محول لابلاس

٠١ تعريف محول لابلاس وخواصه

لتكن هناك الدالة $f(x)$ معرفة في الفراغ $s \geq 0$. فإذا فرضنا هذه الدالة في النواة e^{-sx} وهي دالة تابعة للمتغير x والوسيط s ، ثم التكامل على الناتج بالنسبة ل x من القيمة 0 إلى ∞ وكان هذا التكامل متقارب فإن ناتج هذا التكامل يسمى محول لابلاس للدالة $f(x)$ وتسمى s بمعامل لابلاس حيث $s > 0$ ويرمز للناتج كالآتي: $\bar{f}(s)$ أو $L\{f(t)\}$ ويكتب على الصورة

$$L\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx \qquad (١)$$

ويقال أن محول لابلاس لدالة ما متواجد إذا كان التكامل متقارب أما إذا كان التكامل متباعداً فإننا نقول أن محول لابلاس غير معروف .

وهناك شروط موضوعة على معامل لابلاس وهي وجود قيم ل s تجعل تحويل لابلاس معرفاً ومن ثم يمكن القول أن هذه القيم تمثل مجموعة تعريف المحول . ومحول لابلاس لقيم s السالبة غير متواجد وكذلك عندما تأخذ الدوال أوضاعاً معينة فمثلاً $f(t) = e^{t^2}$ فإن المحول في هذه الحالة متباعد مهما كانت قيمة s .

وبناء على ما سبق من نقاش نذكر الحقيقية التالية

خاصية:

مؤثر محول لابلاس هو مؤثر خطي أي انه إذا كانت لدينا الدالتين $f(t), g(t)$ وكان محول لابلاس لهما $L\{f(t)\}, L\{g(t)\}$ على الترتيب فإنه لأي عددان $a, b \in F$ حيث F حقل الأعداد .

$$L\{af(t) + bg(t)\} = aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\} \qquad (٢)$$

البرهان:

باستخدام تعريف محول لابلاس :

$$L.H.S = L\{af(t)+bg(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\{af(t)+bg(t)\}dt$$

$$= a\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + b\int_0^\infty e^{-st} g(t)dt = aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\}$$

وعلى وجه العموم هذه الخاصية تكتب على الشكل الآتي :

$$L\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^{n} a_i L\{f_i(t)\} \qquad (٣)$$

٠٢ تعريف محول لابلاس العكسي

لتكن الدالة $L\{f\}$ أو $\overline{f}(s)$ هي محول لابلاس للدالة $f(t)$ وعليه يمكن القول أن الدالة $f(t)$ تسمى بمحول لابلاس العكسي للدالة $\overline{f}(s)$ وتكتب على الشكل الآتي :

$$f(t) = L^{-1}\{\overline{f}(s)\}$$

ويتعين المحول المعاكس من حل المعادلة التكاملية

$$\overline{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad (٤)$$

وعلى وجه العموم ليس بالضروري أن يكون هناك لهذه المعادلة حل، فإن كان لها حلاً وحيداً فإنه يمكن القول أن محول لابلاس المعاكس للدالة $\overline{f}(s)$ موجود وهو $f(t)$.

وهذا المحول المعاكس يتمتع بالخاصية العامة التالية

$$L^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} b_i f_i(s)\right\} = \sum_{i=1}^{n} b_i L^{-1}\{f_i(s)\} \qquad (٥)$$

٠٣ محول لابلاس لبعض الدوال

في هذا الجزء سنقوم باستنباط محول لابلاس لبعض الدوال المشهورة.

أ- عندما تكون $f(t) = e^{at}$ ، حيث a ثابت

$$L\{e^{at}\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt=\left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^\infty$$

وعليه يمكن الوصول إلى القاعدة.

$$L\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a} \qquad (٦)$$

- **فإذا كانت** a **سالبة بمعنى أن** $a=-b, b>0$ **فإن**

$$L\{e^{-bt}\}=\frac{1}{s+b} \qquad (٧)$$

- **فإذا كانت** $a=0$ **فإن**

$$L\{1\}=\frac{1}{s} \qquad (٨)$$

فإذا كان $a=ic \ \ ,i=\sqrt{-1}$ فإن

$$L\{e^{ict}\}=\frac{1}{s-ic}$$

بالضرب في المرافق

$$L\{e^{ict}\}=\frac{s+ic}{s^2+i^2} \qquad (٩)$$

ولكن درس من السابق أن

$$\mathrm{Re}\,e^{iq}=\cos q \qquad , \quad \mathrm{Im}\,e^{iq}=\sin q$$

ومن ثم نحصل على

$$L\{\cos ct\}=\frac{s}{s^2+c^2} \qquad (١٠)$$

أيضاً

$$L\{\sin ct\}=\frac{a}{s^2+c^2} \qquad (١١)$$

وللحصول على محول لابلاس لدالة كثيرات الحدود $n\geq 0 \quad f(t)=t^n$ (n عدد صحيح موجب)

فإن

$$L\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt$$

بالتكامل بالتجزيء

$$u = t^n \qquad e^{-st}dt = dv$$

$$du = nt^{n-1}dt \qquad \frac{e^{-st}}{-s} = v$$

ومن ثم نجد أن

$$L\{t^n\} = \left(\frac{e^{-st}t^n}{-s}\right)_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^{n-1}dt$$

ومن الملاحظ انعدام الجزء الأول من الطرف الأيمن وعليه نحصل على الآتي:

$$L\{t^n\} = \frac{n}{s}L\{t^{n-1}\} \qquad (١٢)$$

ولما كانت العلاقة (١٢) محققة لجميع قيم n ذات العدد الصحيح الموجب فهي علاقة تكرارية وعليه

$$L\{t^n\} = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdot\frac{n-2}{s}\ldots\frac{n-(n-1)}{s}L\{t^0\}$$

ومن ثم نجد أن

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^n}L\{1\}$$

ومن الأفضل كتابة المحول على الصورة

$$L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \quad , \quad n! = \Gamma(n+1) \qquad (١٣)$$

حيث $\Gamma(\cdot)$ هي دالة جاما

- **أما إذا كانت** $n > -1$ **فإن**

$$L\{t^n\} = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt$$

بأخذ التعويض $u = st$

$$L\{t^n\} = \frac{1}{s}\int_0^\infty (\frac{u}{s})^n e^{-u} du = \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty e^{-u} u^n du$$

وعليه نحصل على الآتي:

$$L\{t^n\} = \frac{1}{s^{n+1}}\Gamma(n+1) \qquad n > -1 \tag{١٤}$$

ولذلك يمكن القول أن العلاقة (١٣) صالحة لجميع قيم $n \geq 1$, $n > -1$

- **أمثلة عامة وتمارين**

<u>مثال ١.</u>

أوجد محول لابلاس للاتي:

$$L\{\cosh at\} \qquad , L\{\sinh at\} \qquad , L\{\sin 8t\}$$

الحل: مما سبق دراسته نعلم أن

$$\cosh at = \frac{1}{2}\left(e^{at} + e^{-at}\right)$$

$$L\{\cosh at\} = \frac{1}{2}\left\{L\{e^{at}\} + L\{e^{-at}\}\right\} = \frac{1}{2}[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}]$$

ومن ثم نحصل على

$$\text{(i) } L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

بالمثل وبنفس الطريقة يمكن إثبات أن

$$\text{(ii) } L\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

حيث أن

$$L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

فإن

$$L\{\sin 8t\} = \frac{8}{s^2 + 64}\cdot$$

مثال ٢.

أوجد محول لابلاس للدالة

$$f(t) = \begin{cases} 5 & 0 < t < 2 \\ -3 & 2 < t < 6 \\ 0 & t \geq 6 \end{cases}$$

الحل:

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^2 5e^{-st}dt + \int_2^6 (-3)e^{-st}dt + \int_6^\infty e^{-st}(0)dt$$

$$= 5\int_0^2 e^{-st}dt - 3\int_2^6 e^{-st}dt = 5\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^2 - 3\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_2^6$$

$$= \frac{5}{s}\left[1 - e^{-2s}\right] + \frac{3}{s}\left[e^{-6s} - e^{-2s}\right] = \frac{1}{s}\left[5 - 8e^{-2s} + 3e^{-6s}\right].$$

مثال ٣.

أوجد محول لابلاس للدوال الآتية:

$$L\{t^6 - 5 + t^{\frac{3}{2}}\} \qquad , \ L\{\sin 2t \cos 2t\} \quad , L\{\cos^2 4t\}$$

الحل: باستخدام القاعدة التالية

$$L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

نحصل على الآتي:

$$L\{t^6 - 5 + t^{\frac{3}{2}}\} = \frac{\Gamma(7)}{s^7} - \frac{5\Gamma(1)}{s} + \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}{5^{\frac{5}{2}}}$$

وحيث أن

$$\Gamma(7) = 6! \qquad , \ \Gamma(1) = 1 \qquad , \ \Gamma(\tfrac{5}{2}) = (\tfrac{3}{2})(\tfrac{1}{2})\sqrt{p}$$

وعليه نجد أن

$$(i)\ L\{t^6 - 5 + t^{\frac{3}{2}}\} = \frac{6!}{s^7} - \frac{5}{s} + \frac{3\sqrt{p}}{4\cdot 5^{\frac{5}{2}}}$$

$$(ii)\ L\{\sin 2t \cos 2t\} = \frac{1}{2}L\{\sin 4t\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{s^2+16}\cdot$$

$$(iii)\ L\{\cos^2 4t\} = \frac{1}{2}L\{1+\cos 8t\}$$

$$= \frac{1}{2}[L\{1\} + L\{\cos 8t\}] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+64}\right].$$

٠٤ تعاريف وملاحظات ونظرية الوجود

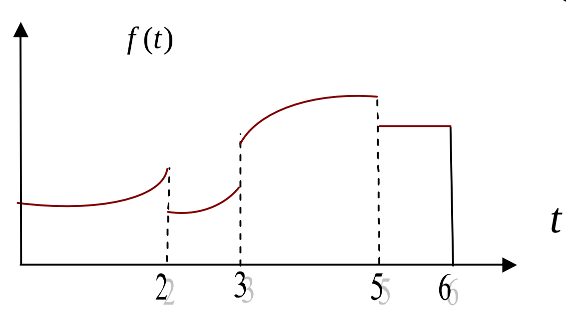
في هذا البند سنقوم بذكر بعض التعاريف الهامة الآتية:

أ. الاستمرار المقطعي :

يقال أن الدالة $f(t)$ مستمرة مقطعياً في الفترة $[a,b]$ إذا استطعنا إيجاد تجزئة منتهية للفترة $[a,b]$ وكانت الدالة $f(t)$ مستمرة في كل مجال جزئي مفتوح من فترات التجزئة. وإذا كانت نهاية الدالة $f(t)$ من اليمين ومن اليسار عند حدود التجزئة محدودة.

وعليه يمكن القول أن القفزات المحدودة هي النوع الوحيد من الانقطاع الذي يسمح به للدالة $f(t)$ ،

ومن الواضح أن فئة الدوال المستمرة مقطعياً يحتوي على جميع الدوال المستمرة.



شكل١

الشكل (1) يمثل رسماً للدالة $f(t)$, $0 \le t \le 6$ وهي مستمرة مقطعياً .

ب. الرتبة الاسية :

يقال أن الدالة $f(t)$ ذات رتبة أسية عندما $t \to \infty$ إذا كان لأي عددين ثابتين M, b تتحقق المتباينة

$$|f(t)| \le Me^{bt} \qquad \text{for} \;\; t \ge t_0$$

وعليه يمكن القول أن الدالة $f(t)$ من مرتبة e^{bt} وتكتب

$$f(t) = O(e^{bt}) \qquad , t \to \infty \cdot$$

ويمكن سياق التعريف بصورة أخرى كالآتي :

يقال أن الدالة $f(t)$ ذات رتبة أسية إذا كان هناك عددان ثابتان M, b بحيث أن

$$\lim_{t \to \infty} e^{-bt} |f(t)| \to M \qquad (١٥)$$

مثال٤ .

أثبت أن $f(t) = t^3$ ذات رتبة أسية عندما $t \to \infty$

الحل: من خلال التعريف السابق

$$\lim_{t \to \infty} (e^{-bt} t^3) = \lim_{t \to \infty} \frac{t^3}{e^{bt}} \to 0$$

ويمكن للدارس إثبات ذلك عند تطبيق نظرية لوبيتال

$$\lim_{t \to \infty} (e^{-bt} t^3) = \lim_{t \to \infty} \frac{t^3}{e^{bt}} = \lim_{t \to \infty} \frac{3t^2}{be^{bt}}$$
$$= \lim_{t \to \infty} \frac{6t}{b^2 e^{bt}} = \lim_{t \to \infty} \frac{6}{b^3 e^{bt}} \to 0$$

وعليه فإن الدالة $f(t) = t^3$ ذات مرتبة أسية .

مثال٥:

وضح أن الدالة $f(t) = e^{t^2}$ ليست ذات مرتبة أسية

الحل: أيضاً من التعريف نجد أن

$$\lim_{t\to\infty}\frac{e^{t^2}}{e^{bt}}=\lim_{t\to\infty} e^{t(t-b)}\to\infty \qquad (b>0)\cdot$$

ج. فئة الدوال A

يقال أن الدالة $f(t)$ تنتمي إلى الفئة A إذا تحقق الآتي:

(i) إذا كانت الدالة $f(t)$ مستمرة مقطعياً في أي مجال محدود من المنطقة $t\ge 0$.

(ii) إذا كانت الدالة $f(t)$ ذات رتبة أسية لجميع قيم $t>t_0$ ، مهما كانت قيمة t_0 .

٥. محول لابلاس للمشتقات الدالية :

درسنا فيما سبق أن محول لابلاس لدالة $f(t)$ هو

$$L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

ولإيجاد محول لابلاس للمشتقة الأولى $f'(t)$ ندرس الآتي:

$$L\{f'(t)\}=\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt$$

باستخدام قاعدة التكامل بالتجزيء نحصل على الآتي:

$$L\{f'(t)\}=\left(e^{-st} f(t)\right)_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

وعليه نحصل على القاعدة الآتية:

$$L\{f'(t)\}=sL\{f(t)\}-f(0) \qquad (١٦)$$

أيضاً يمكن حساب محول لابلاس للمشتقة الثانية

$$L\{f''(t)\}=\int_0^\infty e^{-st} f''(t)dt$$

بالتكامل بالتجزيء مع وضع

$$u=e^{-st} \qquad f''(t)dt=dv$$

$$L\{f''(t)\}=\left(e^{-st} f'(t)\right)_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt$$

باستخدام المعادلة (١٦)

$$L\{f''(t)\} = -f'(0) + sL\{f'(t)\}$$

وبناء على ذلك نجد أن

$$L\{f''(t)\} = s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \qquad (١٧)$$

ويمكن تعميم ما سبق في القاعدة التالية

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \mathbf{L} - f^{(n-1)}(0) \qquad (١٨)$$

ب- إذا كانت الدالة متصلة مقطعياً فإننا نتبع الآتي:

$$\begin{aligned} L\{f'(t)\} &= \lim_{T\to\infty} \int_0^T f'(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{T_1} e^{-st} f'(t) dt + \int_{T_1}^{T_2} + \mathbf{L} + \lim_{T\to\infty} \int_{T_n}^{T} e^{-st} f'(t) dt \end{aligned} \qquad (١٩)$$

أيضاً بالتكامل بالتجزيء لجميع التكاملات السابقة نجد أن

$$\begin{aligned} L\{f'(t)\} &= \left(e^{-st} f(t)\right)_0^{T_1} + s\int_0^{T_1} e^{-st} f(t) dt + \left(e^{-st} f(t)\right)_0^{T_2} + \\ &+ s\int_0^{T_2} e^{-st} f(t) dt + \mathbf{L} + \lim_{T\to\infty}\left[\left(e^{-st} f(t)\right)_{T_n}^{T} + s\int_{T_n}^{T} e^{-st} f(t) dt\right] \end{aligned} \qquad (٢٠)$$

وحيث أن الدالة $f(t)$ متصلة في الفترة $[0,\infty)$ فإن

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0) \qquad (٢١)$$

وهي نفس نتيجة المعادلة (١٦).

- ***تحويل لابلاس لتفاضل دالة متقطعة :***

نظرية ٢.

لأي دالة $f(t)$ متصلة وذات مرتبة أسية عند $t\to\infty$ وكانت $f'(t)$ تنتمي إلى فئة الدوال A وكانت الدالة عند النقطة $t=a$ غير متصلة ولكنها محدودة القيمة بحيث تختلف قيمتها عند $f(a^+)$ عن نظيرتها $f(a^-)$ فإن

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0) - e^{-sa}[f(a^+) - f(a^-)] \qquad (٢٢)$$

البرهان:

حيث أن الدالة $f'(t)$ تحقق شروط وجود المحول فإن

$$L\{f'(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t)dt$$

وحيث أن الدالة $f(t)$ منقطعة عند $t=a$ فإن العلاقة السابقة تكتب كالآتي:

$$L\{f'(t)\}=\underset{c\to a^-}{Lim}\int_0^{c} e^{-st} f'(t)dt+\underset{c\to a^+}{Lim}\int_c^{\infty} e^{-st} f'(t)dt$$

وكما سبق نستخدم قواعد التكامل بالتجزيء فنحصل على

$$L\{f'(t)\}=\underset{c\to a^-}{Lim}\left[e^{-st} f(t)\right]_0^c+s\int_0^{c} e^{-st} f(t)dt+\underset{c\to a^+}{Lim}\left[e^{-st} f(t)\right]_c^{\infty}+s\int_c^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

ونلاحظ أن الجزئين الثاني والرابع في الطرف الأيمن يعطيان $sL\{f(t)\}$ ومن ثم نجد أن

$$L\{f'(t)\}=\underset{c\to a^-}{Lim}\, e^{-sc} f(c)-f(0)-\underset{c\to a^+}{Lim}\left[e^{-sc} f(c)\right]+sL\{f(t)\} \qquad (٢٣)$$

وحيث أن

$$\underset{c\to a^-}{Lim}\, e^{-sc}=\underset{c\to a^+}{Lim}\, e^{-sc}=e^{-sa}$$

$$\underset{c\to a^-}{Lim}\, f(c)=f(a^-) \quad , \quad \underset{c\to a^+}{Lim}\, f(c)=f(a^+) \qquad (٢٤)$$

باستخدام المعادلة (٢٤) في العلاقة (٢٣) تنتج المعادلة (٢٢).

يمكن تعميم النظرية لعدد محدود من نقط الانفصال وليكن عددها n ، $1\le i\le n$ ، a_i على الصورة التالية

$$L\{f'(t)\}=sL\{f(t)\}-f(0)-\sum_{i=1}^{n} e^{-sa_i}[f(a_i^+)-f(a_i^-)] \qquad (٢٥)$$

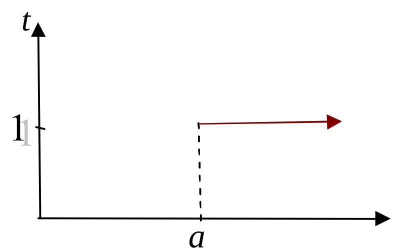
- **دالة الوحدة الدرجية**

الدالة الآتية:

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ 1 & t>a\end{cases}$$

تسمى دالة الوحدة الدرجية ويرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$u(t-a)$ أو u_a وتمثل بيانياً كالآتي :



شكل٢

ويحسب لها محول لابلاس كالآتي :

$$L\{u_a\} = \int_0^a e^{-st}(0)dt + \int_a^\infty e^{-st}(1)dt$$

وعليه يكون محول لابلاس للدالة على الصورة

$$L\{u_a\} = \frac{e^{-as}}{s} \qquad ,(s>0)$$

مثال ٧ :

عبر عن الدالة

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & t<p \\ \cos t + 7 & t>p \end{cases}$$

بدلالة دالة الوحدة ثم أوجد محول لابلاس

الحل :

$$f(t) = \cos t + \begin{cases} 0 & t<p \\ 7 & t>p \end{cases}$$

ومن ثم نجد أن

$$f(t) = \cos t + 7\begin{cases} 0 & t<p \\ 1 & t>p \end{cases}$$

$$L\{f(t)\} = L\{\cos t\} + 7L\{u(t-p)\}$$

باستخدام العلاقة نحصل على

$$L\{f(t)\}=\frac{s}{s^2+1}+\frac{7e^{-ps}}{s}$$

٠٦ محول لابلاس العكسي لبعض الدوال

$$(1)\ L\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a} \qquad L^{-1}\{\frac{1}{s-a}\}=e^{at}$$

$$(2)\ L\{t^n\}=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \qquad L^{-1}\{\frac{1}{s^{n+1}}\}=\frac{t^n}{\Gamma(n+1)}$$

$$(3)\ L\{\cos at\}=\frac{s}{s^2+a^2} \qquad L^{-1}\{\frac{s}{s^2+a^2}\}=\cos at$$

$$(4)\ L\{\sin at\}=\frac{a}{s^2+a^2} \qquad L^{-1}\{\frac{a}{s^2+a^2}\}=\sin at$$

مثال ٩ :

أوجد محول لابلاس العكسي للاتي :

$$\text{(i)}\ L^{-1}\left\{\frac{1}{2s-7}\right\} \qquad \text{(ii)}\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-4s-5}\right\} \qquad \text{(iii)}\ L^{-1}\left\{\frac{s+8}{s^2+25}\right\}$$

الحل:

$$\text{(i)}\ L^{-1}\left\{\frac{1}{2s-7}\right\}=\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-\frac{7}{2}}\right\}=\frac{1}{2}e^{\frac{7}{2}t}$$

$$\text{(ii)}\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-4s-5}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-5)(s+1)}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{A}{(s-5)}+\frac{B}{(s+1)}\right\}$$ ثابتان A, B ,

$$=AL^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\}+BL^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}=Ae^{5t}+Be^{-t}$$

٠٧ الإزاحة على المحاور

في هذا الجزء سنتعرض إلى النظريات الأساسية والهامة لمحول لابلاس وأيضاً المحول العكسي .

نظرية الإزاحة الأولى. (الإزاحة على محور s)

إذا كان محول لابلاس للدالة $f(t)$ موجوداً أو يساوي $\bar{f}(s)$ عند $s > b$ فإن محول لابلاس للدالة $e^{at} f(t)$ يكون أيضاً موجوداً أو يساوي $\bar{f}(s-a)$ عند $s - a > b$ وبمعنى آخر تكتب النظرية على الصورة

$$L\{e^{at} f(t)\} = \bar{f}(s-a) \qquad (٢٦)$$

مثال ١٠:

احسب محول لابلاس للاتي:

$$\text{(i)}\ \ L\{e^{at}t^n\} \qquad \text{(ii)}\ \ L\{e^{3t}\cos 4t\} \qquad \text{(iii)}\ \ L\{e^{2t}\sin 6t\}$$

الحل:

حيث أن

$$\text{(i)}\ \ L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

ومن نظرية الإزاحة

$$L\{e^{at}t^n\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

أيضاً

$$\text{(ii)}\ \ L\{\cos 4t\} = \frac{s}{s^2+16}$$

باستخدام نظرية الإزاحة

$$L\{e^{3t}\cos 4t\} = \frac{s-3}{(s-3)^2+16}$$

بالمثل

$$\text{(iii)}\ \ L\{\sin 6t\} = \frac{6}{s^2+36}$$

$$L\{e^{2t}\sin 6t\} = \frac{6}{(s-2)^2+36}.$$

مثال١١:

احسب الآتي :

$$(i)\ L^{-1}\left\{\frac{5}{(2s-7)^3}\right\} \qquad (ii)\ L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2-4s+20}\right\} \qquad (iii)\ L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-6s+25}\right\}$$

الحل:

نلاحظ في الحالة الأولى الآتي :

$$L^{-1}\left\{\frac{5}{2^3(s-\frac{7}{2})^3}\right\}=\frac{5}{8}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-\frac{7}{2})^3}\right\}$$

طبق نظرية الإزاحة

$$(i)\ L^{-1}\left\{\frac{5}{(2s-7)^3}\right\}=\frac{5}{8}e^{\frac{7}{2}t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}=\frac{5}{8}\frac{t^2}{2!}e^{\frac{7}{2}t}=\frac{5t^2}{16}e^{\frac{7}{2}t}\cdot$$

لحل الجزء الثاني يجب ملاحظة الآتي :

$$s^2-4s=(s-2)^2-4$$

ومن ثم نجد أن

$$(ii)\ L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2-4s+20}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2+16}\right\}$$

$$=e^{2t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+16}\right\}$$ (طبق الإزاحة)

$$=\frac{e^{2t}}{4}L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\}$$

$$=\frac{e^{2t}}{4}\sin 4t$$

أيضاً لحل الجزء الثالث نستخدم الآتي :

$$s^2-6s=(s-3)^2-9$$

ومن ثم نجد أن

$$\text{(iii)}\ L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-6s+25}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{s}{(s-3)^2+16}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{(s-3)+3}{(s-3)^2+16}\right\}$$
$$=e^{3t}L^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2+16}\right\}=e^{3t}\left[L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+16}\right\}\right]=e^{3t}\left[\cos 4t+\frac{3}{4}\sin 4t\right]\cdot$$

نظرية الإزاحة الثانية (الإزاحة على محور t)

إذا كانت الدالة $F(s)$ هي محول لابلاس للدالة $f(t)$ فإن $a>0, e^{-as}F(s)$ هو محول لابلاس للدالة

$$\overline{f}(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ f(t-a) & t>a\end{cases}$$

وباستخدام دالة الوحدة الدرجية $u(t-a)$ يمكن كتابة الدالة $\overline{f}(t)$ على الشكل

$$\overline{f}(t)=f(t-a)u_a(t)$$

البرهان:

مما سبق عرفنا أن محول لابلاس للدالة $f(u)$ كالآتي:

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-su}f(u)du$$

بضرب الطرفين بالدالة e^{-as}

$$e^{-as}F(s)=e^{-as}\int_0^\infty e^{-su}f(u)du$$
$$=\int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u)du$$

بأخذ التعويض $u+a=t$ فإننا نحصل على الآتي:

$$e^{-as}F(s)=\int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt$$

فإذا استخدمنا الدالة الدرجية u_a (راجع التعريف) فإن العلاقة الأخيرة تكتب على الشكل

$$e^{-as}F(s)=\int_a^\infty e^{-st}f(t-a)u_a(t)dt$$

وبناء على تعريف محول لابلاس نحصل على

$$e^{-as}F(s) = L\{f(t-a)u_a(t)\} \qquad (٢٧)$$

وهو المطلوب إثباته.

هذه النظرية تقودنا إلى الحقيقة الهامة التالية

- **حقيقة ٢:**

إذا كان $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

فإن

$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\cdot u_a(t) \qquad (٢٨)$$

مثال١٢:

أوجد محول لابلاس للدالة

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < p \\ 0 & p < t < 2p \\ \sin t & t > 2p \end{cases}$$

الحل:

أولاً نكتب العلاقة باستخدام دالة الوحدة الدرجية

$$f(t) = u_0 - \begin{cases} 0 & t < \pi \\ 1 & t > \pi \end{cases} + \begin{cases} 0 & t < 2\pi \\ \sin t & t > 2\pi \end{cases}$$

وهذا يقودنا إلى الآتي:

$$f(t) = u_0 - u_\pi + (\sin t)u_\pi$$

بأخذ محول لابلاس للطرفين

$$L\{f(t)\} = L\{u_0\} - L\{u_\pi\} + L\{\sin(t-2\pi)u_{2\pi}\}$$

طبق القاعدة

$$L\{u_a(t)\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

مع النظرية

$$L\{f(t-a)u_a(t)\} = e^{-as}\bar{f}(s)$$

نحصل على الآتي:

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

<u>نظرية الاشتقاق ٥:</u>

إذا كانت الدالة $f(t)$ تنتمي إلى صف الدالة A لكل $t \geq 0$ وكان محول لابلاس لها هو $\bar{f}(s)$ فإن

$$L\{tf(t)\} = (-1)\frac{d}{ds}\bar{f}(s) \qquad (٢٩)$$

<u>البرهان:</u>

من تعريف محول لابلاس

$$\bar{f}(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

بإجراء التفاضل بالنسبة ل s

$$\frac{d\bar{f}(s)}{ds} = \int_0^\infty -te^{-st} f(t)dt = -\int_0^\infty e^{-st}(tf(t))dt = -L\{tf(t)\}$$

وعليه تنتج النظرية.

ويمكن تعميم النظرية في الشكل العام التالي

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\bar{f}(s)$$

<u>مثال١٣:</u>

أوجد محول لابلاس للاتي:

$$\text{(i) } L\{t\sin 2t\} \qquad\qquad \text{(ii)} L\{t\cos 3t\}$$

الحل:

حيث أن

$$\text{(i) } L\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}$$

وعليه يكون

$$L\{t\sin 2t\} = -\frac{d}{ds}\frac{2}{s^2+4} = \frac{4s}{(s^2+4)^2}$$

بالمثل

$$\text{(ii) } L\{\cos 3t\} = \frac{s}{s^2+9}$$

$$L\{t\cos 3t\} = -\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+9} = \frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}\cdot$$

- **تكامل محول لابلاس**

نظرية ٦:

إذا كان شروط وجود محول لابلاس محققة وكان

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{f(t)}{t}\right) \to finite$$

فإن

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \bar{f}(u)du \qquad (٣٠)$$

مثال ١٤:

أوجد محول لابلاس للدالة

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}$$

حيث أن $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} \to finite$ فإنه يمكن تطبيق النظرية

$$L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$$

وبناء على ذلك

$$L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^{\infty}\frac{1}{1+u^2}du = [\tan^{-1}u]_s^{\infty} = \frac{p}{2} - \tan^{-1}s \cdot$$

- ***التلاف :***

تتجلى أهمية التلاف في حل المعادلات التكاملية والتفاضلية ذات الشروط الابتدائية وكما أن لهذا المفهوم أهمية خاصة في كثير من المجالات الهندسية والبرامج على الكمبيوتر .

وتعرف التلاف بإنه لتكن لدينا الدالتين $g(t), f(t)$ معرفتان في الفترة $[0,t]$ فإن تلاف الدالتين g, f يعرف على أنه الدالة $h(t)$ كالآتي :

$$h(t) = \int_0^t f(t)g(t-t)dt$$

ويرمز لها

$$h(t) = (f*g)(t)$$

وهذا التلاف له الخواص الآتية

١. خاصية الإبدال $f*g = g*f$

٢. خاصية التوزيع $f*(g_1+g_2) = f*g_1 + f*g_2$

٣. خاصية التجميع $f*(g*h) = (f*g)*h = f*g*h$

٤. الصفر عنصر ماحي $f*0 = 0*f = 0$

٥. الواحد ليس عنصر محايد $1*f \neq f$

ولإثبات العلاقة ٥ بفرض $g(t) = t$

$$(1*g)(t)=\int_0^t 1\cdot(t-\tau)d\tau=\left[t\tau-\frac{\tau^2}{2}\right]_0^t=\frac{t^2}{2}\neq g(t)$$

نظرية التلاف ٧ .

إذا كانت الدالتان $g(t), f(t)$ هما محولا لابلاس العكسيان للدالتين $G(s), F(s)$ على الترتيب وكانت شروط وجود التحويل محققة فإن محول لابلاس العكسي للدالتين $h(t)$ للدالتين $H(s)=F(s)G(s)$ هو التلاف $h=f*g$ بمعنى أن

$$h(t)=(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=L^{-1}\{H(s)\} \qquad (٣١)$$

مثال١٥:

أوجد بطريقتين مختلفتين :

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+9)(s^2+4)}\right\}$$

الحل:

مما سبق نعلم أن

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}=\frac{1}{3}\sin 3t \qquad , \qquad L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}=\frac{1}{2}\sin 2t$$

وعليه

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+9)(s^2+4)}\right\}=\frac{1}{6}\sin 2t\sin 3t=\frac{1}{6}\int_0^t \sin 2\tau\ \sin 3(t-\tau)d\tau$$

باستخدام الخاصية المثلثية

$$\sin A\sin B=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

نحصل على

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+9)(s^2+4)}\right\}=\frac{1}{12}\int_0^t[\cos(5t-3t)-\cos(t-3t)]dt$$
$$=\frac{1}{12}[-\sin(t-3t)+\frac{1}{5}\sin(5t-3t)]_0^t dt=\frac{1}{12}[(+\sin 2t-\sin 3t)+\frac{1}{5}(+\sin 2t+\sin 3t)]$$
$$=\frac{1}{12}[-\frac{4}{5}\sin 3t+\frac{6}{5}\sin 2t]=\frac{1}{30}[3\sin 2t-2\sin 3t]$$

٠٨ تطبيقات علي حل المعادلات التفاضلية العادية :

مثال ١٦ :

حل المعادلة التفاضلية

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=0 \qquad y(0)=2 \quad , \ y'(0)=1$$

الحل:

بأخذ محول لابلاس

$$L\{y''(t)\}+5L\{y'(t)\}+6L\{y(t)\}=0$$
$$s^2y(s)-sy(0)-y'(0)+5[sy(s)-y(0)]+6y(s)=0$$

باستخدام الشروط الابتدائية والتعويض

$$(s^2+5s+6)y(s)=2s+1+10$$
$$y(s)=\frac{2s+11}{(s^2+5s+6)}=\frac{A}{s+3}+\frac{B}{s+2}=\frac{-5}{s+3}+\frac{7}{s+2}$$

بأخذ محول لابلاس العكسي

$$y(t)=-5e^{-3t}+7e^{-2t} \cdot$$

مثال ١٧ :

حل المعادلة التفاضلية

$$y''-3y'-4y=3e^t \qquad y(0)=2 \ , \ y'(0)=-2$$

الحل:

بأخذ محول لابلاس للطرفين نحصل على

$$[s^2 y(s) - sy(0) - y'(0)] - 3[sy(s) - y(0)] - 4y(s) = \frac{3}{s-1}$$

باستخدام الشروط الابتدائية نجد أن

$$(s^2 - 3s - 4)y(s) = \frac{3}{s-1} + 2(s-3) + 2$$

بالاختصار نحصل على

$$y(s) = \frac{3}{(s+1)(s-4)(s-1)} + \frac{2}{s+1}$$

$$y(s) = \frac{23}{10}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{5}\frac{1}{s-4} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-1}$$

$$y(t) = \frac{23}{10}e^{-t} + \frac{1}{5}e^{4t} - \frac{1}{2}e^{t} \cdot$$

مثال ١٨ :

حل المعادلة التفاضلية

$$y''(t) + 2y(t) = r(t) \qquad , y(0) = y'(0) = 0,$$

$$r(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < p \\ 0 & p < t < 2p \\ \sin t & t > 2p \end{cases}$$

الحل:

بكتابة الدالة $r(t)$ على صورة دالة الوحدة الدرجية

$$r(t) = u_0(t) - u_p(t) + u_{2p}(t) \cdot \sin t$$

بأخذ محول لابلاس

$$L\{y''(t)\} + 2L\{y(t)\} = L\{u_0(t)\} - L\{u_p\} + L\{u_{2p}(t)\sin(t-2p)\}$$

$$s^2 y(s) - sy(0) - y'(0) + 2y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-ps}}{s} + \frac{e^{-2ps}}{s^2+1}$$

باستخدام الشروط الابتدائية والاختصار نجد أن

$$y(s)=\frac{1}{s(s^2+2)}-\frac{e^{-ps}}{s(s^2+2)}+\frac{e^{-2ps}}{(s^2+1)(s^2+2)}$$

طبق محول لابلاس العكسي

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+2)}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{e^{-ps}}{s(s^2+2)}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{e^{-2ps}}{(s^2+1)(s^2+2)}\right\}$$

باستخدام العلاقة التالية:

$$\text{(i) } L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t$$

والتي منها نحصل على العلاقة

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+2)}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t \sin\sqrt{2}\,u du$$

وعليه نحصل على

$$\text{(ii) } L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+2)}\right\}=\frac{1}{2}[t-\cos\sqrt{2}t]$$

طبق نظرية الإزاحة الثانية نحصل على العلاقة

$$\text{(iii) } L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+2)}\right\}=\frac{1}{2}u_{\pi}(t)\cdot[t-\cos\sqrt{2}(t-\pi)]$$

أيضاً من الملاحظ أن

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+2)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+2}\right\}$$

وعليه نحصل على

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+2)}\right\}=\sin t-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t$$

وبناءاً على ذلك نجد أن

$$\text{(iv) } L^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{(s^2+1)(s^2+2)}\right\}=u_{2\pi}(t)\cdot[\sin(t-2\pi)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}(t-2\pi)]$$

بالتعويض من (iv),(iii),(ii) في المعادلة (11.44) نحصل على الآتي:

$$y(t)=\frac{1}{2}(1-\cos\sqrt{2}t)+\frac{u_{\pi}}{2}[1-\cos\sqrt{2}(t-\pi)]+$$
$$+u_{2\pi}(t)\cdot[\sin(t-2\pi)-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}(t-2\pi)]$$

وهو الحل المطلوب.

حل المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات المتغيرة

من السهولة استخدام محول لابلاس لحل المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات المتغيرة اعتماداً على القاعدة الآتية:

$$\frac{d^n}{ds^n}\bar{f}(s)=(-1)^n L\{t^n f(t)\}$$

وأيضاً اعتماداً على المشتقة التالية

$$L\{y^{(m)}(t)\}=s^m y(s)-s^{m-1}y(0)-s^{m-2}y'(0)\ \mathbf{L}\ -y^{(m-1)}(0).$$

حيث (m) تعني رتبة التفاضل.

مثال ١٩:

حل المعادلة التفاضلية

$$ty''+(2-t)y=0 \qquad y(0)=y'(0)=0$$

الحل:

بأخذ محول لابلاس للطرفين

$$L\{ty''\}+2L\{y\}-L\{ty\}=0$$

وحيث أن

$$L\{y''\}=s^2y(s)-sy(0)-y'(0)$$
$$L\{ty''\}=(-1)\frac{d}{ds}[s^2y(s)-sy(0)-y'(0)]$$

ومن ثم

$$L\{ty''\} = (-1)[s^2 y'(s) + 2sy(s) - y(0)]$$

باستخدام الشروط الابتدائية نحصل على

$$\text{(i)}\ L\{ty''\} = -s^2 y'(s) - 2sy(s)$$

أيضاً

$$\text{(ii)}\ L\{ty(t)\} = -\frac{d}{ds} y(s) = -y'(s)$$

وعليه تتحول المعادلة التفاضلية إلى الوضع الآتي:

$$-s^2 y'(s) - 2sy(s) + 2y(s) + y'(s) = 0$$

بالاختصار نحصل على

$$(1-s^2)y'(s) + 2(1-s)y(s) = 0$$

وهي تمثل معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الأولى، ويمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$y'(s) = \frac{-2}{1+s} y(s)$$

بإجراء التكامل

$$\frac{dy}{y} = \frac{-2}{1+s} ds + c$$

$$\ln y + \ln(1+s)^2 = \ln A$$

$$y(s) = \frac{A}{(1+s)^2}.$$

بأخذ محول لابلاس العكسي

$$y(t) = AL^{-1}\left\{\frac{1}{(1+s)^2}\right\} = Ae^t L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$$

ويكون الحل هو

$$y(t) = Ate^{t}$$

من الواضح أننا حصلنا على حل واحد فقط بالرغم من أن المعادلة من الرتبة الثانية وواضح أيضاً أن الحل الآخر مستقل خطياً عن الحل الذي حصلنا عليه ولكن المقدرة في عدم إيجاده أنه لا يحقق شروط وجود تحويل لابلاس حيث يتباعد التكامل المعرف للتحويل عند $t = 0$.

وهكذا يدل أن هذه الطريقة محول لابلاس ضعيفة في حل المعادلات التفاضلية ذات المعاملات

التطبيق الرابع: حل المعادلات التكاملية

يعتبر محول لابلاس من أقوى المحولات التي تفيد في حل المعادلات التكاملية الناشئة من المعادلات التفاضلية ذات الشروط الابتدائية وهي ما نطلق عليه معادلة فولتيرا التكاملية والتي تأخذ الوضع

$$mf(x) - l\int_{0}^{x} k(x,y)f(y)dy = f(x) \qquad (٣٢)$$

المعادلة تسمى معادلة فولتيرا التكاملية ويتوقف نوعها على قيمة الثابت m ، فإذا كان $m = 0$ سميت معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول وإذا كانت $m = const \neq 0$ سميت معادلة فولتيرا من النوع الثاني أما إذا كانت μ متغيرة فإنها تسمى معادلة فولتيرا من النوع الثالث .

والمعادلة (٣٢) تسمى تكاملية لأن الدالة المجهولة $f(x)$ دائماً تحت علامة التكامل وهي المراد إيجادها ويطلق عليها في العلوم الأساسية بدالة الجهد والدالة $k(x,y)$ دالة معروفة وتسمى نواة المعادلة التكاملية وأحياناً تكون متصلة أو غير متصلة طبقاً للوضع المستنتجة منه والدالة المعروفة $f(x)$ تسمى الطرف الحر . أما الثابت λ فهو يحمل معاني فيزيائية خاصة بتركيبة المسألة من الناحية التطبيقية .

ونلاحظ أن نظرية التلاف تلعب دوراً بارزاً في حل المعادلة التكاملية من نوع فولتيرا .

ولحل المعادلة (٣٢) باستخدام محول لابلاس نتبع الآتي :

$$mL\{f(x)\} - l\,L\left\{\int_{0}^{x} k(x,y)f(y)dy\right\} = L\{f(x)\}$$

طبق نظرية التلاف

$$mf(s) - lF(s)f(s) = f(s)$$

وبناء على ذلك

$$f(s) = \frac{f(s)}{m - lF(s)}$$

ويكون حل المعادلة التكاملية على الصورة

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{f(s)}{m - lF(s)}\right\}$$

حيث أن $F(s)$ هي محول لابلاس للنواة. $f(t)$ تعتبر الحل العام للمعادلة (٣٢).

<u>مثال ٢٠ :</u>

حل المعادلة التكاملية

$$f(t) = 1 + \int_0^t \sin(t-x) f(x)dx \qquad (٣٣)$$

نلاحظ أن $k(x,t) = \sin(t-x) \quad , f(t) = 1, \; l = 1 \;, m = 1$

وعليه يكون الحل على صورة المعادلة (٣٣) كالآتي :

$$f(t) = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s}}{1 - \frac{1}{s^2+1}}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{s^3}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}\right\}$$

ومن ثم

$$f(t) = 1 + \frac{t^2}{2!}$$

<u>مثال ٢١ :</u>

حل المعادلة التكاملية

$$f(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x-t) f(t)dt \qquad (٣٤)$$

نلاحظ أن $k(x,t)=\cos(x-t)\quad , f(x)=\sin x\ , l=2\quad , m=1$

$$F(s)=L\{k(x,t)\}=\frac{s}{s^2+1} \qquad , L\{f\}=\frac{1}{s^2+1}$$

عوض في المعادلة (٣٤)

$$f(x)=L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{1+s^2}}{1-\frac{2s}{s^2+1}}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}=xe^x \cdot$$