1}}, x_{n_K}) \leq \frac{1}{2^K} + \frac{1}{2^K} = \frac{1}{2^{K-1}}$$

أي أن $x \in \overline{S}_K$.
إن أنصاف أقطار الكرات $\overline{S}_K$ تسعى إلى الصفر وبالفرض توجد نقطة x_0 تنتمي إلى
جميع الكرات $\overline{S}_K$. لنبين أن x_0 هو نهاية المتتالية $\{x_n\}$
إن المتتالية الجزئية $\{x_{n_K}\}$ تتقارب إلى النقطة x_0 وذلك لأن x_{n_K} و x_0
تنتمي إلى $\overline{S}_K$ وبالتالي فإن:

$$d(x_{n_K}, x_0) \leq \frac{1}{2^{K-1}} \longrightarrow 0$$

وبالتالي فإن المتتالية $\{x_n\}$ ككل تتقارب إلى x_0, وذلك لأن

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_K}) + d(x_{n_K}, x_0)$$

ولأنه يمكننا جعل الحدين في الطرف الأيمن صغيرين بالقدر الذي نريد وذلك إذا اخترنا n, n_K
كبيرين بقدر كاف . وهذا ما يثبت المبرهنة

انتهت المحاضرة السادسة .

مبدأ المؤثرات الضاغطة.

مبرهنة: ليكن X فضاءً متريًا تامًا وليكن A مؤثرًا يطبق الفضاء X في نفسه وبحيث إنه من أجل جميع $x, y \in X$ يكون:
$$d(Ax, Ay) \leq \alpha\, d(x, y) \qquad \boxed{1}$$
حيث $1 > \alpha > 0$ ولا يتعلق بـ x, y عندئذ توجد نقطة وحيدة x_0 بحيث إن: $Ax_0 = x_0$ تسمى النقطة x_0 بالنقطة الثابتة للمؤثر A.

تسمى النظرية بنظرية النقطة الثابتة أو مبرهنة باناخ.

البرهان. لنأخذ نقطة مثبتة $x \in X$ ولنضع $x_1 = Ax, x_2 = Ax_1, \ldots, x_n = Ax_{n-1}$ ولنبرهن على أن المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة في نفسها. بغية ذلك لنلاحظ
$$d(x_1, x_2) = d(Ax, Ax_1) \leq \alpha\, d(x, x_1) = \alpha\, d(x, Ax)$$
$$d(x_2, x_3) = d(Ax_1, Ax_2) \leq \alpha\, d(x_1, x_2) \leq \alpha^2 d(x, Ax)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x, Ax)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
وبالتالي فإن:
$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p})$$
$$\leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{n+p-1})\, d(x, Ax)$$
$$= \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha}\, d(x, Ax) \qquad \boxed{2}$$
وبما أن $\alpha < 1$ فإن
$$d(x_n, x_{n+p}) < \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, d(x, Ax)$$
من ذلك ينتج أن $d(x_n, x_{n+p}) \to 0$ وذلك عندما $n \to \infty$ ، $p > 0$ وهذا يعني أن المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة في نفسها. وبما أن الفضاء X تام فإنه يوجد عنصر مثل $x_0 \in X$ يكون نهاية لتلك المتتالية $x_0 = \lim_n x_n$ لنبرهن الآن على أن $Ax_0 = x_0$

في الحقيقة
$$d(x_0, Ax_0) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, Ax_0)$$
$$= d(x_0, x_n) + d(Ax_{n-1}, Ax_0)$$
$$\leq d(x_0, x_n) + \alpha\, d(x_{n-1}, x_0)$$
وبالتالي فإنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ ومن أجل n كبير بقدر كاف يكون
$$d(x_0, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad d(x_0, x_{n-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$
وبالتالي فإن:
$$d(x_0, Ax_0) < \varepsilon$$

وبما أن $\varepsilon > 0$ كيفي فإن $d(x_0, Ax_0)=0$ أي أن $Ax_0=x_0$

لنبرهن الوحدانية. لنفرض وجود عنصرين $x_0, y_0 \in X$ بحيث إن

$$Ax_0=x_0 \; , \; Ay_0=y_0$$

عندئذ يكون

$$d(x_0,y_0)=d(Ax_0,Ay_0)\le \alpha\, d(x_0,y_0)$$

وبما أنه إذا افترضنا أن $d(x_0,y_0)>0$ فإنه مما سبق نستنتج أن $\alpha \ge 1$ وهذا غير ممكن نتيجة الفرض.

بالانتقال إلى النهاية في العلاقة $\boxed{2}$ عندما $p\to\infty$ نأتي إلى تقدير الخطأ في التقريب النوني

$$\boxed{3} \quad d(x_n,x_0)\le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, d(x,Ax)$$

ملاحظة: في بعض الأحيان نكون مضطرين لدراسة مؤثرات A تحقق الشرط $\boxed{1}$ في جوار مغلق $\bar S(\bar x, r)$ حيث $\bar x$ نقطة ما من الفضاء X إلا أنها لا تحقق في النقاط الأخرى. في هذه الحالة يمكن تطبيق مبدأ المؤثرات الضاغطة بشرط إضافي يفرض هو أن المؤثر A يطبق الكرة في نفسها، تبعاً كذلك لا تتعدى التقريبات المتتالية ذلك الجوار.

لنفرض على سبيل المثال وإضافة للشرط $\boxed{1}$ تحقق المتراجحة

$$d(\bar x, A\bar x)\le (1-\alpha) r$$

إذا كان $x\in \bar S(\bar x, r)$ فإن $Ax\in \bar S(\bar x, r)$ وذلك لأن

$$d(Ax,\bar x)\le d(Ax,A\bar x)+d(A\bar x+\bar x)\le \alpha\, d(x,\bar x)+d(\bar x,A\bar x)$$

$$\le \alpha . r+(1-\alpha) r=r$$

تبعاً لذلك يمكننا اعتبار أن هذا المؤثر A يطبق الفضاء المتري التام $\bar S(\bar x, r)$ في نفسه ويحقق الشرط $\boxed{1}$ عندئذ، واستناداً لما برهناه أعلاه، توجد نقطة ثابتة وحيدة في $\bar S(\bar x, r)$ لهذا المؤثر.

سنستعرض الآن عدداً من تطبيقات مبدأ المؤثرات الضاغطة.

حل جملة معادلات جبرية خطية:

لنستعرض الفضاء العددي ذا الـ n بعداً R^n ولنفرض أن المسافة فيه معرفة بالعلاقة

$$d(x,y)=\max_i |\xi_i-\eta_i|$$

حيث $x=\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\} \; , \; y=\{\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n\}$

بسهولة يمكن التأكد كما في الفضاء المتري m، أن R^n فضاء متري تام

ولنستعرض في هذا الفضاء المؤثر $y=Ax$ المعرف بدلالة العلاقات.

$$\eta_i = \sum_{j}^{n} a_{ij}\,\xi_j + b_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

لدينا:

$$d(y_1, y_2) = d(Ax_1, Ax_2) = \max_i |\eta_i^{(1)} - \eta_i^{(2)}|$$

$$= \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}) \right|$$

$$\leq \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \max_j |\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}|$$

$$= \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\, d(x_1, x_2)$$

إذا فرضنا الآن أن:

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1 \qquad \boxed{4}$$

من أجل جميع i فإنه يمكننا تطبيق مبدأ المؤثرات الضاغطة، ويكون للمؤثر A نقطة وحيدة ثابتة، وبذلك نجد المبرهنة الآتية:

مبرهنة: إذا كانت المصفوفة (a_{ij}) بحيث إن $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1$ من أجل جميع i فإنه لجملة المعادلات $\eta_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = b_i \ ,\ i = 1, \dots, n$ يوجد حل وحيد $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ ويمكن الحصول على هذا الحل بطريقة التقريب المتتالي انطلاقاً من أي عنصر $x_0 = \{\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}\}$

إن الشرط 4 هو شرط كاف لتقارب طريقة التقريب المتتالي للجملة المدروسة. إذا عرفنا في هذا الفضاء R^n مسافة أخرى فإننا نحصل على شرط آخر للتقارب. لنفرض على سبيل المثال أننا أخذنا المسافة

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2}$$

وعندئذ نجد

$$d(y_1, y_2) = d(Ax_1, Ax_2) = \left(\sum_{i=1}^{n} (\eta_i^{(1)} - \eta_i^{(2)})^2 \right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}) \right\}^2}$$

وبتطبيق متراجحة بونياكوفسكي نجد أن

$$d(y_1, y_2) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left\{ \cancel{\sum_{j=1}^{n}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} (\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)})^2 \right\} \right.}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}\; d(x_1, x_2)$$

وبالتالي فإن شرط تقارب طريقة التقريب المتتالي يكون

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 < 1$$

وجود ووحدانية حل معادلة تكاملية.

لنستعرض الآن معادلة فريدهولم الخطية غير المتجانسة من النوع الثاني

$$\varphi(t) = \lambda\int_a^b K(t,s)\,\varphi(s)\,ds + f(t) \qquad \boxed{5}$$

حيث إن النواة $K(t,s)$ تابع مستمر في المربع $Q=\{a\leqslant t, s\leqslant b\}$

وبالتالي هو محدود فيه: $|K(t,s)|\leqslant M \quad \forall\, t,s\in Q$

وأما التابع $f(t)$ فهو مستمر على المجال $[a,b]$ أي إنه ينتمي إلى الفضاء $C[a,b]$

سنبين الآن كيفية استخدام مبدأ المؤثرات المنضغطة في البرهان على وجود ووحدانية حل معادلة فريدهولم $\boxed{5}$. سنبحث عن حل للمعادلة $\boxed{5}$ في صف التوابع $C[a,b]$ المستمرة على المجال $[a,b]$.

لنسمِّ حلاً تابعاً $\varphi_0(t)\in C[a,b]$ تؤول من أجله المعادلة $\boxed{5}$ إلى متطابقة على المجال $[a,b]$ حل المعادلة $\boxed{5}$

$$\varphi_0(t) = \lambda\int_a^b K(t,s)\,\varphi_0(s)\,ds + f(t)$$

من الواضح أنه من أجل $\lambda=0$ تكون للمعادلة $\boxed{5}$ حل وحيد هو $\varphi_0(t)=f(t)$

لنبرهن على أن المعادلة $\boxed{5}$ قابلة للحل، بشكل وحيد من أجل جميع قيم λ الصغيرة بقدر كاف بالقيمة المطلقة. سننظر إلى الطرف الأيمن من المعادلة $\boxed{5}$ كمؤثر $A\varphi$ معرف بالعلاقة

$$A\varphi = \lambda\int_a^b K(t,s)\,\varphi(s)\,ds + f(t) \qquad \boxed{6}$$

إن المؤثر A ينقل كل تابع $\varphi(t)\in C[a,b]$ إلى تابع $\tilde{\varphi}(t)$ معرف على نفس المجال $[a,b]$. بذلك تؤول مسألة البرهان على وجود حل $\varphi_0(t)$ للمعادلة $\boxed{5}$ إلى مسألة البرهان على وجود نقطة ثابتة للمؤثر A أي على وجود تابع مثل $\varphi_0(t)$ يكون من أجله $A\varphi_0=\varphi_0$. لنستعرض على سبيل المثال المعادلة

$$\varphi(t) = 2\int_0^1 st^2\,\varphi(s)\,ds + 1$$

إن المؤثر A الموافق لهذه المعادلة يعرف بالعلاقة

$$A\varphi = 2\int_0^1 s.t^2\,\varphi(s)\,ds + 1$$

نفرض $\varphi(t)=1$ يكون لدينا

$$A\varphi = 2\int_0^1 t^2.s.1.ds + 1$$
$$= t^2+1$$

أي أن صورة التابع $(\varphi(t)\equiv 1)$ بالمؤثر A هي التابع t^2+1 لنضع $\varphi(t)=2t^2+1$

فنجد أن

$$A\varphi = 2\int_0^1 t^2 s(2s^2+1)\,ds + 1 = 2t^2+1$$

أي أن صورة التابع $\varphi(t)=2t^2+1$ هي التابع نفسه $\varphi(t)=2t^2+1$

وبالتالي فإن النقطة $\varphi(t)=2t^2+1$ هي النقطة الثابتة A وهو حل للمعادلة التكاملية المذكورة.

لنبرهن الآن على أن المؤثر A المعرف بالعلاقة $\boxed{6}$ يطبق الفضاء التام $C[a,b]$ في $C[a,b]$ أي أنه إذا كان $\varphi(t) \in C[a,b]$ فإن التابع $g(t) = A\varphi(t) \in C[a,b]$

في الواقع لتكن t نقطة كيفية من المجال $[a,b]$ وليكن Δt تزايداً ما بحيث تكون النقطة $(t+\Delta t)$ من المجال $[a,b]$ عندئذ يكون لدينا:

$$|g(t+\Delta t) - g(t)| =$$

$$= \left| \lambda \int_a^b K(t+\Delta t, s)\varphi(s)ds + f(t+\Delta t) - \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds - f(t) \right|$$

$$\leq |\lambda| \int_a^b |K(t+\Delta t, s) - K(t,s)|\,|\varphi(s)|ds + |f(t+\Delta t) - f(t)| \quad \boxed{7}$$

ليكن $\varepsilon > 0$ عدداً موجباً ما، بما أن التابع $f(t)$ ينتمي إلى $C[a,b]$ فإنه يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث إن المتراجحة $|f(t+\Delta t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ تتحقق من أجل $|\Delta t| < \delta_1$. لنفرض أيضاً أن

$$\phi = \max_{a \leq t \leq b} |\varphi(t)|$$

بما أن النواة $K(t,s)$ مستمرة في المربع Q فهي مستمرة بانتظام في Q فإنه من أجل أي عدد موجب $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta_2 > 0$ بحيث إن المتراجحة

$$|K((t+\Delta t), s) - K(t,s)| < \frac{\varepsilon}{2\phi(b-a)|\lambda|} \quad \boxed{8}$$

تتحقق من أجل جميع $s \in [a,b]$ وحينما يكون $|\Delta t| < \delta_2$ لنأخذ الآن $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ فنجد أنه مهما يكن Δt بحيث إن $|\Delta t| < \delta$ فإن $\boxed{8}$

$$|g(t+\Delta t) - g(t)| < \varepsilon \quad \forall \Delta t : |\Delta t| < \delta$$

وهو ما يبرهن على استمرار التابع $g(t)$ في أية نقطة $t \in [a,b]$ وهكذا فإن

$$A : C[a,b] \to C[a,b]$$

لنستنتج الآن الشروط التي من أجلها يكون المؤثر A ضاغطاً لدينا:

$$d(A\varphi_1, A\varphi_2) = \max_{a \leq t \leq b} |A\varphi_1(t) - A\varphi_2(t)|$$

$$= \max_{a \leq t \leq b} \left| \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi_1(s)ds - \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi_2(s)ds \right|$$

$$= \max_{a \leq t \leq b} \left| \lambda \int_a^b K(t,s)[\varphi_1(s) - \varphi_2(s)]ds \right|$$

$$\leq |\lambda| M(b-a) \max_{a \leq t \leq b} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|$$

$$= |\lambda| M(b-a)\, d(\varphi_1, \varphi_2)$$

ومنه نجد أنه من أجل $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ يكون لدينا مؤثر A ضاغطاً

وبالتالي فإنه من أجل $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ يكون للمعادلة فريدهولم $\boxed{5}$

ذات النواة المستمرة $K(t,s)$ والحد الحر فيها حل وحيد.

إن التقريبات $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots\ldots, \varphi_n(t), \ldots$ لحل هذه

المعادلة تعرف بالعلاقات:

$$\varphi_{n+1}(t) = \lambda \int_0^1 K(t,s)\, \varphi_n(s)\, ds + f(t)$$

حيث إنه عبارة $\varphi_0(t)$ يمكننا أخذ أي تابع مستمر على المجال $[a,b]$

بالعودة إلى المعادلة التكاملية $\boxed{5}$

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\, \varphi(s)\, ds + f(t)$$

وطبق الفرض أن النواة $K(t,s)$ تابع مستمر في المربع Q وأن $f(t)$

مستمر في المجال $[a,b]$ وجدنا أنه إذا كان $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ فإنه

للمعادلة $\boxed{5}$ حل وحيد $\varphi(t)$

سنبين الآن أنه للمعادلة $\boxed{5}$ وباستخدام المسافة في الفضاء $L^2[a,b]$

$$d(x,y) = \left(\int_a^b [y(t) - x(t)]^2\, dt \right)^{1/2}$$

يوجد حل وحيد من أجل قيم λ المنتمية إلى مجال أوسع من المجال المذكور أعلاه الناتج عن

استخدام المسافة في الفضاء $C[0,1]$.

انتهت المحاضرة السابعة.

تحليل تابعي (1) المحاضرة الثامنة

ملاحظة: إذا كان $x(t)$ تابعاً من الفضاء $L^2[a,b]$ أي أن $\int_a^b x^2(t)\,dt < \infty$ فإن التابع $y(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds$ يكون مستمراً على المجال $[a,b]$

البرهان: لتكن t_0 نقطة من المجال $[a,b]$ بما أن النواة تابع مستمر في المربع Q فهو تابع مستمر بانتظام أي إنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث إنه من أجل جميع النقاط t المحققة للمتراجحة $|t - t_0| < \delta$ تتحقق المتراجحة.

$$|K(t,s) - K(t_0,s)| < \varepsilon \qquad \forall\, s \in [a,b]$$

لذلك فإن:

$$|y(t) - y(t_0)| = \left| \int_a^b [K(t,s) - K(t_0,s)]\,x(s)\,ds \right|$$
$$\leq \varepsilon \int_a^b |x(s)|\,ds \leq \varepsilon \sqrt{b-a} \left(\int_a^b x^2(s)\,ds \right)^{1/2}$$

وبما أن ε كيفي فإن ذلك يؤدي إلى استمرار التابع $y(t)$ في أية نقطة $t \in [a,b]$ وفقاً للملاحظة المذكورة يكون الطرف الأيمن من المعادلة التكاملية تابعاً مستمراً من أجل أي تابع $\varphi(t) \in L^2[a,b]$ وهذا يعني أن الطرف الأيسر من المعادلة مستمر. لذلك تكون حلول المعادلة التكاملية هي التوابع المستمرة فقط من بين جميع التوابع المنتمية للفضاء $L^2[a,b]$.

سننظر إلى الطرف الأيمن من المعادلة التكاملية كمؤثر $A\varphi$ معرف في الفضاء $L^2[a,b]$ واعتماداً على الملاحظة يكون $A : L^2[a,b] \longrightarrow C[a,b] \subset L^2[a,b]$

لنضع $B = \left(\int_a^b \int_a^b K^2(t,s)\,dt\,ds \right)^{1/2}$ ولنبين أنه من أجل $|\lambda| < \frac{1}{B}$ يكون المؤثر A ضاغطاً.

$$A\varphi_2 - A\varphi_1 = \lambda \int_a^b K(t,s)\,[\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]\,ds$$

وباستخدام متراجحة بونياكوفسكي نجد أن:

$$[A\varphi_2 - A\varphi_1]^2 = \left(\lambda \int_a^b K(t,s)\,[\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]\,ds \right)^2$$
$$\leq \lambda^2 \int_a^b K^2(t,s)\,ds \int_a^b [\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]^2\,ds$$

وبمكاملة طرفي المتراجحة الأخيرة بالنسبة لـ t من a إلى b نجد:

$$\int_a^b [A\varphi_2(t) - A\varphi_1(t)]^2\,dt \leq \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K^2(t,s)\,ds\,dt \int_a^b [\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]^2\,ds$$

أي

$$d^2(A\varphi_1, A\varphi_2) \leq \lambda^2 B^2\, d^2(\varphi_1, \varphi_2)$$

ومنه نجد أن:

$$d(A\varphi_1, A\varphi_2) \leq |\lambda| B\, d(\varphi_1, \varphi_2)$$

وبالتالي فإنه من أجل $|\lambda| B < 1$ أي من أجل $|\lambda| < \frac{1}{B}$ يكون المؤثر A ضاغطاً وبالتالي فإن للمعادلة التكاملية يوجد حل وحيد $\varphi(t)$.

من الواضح أن $B \leq M(b-a)$ وأن المساواة ممكنة إذا كان $|K(t,s)| = M$

وبالتالي فإن المجال $|\lambda| < \frac{1}{B}$ أكبر من المجال $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$

مبرهنة | تمرين هام :

إذا كان A مؤثراً مستمراً ويطبق الفضاء المتري التام X في نفسه وكان A^n من أجل عدد n ما، مؤثراً ضاغطاً فإنه يوجد للمعادلة $Ax=x$ حل وحيد.

A^n ضاغط عندئذ يوجد نقطة x^* حيث $A^n x^* = x^*$

ونبرهن أن x^* هي النقطة الثابتة لـ A

$$d(Ax^*,x^*) = d(A.A^n x^*, A^n x^*) = d(A^n A x^*, A^n x^*)$$

$$\le \alpha\, d(Ax^*,x^*) \quad \text{ضاغط } A^n \; ; \quad 0<\alpha<1$$

$$\Rightarrow d(Ax^*,x^*)[1-\alpha]\le 0 \Rightarrow d(Ax^*,x^*)=0$$

ومنه x^* هي النقطة الثابتة لـ A.

نأتي الآن إلى المعادلة التكاملية $\varphi(t)=\lambda\int_a^t K(t,s)\varphi(s)\,ds + f(t)$

ونفترض أن التابع $K(t,s)$ مستمر في المثلث المغلق Δ وأن النواة $f(t)\in C[a,b]$:

$\Delta=\{a\le t\le b \; ; \; a\le s\le t\}$ ولنعرف المؤثر $A\varphi$ بالعلاقة

$$A\varphi = \lambda\int_a^t K(t,s)\varphi(s)\,ds + f(t) \qquad \boxed{1}$$

بسهولة يمكن التأكد من أن المؤثر A يطبق الفضاء $C[0,1]$ في نفسه، أي أن $A: C[a,b]\to C[a,b]$، لنبرهن على أن A مؤثر مستمر. ليكن $\varphi_1(t)$ و $\varphi_2(t)$ تابعين من الفضاء $C[a,b]$ عندئذ نجد أن

$$|A\varphi_2(t)-A\varphi_1(t)| = \left|\lambda\int_a^t K(t,s)[\varphi_2(s)-\varphi_1(s)]\,ds\right|$$

$$\le |\lambda|\, M(t-a)\max_{a\le s\le b}|\varphi_2(s)-\varphi_1(s)| \qquad \boxed{2}$$

حيث $M=\max_{(t,s)\in\Delta}|K(t,s)|$ من $\boxed{2}$ نجد أنه مهما تكن $t\in[a,b]$

فإن:

$$|A\varphi_2(t)-A\varphi_1(t)|\le|\lambda|\,M(b-a)\,d(\varphi_1,\varphi_2)$$

أي أن $d(A\varphi_1,A\varphi_2)\le|\lambda|\,M(b-a)\,d(\varphi_1,\varphi_2)$

ليكن $\varepsilon>0$ كيفياً ولنأخذ $\delta=\varepsilon/M(b-a)|\lambda|$ عندئذ من أجل $d(\varphi_1,\varphi_2)<\delta$

يكون لدينا $d(A\varphi_1,A\varphi_2)<\varepsilon$ وهذا يعني أن المؤثر A مستمر من $C[a,b]$ إلى $C[a,b]$ باستخدام العلاقة $\boxed{2}$ نجد أن:

$$|A^2\varphi_2(t)-A^2\varphi_1(t)| = \left|\lambda\int_a^t K(t,s)[A\varphi_2(s)-A\varphi_1(s)]\,ds\right|$$

$$\le|\lambda|^2\frac{M^2(t-a)^2}{2!}\,d(\varphi_1,\varphi_2)$$

وبشكل عام نجد

$$|A^n\varphi_2(t)-A^n\varphi_1(t)| \leq |\lambda|^n \frac{M^n(t-a)^n}{n!} d(\varphi_1,\varphi_2)$$

$$\leq |\lambda|^n \frac{M^n(b-a)^n}{n!} d(\varphi_1,\varphi_2) \quad \boxed{3}$$

إن هذه المتراجحة تبين أنها محققة من أجل أي عنصر $t \in [a,b]$ وبالتالي فإن

$$d(A^n\varphi_2, A^n\varphi_1) \leq \frac{|\lambda|^n M^n(t-a)^n}{n!} d(\varphi_1,\varphi_2) \quad \boxed{4}$$

من أجل أي عدد λ يمكننا اختيار العدد n كبيراً بالقدر الذي نريد ونجعل يكون

$$\frac{|\lambda|^n M^n(t-a)^n}{n!} < 1. \quad \boxed{5}$$

وبالتالي يكون وفقاً لذلك، المؤثر A ضاغطاً من أجل n كبيراً بقدر كاف.
استناداً إلى المبرهنة (٢) يكون للمؤثر A نقطة ثابتة وحيدة وذلك يعني وجود حل وحيد للمعادلة التكاملية من أجل أي عدد λ. وهذا الحل يمكن إيجاده بطريقة التقريب التالي

$$\varphi_{n+1}(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)\varphi_n(s)ds + f(t) \quad \boxed{6}$$

$$(n=0,1,2,\dots)$$

مثلاً: أوجد الحل بطريقة التقريب المتتالي: $A\varphi(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 t.s\varphi(s)ds + \frac{5}{6}$

$$\varphi_{n+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 t.s\varphi_n(s)ds + \frac{5}{6}t \qquad \varphi_0(t)=0$$

$$n=0,1,2,\dots$$

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 t.s\varphi_0(s)dx + \frac{5}{6}t \Rightarrow \varphi_1(t) = \frac{5}{6}t$$

$$\varphi_2(t) = \frac{5}{6}t\left[\frac{1}{6}+1\right] \Rightarrow \varphi_3(t) = \frac{5}{6}t\left[1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}\right]$$

$$\Rightarrow \varphi_n(t) = \frac{5}{6}t\left(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\dots+\frac{1}{6^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{5}{6}t.\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{6}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \frac{5}{6}t.\frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{5}{6}t.\frac{6}{5} = t$$

أي أن الحل عندنا $\varphi_0(t) = t$

انتهت المحاضرة الثامنة

التحليل التابعي (1) المحاضرة التاسعة

الفضاءات القابلة للفصل

يسمى الفضاء X قابلاً للفصل إذا وجدت في هذا الفضاء مجموعة قابلة للعد وكثيفة في كل مكان في X. بكلام آخر يكون X قابلاً للفصل إذا وجدت فيه متتالية مثل $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ بحيث أنه من أجل أي عنصر $x \in X$ يمكن إيجاد متتالية جزئية منها $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$ [1] متقاربة إلى x وفقاً لذلك وإذا كان X فضاءً مترياً فإن تعريف قابلية الفصل يمكن صياغته على الشكل الآتي:

«توجد في الفضاء X متتالية [1] بحيث إنه من أجل أي عدد موجب $\varepsilon > 0$ وأي عنصر $x \in X$ يوجد عنصر x_{n_0} من [1] بحيث إن $d(x, x_{n_0}) < \varepsilon$

أمثلة:

[1] الفضاء الإقليدي E_n ذو الـ n بعداً قابل للفصل. في الواقع لتكن E_n^0 مجموعة جميع النقاط من E_n والتي احداثياتها أعداد عادية. إن هذه المجموعة قابلة للعد وكثيفة في E_n

[2] الفضاء $C[0,1]$ قابل للفصل. لنستعرض في هذا الفضاء المجموعة C_0 المشكلة من جميع كثيرات الحدود والتي عواملها أعداد عادية. إن المجموعة C_0 قابلة للعد ولنبرهن على أنها كثيفة في $C[0,1]$

في الواقع ليكن $x(t)$ تابعاً ما من $C[0,1]$ استناداً إلى نظرية وايرشترس يوجد كثير حدود $p(t)$ بحيث أن $\max_t |x(t) - p(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ حيث $\varepsilon > 0$ معطى من ناحية ثانية يوجد كثير حدود معاملاته أعداد عادية مثل $p_0(t)$ وبحيث إن

$$\max_t |p(t) - p_0(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ومنه نجد

$$d(x, p_0) = \max_t |x(t) - p_0(t)| < \varepsilon$$

وهو المطلوب.

[3] الفضاء ℓp $(1 \le p < +\infty)$. ليكن E_0 مجموعة العناصر x من الشكل $\{r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots\}$ حيث r_i أعداد عادية ما وأما n فهو عدد طبيعي ما. من الواقع أن E_0 قابلة للعد ولنبرهن على أن E_0 كثيفة في كل مكان في ℓp.

في الواقع لنأخذ عنصراً ما $x = \{\varepsilon_i\}$ من ℓp وليكن $\varepsilon > 0$ عدداً موجباً معطى عندئذ يمكن إيجاد عدد طبيعي n (يتعلق بـ ε) بحيث إن $\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varepsilon_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$

بعد ذلك نأخذ عنصراً مثل $x_0 = \{r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots\}$ بحيث إن

$\sum_{k=1}^{n} |\varepsilon_k - r_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$ عندئذ نجد أن

$$[d(x, x_0)]^p = \sum_{k=1}^{n} |\varepsilon_k - r_k|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} |\varepsilon_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p$$

وبالتالي فإن

$d(x, x_0) < \varepsilon$ وهو المطلوب.

4) الفضاء $L^p[0,1]$ قابل للفصل. في الواقع من خاصة الاستمرار المطلق للتكامل لليبغ ينتج أن أي تابع $x(t)$ من الفضاء $L^p[0,1]$ هو نهاية وسطية من الدرجة p لمتتالية $x_n(t)$ من التوابع المحدودة والمقيوسة والمعرفة بالعلاقة

$$x_n(t)=\begin{cases} x(t), & |x(t)|\le n \\ 0, & |x(t)|>n \end{cases}$$

ومن ثم من خاصة C التوابع المقيوسة ينتج أن كل تابع محدود ومقيوس هو نهاية وسطية من الدرجة p لمتتالية من التوابع المستمرة. وبالتالي إن مجموع التوابع المستمرة على $[0,1]$ كثيفة في كل مكان $L^p[0,1]$ من ناحية ثانية إن مجموعة كثيرات الحدود ذات العاملات العادية والقابلة للعد هي مجموعة كثيفة في كل مكان في $C[0,1]$ بمفهوم المسافة في هذا الفضاء وبشكل أخص بمفهوم المسافة في الفضاء $L^p[0,1]$ هكذا فإن كثيرات الحدود تلك كثيفة في كل مكان في $L^p[0,1]$ وهكذا نكون قد أثبتنا قابلية الفصل للفضاء $L^p[0,1]$.

5) الفضاء S قابل للفصل. لتكن E_0 مجموعة العناصر x من الشكل $\{r_1,r_2,\dots,r_n,0,0,\dots\}$ حيث r_i أعداد عادية كيفية و n عدد صحيح ما. إن E_0 قابلة للعد ولنثبت أنه يمكن فصل متتالية جزئية من E_0 متقاربة إلى عنصر كيفي مختار $x=\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,\dots\}\in S$ من أجل كل ξ_n نشكل متتالية من الأعداد العادية $\{r_n^{(k)}\}$ $k=1,2,\dots$ والتي هي من الشكل

$$x^{(k)}=\{r_1^{(k)},r_2^{(k)},\dots,r_k^{(k)},0,0,\dots\}$$

بسهولة نرى أن $x^{(k)}\to x$ عندما $k\to\infty$ في الواقع من أجل اثبات ذلك علينا أن نبين بأن الركبة n لـ $x^{(k)}$ متقاربة إلى الركبة n للعنصر x عندما $n\to\infty$ وهذا الأمر واضح إذا أخذنا $n<k$ كبيراً بقدر كاف ويكون $|\xi_n-r_n^{(k)}|<\varepsilon$

6) الفضاء m غير قابل للفصل. لنستعرض مجموعة العناصر x من الشكل $x=\{\xi_i\}$ حيث إن ξ_i إما تساوي الصفر أو تساوي 1. إن لهذه المجموعة قدرة المستمر. لنأخذ الآن عنصرين مختلفين $x=\{\xi_i\}$ و $y=\{\eta_i\}$ من هذه المجموعة. عندئذ نجد أن

$$d(x,y)=\sup_i|\xi_i-\eta_i|=1$$

هكذا يكون لدينا مجموعة من العناصر لها قدرة المستمر وواقعة على مسافة من بعضها تساوي الواحد. لنثبت أن m غير قابل للفصل. لنفرض العكس أي أنه توجد مجموعة مثل E_0 قابلة للعد وكثيفة في كل مكان في m. لنحط كل عنصر من E_0 بكرة نصف قطرها $\varepsilon=\frac{1}{3}$ عندئذ تتوضع جميع عناصر الفضاء m في داخل تلك الكرات. وبما أن مجموعة الكرات تلك قابلة للعد فإنه في كرة واحدة على الأقل ينبغي أن يوجد عنصران مختلفان x و y من المجموعة التي لها قدرة المستمر لنفرض أن مركز تلك الكرة هو x_0 وعندئذ يكون

$$1=d(x,y)\le d(x,x_0)+d(x_0,y)\le \frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

وهذا غير ممكن وبالتالي فإن m غير قابل للفصل. في خلاف ذلك يبرهن على أن الفضاء c الذي هو فضاء جزئي من m فضاء قابل للفصل.

الفضاءات الخطية المنظمة « الفصل الثاني »

1- الفضاءات الخطية.

تعريف: لتكن E مجموعة من العناصر، ذات طبيعة ما ومتمتعة بالخواص الآتية:

I) E زمرة أبلية بالنسبة لعملية الجمع في الزمرة.

هذا يعني أن المجموع $x+y$ للعنصرين $x, y \in E$ معرف وهو عنصر من المجموعة ذاتها كما أن عملية الجمع تحقق الشروط الآتية:

1) $x+y=y+x$ الخاصة التبديلية

2) $x+(y+z)=(x+y)+z$ الخاصة التجميعية

3) يوجد عنصر وحيد Θ بحيث إن $x+\Theta=x$ من أجل أي عنصر $x \in E$

4) من أجل كل عنصر $x \in E$ يوجد عنصر معرف وحيد من المجموعة نفسها $(-x)$ بحيث $x+(-x)=\Theta$ بدلاً من $x+(-y)$ سنكتب $x-y$

يسمى العنصر Θ بالعنصر الصفري أو صفر الزمرة E وأما العنصر $(-x)$ فيسمى بالعنصر المعاكس للعنصر x (نظير x).

II) في E معرفة عملية ضرب للعناصر $x, y, z, \dots$ بأعداد حقيقية (مركبة) $\lambda, \mu, \nu, \dots$ إضافة إلى أن λx محدداً هو عنصر من المجموعة E وبالنسبة لهذه العملية تتحقق الشروط الآتية:

1) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$

2) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ ، $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$

3) $1.x=x$

تسمى المجموعة E المحققة للموضوعتين I و II فضاءً خطياً أو فضاءً شعاعياً. تبعاً لعملية ضرب عناصر المجموعة E المعرفة من أجل الأعداد الحقيقية (الأعداد المركبة) نحصل على فضاء خطي حقيقي (فضاء خطي مركب).

أمثلة:

1) E_n مجموعة الأشعة والتي لكل منها n مركبة حقيقية تشكل فضاءً خطياً حقيقياً.

2) مجموعة التوابع لمتحول حقيقي وذات القيم المركبة والتي هي حلول لمعادلات تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة n. تشكل فضاءً خطياً مركباً.

3) مجموعة العناصر الحقيقية (المركبة) من الفضاء $C[0,1]$ ومن الفضاء $L^p[0,1]$ تشكل فضاءً خطياً حقيقياً (مركباً).

4 مجموعة العناصر من الفضاءات الحقيقية (المركبة) m و c و l_p تشكل فضاءً خطياً حقيقياً (مركباً) حيث إن مجموع العنصرين $x = \{\varepsilon_i\}$. $y = \{\eta_i\}$ هو العنصر

$$x + y = \{\varepsilon_1 + \eta_1, \varepsilon_2 + \eta_2, \dots, \varepsilon_n + \eta_n, \dots\}$$

وأما ضرب العنصر x بـ λ فهو $\lambda x = \{\lambda \varepsilon_1, \dots, \lambda \varepsilon_n, \dots\}$

سنستخلص بعض النتائج من موضوعي الفضاء الخطي.

1) $0 . x = \Theta$ في الواقع

$$x = 1 . x = (1 + 0) x = 1x + 0.x = x + 0.x$$

ومنه نجد $x + (-x) = x + 0.x + (-x)$ $\Theta = \Theta + 0.x = 0.x$

2) $(-1) x = x$ وذلك لأن $(-1) x + x = (-1 + 1) x = 0.x = 0$

3) $\lambda \Theta = \Theta$ وذلك لأن $\lambda . \Theta = \lambda [x + (-x)] = \lambda x + \lambda (-x) =$

$$\lambda x + (-\lambda) x = \lambda x - \lambda x = \Theta$$

4) إذا كان $\lambda x = \mu x$ وكان $x \neq \Theta$ فإن $\lambda = \mu$ في الحقيقة إذا كان $\lambda x - \mu x$ فإن $\lambda x - \mu x = \Theta \Leftarrow (\lambda - \mu) x = \Theta$ ومنه نجد أنه إذا كان $\lambda \neq \mu$ فإن

$$x = \frac{1}{\lambda - \mu} . (\lambda - \mu) x = \frac{1}{\lambda - \mu} \Theta = \Theta$$

وهذا يناقض الفرض.

نلاحظ أنه إذا كان E فضاءً خطياً فإن الخاصة التبديلية في الجمع تكون نتيجة لموضوعات الأخرى. في الحقيقة لدينا:

$$\begin{aligned}(x+y) - (y+x) &= (x+y) + (-1)(y+x) \\ &= x + y + (-1) y + (-1) x \\ &= x + [y + (-1) y] + (-1) x \\ &= x + \Theta + (-1) x = x + (-1) x = \Theta\end{aligned}$$

تعريف: نقول عن فضاءين خطيين E ، E' إنهما إيزومورفيان إذا أمكن تعريف تطبيق غامر ومتباين بين عناصرهما وبحيث يحافظ ذلك التطبيق على العمليتين الجبريتين أي إنه إذا كان $x \leftrightarrow x'$ ، $y \leftrightarrow y'$ فإن

$$x + y \longleftrightarrow x' + y' \quad , \quad \lambda x \longleftrightarrow \lambda x'$$

في الفضاءات الخطية يمكن تعريف مفهوم الاستقلال والارتباط الخطيين للعناصر.

تعريف: نقول إن العناصر x_1 و x_2 ، ... ، x_n من فضاء خطي ما E مستقلة خطياً إذا نتج من المساواة $\lambda x_1 , \lambda_2 x_2 , \dots , \lambda_n x_n = 0$

أن $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

وبالعكس إذا وجدت أعداد مثل λ_1 ، ... ، λ_n وكانت ليست جميعها معدومة وبحيث أن $\lambda_1 x_1 , \dots , \lambda_n x_n = 0$ فإننا نقول إن العناصر x_1 ، ... ، x_n مرتبطة خطياً

لنفرض في الحالة الأخيرة أن $\lambda_n \neq 0$ فنجد:

$$x_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n} x_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_n} x_{n-1}$$

بوضع $\alpha_i = \frac{-\lambda_i}{\lambda_n}$ نجد أن:

$$x_n = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_{n-1}$$

وفي هذه الحالة نقول إن العنصر x_n هو تركيب خطي للعناصر $x_1, \dots, x_{n-1}$.

المتنوعات الخطية:

نقول عن مجموعة غير خالية L من عناصر فضاء خطي E إنها متنوعة خطية إذا احتوت L إضافة للعناصر $x_1, \dots, x_n$ على أي تركيب خطي لتلك العناصر $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$. نلاحظ أن أية متنوعة خطية تحتوي على العنصر الصفري Θ في الواقع بما أن L غير خالية فهي تحتوي على عنصر ما مثل x وبما أن L متنوعة خطية فهي تحتوي على التركيب $x + (-1).x$ وبالتالي فإن $x + (-1)x = \Theta \in L$

لنعتبر العناصر $x_1, \dots, x_n$ من الفضاء الخطي E من الواضح أن مجموعة جميع المجاميع الممكنة من الشكل $\sum_{i=1} \alpha_i x_i$ تشكل متنوعة خطية L_0 في E في الحقيقة إذا كان للعناصر y_j الشكل $y_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^j x_i$ فإن أي تركيب خطي لهذه العناصر استناداً إلى المساواة

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_n y_n = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i$$

يكون له الشكل نفسه وبالتالي فهو ينتمي إلى تلك المجموعة L_0. إن المتنوعة الخطية L_0 هي أصغر متنوعة خطية تحتوي على العناصر $x_1, \dots, x_k$ والأصغرية هنا تعني أن أية متنوعة خطية أخرى L حاوية على العناصر $x_1, \dots, x_k$ تحتوي على المتنوعة الخطية L_0.

يمكن تعميم مفهوم المتنوعة الخطية الأصغرية الحاوية على عدد معلوم ومنته من العناصر على الحالة التي تحتوي فيها المتنوعة الخطية على عدد غير منته من العناصر على سبيل المثال على مجموعة قابلة للعد من العناصر في الواقع لتكن $x_1, \dots, x_n, \dots$ مجموعة قابلة للعد من عناصر الفضاء الخطي E.

إن المتنوعة الخطية الأصغرية L_0 والحاوية على هذه العناصر ستكون مجموعة جميع المجاميع الممكنة من الشكل $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ حيث إنه ليست λ_i كيفية فقط بل العدد الطبيعي k أيضاً.

انتهت المحاضرة التاسعة.

المجموع المباشر للمتنوعات الخطية :

ليكن E فضاء خطي ولتكن $L_1 , L_2 , \ldots , L_n$ متنوعات خطية في هذا الفضاء ، عندئذٍ نستطيع تمثيل الفضاء E لمجموع متنوعات خطية كالتالي :

نقول أن E هو مجموع مباشر للمتنوعات الخطية $L_1 , L_2 , \ldots , L_n$ ونكتب ذلك على الشكل :

$$E = \sum_{i=1}^{n} \oplus L_i$$

إذا أمكن تمثيل أي عنصر $x \in E$ بشكل وحيد كما يلي :

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

حيث أن :

$$x_i \in L_i \quad ; \quad i = 1,2, \ldots , n$$

عندئذٍ نقول أن E مجموع مباشر لهذه المتنوعات الخطية .

$$L_i = \sum_{k=1}^{m_i} \oplus L_k^{(i)}$$

عندئذٍ سنبرهن أن :

$$E = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_i} \oplus L_k^{(i)}$$

حتى نبرهن صحة العلاقة الأخيرة يكفي أن نبرهن على أن أي عنصر $x \in E$ من يكتب على شكل وحيد كالشكل :

$$\forall x \in E \implies x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \; x_i \in L_i$$

$$\implies \quad x = \sum_{i=1}^{n} (x_1^{(i)} + x_2^{(i)} + \ldots + x_{m_i}^{(i)})$$

_ لنبرهن على وحدانية هذا التمثيل لـ x :

لنفرض وجود نشر آخر لـ x على الشكل :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_1^{(i)} + \tilde{x}_2^{(i)} + \ldots + \tilde{x}_{m_i}^{(i)}) \; ; \; \tilde{x}_i \in L_i \; ; \; \tilde{x}_k^{(i)} \in L_k^{(i)}$$

$$\Rightarrow x_i = \tilde{x}_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(x_1^{(i)} + x_2^{(i)} + \ldots + x_{m_i}^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_1^{(i)} + \tilde{x}_2^{(i)} + \ldots + \tilde{x}_{m_i}^{(i)})$$

$$\Rightarrow x_k^{(i)} = \tilde{x}_k^{(i)} \quad ; \quad k = 1, 2, \ldots, m_i$$

ومنه فإن التمثيل وحيد .

تطبيق :

بفرض E منشور في مجموع مباشر لمتنوعتين خطيتين L_1, L_2 حيث $E = L_1 \oplus L_2$

ولنبرهن أن $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$ أي أن :

$$\forall x \in E \; ; \; x = y + z \quad ; \; y \in L_1 \;\; \& \;\; z \in L_2$$

لنفرض جدلاً أنه يوجد $u \neq \theta$ ((حيث أن θ صفر الفضاء)) حيث $u \in L_1 \;\; \& \; u \in L_2$

عندئذٍ :

$$x = (y + u) + (z - u)$$

وهذا تناقض أي $u = \theta$ عندئذٍ نجد أن العنصر الوحيد الذي ينتمي الى $L_1 \;\; \& \;\; L_2$ معاً هو صفر الفضاء فقط .

((وذلك في حالة $E = L_1 \oplus L_2$ أي أن E مجموع مباشر لهاتين المتنوعتين))

_ وبالعكس ، اذا كان L_1, L_2 متنوعتين خطيتين وكان $L_1 \cap L_2 \neq \theta$ فإن E هو المجموع المباشر لهاتين المتنوعتين الخطيتين .

لنفرض أن $x \in E$ يكتب بالشكل :

$$x = y + z \quad ; \; y \in L_1 \;\; \& \;\; z \in L_2$$

وكي يكون x مجموع مباشر يجب أن نبرهن على أن هذا التمثيل وحيد .

لنفرض وجود تمثيل مغاير له :

$$x = \tilde{y} + \tilde{z}$$

$$\Rightarrow \quad y + z = \tilde{y} + \tilde{z} \quad \Rightarrow \quad y - \tilde{y} = \tilde{z} - z$$

$$\Rightarrow y - \tilde{y} \in L_1 \cap L_2 \quad \& \quad \tilde{z} - z \in L_1 \cap L_2$$

وذلك لأن عنصرين متساويين و منتمين لمتنوعتين خطيتين فإنهما ينتميان الى المتنوعتين في آن واحد . وبما أن العنصر الوحيد الذي ينتمي للمتنوعتين الخطيتين L_1 , L_2 هو صفر الفضاء

$$\Rightarrow y - \tilde{y} = \theta \quad \& \quad \tilde{z} - z = \theta$$

وبالتالي فإن :

$$y = \tilde{y} \quad \& \quad \tilde{z} = z$$

وهو ما يبرهن على وحدانية التمثيل .

مثال :

في الفضاء $C[0,1]$ لنأخذ التابع (1) مستقل خطياً .

ولنأخذ التابع $(1, x)$ عناصر مستقلة خطياً .

وتكون التوابع $(1 , x , x^2 , x^3 , \dots , x^n)$ توابع معرفة على المجال $[0,1]$ تكون مستقلة خطياً حيث $\forall n$.

ولنأخذ التوابع $1 , x , x^2 , x^3 , \dots , x^n , \dots$ تشكل متنوعة خطية لا نهائية .

البرهان :

للبرهان على أن العناصر $1 , x , x^2 , x^3 , \dots , x^n$ مستقلة خطياً ، نفرض جدلاً أنها مرتبطة خطياً ، أي يوجد $\alpha_i \neq 0$ فيكون :

$$\alpha_1 + \alpha_2\, x + \alpha_3\, x^2 + \dots + \alpha_{n+1}\, x^n = 0$$

وهذا تناقض أي أنها مستقلة خطياً .

العلاقة بين الفضاءات الحقيقية والفضاءات المركبة :

ليكن E فضاء خطي فوق حقل الأعداد المركبة فإنه يمكن تعريف مرافق العنصر كما يلي، ليكن $x\,,y\,,z\,,\ldots \in E$ فيمكن تعريف $\bar{x}\,,\bar{y}\,,\bar{z}\,,\ldots \in E$ التي تحققت ما يلي :

1) $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$

2) $\overline{\lambda x} = \bar{\lambda}\,.\bar{x} \quad ; \; \lambda \in \mathbb{C}$

3) $\overline{(\bar{x})} = x$

_ إذا كانت $\{x_n\}$ متتالية من E_n وحيث :

$$x_n \to x \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_n \to \bar{x}$$

حيث :

$$\begin{cases} \bar{x} = x & \text{عناصر حقيقية} \\ \bar{y} = -y & \text{عناصر تخيلية} \end{cases}$$

لنبرهن أنه إذا كان x عنصر حقيقي فإن $(i\,x)$ تخيلي :

$\overline{i\,x} = -i\,\bar{x} = -i\,x$ وهو تخيلي .

وبالعكس ، اذا كان y تخيلي فإن :

$\overline{\left(\frac{y}{i}\right)} = -\frac{1}{i}\bar{y} = \frac{1}{i}\,y$ حقيقي .

_ لنبرهن $\forall\, x \in E$ فإنه يمكن تمثيله بشكل وحيد على الشكل :

$x = u + iv$ حيث كل من $u\,,\,v$ حقيقيان ، وحيث :

$$\bar{u} = u \quad , \quad \bar{v} = v$$

البرهان : لنضع

$$u = \frac{x+\bar{x}}{2} \quad -- \quad (1)$$

$$v = \frac{x-\bar{x}}{2i} \quad -- \quad (2)$$

نضرب (2) بـ i ونجمع مع (1) فنحصل على :

$$u + iv = x$$

$$\bar{u} = \overline{\left(\frac{x + \bar{x}}{2}\right)} = \frac{\bar{x} + x}{2} = \frac{x + \bar{x}}{2} = u \quad \text{حقيقي}$$

$$\bar{v} = \overline{\left(\frac{x - \bar{x}}{2i}\right)} = -\frac{\bar{x} - x}{2i} = \frac{x - \bar{x}}{2i} = v \quad \text{حقيقي}$$

_ والأن لنفرض وجود تمثيل آخر لـ x ، وليكن : $x = s + it$ عندئذٍ :

$$u + iv = s + it \quad \Rightarrow \quad u - s = i(t - v)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{u - s} = u - s \\ \overline{-i(t - v)} = i(t - v) \end{cases}$$

وهذه العلاقة لا تتحقق إلا إذا كان :

$$t - v = 0 \quad \Rightarrow \quad t = v \quad \Rightarrow \quad s = u$$

ومنه نجد أن x له تمثيل وحيد .

الفضاءات الخطية المنظمة : بفرض E فضاء خطي .

إذا كان الضرب بعدد حقيقي نسميه فضاء خطي منظم حقيقي(فوق الأعداد الحقيقة)، أما إذا الضرب بعدد مركب فإننا نسميه فضاء خطي منظم مركب (فوق الأعداد المركبة).

لو قابلنا كل x بعدد حقيقي $\|x\|$ غير سالب ، أي يوجد تطبيق من E في $\mathbb{R}$ ويحقق الخواص التالية :

_1 $\|x\| \geq 0 \quad \& \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = \theta$

_2 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ متراجحة المثلث.

_3 $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad ; \quad \forall \lambda$

لنعرف على E مسافة بالشكل :

$$\forall\, x, y \;\; ; \;\; d(x, y) = \|x - y\|$$

ويكون :

$$\|x-\theta\| = \|x\| \Longrightarrow \|x\| = d(x,\theta)$$

ويسمى $\|x\|$ بنظيم العنصر x .

_ ولنبرهن على أن النظيم يحقق موضوعات المسافة : (دورة)

لتكن $x, y \in E$ بحيث : $d(x,y) = \|x-y\|$

لنتحقق من موضوعات المسافة :

_1 $$d(x,x) = \|x-x\| = 0$$

_2 $$d(x,y) = 0 \Longrightarrow \|x-y\| = 0$$
$$\Longrightarrow x-y=\theta \Longrightarrow x=y$$

_3 $$d(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = \|y-x\| = d(y,x)$$

_4 $$d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leq$$
$$\leq \|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$$

والنظيم يحقق جميع موضوعات المسافة .

بما أن : $\|x\| = \|x-y\| = d(x,\theta)$

أي أن نظيم عنصر في الفضاء يساوي بعد هذا العنصر عن صفر الفضاء .

ويكون الفضاء الخطي المنظم حالة خاصة من الفضاء المتري .

_ استمرارية عملية الجمع في الفضاء الخطي :

بفرض E فضاء منظم ، ولنفرض أن x_n متتالية من هذا الفضاء متقاربة إلى العنصر x أي أن $x_n \to x$ ، والمتتالية $y_n \to y$ فيكون لدينا :

$$d(x_n, x) \to 0 \quad ; \; n \to \infty \quad \Longrightarrow \quad \|x_n - x\| \to 0 \quad ; \; n \to \infty$$

ونسميه التقارب بالنظيم (أي التقارب في الفضاءات الخطية المنظمة هو تقارب منتظم) .

_ لنبرهن أن : $x_n + y_n \to x + y$

أو :

$$d(x_n, y_n) \to \; d(x,y)$$

حيث أن :

$$x_n \to x \quad \& \quad y_n \to y$$

$$\|x_n + y_n - (x+y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \le \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$$

$$\Longrightarrow \|x_n + y_n - (x+y)\| \to 0 \quad ; n \to \infty$$

أي متقاربة بالنظيم.

أي أن $x_n + y_n \to x + y$ وهو ما نسميه استمرارية الجمع في الفضاء الخطي المنظم .

_ لنفرض أن $\lambda_n \to \lambda$ ، ولنبرهن أن $\lambda_n x_n \to \lambda x$:

البرهان :

لنحسب :

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n x + \lambda_n x - \lambda x\| =$$

$$= \|\lambda_n (x_n - x) + (\lambda_n - \lambda) x\| \le \|\lambda_n (x_n - x)\| + \|(\lambda_n - \lambda) x\|$$

$$= |\lambda_n| \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \, \|x\| \to 0$$

حيث أن : كل من المقادير $\|x\|, |\lambda_n|$ محدود .

كل من $|\lambda_n - \lambda| \to 0 \quad , \quad \|x_n - x\| \to 0$

وبالتالي $\lambda_n x_n \to \lambda x \quad ; n \to \infty$

وهذا ما يبرهن استمرارية عملية الضرب بعدد سلمي .

ملاحظات :

1_ ليكن E فضاء منظم عندئذٍ :

$$\|x\| = \|x + y - y\| \le \|x + y\| + \|y\|$$

$$\Longrightarrow \|x\| - \|y\| \le \|x + y\|$$

2_ وجدنا أنه عندما $x_n \to x$ ، $y_n \to y$ عندئذٍ :

$$d(x_n, y_n) \to d(x, y)$$

أي أن :

$$\|x_n - y_n\| \to \|x - y\|$$

بحال خاصة نضع $y_n = \theta$ نجد :

$$\|x_n\| \to \|x\|$$

أي أن النظيم هو تابع مستمر .

3_

$$\|x\| = \|(x-y)+y\| \le \|x-y\| + \|y\|$$
$$\Rightarrow \|x\| - \|y\| \le \|x-y\|$$

نبدل في العلاقة الأخيرة كل x بـ y وكل y بـ x نجد :

$$\|y\| - \|x\| \le \|y-x\| = \|x-y\| \;\Rightarrow \|x\| - \|y\| \ge -\|x-y\|$$
$$\Rightarrow \big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x-y\|$$

❖ **أمثلة عن الفضاءات الخطية المنظمة :**

1_ الفضاء E_n :

لتكن $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ حيث : $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

لنتأكد من أن المسافة المعرفة في هذا الفضاء تتطابق مع النظيم ، لدينا :

$$d(x,y) = \|x-y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

وبالتالي جميع موضوعات النظيم محققة (تحقق من ذلك) .

2_ الفضاء $C[0,1]$: ويكون

$$\|x\| = \max_{0\le t\le 1} |x(t)|$$

المسافة المعرفة سابقاً في هذا الفضاء تتطابق مع مسافة النظيم بالنسبة لجميع الأمثلة .

3_ الفضاء l_p :

حيث $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ من أجلها يكون :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$$

نعرف النظيم بالشكل :

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

4_ الفضاء $L^p[0,1]$:

نعرف النظيم بالشكل :

$$\|x\| = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

5_ الفضاء $c^{(k)}[0,1]$:

ونعرف النظيم :

$$\|x\| = max\left\{\max_t |x(t)|\ , \max_t |x'(t)|\ , \dots, \max_t \left|x^{(k)}(t)\right|\right\}$$

6_ فضاء المتتاليات المحدودة m :

$$\|x\| = \sup_i |\xi_i|$$

ولنأخذ الأن مثال عن فضاء خطي غير منظم.

_ فضاء المتتاليات العددية S :

لتكن $y = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$, $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$

ولتكن المسافة :

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|}$$

لنبرهن أنه في هذا الفضاء مستحيل تعريف نظيم بحيث تكون هذه المسافة مولدة من ذلك النظيم (التقارب المعرف وفق المسافة لا يتطابق مع التقارب وفق المسافة السابقة) .

البرهان :

لنفرض العكس ، أنه وُجد نظيم ما $\|.\|$ وبحيث تكون هذه المسافة معرفة بالنظيم .

لنفرض :

$e_n = (0\,,0\,,\ldots,e_n\,,0\,,\ldots)$ حيث أن $e_n \neq 0$ وبحيث أن $\|e_n\| > 0$ يمكن أن نكتب :

$$x_n = \frac{1}{\|e_n\|}\, e_n$$

ومنه نجد أن :

$$x_n = 0\,,0\,,\ldots,\frac{e_n}{\|e_n\|}\,,0\,,\ldots$$
$$\Longrightarrow \ \|x_n\| = 1$$

أي أن x_n لا تتقارب بالنظيم الى الصفر .

ولنحسب بعد x_nعن صفر الفضاء :

$$d(x_n\,,\theta) = \frac{1}{2^n}\frac{\frac{1}{\|e_n\|}}{1+\frac{1}{\|e_n\|}} \to 0 \quad ; \quad n \to \infty$$

وهذا تناقض ، إذاً لا يمكن تعريف نظيم في هذا الفضاء .

انتهت المحاضرة العاشرة

أ:عبد القادر أرناؤطي

_ تعريف :

بفرض E فضاء منظم و x عنصر من هذا الفضاء ، لنشكل :

$$y = t\,x \quad ; \; -\infty < t < \infty$$

نسمي هذه النقاط مستقيم في الفضاء الخطي المنظم مولد بالنقطة x .

_ تعريف :

مجموعة العناصر x_1 , x_2 المعرفة بالعلاقة :

$$y = (1-t)x_1 + tx_2 \;\; ; \;\; x_1 , x_2 \in E \;\; , \;\; 0 \le t \le 1$$

نسميها قطعة مستقيمة واصلة بين النقطتين x_1 , x_2 .

_ تعريف :

نسمي $M \subset E$ مجموعة محدبة إذا أمكن وصل أي نقطتين منها بقطعة مستقيمة تقع كلياً في المجموعة M ، أي أن :

$$\forall\, x_1 , x_2 \in M \quad \Longrightarrow$$
$$M \ni y = (1-t)x_1 + tx_2 \;\; ; \;\; 0 \le t \le 1$$

_ لنبرهن أن الكرة المفتوحة (المغلقة) في الفضاء الخطي المنظم هي مجموعة محدبة.

البرهان : لتكن الكرة $S(a,r) \subset E$ حيث : $x_1 , x_2 \in S$ وحيث :

$$\|x_1 - a\| < r \;\; \& \;\; \|x_2 - a\| < r$$

لنأخذ عنصر كيفي بالشكل :

$$y = (1-t)x_1 + tx_2 \;\; ; \qquad 0 \le t \le 1$$

ومنه يكون :

$$y - a = (1-t)x_1 + tx_2 - a \;\; \Longrightarrow$$
$$(1-t)x_1 + tx_2 - [(1-t)a + ta] = (1-t)(x_1 - a) + t(x_2 - a)$$
$$\Rightarrow \|y - a\| \le (1-t)\|x_1 - a\| + t\,\|x_2 - a\| < (1-t)r + tr = r$$

وهذا يعني أن $y \in S(a,r)$ أي أن الكرة في الفضاء الخطي المنظم هي مجموعة محدبة .

_ وبوضع $\le$ بدل $<$ نبرهن حالة الكرة المغلقة.

_ **تعريف :**

لنفرض أن $M \subset E$ ولنولد العناصر $x + a$ ، حيث $x \in M$ و a عنصر مثبت في E .

نسمي مجموعة العناصر الناتجة عن M بانسحاب الشعاع a ونرمز لها $M + a$.

_ ولنبرهن أنه إذا كانت M مجموعة محدبة فإن انسحابها يكون مجموعة محدبة أيضاً :

بفرض $M \subset E$ محدبة :

$$y = (1-t)x_1 + tx_2 \in M$$

صورة x_1 وفق الانسحاب a تصبح $x_1 + a$.

صورة x_2 وفق الانسحاب a تصبح $x_2 + a$.

بوصل هاتين النقطتين بقطعة مستقيمة ، فتكون مجموعة العناصر :

$$z = (x_1 + a)(1-t) + (x_2 + a)t$$

ولنبرهن أن هذه العناصر $z \in M + a$:

$$z = (1-t)x_1 + tx_2 + a \in M + a$$

أي أن $y \to y + a$ وبالتالي فإن صورة y محدبة .

_ **مثال:** بفرض E_2 الفضاء ثنائي البعد عناصره من الشكل :

$x = \{\xi_1 , \xi_2\}$ ولنعرف العلاقات :

-1 $$\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2|$$

-2 $$\|x\|_2 = max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}$$

-3 $$\|x\|_3 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$$

-4 $$\|x\|_4 = (\xi_1^4 + \xi_2^4)^{\frac{1}{4}}$$

ويمكن أن نتأكد من أن جميع موضوعات النظيم محققة .

والسؤال هو ماذا تمثل الكرة الواحدية $s(0,1)$ ؟

لنبحث عن المنحني في المستوي الذي معادلته :

$$|\xi_1| + |\xi_2| = 1 \quad \text{أو} \quad max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}$$

$$\text{أو} \quad \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} = 1 \quad \text{أو} \quad (\xi_1^4 + \xi_2^4)^{\frac{1}{4}} = 1$$

حيث دائرة الوحدة تعطى بالعلاقة $\|x\| = 1$ في الربع الأول لدينا :

$$max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} = 1$$

ومنه نجد أن : كل فضاء خطي منظم هو فضاء متري ، والعكس غير صحيح .

_ إذا كان لدينا مؤثر A يمكن أن يطبق فضاء خطي منظم في فضاء خطي منظم أو فضاء متري في فضاء متري أي :

$$A: E_1 \longrightarrow E_2 \quad \text{أو} \quad A: \|x\|_1 \longrightarrow \|x\|_2 \quad \text{أو} \quad A: d_1 \longrightarrow d_2$$

إذا تحقق : $\|x_1 - x_2\| = \|Ax_1 - Ax_2\|$

فإن : $d_1(x_1, x_2) = d_2(Ax_1, Ax_2)$

عندئذٍ يسمى هذا التطبيق تطبيق إيزومتري (متساوي المسافات أو يحافظ على المسافات)

_ مبرهنة :

ليكن E فضاء خطي منتظم ، عندئذٍ $\forall x, y, z \in E$ ومقدار سلمي λ إذا كانت المسافة تحقق الشروط التالية :

_1 $d(x + z, y + z) = d(x, y)$

_2 $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x, y)$

فإننا ندعو المسافة بأنها مسافة مولدة بالنظيم .

البرهان :

$$d(x + z, y + z) = \|(x + z) - (y + z)\| = \|x - y\| = d(x, y)$$

والشرط الأول محقق .

$$d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda|\|x - y\| = |\lambda|\, d(x, y)$$

والشرط الثاني محقق .

تكافؤ النظائم في الفضاءات الخطية المنتظمة :

ليكن E فضاء خطي منتظم ، وليكن $\|.\|_2 , \|.\|_1$ نظيمين معرفين على E

نقول أن النظيم $\|.\|_2$ يكافئ النظيم $\|.\|_1$ إذا وجد ثابتان موجبان m , M بحيث تتحقق المتراجحة :

$$m\,\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le M\|x\|_1 \quad ; \ \forall x \in E$$

لنبرهن على أن هذه الخاصة هي خاصة تكافؤ :

إذا كانت $\|.\|_3 , \|.\|_2 , \|.\|_1$ نظائم معرفة على E وكان :

$\|.\|_2$ يكافئ $\|.\|_1$ & $\|.\|_3$ يكافئ $\|.\|_2$

فإن :

1- $\|.\|_1$ يكافئ $\|.\|_2$

2- $\|.\|_3$ يكافئ $\|.\|_1$

البرهان :

من الفرض نجد أنه يوجد ثابتان موجبان m , M بحيث :

$$m\,\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le M\|x\|_1$$

وكذلك ثابتان موجبان k , K بحيث :

$$k\,\|x\|_3 \le \|x\|_2 \le K\|x\|_3$$

عندئذٍ نجد أن :

$$\frac{1}{M}\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \frac{1}{m}\|x\|_2$$

أي أن $\|.\|_1$ يكافئ $\|.\|_2$

ويكون لدينا ايضاً :

$$km\,\|x\|_1 \le \|x\|_3 \le KM\|x\|_1$$

أي أن $\|.\|_3$ يكافئ $\|.\|_1$.

_ إذا كان :

$$\|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \quad \text{حيث} \quad M > 0$$

فإنه بالتعريف نقول أن $\|x\|_2$ خاضع للنظيم $\|x\|_1$.

حيث E فضاء خطي منظم و $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ نظيمين معرفين عليه .

_ليكن E فضاء خطي منظم ، وليكن $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ نظيمين معرفين على E حيث $\|\cdot\|_2$ يكافئ $\|\cdot\|_1$ ، إذا وجدت متتالية $\{x_n\}$ متقاربة بالنسبة للنظيم $\|\cdot\|_1$ تكون متقاربة بالنسبة للنظيم $\|\cdot\|_2$، وإذا كانت أساسية بالنسبة لـ $\|\cdot\|_1$ فهي أساسية لـ $\|\cdot\|_2$:

البرهان :

ليكن : $(E , d_1) \quad , \quad (E , d_2)$

ولدينا :

$$m\,\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$$
$$d(x_n , x) \to 0 \;\; ; \;\; n \to \infty$$
$$\|x_n - x\| \to 0 \;\; ; \;\; n \to \infty$$

وبالتالي فإن :

$$\|x_n - x\|_2 \leq \mathrm{M}\|x_n - x\|_1$$

أي أن $\{x_n\}$ متقاربة في (E , d_2)

_ وبالمثل نبرهن الحالة الثانية .

(تعتبر هذه النظرية هامة جداً لبرهان إن النظيمين متكافئين أم لا) .

_ لتكن $\{x_n\}$ متتالية أساسية وفق النظيم الثاني فهي أساسية وفق النظيم الأول ، وبما أن E فضاء تام وفق النظيم الأول فإن $x_n \to x$ وبالتالي فإن $x_n \to x$ وفق النظيم الثاني وبالتالي فإن E تام وفق النظيم الثاني .

انتهت المحاضرة الحادية عشر

أ:عبد القادر أرناؤطي

– **تعريف :**

ليكن X , Y فضائين ، ولدينا تطبيق :

$$T : X \to Y$$

يسمى هوميومورفيزم إذا كان T بحد ذاته مستمراً و T^{-1} موجود ومستمر .

سنستخدم هذا المفهوم بالإضافة الى الايزومورفيزم .

سنفرض أن الفضاءين E_1 , E_2 فضاءين خطيين منظمين ، ولنفرض أن T ايزومورفيزم من E_1 على E_2 وكان T هوميومورفيزم في الوقت نفسه فإن T يسمى ايزوموفيزم توبولوجي لـ E_1 على E_2 ونقول عن الفضاءين E_1 , E_2 أنهما ايزومورفيان تبولوجياً .

الآن سنفرض أن E_1 , E_2 فضاءين خطيين منظمين وكل منهما منتهي البعد ((لأنه حتى يكونا ايزومورفيين يجب أن يكونا منتهيي البعد)) .

مبرهنة (1) :

جميع الفضاءات الخطية المنظمة والمنتهية البعد ، والتي عدد ابعاد كل منها n بعداً يكون ايزومورفية تبولوجياً للفضاء الإقليدي E_n ، وبالتالي تكون ايزومورفية تبولوجياً فيما بينها

ليكن الفضائين :

$$dim\, E = n \qquad , \qquad E_n$$

سنبرهن أن هذين الفضاءين ايزومورفيين تبولوجياً .

لذلك علينا بناء تطبيق هوميومورفيزم وايزومورفيزم بحيث يكون E_n ، E ايزومورفيين

ويجب أن يكون لدينا قاعدة في E ولتكن :

$x_1 , x_2 , \dots , x_n$ ((بما أنها قاعدة فإنها عناصر مستقلة خطياً))

عندئذٍ أي عنصر $x \in E$ يكتب وبشكل وحيد على الشكل :

$$x = \xi_1\, x_1 + \xi_2\, x_2 + \cdots + \xi_n\, x_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, x_i$$

لنعرف تطبيقاً بالشكل :

$$T : E \to E_n$$

بالعلاقة التالية :

$$x \in E \;\; ; \; T\, x = \bar{x} \quad ; \; \bar{x} \in E_n$$

الآن سنختار :

$\bar{x} = (\xi_1 , \xi_2 , \dots , \xi_n)$ ((احداثيات العنصر $\bar{x}$ في الفضاء E_n))

T غامر ومتباين $\Leftarrow$ T^{-1} موجود ، وسنبرهن استمرارية T^{-1} اولاً ثم استمرارية T

من أجل هذا سنحسب :

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, x_i \right\| \le \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \, \|x_i\|$$

نطبق متراجحة مينكوفسكي :

$$\le \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

حسب تعريف النظيم في الفضاء الاقليدي :

$$\|x\| \le M \, \|\bar{x}\| \quad ------- \quad (1)$$

نبدل كل x بـ $x - y$ فنجد :

$$\|x - y\| \le M \, \|\bar{x} - \bar{y}\| \quad -------- \quad (2)$$

بما أن : $T\, x = \bar{x}$ فإنه يمكن ان نضع : $T^{-1}\, \bar{x} = x$ وبالتعويض في (1) نجد :

$$\|T^{-1}\, \bar{x}\| \le M \, \|\bar{x}\|$$

ونعوض في (2) نجد :

$$\|T^{-1}\, \bar{x} - T^{-1}\, \bar{y}\| \le M \, \|\bar{x} - \bar{y}\|$$

وهذه العلاقة تؤكد أن T^{-1} مستمر .

- **الآن علينا أن نبرهن أن T مستمر :**

لتكن S هي سطح الكرة الواحدية $S(\theta\,,1)$

$\left\{S(\theta\,,1)\ :\ \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2=1\right\}$ قشرة الكرة .

لنفرض الآن أن :

$$\bar{x}\in S\ :\ \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2=1\quad ;\ \bar{x}=(\xi_1\,,\xi_2\,,\dots,\xi_n)$$

لنعرف تابعاً على S بالشكل :

$$f\ :\ S\to E$$
$$f(\bar{x})=\|x\|\quad ;\ x\in E$$
$$\Rightarrow\ f(\bar{x})=\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\,x_i\right\|$$

ومنه فإن :

$$f(\bar{x})\ \neq 0\quad ;\ f(\bar{x})>0$$

لنبرهن الآن استمرارية هذا التابع على سطح الكرة ، نكتب :

$$f(\bar{x})-f(\bar{y})=\|x\|-\|y\|\quad ;\ y=(\eta_1\,,\eta_2\,,\dots,\eta_n)$$
$$\Rightarrow\ |f(\bar{x})-f(\bar{y})|=|\|x\|-\|y\||\ \leq\ \|x-y\|$$

لكن وجدنا في المساواة (2) أن :

$$\|x-y\|\leq M\,\|\bar{x}-\bar{y}\|$$

نعوض :

$$|f(\bar{x})-f(\bar{y})|\ \leq M\,\|\bar{x}-\bar{y}\|$$

وهذا يبرهن أن f مستمر ، وهو معرف على مجموعة مغلقة ومحدودة .

حسب وايرشتراس ((كل تابع مستمر على مجموعة مغلقة ومحدودة فإنه يبلغ قيمته الصغرى والعظمى)) .

أي أن f يبلغ قيمته العظمى والصغرى ، لنرمز لقيمته الصغرى بـ α في نقطة ما من سطح الكرة .

جميع قيم هذا التابع موجبة حتى نهايته الصغرى (لا يمكن ان تكون معدومة) ومنه :

$$f(\bar{x})\ \geq\ \alpha\quad ;\ \alpha>0$$

لتكن $\bar{x} \in E_n$ ليست من سطح الكرة :

$$f(\bar{x}) = \|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, x_i \right\|$$

نضرب ونقسم على $\|\bar{x}\|$ للطرف الأيمن

$$f(\bar{x}) = \|x\| = \|\bar{x}\| \frac{\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i \, x_i\|}{\|\bar{x}\|}$$

حيث أن :

$$\bar{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow = \left\| \frac{\xi_1 \, x_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}} + \frac{\xi_2 \, x_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}} + \cdots + \frac{\xi_n \, x_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}} \right\| \|\bar{x}\|$$

لو أخذنا :

$$\bar{z} = \left(\frac{\xi_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}}, \frac{\xi_2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}}, \ldots, \frac{\xi_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}} \right)$$

نحسب النظيم :

$$\|\bar{z}\| = 1 \quad \Rightarrow \; \bar{z} \in S$$

$$\Rightarrow \|x\| = \; f(\bar{x}) \geq \; \alpha \, \|\bar{x}\|$$

$$\Rightarrow \; \|\bar{x}\| \; \leq \frac{1}{\alpha} \, \|x\| \qquad \Rightarrow \; \|T \, x\| \leq \frac{1}{\alpha} \, \|x\|$$

وهو ما يبرهن استمرارية T .

$\Leftarrow$ T مستمر و ايزومورفيزم $\Leftarrow$ $E \, , \, E_n$ ايزومورفيين تبولوجياً .

التقارب بالنظيم $\Leftarrow$ تقارب بالإحداثيات

من الهوميومورفيزم بين E_n , E ينتج ان التقارب بالنظيم يؤدي الى التقارب بالإحداثيات وبما أن E_n تام فإن E تام .

E_n فضاء خطي منظم عدد ابعاده n $\Leftarrow$ فضاء تام $\Leftarrow$ فضاء خطي منظم تام وسميناه فضاء باناخ .

مبرهنة (2) :

كل فضاء خطي منظم منتهي البعد وعدد ابعاده n يكون فضاء باناخ

وليكن $E \ni x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, x_i$

إذا كان لدينا فضاء خطي منظم E عدد ابعاده n أي $dim\, E = n$ ، وكان لدينا نظيماً $\|.\|$ معرف على E ، وهناك نظيم آخر $\|.\|_1$ معرف بالعلاقة :

$$\|x\|_1 = \left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i \, x_i\right\|_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

لنبرهن الآن على أن النظيمين متكافئين ، أي سنبرهن أن :

$$m \,\|x\|_1 \le \|x\| \le M \,\|x\|_1$$

لدينا :

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i \, x_i\right\|$$

نطبق موضوعات النظيم :

$$\le \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \,\| \, x_i\|$$

بتطبيق متراجحة مينكوفسكي :

$$\|x\| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \| \, x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = M \,\|x\|_1$$

هكذا نكون قد حصلنا على الطرف الأيمن من المتراجحة .

مجدداً سنأخذ سطح الكرة الواحدية (نفس الطريقة المتبعة)

لنعرف تابع :

$$f : E \to \mathbb{R}$$

$$f(\xi_1 , \xi_2 , \dots , \xi_n) = \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, x_i \right\|$$

S سطح الكرة الواحدية وهي مجموعة مغلقة ومحدودة ، ومنه فإن f يبلغ قيمته الصغرى m

ونفرض أنه يبلغها في النقطة $(\mu_1 , \mu_2 , \dots , \mu_n)$ أي أن :

$$m = f(\mu_1 , \mu_2 , \dots , \mu_n) \leq f(\xi_1 , \xi_2 , \dots , \xi_n)$$

بنفس الطريقة $m \neq 0$ ((لأنه لو كان $m = 0$ لكانت مجموعة عناصر القاعدة ستكون مرتبطة خطياً ، وهذا لا يمكن))

نحن عرفنا $\|x\|_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

الآن لنختار $y \in E \setminus \{\theta\}$ ، ولنأخذ : $\frac{y}{\|y\|_1}$ ثو نأخذ نظيمه مجدداً

$$\left\| \frac{y}{\|y\|_1} \right\|_1 = 1$$

ومنه فإن :

$$\Rightarrow \ \frac{y}{\|y\|_1} \in S \ \Rightarrow \left\| \frac{y}{\|y\|_1} \right\| \geq m \quad \Rightarrow \|y\| \geq m \, \|y\|_1$$

وهذا ما يثبت المتراجحة بالاتجاه الآخر .

ومنه فإن النظيمين متكافئين .

- نستنتج أن جميع النظائم في الفضاءات الخطية المنظمة المنتهية البعد تكون متكافئة .

توطئة ريس (هام) :

ليكن E فضاء خطي منظم و L فضاء جزئي منه حيث $L \subset E$ & $L \neq E$ ، عندئذٍ من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عنصر مثل $y \in E$ نظيمه يساوي الواحد بحيث أن :

$$\|x - y\| > 1 - \varepsilon$$

وذلك من أجل جميع العناصر $\forall \in L$.

أي أن :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in E \; ; \; \|y\| = 1 \quad ; \quad \|x - y\| > 1 - \varepsilon \;\; ; \forall x \in L$$

البرهان :

((بما أن L فضاء جزئي من E فهو حتماً مغلق))

بما أن L لا يتطابق مع E فإذا أخذنا عنصر مثبت y_0 من E ولا ينتمي إلى L ، ولنضع:

$$d = inf_{\,x\in L}\|y_0 - x\|$$

يمكننا أن نكتب $d > 0$ ، لأنه لو كان $d = 0$ فإنه يمكن إيجاد متتالية x_n من L حيث يكون :

$$d = lim_{n\to\infty}\|y_0 - x_n\| \to 0 \quad \Longrightarrow \quad x_n \to y_0$$

وبالتالي أصبحت y_0 نقطة تراكم (تجمع) لـ x_n ، وبما أن L فضاء جزئي فإنه مغلق ، وبالتالي فهو يحوي على جميع نقاط التراكم وبالتالي $y_0 \in L$ وهذا تناقض .

من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ توجد نقطة مثل $x_0 \in L$ وبحيث أن :

$$d \le \|y_0 - x_0\| < d + \varepsilon\, d \quad ; \;\; \varepsilon > 0$$

لو أخذنا :

$$y = \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} \quad \Longrightarrow \; \|y\| = 1$$

ونلاحظ أن $y \notin L$ (لأنه إذا كان $y \in L$ فإن ذلك يؤدي إلى أن $y_0 \in L$)

لنشكل العنصر :

$$\xi = x_0 + \|y_0 - x_0\|\, x \quad ; \;\; x \in L$$

واضح أن : $\xi \in L$ ، لنحسب الآن $\|y - x\|$:

$$\|y - x\| = \left\| \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} - x \right\| = \frac{1}{\|y_0 - x_0\|}\left\| y_0 - x_0 - x\|y_0 - x_0\| \right\|$$

$$= \left\| y_0 - \xi \right\| \frac{1}{\|y_0 - x_0\|}$$

لدينا :

$$\|y_0 - x_0\| < d + \varepsilon d \;\Rightarrow\; \frac{1}{\|y_0 - x_0\|} > \frac{1}{d + \varepsilon d}$$

نعوض :

$$\|y_0 - \xi\| \frac{1}{\|y_0 - x_0\|} \geq \frac{\|y_0 - \xi\|}{d + \varepsilon d} \geq \frac{d}{d + \varepsilon d} = \frac{1}{1 + \varepsilon}$$
$$= 1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon$$

((إذا صغرنا المقام يكبر الكسر)) .

- **من تطبيقات مبرهنة ريس – مبرهنة البعد المنتهي :**

ليكن E فضاء خطي منظم ، ولنفرض أن الكرة الواحدية المغلقة $\bar{S}(\theta, 1)$ مغلقة ومحدودة وكانت متراصة في E فإن E يكون منتهي البعد .

البرهان :

نفرض العكس أن $dim\, E = \infty$ ، ولنأخذ $x_1 \in E$ حيث أن نظيمه يساوي الواحد ولنولد من هذا الفضاء فضاء أحادي البعد ، ولنأخذ X_1 فضاء أحادي البعد مولد بالعنصر x_1 . أن $X_1 \subset E$ جزئي من E ، وحسب توطئة ريس يوجد عنصر $x_2 \in E$ نظيمه يساوي الواحد وبحيث أن :

$$\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$$

نأخذ x_1 , x_2 ونولد فضاء جزئي آخر (أي نأخذ جميع التراكيب الممكنة لهم) فنحصل على فضاء آخر X_2 فضاء جزئي من E وثنائي البعد .

عندئذٍ يوجد عنصر $x_3 \in E$ نظيمه يساوي الواحد وبحيث أن :

$$\|x_3 - x\| \geq \frac{1}{2} \quad ; \quad x \in X_2$$

بحالة خاصة يكون :

$$\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2} \;\; \& \;\; \|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$$

نستمر على هذا النحو فنحصل على متتالية جزئية $\{x_n\}$ من $\bar{S}$ بحيث أن :

$$\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2} \quad ; \quad n \neq m$$

من الواضح أن هذه المتتالية لا يمكن أن تكون متتالية كوشي وبالتالي لا يمكن أن تحوي متتالية جزئية متقاربة وهذا يناقض كونها متراصة ، ومنه فإن :

$$dim\, E = n$$

وهو المطلوب .

انتهت المحاضرة الثانية عشر

أ:عبد القادر أرناؤطي

سلاسل العناصر في فضاء باناخ :

بفرض $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ عناصر من الفضاء باناخ التام E ولنشكل المجموع

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x_1 + x_2 + \dots\dots\dots\dots + x_n + \dots\dots \qquad ----(1)$$

تسمى العلاقة (1) سلسلة لفضاء باناخ .

ولنشكل متتالية المجاميع الجزئي$\{x_n\}$:

$$S_1 = x_1$$
$$S_2 = x_1 + x_2$$
$$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

فتكون $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية ، عندئذٍ تكون السلسلة (1) متقاربة إذا تقاربت متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ بالنظيم الى x أي لنبرهن :

$$\|S_n - S\| \to 0$$

مبرهنة : لتكن $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ سلسلة ما ذات حدود موجبة ومتقاربة وتحقق $\|x_i\| < a_i$ حيث أن $a_i \geq 0$ (سلسلة عددية) .

فإذا كانت السلسة العددية $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ متقاربة فإن $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ متقاربة .

البرهان : لنشكل متتالية المجاميع

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

بفرض $p > 0$ عندئذٍ :

$$S_{n+p} = \sum_{i=1}^{n+p} x_i \quad ; \quad S_{n+p} - S_n = \sum_{i=n+1}^{n+p} x_i$$

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\|\sum_{i=n+1}^{n+p} x_i\right\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \|x_i\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i$$

باختيار $p \to \infty$ فإن $\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i$ متتالية كوشي لكون المتتالية $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ متقاربة فرضاً .

أي أن $\{S_n\}$ متتالية أساسية ، ومنه $\sum_{i=1}^{n} x_i$ متقاربة .

- **فضاءات هيلبرت المجردة :**

E_n فضاء خطي ذو n بعد فوق حقل الأعداد العقدية ، عندئذٍ تعطى عناصره بالشكل

: عندئذٍ $y = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ و $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$

سنفرض حاصل ضرب الشعاعين:

$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{\eta}_i$ (عملية جداء داخلي)

عندئذٍ فإن :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \quad ; \quad \|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

وهذه المفاهيم يمكن تعميمها ليس فقط على الفضاءات المنتهية البعد وإنما على الفضاءات اللانهائية البعد.

_ **تعريف** : يكون H فضاء هيلبرت إذا تحقق :

1) H فضاء خطي منظم .

2) من أجل كل $x, y \in H$ يقابل بعدد مركب نرمز له (x, y) يسمى بالجداء الداخلي للعنصرين ، وهو يتصف بالخواص التالية :

(a $\quad (x, y) = \overline{(y, x)}$

بحالة خاصة : $(x, x) = \overline{(x, x)} \Leftarrow$ (x, x) حقيقي دوماً .

(b $\quad (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$

(c $\quad (\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad ; \ \lambda \in \mathbb{C}$

(d $\quad (x, x) \geq 0$ حقيقي $\Leftarrow \|x\| = \sqrt{(x, x)} = (x, x)^{\frac{1}{2}}$

& $\quad (x, x) = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = \theta$

أي $x = \theta \quad \Rightarrow \quad \|x\| = 0$

3) H تام بالنسبة للمسافة $d(x,y) = \|x-y\|$

إذا تحققت الشروط (3) , (2) , (1) فإن H يسمى فضاء وحدي (Unitary) .

4) من أجل أي عدد طبيعي n يوجد n من العناصر غير المرتبطة(المستقلة) في H $\forall n \quad x_1, x_2, \dots, x_n$ ،وبالتالي فإن H فضاء لانهائي البعد ، ويسمى بفضاء هيلبرت المجرد واختصاراً فضاء هيلبرت .

مثال (95) : في الفضاء l_p فضاء المتتاليات العددية إذا كان $p \neq 2$ فالفضاء l_p ليس مولد من جداء داخلي . وبالتالي فهو ليس فضاء هيلبرت .

الفضاء l_p فضاء المتتاليات العددية ، عناصره من الشكل :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty \quad \text{حيث} \quad x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$

عندما $p = 2$ فإن :

$(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \bar{\eta}_i$ نطبق متراجحة بونياكوفسكي :

$$|(x,y)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \bar{\eta}_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

عندئذٍ نسمي هذا الفضاء فضاء هيلبرت الاحداثي .

ـ **مثال** : برهن على أن الفضاء $L_\rho^2[0,1]$ فضاء جميع التوابع العقدية المعرفة والقيوسة على المجال $[0,1]$ هو فضاء هيلبرت .

الحل : ليكن لدينا $x \in L_\rho^2[0,1]$ أي

$$\int_0^1 |x(t)|^2 \, dt < \infty$$

والتي من أجلها :

$$\int_0^1 \rho(t) |x(t)|^2 dt < \infty \; ; \; \rho(t) \geq 0 \; (a.e)$$

حيث $\rho(t)$ على مجموعة تامة القياس .

نعرف الجداء الداخلي بالشكل :

$$(x,y) = \int_0^1 \rho(t)\, x(t).\overline{y(t)}\, dt$$

لنبرهن على تقارب التكامل :

$$\int_0^1 [\sqrt{\rho(t)}\, x(t)].[\sqrt{\rho(t)}\ \overline{y(t)}\,]dt \ \le$$

نطبق متراجحة بونياكوفسكي :

$$\le \left(\int_0^1 \rho(t)\, x^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_0^1 \rho(t) y^2(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

وبالتالي الجداء (x,y) له معنى والفضاء $L_\rho^2[0,1]$ هو فضاء هيلبرت .

– في حالة خاصة بأخذ $\rho(t) = 1$ يكون أيضاً $L_1[0,1]$ فضاء هيلبرت .

خصائص فضاء هيلبرت :

من أجل $\forall x, y, z \in H \ , \ \lambda \in \mathbb{C}$

1) $$(x\,, y+z) = (x\,,y) + (x\,,z)$$

2) $$(x\,,\lambda\, y) = \overline{\lambda}\,(x\,,y)$$

3) $$\|\lambda\, x\| = |\lambda|\,.\,\|x\|$$

البرهان :

1) $$(x\,, y+z) = \overline{(y+z\,,x\,)} = \overline{(y\,,x) + (z\,,x)} = \\ = \overline{(y\,,x)} + \overline{(z\,,x)} = (x\,,y) + (x\,,z)$$

2) $$(x\,,\lambda\, y) = \overline{(\lambda\, y\,,x\,)} = \overline{\lambda(\,y\,,x\,)} = \bar{\lambda}\,\overline{(\,y\,,x\,)} = \bar{\lambda}(x\,,y\,)$$

3) $$\|\lambda\, x\|^2 = (\lambda x\,, \lambda\, x\,) = \lambda.\bar{\lambda}\,(x\,,x) = |\lambda|^2\, \|x\|^2 \Rightarrow \|\lambda\, x\| = |\lambda|\,.\,\|x\|$$

ونجد مما سبق أن :

$$\|x\| = \sqrt{(x\,,x)} \ \ ; \ \ (x\,,x) \ge 0$$

متراجحة بونيكافسكي – شفارتز (هام) :

من أجل أي عنصرين $x\,,y$ من H و $y \neq \theta$ ، وأي عدد مركب λ يكون :

$$|(x\,,y)| \leq \|x\|\,.\,\|y\|$$

البرهان :

$$(x+\lambda y\,,x+\lambda y) = (x\,,x) + \bar{\lambda}(x\,,y) + \lambda(y\,,x) + |\lambda|^2(y\,,y) \geq 0$$

حيث أن : $\|x\|^2 = (x\,,x) \quad , \quad \|y\|^2 = (y\,,y)$

لنضع :

$$\lambda = -\frac{(x\,,y)}{(y\,,y)} = -\frac{(x\,,y)}{\|y\|^2}$$

نعوض فنجد :

$$\|x\|^2 - (x\,,y)\,\frac{\overline{(x\,,y)}}{\|y\|^2} - (y\,,x)\frac{(x\,,y)}{\|y\|^2} + \frac{|(x\,,y)|^2}{\|y\|^2} \geq 0$$

$$\|x\|^2 - 2\frac{|(x\,,y)|^2}{\|y\|^2} + \frac{|(x\,,y)|^2}{\|y\|^2} \geq 0$$

$$\|x\|^2 - \frac{|(x\,,y)|^2}{\|y\|^2} \geq 0$$

نضرب الطرفين بـ $\|y\|^2$ وبجذر الطرفين نجد :

$$\boxed{|(x\,,y)| \leq \|x\|\,.\,\|y\|}$$

وهي متراجحة بونيكافسكي – شفارتز ، وهذه المتراجحة محققة من أجل $y = \theta$.

برهان خاصة المثلث للنظيم باستخدام متراجحة بونيكافسكي – شفارتز :

$$\|x+y\|^2 = (x+y\,,x+y) = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 =$$

$$= \|x\|^2 + 2\,Re\,(x,y) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\,|(x,y)| + \|y\|^2$$

باستخدام متراجحة بونيكافسكي – شفارتز نجد :

$$\le \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$$

التقارب في فضاء هيلبرت :

لتكن $\{x_n\}$ متتالية متقاربة من x & $\{y_n\}$ متقاربة من y أي :

$$\|x_n - x\| \to 0 \quad ; \; n \to \infty$$

$$\& \quad \|y_n - y\| \to 0 \quad ; \; n \to \infty$$

لدينا :

$$\|x_n - x\| \ge |\|x_n\| - \|x\||$$

أي أن متتالية النظائم $\|x_n\| \to \|x\|$ وتكون الأعداد $\|y_n\|, \|x_n\|$ محدودة .

أي $\|x_n\| \le M$ & $\|y_n\| \le M$ (محدودة)

الجداء الداخلي تابع مستمر بالنسبة للتقارب بالنظيم .

البرهان :

لتكن $\quad x_n \to x \;,\; y_n \to y$

$$|(x_n, y_n) - (x,y)| = |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x,y)| =$$

$$= |(x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)| \le |x_n, y_n - y| + |(x_n - x, y)|$$

نطبق متراجحة بونيكافسكي – شفارتز :

$$\le \|x_n\|\,\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\,\|y\| \to 0$$

أي أن :

$$(x_n, y_n) \to (x,y)$$

أي أن الجداء الداخلي تابع مستمر بالنسبة للمتغيرين.

الخاصة المميزة للنظيم المولد بالجداء الداخلي :

H فضاء هيلبرت :

$$\|x+y\|^2 = (x+y\,,x+y) = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2$$
$$\|x-y\|^2 = (x-y\,,x-y) = \|x\|^2 - (x,y) - (y,x) + \|y\|^2$$

بجمع العلاقتين الأخيرتين نجد :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2) - - \quad (*)$$

وهي العلاقة المسماة بـ قاعدة متوازي الأضلاع .

وبالعكس : إذا كان النظيم يحقق العلاقة (*) فهو مولد من جداء داخلي .

_ ملاحظة :

1- إذا كان الفضاء الخطي المنظم تاماً بمفهوم المسافة المولدة بالنظيم فإنه يسمى فضاء باناخ .

2- كل فضاء هيلبرت هو فضاء باناخ ، ولكن العكس غي صحيح بشكل عام .

3- إذا كان النظيم في فضاء باناخ يحقق علاقة متوازي الأضلاع فهو فضاء هيلبرت .

4- النظيم الذي يحقق علاقة متوازي الأضلاع يعني انه معرف بدلالة جداء داخلي.

مثال : برهن أن النظيم في الفضاء l_p حيث $p \neq 2$ غير مولد بجداء داخلي .

الحل : لنأخذ

$$x = (1\,,1\,,0\,,0,\dots) \quad , \quad y = (1\,,-1\,,0\,,0\,,\dots)$$

حيث $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ وذلك أياً كان $x \in l_p$

فإن :

$$\|x\| = 2^{\frac{1}{p}} \quad , \quad \|y\| = 2^{\frac{1}{p}}$$
$$x+y = (2\,,0\,,0\,,\dots) \quad , \quad x-y = (0\,,2\,,0\,,0,\dots)$$

ومنه :

$$\|x+y\| = 2 \quad , \quad \|x-y\| = 2$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 8 \ \& \ 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4 \times 2^{\frac{2}{p}}$$

$$\Rightarrow \quad 8 \neq 2\left(2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}}\right) = 4 \times 2^{\frac{2}{p}}$$

$$8 \neq 4 \times 2^{\frac{2}{p}}$$

لم تتحقق علاقة متوازي الأضلاع وبالتالي فإن الفضاء l_p ليس فضاء هيلبرت.

ولكن بحالة $p = 2$ يكون فضاء هيلبرت .

- **مثال** : الفضاء $C\,[0,1]$ حيث $\forall x \in C\,[0,1]$; $\|x\| = \max_t |x(t)|$:

بأخذ $x(t) = 1 \quad , \quad y(t) = t$

حيث يكون لدينا :

$$\|x\| = \max_t 1 = 1$$

$$\|y\| = \max_t |t| = 1$$

$$x + y = 1 + t \quad \Rightarrow \quad \|x+y\| = \max_t |1+t| = 2$$

$$x - y = 1 - t \quad \Rightarrow \quad \|x-y\| = \max_t |1-t| = 1$$

$$\Rightarrow \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4 + 1 = 5$$

$$2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2\,(1+1) = 4$$

$$\Rightarrow \quad 5 \neq 4$$

أي أن النظيم ليس مولد من جداء داخلي

_ تعريف :

اذا كان $x\,, y \in H$ نقول عن العنصرين أنهما متعامدان ونرمز لذلك بالشكل $y \perp x$ إذا كان $(x\,, y) = 0$.

❖ **خواص :**

1-الشعاع الصفري يعامد كل أشعة الفضاء المختلفة عن الصفر :

$$x = \theta \;\Rightarrow\; x \perp y \quad \forall y$$

-2 $x \perp x \;\Rightarrow\; x = \theta \;,\; (\theta , x) = 0$

3-إذا كان x شعاع ما يعامد الأشعة $y_1 , y_2 , \dots , y_n$ فإنه يعامد اي تركيب خطي لها :

البرهان :

نشكل التركيب الخطي $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, y_i$

سنبرهن أن x عمودي على التركيب الخطي اي سنبرهن :

$$\left(x \,, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, y_i \right) = 0 \;\Rightarrow\; (x, \alpha_1 \, y_1 + \alpha_2 \, y_2 + \cdots + \alpha_n \, y_n) =$$

$$= \bar{\alpha}_1 (x \,, y_1) + \cdots + \bar{\alpha}_n (x \,, y_n) = 0$$

4-لتكن $M \subset H$ بالتعريف نقول أن $x \perp M$ إذا تحقق :

$$(x \,, y) = 0 \quad ; \; \forall \, y \in M$$

5-لتكن $\{y_n\}$ متتالية ما من M ومتقاربة الى العنصر y :

وليكن $0 = (x \,, y)$ عندئذٍ فإن $x \perp y$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{n} (x \,, y) = \left(x \,, \lim_{n} y_n \right) = (x, y)$$

أي أن :

$$x \perp \lim_{n} y_n = y$$

ومنه نستنتج أنه إذا كان هناك مجموعة M مغلقة في H وكان x يعامد M فإن $x \perp \overline{M}$.

6- بفرض M كثيفة في كل مكان في H أي أن $\overline{M} = H$ إذا كان :

$$x \perp M \;\Rightarrow\; x \perp H \;\Rightarrow\; x \perp x \;\Rightarrow\; x = \theta$$

أي لا يوجد أي عنصر آخر معامد لـ x إلا العنصر الصفري .

مبرهنة تعميم علاقة فيثاغورث :

لتكن $x_1 , x_2 , \dots , x_n , \dots$ متعامدة مثنى مثنى أي أن $x_i \perp x_j \ ; i \neq j$

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ متقاربة إلى x أي $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ فإن :

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$$

وهي تعميم علاقة فيثاغورث .

البرهان :

لنشكل الجداء الداخلي :

$$\|x\|^2 = (x , x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n , \sum_{m=1}^{\infty} x_m \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n , \sum_{m=1}^{\infty} x_m \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (x_n , x_m) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n , x_n) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 & ; \ n = m \\ 0 & ; \ n \neq m \end{cases}$$

وهو المطلوب .

انتهت المحاضرة الثالثة عشر

أ:عبد القادر أرناؤطي

_ تعريف :

بفرض $x \in H$ نقول أن العنصر x يعامد الفضاء الجزئي $L \subset H$ ونكتب $x \perp L$

إذا كان x معامداً لكل عنصر $y \in L$ أي أن :

$$x \perp y \;\; ; \;\; \forall\, y \in L$$

ونقول عن الفضاءين الجزئيين M , L من H أنهما متعامدان ونكتب $L \perp M$ إذا كان :

$$x \perp y \;\; ; \;\; \forall x \in L \;\; , \;\; \forall y \in M$$

ومن ذلك ينتج أن العنصر الوحيد المشترك بين فضائين جزئيين متعامدين هو العنصر الصفري .

مبرهنة النشر المتعامد (هام جداً) :

لنفرض أن L فضاء جزئي من H ولنبرهن على أن :

$$\forall x \in H \; ; \; x = y + z \quad ; \; y \in L \;\; \& \; z \perp L$$
$$x \in L \;\; \Longrightarrow \;\; x = y \;\; ; z = \theta$$

قبل البداية بالبرهان :

من الفرض نجد :

L فضاء جزئي من H (فضاء هيلبرت) هذا يعني أن L (متنوعة خطية – مغلقة) تحقق خاصتا الضرب بكمية سلمية والجمع .

الطلب : $\forall x \in H \;\; \Longrightarrow \;\; x = y + z \quad ; \; y \in L \;\; \& \; z \perp L$

خطوات البرهان :

1) ايجاد y (عن طريق تشكيل متتالية أساسية) ، ثم البرهان على أن $y \in L$.

2) ايجاد z بحيث $z \perp L$ ، ثم برهان المساواة $x = y + z$

3) برهان الوحدانية (نختار نقطة أخرى و البرهان على أنها هي نفس النقطة السابقة) .

ملاحظة :

$$inf A = \alpha \;\; \Longrightarrow \;\; \exists a_n \in A \;\; , \;\; a_n \to \alpha$$
$$sup A = \alpha \;\; \Longrightarrow \;\; \exists a_n \in A \;\; , \;\; a_n \to \alpha$$

البرهان : الخطوة الأولى .

- في حالة $x \in L$ فإن x يمكن أن تكتب على شكل مجموع عنصرين الأول من L والثاني عامودي على L .
- بفرض أن $x \notin L$ فإن :

$$d = \inf_{y \in L} \|x - y\|^2 \implies \exists\, y_n \in L \; ; \; d_n = \|x - y_n\|^2$$

بحيث يكون $d_n \to d$

لنختار $\theta \neq h \in L$ ومن أجل أي عدد مركب ε فإن $y_n + \varepsilon\, h \in L$:

$$d \leq \|x - (y_n + \varepsilon\, h)\|^2 = \big((x - y_n) - \varepsilon\, h\,, (x - y_n) - \varepsilon\, h\big) =$$

$$= \|x - y_n\|^2 - \bar{\varepsilon}\big((x - y_n), h\big) - \varepsilon\big(h, (x - y_n)\big) + |\varepsilon|^2 \|h\|^2$$

لنختار $\varepsilon = \frac{((x-y_n),h)}{\|h\|^2}$ نعوض في العلاقة الأخيرة :

$$d \leq \|x - y_n\|^2 - 2\frac{|(x - y_n, h)|^2}{\|h\|^2} + \frac{|(x - y_n, h)|^2}{\|h\|^2}$$

$$d \leq \|x - y_n\|^2 - \frac{|(x - y_n, h)|^2}{\|h\|^2} \;, (d_n = \|x - y_n\|^2)$$

$$\implies d_n - d \geq \frac{|(x - y_n, h)|^2}{\|h\|^2}$$

$$\implies |(x - y_n, h)|^2 \leq (d_n - d)\|h\|^2$$

$$\implies |(x - y_n, h)| \leq \sqrt{(d_n - d)}\|h\| \; - - - - - \; I$$

باستبدال كل n بـ m :

$$\implies |(x - y_m, h)| \leq \sqrt{(d_m - d)}\|h\| \; - - - - - \; II$$

بجمع العلاقتين $I \;\&\; II$ حيث $|(x - y_m, h)| = |(y_m - x, h)|$ نجد :

$$|(x - y_n, h)| + |(x - y_m, h)| \leq \left(\sqrt{(d_n - d)} + \sqrt{(d_m - d)}\right)\|h\|$$

أو

$$|(x-y_n,h)+(y_m-x,h)| \le |(x-y_n,h)|+|(x-y_m,h)|$$
$$\le \left(\sqrt{(d_n-d)}+\sqrt{(d_m-d)}\right)\|h\|$$
$$|(x-y_n,h)|+|(x-y_m,h)| = |(x-y_n+x+y_m,h)| = (y_m-y_n,h)$$

حسب موضوعات هيلبرت نجد :

$$|(y_m-y_n,h)| \le \left(\sqrt{(d_n-d)}+\sqrt{(d_m-d)}\right)\|h\|$$

نختار h بالشكل $h=y_m-y_n$ نجد أن :

$$(y_m-y_n,y_m-y_n)=\|y_m-y_n\|^2 \le \sqrt{(d_n-d)}+\sqrt{(d_m-d)}\|y_m-y_n\|$$
$$\Rightarrow \|y_m-y_n\| \le \sqrt{(d_n-d)}+\sqrt{(d_m-d)} \to 0 \quad ; \ n,m\to\infty$$

أي أن $\{y_n\}$ متتالية اساسية في H ، وبما أن H فضاء هيلبرت تام ، فتكون $\{y_n\}$ متقاربة إلى عنصر من H وليكن y أي :

$y_n \to y \in L$ **الى هنا نهاية الخطوة الأولى**

الخطوة الثانية : من (I) وجدنا أن : $|(x-y_n,h)| \le \sqrt{(d_n-d)}\|h\|$

بالانتقال إلى النهاية عندما $n\to\infty$ نجد :

$$|(x-y,h)|=0 \Rightarrow (x-y,h)=0 \Rightarrow x-y\perp h$$

بفرض $z=x-y$ فيكون $z\perp L$ ، ومنه يكون $x=y+z$.

الى هنا نهاية الخطوة الثانية وهي برهان علاقة النشر .

الخطوة الثالثة : لنبرهن على وحدانية التمثيل (وحدانية النشر) :

بفرض وجود تمثيل آخر للعنصر $x=y_1+z_1$ حيث $y_1\in L \ , z_1\perp L$

$$\Rightarrow x=x \Rightarrow y+z=y_1+z_1 \Rightarrow y-y_1=z_1-z$$
$$\Rightarrow \|y-y_1\|^2=(y-y_1,y-y_1)=(y-y_1,z_1-z)=0$$

ومنه فإن $z=z_1$, $y=y_1$ والتمثيل وحيد . **نهاية المبرهنة**

_ تعريف :

ليكن $z_1 , z_2 , \dots , z_k \in M$ جميع هذه العناصر عمودية على y أي جداؤها الداخلي مع y يساوي الصفر حيث M مجموعة ما .

لتكن M هي المتمم المعامد في الفضاء الجزئي L عندئذٍ :

$$H = L \oplus M$$

المجموع المتعامد هو حالة خاصة من المجموع المباشر .

❖ **تعريف : الجملة المتعامدة المنظمة (سؤال دورة) .**

لتكن $e_1 , e_2 , \dots , e_n$ مجموعة من العناصر في فضاء هيلبرت H والمستقلة خطياً ، بالتعريف نقول عن هذه الجملة أنها متعامدة ومنظمة إذا كان :

$$(e_i , e_j) = \delta_{i\,j} = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ 1 & ; \quad i = j \end{cases}$$

- **مبرهنة :**

إذا كانت جملة الأشعة $h_1 , h_2 , \dots , h_n , \dots$ مستقلة خطياً في فضاء هيلبرت ، هل يمكن جعل هذه الجملة جملة متعامدة منظمة .

البرهان : باختيار

$$e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|} \;\; ; \;\; g_1 = h_1 \quad \Longrightarrow \quad e_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|}$$

لنشكل الجداء الداخلي :

$$\|e_1\|^2 = (e_1 , e_1) = \left(\frac{h_1}{\|h_1\|} , \frac{h_1}{\|h_1\|}\right) = 1$$

لنشكل العنصر

$$e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|} \;\; ; \;\; g_2 = h_2 - c_{21}\, e_1$$

لنعين c_{21} (وهو المجهول الوحيد) بحيث يكون $(g_2 , e_1) = 0$ أي أن $g_2 \perp e_1$:

$$0 = (g_2 , e_1) = (h_2 - c_{21}\, e_1 , e_1) = (h_2 , e_1) - c_{21}(e_1 , e_1)$$
$$\Longrightarrow c_{21} = (h_2 , e_1)$$

لنبرهن أن $g_2 \neq \theta$: لو كان $g_2 = \theta$ لكان

$$g_2 = h_2 - c_{21}\, e_1 = h_2 = c_{21} e_1 = c_{21} \frac{h_1}{\|h_1\|}$$

أي أن h_2 و h_1 مرتبطان خطياً ، وهذا تناقض كونها مستقلة خطياً فرضاً ، إذا $g_2 \neq \theta$.

بنفس الطريقة نبني العنصر e_k :

نختار :

$$g_k = h_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki}\, e_i \quad ; \quad c_{ki} = (h_k, e_i)$$

لنعين c_{ki} بحيث يكون g_k يعامد $e_1 , e_2 , \dots , e_{k-1}$

_ مثال : دورة 2007-2008 تكميلية .

لتكن مجموعة التوابع المستقلة خطياً $1 , t , t^2 , \dots$ في الفضاء $L^2[-1 , 1]$ ، استخدم طريقة شميث في ايجاد الحدود الثلاث الأولى المتعامدة على المجال $[-1 , 1]$.

الحل : في $L^2[-1 , 1]$ لدينا

$$\|x(t)\| = \left(\int_{-1}^{1} |x(t)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(x, y) = \int_{-1}^{1} x(t)\overline{y(t)}\, dt$$

المطلوب ايجاد e_1, e_2, e_3 :

ايجاد e_1 :

$$e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|} = \frac{h_1}{\|h_1\|} \quad ; \quad g_1 = h_1$$

$$h_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \|h_1\|^2 = \int_{-1}^{1} dt = 2 \qquad \Rightarrow \quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ايجاد e_2 :

$$e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|} \quad ; \quad g_2 = h_2 - c_{21}\, e_1 = t - c_{21}\, e_1$$

لنعين c_{21} :

$$c_{ki} = (h_k, e_i) \;\Rightarrow\; c_{21} = (h_2, e_1) = (t, e_1)$$

$$\Rightarrow\; c_{21} = \int_{-1}^{1} t\,\overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\, dt = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \int_{-1}^{1} t\, dt = 0 \;\Rightarrow\; g_2 = t$$

$$\Rightarrow\; \|g_2\|^2 = \|t\|^2 = \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; \|g_2\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow\; e_2 = \frac{t}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \;\Rightarrow\; e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, t$$

ايجاد e_3 :

$$e_3 = \frac{g_3}{\|g_3\|} \quad ; \quad g_3 = h_3 - c_{31}\, e_1 - c_{32}\, e_2$$

ونكمل بنفس الأسلوب السابق . . .

_ **مثال :** في الفضاء $L^2_\rho[a\,,b]$ ، لدينا الجداء الداخلي :

$$\int_a^b \rho(t)\, x(t)\, \overline{y(t)}\, dt$$

ولتكن e^{-t^2} , e^{-t} نقول أنها متعامدة بالوزن ρ حيث $\rho = 1$.

_ **مثال :**

في الفضاء $C^2[0\,,1]$ لتكن مجموعة التوابع $\{e^{i\,2\pi\, n\, t}\}$ يكون :

$$\int_0^1 e^{i\,2\,\pi\, n\, t} . e^{-i\,2\,\pi\, m\, t}\, dt = \int_0^1 e^{i\,2\,\pi\,(n-m)t}\, dt =$$

$$= \left[\frac{1}{i\,2\,\pi\,(n-m)}\; e^{i\,2\,\pi\,(n-m)t}\right] = 0 \;\; ; \;\; n \neq m$$

وإذا كان $n = m$ فإن :

$$\int_0^1 e^{i\,2\,\pi\,n\,t} \,.\, e^{-i\,2\,\pi\,n\,t}\, dt = 1$$

والجملة متعامدة منظمة .

مبرهنة :

الشرط اللازم والكافي كي تكون المتنوعة الخطية l كثيفة في H هو أن لا يوجد عنصر مغاير للصفر عمودي على l :

البرهان $\Longleftarrow$:

بفرض l كثيفة في H وأن $x \perp l$ عندئذٍ $x \perp H$ ، وبما أن $x \in H$ فإن $x \perp x$ أي $(x, x) = 0$ ومنه $x = \theta$.

$\Longrightarrow$: لنبرهن أولاً أن (لا يوجد عنصر مغاير للصفر عمودي على $l \;\Longleftarrow\; l$ كثيفة في H)

بفرض أن $\bar{l} \neq H$ ، إن فضاء جزئي (متنوعة خطية_مغلقة) عندئذً :

$$\exists\, x \notin \bar{l} \;\;\Rightarrow\;\; x = y + z \;\; ; \;\; y \in \bar{l} \;,\; z \perp \bar{l}$$

ولدينا :

$$y \in \bar{l} \;,\; x \notin \bar{l} \;\;\Rightarrow\;\; z \neq 0$$

وبما أن $z \perp \bar{l}$ فإن $z \perp l$.

وجدنا عنصر مغاير للصفر وعمودي على جميع عناصر l وهذا يخالف الفرض ومنه نجد أن $\bar{l} = H$ أي l كثيفة في كل مكان في H ، وهو المطلوب .

_ ليكن $e_1 , e_2 , \ldots , e_n$ وليكن $\varepsilon > 0$

$$\forall x \;;\; \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \;\, e_i \right\| < \varepsilon$$

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ e_i\right\|^2=\left(x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ e_i\ ,x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ e_i\right)=$$

$$=\ \|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}\bar{\alpha}_i(x,e_i)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ (e_i,x)+\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2$$

$$(x,e_i)=c_i\quad ;\quad i=1\,,2\,,\ldots,n$$

نسمي c_i معاملات فورييه للعنصر x بالنسبة للجملة المتعامدة النظامية :

$$|\alpha_i-c_i|^2=(\alpha_i-c_i)(\bar{\alpha}_i-\bar{c}_i)=|\alpha_i|^2-\alpha_i\bar{c}_i-\ c_i\bar{\alpha}_i+\ |c_i|^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i-c_i|^2=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-c_i)(\bar{\alpha}_i-\bar{c}_i)=$$

$$=\ \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{c}_i-\sum_{i=1}^{n}c_i\bar{\alpha}_i+\sum_{i=1}^{n}\ |c_i|^2=$$

$$=\|x\|^2+\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i-c_i|^2-\sum_{i=1}^{n}\ |c_i|^2$$

إذا كان $\alpha_i=c_i$ فإن :

$$0\le\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ e_i\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}\ |c_i|^2<\varepsilon^2$$

$$\|x\|^2-\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ |c_i|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\ |c_i|^2\longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow\ \ \|x\|^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ |c_i|^2=\sum_{i=1}^{n}\ |c_i|^2$$

وبالتالي فإن:

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{n}\ |c_i|^2$$

ـ ليكن $x \in H$ عنصر كيفي من H حيث أن الجملة المتعامدة المنظمة في L هي :

$$e_1, e_2, \dots \dots \dots \dots, e_n, \dots$$

$$x = y + z \quad ; \quad z \in L \quad , \quad y \perp L$$

لنحسب :

$$(x, e_i) = (z + y, e_i) = (z, e_i)$$

$$(y + z, y + z) = \|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|z\|^2$$

بما أن $z \in L$ فإنه يتحقق :

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = \|y\|^2$$

وهي متراجحة بارسيفال .

انتهت المحاضرة الرابعة عشر

أ:عبد القادر أرناؤطي

❖ **تعريف** : لتكن $e_1 , e_2, \dots \dots \dots , e_n, \dots \dots$ جملة متعامدة ومنظمة

_ نقول عن هذه الجملة أنها تامة في H إذا لم يوجد عنصر مغاير للصفر ومعامد لجميع عناصر هذه الجملة .

_ نقول عن هذه الجملة أنها مغلقة إذا كان الفضاء المولد بتلك الجملة يتطابق مع الفضاء الكلي H (إذا كانت لصاقة المتنوعة الخطية L المولدة ب $\{e_i\}$ تطابق H أي $\overline{L} = H$)

- **مبرهنة :**

إذا كانت $\{e_i\}$ جملة متعامدة منظمة في فضاء هيلبرت H عندها:

الجملة $\{e_i\}$ تامة $\Leftrightarrow$ الجملة $\{e_i\}$ مغلقة

البرهان $\Leftarrow$:

إذا كانت $e_1 , e_2, \dots \dots \dots , e_n, \dots \dots$ جملة تامة، ولنبرهن أنها مغلقة.

بما أنها تامة إذاً لا يوجد عنصر معامد لجميع عناصر هذه الجملة سوى العنصر الصفري

إذا كان يوجد عنصر x بحيث:

$$x \perp e_i \ ; \ \forall i = 1,2, \dots \dots$$

فإن : $x \perp L$ حيث L المتنوعة الخطية المولدة ب $\{e_i\}$ ومنه $x \perp \overline{L}$.

إذاً لا يوجد عنصر يعامد لصاقة المتنوعة الخطية L إلا العنصر الصفري وبالتالي فإن L كثيفة في كل مكان في H ، أي $\overline{L} = H$ ومنه فإن الجملة $\{e_i\}$ مغلقة.

$\Rightarrow$: إذا كانت $e_1 , e_2, \dots \dots \dots , e_n, \dots \dots$ جملة مغلقة، ولنبرهن أنها تامة.

أي لنبرهن على عدم وجود عنصر معامد ل L إلا العنصر الصفري ، لنفرض أن $x \in H$ غير صفري ويعامد جميع عناصر L

$$x \perp e_i \ ; \ \forall i = 1,2, \dots \dots$$

و $\{e_i\}$ جملة متعامدة ومنظمة في H عندئذٍ (وبما أن $\{e_i\}$ أي $\overline{L} = H$)

فإن $x \in \overline{L}$:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^2$$

حيث : $C_i = (x, e_i) = 0$

أي $\|x\|^2 = 0$ ومنه $x = \theta$ وهذا تناقض ومنه فإن الجملة $\{e_i\}$ تامة .

_ **ملاحظة** : نسمي الجملة المتعامدة والمنظمة و التامة (أو المغلقة) بـ قاعدة متعامدة أو قاعدة .

_ **إذا كان H قابل للفصل ، لنبرهن على وجود جملة متعامدة – منظمة :**

كل جملة متعامدة منظمة مغلقة تسمى قاعدة في فضاء هيلبرت :

ليكن :

$$\{g_1, g_2, \dots, g_n, \dots\} \quad ; \quad g_i \neq 0$$

قابلة للعد وكثيفة في كل مكان في H .

لنأخذ :

$$e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|}$$

لنشكل الفضاء الجزئي أحادي البعد المشكل من L_1 ولنشكل $H \ominus L_1$ حيث :

$$g_{n_2} \notin L_1$$

ولنرمز بـ h_2 لمسقط العنصر g_{n_2} على الفضاء $H \ominus L_1$ عندئذٍ :

$$e_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|}$$

نشكل L_2 المولد بالعنصرين e_1 , e_2 ونأخذ المتممة المتعامدة $H \ominus L_2$

$$e_2 = \frac{h_3}{\|h_3\|}$$

حيث h_3 لمسقط العنصر g_{n_3} على الفضاء $H \ominus L_2$.

ليكن H قابل للفصل ، فإنه توجد قاعدة $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ متعامدة – منظمة تامة .

$$\forall\, x \ ; \ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \quad ; \quad c_i = (x, e_i)$$

إذا كان x عنصراً ما من H ، فإنه يمكن مقابلة هذا العنصر بالمتتالية العددية $\{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$ ، وكما وجدنا تكون السلسلة :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$$

متقاربة ، وبالتالي يمكن النظر إلى المتتالية $\{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$ كعنصر $\tilde{x} \in L_2$ ،

وبذلك نكون قد قابلنا كل عنصر $x \in H$ بعنصر $\tilde{x} \in L_2$ وتبعاً لتمامية الجملة $\{e_i\}$ يكون لدينا :

$$\|x\|_H^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = \|\tilde{x}\|_{L_2}^2$$

ومنه يكون أيضاً :

$$x \pm y \in H \;\; \rightarrow \;\; \tilde{x} \pm \tilde{y} \in L_2$$

ومنه يمكن أن نكتب :

$$\|x \pm y\|^2 = \|\tilde{x} \pm \tilde{y}\|_{L_2}^2$$

بما أن المسافتين متساويتين فيوجد إيزومترية بين H , L_2 .

- ليكن $\tilde{z} \in l_2$ ، لنستعرض في H العناصر :

$$z_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, e_i \quad ; \quad n = 1,2, \dots$$

لندرس طبيعتها ، لنأخذ $m < n$:

$$z_m = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \, e_i$$

$$z_n - z_m = \sum_{i=m+1}^{n} \xi_i \, e_i$$

$$\|z_n - z_m\|^2 = \left(\sum_{i=m+1}^{n} \xi_i \, e_i \; , \; \sum_{i=m+1}^{n} \xi_i \, e_i \right) =$$

$$= \sum_{i=m+1}^{n} |\xi_i|^2 \to 0 \quad ; \quad n,m \to \infty$$

أي أن $\{z_n\}$ اساسية ، فإن $z_n \to z \in H$ ، وبما أن :

$$(z, e_i) = \lim_n (z_n, e_i) = \lim_n \left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i \, e_i \, , e_i \right) = \xi_i$$

ومنه $\tilde{z} \to z$.

وبالمثل :

$$\lambda x \to \lambda \tilde{x} \quad , \quad \lambda y \to \lambda \tilde{y}$$

كل فضاء هيلبرت قابل للفصل فوق حقل $\mathbb{C}$ أو $\mathbb{R}$ يكون ايزومتري وايزومورفي مع الفضاء l_2 .

نهاية الفصل الثاني

أ:عبد القادر أرناؤطي

الفصل الثالث

المؤثرات الخطية

- تعريف :

ليكن E_y , E_x فضاءين خطيين توبولوجيين ، وليكن A مؤثراً معرفاً على E_x ومجموعة قيمه متوضعه في E_y بالشكل :

$$A: \ E_x \to E_y$$

نقول عن A جمعي إذا تحقق :

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \quad ; \quad \forall\, x_1 , x_2 \in E_x$$

ونقول أن A متجانس إذا حقق :

$$A(\lambda x) = \lambda\, A(x)$$

ويكون المؤثر A خطي إذا كان جمعي ومتجانس .

ونقول عن A أنه مستمر في حالة فضاء متري إذا كان :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad ; \quad \rho(x, x_0) < \delta \implies \rho(Ax, Ax_0) < \varepsilon$$

مجموعة صور العناصر المنتمية للكرة $S(,\delta)$ تكون في الكرة $S(Ax, \varepsilon)$.

- لنأخذ الفضاء الخطي $E_x = E_y = E_n$ ولنفرض المؤثر معرف بـ :

$$Ax = y$$

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \xi_k \quad ; \quad x = (\xi_1 , \xi_2 , \dots , \xi_n), y = (\eta_1 , \eta_2 , \dots , \eta_n)$$

$$A(x_1 + x_2) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\xi_k^{(1)} + \xi_k^{(2)}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k^{(1)} + + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\xi_k^{(2)}$$

$$= Ax_1 + Ax_2$$

ملاحظة :

نقول عن f أنه مستمر إذا وجد :

$$x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x)$$

إذا كانت (x_m) متتالية متقاربة من x ، ولنبرهن ان $Ax_m \to Ax$:

$$\left(\eta_i^{(m)} - \eta_i\right)^2 = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\xi_k^{(m)} + \xi_k)\right]^2 \leq$$

بالاستفادة من متراجحة بوبياكوفسكي من أجل المجاميع :

$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} (\xi_k^{(m)} + \xi_k)^2$$

نجمع على i :

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\eta_i^{(m)} - \eta_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k^{(m)} + \xi_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ومنه نجد أن $x_m \to x$.

- **مثال : سؤال دورة .**

برهن أن المؤثر A خطي ومستمر واحسب نظيمه (حساب النظيم فيما بعد) .

ليكن $A: C[0,1] \to C[0,1]$

$$Ax = \int_0^1 K(x,t)\, x(s)\, dx \qquad ; x(t) \in C[0,1]$$

حيث :

$K(x,t)$ مستمر في المربع $0 \leq s,t \leq 1$.

الحل :

إن المؤثر A خطي لأن :

المؤثر A جمعي لأن :

$$A(x_1+x_2)=\int_0^1 K(x,t)\,(x_1(s)+x_2(s))\,dx = Ax_1+Ax_2$$

فهو جمعي ، و واضح أنه متجانس فهو خطي .

وهو مستمر لان :

لتكن $\{x_n\}$ متتالية متقاربة لـ $x(t)$ وبالتالي $x_n(t)\to x(t)$ بإنتظام ولنبرهن على أن :

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax \iff \{Ax_n(t)\}\to Ax(t)$$

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 K(x,t)\,x_n(s)\,dx = \int_0^1 K(x,t)\lim_{n\to\infty} x_n(s)\,dx$$

بالانتقال الى النهاية حيث ان $x_n\to x$

$$=\int_0^1 K(x,t)\,x(s)\,dx = Ax$$

وبالتالي المؤثر مستمر .

- **مثال :**

ليكن لدينا : $Bx=\frac{d}{dx}\,x(t)$

لنفترض ان B معرف على مجموعة قابلة للاشتقاق ومشتقاته مستمرة محتواة في $C[0,1]$ ،

لنرمز لها بـ M فإن : $\bar{M}=C[0,1]$

وهو مؤثر خطي معرف على مجموعة كثيفة في كل مكان وهو غير مستمر لأن :

$x_n\to x$ تقارب منتظم

ليس بالضرورة أن تكون $x_n'(t)\nrightarrow x'(t)$.

- ليكن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E_x$

وكان :

$$A \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A x_i$$

فإن :

A مؤثر خطي ، ومستمر في x_0 لأن :

لتكن $\{x_n\}$ متتالية متقاربة من x عندئذٍ يكون :

$$x_n - x + x_0 \to x_0$$

$$A(x_n - x + x_0) = A x_0$$

$$A x_n - A x + A x_0 = A x_0$$

$$A x_n - A x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} A x_n = A x$$

وبالتالي A مستمر .

الخواص البسيطة للمؤثرات الخطية :

اذا كان A جمعي فإن :

1- $A\theta = \theta$

2- $A(-x) = -Ax$

3- $A\lambda x = \lambda A x \quad \Rightarrow$ عدد عادي $\forall \lambda$

4- اذا كان $\lambda = \frac{p_n}{q_n}$

فإن $lim_n \frac{p_n \lambda_n}{q_n} = \lambda x$

$$A\,\lambda x_n = \lim A\left(\frac{p_n x_n}{q_n}\right) = \lambda\, A\, x$$

انتهت المحاضرة الخامسة عشر

❖ **مبرهنة :**

إذا كان المؤثر A جمعي ومتجانس فإنه من أجل جميع العناصر

يكون : $x_1, x_2, \dots, x_n \in E_x \quad , \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$$A\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A x_i$$

حسب الخاصة (3) إذا كان المجموع منتهي فالعلاقة محققة مباشرةً .

وإذا كانت السلسلة $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ متقاربة فإن :

(برهان أن السلسلة متقاربة دورة 2012 _2013)

$$A\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i A x_i$$

إذا كان المجموع غير منتهي فالعلاقة محققة ولكن بشرط أن $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ تكون متقاربة .

البرهان :

$$A \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lim A \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i A x_i$$

❖ **مبرهنة :**

كل مؤثر جمعي ومتجانس في فضاء خطي منتهي البعد مستمر .

البرهان :

(إذا كان الفضاء منته البعد فيكفي البرهان على أن المؤثر جمعي ومتجانس لكي يكون مستمر) .

$$dim\, E_x = n$$

حيث أن $e_1, \dots, e_n$ قاعدة فيه ، فإن كل عنصر $x \in E_x$ يكتب بشكل تركيب خطي لعناصره :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, e_i \implies Ax = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A e_i$$

$$\{x^m\} \to x \quad ; \; x^m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(m)} e_i$$

ولنبرهن أن : $\{Ax^m\} \to Ax$

بحيث أن : $\alpha_i^{(m)} \to \alpha_i \; ; \; m \to \infty \, , \, i = 1,2, \dots$

$$Ax^m = A \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(m)} A e_i$$

بالانتقال الى النهاية :

$$\lim_{n\to\infty} Ax_m = \sum_{i=1}^{n} \lim_{n\to\infty} \alpha_i^{(m)} (Ae_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(m)} (Ae_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, Ae_i = Ax$$

وبالتالي فإن A مستمر .

فضاء المؤثرات :

لنأخذ مجموعة المؤثرات الخطية المستمرة والمعرفة على الفضاء الخطي E_x التي تأخذ قيمها في الفضاء الخطي E_y ، ولنحاول جعلها فضاء خطي ، يسمى فضاء المؤثرات الخطية ، ليكن A , B عنصران ، عندئذٍ نعرف مجموع المؤثرين بالعلاقة :

$$(A + B)x = Ax + Bx \quad ; \; \forall x \in E_x$$

ولنعرف عملية الضرب بكمية سلمية على الشكل :

$$(\lambda A)x = \lambda(Ax)$$

صفر الفضاء في هذه الحالة هو بالتعريف :

$$0\, x = \theta \quad ; \forall x \in E_x$$

مفهوم النهاية في هذا الفضاء :

بفرض $\{A_n\}$ متتالية ما من عناصر الفضاء E_x عندئذٍ تكون هذه المتتالية متقاربة الى المؤثر A إذا كانت المتتالية $\{A_n x\}$:

$$A_n x \to A\, x \quad \forall x \in E_x$$

عندئذٍ نسمي مجموعة جميع المؤثرات الخطية المطبقة في E_x والتي تأخذ قيمها في E_y بـ فضاء مؤثرات خطية .

- **حلقة المؤثرات الخطية :**

إذا كان $A\,, B$ مؤثران خطياً فإن :

$$(A\,.B)x = A(Bx)$$

إذا كان $A\,, B$ خطيان فإن الجداء خطي وهي تحقق الخاصة التجميعية :

$$A(B\,.C) = (A\,.B)C$$

ويحقق الخاصة التوزيعية :

$$A(B+\ C) = A.B + A.C$$

وبالتالي :

$$A^2 = A.A \quad \& \quad A^3 = A^2.A$$

لنعرف المؤثر الواحدي بأنه المؤثر الذي يطبق العنصر في نفسه أي :

$$A.I = I.A = A \quad \Rightarrow \quad I.x = x$$

أي أن المؤثر الواحدي هو عنصر محايد لعملية الضرب ، عندئذٍ اصبحت حلقة ولكنها ليست تبديلية .

مثال :

إذا أخذنا $A : C[0,1] \to C[0,1]$

حيث :

$$Ax = \int_0^1 ts\, x(s)ds \quad \& \quad Bx = t\, x(t)$$

ولنحسب $A.B$ ثم $B.A$.

الحل :

$$B.A\,x = B\int_0^1 ts\, x(s)ds = t\int_0^1 ts\, x(s)ds = t^2\int_0^1 s\, x(s)ds =$$

$$= t^2\int_0^1 s\, x(s)ds \quad --- \quad (1)$$

$$A.B = A\big(t\, x(t)\big) = \int_0^1 ts^2\, x(s)ds \quad --- \quad (2)$$

نلاحظ أن $2 \neq 1$ وبالتالي الحلقة غير تبديلية .

تعريف :

نقول أن المؤثر B هو مقلوب يميني للمؤثر A إذا كان $A.B = I$.

نقول أن المؤثر B هو مقلوب يساري للمؤثر A إذا كان $B.A = I$.

إذا كان المقلوب اليميني والمقلوب اليساري موجودان عندئذٍ فهما متساويان لأنه :

بفرض C يميني و B يساري عندئذٍ :

$$B(A.C) = B \qquad \& \qquad (B.A)C = C$$

ومنه نجد أن $B = C$.

في هذه الحالة نرمز للمؤثر المقلوب A^{-1} عندئذٍ $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$.

المؤثرات الخطية في الفضاءات الخطية المنظمة :

ليكن E_x , E_y فضائين خطيين منظمين يكون المؤثر A مستمراً في الفضاء الخطي إذا كان صور الكرة $S(x,\delta)$ متوضعة في الكرة $S(Ax,\varepsilon)$.

$$\begin{cases} S(x,\delta) \implies \|x\| < \delta \implies \|x-\theta\| < \delta \\ S(Ax,\varepsilon) \implies \|Ax-\theta\| < \delta\varepsilon \end{cases}$$

نقول أن المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة وفق النظيم المعرف الى A إذا كان :

$$\|Ax_n - Ax\| \to 0 \; ; \quad n \to \infty \, , \qquad \forall x \in E_x$$

- إذا كان $x_n \to x_0$ فمتى يكون $\|Ax_n - Ax\| \to 0$ ؟

الجواب هو إذا كان :

$$\|x_n - x\|_{E_x} \to 0 \quad \implies \quad \|Ax_n - Ax\|_{E_y} \to 0$$

عندئذٍ يصبح المؤثر A مستمراً .

- **مثال :**

لتكن المصفوفة اللانهائية a_{ik} بحيث :

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q < \infty$$

عندئذٍ :

إذا كانت $x = \{\xi_i\}$ من الفضاء l_p فإنه وفقاً لهذه السلسلة يكون :

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, \xi_k$$

مؤثراً ينقل العنصر Ax الى y عندئذٍ $y \in l_q$

حيث :

$$A : l_p \to l_q \quad ; \quad Ax = y$$

البرهان :

يجب أن نبرهن أولاً أن $y \in l_q$ حيث أن $y = \{\eta_i\}$ ، لدينا :

$$Ax = y = |\eta_i|^q = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, \xi_k\right|^q$$

لدينا من ناحية ثانية بحسب متراجحة هولدر للمجاميع :

$$|\eta_i| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, \xi_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q\right)^{\frac{1}{q}} . \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\,\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow |\eta_i|^q \ \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q \ . \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\,\xi_k|^p\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q \ \le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q \ . \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\,\xi_k|^p\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\Rightarrow \ \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \|x\| \le \ Ax. \|x\|$$

عندما $\to \infty$ عندئذٍ المؤثر A يطبق l_p في l_q ومنه $y \in l_q$.

- لنبرهن أنه مؤثر خطي :

ليكن :

$$x_1 = \left\{\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)}, \dots\right\} \quad , \ x_2 = \left\{\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_n^{(2)}, \dots\right\}$$

عندها :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}(\xi_k^{(1)} + \xi_k^{(2)}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k^{(2)}$$
$$\Rightarrow \quad A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$$

والمؤثر جمعي .

- لنبرهن على أن هذا المؤثر مستمر :

لنفرض أن $x_n = \left\{\xi_i^{(n)}\right\}$ من الفضاء l_p حيث :

$$x_n \to x \quad ; \; x = \{\xi_i\}$$

كما أن :

$$A\, x_n = y_n \quad ; \; y_n = \left\{\eta_i^{(n)}\right\} \to y = \{\eta_i\}$$

عندئذٍ فإن :

$$\left\|\eta_i^{(n)} - \eta_i\right\| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{ik}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \|x_n - x\|$$

وبالتالي $0 \le \left\|\eta_i^{(n)} - \eta_i\right\|$ وبالتالي $y_n \to y$

أي أن المؤثر مستمر .

- نرمز لمجموعة كل المؤثرات الخطية المطبقة في E_x والتي تأخذ قيمها في E_y

نرمز لها بالشكل :

$$E_x \to E_y$$

أو :

$$L(E_x, E_y)$$

إذا كان $E_x = E_y$ فإن : $E \to E$

- **تعريف :**

ليكن A مؤثر خطي حيث $A \in (E_x \to E_y)$ نقول أنه مؤثر محدود إذا وجد عدد موجب $M > 0$ بحيث يتحقق :

$$\|Ax\|_{E_y} \le M\, \|x\|_{E_x} \quad ; \quad \forall x \in E_x$$

- المؤثر الخطي المستمر والمحدود من فضاء خطي E_x الى فضاء خطي منظم E_y ينقل المجموعات المحدودة الى مجموعات محدودة دوماً .

☒ مبرهنة : هامة جداً

الشرط اللازم والكافي كي يكون المؤثر الخطي في الفضاءات الخطية المستمرة هو أن يكون محدوداً .

✓ **البرهان :**

بفرض A مؤثر خطي مستمر ولنبرهن على أنه محدود :

لنفرض العكس ، أن A غير محدود أي يوجد عدد موجب $M > 0$ حيث :

$$\|Ax\| > M\,\|x\|$$

باختيار $M = 1$

$$\|Ax_1\| > 1\,\|x_1\|$$
$$\|Ax_2\| > 2\,\|x_2\|$$

وهكذا :

$$\|Ax_n\| > n\,\|x_n\|$$

أي توجد متتالية من عناصر x_n من أجلها يكون :

$$\|Ax_n\| > n\,\|x_n\| \quad \Longrightarrow \quad \|Ax_n\| \neq \theta \quad ;\ x_n \neq \theta$$

لنشكل متتالية جزئية جديدة $\xi_n = \dfrac{x_n}{n\|x_n\|}$

لدينا :

$$A\xi_n = \frac{A\,x_n}{n\|x_n\|}$$

$$\|A\xi_n\| = \left\|\frac{A\,x_n}{n\|x_n\|}\right\| \geq \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1$$

وجدنا أن :

$$\|A\xi_n - 0\| \nrightarrow 0 \qquad \Longrightarrow \quad A\xi_n \nrightarrow A\theta$$

وهذا ما يناقض استمرارية المؤثر ومنه نكون قد برهنا على محدودية المؤثر .

بالعكس : ليكن A محدوداً ولنبرهن على أنه مستمر :

بفرض $x_n \to x$ ومنه يكون :

$$\|x_n - x\| \to 0 \quad ; \; n \to \infty$$

ولنحسب :

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \le \|M\| \, . \|x_n - x\| \to 0 \quad ; \; n \to \infty$$

وبالتالي :

$$\|Ax_n - Ax\| \to 0 \quad ; \; n \to \infty$$

وهذا ما يبرهن الاستمرار .

- **تعريف :** لدينا

$$\|Ax\| \le M \, \|x\| \implies \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le M \quad ; \quad x \ne \theta$$

بالتعريف نسمي أصغر الاعداد M نظيم المؤثر A ونرمز له على الشكل $\|A\|$ بحيث يتحقق :

$$\|Ax\| \le \|A\| \, \|x\|$$

$$\implies \sup_{x\ne\theta} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\| - - - (I)$$

$$\implies \sup_{x\ne\theta} \frac{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}}{\frac{\|x\|}{\|x\|}} = \sup_{x\ne\theta} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\|$$

$$\implies \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\| \quad - - - (II)$$

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \le \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| \implies \|A\| \le \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| - - - (III)$$

- وجدنا أن : $$\sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \|A\|$$

البرهان :

$$\|Ax\| \le \|A\| \, \|x\|$$

من أجل $1 \le \|x\|$ نجد :

$$\|Ax\| \leq \|A\|$$

بأخذ sup الطرف الأيسر نجد :

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \leq \|A\| \quad --(1)$$

لدين مسبقاً :

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \quad \Rightarrow \quad \|A\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| --(2)$$

من (1) و (2) نجد أن :

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \|A\|$$

- **ملاحظة :** يمكن حساب النظيم من إحدى العلاقات $(I), (II), (III)$.

انتهت المحاضرة السادسة عشر

أ:عبد القادر أرناؤطي

☒ **مثال :**

ليكن المؤثر التكاملي A معرف بالعلاقة :

$$y(t) = Ax = \int_0^1 K(t,s)\, x(s)\, ds$$

في الفضاء $C[0,1]$ في المربع $0 \le s,t \le 1$ حيث :

$$A : C[0,1] \to C[0,1]$$

لنحسب نظيم هذا المؤثر .

الحل :

$$\|Ax\| = \max_{0\le t\le 1} \left| \int_0^1 K(t,s)\, x(s)\, ds \right| \le \max_{0\le t\le 1} \int_0^1 |K(t,s)|\,|x(s)|\, ds \le$$

$$\le \max_{0\le t\le 1} \int_0^1 |K(t,s)| \max_{0\le s\le 1} |x(s)|\, ds \le \max_{0\le t\le 1} \int_0^1 |K(t,s)|\, ds\, \|x\|$$

نقسم طرفي المتراجحة على $\|x\| \neq \theta$ وبأخذ sup الطرف الأيسر نجد :

$$\|A\| \le \max_{0\le t\le 1} \int_0^1 |K(t,s)|\, ds - - \quad (1)$$

بما أن $\int_0^1 K(t,s)$ تابع يبلغ قيمته العظمى في نقطة $t_0 \in [0,1]$

لنرمز بـ $z_0(s) = sign\, K(s,t)$

عندئذٍ توجد متتالية $x_n(s)$ متقاربة تقريباً في كل مكان من $z_0(s)$ أي :

$$x_n(s) \to z_0(s) \quad ; \quad |x_n(s)| \le 1$$

عندئذٍ نرمز لها بالرمز :

$$\mu(E_n) = \frac{1}{2Mn}$$

حيث أن : $M = max_{t,s}|K(t,s)|$

وبالتالي :

$$|x_n(s) - z_0(s)| \le 2$$

لنحسب المقدار :

$$\left| \int_0^1 K(t,s)\, z_0(s)\, ds - \int_0^1 K(t,s)\, x_n(s)\, ds \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 K(t,s)\, [z_0(s) - x_n(s)]\, ds \right| \le 2 \int_{E_n} |K(t,s)|\, ds \le \frac{2M}{2Mn} = \frac{1}{n}$$

نعلم أنه إذا كتبنا $|x - a| \le \varepsilon$ فإن $-\varepsilon \le x - a \le \varepsilon$ وبالتالي فإن :

$$\int_0^1 K(t,s)\, z_0(s)\, ds - \int_0^1 K(t,s)\, x_n(s)\, ds \le \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow$$

$$\int_0^1 K(t,s)\, z_0(s)\, ds \le \int_0^1 K(t,s)\, x_n(s)\, ds \le \frac{1}{n} \int_0^1 K(t,s)\, x_n(s)\, ds + \frac{1}{n} \ (*)$$

بالعودة لتعريف المؤثر لدينا :

$$Ax = \int_0^1 K(t,s)\, x(s)\, ds$$

فإن :

$$Ax_n = \int_0^1 K(t,s)\, x_n(s)\, ds$$

$$\Rightarrow \|Ax_n\| = \max_t \left| \int_0^1 K(t,s)\, x_n(s)\, ds \right|$$

بالتعويض بالعلاقة (*) نجد :

$$\leq \|Ax_n\| + \frac{1}{n} \leq \|A\| \, \|x_n\| + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 K(t,s)\, z_0(s)\, ds \ \leq \ \|A\| \, \|x_n\| + \frac{1}{n}$$

باستبدال كل $t = t_0$ فنجد :

$$\int_0^1 K(t_0,s)\, z_0(s)\, ds \ \leq \ \|A\| \, \|x_n\| + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 |K(t_0,s)| \ ds \ \leq \ \|A\| \, \|x_n\| + \frac{1}{n}$$

بالانتقال الى النهاية عندما $n \to \infty$ وبملاحظة أن $\|x_n\| \leq 1$ فنجد :

$$\int_0^1 |K(t_0,s)| \ ds \ \leq \ \|A\|$$

$$\Rightarrow \max_t \int_0^1 |K(t_0,s)| \ ds \leq \|A\| - - - - \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن :

$$\|A\| = \max_t \int_0^1 |K(t,s)| \ ds$$

- **تمديد المؤثر :**

ليكن E_x فضاء خطي منظم و L متنوعة خطية فيه وليكن A مؤثر جمعي معرف على L وقيمه متوضعه في الفضاء الخطي المنظم E_y :

بالتعريف نسمي هذا المؤثر أنه مجدود على L إذا وجد ثابت موجب $M > 0$ بحيث أن :

$$\|Ax\|_{E_y} \leq M \, \|x\|_L \qquad ; \quad \forall x \in L$$

نقول أنه محدود على المتنوعة الخطية L حيث أن : $A : L \to E_y$ ((E_y تام))

أصغر هذه الثوابت التي تحقق العلاقة السابقة تسمى نظيم المؤثر .

- سنبرهن أنه اذا كانت L كثيفة في كل مكان في E_x فإنه يمكن تبديل المؤثر A من المتنوعة الخطية الى الفضاء E_x مع الحفاظ على النظيم والتمثيل يكون بشكل وحيد .

لنرمز للمؤثر الممدد بـ A_0x للمؤثر A_0 عندئذٍ :

$$A_0x = A\,x$$

ويكون :

$$\|A_0\|_L = \|A\|_{E_x}$$

- البرهان :

لنفرض أن $x \notin L$ أي $x \in E_x$ بما أن L كثيفة في كل مكان في E_x عندئذٍ توجد متتالية

$$\|x_n - x\| \to 0 \quad \text{عندئذٍ} \quad x_n \to x \quad ; \quad \{x_n\} \subset L$$

أي أن :

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \quad ; \quad n\,,m \to \infty$$

لنشكل :

$$\|A_0x_n - A_0x_m\| = \|A_0(x_n - x_m)\| \le \|A_0\|\|x_n - x\| \to 0$$

من هنا نجد أن $\{Ax_n\}$ اساسية في E_y .

عندئذٍ يوجد عنصر $A\,x$ من E_y بحيث يكون :

$$A_0x_n \to A\,x$$

لنبرهن على أن هذا العنصر $A\,x$ غير متعلق باختيارنا للمتتالية A_0x_n :

لنفرض الآن وجود متتالية اخرى ولتكن $\{\xi_n\}$ حيث $\xi_n \to x$

$$\|x_n - \xi_n\| = \|(x_n - x) - (\xi_n - x)\| \le \|x_n - x\| + \|\xi_n - x\| \to 0$$

وبالتالي فإن $A_0x_n \to A_0\xi_n$ بكلام آخر أن :

$$\|A_0x_n - A_0\xi_n\| \to 0$$

وجدنا أن $A_0x_n \to A\,x$ وبالتالي فإن :

$$A_0\xi_n \to A\,x$$

والعنصر $A\,x$ لا يتعلق باختيار المتتالية ، عندئذٍ بنفس الطريقة نحصل على :

$$A\,x = \lim_{n\to\infty} A_0x_n = A_0x$$

- اذا كانت L متنوعة خطية كثيفة في كل مكان في E_x أي : $L \subset E_x$ وكان A_0 مؤثر

خطي ومحدود على L ، ويأخذ قيمه في الفضاء الخطي E_y فضاء تام .

عندئذٍ يمكن تمديد هذا المؤثر على جميع الفضاء E_x مع الحفاظ على الشكل وهو وحيد

- ايجاد مؤثر A تتطابق قيمه مع المؤثر A_0 على المتنوعة الخطية L بحيث يكون :

$$\|A\|_{E_x} = \|A_0\|_L$$

لنأخذ $x \in E_x\ ;\ x \notin L$.

عندئذٍ كون L كثيفة في E_x فإنه توجد متتالية من العناصر بحيث :

$$\{x_n\}\ ;\ \|x_n - x\| \to 0$$

$$\|A_0x_n - A_0x_m\| \le \|A_0\|\|x_n - x_m\| \to 0$$

هذا يعني أن متتالية العناصر $\{A_0x_n\}$ فهي اساسية وكون الفضاء E_y فضاء تام فإن نهاية المتتالية ينتمي لهذا الفضاء أي أن :

$$\{A_0x_n\} \to y \in E_y$$

استطعنا أن نقابل x بعنصر من E_y أي أنه :

$$Ax = y$$

ومنه يكون لدينا :

$$\lim_{n\to\infty} A_0x_n = Ax$$

- **سنبرهن أن المؤثر خطي ومحدود ومنه يكون خطي ومستمر :**

سنثبت الآن ان A خطي :

لتكن $\{x_n\}$ متتالية ما :

$$x_n^{(1)} \to x_1$$
$$x_n^{(2)} \to x_2$$

لنحسب :

$$A(x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} A_0(x_n^{(1)} + x_n^{(2)}) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} A_0 x_n^{(1)} + \lim_{n\to\infty} A_0 x_n^{(2)} = Ax_1 + Ax_2$$

ومنه فإن المؤثر جمعي .

بنفس الطريقة نبرهن أنه متجانس ، ومنه يكون المؤثر A خطي .

الآن سنبرهن أن المؤثر A محدود :

لدينا :

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_0 x_n$$

كما نعلم أن النظيم هو عبارة عن مؤثر مستمر وبالتالي :

$$\|Ax\| = \left\|\lim_{n\to\infty} A_0 x_n\right\| = \|A_0 x\| \leq \|A_0\|.\|x\|$$

لنقسم الطرفين على $\|x\|$ ونأخذ الـ sup من أجل $A \neq 0$

$$\|A\| \leq \|A_0\|$$

ولدينا حسب تعريف النظيم دوماً يحقق العلاقة :

$$\|A\| \geq \|A_0\|$$

من هاتين العلاقتين نجد أن :

$$\|A\| = \|A_0\|$$

ومنه فإن A مستمر .

الآن لنمدد A :

ليكن B مؤثر مستمر وبالتالي يمكن أن نأخذ :

$$Bx = \lim_{n\to\infty} B\,x_n = \lim_{n\to\infty} A_0\,x_n = Ax$$

حيث أن :

$$\lim_{n\to\infty} A_0 x_n = Ax$$

ومنه فإن المؤثرين $(A\,,B)$ متطابقين .

ومنه فإن التمديد وحيد ويتم برهان النظرية ، لأنه أمكن التمديد مع الحفاظ على النظيم .

- إذا كان $A\,,B$ مؤثران معرفان على متنوعة خطية L كثيفة في كل مكان في الفضاء الخطي المنظم E_x وكان :

$$Ax = Bx \qquad ; \quad x \in L$$

من هنا يمكننا أن نستنتج :

إن هذين المؤثرين متساويين على كل E_x .

البرهان :

نمدد A لمؤثر C_1 ونمدد B لمؤثر C_2 ، ولكن التمديد وحيد لكلاهما ولكن المؤثرين متساويين ، ومنه فإن التمديدين متساويين .

❖ **مبرهنة :**

ليكن H فضاء هيلبرت ولتكن L متنوعة خطية فيه وليكن $y = A_0x$ مؤثراً خطياً معرفاً على L ويأخذ قيمه في فضاء بانانخ E_y عندئذٍ يمكن تمديد المؤثر A_0 على الفضاء H بأكمله مع الحفاظ على النظيم .

- **البرهان :**

لتكن E هي لصاقة L فهي مغلقة وبالتالي فهي فضاء جزئي من H .

الآن أذا كانت L كثيفة في كل مكان في E فإنه يمكننا تمديد المؤثر وذلك حسب المبرهنة السابقة .

إذا كانت L غير كثيفة في كل مكان في E ، يتحقق هنا مفهوم النظرية :

إذا كان E فضاء جزئي من فضاء هيلبرت فإن كل عنصر من H يمكن تمثيله بالشكل :

$$x \in H \;\; ; \;\; x = y + z \;\; ; \; y \in E \;\; , \; z \perp E$$

نفرض أن p مؤثر اسقاط من H على E

لنضع :

$$Ax = A_0 px$$

حيث أن px مسقط العنصر على الفضاء الجزئي E

هذا المؤثر خطي ومحدود لأن :

خطيته تنتج من خطية المؤثرين p, A .

الآن :

$$A(x_1 + x_2) = A_0 p(x_1 + x_2) = A_0(px_1 + px_2) = \\ = A_0 px_1 + A_0 px_2 = Ax_1 + Ax_2$$

ومنه فإن A جمعي ، وبنفس الطريقة نتأكد أنه متجانس وبالتالي فإن A خطي .

لنحسب نظيمه :

$$\|Ax\| = \|A_0 px\| \le \|A_0\| \|px\| \le \|A_0\| \, \|p\| \, \|x\| \quad - - (*)$$

الآن سنبرهن أن : $\|p\| = 1$

بوضع $px = y$ فإن :

$$\|px\| = \|y\| \quad \Rightarrow \quad \|px\|^2 = \|y\|^2$$

ولكن :

$$\|y\|^2 < \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2 \Rightarrow \|px\|^2 = \|y\|^2 \le \|x\|^2$$

نقسم على $\|x\|$ ونأخذ الـ sup فتكون :

$$\|p\|^2 \le 1$$

هذه العلاقة تكون صحيحة من اجل $x \in E_x$.

$$\Rightarrow \quad py = y \quad \Rightarrow \quad \| py\| = \|y\|$$

$$sup\| py\| \geq \|y\|$$

بالتقسيم على $\|y\|$ نجد :

$$\|p\|^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \|p\|^2 = 1$$

بالعودة لـ $(*)$:

$$\|A\| = \|A_0\|.\|x\| \quad \Rightarrow \quad \|A\| \leq \|A_0\|$$

لا يمكن لنظيم مؤثر أن يتناقص بالتمديد ومنه :

$$\|A\| \geq \|A_0\| \quad \Rightarrow \quad \|A\| = \|A_0\|$$

وبالتالي استطعنا تمديد المؤثر على كل الفضاء الجزئي E .

هناك كان التمديد وحيد لكن هنا لا يمكن ضمان وحدانيته ، لاننا لم نفرض أن L كثيفة في كل مكان .

فضاء المؤثرات الخطية والمحدودة :

ليكن E_x , E_y فضاءين خطيين منظمين ، نرمز لمجموعة المؤثرات الخطية والمحدودة المعرفة على E_x وتأخذ قيمها في E_y بالشكل :

$$(E_x \to E_y)$$

عرفنا النظيم بثلاثة علاقات ، لنستخدم العلاقة :

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|$$

سنعتبر هذا النظيم نظيم في فضاء المؤثرات الخطية والمحدودة ، لكن علينا برهان على أن هذا النظيم يحقق جميع موضوعات النظيم :

-1 $\|A\| = 0 \quad \Rightarrow sup_{\|x\|\leq 1}\|Ax\| = 0$

$$\Rightarrow \quad \|Ax\| = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax = 0$$

ليس من الضروري ان تكون x هي الصفر ، وبالتالي فإن :

$A=\theta$ المؤثر الصفري .

2- $\|\lambda A\| = sup_{\|x\|\le 1}\|\lambda Ax\| = |\lambda|\, sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\| = |\lambda|\, \|A\|$

3- $\|A+B\| = sup_{\|x\|\le 1}\|(A+B)x\|$

عرفنا :

$$(A+B)x = Ax + Bx$$

$$\Rightarrow \ \|(A+B)x\| = \|Ax+Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le$$

$$\le \sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\| + \sup_{\|x\|\le 1}\|Bx\| = \|A\| + \|B\|$$

وهذه العلاقة صحيحة مهما تكن x

وبالتالي :

$$\|(A+B)x\| \le \|A\| + \|B\|$$

متراجحة المثلث محققة .

انتهت المحاضرة السابعة عشر

أ:عبد القادر أرناؤطي

فضاء المؤثرات الخطية والمحدودة :

ليكن E_x , E_y فضاءين خطيين منظمين ، نرمز لمجموعة المؤثرات الخطية والمحدودة المعرفة على E_x وتأخذ قيمها في E_y بالشكل :

$$(E_x \to E_y)$$

عرفنا النظيم بثلاثة علاقات ، لنستخدم العلاقة :

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|$$

سنعتبر هذا النظيم نظيم في فضاء المؤثرات الخطية والمحدودة ، لكن علينا برهان على أن هذا النظيم يحقق جميع موضوعات النظيم :

$$1) \quad \|A\| = 0 \Rightarrow \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| = 0$$

$$\Rightarrow \|Ax\| = 0 \Rightarrow Ax = 0$$

ليس من الضروري ان تكون x هي الصفر ، وبالتالي فإن :

$A = \theta$ المؤثر الصفري .

$$2) \quad \|\lambda A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|\lambda Ax\| = |\lambda| \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| = |\lambda| \, \|A\|$$

$$3) \quad \|A + B\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|(A + B)x\|$$

عرفنا :

$$(A + B)x = Ax + Bx$$

$$\Rightarrow \|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le$$

$$\le \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| + \sup_{\|x\| \le 1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|$$

وهذه العلاقة صحيحة مهما تكن x

وبالتالي متراجحة المثلث محققة :

$$\|(A + B)x\| \le \|A\| + \|B\|$$

❖ **مبرهنة** : إذا كان الفضاء E_y فضاء باناخ عندئذٍ فضاء المؤثرات الخطية المحدودة $E_x \to E_y$ يكون تاماً .

خطوات البرهان :

1) تشكيل المؤثر الخطي $Ax = y$ عن طريق تشكيل متتالية أساسية .
2) البرهان على أن هذا المؤثر خطي (جمعي ومتجانس) .
3) البرهان على أن هذا المؤثر محدود $\|Ax\| \le M\|x\|$.
4) البرهان على أن المتتالية $\{A_n x\}$ متقاربة بالنظيم بالنسبة للمؤثر الخطي A .

البرهان :

1) نأخذ متتالية أساسية من المؤثرات $\{A_n\}$ هذا يعني :

$$\|A_n - A_m\| \to 0 \quad ; \quad n, m \to \infty$$

$$\forall x \in E_x \ ; \ \|A_n x - A_m x\| \le \|A_n - A_m\| . \|x\| \to 0 \quad - - (*)$$

حيث أن $n, m \to \infty$.

هذا يعني أن المتتالية $\{A_n x\}$ متتالية أساسية فهي موجودة في E_y وكما أن E_y فضاء باناخ أي أنه تام وبالتالي فإن هذه المتتالية متقاربة لـ y من فضاء باناخ أي :

$$\lim_{n \to \infty} A_n x = y \in E_y$$

هنا يكون تعرف لدينا مؤثر بالعلاقة :

$$\boxed{Ax = y \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} A_n x = Ax}$$

2) **لنبرهن على أن هذا المؤثر خطي :**

جمعي لأن :

$$A(x_1 + x_2) = \lim_{n \to \infty} A_n(x_1 + x_2) =$$
$$= \lim_{n \to \infty} A_n x_1 + \lim_{n \to \infty} A_n x_2 = A(x_1) + A(x_2)$$

متجانس لأن :

$$A(\lambda x) = \lim_{n \to \infty} A_n \lambda x = \lambda \lim_{n \to \infty} A_n x = \lambda A x$$

وبالتالي فإن A خطي .

3) لنبرهن على أنه محدود :

لدينا متتالية أساسية بمفهوم النظيم وبحسب العلاقة *(*)* وحسب خصائص النظيم نجد :

$$\left|\|A_n\| - \|A_m\|\right| \leq \|A_n - A_m\| \to 0$$

ومنه فإن المتتالية $\{\|A_n\|\}$ متتالية عددية أساسية (متقاربة في نفسها) (كوشي) وبالتالي فهي محدودة ((كل متتالية متقاربة محدودة)) :

$$\exists M > 0 \; ; \; \|A_n\| \leq M \quad \Rightarrow$$

حسب خواص النظيم :

$$\|A_n x\| \leq \|A_n\| . \|x\| \leq M\|x\|$$

بما أن النظيم تابع مستمر فإنه بالانتقال للنهاية في طرفي المتراجحة الأخيرة عندما $n \to \infty$ فإن :

$$\lim_{n \to \infty} \|A_n x\| \leq M\|x\| \quad \Rightarrow \quad \|Ax\| \leq M\|x\|$$

وبالتالي فإن المؤثر A مؤثر محدود وخطي وبالتالي فهو مؤثر مستمر .

4) سنثبت أن المتتالية $\{A_n\}$ متقاربة بالنظيم الى المؤثر A :

اثبتنا أن $\{A_n x\}$ أساسية في مفهوم النظيم في E_y :

$$\forall \varepsilon > 0 \; ; \; \exists n_0 \; ; \; n > n_0 \; ; \; \|A_{n+p}x - A_n x\| < \varepsilon \; ; \; p > 0$$

نختار x بحيث يكون $\|x\| \leq 1$

بما أن النظيم تابع مستمر ننتقل للنهاية عندما $p \to \infty$ في طرفي المتراجحة نجد :

$$\|Ax - A_n x\| \leq \varepsilon \quad ; \; n > n_0 \; ; \; \forall \|x\| \leq 1$$

لنأخذ sup الطرفين على $\|x\| \leq 1$ نجد :

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|(A - A_n)x\| \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|A - A_n\| \leq \varepsilon$$

وبما أن ε عدد صغير كيفي ، وبالتالي فإن $\{A_n\}$ متقاربة بالنظيم لـ A في فضاء المؤثرات الخطية المحدودة ومنه فإن فضاء لمؤثرات الخطية المحدودة يكون فضاء باناخ .

التقارب المنتظم و التقارب النقطي (الضعيف) لمتتالية المؤثرات :

- **التقارب بإنتظام :** نقول عن المتتالية $\{A_n\}$ من المؤثرات الخطية والمحدودة والمتقاربة

بمفهوم النظيم في فضاء المؤثرات الخطية أنها متقاربة بانتظام ونكتب :

$$\|A_n - A\| \to 0 \;\; ; \;\; n \to \infty$$

- **مبرهنة : (2010-2011 الفصل الثالث)**

إذا كانت المتتالية $\{A_n\}$ من فضاء المؤثرات الخطية المحدودة متقاربة إلى A وفق النظيم المعرف في $(E_x \to E_y)$ فإن $\{A_n\}$ متقاربة بانتظام الى A_x على كل كرة مغلقة معرفة بالشكل :

$$\|x\| \leq r \;\; \Leftrightarrow \;\; \bar{S}(\theta, r)$$

سنبرهن أن المتتالية ستكون متقاربة بانتظام على هذه الكرة ، ليكن $0 < \varepsilon$ عدد موجب ما ، عندئذٍ يوجد :

$$\exists n_0 \; ; \; n > n_0 \qquad ; \;\; \|A_n - A\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

الآن لنأخذ عنصراً من $\bar{S}(\theta, r)$ ، لنحسب :

$$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \leq$$
$$\leq \|A_n - A\| . \|x\| \leq \frac{\varepsilon}{r} . r = \varepsilon$$

وتكون هذه العلاقة محققة أياً كانت $n > n_0$ وأياً كانت x من الكرة ومنه وبحسب تعريفنا للتقارب بانتظام ومنه فإن هذه المتتالية متقاربة بانتظام على أي كرة مغلقة .

بالعكس :

إذا كان لدينا متتالية من المؤثرات متقاربة بانتظام على كرة ما ، سنبرهن أنها بشكل دائم تكون متقاربة بالنظيم .

لنفرض أن $\{A_n\}$ متقاربة بانتظام من المؤثر A على الكرة $\|x\| \leq r$

$$\exists n_0 \ ; n > n_0 \qquad ; \ \|A_n x - Ax\| < \varepsilon$$

أياً كانت x من الكرة السابقة ، لوضربنا الطرفين بـ $\frac{1}{r}$

$$\frac{1}{r}\|A_n x - Ax\| < \frac{\varepsilon}{r} \quad \Rightarrow \quad \left\|\frac{A_n x}{r} - \frac{Ax}{r}\right\| < \frac{\varepsilon}{r}$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{x}{r}\right\| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{r} \in \bar{S}(\theta, r)$$

بوضع $y = \frac{x}{r}$

$$\Rightarrow \|(A_n - A)y\| \leq \|A_n - A\| \leq \varepsilon_1$$

والعلاقة محققة من أجل أي $n > n_0$ ومنه تكون متقاربة بالنظيم ،

سنثبت أن : $\|A_n - A\| \leq \varepsilon_1$

لدينا $\{A_n\, x\}$ متتالية متقاربة (كل متتالية متقاربة هي متتالية كوشي) ، لو أخذنا المتتالية :

$$\|A_{n+p} x - A_n x\| \leq \varepsilon$$

متقاربة كون $\{A_n\}$ وهي متتالية كوشي ، لو أخذنا النهاية عندما $p \to \infty$ فإن :

$$\lim_{p\to\infty}\|A_{n+p} x - A_n x\| \leq \varepsilon$$

النظيم تابع مستمر فإن النهاية تدخل داخل النظيم :

$$\Rightarrow \|Ax - A_n x\| \leq \varepsilon$$

لو اخذنا :

$$\sup_{\|x\|\leq 1}\|Ax - A_n x\| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|A - A_n\| \leq \varepsilon$$

والعكس صحيح :

إذا كانت متتالية متقاربة بانتظام على أي كرة مغلقة فإنها تكون متقاربة بالنظيم في فضاء المؤثرات الخطية المحدودة .

- **التقارب النقطي (الضعيف) :**

نقول عن المتتالية $\{A_n\}$ من المؤثرات الخطية المحدودة أنها متقاربة نقطياً إذا كانت المتتالية $\{A_n\}$ متقاربة الى Ax من أجل كل نقطة مثبته ونكتب :

$$A_n \to A \text{ نقطياً} \quad \Rightarrow \quad A_n x \to Ax \quad ; \quad x \in E_x$$

أي إذا ثبتنا عنصر وأخذنا نهاية المتتالية $A_n x$ فتكون Ax .

- **تقارب كوشي :**

إذا كانت المتتالية $\{A_n\}$ متقاربة الى A_m في $(E_x \to E_y)$ فإنها تكون متتالية كوشي أي :

$$\|A_n - A_m\| \to 0 \;\; ; \;\; n, m \to \infty$$

- **تقارب كوشي النقطي :**

نقول عن المتتالية $\{A_n\}$ أنها متقاربة في نفسها (أساسية ، كوشي نقطياً) إذا كان :

$$\|A_n x - A_m x\| \to 0 \quad ; n \,, m \to \infty$$

من أجل كل عنصر x مثبت .

من الواضح إذا كانت المتتالية متقاربة بانتظام فهي متقاربة نقطياً لأنه إذا كانت متقاربة بانتظام فإن :

$$\|A_n - A\| \to 0 \quad ; n \to \infty$$
$$\|A_n x - Ax\| \le \|A_n - A\| . \|x\| \to 0$$

ومنه نحصل على التقارب نقطياً .

أي أن التقارب بانتظام $\Leftarrow$ التقارب نقطياً ، لكن العكس غير صحيح .

- **مثال :**

ليكن H فضاء هيلبرت القابل للفصل ولتكن $\{e_1 , e_2 , \dots , e_n , \dots\}$ قاعدة متعامدة – منظمة ،

فإن كل عنصر x يكتب على الشكل :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x , e_i) e_i$$

حيث أن (x , e_i) معاملات فورييه بالنسبة للقاعدة المتعامدة – المنظمة

وليكن A_n مؤثر اسقاط من H على الفضاء الجزئي المولد بـ $\{e_1 , e_2 , \dots , e_n , \dots\}$

ومنه يكون لدينا :

$$A_n x = \sum_{i=1}^{n} (x , e_i) e_i$$

لو انتقلنا الى النهاية عندما $n \to \infty$

$$\lim_n A_n x = \lim_n \sum_{i=1}^{n} (x , e_i) e_i = \sum_{i=1}^{\infty} (x , e_i) e_i = x = Ix$$

بمفهوم التقارب النقطي :

$$\lim_n A_n x = Ix$$

ومنه المتتالية $\{A_n\}$ متقاربة نقطياً الى المؤثر الواحدي أي أن :

$$A_n \to I \quad \text{نقطياً}$$

سنبرهن أنه مستحيل أن تكون متقاربة بانتظام :

في العلاقة :

$$A_n x = \sum_{i=1}^{n} (x , e_i) e_i$$

لنأخذ بحالة خاصة $x = e_{n+1}$:

$$A_n e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} (e_{n+1}\,, e_i) e_i \; = 0$$

$$A_{n+p}\, e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+p} (e_{n+1}\,, e_i) e_i \; = e_{n+1} \quad ; \quad p > 0$$

الآن لنحسب :

$$\|A_n\, e_{n+1} - A_{n+p}\, e_{n+1}\| = \|e_{n+1} - 0\| = \|e_{n+1}\| = 1 > \varepsilon$$

وبالتالي لا يمكن أن تكون هذه المتتالية أساسية بمفهوم النظيم وبالتالي فإن A_n لن تكون متقاربة بانتظام .

التقارب النقطي $\not\Rightarrow$ التقارب بانتظام .

☒ مبرهنة (باناخ _شتينهاوس) :

إذا كانت $\{A_n\}$ متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة المعرفة في الفضاء الخطي المنظم E_x وتأخذ قيمها في الفضاء الخطي المنظم التام E_y متقاربة في نفسها (محدودة) فإن متتالية النظائم $\{\|A_n\|\}$ تكون محدودة . أي أنه يوجد عدد مثل $M > 0$ بحيث أن :

$$\|A_n\| \le M \quad ; \quad \forall n = 1,2,\ldots$$

✓ **البرهان :**

حتى نثبت هذه المبرهنة نجزأها الى جزئين :

الأول :

سنبرهن أنه إذا كانت متتالية النظائم $\{\|A_n\|\}$ غير محدودة فإن المتتالية $\{\|A_n x\|\}$ غير محدودة على أية كرة مغلقة $\overline{S_0}(x_0, \varepsilon)$ يعني على الكرة : $\|x - x_0\| \le \varepsilon$.

البرهان : سنفرض العكس الاولى غير محدودة والثانية محدودة أي :

$\{\|A_n x\|\}$ محدودة على اي كرة مغلقة ، ومنه :

$$\exists\, c>0 \;\; ; \;\; \|A_n x\| \le c \;\; ; \;\; \forall n=1,2,\dots \quad , \quad x\in \bar{S_0} \;--(*)$$

لنشكل العنصر :

$$x=\frac{\varepsilon}{\|\xi\|}\,\xi+x_0$$

$$\Rightarrow \;\; \|x-x_0\|=\left\|\frac{\varepsilon}{\|\xi\|}\,\xi\right\|=\varepsilon \quad \Rightarrow \;\; x\in \bar{S_0}$$

من ناحية ثانية :

$$A_n x=\frac{\varepsilon}{\|\xi\|}A_n\xi+A_n x_0$$

لدينا $x\in \bar{S_0}$ وبالاستفادة من $(*)$ نجد :

$$\Rightarrow \;\; \|A_n x\|=\left\|\frac{\varepsilon}{\|\xi\|}A_n\xi+A_n x_0\right\|\le c$$

بما أن :

$$\frac{\varepsilon}{\|\xi\|}\|A_n\xi\|-\|A_n x_0\|\le\left\|\frac{\varepsilon}{\|\xi\|}A_n\xi+A_n x_0\right\|\le c$$

نضرب الطرفين بـ $\|\xi\|$:

$$\varepsilon\|A_n\xi\|\le c+\|A_n x_0\|.\|\xi\|$$

نقسم على ε فنجد :

$$\|A_n\xi\|\le\frac{c+\|A_n x_0\|.\|\xi\|}{\varepsilon}$$

$$\|A_n\xi\|\le c_1\,\|\xi\|$$

لو قسمن على $\|\xi\|$ وبأخذ sup نجد :

$$\|A_n\|\le c_1$$

وبالتالي نجد أن متتالية النظائم محدودة وهذا يؤدي الى تناقض ، أي أن $\{\|A_n\|\}$ غير محدودة على أي كرة .

الثاني :

لنفرض أن المتتالية $\{A_n\}$ متقاربة في نفسها وأن متتالية النظائم غير محدودة ، يعني فرضنا العكس ، مثلما برهنا الاول :

أنه إذا كانت $\{\|A_n\|\}$ غير محدودة فإن $\{\|A_n x\|\}$ غير محدودة على أي كرة مغلقة .

أي يمكن أن نجد عدد :

$$\exists\, n_1 \;;\; \|A_{n_1} x_1\| > 1 \quad ; \; x \in \bar{S_1}(x_1, \varepsilon_1)$$

لدينا جميع المؤثرات A_n خطية محدودة فهي مستمرة وبالتالي فهي تحقق المتراجحة السابقة في هذه الكرة ، يعني هذه العلاقة تكون محققة في جوار لهذه النقطة في كرة $\bar{S_2}(x_2, \varepsilon_2)$.

يمكن أن نجد عدد :

$$\exists\, n_2 \;;\; \|A_{n_2} x_2\| > 2 \quad ; \; x \in \bar{S_2}(x_2, \varepsilon_2)$$

وهكذا . . .

نستطيع أن نفرض أن $\varepsilon_n \to 0$

أصبح لدينا كرة أولى نصف قطرها ε_1 وكرة ثانية متوضعة فيها وثالثة متوضعة في الثالثة وهكذا ، ونصاف أقطارها تسعى الى الصفر وبالتالي توجد نقطة $\bar{x}$ تنتمي لجميع الكرات من أجلها تكون :

$$\|A_{n_k} \bar{x}\| > k$$

وهذه المتتالية لا يمكن أن تكون متتالية كوشي ، وهذا تناقض لأن فرضنا أن المتتالية متقاربة في نفسها .

انتهت المحاضرة الثامنة عشر

أ.عبد القادر أرناؤطي

مبرهنة :

إذا كانت $\{A_n x\}$ متتالية من المؤثرات الخطية والمحدودة حيث أن $A : E_x \to E_y$ وكان E_x , E_y تامان فإن فضاء المؤثرات الخطية يكون تاماً بمفهوم التقارب النقطي $(E_x \to E_y)$ تام .

البرهان :

_ حسب إحدى المبرهنات : E_y تام فإن $(E_x \to E_y)$ فضاء باناخ .

_ حسب إحدى المبرهنات : لكي يكون المؤثر A تام يكفي أن يكون خطي ومحدود .

بدايةً علينا تشكيل مؤثر ثم البرهان على أنه خطي و محدود فهو تام .

لتكن $\{A_n x\}$ متتالية ما من المؤثرات الخطية المحدودة المتقاربة في نفسها (أساسية) ومنتمية الى E_y ، وبما أن E_y تام عندئذٍ يوجد عنصر مثل $y \in E_y$ بحيث :

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = y$$

وبالتالي من أجل كل نقطة $x \in E_x$ يوجد $y \in E_y$ أي يتعرف لدينا مؤثر بالعلاقة :

$$\boxed{Ax = y}$$

ولنبرهن على أن A خطي و محدود :

- **سنبرهن أنه خطي :**
- **جمعي لأن :**

$$A(x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} A_n(x_1 + x_2) = \lim_{n\to\infty} A_n x_1 + \lim_{n\to\infty} A_n x_2 = A(x_1) + A(x_2)$$

- **متجانس لأن :**

$$A(\lambda x) = lim_{n\to\infty} A_n \lambda x = \lambda \, lim_{n\to\infty} A_n x = \lambda A x$$

أي أن A متجانس ، وبالتالي فإن A خطي .

11

- **محدود لأن :**

بما أن $\{A_n x\}$ متتالية من المؤثرات الخطية والمحدودة ، ولدينا من الفرض نوع التقارب نقطي ، فإنه استناداً إلى مبرهنة باناخ_شتينهاوس فإن متتالية النظائم محدودة .

يعني أن المتتالية $\{A_n\}$ متقاربة في نفسها بمفهوم التقارب النقطي وبالتالي فهي محدودة .

$$\|A_n\| \leq M \quad ; \ \forall n = 1,2, \dots$$
$$\|A_n x\| \leq \|A_n\|.\|x\| = M\|x\|$$

بالانتقال للنهاية عندما $n \to \infty$ نستنتج أن :

$$\|Ax\| \leq M\|x\| \Longrightarrow \text{محدود } A \text{ المؤثر} \Longrightarrow A \in \left(E_x \to E_y\right)$$

وبالتالي فهو محدود .

✓ **نتيجة :**

توجد نهاية لكل متتالية من المؤثرات الخطية والمحدودة متقاربة في نفسها نقطياً وهذه النهاية مؤثر خطي محدود ، أي أن فضاء المؤثرات الخطية والمحدودة فضاء تام بمفهوم التقارب النقطي .

مبرهنة :

الشرط اللازم والكافي لكي تكون متتالية المؤثرات الخطية المحدودة $\{A_n\}$ متقاربة الى المؤثر A_0 نقطياً هو أن تكون :

1- متتالية النظائم $\{\|A_n x\|\}$ محدودة .

2- أن تتقارب المتتالية $\{A_n x\}$ الى $A_0 x$ من أجل كل عنصر $x \in X$.

(حيث X مجموعة ما) والتراكيب الخطية لعناصرها كثيفة في E_x .

البرهان :

لزوم الشرط :

1- لنفرض أن $\{A_n\}$ متقاربة الى A_0 وبالتالي فإن هذا يعني أنها متقاربة في نفسها وبالتالي فإن متتالية النظائم محدودة .

2- إذا كانت $\{A_n x\}$ متقاربة من أجل كل نقطة x من Ax فإنها تكون متقاربة على أي مجموعة من التراكيب الخطية .

كفاية الشرط :

لنفرض أن الشرطين محققين ولنبرهن أن $\{A_n\}$ متقاربة نقطياً الى A_0 .

$$\forall \varepsilon > 0 \ ; \ \exists n_0 \quad ; n > n_0 \Longrightarrow \|A_n x - A_0 x\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

يهمنا أن يكون التقارب النقطي في E_x ، لذلك إذا أخذنا $\xi \notin L(X)$ وهي متنوعة خطية مغلقة و $\xi \in E_x$ (سنبرهن التقارب على ξ) .

إن $L(X)$ يشكل فضاء جزئي و ξ لا ينتمي له وبالتالي فإنه يوجد مسافة بينه وبين هذا المقدار.

1) سنستفيد من الشرطين (1) و (2) وكون $\xi \notin L(X)$ فإنه :

$$\exists x \in L(X) \ \Longrightarrow \ \|\xi - x\| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

2) بما أن متتالية النظائم محدودة حسب (1) بالتالي يوجد ثابت :

$$\exists M > 0 \quad ; \ \|A_n\| \leq M \Longrightarrow \quad sup\|A_n\| = M$$

3) لنحسب المقدار :

$$\|A_n\xi - A_n x\| \leq \|A_n\|.\|\xi - x\| \leq M\frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{4}$$

4) لنحسب الآن :

$$\|A_n\xi - A_0\xi\| \leq \|A_n\xi - A_n x\| + \|A_n x - A_0 x\| + \|A_0 x - A_0\xi\|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4} + \|A_n x - A_0 x\| + \|A_0\|.\|x - \xi\| =$$

$$= \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + M.\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon$$

المؤثرات المعاكسة

مقلوب مؤثر :

لنفرض أن $A : E_x \to E_y$ مؤثر يطبق كل عنصر من E_x لعنصر من E_y أي معادلة من الشكل :

$$Ax = y$$

حيث y عنصر معلوم من الفضاء الخطي E_y ، أما x عنصر مجهول من الفضاء E_x .

ترد هذه المعادلة إلى معادلات تكاملية ، تفاضلية ، جملة معادلات ، وبحل هذه المعادلات نجد المطلوب

- إن مفهوم مقلوب مؤثر مرتبط بمسألة وجود وحدانية الحل للمعادلة المؤثرية :

$$Ax = y$$

لنبرهن على أن للمعادلة $Ax = y$ حل_ وحيد .

البرهان على وجود حل :

لنفرض الآن جدلاً أن A^{-1} موجود ولنضع $A^{-1}y = x$:

بالتعويض في المعادلة $Ax = y$ نجد :

$$A\,A^{-1}y = y$$

أي $y = y$ وبالتالي $A^{-1}y = x$ حلاً للمعادلة $Ax = y$.

البرهان على أنه وحيد :

لنفرض جدلاً وجود حلاً أخر وليكن x_1 للمعادلة $Ax = y$ بمعنى :

$$Ax_1 = y$$

بتطبيق المؤثر A^{-1} على طرفي المساواة الأخيرة نجد :

$$x_1 = A^{-1}y = x$$

ومنه نستنتج أن الحل وحيد .

ملاحظة : لكي نبرهن أن المؤثر A^{-1} مستمر يكفي البرهان على أن للمعادلة حل وحيد .

_ استطعنا عند وجود مقلوب A وهو A^{-1} ايجاد x وهو حل للمعادلة $Ax = y$

في هذه الحالة نحصل على مقلوب يميني ومقلوب يساري .

لنفرض أن C مقلوب يميني لـ A ولنستبدل في المعادلة $Ax = y$ كل x بـ Cy وبالتالي نحصل :

$$ACy = y \Longrightarrow y = y$$

أي أنه حل (لأن المعادلة تحولت لمطابقة)

وهذا يعني أن C اعطتنا حل للمعادلة وبالتالي فإن $x = Cy$ حل للمعادلة .

والآن لنفرض أن B مقلوب يساري لـ A ولنطبق B على Ax فنجد :

$$BAx = By \Longrightarrow x = By$$

وهو أيضاً حل ، لكن نحن فرضنا وجود المقلوب اليساري يعطينا وجود حل وبالتالي فإن مسألة وجود الحل مرتبط بمسألة وجود المقلوب ، ومسألة وحدانية الحل .

ملاحظة (1) :

إذا كان المقلوبين من اليسار واليمين موجودين فإنهما متطابقان ونرمز له بالرمز : A^{-1} ، وكما يجب الانتباه إلى أن :

$$A : E_x \to E_y \Longrightarrow A^{-1} : E_y \to E_x$$

أو يمكن القول أن A^{-1} مطبق على صور العناصر x .

عندئذٍ نكتب :

$$A^{-1}A = I_{E_x} \qquad \& \qquad AA^{-1} = I_{E_y}$$

ملاحظة (2) :

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

ملاحظة (3) :

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \qquad \text{خطي } A$$

$$A^{-1}(y_1 + y_2) = A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2 \qquad \text{خطي } A^{-1}$$

أي أن كل من A, A^{-1} معكوس الآخر .

مبرهنة :

إذا كان المؤثر A خطياً وكان A^{-1} موجود فإن A^{-1} خطي :

البرهان :

A^{-1} جمعي لأن : لنضع

$$x = A^{-1}(y_1 + y_2) - A^{-1}y_1 - A^{-1}y_2 \quad - - \quad (*)$$

لنطبق على طرفي هذه المساواة المؤثر فنجد :

$$Ax = y_1 + y_2 - y_1 - y_2 \Rightarrow Ax = \theta_{E_y}$$

لو طبقنا على العلاقة الأخيرة A^{-1} نجد :

$$A^{-1}Ax = A^{-1}\theta = \theta_{E_x} \Rightarrow x = \theta$$

نعوض في (*) :

$$A^{-1}(y_1 + y_2) - A^{-1}y_1 - A^{-1}y_2 = 0$$

$$\Rightarrow A^{-1}(y_1 + y_2) = A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2$$

أي أن A^{-1} جمعي .

A^{-1} متجانس لأن : لنضع

$$x = A^{-1}(\gamma y) - \gamma(A^{-1}y) \quad - - \quad (**)$$

لنطبق على طرفي هذه المساواة المؤثر A فنجد :

$$Ax = \gamma y - \gamma y \Rightarrow Ax = \theta_{E_y}$$

لو طبقنا على العلاقة الأخيرة A^{-1} نجد :

$$A^{-1}Ax = A^{-1}\theta = \theta_{E_x} \Rightarrow x = \theta$$

نعوض في (**) :

$$A^{-1}(\gamma y) - \gamma(A^{-1}y) = 0$$
$$\Rightarrow A^{-1}(\gamma y) = \gamma(A^{-1}y)$$

أي أن A^{-1} متجانس ، وبالتالي A^{-1} خطي .

- مبرهنات حول مقلوب مؤثر :

تعريف : إذا كان مؤثر A خطي ومحدود من E_x على E_y وغامر ومتباين فإن المؤثر المقلوب A^{-1} يكون موجود وخطي ومحدود .

- مبرهنة : (2008–2009 الفصل الثاني ، 2010–2011 الفصل الأول) .

ليكن $A : E_x \to E_y$ مؤثراً خطياً ومحدوداً وغامراً ، برهن على أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون المؤثر A موجود وخطي ومحدود هو أن يكون :

$$\|Ax\| \geq m\|x\| \quad ; \quad m > 0 \ \ \forall x \in E_x - - (*)$$

فإن A^{-1} موجود وخطي ومحدود .

$$\|Ax\| \geq m\|x\| \iff A^{-1} \text{ موجود وخطي ومحدود}$$

البرهان :

$$\|Ax\| \geq m\|x\| \implies A^{-1} \text{ موجود وخطي ومحدود}$$

البرهان على أن A^{-1} موجود :

حسب التعريف السابق إذا كان A غامر ومتباين فإن A^{-1} موجود ، من نص المبرهنة ينتج أن المؤثر A يطبق $A : E_x \to E_y$ كما أنه غامر فيبقى أن نبرهن أنه متباين :

التباين :

نفرض $Ax_2 = y \quad , \quad Ax_1 = y$ عندئذٍ :

$$0 = \|Ax_1 - Ax_2\| = \|A(x_1 - x_2)\| \geq m\|x_1 - x_2\|$$

وبما أن $m \neq 0$ فإن :

$$\|x_1 - x_2\| = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = x_2$$

وبالتالي A متباين وبالتالي فإن A^{-1} موجود .

البرهان على أن A^{-1} خطي :

A^{-1} خطي إعتماداً على المبرهنة السابقة A خطي فإن A^{-1} خطي .

البرهان على أن A^{-1} محدود :

من العلاقة $Ax = y$ نستبدل كل x بـ $A^{-1}y$ $(x = A^{-1}y)$ في العلاقة (*) فنجد :

$$\|AA^{-1}y\| \geq m\|A^{-1}y\| \Rightarrow \|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\| \quad \exists y \in E_y \quad - - (**)$$

وبالتالي فإن A^{-1} محدود .

بالعكس :

$$\|Ax\| \geq m\|x\| \quad \Longleftarrow \quad \text{موجود وخطي ومحدود } A^{-1}$$

A^{-1} موجود ومحدود فإن الشرط (**) محقق أي :

$$\forall y \in E_y \;\; ; \;\; \|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\|$$

لدينا $x = A^{-1}y$:

$$\Rightarrow \|x\| \leq \frac{1}{m}\|Ax\| \Rightarrow \|Ax\| \geq m\|x\|$$

وهو المطلوب .

مبرهنة :

- لنفرض أن $(E_x = E_y)$ وأن A , B مؤثرين خطيين محدودين يطبق كل منهما الفضاء الخطي المنظم E في نفسه ، عندئذٍ سنبرهن أن :

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

البرهان :

من أجل أي عنصر من $x \in E$ يكون :

$$\|(A.B)x\| = \|A.(Bx)\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|$$

نقسم الطرفين على $\|x\|$ ونأخذ sup من أجل $x \neq \theta$ وبالتالي فإن :

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

مبرهنة :

إذا كانت A_n , B_n , A , B عناصر من فضاء المؤثرات الخطية المحدودة وحيث أن A_n متقاربة بالنظيم لـ A أي :

$$A_n \to A \quad ; \quad \|A_n - A\| \to 0 \quad ; n \to \infty$$

$$B_n \to B \quad ; \quad \|B_n - B\| \to 0 \quad ; n \to \infty$$

عندئذٍ لنبرهن أن :

$$A_n B_n \to AB$$

البرهان :

$$\|A_n B_n - AB\| = \|A_n B_n - A_n B + A_n B - AB\| =$$

$$= \|A_n(B_n - B) + (A_n - A)B\| \le \|A_n(B_n - B)\| + \|(A_n - A)B\|$$

$$\le \|A_n\|\|B_n - B\| + \|B\|\|A_n - A\|$$

طالما أن $A_n \to A$ فهي أساسية بمفهوم التقارب في فضاء المؤثرات الخطية المحدودة وحسب مبرهنة باناح فإن $\{\|A_n\|\}$ محدودة .

$$\Longrightarrow \|A_n B_n - AB\| \to 0 \ ; \ n \to \infty \quad \Longrightarrow A_n B_n \to AB$$

وذلك بمفهوم النظيم في فضاء المؤثرات الخطية المحدودة .

- ***مبرهنة :***

ليكن A مؤثراً خطياً ومحدوداً ويطبق الفضاء الخطي المنظم التام E في نفسه ، وليكن $\|A\| \le q < 1$ عندئذٍ يوجد للمؤثر $(I + A)$ مقلوب خطي ومحدود وهو : $(I + A)^{-1}$.

البرهان :

A مؤثراً خطياً+ I مؤثراً خطياً $\Longleftarrow$ $(I+A)$ مؤثراً خطياً

$\Longleftarrow$ $(I+A)^{-1}$ مؤثراً خطياً .

A مؤثراً محدود+I مؤثراً محدود $\Longleftarrow$ $(I+A)$ مؤثراً محدود

$\Longleftarrow$ $(I+A)^{-1}$ مؤثراً محدود ؟

وبالتالي علينا البرهان على المحدودية .

لنأخذ السلسلة :

$$I - A + A^2 - A^3 + \cdots + (-1)^n A^n + \cdots$$

لدراسة تقارب سلسلة المؤثرات نشكل متتالية المجاميع الجزئية لهذه السلسلة :

$$S_n = I - A + A^2 - A^3 + \cdots + (-1)^n A^n$$

$$S_{n+p} = I - A + A^2 - A^3 + \cdots + (-1)^n A^n + \cdots + (-1)^{n+p} A^{n+p}$$

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \|(-1)^{n+1} A^{n+1} + \cdots + (-1)^{n+p} A^{n+p}\| \le$$

بما أن $\|A^2\| = \|A\|^2$ فإن :

$$\le q^{n+1} + q^{n+2} + \cdots + q^{n+p} =$$

$$= q^{n+1}[1 + \cdots + q^{p-1}] = q^{n+1}\frac{1-q^p}{1-q}$$

بأخذ النهاية للطرفين نجد :

$$\|S_{n+p} - S_n\| \to 0 \quad ; \mathrm{n} \to \infty$$

لكن المتتالية موجودة في فضاء المؤثرات الخطية المحدودة وهو تام وبالتالي فإن السلسلة متقاربة في نفسها ،عندئذٍ :

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$
$$\Longrightarrow S = I - A + A^2 - A^3 + \cdots + (-1)^n A^n + \cdots$$

الآن لنشكل :

$$S(I+A) = \lim_{n\to\infty}[I - A + A^2 - A^3 + \cdots + (-1)^n A^n](I+A)$$

(حاصل ضرب بالمؤثر الواحدي تتكرر نفس الحدود)

$$= \lim_{n\to\infty}[I + (-1)^{n+1}A^{n+1}] = \lim_{n\to\infty}[I - (-A)^{n+1}] = I$$

أي أن :

$$S = (I + A)^{-1}$$

هذا يعني أن S هو مقلوب لهذا المؤثر $(I + A)$ او $(I + A)$ مقلوب لـ S

ضمن الشرط $\|A\| \le q < 1$ فإن $I + A$ قابل للقلب ومقلوبه هو S وهو عبارة عن مجموع السلسلة ، أي مقلوب $(I + A)$ هو :

$$(I + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-A)^n$$

المحدودية :

$$\|S\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.(A)^n\right\| \le \sum_{n=0}^{\infty}\|(A)^n\| \le \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{q}$$

- **مبرهنة :**

ليكن المؤثر $A \in (E_x \to E_y)$ خطي ومحدود و مقلوبه A^{-1} موجود وليكن المؤثر ΔA بحيث:

$$\|\Delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$$

عندئذٍ يكون المؤثر :

$(B = A + \Delta A)$ قابلاً للقلب ، يعني مقلوبه موجود ومحدود وتتحقق العلاقة الآتية :

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \le \frac{\|\Delta A\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|}\|A^{-1}\|^2$$

البرهان : في المحاضرة القادمة ...

انتهت المحاضرة التاسعة عشر

أ:عبد القادر أرناؤطي

جامعة حلب	امتحانات الفصل الثاني	التحليل التابعي (١)
كلية العلوم	٢٠١٢ - ٢٠١٣	سنة رابعة رياضيات – تحليل

السؤال الأول : (٣٥=١٥+٢٠) درجة

البحث الأول

١- ليكن E_n فضاءً ذا n بعداً . عرف المسافة الإقليدية في هذا الفضاء وتأكد من تحقق جميع موضوعات المسافة ، ثم برهن أن التقارب بالنسبة لهذه المسافة هو تقارب بالإحداثيات .

٢- برهن متراجحة بونياكوفسكي -شفارتز

$$|(x,y)| \le \|x\| . \|y\|$$

السؤال الثاني: (٣٥=٢٠+١٥) درجة

١- ليكن $C[0,1]$ فضاء التوابع المستمرة على المجال $[0,1]$. وليكن

$$d(x,y)=\int_0^1 |x(t)-y(t)|dt$$

تابع مسافة في هذا الفضاء . برهن أن $C[0,1]$ ليس تاماً بالنسبة لهذه المسافة .

٢- إذا كان A مؤثراً $(A:C[0,1]\to C[0,1])$ معرفاً بالعلاقة

$$Ax(t)=\int_0^1 (t^2+s^2)\,x(s)\,ds$$

برهن أن A خطي ومحدود واحسب نظيمه .

السؤال الثالث: (٣٠=٢٠+١٠) درجة

١- برهن أن الجداء الداخلي في فضاء هيلبرت تابع مستمر بالنسبة لمتغيريه .

٢- برهن أن جميع فضاءات هيلبرت القابلة للفصل ايزومورفية وايزومترية فيما بينها .

أ. د . شحادة الأسدي

جامعة حلب　　　　امتحانات الفصل الأول　　　　التحليل التابعي (١)

كلية العلوم　　　　٢٠١٢-٢٠١٣　　　　سنة رابعة رياضيات- تحليل

السؤال الأول : (٣٠ درجة)

١- ليكن $C[0,1]$ فضاء التوابع المستمرة على المجال $[0,1]$. برهن أن هذا الفضاء متري تام بالنسبة للمسافة $d(x,y)=\max_t |x(t)-y(t)|$ ، وأنه قابل للفصل .

٢- ليكن X فضاء مترياً تاماً و ليكن A مؤثراً مستمراً يطبق X في نفسه . برهن أنه إذا كان A^n مؤثراً ضاغطاً من أجل أي عدد طبيعي n فإنه توجد نقطة ثابتة للمؤثر A .

السؤال الثاني: (٣٥ درجة)

١- ليكن L فضاء جزئياً من الفضاء الخطي المنظم E و $E\neq L$. برهن على أنه من أجل أي عدد $0<\varepsilon$ يوجد عنصر مثل y ; $\|y\|=1$ وبحيث إن :

$$\|x-y\|>1-\varepsilon \ ; \ \forall\ x\in L$$

٢- عرف المجموعة المحدبة في فضاء خطي منظم . ثم برهن أنه إذا كانت M مجموعة محدبة في الفضاء الخطي المنظم X فإن المجموعة $M+a$ حيث a عنصر مثبت من X هي أيضاً مجموعة محدبة .

٣- برهن أن الجداء الداخلي في فضاء هيلبرت المجرد هو تابع مستمر بالنسبة لمتغيريه .

السؤال الثالث: (٣٥ درجة)

١- ليكن L فضاء جزئياً من فضاء هيلبرت H و مولداً بالجملة المتعامدة المنظمة.., $e_1,e_2,\dots,e_n$

برهن على أنه من أجل أي موجب $\varepsilon>0$ و أي عنصر $x\in L$ يوجد تركيب خطي مثل $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$

وبحيث أن $\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|<\varepsilon$.

٢- ليكن A مؤثراً جمعياً $(A:E_x\to E_y)$ مستمراً في نقطة ما $x_0\in E_x$. برهن أن A مستمر في جميع نقاط E_x .

٣- احسب نظيم المؤثر A $(A:C[0,1]\to C[0,1])$ المعرف بالعلاقة :

$$Ax(t)=\int_0^1 (t+s)\,x(s)\,ds$$

أ.د. شحادة الأسدي

٤٧

مكتبة زيزون

جامعة حلب — امتحانات الفصل الأول — التحليل التابعي (1)

كلية العلوم — 2012-2011 — سنة رابعة (تحليل)

السؤال الأول : (25)

البحث الأول

1- برهن أن الفضاء $C[0,1]$ ، فضاء التوابع المستمرة على المجال $[0,1]$ هو فضاء متري بالنسبة للمسافة $\rho(x,y)=\max\limits_{t}|x(t)-y(t)|$ مبينا طبيعة تقارب متتالية $\{x_n(t)\}$ من عناصر هذا الفضاء إلى عنصر $x(t)$ منه ، ثم احسب المسافة بين التابعين $x(t)=t^3 \;,\; y(t)=t^5$.

2- ليكن $X=[2,\infty)$ فضاء متريا مزودا بالمسافة $d(x,y)=|x-y|$ ، وليكن A مؤثرا معرفا بالعلاقة : $Ax=2+\dfrac{1}{x}$. برهن أن A مؤثر ضاغط ثم أوجد نقطته الثابتة .

السؤال الثاني :(30)

1- عرف النظيمين المتكافئين في فضاء خطي منظم E، ثم برهن على أنه إذا كانت $\{x_n\}$ متتالية ما من E متقاربة وفق أحد النظيمين فإنها تكون متقاربة وفق النظيم الآخر .

2- برهن أن الجداء الداخلي في فضاء هيلبرت يولد نظيماً ، تحقق من موضوعات النظيم ، ثم برهن أن الجداء الداخلي تابع مستمر بالنسبة للتقارب بالنظيم بالنسبة لمتغيريه .

السؤال الثالث : (25)

1- برهن أن الشرط اللازم والكافي كي يكون المؤثر الخطي A مستمراً هو أن يكون محدودا

2- ليكن المؤثر A $(A:D(A)\subset X\to Y)$ معرفا في الفضاء الخطي المنظم X ويأخذ قيمه في الفضاء الخطي المنظم Y. عرف بيان المؤثر A ، ثم برهن أنه إذا كان A^{-1} موجوداً وكان A مغلقا فإن A^{-1} يكون مغلقا .

السؤال الرابع :(20)

1- ليكن E فضاء خطيا منظما وليكن $x_0\neq\theta$ عنصرا من E ، برهن على وجود دالي f معرف على E ، وبحيث إن :

$$1)\ \|f\|=1 \qquad ,\ 2)\ f(x_0)=\|x_0\|$$

2- برهن أن الدالي $f(x)=\int_a^b \dfrac{x(t)}{(t-a)^\alpha}dt$ حيث $\alpha<\dfrac{p}{p-1} \;,\; 1<p$ ، محدود في الفضاء $L^p(a,b)$ ، و احسب نظيمه.

أ.د. شحادة الأسدي

جامعة حلب　　　　الدورة الإمتحانية الثالثة　　　　التحليل التابعي (١)

كلية العلوم　　　　٢٠١١-٢٠١٢　　　　سنة رابعة رياضيات – تحليل

السؤال الأول : (٢٥ علامة)

البحث الأول ١- برهن أن m فضاء المتتاليات المحدودة هو فضاء متري بالنسبة للمسافة $d(x,y)=\sup_i|\xi_i-\eta_i|$ ثم برهن أن التقارب في m هو تقارب بالإحداثيات ومنتظم بالنسبة لدليل الإحداثيات .

٢- برهن أن العلاقة $d(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$ تعرف مسافة في مجموعة الأعداد الحقيقية .

السؤال الثاني : (٤٠ علامة)

١- عرف المجموعة المحدبة في فضاء خطي منظم ، ثم برهن أن الكرة المفتوحة في فضاء خطي منظم هي مجموعة محدبة .

٢- إذا كان H فضاء هيلبرت المجرد فبرهن أن : $|(x,y)|\le\|x\|\|y\|$.

٣- احسب تنظيم العنصر $x\in L^2(0,\pi)$ إذا كان x معرفاً بالعلاقة :

$$x(t)=\begin{cases}\sin t \ , if & \sin\frac{1}{t}\neq 0\\ \cos t \ , if & \sin\frac{1}{t}=0\end{cases}$$

السؤال الثالث : (١٥ علامة)

برهن أن الشرط اللازم والكافي كي يكون المؤثر $A:D(A)\subset X\to Y$ حيث X , Y فضاءان خطيان منظمان مغلقاً هو أن يكون بيانه $Gr(A)$ مغلقاً.

السؤال الرابع: (٢٠ علامة)

أوجد الشكل العام للدالي الخطي في فضاء هيلبرت المجرد .

أ. د . شحادة الأسدي

٤٦

السؤال الأول $\boxed{25}$

1-

$$\rho(x,y) = \max_t |x(t)-y(t)|$$

- التحقق من موضوعات المسافة. (5)
- البرهان على أن التقارب في $C[0,1]$ هو تقارب بانتظام. (5)
-

(5) $$d(x,y) = \max_t |t^3 - t^5| = \max |t^3(1-t^2)|$$

$$z(t) = t^3(1-t^2)$$

$t = \mp\sqrt{\frac{3}{5}}$ ، $t=0$ النقاط الحرجة $z'(t)=0$

$t=-\sqrt{3/5} \notin [0,1]$. $z(t)$ تبلغ قيمة عظمى في النقطة $t=\sqrt{\frac{3}{5}}$

$$d(x,y) = \frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}$$

2- $$d(Ax,Ay) = |Ax-Ay| = \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = \left|\frac{x-y}{xy}\right| \le \frac{1}{4}|x-y|$$

(5) $$= \frac{1}{4}d(x,y)$$

النقطة الثابتة (5)

$$Ax^* = x^* ;$$

$$2+\frac{1}{x^*} = x^* \Rightarrow x^* = 1+\sqrt{2}$$

السؤال الثاني $\boxed{30}$

$$m\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le M\|x\|_2 , \forall x\in E$$ (10)

نفرض أن $\{x_n\}$ متقاربة إلى x وفق $\|\cdot\|_1$ بحيث أنه مهما كان $\varepsilon>0$ فيوجد عدد n_0 بحيث أنه من أجل جميع قيم $n>n_0$ تتحقق المتراجحة

$$\|x_n-x_0\|_1<\varepsilon$$

ومنه نجد أن

$$m\|x_n-x_0\|_2 \le \|x_n-x_0\|_1 < \varepsilon$$

$$\|x_n-x_0\|_2 < \frac{\varepsilon}{m} \quad \forall n>n_0$$

وبالعكس من أجل النظيم الآخر.

2- $$\sqrt{(x,x)} = \|x\|$$ (10)

التحقق من موضوعات النظيم

1/ $\|x\|\ge 0$; $\|x\|=0 \Rightarrow x=\theta$

2/ $(\lambda x,\lambda x) = |\lambda|^2\|x\|^2 = \|\lambda x\|^2 \Rightarrow$

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$$

3) $$\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) = \|x\|^2+\|y\|^2 + (x,y)+(y,x) \le$$

$$\le \|x\|^2+\|y\|^2+2|(x,y)| \le$$

$$\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\| =$$

$$(\|x\|+\|y\|)^2 \Rightarrow \|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$$

نفرض أن $x_n\to x$ ، $y_n\to y$ و $\|x_n\|$ محدودة (10)

$$|(x_n,y_n)-(x,y)| =$$

$$|(x_n,y_n)-(x_n,y)+(x_n,y)-(x,y)| \le$$

$$\le |(x_n,y_n)-(x_n,y)| + |(x_n,y)-(x,y)|$$

$$= |(x_n,y_n-y)| + |(x_n-x,y)| \le$$

$$M\|y_n-y\| + \|y\|\|x_n-x\| \to 0$$

السؤال الثالث $\boxed{25}$

اللزوم (5) نفرض أن A مستمر لكنه غير محدود عندئذ توجد متتالية من العناصر $\{x_n\}$ بحيث أن

$$\|Ax_n\| > n\|x_n\| \Rightarrow Ax_n\ne\theta \Rightarrow x_n\ne\theta$$

$$\xi_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$$

$$\|\xi_n\| = \frac{1}{n} \to 0 \quad ; \xi_n\to 0$$

من جهة ثانية

$$A\xi_n = \frac{1}{n\|x_n\|}Ax_n \Rightarrow$$

$$\|A\xi_n\| > 1$$

أي أن $\{A\xi_n\}$ لا تتقارب إلى θ وهذا تناقض

(5) ٢) نفرض أن المؤثر محدود أي أن

$$\|Ax\| \le M\|x\|$$

ولنفرض $x_n \to x \Rightarrow \|x_n - x\| \to 0$

عندئذ نجد أن

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \le M\|x_n - x\| \to 0$$

أي أن $Ax_n \to Ax \Rightarrow A$ مستمر.

$\boxed{15}$

نعرف بيان المؤثر A

$$Gr A = \{x \in D \mid \langle x, Ax\rangle\}$$

$$\langle x, Ax\rangle \in X \oplus Y \quad (3)$$

(3) A مغلق $\Leftarrow Gr A$ مغلق

من أجل كل عنصر $y \in R(A)$ من عنصر $x \in D(A)$ ويجب أن $y = Ax$

أي $x = A^{-1}y$

$$Gr(A) \overset{(3)}{=} \{\langle A^{-1}y, y\rangle \mid y \in R(A)\}$$

لنأخذ التطبيق (2)

$$X \oplus Y \to Y \oplus X$$

$$\langle x, y\rangle \to \langle y, x\rangle$$

هذا التطبيق إيزومتري صورة المجموعات المغلقة مجموعات مغلقة (3)

$\{\langle y, A^{-1}y\rangle \mid y \in R(A)\}$: $Gr(A)$ ومنه صورة

وبالتالي

$$Gr(A^{-1}) = \{\langle y, A^{-1}y\rangle \mid y \in R(A)\} \quad (3)$$

مغلق.

١) الراين (20)

$$L = \{t x_0\},\ t \in \mathbb{R}$$

(3) L فضاء جزئي من E

$\boxed{10}$ نعرف دالة φ بالعلاقة

$$\varphi(x) = t\|x_0\|$$

هذا الدالي خطي ومحدود (5)

1) $\varphi(x_0) = \|x_0\|$

2) $|\varphi(x)| = |t|\,\|x_0\| = \|x\|$

$\|\varphi\| = 1$ بالتالي

(2) ... حسب هان باناخ نمدد هذا الدالي إلى E إلى f المطلوب

$\boxed{0}$ السؤال

$${}_a\!\int^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt$$

متقارب ... تكامل غير محدد

$$(5)\ |f(x)| \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b \left|\frac{1}{(t-a)^\alpha}\right|^q dt\right)^{1/q}$$

$$|f(x)| \le \left({}_a\!\int^b \left|\frac{dt}{(t-a)^\alpha}\right|^q\right)^{1/q} \|x\| \Rightarrow$$

$$(5)\ \|f\| = \left({}_a\!\int^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha q}}\right)^{1/q} = \left[\frac{1}{1-\alpha q}(b-a)^{1-\alpha q}\right]^{1/q}$$

جامعة حلب		امتحانات الدورة الثالثة		التحليل التابعي (1)

كلية العلوم		2010-2011		سنة رابعة (تحليل)

السؤال الأول : (10+15=25)

1- ليكن (X,d) فضاءً متريا . برهن أن تابع المسافة $d(x,y)$ مستمر بالنسبة لمتغيريه أي أنه إذا كانت $x_n \to x$, $y_n \to y$ فإن $d(x_n,y_n) \to d(x,y)$.

2- عرف المجموعة المحدبة في فضاء منظم ، ثم برهن أن القطع الناقص $M = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \ell_2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \xi_n^2 \leq 1 \right\}$ ، هي مجموعة محدبة .

السؤال الثاني : (15+15=30)

1-. برهن أن الشرط اللازم والكافي كي يكون المؤثر الجمعي و المتجانس A مستمرا هو أن يكون محدودا .

2 - أذا كانت $\{A_n\}$ متتالية من المؤثرات الخطية و المحدودة متقاربة بالنظيم في فضاء المؤثرات الخطية المحدودة فبرهن على أن المتتالية $\{A_n x\}$ تتقارب بانتظام في كل كرة $\|x\| \leq r$.

السؤال الثالث : (10+15=25)

1- احسب نظيم المؤثر $A: C[0,1] \to C[0,1]$ المعرف بالعلاقة :

$$A\,x(t) = \int_0^1 (t+s)\,x(s)\,ds$$

2- ليكن $A: E_x \to E_y$ مؤثرا خطيا ومحدودا، من الفضاء الخطي المنظم E_x إلى الفضاء الخطي المنظم E_y، عرف بيان هذا المؤثر ثم برهن أن A يكون مغلقا إذا كان بيانه مغلقا.

السؤال الرابع : (20)

ليكن E_n فضاءً خطيا منظما ومنتهي البعد $(\dim E_n = n)$. أوجد الشكل العام للدالي الخطي في E_n . بفرض أن المسافة في E_n هي المسافة الإقليدية احسب المسافة في E_n^*.

أ. د . شحادة الأسدي

المركزية وزيزان

١٦٠١٦٦ : ...

٤١

السؤال 5 : نفرض ان المؤثر محدود واذن

$$\|Ax\| \leq M\|x\|$$

ولتكن $x_n \to x \Leftarrow \|x_n - x\| \to 0$

عندئذ نجد ان

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\| \to 0$$

اذا $Ax_n \to Ax \Rightarrow A$ مستمر.

$\boxed{15}$

نعرف بيان المؤثر A

$$Gr A = \{ x \in D \mid \langle x, Ax \rangle \}$$

$$\langle x, Ax \rangle \in X \oplus Y \quad 3$$

3 مغلق $A \Rightarrow Gr A$ مغلق

هنا من اي عنصر $y \in R(A)$ هو صورة عنصر $x \in D(A)$ ويجب ان $y = Ax$

او $x = A^{-1}y$

$$Gr(A) \overset{3}{=} \{\langle A^{-1}y, y\rangle \mid y \in R(A)\}$$

لنأخذ التطبيق 2

$$X \oplus Y \to Y \oplus X$$

$$\langle x, y\rangle \to \langle y, x\rangle$$

هذا التطبيق ايزومتري وصورة المجموعات المغلقة مجموعات مغلقة 3

هذه صورة $Gr(A)$: $\{\langle y, A^{-1}y\rangle \mid y \in R(A)\}$

وتكون

$$Gr(A^{-1}) = \{\langle y, A^{-1}y\rangle \mid y \in R(A)\}$$

مغلقة.

السؤال 5 $\boxed{20}$

$$L = \{t x_0\},\ t \in \mathbb{R}$$

$\boxed{10}$ 3 L فضاء جزئي من E.

فرضا لنا φ بالصورة

$$\varphi(x) = t\|x_0\|$$

هذا الدالي خطي ومحدود.

5

1) $\varphi(x_0) = \|x_0\|$

2) $|\varphi(x)| = |t|\,\|x_0\| = \|x\|$

بالتالي فان $\|\varphi\| = 1$.

2 حسب هان باناخ يوجد تمديد على كل E f المطلوب.

مثال

0

$$\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt$$

متقارب تكامل اذا كان

(5)

$$|f(x)| \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \left|\frac{1}{(t-a)^\alpha}\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$|f(x)| \leq \left(\int_a^b \left|\frac{dt}{(t-a)^\alpha}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \|x\| \Rightarrow$$

(5)

$$\|f\| = \left(\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^{\alpha q}}\right)^{\frac{1}{q}} = \left[\frac{1}{1-\alpha q}(b-a)^{1-\alpha q}\right]^{\frac{1}{q}}$$

جامعة حلب
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الأول
2010-2011

التحليل التابعي (1)
سنة رابعة رياضيات
شعبة التحليل

السؤال الأول : (25=10+5+10)

1- ليكن X فضاءً متريا تاما، وليكن A مؤثرا يطبق X في نفسه وبحيث إن A^n مؤثر ضاغط من أجل أي عدد طبيعي n. برهن على وجود نقطة ثابتة للمؤثر A.

2- لتكن a,b,c أعدادا حقيقية غير سالبة و محققة العلاقة $a \le b+c$ ، برهن أن :

$$\frac{a}{1+a} \le \frac{b+c}{1+b+c} \le \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$$

3- برهن أن العلاقة : $\rho(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$ تعرف مسافة في مجموعة الأعداد الحقيقية

السؤال الثاني : (25=15+10)

1- إذا كان L فضاءً جزئيا من الفضاء الخطي المنظم E $(L \ne E)$. فبرهن على أنه من أجل أي عدد $0<\varepsilon$ يوجد عنصر y بحيث $\|y\|=1$ و $\forall x \in L \;,\; \|x-y\| > 1-\varepsilon$.

2- هل يعرف التابع الذي ينقل العنصر x من الفضاء $C^{(1)}[a,b]$ إلى العنصر $|x(a)| + \max\limits_{a\le t\le b} |x'(t)|$ في $\mathbb{R}$ نظيما ؟

السؤال الثالث : (50=15+20+15)

1- إذا كان A مؤثرا خطيا من الفضاء الخطي المنظم E_x على الفضاء الخطي المنظم E_y فبرهن على أن الشرط اللازم و الكافي كي يكون A^{-1} موجودا وخطيا و محدودا هو أن يكون: $\|Ax\| \ge m\|x\| \quad ; m>0 \,, \forall x \in E_x$.

2- أوجد الشكل العام للدالي الخطي في فضاء هيلبرت H.

3- تحقق من أن العلاقة $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\xi_k + \xi_{k+1}}{2^k}$ حيث إن $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ عنصر من ℓ_2، تعرف داليا خطيا و مستمرا في ℓ_2 ، ثم احسب نظيمه .

أ. د . شحادة الأسدي

٤٠٦٨

OLD. mAN

جامعة حلب — الدورة التكميلية — مقرر التحليل التابعي (١)

كلية العلوم — ٢٠٠٩-٢٠١٠ — السنة الرابعة

قسم الرياضيات — شعبة التحليل

<u>السؤال الأول :</u>

١- لتكن $\rho(x,y)$ مسافة على X . برهن أن التابع $d(x,y)$ المعرف بالعلاقة

$$d(x,y)=\ln[1+\rho(x,y)]$$

يعرف مسافة على X.

٢- لتكن $X=[2,\infty)$ وليكن A مؤثراً معرفاً بالعلاقة $Ax=2+\frac{1}{x}$. برهن أن المؤثر A ضاغط ثم أوجد نقطته الثابتة .

٣- هل يعرف التابع الذي يقابل النقطة $x\in\mathbb{R}$ بالعدد $arctgx$ نظيماً في $\mathbb{R}$.تأكد من ذلك؟

<u>السؤال الثاني :</u>

١- برهن أن مجموعة النقاط $\left\{x\in\ell_2;x=\left(\xi_1,\xi_2,\dots\right):\sum_{n=1}^{\infty}n^2\xi_n^2\le 1\right\}$ مجموعة محدبة .

٢- ليكن f داليا خطيا في الفضاء ℓ_2 معرفا بالعلاقة : $f(x)=\xi_1+\xi_2$ ، برهن أن f مستمر واحسب نظيمه.

<u>السؤال الثالث :</u>

لتكن $\{e_i\}$ جملة متعامدة منظمة في فضاء هيلبرت H. ١) متى تكون الجملة تامة ؟ ٢) متى تكون مغلقة ؟ ٣) برهن أن الشرط اللازم و الكافي كي تكون الجملة تامة هو أن تكون مغلقة

<u>السؤال الرابع :</u>

ليكن X فضاء خطياً منظماً و لتكن L متنوعة خطية في X ، وليكن $x_0\in\overline{L}$ ، $d=\inf_{x\in L}\|x_0-x\|$. برهن على وجود دالي f معرف على X و أن :

$$1)\ f(x)=0\quad;\forall x\in L\quad,\ 2)\ f(x_0)=1\quad,\quad 3)\ \|f\|=\frac{1}{d}$$

أ.د. شحادة الأسدي