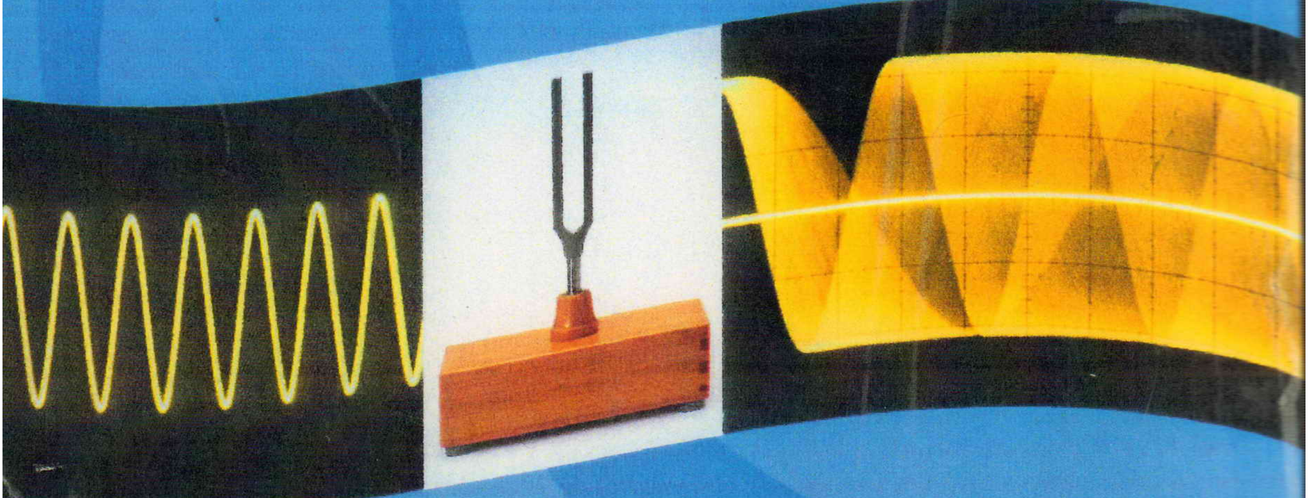
وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي

فيزياء الصوت والحركة الموجية

طبعة منقحة ومزيدة

تاليف
الدكتور أمجد عبد الرزاق كرجية



مكتبة غريب طوس

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل

فيزياء الصوت والحركة الموجية

تأليف

الدكتور

امجد عبد الرزاق كرجيه

مدرس

قسم الفيزياء / كلية التربية /

جامعة الموصل

مكتبة غريب طوس

مكتبة غريب طوس

طبعة ثانية

منقحة ومزيدة

٢٠٠٠

بسم الله الرحمن الرحيم

يرفع الله الذين آمنوا منكم والذين أوتوا
العلم درجات

صدق الله العظيم

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

بعد الاخذ بمبدأ تعريب الدراسة بجامعاتنا وجد ان هناك نقصاً حاداً في المكتبة العربية في الكثير من الاختصاصات العلمية . ومنها اختصاص الصوت والحركة الموجية . ولقد كلفت بموجب الامر الجامعي الصادر من رئاسة جامعة الموصل المرقم ٦/٤/١٣٢٧٥ والمؤرخ في ١٩٨٣/٨/٩ بتأليف كتاب منهجي ليسد مقررات موضوع الصوت والحركة الموجية لطلبة الصفوف الثانية في اقسام الفيزياء في كليات التربية في الجامعات العراقية .

ان اهمية دراسة الحركة الموجية تكمن في كونها غالباً الاساس لانتقال الطاقة في مختلف فروع الفيزياء . فالظواهر الموجية تحدث في الاجسام الصلبة والموائع . والصوتيات والبصريات والكهربائيات والالكترونيات والفيزياء الذرية والنووية . ان الاساليب الحديثة في تدريس الفيزياء تحبذ معالجة الظواهر المتشابهة بأسلوب واحد . وهذا بالتأكيد ينطبق على دراسة الظواهر الموجية بصورة عامة . ان هذا الاسلوب يبرز الافكار الاساسية المشتركة كما يحقق تماسك الموضوع ووحدته . ورغم ان المفهوم الاساسي للحركة الموجية واحد في الفيزياء الا ان سعة هذا الموضوع بالذات وتشعباته من جهة وطبيعة المرحلة الدراسية من جهة اخرى لاتسمح بالتوغل في معالجة الموضوع كوحدة واحدة قبل الغور في التفاصيل . لذلك يتحتم في هذه المرحلة الدراسية ولغرض السهولة تفتيت الظاهرة الموجية الى ثلاثة اجزاء رئيسية هي : الحركة الموجية الميكانيكية والحركة الموجية الكهرومغناطيسية والحركة الموجية المادية . وستقتصر دراستنا في هذا الكتاب على . دراسة الحركة الموجية الميكانيكية فقط . اذ ان الدراسة المفصلة لهذا النوع من الحركة الموجية يسلط اضواءاً كاشفة على جميع انواع الحركات الموجية في الفيزياء ويساعد كثيراً في فهم سلوكها .

لقد راعيت عند تأليف هذا الكتاب تقسيم عناصر المادة العلمية فيه الى فصول مترابطة يرتفع مستواها تدريجيا . فلقد بدأت أولاً بتقديم مراجعة تمهيدية للمفاهيم الاساسية للموضوع ثم المباشرة بعد ذلك بتحليل مفصل للنظرية الاساسية لاهتزاز الجسيم باعتبارها المدخل الاساس في دراسة الحركة الموجية . بعد ذلك تمت معالجة الحركة

الموجية المستعرضة والطولية في بعد واحد مع تطبيقات عملية . ومن ثم التوسع في دراسة الحركة الموجية في بعدين وثلاثة ابعاد واخيراً التطرق لبعض الظواهر الموجية الهامة . لقد حاولت قدر الامكان تبسيط المادة العلمية في متن هذا الكتاب من خلال التحليل الرياضي المبسط الذي يتماشى مع المرحلة الدراسية والعناية بربط النظرية بالتجربة وتعزيز الافكار بالشرح المفصل والرسوم الايضاحية ، الى جانب العديد من الأمثلة المحلولة التي تسلط اضواء كاشفة على الجوانب الدقيقة في كل فصل . وقد وضعت في نهاية كل فصل عدد كبير من المسائل والتمرينات الصالحة للمناقشات سواء في اثناء الدرس أو عند الدراسة الذاتية . ان هذا الكتاب يمكن ان يكون ايضا مرجعاً للدراسة الجامعية الاولية في حقل الاهتزازات الميكانيكية والحركة الموجية لطلاب العلوم والهندسة .

وفي الختام اذكر انها محاولة بذلت فيها ما استطعت من جهد من أجل اغناء المكتبة العربية بكتاب عساه ان يسد فراغاً فيها . ولا أزعم ان هذا الكتاب قد وصل مستوى الكمال فالكمال لله وحده . فان وافانا الاساتذة الافاضل والطلبة الاعزاء بملاحظاتهم القيمة ومقترحاتهم السديدة وانتقاداتهم البناءة فانها ستمنحنا الفرصة لتحسين الكتاب في طبعة قادمة أنشاء الله .

وختاماً لايفوتني ان اقدم خالص الشكر للخبير العلمي الدكتور منعم مشكور على ملاحظاته القيمة واقتراحاته السديدة وللخبير اللغوي السيد سعيد عدنان على جهوده الواضحة في تصحيح الهفوات اللغوية .

واخيراً وليس آخراً لايسعني الا ان اقدم جزيل شكري وامتناني الى جامعة الموصل لما أولته من رعاية ودعم متواصل اذ لولاها لما ظهر هذا الكتاب في عالم الكتب على هذا الشكل .

وفقنا الله جميعاً

المؤلف

شباط ١٩٨٥

المحتويات

8 - الحركة الموجية في بعدين

الفصل التاسع

الحركة الموجية في ثلاثة ابعاد

الفصل العاشر

اعتبارات عامة في [illegible] والظاهرة الموجية

الفصل الأول

مفاهيم أساسية في الحركة الموجية

1 - 1 تمهيد

يعد موضوع الحركة الموجية من أهم فروع الدراسة في علم الفيزياء . فالكثير من الظواهر الطبيعية تنطوي على صفة موجية . والحقيقة ان محيطنا يعج بمختلف انواع الموجات . منها ماهو مألوف وسهل المشاهدة كالموجات على سطح الماء ومنها ماله تطبيقات واسعة ويتعذر مشاهدتها كالموجات الكهرومغناطيسية .

ان مانسمعه يصلنا عبر موجات الصوت . ومانراه يصلنا عبر موجات الضوء . والطاقة التي تزودنا بها الشمس تصلنا عبر الموجات ايضاً ، وهناك اشكال اخرى كثيرة ومختلفة للموجات . وعلى الرغم من التباين الظاهر بين مختلف انواع الموجات الا ان جميعها تشترك بسمة اساسية واحدة هي انها وسيلة لانتقال الطاقة . فضلاً عن ذلك فان جميع الحركات الموجية تكاد تشترك في اسلوب التعبير الرياضي عنها رغم اختلاف المعنى الفيزياوي للرموز المستخدمة للتعبير عن ذلك . لذلك فان دراسة سلوك اي نوع من هذه الامواج يساعد كثيراً في فهم سلوك الانواع الاخرى .

1 2 وسائل انتقال الطاقة

تنتقل الطاقة في الطبيعة من موقع الى آخر بطريقتين : الاولى تتم بواسطة انتقال المادة والثانية تتم بواسطة انتقال الموجة (أو الحركة الموجية) .

في الطريقة الأولى تنتقل الطاقة من مكان الى آخر مع انتقال المادة . اي يصاحب انتقال الطاقة انتقال في الكتلة . فالجسم المتحرك هو الوسيلة لنقل الطاقة . فلو اطلق جسم

من موقع وارتطم بهدف في موقع آخر فان طاقة تنتقل من نقطة الانطلاق الى نقطة الارتطام . والأمثلة على انتقال الطاقة بهذه الطريقة كثيرة منها مايتم بواسطة جسيمات غاية في الصغر كما هو الحال في سيل الالكترونات المتدفقة والمسؤولة عن نقل الطاقة الكهربائية أو حركة جزيئات المائع المسؤولة عن نقل الطاقة الحرارية كما في طريقة الحمل ، ومنها مايتم بواسطة اجسام هائلة الكتلة كما هو الحال في سقوط مياه الشلالات وحركة المد والجزر وهبوب الرياح والاعاصير وانطلاق القذائف والصواريخ . يلاحظ في هذه الطريقة ان انتقال الطاقة يجب ان يرافقه انتقال في الكتلة وقد سبق للطالب ان درس هذه الطريقة في مراحل سابقة من دراسته .

وفي الطريقة الثانية والتي هي مدار اهتمامنا في هذا الكتاب تنتقل الطاقة من موقع الى اخر بواسطة الموجة دون ان يصاحب انتقالها اي انتقال في الكتلة . والموجة يمكن ان تنتقل في وسط مادي او في الفراغ وذلك حسب طبيعة الموجة . ومن الامثلة المألوفة على الموجات التي تحتاج الى وسط مادي لانتقالها هي موجات الصوت والموجات على سطح الماء ، ومثل هذه الموجات لاتنتقل في الفراغ مطلقاً.ومن الامثلة على الموجات التي تنتقل في الفراغ هي الموجات الكهرومغناطيسية عموماً ومنها الموجات الضوئية . فمن المعروف ان الموجات الضوئية تصلنا من النجوم النائية التي تبعد عن الارض آلاف السنين الضوئية عبر الفضاء الواسع الخالي من المادة تماماً . والطاقة الهائلة المتدفقة من اقرب النجوم الينا (الشمس) تصلنا عبر الموجات المنتقلة خلال الفراغ الفاصل بين غلاف الارض والشمس الذي يمتد لمسافة 93 مليون ميل . ان مثل هذه الموجات تنتقل ايضاً خلال اوساط مادية شفافة كالهواء والماء والزجاج. ومن الطبيعي أن تختلف سرعة انتقال الموجة باختلاف الوسط الناقل لها. ومن المعروف ان سرعة الضوء في الفراغ ثابتة وتساوي 3×10^{10} متر لكل ثانية وتعتبر من اهم الثوابت الاساسية في الفيزياء .

3 – 1 ما هي الحركة الموجية

ان الحركة الموجية هي شكل من الاضطراب ينتقل من نقطة الى اخرى عبر وسط مادي او في الفراغ ، والمقصود بالاضطراب هو نمط لحالة فيزياوية يولده مصدر متحرك . فمثلا الشوكة الرنانة المهتزة تولد اضطراباً في الهواء المحيط بها يكون نمطه على شكل تضاغطات وتخلخلات . وهذه الحالة الفيزياوية المتولدة في نقطة في الهواء تنتقل الى نقاط اخرى دون انتقال جزيئات الهواء من مواضع توازنها . والوتر المشدود اذا اهتز في

نقطة فأن نمطاً من الاضطراب (او الازاحة) يتولد ويكون على شكل تموج في الوتر ويظهر على شكل قمم وقعور، وهذه الحالة الفيزياوية المتولدة في نقطة على الوتر تنتقل الى نقاط اخرى على امتداد الوتر دون انتقال جزيئات الوتر من مواضع توازنها. والشحنة الكهربائية المهتزة تولد اضطراباً كهرومغناطيسياً ويكون نمطه على شكل تباين في شدتي المجالين الكهربائي والمغناطيسي . وهذه الحالة الفيزياوية المتولدة في موقع اهتزاز الشحنة تنتقل الى نقاط اخرى في الفضاء سواء خلال الفراغ او خلال الوسط المادي الذي يسمح بمرورها دون ان يؤدي ذلك الى انتقال جزيئات الوسط من مواضع توازنها. وهنالك حركات موجية كثيرة ومختلفة تتولد باختلاف نمط الحالة الفيزياوية الناجمة عن الاضطراب الذي يسببه المصدر المهتز. وفي جميع هذه الحالات تنتقل الطاقة من المصدر الى النقاط الاخرى على شكل حركة موجية دون ان يصاحب انتقالها اي انتقال في الكتلة. فالحركة الموجية اذن هي انتقال لحالة فيزياوية من موقع الى آخر سواء في وسط مادي او في الفراغ. وهذه الحالة قد تكون على شكل تضاغط وتخلخل او قمة وقعر او تناوب في شدتي المجالين الكهربائي والمغناطيسي او اي حالة فيزياوية اخرى يولدها المصدر المهتز.

4 - 1 انواع الحركة الموجية

يمكن تقسيم الحركة الموجية في الفيزياء الى ثلاثة انواع رئيسية هي :

(أ) الحركة الموجية الميكانيكية : وهي تلك التي تحتاج بالضرورة الى وسط مادي لانتقالها وقد يكون هذا الوسط صلبا او مائعا (سائلا او غازا) والامثلة على هذه الموجات هي موجات الصوت والموجات على سطح الماء والموجات الزلزالية والموجات في الاسلاك والقضبان المعدنية والموجات في الاوتار المهتزة والموجات في الاغشية والرقائق المهتزة والموجات في هياكل الابنية والمكائن......الخ .

(ب) الحركة الموجية الكهرومغناطيسية : وهي تلك التي لاتحتاج بالضرورة الى وسط مادي لانتقالها. فهي تنتقل في الفراغ كما تنتقل في بعض الاوساط المادية ، مثل جميع امواج الطيف الكهرومغناطيسي كموجات الراديو وموجات التلفزيون وموجات الرادار والموجات الدقيقة (المايكرويف) والموجات تحت الحمراء وموجات الضوء وموجات الاشعة فوق البنفسجية وموجات الاشعة السينية وموجات اشعة كاما......الخ .

(ج) الحركـــة الموجيـــة الماديـــة : وهـــي الصفة الموجية المصاحبة لحركة الجسيمات المادية . فقد دلت الدراسات النظرية للعالم دي برولـــي (de Broglie) وما اعقبه من اكتشاف العالمين دافيسون (Davisson) و جيرمر (Germer) لحيود الالكترونات ان الجسيم المتحرك يقرن بموجة. فالجسيم الذي كتلته m والمتحرك بسرعة u يكون مقرونا بموجة طولها الموجي λ هو

$$\lambda = \frac{h}{mu} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1\text{-}1)$$

حيث ان h يمثـل ثابت بلانـك ويساوي $6{\cdot}626 \times 10^{-34}$ جـول ثانيـة .
وقد وجد بالتجربة ان الالـكترون المتحرك بطاقة حركية تعادل 150 الـكترون فولت يكون مقروناً بموجة طولها الموجي $10^{-10} \times 0{\cdot}1$ متر والنيترون المتحرك بسرعة 2200 متر في الثانية يكون مقرونا بموجة طولها $10^{-9} \times 0{\cdot}14$ متر .

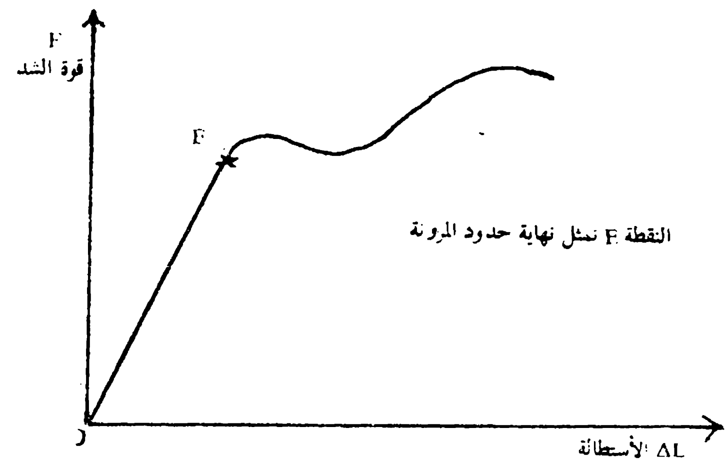
ان دراستنا في هذا الـكتاب ستقتصر على الحركة الموجية الميكانيكية فقط . والتي يشكل الصوت أحد أهم اشكالها .

5 – 1 الخواص الاساسية لحدوث وانتقال الحركة الموجية الميكانيكية

ان حدوث وانتقال الحركة الموجية الميكانيكية في اي وسط مادي يعزى الى خاصيتين اساسيتين لذلك الوسط هما خاصيتا المرونة والقصور الذاتي . وبالنظر لاهمية هاتين الخاصيتين سنوضح مفهوم كل منها بشيء من التفصيل .

(أ) خاصية المرونة : تعتبر خاصية المرونة لأي جسم او وسط مادي ذات اهمية جوهرية في حدوث وانتقال الحركات الاهتزازية والموجية . والمقصود بمرونة الوسط هي خاصيته على مقاومة اي تشوه فيه وقابليته على استعادة شكله او حجمه او وضعه بعد زوال القوة المشوهة المؤثرة عليه . والقانون الذي يتحكم في سلوك المواد المرنة هو قانون هوك . وهذا القانون يشير الى ان أي قوة خارجية تسلط على جسم ما تحدث فيه تشويها يؤدي الى تغيير في الشكل أو الحجم أو كليهما . وابسط انواع التشويه هو الذي يحدث في بعد واحد كالذي يقع عند استطالة سلك أو قضيب واقع تحت تأثير قوة شد . ان هذه الاستطالة تحدث بسبب تباعد الجزيئات عن بعضها البعض في نفس اتجاه القوة . وفي نفس الوقت فان

مساحة المقطع العرضي تتغير ايضاً ولكن بمقدار ضئيل جداً بالمقارنة مع مقدار الاستطالة . وكنتيجة لتأثير قوة الشد الخارجية (القوة المشوهة) يبرز دور قوى التماسك بين الجزيئات كقوة داخلية تحاول اعادة القضيب الى طوله الاصلي . واذا ماازيلت القوة الخارجية فان الجزيئات تعود الى وضع توازنها السابق ويستعيد القضيب طوله الاصلي . وطالما كانت الازاحات النسبية للجزيئات صغيرة وضمن حدود معينة فان الاستطالة الكلية في طول القضيب تتناسب طردياً مع قوة الشد وهذه تمثل ابسط صيغة لقانون هوك . واذا ما كانت قوة الشد كبيرة وتجاوزت المسافات الفاصلة بين الجزيئات حدود معينة (تعرف بحدود المرونة) فان الجزيئات لاتعود بعدئذ الى سابق وضعها حتى بعد زوال القوة المؤثرة ، وبذلك يفقد القضيب مرونته ولايستعيد طوله الاصلي . ويمكن التعبير بيانياً عن العلاقة بين قوة الشد والاستطالة كما مبين في الشكل (١ - ١ أ)



شكل (١ - ١ أ) يبين ان العلاقة بين قوة الشد F والأستطالة ΔL تكون خطية ضمن حدود المرونة .

ويمكن التعبير عن قانون هوك بدلالة الاجهاد والمطاوعة (الانفعال) . فالاجهاد يعرف بانه القوة المسلطة على وحدة المساحات من السطح المعرض لتلك القوة ولذلك فان

$$\text{الاجهاد} = \frac{\text{القوة}}{\text{المساحة}}$$

والمطاوعة لجسم ماتعرف بانها النسبة بين مقدار التشوه في الجسم الذي تسببه القوة المشوهة على بعده الاصلي قبل التشوه ولذلك فان

$$\text{المطاوعة} = \frac{\text{مقدار التشوه}}{\text{البعد الأصلي}}$$

ويمثل مقدار التشوه مقدار التغير في الطول أو الحجم أو الشكل بينما يمثل البعد الاصلي اما الطول الاصلي أو الحجم الاصلي للجسم . وهنالك انواع عديدة للمطاوعة تعتمد على الشكل الهندسي للجسم . وفي جميع الحالات تكون العلاقة بين الاجهاد والمطاوعة ضمن حدود المرونة كالآتي :

$$\text{المطاوعة} \ \alpha \ \text{الاجهاد}$$

$$\text{المطاوعة} \times \text{ثابت} = \text{الاجهاد}$$

حيث يمثل الثابت معامل المرونة . وبذلك تصبح الصيغة المناسبة لقانون هوك كالاتي

$$\text{معامل المرونة} = \frac{\text{الاجهاد}}{\text{المطاوعة}}$$

وفي الحقيقة هناك ثلاثة انواع مختلفة لمعاملات المرونة كل منها يعتمد على طبيعة المادة والشكل الهندسي للجسم ونوع التشوه الذي تحدثه القوة المشوهة فيه . وهذه المعاملات هـــي :

1 – معامل المرونة الخطي . ويرمز بـ Y

2 – معامل المرونة الحجمي . ويرمز بـ K

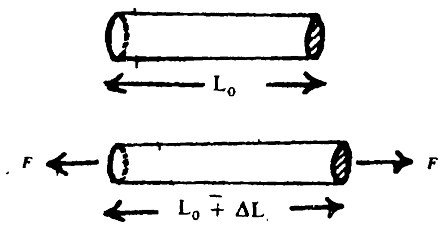
3 – معامل الصلابة . ويرمز بـ n

ولاهمية هذه المعاملات في معادلات الحركة الموجية الميكانيكية سنتطرق بايجاز لكل منها على انفراد .

اولاً : معامل المرونة الطولي أو الخطي

وغالباً مايدعى بمعامل يونك ويرمز له بالحرف Y . ويقابل هذا المعامل التشوه الطولي الذي يحدث عادة في طول السلك أو القضيب المعرض لقوة شد مقدارها F كما هو

مبين في الشكل (1 – 1ب) . في هذه الحالة تحدث قوة الشد استطالة خطية مقدارها ΔL . فاذا كان الطول الاصلي للسلك أو القضيب هو L_o ومساحة مقطعه العرضي هي A فان التغير في وحدة الطول في اتجاه قوة الشد يدعى بالمطاوعة الطولية ويساوي



الشكل (1 – 1ب) يبين التشوه الطولي في قضيب حيث الأجهاد هو F/A والمطاوعة (او الأنفعال) هو $\Delta L / L_0$

$\frac{\Delta L}{L_o}$ ، والقوة المسلطة على وحدة مساحة المقطع العرضي للسلك أو القضيب تدعى بالاجهاد الطولي وتساوي $\frac{F}{A}$ ، والنسبة بين الاجهاد $\frac{F}{A}$ الى المطاوعة $\frac{\Delta L}{L_o}$ وضمن حدود المرونة تدعى بمعامل يونك Y . اي ان

$$Y = \frac{F / A}{\Delta L / L_o} \qquad \text{............ (1·2)}$$

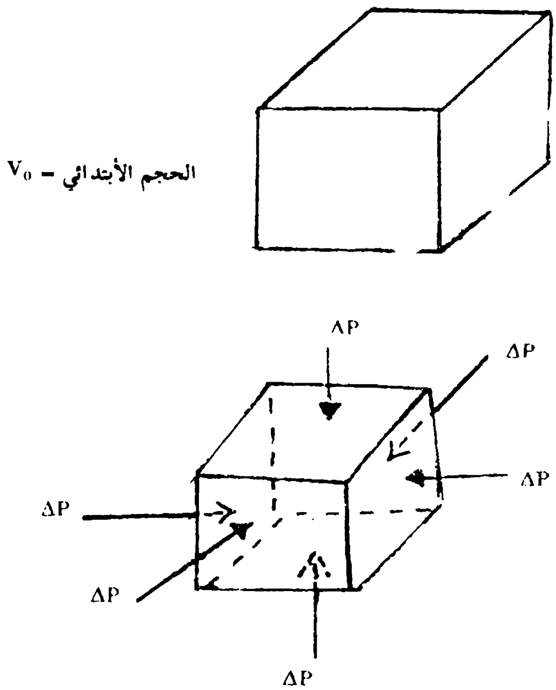
ولما كانت الكميات A, L_o, Y ثوابت ، ينتج ان

$$F \propto \Delta L$$

اي ان القوة المشوهة (قوة الشد) F تتناسب طردياً مع التشوه الطولي (الاستطالة) ΔL

ثانيــاً : معامل المرونة الحجمي :

ان هذا المعامل يقابل التشوه الحجمي الذي يحدث عادة في الموائع (السوائـــل والغازات) . فاذا كان حجم المائع تحت ضغط معين هو V_o ، ثم ازداد الضغط بمقدار Δp فان حجم المائع سينكمش بمقدار ΔV . ان الزيادة بالضغط Δp تمثل الزيادة بالقوة المسلطة على وحدة المساحة اي انها تساوي $\frac{F}{A}$ ، حيث F يمثل مقدار الزيادة بالقوة المؤثرة عمودياً وبانتظام على كل سطح المائع A كما في الشكل (1 – 1جـ) . لذا



الشكل (1-1 ج) يبين التشوه الحجمي في مكعب حجمه الأبتدائي V_0 فعندما يزداد الضغط الخارجي المسلط عليه بمقدار ΔP ينكمش المكعب بمقدار ΔV . حيث الأجهاد هو ΔP والمطاوعة الحجمية هي $\Delta V / V_0$

فان ΔP يمثل الاجهاد . والنسبة بين التغير في الحجم ΔV الى الحجم الاصلي V_0 تمثل المطاوعةالحجمية . فاذا رمزنا لمعامل المرونة الحجمي بالحرف K . فان

$$K = \frac{\Delta P}{\Delta V / V_0} \qquad V_0 \frac{\Delta P}{\Delta V} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1\text{-}3)$$

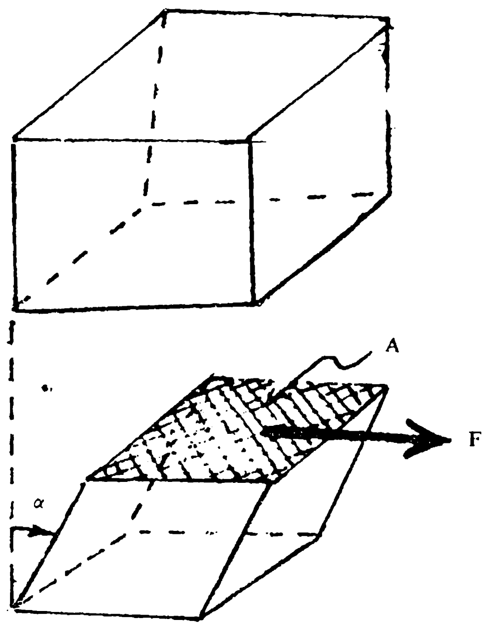
ولما كانت الكميات K و V_0 و A ثوابت . ينتج ان

$$F \propto \Delta V$$

اي انالقوة المشوهة F ($= A\,\Delta P$) تتناسب طرديا مع التشوه الحجمي ΔV

ثالثاً معامل الصلابة (او معامل القص)

ان هذا المعامل يقابل التشوه في الشكل الهندسي للجسم الصلب دون ان يصاحبه تغير في الحجم. فأذا تصورنا مكعباً صلب مساحة كل وجه فيه A . وجهه الأسفل مثبت، وسلطت على الوجه الاعلى قوة مماسية (اي موازية له) مقدارها F (وتدعى عادة بقوة القص) فأن هذه القوة ستحدث تشويهاً قصيا في الجسم يمكن قياسه من خلال الزاوية α المبينة في الشكل (1 1 د) . وهذه الزاوية تمثل المطاوعة القصية . والنسبة بين الاجهاد القصي $\frac{F}{A}$ الى المطاوعة القصية α يدعى بمعامل الصلابة اومعامل القص ويرمز له بالحرف



الشكل (1·1 د) يبين التشوه في الشكل الهندسي لمكعب عند تسليط قوة خارجية F موازية للوجه العلوي ومساحته A حيث الأجهاد هو F /A والمطاوعة القصية α

n اي ان

$$n = \frac{F/A}{\alpha} \qquad \text{...............(1·4)}$$

ولما كانت الـكميات n وA ثوابت ينتج ان

$$F \propto \alpha$$

اي ان القوة المشوهة F (قـوة القص) تتناسب طرديا مع التشـوه القصـــي α

مما تقدم يتضح ان الصيغة العامة لقانون هوك يمكن وضعها لتأخذ بالاعتبار كـــل اشكال التشوهات كالاتـــي :

« القوة المشوهـة تتناسب طـردياً مـع مقدار التشـــوه ضمـن حـدود المـرونـة »

ومن المناسب ان نذكر ان هنالك كمية اخرى ذات اهمية في المرونة تدعى « نسبة بويسون » ويرمزلها بالحرف (σ) وتعرف بأنها النسبة بين المطاوعة العرضية الى المطاوعة الطولية .

فأذا كان لدينا وتر اسطواني منتظم من المطاط مثلا ، طوله L_o وقطره D_o . فعنـد تسليط قوة شد عليه فان طوله يزداد بمقدار ΔL وقطره ينقص بمقدار ΔD . وبذلك ينتج ان

$$\sigma = \frac{\Delta D / D_o}{\Delta L / L_o} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1\cdot5)$$

ان معاملات المرونة Y وK وn ونسبة بويسون σ ترتبط مع بعضها وفق العلاقـــات الآتية :

$$Y = 2n(1 + \sigma) \qquad \ldots (1\cdot6)$$

$$K = \frac{Y}{3(1 - 2\sigma)} \qquad \ldots (1\cdot7)$$

وجدير بالذكر ان هذه المعاملات والعلاقة بينها تم دراستها في مواضيع الميكانيك ، لذلك فان دراستنا في هذا الكتاب ستقتصر فقط على التشوهات التي تحدث في الجسم او اي وسط مادي ضمن حدود دراستنا . اي ضمن المدى الذي يتحقق في قانون هوك .

(ب) خاصية القصور الـذاتـي

ان خاصية القصور الذاتي تمثل صفة استمرارية الجسم او اجزاء الوسط المادي عـلى البقاء في حالة حركية ثابتة مالم تؤثر عليه قوة خارجية تغير تلك الحالة . والقانون الذي يصف

هذه الحالة هو قانون نيوتن الاول في الحركة الذي يدعى بقانون الاستمرارية والذي ينص على ان : كل جسم يبقى في حالة من سكون اوحركة منتظمة على خط مستقيم مالم يضطر لتغيير هذه الحالة بقوى خارجية تؤثر فيه . ويوصف اي جسم بدلالة كمية مادته التـــي تعرف بالـكتلة . وكتلة الجسم تحدد مقدار مقاومته لتغيير حالته الحركية . وعليه فأن هذه الخاصية (الـكتلة) تمثل القصور الذاتي . ولذلك فأن الـكتلة هي المقياس الـكمـــي للقصور الذاتي . وغالباً مايعبر عن خاصية الاستمرارية او القصور الذاتي لاي جسم مـــن خلال كتلة وحدة الحجوم اي الـكثافة . وعليه فأن القصور الذاتي لاي وسط مادي يزداد بازدياد كثافته . اي ان كثافة الوسط تحدد أثر القوة المؤثرة فيه . فكلما ازدادت كثافة الوسط قلت استجابته لتأثير القوة الخارجية فيه لتغيير حالته الحركية .

6 — 1 سرعة انتقال الحركة الموجبة الميكانيكية

ان انتقال الحركة الموجية الميكانيكية يحدث فقط في الاوساط المادية الممتدة التي تمتلك خاصيتي المرونة والقصور الذاتي . وهذه الموجات منشأها ازاحة موضعية لمجموعة من جسيمات الوسط من مواضع توازنها بسبب تأثيرقوة ما . ونتيجة ذلك يظهر دور خاصية المرونة التي تسبب في ظهور قوة الاستعادة التي تعمل على اعادة الجسيمات المزاحة الـى مواضع توازنها الاصلية . وحالما تبدأ هذه الجسيمات رحلة العودة الى مواضع توازنها . تكتسب سرعـة وهنـا يبرز دور خاصيـة الاستمراريـة التـي تعمـل عـلى استمرار الجسيمات بالحركة وعبور مواضع توازنهـا الى الجهة المعاكسة لاتجاه الازاحة الاولى ، وحالما تتجاوز هذه الجسيمات مواضع توازنها يظهر دور خاصية المرونة من جديد لتحاول اعادة الجسيمات الى مواضع توازنها وهكذا تبرز خاصية الاستمرارية مرة اخرى لتحول دون توقف الجسيمات في مواضع توازنها وهكذا تتكرر العملية مـن جديد محدثة حركة اهتزازية حول موضع التوازن ، وتكون هذه الحركة الاهتزازية مصدر الاضطراب في الوسط . ونتيجة لخواص الوسط ينتقل هذا الاضطراب من منطقة الـى اخرى . وبالتالي يتقدم هذا الاضطراب او هذه الموجة ، في الوسط .

وفـي الواقع ان الجسيمات المزاحة لاتبتعد كثيراً عن مواضع توازنها بسبب عاملين هما قوى التماسك المتبادلة فيما بينها ووجود الجسيمات الاخرى المحيطة بها ، لـكن حالة الازاحة تنتقل الى الجسيمات المجاورة لها مباشرة وهذه بدورها تنقلها للجسيمات التـي تليها وهكذا دواليك . وهكذا نرى ان الجسيمات في مختلف اجزاء الوسـط تتحرك حركات اهتزازية صغيرة في مسارات محددة حول مواضع توازنها بأطوار مختلفة . وعندما يكون أي جسيم في اقصـى ازاحة له عن موضع توازنه فان قوة الاستعادة الناتجة من خاصية المرونة تكون على ذروتها وبذلك يختزن الجسيم طاقة كامنة فقط بفضـل وضعة الآنـي . وفـي لحظة بدء رحلة العودة الى موضع التوازن يبدأ تحول الطاقة الـكامنة الى طاقة حركية بفضل خاصية الاستمرارية ويكون التحول كاملاً عندمايصل الجسيم موضع توازنة الاصلـي . ويلاحظ هنا انه اثناء تقدم الموجة خلال الوسط المادي يحصل تبادل متناوب بين شكلـي الطاقة الـكامنة والحركية لجسيمات ذلك الوسط .

ان سرعة انتقال الاضطراب الميكانيكـي (C) في اي وسط مادي مرن تعتمـد على معامل مرونته E وكثافته ρ حسب الصيغة :

$$C = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad \dots (1\text{-}8)$$

من هذه العلاقة يتضح ان الاضطراب الميكانيكي ينتقل اسرع في المواد التي لها مرونة اعلى وكثافة اقل . وان مايجدر بنا ملاحظته ان الحركة الموجية الميكانيكية ليست ظاهرة ميكانيكية بحتة ، اذ ليس للموجة كتلة بل هي شكل من الاضطراب ، وما الاضطراب الاحالة حركية في وسط مادي مرن . وطبقاً لقوانين الفيزياء فان اي حالة حركية (ديناميكية) ترتبط بالزخم والطاقة ، لذلك يمكن القول انه في اي حركة موجية ميكانيكية ينتقل الزخم والطاقة عبر الوسط المادي عن طريق اهتزاز جسيمات ذلك الوسط حول مواضع توازنها دون ان يصاحبها انتقال في جسيمات المادة او في المادة ككل .

وفضلاً عن ذلك فان الحركة الموجية الميكانيكية ليست وسيلة لنقل الطاقة والزخم فحسب بل هي أيضا وسيلة مهمة لنقل المعلومات من نقطة الى أخرى . كما هو الحال في الموجات الصوتية في الهواء . فالطاقة المصاحبة للموجات الصوتية الساقطة على الأذن البشرية تسبب اهتزاز غشاء الطبلة والعظيمات الداخلية للاذن مما يشير الى وصول طاقة

صوتية ولكن أسلوب تغير تلك الطاقة مع الزمن يمكن تفسيره بالدماغ وبذلك يدرك السامع معنى المعلومات التي تحملها الأشارة الموجية القادمة اليه .

7 - 1 نماذج لحركات موجية ميكانيكية

هناك اشكال كثيرة للحركات الموجية الميكانيكية يتعذر حصرها ووصفها جميعاً ، لذلك سنستعرض فقط نماذج مألوفة منها والتي يسهل مشاهدتها ومن خلالها نستطيع التعرف على سلوك مختلف أشكال هذا النوع من الحركة الموجية. والنماذج التي سنتطرق لها هي :

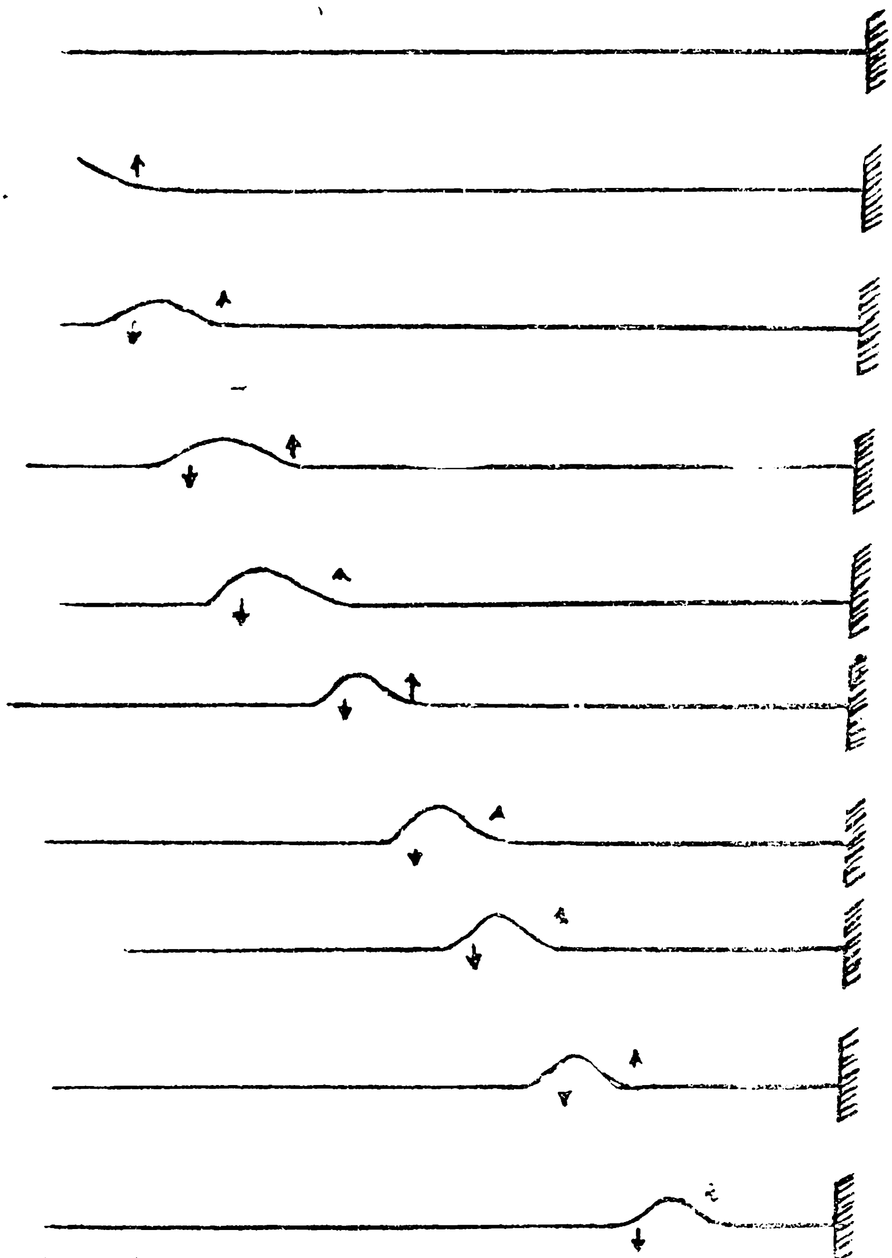
(أ) الموجات في الأوتار المهتزة .
(ب) الموجات في النابض الحلزوني
(جـ) الموجات على سطح الماء .

وفي جميع هذه النماذج سنركز فقط على الموجات المتقدمة في اتجاه واحد وسنعتبر ان قوى الأحتكاك معدومة والفقدان في الطاقة مهملاً تماماً (على الأقل من الناحية النظرية) .

أ- الموجات في الأوتار المهتزة : -

لنفرض ان لدينا حبلاً طويلاً متوتراً بتأثير قوة الشد . ومربوط من احد طرفيه بمسند صلب وثابت ، والطرف الآخر طليق . فإذا أزيح طرف الحبل الطليق باليد فجاة الى الاعلى ثم اعيد بسرعة الى موضعه الاصلي ، فان مانلاحظه اولاً ان الحبل لايتحرك كله الى الاعلى كقطعة واحدة ، بل ان مايحدث في البدء هو ان الجزء المجاور لليد من الحبل هو الذي يندفع الى الاعلى مع رفع اليد ، اما الاجزاء الاخرى من الحبل فتبقى ساكنة في مواضعها بفعل قصورها الذاتي . ان الجزء الاول من الحبل المندفع نحو الاعلى يسحب معه الجزء الذي يليه الى اليمين ، وعندما يبدأ هذا الجزء بالاستجابة لقوة الشد في الحبل المؤثرة عليه فأنه بدوره يسحب الجزء المجاور له الى الأعلى ، وهكذا تتكرر العملية ، بينما يعود الجزء الاول من الحبل الى موضعه الاصلي وهكذا نرى ان اضطراباً مستعرضاً قد تشكل على الحبل . وهذا الاضطراب المنفرد او الموجة المفردة تدعى بالنبضة وهي تمثل تشوهاً موضعياً في شكل الحبل ناتجاً عن ازاحة جزء من الحبل عن موضع توازنه باتجاه عمودي على اتجاه

الحبل . ان هذه النبضة لاتبقى ساكنة في وضعها بل تتحرك بسرعة منتظمة الى جهة اليمين

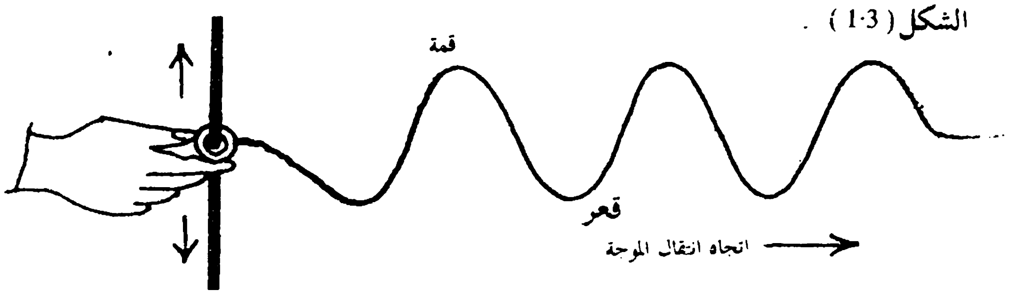


شكل (12) يمثل نبضة مستعرضة تتولد في طرف الحبل وتنتقل بسرعة منتظمة على امتداد الحبل دون ان يتغير شكلها

كما هو مبين في الشكل (1.2). ويلاحظ ان شكل النبضة لايتغير خلال تحركها على امتداد الحبل ، (على افتراض ان الاحتكاك معدوم وان شدة التوتر في الحبل ثابتة).

ومن المهم ان نلاحظ ان مايتحرك على الحبل أفقياً ليس الجسيمات التي يتألف منها الحبل ، بل النبضة فقط ، أما الجسيمات فتتحرك عمودياً الى الأعلى ثم تعود ثانية الى مواضع توازنها ، اي ان حركة الجسيمات في كل أجزاء الحبل تكون عمودية على اتجاه أنتقال النبضة .

أما اذا تحرك طرف الحبل الممسوك باليد بحركة دورية الى الأعلى والأسفل فان نمط هذه الحركة ينتقل على شكل سلسلة من الموجات ذات قمم وقعور كما هو مبين في الشكل (1.3) .



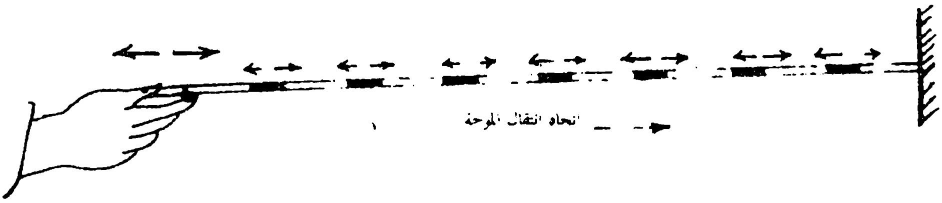
الشكل (1.3) تتولد سلسلة من الموجات المستعرضة عندما يهتز طرف الحبل بحركة دورية الى الأعلى والأسفل

ان سرعة أنتقال الموجة المستعرضة على امتداد الحبل هو مقدار ثابت ويمكن ايجاده من المعادلة

$$C = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \ldots (1.9)$$

حيث ان C يمثل سرعة أنتقال الموجة او النبضة المستعرضة . و F يمثل مقدار قوة الشد في الحبل و μ يمثل كتلة وحدة الطول لمادة الحبل .

وفي الواقع هناك انماط أخرى من الحركة يمكن تغذيتها لطرف الحبل الممسوك باليد غير تلك التي سبق ذكرها تواً . فمثلاً يمكن شد الحبل وارخاؤه بنفس اتجاه طوله وذلك بتحريك اليد حركة اهتزازية على امتداد الحبل ، فيتولد اضطراب بنفس اتجاه طول الحبل يدعى بالأضطراب الطولي كما مبين في الشكل (1.4)



الشكل (1·4) تتولد سلسلة من الموجات الطولية عندما يهتز طرف الحبل بحركة ترددية بنفس اتجاه طول الحبل.

ان الأسهم الصغيرة في هذا الشكل تشير الى اتجاه ازاحة الجسيمات حيث تهتز طولياً حول مواضع توازنها في مختلف أجزاء الحبل.

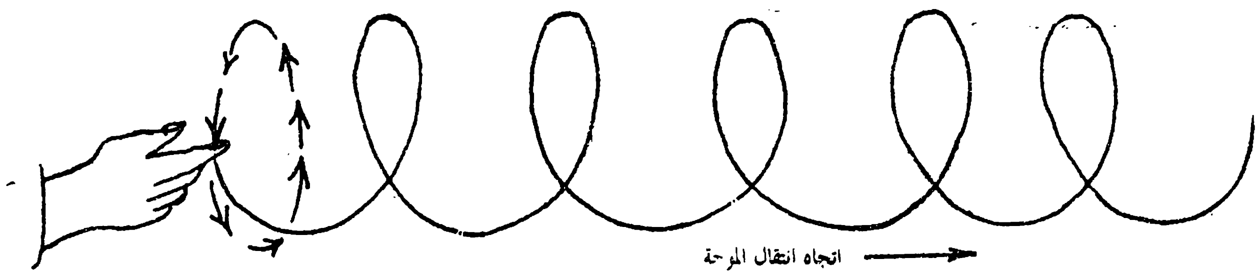
وهنالك نمط آخر من الحركة يمكن تغذيته للحبل وذلك بتدوير طرف الحبل الممسوك باليد على مسار دائري عمودي على اتجاه طول الحبل. في هذه الحالة يتكون شكل موجي مستقطب دائرياً كما هو مبين في الشكل (1·5)

يلاحظ في هذا الشكل ان اتجاه ازاحة الجسيمات في جميع أجزاء الحبل تكون عمودية على اتجاه انتقال الموجة.

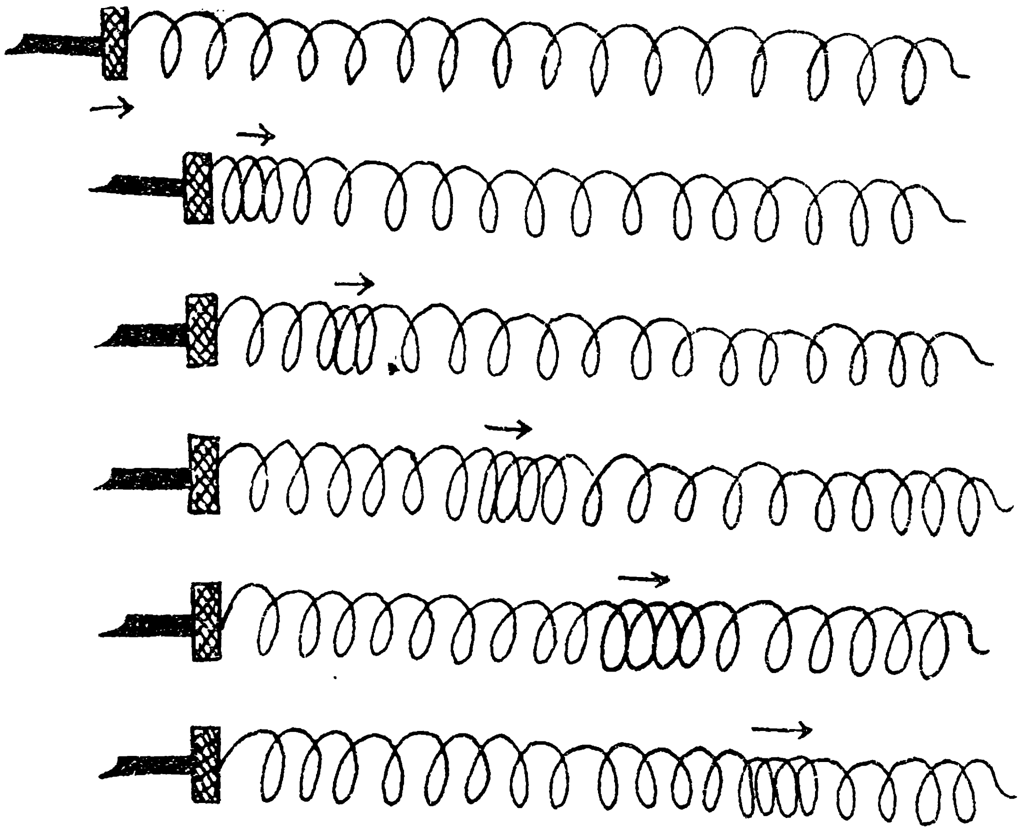
وهنالك أنماط أخرى من الحالة الحركية يمكن تغذيتها لطرف الحبل الممسوك باليد فتتولد موجات تحمل نفس سمات الحالة الحركية.

(ب) الموجات في نابض حلزوني :

نفرض ان لدينا نابضاً حلزونياً ، (سبرنك) طويلاً جداً وموضوعاً على سطح أفقي أملس. أحد طرفي النابض متصل بمقبض والطرف الآخر حر. في حالة التوازن تكون المسافات الفاصلة بين حلقات النابض متساوية. فاذا أعطي المقبض دفعة صغيرة مفاجئة في اتجاه المحور، فان النابض لايستجيب كله آنياً للدفعة كقطعة واحدة. بل ان مايحدث على أثر الدفعة ان الحلقات القريبة من المقبض ستنضغط، وعندما تحاول استعادة وضعها الأصلي بفضل خاصية المرونة لمادة النابض. فانها ستضغط على الحلقات المجاورة لها في جهة اليمين. وهذه بدورها ستنقل الأنضغاط الى الحلقات التي تليها وهكذا يتقدم الأضطراب على شكل نبضة أنضغاطية في النابض الحلزوني كما مبين في الشكل (1·6)

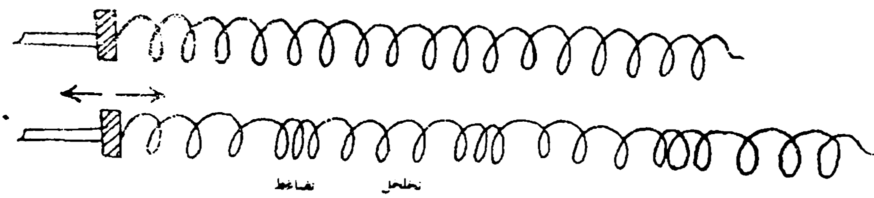


الشكل (1-5) تتولد سلسلة من الموجات المستقطبة دائرياً عندما يتحرك طرف الحبل حركة دورية دائرية.



الشكل (1-6) تتولد نبضة انضغاطية عند أعطاء المقبض دفعة مفاجئة .

اما اذا تحرك المقبض بحركة ترددية ذهاباً واياباً حول نقطة معينة فان سلسلة متواصلة من التضاغطات والتخلخلات تتولد وتنتقل خلال النابض الحلزوني كما هو مبين في الشكل (1·7).



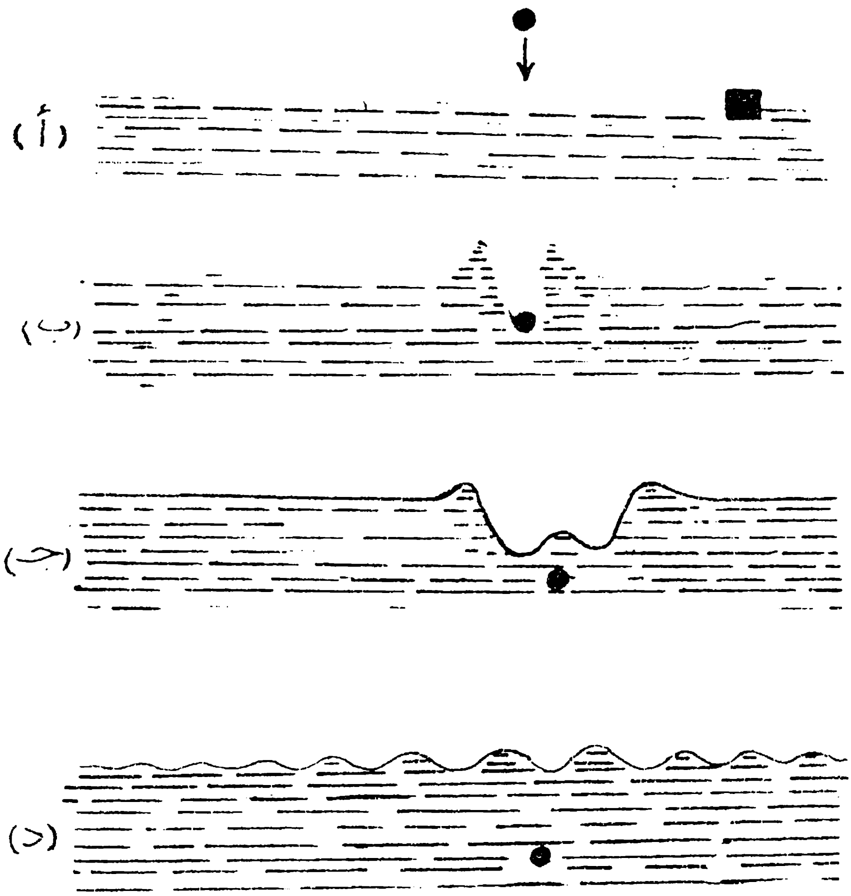
الشكل (1·7) تتولد سلسلة من الموجات التضاغطية عندما يتحرك المقبض حركة ترددية حول موضع استقراره.

ان تشكيل هذه الموجات يشابه الى حد كبير تشكيل الموجات الصوتية في الهواء كما سيتضح ذلك في البند اللاحق من هذا الفصل .

(ج) الموجات على سطح الماء

لنفرض ان قطعة صغيرة من الفلين تطفو على سطح بحيرة هادئة من الماء . أن في حالة التوازن تكون قطعة الفلين ساكنة على سطح مستوى أفقي كما في الشكل (1·8 أ) واذا القي حجر على سطح الماء وعلى بعد كاف من الفلين فان اضطرابا سيتولد في موضع سقوط الحجر في الماء مما يؤدي الى نشوء حالة فيزياوية جديدة على شكل تشوه موضعي في سطح الماء . هذا التشوه ينتج من ازاحة جزيئات الماء الى اعلى واسفل مستوى التوازن والقوى المعيدة هنا هي قوى الجاذبية الارضية والشد السطحي للماء التي تحاول اعادة سطح الماء الى مستوى توازنه الاصلي .

وفي الواقع ان فعل الحجر الساقط هو سحب جزيئات الماء الملاصقة له الى الاسفل ويصاحب هذه العملية ارتفاع الماء على جوانب الحجر . مما يعني تشكيل فجوة على سطح الماء كما مبين في الشكل (1·8 ب) ان الفجوة التي احدثها سقوط الحجر تتأثر بضغط الماء المتراكم على الجوانب محاولاً ملئها ، لكن خاصية القصور الذاتي للماء تدفع الجوانب على تجاوز أو عبور مواضع توازنها وبذلك يأخذ سطح الماء الشكل المبين في الشكل (1·8 ج) . ان استمرار تكرار هذه العملية ينتج عنه توليد مجموعة صغيرة من الموجات تتحرك على السطح مبتعدة عن مركز الاضطراب (اي نقطة سقوط

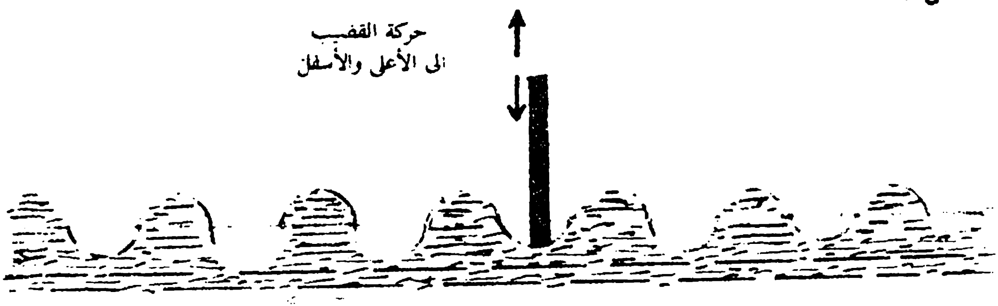


الشكل (١-٤) الحجر الساقط يولد موجات مائية

الحجر) . وبعد فترة وجيزة سيلاحظ انّ قطعة الفلين ستتحرك صعوداً ونزولا حول موضع توازنها . مما يشير الى ان جزءاً من الطّاقة الميكانيكية المعطاة من قبل الحجر الملقى في الماء قد وصل الى قطعة الفلين وهذا الجزء من الطاقة قد انتقل من الحجر الى الفلين بواسطة الحركة الموجية المتقدمة على سطح الماء .

ان مايجدر بنا ملاحظته هنا ان جزيئات الماء وقطعة الفلين لم تغادر مواضع توازنها بل تهتز حول تلك المواضع . وان ما ينتقل على سطح الماء هو نمط من الاضطراب على شكل قمم وقعور . وهذا الاضطراب يتقدم في بعدين على خلاف النموذجين السابقين حيث كان الاضطراب يتقدم في بعد واحد. في هذه الحالة يولد سقوط الحجر اضطراباً على شكل نبضة واحدة وطاقة هذا الاضطراب تتلاشى تدريجيا مع المسافة من مركز نشوئه ، لأن الطاقة تتوزع على عدد اكبر من جزيئات الماء كلما تقدم الاضطراب .

ويمكن توليد سلسلة من الموجات المتتالية على سطح الماء اذا كان مصدر الاضطراب عبارة عن طرف قضيب يتحرك حركة دورية الى الاعلى والاسفل على سطح الماء كما في الشكل (1·9) .



الشكل (1·9) تتولد موجات مائية دائرية حول القضيب عندما يتحرك طرف القضيب حركة ترددية على سطح الماء

ان طرف القضيب المتحرك في هذه الحالة يعتبر مصدراً لموجات دائرية تتقدم في كل الاتجاهات على سطح الماء بسرعة منتظمة . ان سرعة انتقال الموجة c على سطح اي سائل يمكن ايجادها من المعادلة :

$$c^2 = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\rho\lambda} \right) \tanh \frac{2\pi h}{\lambda} \qquad \ldots(1\cdot10)$$

حيث ان g يمثل التعجيل الارضي .
وان λ يمثل الطول الموجي (المسافة بين قمتين متتاليتين)
T 〃 التوتر السطحي
ρ 〃 كثافة السائل
h 〃 عمق السائل

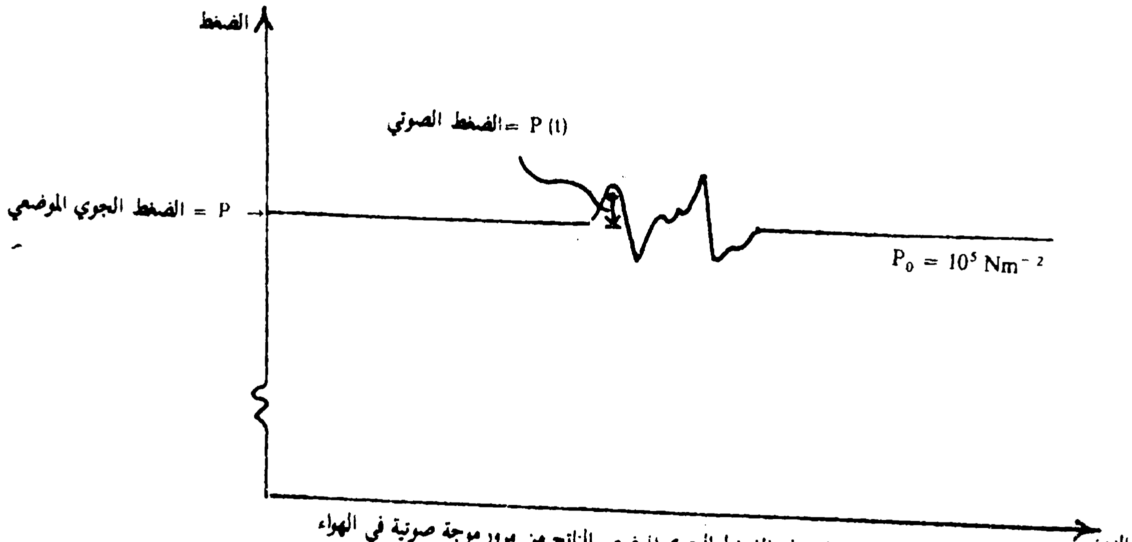
يلاحظ من هذه المعادلة ان سرعة الموجة تعتمد على شدة الجذب الارضي وشدة التوتر السطحي . وكذلك على الطول الموجي ايضاً .

من النماذج الثلاثة المذكورة اعلاه يتضح ان أصل الحركة الموجية هو جسم متحرك . وهذا الجسم يعتبر مصدر للموجة وحركة هذا المصدر سببها طاقة معطاة اليه . فالموجات في الحبل المهتز مصدرها اليد المتحركة . والموجات في النابض الحلزوني مصدرها المقبض المتحرك . والموجات على سطح الماء مصدرها الحجر الساقط او القضيب المتحرك ان هذه المصادر لاتتحرك من ذاتها مالم تزود بطاقة تحركها وهذه الطاقة تنتقل من المصدر الى اي نقطة اخرى في الوسط المحيط به بواسطة الحركة الموجية خلال ذلك الوسط وسرعة انتقال الموجة تعتمد على طبيعة الوسط المتعلقة بمرونته وقصوره .

8 . 1 . الموجات الصوتية

بالنظر لاهمية الموجات الصوتية سنخصص لها بنداً مستقلاً للتعريف بها باعتبارهـا احدى اهم اشكال الحركة الموجية الميكانيكية . والموجات الصوتية تنتقل في الاوسـاط المادية الصلبة والسائلة والغازية . الا ان اهتمامنا الان سيتركز على الموجات الصوتية في الهواء .

ان الموجات الصوتية في الهواء هي عبارة عن سلسلة من التغيرات في ضغط الهواء يمكن للاذن البشرية ان تلتقطها كصوت والمقصود بضغط الهواء هو الضغط الجوي الموضعي ويكون عادة ثابتا اذا لم يحدث اضطراب الذي قد يسببه جسم متحرك او تغير الاحوال الجوية اوكلاهما . وعليه هناك نوعان من التغير في ضغط الهواء الموضعي احدهما سببه اضطراب في الهواء يولده جسم مهتز هو مصدر الصوت ويسمى مقدار التغير فـي الضغط الموضعي الناتج من الاضطراب بالضغط الصوتي . ويكون مقدار الضغط الصوتي عادة صغيراً جداً بالمقارنة مع مقدار الضغط الجوي الموضعي . وغالبا ما يكون عدد مرات التغير في ضغط الهواء كبيراً في مثل هذه الحالات . ولـكي يمكن التقاط هذه التغيـرات كصوت يجب ان لايقل عدد مرات التغير في الضغط عن عشرون مرة في الثانية الواحدة والشكل (1-10) يوضح التغير في ضغط الهواء الجوي الموضعي المصاحب لمرور موجـة صوتية في الهواء في ذلك الموضع فعندما يمر اضطراب (موجة صوتية) عبر نقطة معينـة



الشكل (1·10) يبين التغير العابر في الضغط الجوي الموضعي الناتج من مرور موجة صوتية في الهواء

فأن تغيرات صغيرة في ضغط الهواء تحدث حول متوسط قيمة الضغط الجـوي P_o وبذلك يكون مقدار الضغط الـكلي في اية لحظة هو $P_o \pm P(t)$ حيث $P(t)$ يمثل الضغط الصوتي الآني وهومقدارمتغيرمع الزمن فقد يكون موجبا عندما يكون هناك زيادة موضعية في الضغط فيدعى بالتضاغط وقد يكون سالبا عندما يكون هناك نقصان موضعي في الضغط فيدعى بالتخلخل. والقيمة الفعالة للضغط الصوتي يمكن التعبير عنها بدلالة متوسط مربع ضغط الصوت $\bar{P}^2$ التي يمكن حسابها من المعادلة :

$$\bar{P}^2 = \frac{1}{\tau} \int_o^{\tau} P^2(t)\,dt \qquad \ldots(1\text{-}11)$$

حيث ان τ يمثل فترة زمنية مناسبة .

اما النوع الثاني من التغيرفي الضغط الجوي فسببه تغيرالاحوال الجوية ويحدث عادة ببطيء شديد جداً لذا لايمكن التقاطه كصوت .

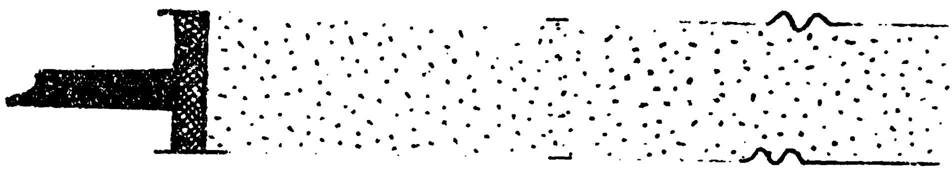
ان عدد مرات التغيرفي الضغط في الثانية الواحدة يدعى بذبذبة الصوت (أوتردد الصوت) ويقاس عادة بعدد الذبذبات في الثانية الواحدة أوالهيرتز (Hertz) . والهيرتز يمثل وحدة قياس الاهتزاز أوالتردد المتفق عليه عالمياً . ان تردد الموجات التي يمكن للاذن البشرية التقاطها كصوت تمتد من 20 هيرتز الى 20000 هيرتز* (اي 20 كيلو هيرتز) ، أما التي يقل ترددها عن 20 هيرتز فتدعى بالموجات تحت السمعية (تحت الصوتية) والموجات التي لها تردد أعلى من 20000 هيرتز فتدعى بالموجات فوق السمعية (فـوق الصوتية) . أما مقدار التغيرفي ضغط الهواء (الضغط الصوتي) الذي يمكن للاذن البشرية ان تستجيب له كصوت فيتراوح بين 2×10^{-5} نيوتن لـكل متر مربع كحد أدنى الى 20 نيوتن لـكل متر مربع كحد أعلى . والحد الادنى لضغط الصوت يدعى بحافة السمع وأي ضغط دونه لايمكن احساسه كصوت . والحد الاعلى لضغط الصوت يدعى بحافة الالم وأي ضغط اعلى منه يسبب تلفاً داخلياً للاذن قد يقود الى عطل دائم في السمع .

ان مصادر الصوت حولنا كثيرة ومتنوعة وغالباً ماتكون معقدة . الا ان جميع هذه المصادر هي بحقيقتها اجسام مهتزة . ونتيجة لاهتزاز اي جسم يحدث تضاغط في الهواء المحيط به اثناء حركته الى الامام ثم يحدث تخلخل في الهواء أثناء حركة الرجوع وهكذا تنتقل الحركة الاهتزازية من الجسم المهتز الى الهواء المحيط به مباشرة ، وهذه الحركة

* والحقيقة ان المدى المسموع من التردد يختلف من شخص لآخر ولكن في المتوسط تكون استجابة الاذن البشرية السليمة لترددات تتراوح بين 16 هيرتز الى 19 كيلو هيرتز

الاهتزازية في الهواء تتقدم على شكل موجات من التضاغط والتخلخل حتى تصل الاذن . وسنقدم هنا واحداً من ابسط مصادر الصوت لتوضيح ميكانيكية توليد الموجات الصوتية

لنفرض أن لدينا انبوباً اسطوانياً منتظماً وطويلاً جداً ، مملوءاً بالهواء . في أحد طرفيه مكبس كما مبين في الشكل (1·11) .

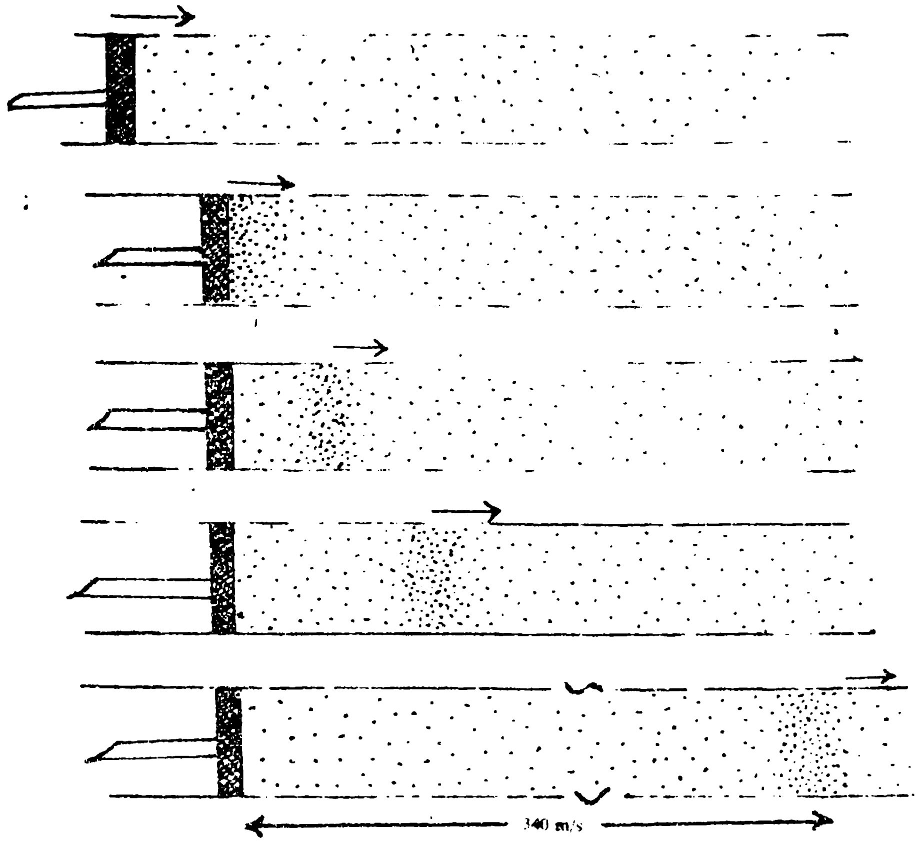


الشكل (1·11) المكبس ساكن والهواء في حالة توازن .

وللسهولة نتصور ان عمود الهواء داخل الانبوب مقسم الى طبقات رقيقة ، فاذا تحرك المكبس فجأة الى الامام مسافة قليلة ثم توقف . فان اول مايجب ان ندركه ان عمود الهواء لايتحرك كله كقطعة واحدة لقطع المسافة التي تحركها المكبس وذلك بسبب خاصية القصور الذاتي التي يمتلكها الهواء . وفي الواقع ان اول مايحدث هو ان المكبس يدفع الجزيئات التي امامه مباشرة فتنكبس وتتقارب من بعضها ويزداد الضغط موضعياً . فتتولد حالة من التضاغط . ونتيجة ذلك فان الهواء المضغوط امام المكبس مباشرة يحاول ان يتمدد بسبب خاصية المرونة ليحاول أستعادة حالته الأصلية . الا أنه لايستطيع أن يتمدد جانبياً ولا الى الوراء لأن كل من جدران الأنبوب والمكبس من الصلابة مالايسمح بذلك لذلك سيتمدد الهواء المضغوط الى الأمام و بتمدده يكبس جزيئات الهواء في الطبقة المجاورة له فتنضغط وهذه بدورها تنقل حالة التضاغط الى الطبقة التي تليها وهكذا تتكرر العملية وينتقل التضاغط الى الأمام خلال عمود الهواء بسرعة منتظمة هي سرعة انتقال موجة التضاغط . ولأن هذه الموجة مفردة لاتتكرر لذلك تدعى بالنبضة التضاغطية وسرعة انتقالها c هي سرعة الصوت في الهواء ، يمكن ايجادها من المعادلة

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \qquad \ldots(1\cdot12)$$

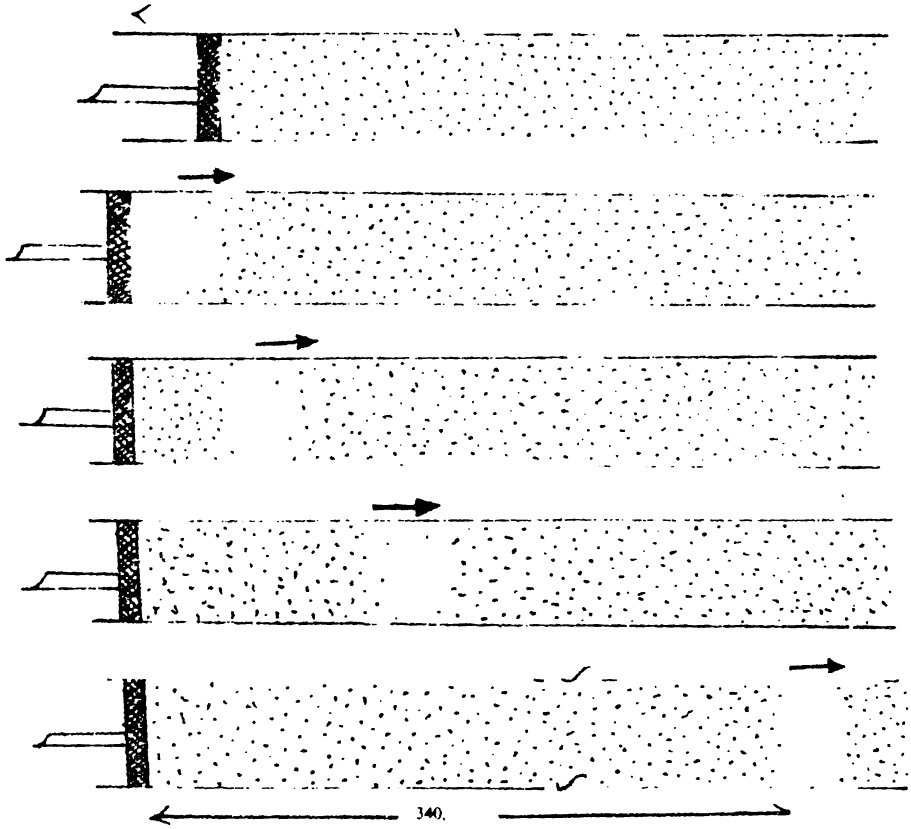
حيث ان K يمثل معامل المرونة الحجمي للهواء ويساوي γ حيث P_0 هو الضغط الجوي و γ هي النسبة بين السعتين الحرارتين النوعيتين للهواء تحت ضغط ثابت وحجم ثابت على التوالي ($\gamma = \frac{C_p}{C_v}$) و ρ يمثل كثافة الهواء .



الشكل (1·12) اندفاع المكبس الى الأمام يولد حالة من التضاغط - التضاغطية تقطع مسافة 340 متر في الثانية هي سرعة الصوت في الهواء .

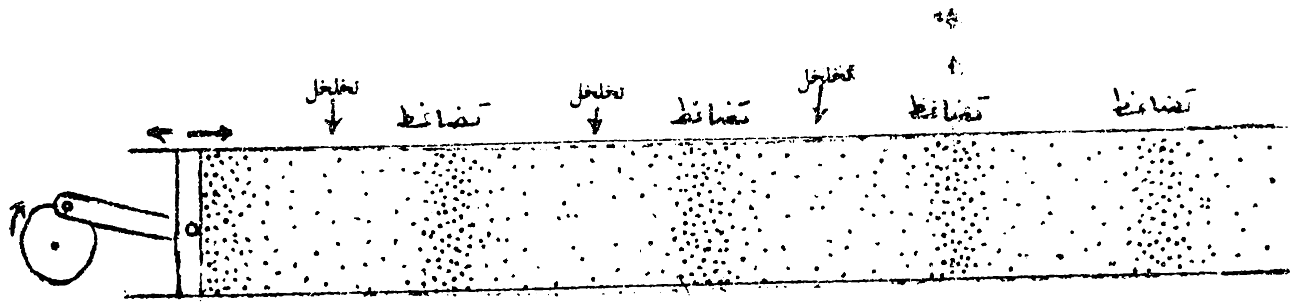
الشكل (1·12) يبين مراحل انتقال نبضة التضاغط خلال عمود الهواء

أما في حالة تحرك المكبس فجأة بالاتجاه المعاكس لمسافة قليلة ثم يتوقف فأن تخلخلاً يحدث في طبقة الهواء المجاورة للمكبس مباشرة ، وهذا التخلخل ينتقل من طبقة الى أخرى في الهواء داخل الأنبوب تماماً . كما انتقل التضاغط في العملية السابقة بنفس السرعة . والشكل (1·13) يبين مراحل انتقال نبضة التخلخل خلال عمود الهواء .



الشكل (1·13) النبضة التخلخلية تتقدم الى الأمام خلال عمود الهواء في الأنبوبة وتقطع 340 متر في الثانية الواحدة

ان ما تجدر الاشارة اليه ان الاذن البشرية اذا وصلتها موجة تضاغط او موجة تخلخل منفردة اي اذا وصلتها نبضة واحدة فقط فانها ستسمعها كأشارة قصيرة معزولة وغالباً ما لايدعى مثل هذا صوتا . اما اذا استلمت الاذن سلسلة متتالية من الموجات التضاغطية والتخلخلية فانها ستسمعها كصوت مستمر . وهذا يتم فقط اذا تحرك المكبس حركة ترددية حول موضع استقراره كما مبين في الشكل (1·14) . في هذه الحالة يستمر المكبس بالحركة ذهاباً وايابا حول موضع توازنه الاصلي فيولد سلسلة من الموجات الصوتية التي تنتقل بسرعة ثابتة هي سرعة الصوت في الهواء



الشكل (1·14) الحركة الترددية المنتظمة للمكبس تولد تتابعاً من التضاغطات والتخلخلات التي تتقدم على امتداد عمود الهواء بسرعة الصوت .

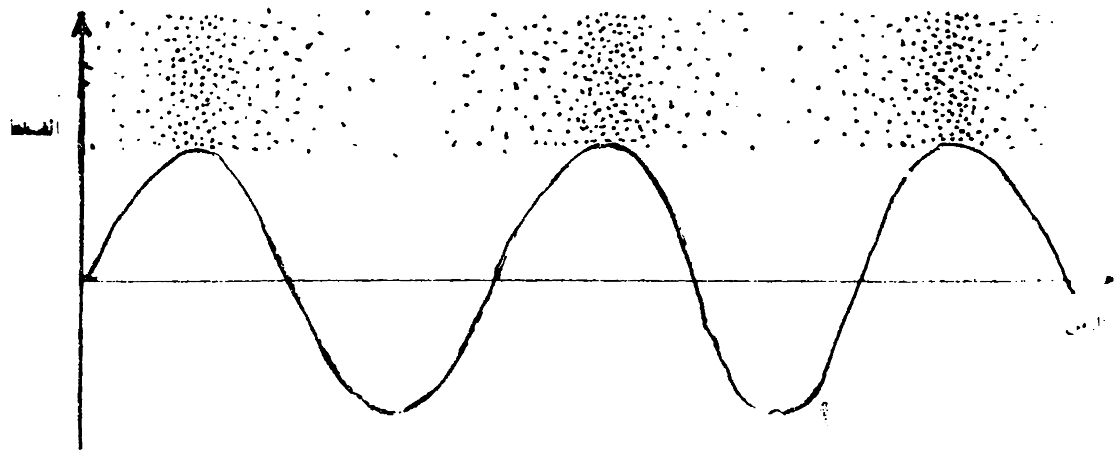
ان هذه الموجات من التضاغط والتخلخل المتعاقب والتي تمثل ابسط انواع الموجات الصوتية يمكن تمثيلها بيانيا كما مبين في الشكــل (1·15)

وفي الواقع ان معظم الاصوات المألوفة ليست نقية ولكنها موجات مركبة قــــد تكون في غاية التعقيد . والشكل (1·16) يبين نموذج لحركة موجية تمثل صـوت اعتيادي

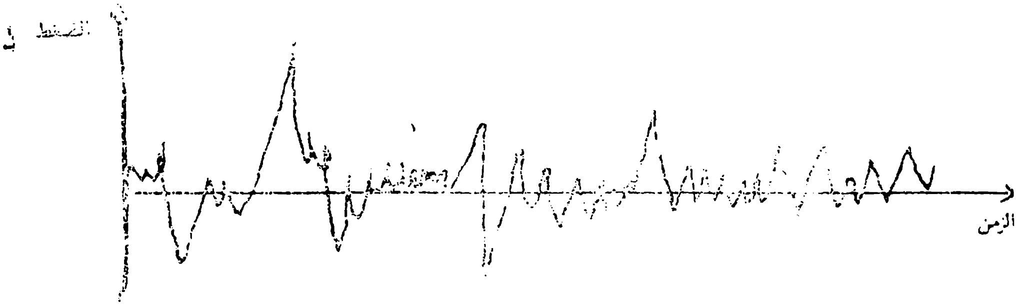
يلاحظ في الموجات الصوتية التي يولدها المكبس المتحرك ما يأتي :

1 - ان الجسيمات تتحرك في مسارات توازي اتجاه انتقال الموجة.

2 - ان الشكل الموجي الذي يمثل شكل الحالة الفيزياو ية المتولدة (كالتضاغط او التخلخل اوكليهما) ينتقل بسرعة ثابتة ولا يتغير اثناء الانتقال



الشكل (1·15) يمثل حركة موجية صوتية توافقية ذات تردد ثابت وتدعى بالنغمة النقية .



الشكل (1.1.6) يمثل حركة موجية صوتية مركبة من ترددات كثيرة

3- إن الحركة الصوتية تتقدم بينما الجسيمات الناقلة للموجة لا تتقدم بل تتذبذب حول مواضع ثابتة.

4- في حالة التضاغط يتحرك الجسيم بنفس إتجاه إنتقال الموجة بينما في حالة التخلخل يتحرك بعكس الاتجاه.

هذه المواصفات مشتركة بين جميع الموجات الصوتية.

9.1 أصناف الحركة الموجية الميكانيكية

لقد قسمنا في البند [illegible] الحركات الموجية في الطبيعة الى ثلاثة انواع . وذلك حسب [illegible] واحد هذه الانواع كان الحركة الموجية الميكانيكية وقد وجدنا [illegible] ان هنالك اشكالا عديدة للحركة الموجية الميكانيكية يمكن تصنيفها بطرق [illegible] الا ان الطريقة الاساسية المتبعة للتمييز بين مختلف اشكال الحركة الموجية الميكانيكية [illegible] حركة جسيمات الوسط الناقل للموجة بالنسبة لاتجاه انتقال [illegible] الحالة الحركية لجسيمات الوسط هو الذي يحدد صنف الموجة . [illegible] حركتان هما الحركة الموجية المستعرضة والحركة الموجية الطولية.

أ- [illegible] المستعرضة [illegible] في هذا الصنف من الحركة الموجية تهتز جسيمات [illegible] على اتجاه انتقال الموجة . مثل الموجات عبر الاوتار المهتزة [illegible] الشكلين [illegible] حيث ان مرور الموجة في الحبل المشدود [illegible] اهتزاز جسيمات الحبل الى الاعلى والاسفل .

ب- [illegible] الطولية [illegible] الحركة الموجية تهتز جسيمات الوسط [illegible] انتقال [illegible] الموجات الصوتية في الهواء كما في الشكل

(1·14) حيث ان مرور الموجة الصوتية (الموجة التضاغطية) يؤدي الى اهتـزاز جسيمات الوسط الى الامام والى الخلف بحركة ذهاب واياب على طول خط انتقال الموجة . كذلك الموجات التضاغطية في النابض الحلزوني تؤدي الى اهتزاز لفاته على طول خط انتقال الموجة كما في الشكل (1·6)

وفي الحقيقة لايمكن اعتبار كل الموجات الميكانيكية على انها طولية او مستعرضة ، فمثلا في الموجات المستقطبة دائريا في الحبل كما في الشكل (1·5) لاتكون حركـة جميع جزيئاته مستعرضة تماما بل ان بعضها يتحرك طوليا . وكذلك في الموجات عـلى سطح الماء لاتكون حركة الجزيئات عمودية على سطح الماء بل ان مسار كل جزيء يكون على شكل مسار بيضوي ، اي اذا توخينا الدقة تماما نلاحظ ان جزيئات الماء تتحرك الى الاعلى والى الاسفل كما تتحرك الى الامام والى الخلف وهي ترسم مسارات بيضوية الشكل يكون محورها الرئيسي عمودياً على سطح الماء

كما ان هناك طريقة اخرى لتصنيف الموجات الميكانيكية تبعا لعدد الابعاد التـي تنتقل فيها الموجة فمثلا هناك :

أ — الموجات في بعد واحد : وهي تلك التي تتقدم باتجاه واحد اي على امتداد محور واحد كالموجات المنتقلة على طول حبل مشدود اونابض حلزوني اوقضيب معدني اوعمود هواء .

ب — الموجات في بعدين : وهي تلك التي تتقدم على امتداد سطح مستويتعين بمحورين فقط كالموجات على سطح السوائل او في الاغشية الرقيقة ذات البعديـــن

جـ — الموجات في ثلاثة ابعاد : وهي تلك التي تتقدم في كل الاتجاهات ويمكـن وصفها بدلالة ثلاثة محاور متعامدة كالموجات الصوتية في الهواء والموجات الزلزالية في الكرة الارضية والموجات التضاغطية في مياه البحار والمحيطات .

ويلاحظ في بعض من هذه الاصناف انه يتضمن خليطا من الموجات الطوليـة والمستعرضة .

وهناك طرق اخرى لتصنيف الموجات الميكانيكية تبعا لاطوالها الموجية او ترددداتهـا او سعاتها .... الخ .

10 – 1 مميزات الحركة الموجية الميكانيكية

تتميز الحركة الموجية بجميع اصنافها بما يلي :

أ– هي شكل من الاضطراب في وسط مادي (صلب ، سائل ، غاز) مرن يولده نمط من الحركة الدورية في جسيمات ذلك الوسط يسببها جسم متحرك يدعى بالمصدر.

ب– شكل الاضطراب الذي يمثل شكل الموجة هو الذي ينتقل من نقطة الى اخرى خلال الوسط بينما جسيمات ذلك الوسط لاتنتقل بل تتذبذب بحركة اهتزازية حول مواضع توازنها مماثلة لحركة المصدر.

جـ– **سرعة انتقال الاضطراب (الموجة) في وسط ما هي مقدار ثابت يعتمد على خاصيتي المرونة والقصور الذاتي لذلك الوسط . ما لم يكن ذلك الوسط مشتتاً** (dispersive medium) ، ويتغير مع تغير الوسط .

د– سرعة انتقال الاضطراب (**الموجة) يختلف عن سرعة حركة جسيمات الوسط الناقل للموجة .**

هـ– **لاتتحرك جسيمات الوسط الناقل للموجة بطور واحد بل يتغير طور الحركة بانتظام من جسيم الى اخر كلما ابتعدنا عن المصدر . فالجسيم الاقرب الى المصدر يبدأ** بالحركة الاهتزازية قبل الجسيم الا بعد عنه وهكذا..

11 – 1 سرعة الموجة وسرعة الجسيم

عندما تتقدم الموجة خلال وسط مادي مرن فان جسيمات ذلك الوسط تهتز حول مواضع توازنها. والحركة الاهتزازية لاي جسيم هي حركة ذهاب واياب حول موضع توازنه ، لذلك فان سرعته تتغير بالمقدار والاتجاه وتكون سرعة الجسيم في ذروتها عندما يعبر نقطة توازنه وتتلاشى عندما يصل اقصى ازاحة له عن موضع التوازن وكلما كان معدل اهتزاز الجسيم عالياً فان عدد مرات الذهاب والاياب حول موضع التوازن عالياً لذلك سعة الحركة الاهتزازية يكون عادة صغيراً جداً . وفي الموجات الصوتية في الهواء لاتتجاوز سعة الحركة للجزيئات بضع الاجزاء من الالف من المليمتر ، لذلك فان اقصى سرعة لحركة الجسيم تكون صغيرة جداً بالمقارنة مع سرعة الموجة . ان الموجة تتقدم بسرعة ثابتة تعتمد على طبيعة الوسط . من هذا يتضح ان سرعة الموجة مقدار ثابت بينما سرعة الجسيم مقدار

متغير وان اقصى سرعة للجسيم هي اقل بكثير من سرعة الموجة .ان الموجة تتقدم باتجاه واحد مبتعدة عن مصدر توليدها بينما جسيمات الوسط تتذبذب حول مواضع توازنها على مسار موازي او عمودي على اتجاه تقدم الموجة وذلك حسب صنفها طولية او مستعرضة . وسوف يتم دراسة العلاقة الكمية بين سرعة الجسيم وسرعة الموجة بشيء من التفصيل في الفصلين السادس والسابع .

1·12 التمثيل الرياضي للحركة الموجية

يمكن التعبير عن الحركة الموجية بصيغة رياضية بدلالة دالة تصف الموجة في اي موقع وزمن . ومثل هذه الدالة تدعى ب (دالة الموجة) . وهذه الدالة يمكن ايجادها على اساس حقيقتين هما :

1 - ان الموجة تتقدم بسرعة ثابتة (يرمز لها بالحرف c)
2 - ان شكل الموجة يبقى ثابتا ولايتغير اثناء التقدم مالم يكن الوسط مشتتاً

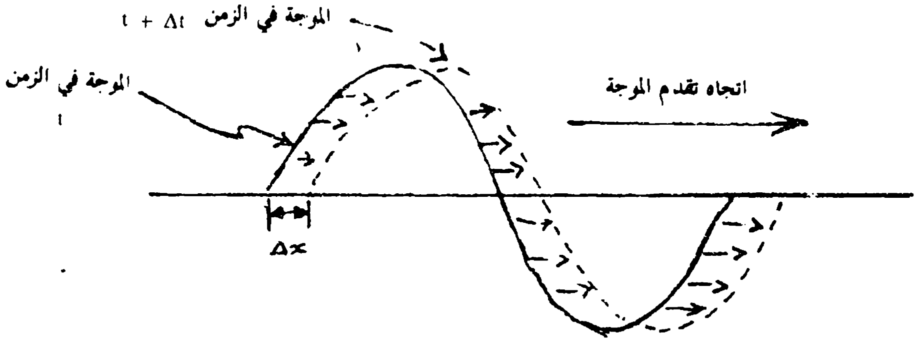
والشكل (1·17) يبين شكلا من الاضطراب يتقدم بالاتجاه الموجب على المحور السيني x

الشكل (1·17) يبين ان الموجة تتقدم بسرعة ثابتة ولايتغير شكلها اثناء التقدم .

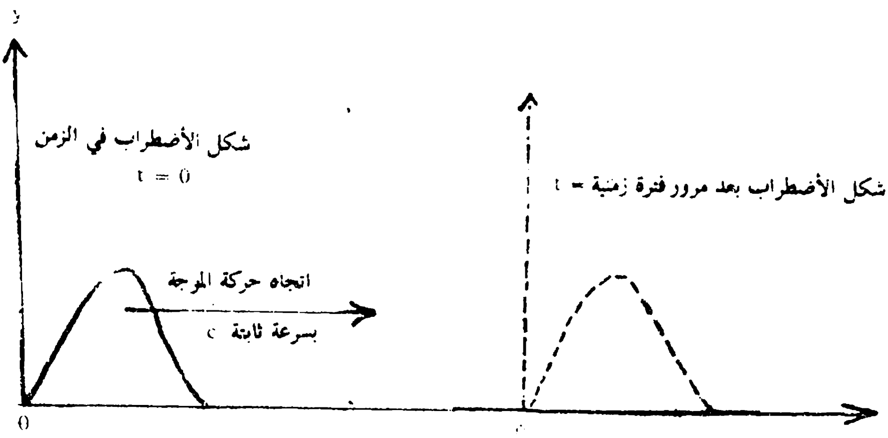
يلاحظ من هذا الشكل ان كل النقاط على الموجة في الزمن t قد تقدمت بنفس الاتجاه بمسافة واحدة Δx خلال نفس الفترة الزمنية Δt . مما يشير الى ان الموجة قد تقدمت دون ان يرافقها تشوه في الشكل وان سرعة تقدمها تساوي $\frac{\Delta x}{\Delta t} = c$ وهذه السرعة تكون ثابتة في الوسط الواحد .

وللسهولة سنقتصر فيما يلي على تقديم وصف رياضي للحركة الموجية في بعد واحد .

لنفرض ان لدينا سلكا مرنا طويلا جدا ومشدودا افقيا ، ونفرض انه كان في البداية ساكنا . نختار المحورين المتعامدين Y,X ونتصور ان السلك واقع على امتداد المحور الافقي X . ونقطة الاصل في الموضع O نفرض الان ان السلك قد اعطي هزة خفيفه وسريعة في نقطة تقع على يسار نقطة الاصل ، فيتشكل اضطراب يتقدم بسرعة ثابتة نحو اليمين ولايتغير شكله اثناء التقدم . فاذا اخذت صورة سريعة للاضطراب اثناء مروره فان السلك يبدو مشوها موضعيا على شكل منحني . هذا المنحني يشير الى المظهر الجانبي للاضطراب الذي يمثل موجة مستعرضة كما مبين في الشكل (1·18)



الشكل (1·17) يبين ان الموجة تتقدم بسرعة ثابتة ولايتغير شكلها أثناء التقدم .



الشكل (1·18) يبين شكل الأضطراب المتقدم على السلك .
ان شكل الأضطراب يبقى ثابتاً ويتحرك بسرعة ثابتة c

ويمكن أخذ قيمة الازاحة المستعرضة y في اية نقطة x على امتداد السلك كمقياس للاضطراب (الموجة) في تلك النقطة في الزمن t . لنفرض اننا بدأنا رصد الاضطراب المتقدم في الزمن $t = 0$ ان شكل الاضطراب في هذه اللحظة ($t = 0$) يمكن وصفه من خلال دالة الموجة .

$$y = f(x) \qquad (1\cdot13)$$

حيث x مقاسة بالنسبة لنقطة الأصل الثابتة O .

ولما كان الاضطراب يتقدم في الاتجاه الموجب دون ان يتغير شكله وبسرعة ثابتة c فان دالة الموجة تصبح بعد مرور زمن t كالاتي

$$y = f(x') \qquad \text{............... (1.14)}$$

حيث x' مقاسة بالنسبة لنقطة الاصل المتحركة o' . o تقع بالنسبة لشكل الاضطراب في الزمن t كما تقع o بالنسبة لشكل الاضطراب في بداية الرصد $(t = 0)$ ان المعادلتين (1.13) ، (1.14) تصفان شكل نفس الاضطراب في زمنين وموقعين مختلفين .

من الواضح انه ليس من المناسب وصف شكل الاضطراب المتحرك بالنسبة لنقطتين للاصل احداهما ثابتة o والاخرى مرافقة للاضطراب المتحرك o' . لذلك يفضل وصف شكل الاضطراب في اي موقع x وزمن t بالنسبة لنقطة الاصل الثابتة o . لهذا الغرض يجب اجراء تحويل لنقطة الاصل من o' الى O

من الشكل (1.19) يلاحظ ان المسافة بين o' o تساوي ct . وان اي نقطة مثل p على الشكل الموجي في الزمن t يمكن تحديد موقعها على المحور السيني بالنسبة لنقطة الاصل الثابتة o من المعادلة :

$$x = ct + x'$$

$$\therefore x' = (x - ct)$$

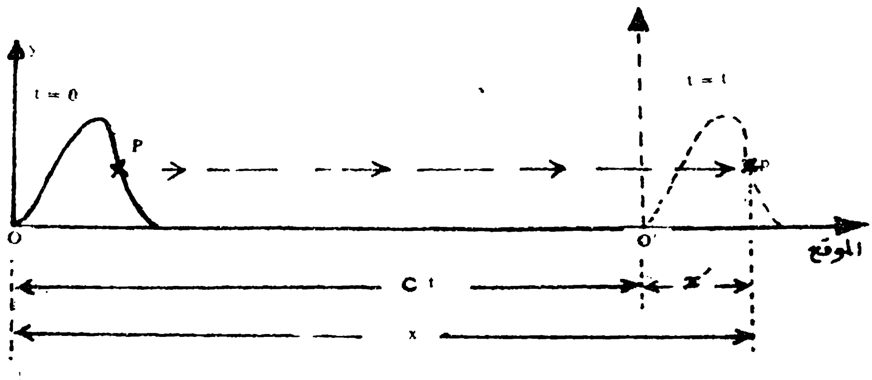
نعوض في المعادلة (1.14) فتصبح دالة الموجة كالاتي :

$$y = f(x - ct) \qquad \text{............... (1.15)}$$

هذه الدالة ذات اهمية خاصة في موضوع الحركة الموجية . انها تعرف تماما اي موجة مستعرضة ثابتة الشكل تتحرك بسرعة منتظمة c في الاتجاه الموجب على امتداد المحور السيني .

وبنفس الطريقة يمكن ايجاد دالة الموجة المستعرضة المتحركة بسرعة منتظمة c في الاتجاه السالب على امتداد المحور السيني ، وهي

$$y = f(x + ct) \qquad \ldots(1\cdot16)$$



الشكل (1·19) يبين كيف ترتبط نقطة الأصل المتحركة O مع نقطة الأصل الثابتة O

ان الدالة f تصف حركة نبضة بسرعة ثابتة في زمنين مختلفين كما في المعادلة

$$y = \frac{a^3}{a^2 + (x \pm ct)^2} \qquad \ldots(1\cdot17)$$

حيث a مقدار ثابت . والاشارة الموجبة داخل القوس تشير الى تحرك النبضة في الاتجاه السالب بينما الاشارة السالبة تشير الى تحركها في الاتجاه الموجب على المحور السيني .

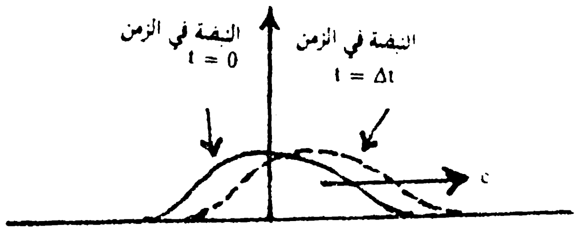
وهيئة هذه النبضة موضح في الشكل (1.20)

ان الدالة f قد تصف شكل موجي جيبـي كما في المعادلة

$$y = b \sin k(x \pm ct) \qquad \ldots(1\cdot18)$$

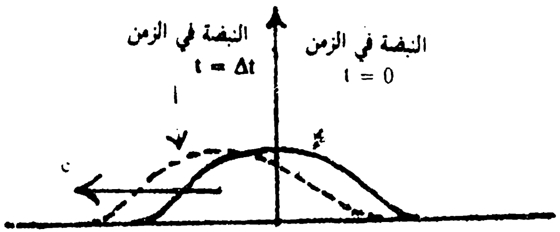
حيث b و k ثوابت . والاشارة الموجبة داخل القوس تشير الى تحرك الموجة من اليسار الى اليمين والاشارة السالبة تشير الى تحركها بعكس الاتجاه على امتداد المحور السيني .

وهيئة هذه الموجة موضح في الشكل (1·21)



(أ) النبضة تتحرك نحو اليمين بسرعة ثابتة
وشكلها ثابت تصفه المعادلة

$$y = \frac{a^3}{a^2 + (x - ct)^2}$$

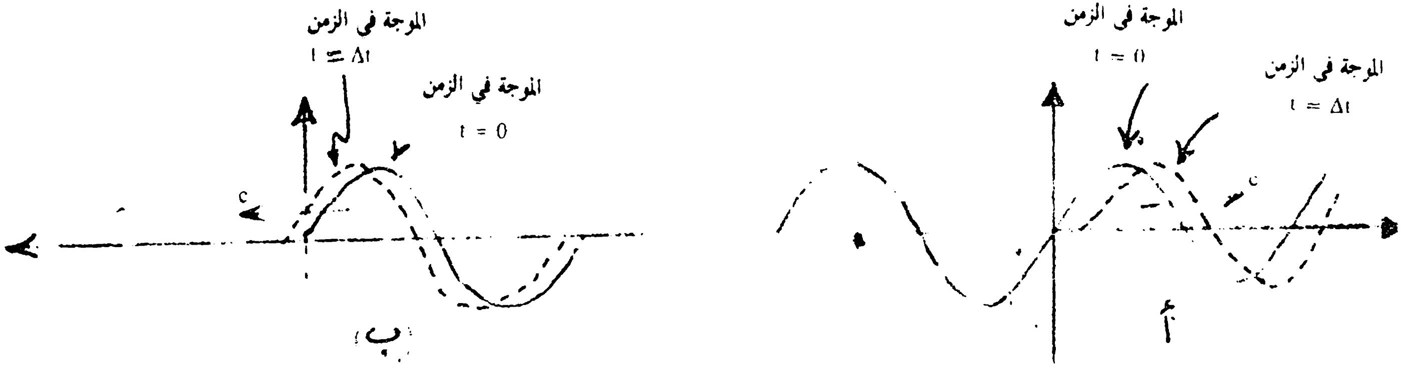


(ب) النبضة تتحرك نحو اليسار بسرعة ثابتة c
وشكلها ثابت تصفه المعادلة

$$y = \frac{a^3}{a^2 + (x + ct)^2}$$

الشكل (1-30) يبين شكل النبضة في زمنيين مختلفين t = 0 و t = Δt عندما تتحرك نحو اليمين او اليسار.

الشكل 2.1 يبين شكل موجة جيبية في زمنين مختلفين $t = 0$ ، $t = \Delta t$ عندما تتحرك نحو اليمين أو اليسار .



(أ) موجة جيبية تتحرك نحو اليمين بسرعة ثابتة c وشكلها ثابت تصفه المعادلة $y = b \sin k (x - ct)$

(ب) موجة جيبية تتحرك نحو اليسار بسرعة ثابتة c وشكلها ثابت تصفه المعادلة $y = b \sin k (x + ct)$

وهناك اشكال كثيرة للموجات يمكن وصف اي منها من خلال دوال مرفوعة لقوى معينة أو دوال جيبية أو أسية أو غيرها . والمهم في جميع هذه الدوال ان يعبر عن الازاحة المستعرضة y بدلالة $(x \pm ct)$ ، ويفترض طبعاً في جميع هذه الموجات انها تتحرك بسرع منتظمة وتحتفظ بشكلها ثابتاً خلال الحركة . *

13 - 1 المعادلة العامة للحركة الموجية

ان المعادلتين (1·15) و (1·16) هما دالتان لمتغيرين . ولايجاد y يجب ان نعرف قيم المتغيرين t,x (وطبعا يجب ان نعرف ايضاً شكل الموجة الذي تحدده الدالة f وسرعة انتقالها c لكنهما ثابتان) . وفيزياويا هذا يعني انه يمكن تحديد الاضطراب (الازاحة) y في نقطة على السلك اذا علمنا موقع تلك النقطة x والزمن t الذي نرغب فيه تحديد الاضطراب .

ان المعادلتين (1·15),(1·16) تصفان نفس الشكل الموجي المتحرك في اتجاهين متعاكسين ، لذا فان أيا من المعادلتين لا تقدم وصفاً كاملاً للحركة الموجية ، لذلك ينبغي البحث عن معادلة واحدة تعطي وصفاً عاماً كاملاً للحركة الموجية بغض النظر عن شكل الموجة واتجاه انتقالها . ويمكن الحصول على مثل هذه المعادلة اذا تخلصنا من اي اشارة الى دالة الموجة f واتجاه انتقالها .

في المعادلة (1·15) نفرض أن

$$z = x - ct \qquad \ldots(1\cdot17)$$

فنحصل على

$$y = f(x - ct) = f(z)$$

نفاضل بالنسبة للزمن t فينتج

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$$

(حيث يشير الرمز ∂ للتفاضل الجزئي و d للتفاضل الكلي)

ان $\frac{df}{dz}$ تشير الى مشتقة f بالنسبة لكل المقدار . argument (x-ct) لكن من (1·17) نجد أن

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -c$$

* في حالة كون الوسط مشتتاً (dispersive medium) فان سرعة الموجة لاتكون ثابتة بل تتوقف على الطول الموجي ، وشكل الموجة لايكون ثابتا في هذه الحالة

لذلك فان

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -c\frac{df}{dz} \qquad \ldots(1\cdot18)$$

وبالمثل نفاضل y بالنسبة لـ x فينتج

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$

لكن من (1·17) نجد أن

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 1$$

P·69

لذلك فإن

$$\frac{\delta y}{\delta t} = \frac{df}{dz} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.19)$$

وبحذف $\frac{df}{dz}$ بين المعادلتين (1·18) و (1·19) فنحصل على

$$\frac{\delta y}{\delta t} = -c\frac{\delta y}{\delta x} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.20)$$

الآن نكرر نفس العملية . ولكن نبدأ من المعادلة (1·16) فنفرض أن

$$w = x + ct \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.21)$$

فنحصل على

$$y = f(x + ct) = f(w)$$

نفاضل y بالنسبة للزمن t فنحصل على

$$\frac{\delta y}{\delta t} = \frac{df}{dw}\cdot\frac{\delta w}{\delta t}$$

لكن من (1·21) نجد أن

$$\frac{\delta w}{\delta t} = +c$$

لذلك فإن

$$\frac{\delta y}{\delta t} = +c\,\frac{df}{dw} \qquad \text{.............. (1.22)}$$

ثم نفاضل y بالنسبة لـ x فنحصل على

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{df}{dw}\cdot\frac{\delta w}{\delta x}$$

لكن من (1·21) نجد أن

$$\frac{dw}{dx} = 1$$

لذلك فان

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{df}{dw}. \qquad \text{.............. (1.23)}$$

وبحذف $\frac{df}{dw}$ بين المعادلتين (1·22) و (1·23) نحصل على

$$\frac{\delta y}{\delta t} = +c\,\frac{\delta y}{\delta x} \qquad \text{.............. (1.24)}$$

وبمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (1·20) نجد انهما متشابهتان ولكنهما غير متطابقتين بسبب اختلاف الاشارة الناتجة من اختلاف اتجاه انتقال الموجة في المعادلتين (1·15) و (1·16) الآن نحاول التخلص من اختلاف الاشارة .

نفاضل المعادلة (1·18) مرة ثانية بالنسبة للزمن t فينتج

$$\frac{\delta^2 y}{dt^2} = -c\,\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{df}{dz}\right)$$

$$= -c\,\frac{d}{dz}\left(\frac{df}{dz}\right)\frac{\delta z}{\delta t}$$

لكن

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{df}{dz}\right)=\frac{d^2f}{dz^2}\text{ ،}$$

ومن المعادلة (1·17) لدينا

$$\frac{\partial z}{\partial t}=-c$$

لذلك فإن

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\frac{d^2f}{dz^2} \qquad \ldots(1\cdot25)$$

وبالمثل نفاضل (1·23) بالنسبة ل x فنجد أن

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{dw}\right)$$

$$=\frac{d}{dw}\left(\frac{df}{dw}\right)\frac{\partial w}{\partial x}$$

لكن

$$\frac{d}{dw}\left(\frac{df}{dw}\right)=\frac{d^2f}{dw^2}$$

ومن المعادلة (1·21)

$$\frac{dw}{dx}=1$$

لذلك فأن

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{d^2f}{dw^2} \qquad \ldots(1\cdot26)$$

وأخيراً ، بحذف $\frac{d^2f}{dw^2}$ بن المعادلتين (1·25) و (1·26) نحصل على

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \ldots(1\cdot27)$$

.. هي المعادلة العامة للحركة الموجية في بعد واحد وان C يمثل سرعة انتقال الموجة .. على خواص الوسط . انها معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية . وتكمن أهمية هذه المعادلة بالنسبة للموجات الخاضعة لها أنها مستقلة تماماً عن شكل الموجة وأتجاه انتقالها . ..اً ما تظهر هذه المعادلة لتمثل مختلف أنواع وأصناف الحركات الموجية في الفيزياء .

أمثلة محلولة

مثـــال (1-1)

ماهي العلاقة بين الطول الموجي λ وسرعة الموجة c والتردد f لأي موجة ؟

الحـــل

يعرف الزمن الدوري T بأنه الزمن اللازم للجسيم المهتز لكي يكمل دورة واحدة (او أهتزازة واحدة) .

ويعرف التردد f بأنه عدد الاهتزازات التي ينجزها الجسيم المهتز في الثانية الواحدة .

ان الزمن اللازم لأكمال f أهتزازة = 1 ثانية

لذلك فأن الزمن اللازم لأكمال أهتزازة واحدة = $\frac{1}{f}$ ثانية .

ولكن من التعريف لدينا أن الزمن الدوري للأهتزاز هو T وهو الزمن اللازم للجسيم المهتز لأكمال أهتزازة واحدة .

وعليه فان

$$T = \frac{1}{f} \qquad ...(1)$$

ان الجسيم المهتز يستغرق زمن دوري T لكي يبث طولاً موجياً كاملاً . وخلال هذا الزمن تكون الموجة قد أكتسحت مسافة طولها λ .

وبما أن سرعة الموجة تساوي المسافة التي تقطعها الموجة في الثانية الواحدة . وأن

السرعة = المسافة / الزمن

وحيث أن الطول الموجي λ هو المسافة التي تتحركها الموجة في الزمن الدوري T لذلك

فأن

$$c = \frac{\lambda}{T} \qquad ...(2)$$

نعوض T من المعادلة (1) في المعادلة (2) فنحصل على

$$c = f\lambda$$

وهذه العلاقة الهامة تنطبق على جميع أنواع الموجات .

مثال (1-2)

اذا كان تردد جسيم مهتز هو 400هيرتز وسرعة الصوت في الهواء هي 320 متر في الثانية . جد المسافة التي يقطعها الصوت الناتج من أهتزاز الجسيم عندما يكمل الجسيم 30 أهتزازة فقط ؟

الحل

لدينا f = 400 هيرتز
c = 320 م / ثا
λ = ?

ومن العلاقة

$$c = f\lambda$$

نجد ان

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{320}{400} = 0\cdot8 \text{ متر}$$

وعليه فأن المسافة التي تقطعها الموجة عندما يكمل المهتز أهتزازة واحدة كاملة = 0·8 متر.
والمسافة التي تقطعها الموجة عندما يكمل المهتز 30 أهتزازة = 0·8 × 30 = 24 متر .

ويجب أن يلاحظ الطالب أنه طالما كان الجسيم المهتز (اوالمصدر) مستمراً على الأهتزاز فأن سلسلة من الموجات المتتابعة تتولد باستمرار وتتقدم الواحدة بعد الاخرى بنفس السرعة C مادام الوسط هو نفسه ، ويتغير مع تغير الوسط

اسئلـــة

1 - 1 عدد طرق انتقال الطاقة في الفيزياء . ثم بين هل يمكن ان تنتقل الطاقة في الفراغ ؟

1 - 2 كيف تتمكن عملياً من اثبات ان الموجة مصحوبة بطاقة .

1 - 3 وضح مفهوم كل من (أ) الموجة (أو الحركة الموجية).
(ب) الاضطراب . (ج) النبضة .

1 - 4 ما هي الشروط التي يجب توفرها لكي تتولد موجة مستعرضة في الوسط المادي .

1 - 5 عدد أنواع الحركة الموجية في الفيزياء . واذكر امثلة لكل منها .

1 - 6 ما هي الحركة الموجية الميكانيكية ؟ وما هي اصنافها ؟ ولأي صنف من هذه الاصناف تنتمي الموجات الصوتية ؟

1 - 7 ما هي المرونة وما هي حدود المرونة . اشرح بالتفصيل ووضح اهمية ذلـك عملياً ونظرياً .

1 - 8 ما هو القصور الذاتي وكيف يمكن قياسه .

1 - 9 ما هي أهم خواص الوسط المادي اللازمة لحدوث وانتقال الموجة الميكانيكية ؟ اذكرها وبين تأثير كل منها بالتفصيل .

1 - 10 أيهما أكثر مرونة المطاط أم الحديد ؟ الهواء أم الماء ؟

1 - 11 ما هي الخواص التي تحدد سرعة الموجة الميكانيكية في وسط ما . وهل قيمة هذه السرعة واحدة لجميع الاطوال الموجية في الوسط الواحد ؟ وضح .

1 - 12 عرف كل من (أ) معامل يونك (ب) معامل المرونة الحجمي (ج) معامل الصلابة . واذكر العلاقة بين هذه المعاملات .

1 - 13 عرف معاملات المرونة للاجسام الصلبة . وهل تنطبق هذه المعاملات على الموائع ؟ وضح ذلك .

1 - 14 وضح لماذا تختص الموائع بمعامل المرونة الحجمي فقط . اذ ليس لها معامل يونك وليس لها معامل قص .

1 - 15 اذكر قانون هوك . وبين ان كل جزء من اجزاء السلك المتوتر الذي تمر خلاله نبضة يخضع لقوة قانون هوك .

1 - 16 ارسم العلاقة البيانية بين الاستطالة والقوة لمادة تخضع لقانون هوك .

1 - 17 ما نوع المرونة المستخدم في : (أ)كعب مطاطي (ب) محور مقود السيـارة

(جـ) ملف حلزوني (د) حامل المروحة السقفية (هـ) المضخة الماصة أو الكابسة (لرفع الماء) .

1 - ثلاث كرات مصنوعة من الرصاص والالمنيوم والخشب وجميعها بنفس الحجم . ناقش خاصية القصور الذاتي (الاستمرارية) لكل منها ثم رتبها تصاعدياً .

1 - 1 لماذا يمكن للموجات الكهرومغناطيسية ان تنتقل في الفراغ بينما لا يمكن ذلك للموجات الصوتية .

1 - 2 لماذا لا يمكن للموجات الميكانيكية عموماً ان تنتقل في الفراغ ؟

1 - 2 اشرح تجربة بسيطة توضح الموجات الطولية والمستعرضة وبين مما تتألف كـــل منهما .

1 - 2 من وجهة نظر المرونة توصف الاجسام بانها متجانسة اذا كانت معامـــلات مرونتها متساوية المقدار في جميع الاتجاهات . اشرح معنى ذلك بالتفصيل ؟

1 - 2 اشرح كيف يصل الصوت من الجسم المهتز الى آذاننا ؟

1 - 2 ارسم شكلاً يوضح موجتين مستعرضتين :

(أ) لهما نفس الطول الموجي ولكن سعتهما كنسبة 1:2

(ب) لهما نفس السعة والطول الموجي ولكن فرق الطور بينهما 90 درجة .

1 - 25 مصدر يولد نبضتين احداهما طولية والاخرى مستعرضة ، وتنتقل هاتيـن النبضتين في الوسط بسرعتين معلومتين . كيف يمكن ايجاد بعد النبضة المنتقلة عن نقطة تولدها .

1 - 26 قرع طبل لفترة زمنية قصيرة ، وبعد فترة زمنية أصبح الصوت غير مسموع . تابع الموجات الصوتية والطاقة التي تنقلها من لحظة تولدها حتى اللحظة التي أصبحت فيها غير مسموعة .

1 - 27 شوكة رنانة لها تردد معين تهتز مرة في الهواء ومرة تحت سطح الماء فهل يكون (أ) التردد المسموع واحد في الحالتين ؟ (ب) هل يكون الطول الموجي واحد في الحالتين ؟ اشرح .

1 - 28 هل يمكن توليد حركة موجية تهتز فيها جسيمات الوسط بحركة زاوية اهتزازية ؟ واذا وجدت هذه الموجة اشرح كيفية تولدها وصفها

1 - 29 هل موجات اللي طولية أم مستعرضة ؟ وهل يمكن اعتبارها تركيباً لموجتين احداهما طولية والاخرى مستعرضة .

1 - 30 هل هناك حركة موجية تتوقف سرعتها على طولها الموجي ؟ اذكر أمثلة على ذلك وبين السبب ؟

1 - 31 اذا انتقلت موجة من وسط الى آخر فما هي التغيرات المتوقعة في (أ) سرعة الموجة (ب) التردد (ج) الطول الموجي .

1 - 32 عندما يحدث انفجار في منطقة مفتوحة يسمع صوت مفاجىء لفترة زمنية قصيرة ثم يختفي ولكن عندما يحدث الانفجار في منطقة مغلقة يستمر الصوت لبعض الوقت ثم يتلاشى تدريجياً ، اشرح ما يحدث للطاقة الصوتية المنبعثة في الحالتين .

1 - 33 ما هي الموجة المادية . اذكر تجربة توضح السلوك الموجي للجسيم المادي ؟

1 - 35 ما هي العلاقة بين سرعة الجسم والطول الموجي المصاحب لحركته .

1 - 34 رتب الطول الموجي في الحالات الآتية تصاعدياً :

(أ) ألكترون سرعته 50 كيلومتر في الثانية

(ب) طلقة سرعتها 50 كيلومتر في الدقيقة

(ج) سيارة سرعتها 50 كيلومتر في الساعة .

1 - 36 افرض ان نبضة موجة مستعرضة في سلك وعند زمن $t = o$ تعطى بـ

$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

وان X,y مقاسة بالمتر. وإذا كانت سرعة النبضة 2 م/ثانية والنبضة تتحرك بالاتجاه الموجب ، اكتب شكل الموجة عند $t = 1$ Sec, وعند $t = 2$ Sec

مسائــل

1 – 1 علق جسم كتلته ١ كغم في طرف سلك من الحديد طوله 0.5 م وقطره 0.80 8.80 ملمتر . ما مقدار استطالة السلك تحت تأثير هذا الحمل ؟

1 – 2 استخدم سلك من النحاس مساحة مقطعه العرضي 0.005 سم مربع في رفع جسم كتلته 150 غم . بأي تعجيل يجب ان يرفع الجسم اذا كانت استطالة السلك المسموح بها لا تزيد عن 0.10 ٪ ؟

1 - 3 تعرف الأنضغاطية الحجمية بأنها مقلوب معامل المرونة الحجمي . فاذا كانت الأنضغاطية الحجمية للفولاذ هي 0.6×10^{-11} متر مربع لكل نيوتن . أحسب مقدار التغير النسبي في حجم قضيب من الفولاذ اذا وضع القضيب في غرفة تفريغ ثم فرغت الغرفة من الهواء تماماً ؟

1 - 4 ما مقدار الزيادة في الضغط اللازم تسليطه لكي ينكمش حجم من الماء بمقدار 1 ٪ اذا علمت ان الانضغاطية الحجمية للماء هي 50×10^{-11} متر مربع لكل نيوتن

1 - 5 سلك منتظم المقطع نصف قطره r يتألف من جزئين متصلين . الجزء الاول من النحاس طوله L_1 والجزء الثاني من الحديد طوله L_2 فاذا علق ثقل مقداره W . اثبت ان الزيادة الكلية في طول السلك هي

$$\frac{W}{\pi r^2 Y_1 Y_2} (L_1 Y_2 + L_2 Y_1)$$

علق على مدى صحة هذه النتيجة .

1 - 6 مكعب من الجيلاتين أبعاده (5 سم × 5 سم × 5 سم) سلطت على سطحه العلوي قوة مماسية مقدارها 0.5 نيوتن فازاحته مسافة قدرها 2.0 ملم في اتجاه القوة . احسب معامل القص للجيلاتين .

1 - 7 احسب كثافة الماء عند قاع بحيرة عمقها 150 متراً اذا كان معامل المرونـــة الحجمي للماء هو 21000 ضغط جوي علماً ان كثافة الزئبق هي 13600 كلغم لكل متر مكعب والتعجيل الارضي 9.8 م / ثا ٢ .

1 - 8 قضيب خفيف طوله L علق من طرفيه بواسطة سلكين B, A متساويين في الطول ومساحة مقطعهما a, b على التوالي . فاذا كان معامل يونك للسلكين هو Y_b, Y_a فأوجد موضع النقطة التي يمكن عندها تعليق ثقل W حتى يتساوى الاجهاد في السلكين . وكذلك موضع النقطة التي يتساوى عندها الانفعال (المطاوعة)

9 - 1 ثبت ان الطاقة المختزنة في جسم مجهد حجمه V هي

$$\frac{1}{2} \quad \frac{K}{V} (\Delta V)^2$$

حيث ان ΔV تمثل مقدار التغير في الحجم و K تمثل معامل المرونة الحجمي .

10 - 1 مكعب من الصلب طول ضلعه 50 سم عندما يكون تحت ضغط جوي واحد فاذا تعرض الى ضغط مقداره 21 ضغط جوي فما هو مقدار التغير في حجم المكعب اذا علم ان معامل المرونة الحجمي هو 10^{11} نيوتن لكل متر مربع .

11 - 1 اثبت ان نسبة بويسون تساوي 0.5 للمواد التي لا يتغير حجمها تحت تأثير اجهاد الشد .

12 - 1 اثبت ان معامل المرونة الحجمي لغاز مثالي في حالة ثبوت درجة الحرارة يساوي ضغط الغاز .

13 - 1 اذا كان معامل المرونة الطولي لسلك البيانو هو 8.26×10^8 نيوتن لكل متر مربع فهل يمكن ان يستطيل السلك الذي طوله ١ م بمقدار 8.00 ملم بدون ان يتجاوز حدود مرونته ؟

14 - 1 اذا كانت كثافة ماء البحر هي 1.03 غم / سم مكعب عند سطح الماء . فما هي الكثافة عند القعر حيث الضغط هو 109 داين لكل سم مربع .

15 - 1 مكعب من المطاط ازيح سطحه الاعلى مسافة 0.5 سم بقوة مماسية مقدارها 0.5 نيوتن فما هو معامل القص للمطاط .

16 - 1 قالب مكعب من الاسفنج طول ضلعه 30 سم سلطت عليه قوتان متوازيتان ومتعاكستان مقدار كل منهما 10 نيوتن على وجهين متقابلين فسببت زاوية قص مقدارها 0.020 بمقياس نصف قطري . احسب الازاحة النسبية . ومعامل القص ؟

17 - 1 سلك طوله الطبيعي L_0 مثبت من طرفه الاعلى . يزداد طوله بمقدار $L_0 10^{-3}$ عندما يعلق بطرفه الاسفل كتلة ما . واذا ربط نفس السلك افقياً بين النقطتين A، B المسافة بينهما L_0 ووضعت نفس الكتلة السابقة في منتصف المسافة بين النقطتين . فما هي المسافة التي ينخفضها مركز السلك وما هو التوتر في السلك ؟

18 - 1 في الثلاثين من حزيران عام 1908 حدث انفجار مروع في سيبريا (ويقال انه نتيجة سقوط نيزك هائل) وسمع صوت الانفجار على بعد 500 كيلومتر . فما هو

الزمن المستغرق بين لحظة حصول الانفجار ولحظة وصول الموجات الصوتية في موقع الاستماع . اعتبر أن سرعة الصوت منتظمة وتساوي 340 متر / ثا .

19 - 1 اذا كان تردد الموجات الكهرومغناطيسية المستخدمة لنقل الاشارات التلفزيونية هي حوالي 10^8 هيرتز . فكم هو الطول الموجي لهذه الموجات . اعتبر ان سرعة الموجات الكهرومغناطيسية هي 3.0×10^8 م / ثا .

20 - 1 يسمع صوت الرعد بعد 5 ثانية من رؤية البرق . وعلى اعتبار ان سرعة الضوء أكبر بكثير من سرعة الصوت ، فكم هو بعد البرق ؟

21 - 1 احسب سرعة الصوت في (أ) قضيب رفيع من الحديد (ب) قالب كبير من الحديد

علماً أن معامل يونك = 10^{12} داين لكل سم مربع

نسبة بويسون = 0.3

كثافة الحديد = 8 غم / سم مكعب

22 - 1 اذا كانت سرعة الموجات المستعرضة في سلك طوله 25 م هي 50 م / ثـا عندما يكون الشد 200 نيوتن فما هي كتلة السلك .

23 - 1 احدثت نبضتان في سلك مشدود احداهما طولية والاخرى مستعرضة . ناقش ايهما تنتقل بسرعة أكبر .

24 - 1 قضيب معدني طويل جداً كثافة مادته 8.7 غم / سم مكعب ومعامل مرونته الطولي 1.2×10^{12} داين لكل سم مربع فاذا طرق من أحد طرفيه بمطرقة احسب سرعة انتقال النبضة التضاغطية خلال مادة القضيب .

الفصل الثاني

نظريـة الاهتـزاز الحـر

٩٩/٩١٣٤

I.S.B.N. 977-238-685-2

1 - 2 مقدمـــة

ان توليد أي حركة موجية كالصوت مثلاً يقتضي بالضرورة وجود جسم مهتز . ومـا الحركة الموجية في الحقيقة الا حركة اهتزازية لجسيمات الوسط الناقل للموجة . من هذا يتضح ان المصدر للحركة الموجية هو الجسم المهتز وان انتقال الحركة الموجية يتم بواسطـــة جسيمات الوسط ، ومن هنا تبرز أهمية دراسة ومعرفة طبيعة الحركة الأهتزازية بأعتبارهـا المدخل لفهم الحركة الموجية .

FAX: (9611) 351433 ATT.: MR. HASSAN EL - ZEIN
FAX: (202) 8924657 ATT.: MR. HASSAN EL - ZEIN

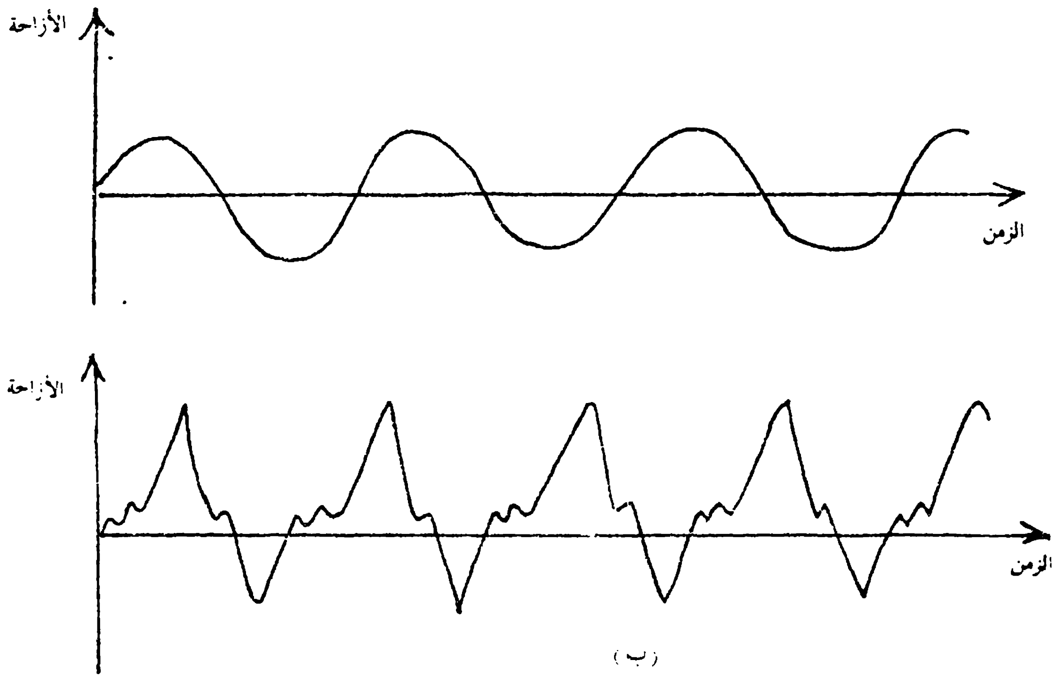
ان كل جسم في الطبيعة يمتلك القدرة على الأهتزاز ، فهو أما أن يهتز كقطعة واحدة اوأن تهتز مختلف أجزائه بطرق عديـدة ومختلفة. وعموماً تكون الأهتزازات الطبيعية للأجسام الصغيرة سريعة بينما للأجسام الكبيرة تكون بطيئة وهذا يعتمد على طريقة أثارة الأهتزاز . وفي جميع تحليلاتنا النظرية للحركة الأهتزازية سنلجأ الى تطبيــــق قوانين نيوتن في الحركة على مختلف النماذج الميكانيكية المهتزة للوصول الى الصيغـــــة الرياضية المناسبة لأيجاد التردد الطبيعي الذي يعتبر أهم خاصية من خواص الجسم المهتز الى جانب تفسير سلوكه الأهتزازي .

A.D-2000 - H 1421

2 - 2 الحركة الاهتزازية

ان كل جسم يمتلك خاصيتي المرونة والقصور الذاتي له القابليـــة على الأهتـــزاز اذا ماأستثير . وما الأهتزاز بالأساس الا حركة ذهاب وأياب حول نقطة ثابتة تدعى بموضـــع التوازن او الأستقرار . وهي نقطة تنعدم فيها محصلة القوى المؤثرة في الجسيم المهتز وتمثل

نقطة سكونه عندما يتوقف عن الأهتزاز . والسمة الجوهرية في جميع الظواهر الأهتزازية هي الصفة الدورية . أي أن هناك نمطاً من الحركة يتكرر بفترات زمنية منتظمة. ان الحركة الدورية لأي جسم مهتز تعرف بأنها حركة في مسار محدد تتكرر في فترات زمنية متساوية. وقد يكون مسار هذه الحركة بسيطاً أو معقداً كما مبين في الشكل (1 - 2) .



الشكل (2-1) جس حركتين دوريتين (أ) بسيطة (ب) معقدة .

وفي الحقيقة ان الحركة الاهتزازية المعقدة الشكل تتألف من مجموعة كبيرة متداخلة من الحركات الاهتزازية البسيطة . لهذا السبب ولسهولة المعالجة الرياضية ستقتصر دراستنا في هذا الفصل على الحركة الاهتزازية البسيطة فقط .

ان كل الأجسام في الطبيعة مهما كان شكلها او حجمها قادرة على الأهتزاز عندما ندفعها لذلك . فالأجسام الضخمة كالبنايات والمكائن والطائرات والسفن تهتز أهتزازات معقدة جداً ونادراً ماتهتز كل أجزائها كمجموعة واحدة وبنمط واحد ولذلك تعتبر مثل هذه الأجسام مصادر أهتزاز معقدة . ان التعقيدات المرتبطة بتحليل مثل هذه الأهتزازات

والطرق الرياضية المتقدمة التي يستلزم استخدامها تحتم أرجاء دراستها في الوقت الحاضر، والأقتصار في هذه المرحلة على دراسة مصادر الاهتزاز البسيطة. وأبسط الاجسام المهتزة هي عبارة عن «جسيم». والمقصود بالجسيم هو أي جسم صلب وصغير لايتغير حجمه ويتحرك كقطعة واحدة، ومن وجهة نظر إحصائية يمكن معاملة اي مجموعة من الجزيئات لها سلوك وخواص مشتركة وتتحرك كقطعة واحدة باعتبارها جسيم. إن دراسة الحركة الاهتزازية لاي جسيم يخضع لقوة استعادة نحو نقطة ثابتة، تساعد كثيراً في فهم سلوك مختلف الاجسام الحقيقية المهتزة مهما كانت درجة تعقيدها. لهذا الغرض سنركز دراستنا في هذا الفصل على حركة الجسيم في أبسط حركة اهتزازية. وأبسط أنواع الحركة الاهتزازية هي الحركة التوافقية البسيطة الخطية.

3 – 2 إن الحركة الخطية التوافقية البسيطة

ان الحركة الخطية التوافقية البسيطة هي حركة أهتزازية تمثل أبسط انواع الحركة الدورية على الاطلاق. الحركة الخطية التوافقية البسيطة المثالية لاي جسيم منفرد تعرف بانها حركة ذلك الجسيم على خط مستقيم بتعجيل يتناسب مقداره طردياً مع ازاحته عن نقطة ثابتة تمثل موضع توازنه واتجاهه يكون دائماً متجهاً نحو تلك النقطة. ويلاحظ من هذا التعريف انه يحدد ثلاثة شروط للحركة الخطية التوافقية البسيطة هي:

أ – ان يكون مسار الجسيم على خط مستقيم يمر بنقطة ثابتة تمثل موضع التوازن

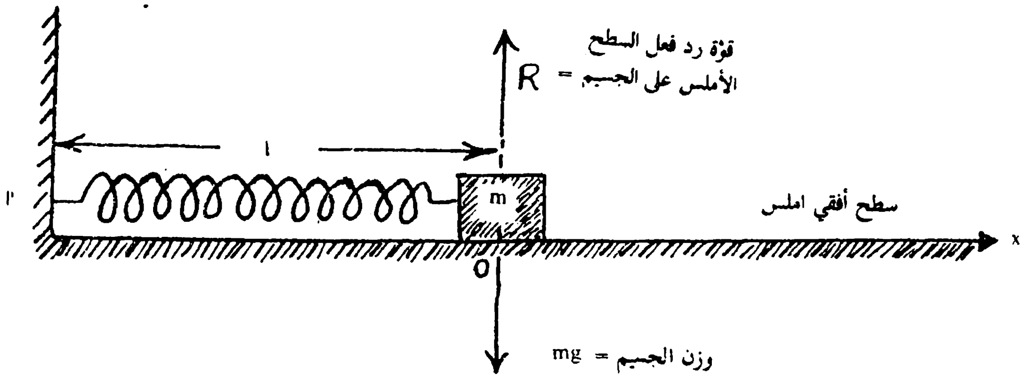
ب – ان مقدار تعجيل الجسيم يتناسب طردياً مع مقدار إزاحته عن موضع التوازن اي ان هناك قوة تدعى بقوة الاستعادة تحاول دائماً اعادة الجسيم الى موضع توازنه ويتناسب مقدارها مع مقدار الازاحة.

جـ – ان اتجاه تعجيل الجسيم يكون دائماً متجهاً نحو موضع التوازن. اي ان اتجاه قوة الاستعادة يكون دائماً نحو موضع التوازن.

وفي الحقيقة هناك ايضاً حركة زاوية توافقية بسيطة تمثل أبسط انواع الحركة الدورية الزاوية وفي هذه الحالة يطبق نفس التعريف السابق إلا أنه يؤخذ بدل الازاحة الخطية الازاحة الزاوية وبدل التعجيل الخطي التعجيل الزاوي. وسنبدأ اولاً بدراسة النوع الاول من الحركة التوافقية البسيطة وهي الحركة الخطية التوافقية.

4 - 2 المهتز الخطي التوافقي البسيط

من الطبيعي أن حركات الذهاب والأياب او حركات الصعود والنزول ليست كلها حركات توافقية بسيطة مالم تتوفر فيها جميع الشروط المذكورة في البند السابق. وهناك أمثلة عديدة مألوفة على الحركة التوافقية البسيطة ولعل أبرزها هو حركة الجسيم المتصل بطرف نابض حلزوني مثبت طرفه الآخر باحكام بمسند ثابت كما مبين في الشكل (2-2)



الشكل (2-2) مهتز خطي توافقي بسيط

في هذا الشكل الجسيم الذي كتلته m والنابض موضوعان على سطح أفقي أملس أي عديم الأحتكاك تماماً . ويمثل هذا السطح المحور السيني x الجسيم متصل في الطرف الأيمن من النابض بينما الطرف الأيسر مثبت عند النقطة P كتلة النابض صغيرة جداً ويمكن اهمالها بالمقارنة مع كتلة الجسيم m المتصلة بطرفه. الطول الطبيعي للنابض عندما يكون في حالة توازن هو l . وزن الجسيم أي مقدار قوة جذب الأرض عليه mg نحو الأسفل تساوي قوة رد فعل R السطح الأملس على الجسيم نحو الأعلى . لذلك فأن محصلة القوة المؤثرة على الجسيم في الأتجاه العمودي يساوي صفراً .

نعتبر موضع توازن الجسيم هو نقطة الأصل O اذا ازيح الجسيم قليلاً عن موضع توازنه على أمتداد المحور السيني ثم ترك وشأنه فأنه سوف يهتز بحركة ذهاب وأياب حول موضع التوازن O لكن هل هذه الحركة الأهتزازية هي حركة توافقية بسيطة . وللاجابة على ذلك يجب أن نوضح ما يلي

ان القوة التي يسلطها النابض الحلزوني على الجسيم عندما يزاح بأزاحة مقدارها عن موضع التوازن هي $F(x)$ و ،

$$F(x) = -(k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + \dots) \qquad \dots(2{\cdot}1)$$

حيث أن k_3, k_2, k_1 تمثل مجموعة من ثوابت النابض تعتمد على قيم الأزاحة x مما يشير الى ان مرونة النابض تتغيرمع الأزاحة . لذلك لاتكون العلاقة بين القوة $F(x)$ والأزاحة x خطية . أي أن القوة $F(x)$ التي تمثل قوة الأستعادة التي تحاول اعادة الجسيم الى موضع توازنه لاتتناسب طرديا مع الأزاحة x . وهذا يعني عدم تحقق أحد شروط الحركة التوافقية البسيطة . ولكن متى ماكانت الأزاحة x صغيرة بما فيه الكفاية فأن قوة الأستعادة تصبح دالة خطية للأزاحة ، ويعبرعن ذلك بالمعادلة :

بالمعادلة

$$F = -kx \qquad \dots(2{\cdot}2)$$

حيث ان K يمثل ثابت التناسب ويمثل فيزياوياً ثابت النابض او ثابت المرونة ويعتمد على طبيعة مادته وابعاده ، والاشارة السالبة تشير الى ان اتجاه قوة الاستعادة عكس اتجاه الازاحة .

ان هذه المعادلة تمثل الصيغة الرياضية لقانون هوك الذي ينص على ان قوة الاستعادة تتناسب طرديا مع مقدار الاستطالة ضمن حدود المرونة . وعليه من المهم جدا ان يراعى عند استثارة المهتز التوافقي البسيط ان يزاح بازاحة طفيفة لتكون قوة الاستعادة مرتبطة خطيا مع الازاحة . ولحسن الحظ فان معظم الظواهر الاهتزازية الميكانيكية في الطبيعة هي من النوع الخطي الذي لاتتجاوز فيه التشوهات الطولية او الحجمية او الشكلية حدود المرونة . ومثل هذا النوع من المهتزات يمكن تحليلها رياضيا بسهولة والحصول على نتائج تفوق بدقتها كثيرا تلك التي نحصل عليها بالنسبة للمهتزات غير الخطية

الان اذا مسكنا الجسيم وحاولنا ازاحته قليلا نحو اليمين او اليسار على امتداد المحور السيني فيجب تسليط قوة سحب أو دفع عليه لانجاز ذلك . ولنفرض أننا سحبنا الجسيم نحو اليمين بازاحة صغيرة من موضع التوازن ، فان النابض بفضل خاصية

المرونة سيبدي قوة مساوية بالمقدار ومعاكسة بالاتجاه لقوة السحب وهذه القوة ناجمة عن قوى كهربائية مستقرة ماسكة بين جزيئات النابض .

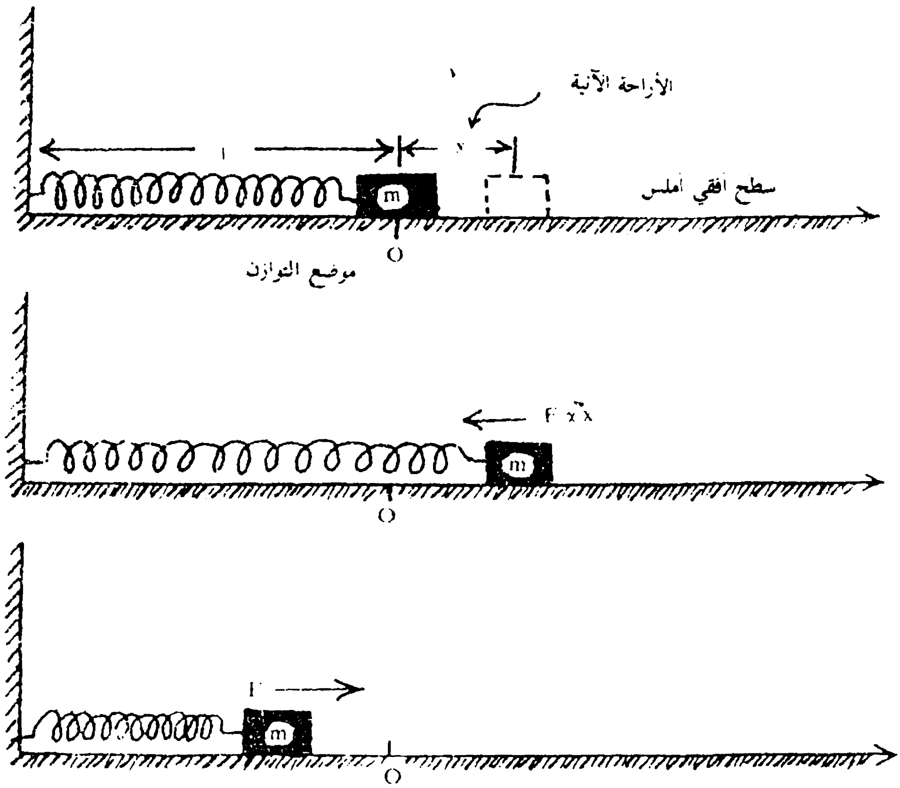
وهذه القوة التي يبديها النابض تدعى بقوة الاستعادة التي تحاول اعادة النابض الى وضعه وشكله الاصلي الان اذا رفعنا يدنا وتركنا الجسيم حرا فان قوة السحب ستختفي وتبقى قوة الاستعادة لتلعب دورها وتحاول اعادة الجسيم الى موضع توازنه الاصلي O بقوة يتناسب مقدارها مع الازاحة الانية للجسيم ويكون اتجاهها نحو موضع التوازن . ان هذه القوة تتناسب طرديا مع تعجيل الجسيم ويكون اتجاهها بنفس اتجاهه (حسب قانون نيوتن الثاني) . وبينما يكون الجسيم في طريق عودته الى موضع توازنه يقل مقدار قوة الاستعادة بسبب تناقص مقدار الازاحة حتى اذا ما وصل الجسيم الى موضع توازنه استعاد النابض طوله الاصلي واصبحت محصلة القوى المؤثرة على الجسيم صفرا . بينما اصبحت سرعته في ذروتها . وبفضل خاصية الاستمرارية التي يمتلكها الجسيم يتجاوز موضع توازنه متحركا نحو اليسار . وكلما ابتعد الجسيم من موضع توازنه نحو اليسار كلما ازداد مقدار قوة الاستعادة في النابض

بسبب انكباس حلقات النابض . ونتيجة ذلك تتباطأ حركة الجسيم تدريجيا الى ان يتوقف لحظيا عن الحركة عندما تصبح ازاحته مساوية لازاحته الاصلية الى جهة اليمين ثم يبدأ الجسيم برحلة العودة نحو موضع التوازن بتعجيل وهكذا دواليك تتكرر رحلة الذهاب والاياب حول موضع التوازن .

5 - 2 معادلة الحركة الخطية التوافقية البسيطة

ولغرض اشتقاق معادلة الحركة الخطية التوافقية البسيطة بالنسبة لاي مهتز يجب ايجاد محصلة القوة الانية المؤثرة عليه اثناء الحركة . ومن ثم نطبق قانون نيوتن الثاني . وهنا سنطبق ذلك على حركة المهتز التوافقي البسيط الذي مر ذكره في البند السابق والمبين في الشكل (2-3)

سنعتبر ان الجسيم مقيد بالحركة ذهابا وايابا على خط مستقيم على طول المحور السيني حول نقطة التوازن O ومحصلة القوى المؤثرة عموديا على الجسيم صفرا لان وزنه mg يساوي ويعاكس قوة رد فعل السطح الاملس عليه . وسنعتبر ان قوة الاحتكاك مع السطح الافقي الاملس وقوة مقاومة الهواء معدومة تماماً اثناء الحركة لذلك فان القوة الافقية باتجاه X هي التي تسبب الحركة .



الشكل (2·3) يبين ان قوة الأستعادة تكون دائماً متجهة نحو موضع التوازن O

فاذا ازيح الجسيم ازاحة آنية طفيفة مقدارها x من موضع التوازن (وضمن حدود المرونة) فان قوة الاستعادة الآنية F هي

$$F = -kx \qquad \ldots(2\cdot3)$$

حيث ان k يمثل ثابت المرونة . والاشارة السالبة تشير الى ان اتجاه القوة يعاكس اتجاه زيادة الازاحة .

ان قوة الاستعادة F تمثل القوة الوحيدة المؤثرة في الجسيم والتي تسبب الحركة . الان يمكن تطبيق قانون نيوتن الثاني للجسيم المتحرك ، الذي ينص على ان محصلة القوة المؤثرة في الجسيم ΣF يساوي حاصل ضرب كتلته m في التعجيل المكتسب a اي بصيغة رياضية .

$$\Sigma F = ma \qquad ...(2\cdot4)$$

وبما ان محصلة القوى المؤثرة في الجسيم المهتز = $-kx$

وكتلة الجسيم المهتز = m

والتعجيل الاني المكتسب باتجاه المحور x = $\frac{d^2x}{dt^2}$

فان

$$\Sigma F = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (2.4)$$

من المعادلتين (2.3) و (2.4) ينتج ان

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad ...(2\cdot5)$$

نقسم طرفي المعادلة على m ونرتبها فتصبح كالاتي :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad ...(2\cdot6)$$

واذا فرضنا ان $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

حيث أن ω_0 هو مقدار ثابت يمثل فيزياويا التردد الزاوي للمهتز . وبذلك تصبح المعادلة (2·6) كالاتـي

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x \qquad ...(2\cdot7)$$

هذه المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية تدعى بمعادلة الحركة الخطية التوافقية البسيطة

2 - 6 حل معادلة الحركة الخطية التوافقية البسيطة

ان حل معادلة الحركة الخطية التوافقية البسيطة (2·7) سيوفر لنا معلومات كاملة عن موقع الجسيم المهتز . وسرعته ، وتعجيله في اية لحظة زمنية اذا علمنا الشروط الابتدائية للحركة . اي اذا علمنا موقع الجسيم وسرعته عند بدء الحركة في الزمن t = صفر .

ان المعادلة (2·7) لايمكن حلها بالتكامل المباشر . لذلك ينبغي البحث عن داله مناسبة . ومن ملاحظة طرفي المعادلة (2·7) نستنتج ان شكل الدالة المطلوبة التي تصلح ان تكون حلا يجب ان تكون مشتقتها الثانية لها نفس شكل الدالة المقترحة.

وبالتخمين يمكن ان نفرض ان الدالة المقترحة كحل هي

$$x = A \sin at \qquad \dots(2\cdot8)$$

حيث ان A يمثل ثابتا اختيارياً وان a يمثل ثابت تحويل الزمن الى زاوية

وبتعويض هذا الحل في المعادلة (2·7) يجب ان نحصل على المشتقة الثانية بالنسبة للزمن t والتي تمثل التعجيل $\frac{d^2x}{dt^2}$. لذلك من المشتقة الاولى بالنسبة للزمن نحصل .

$$\frac{dx}{dt} = Aa \cos at \qquad \dots(2\cdot9)$$

والمشتقة الثانية بالنسبة للزمن نحصل على

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a^2 A \sin at \qquad \dots(2\cdot10)$$

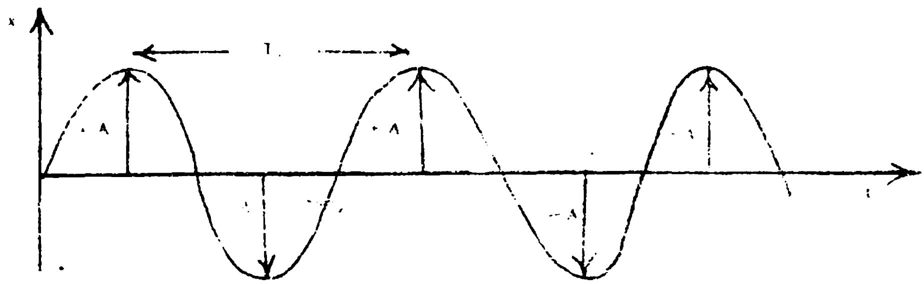
وبمقارنة الطرف الايمن من هذه المعادلة مع الطرف الايمن للدالة المقترحة كحل نلاحظ التشابه بين الشكلين مما يعني انه بعد اخذ المشتقة الثانية للحل بالنسبة للزمن نحصل على نفس شكل الدالة الاصلية . الان نعوض (2·8) و (2·10) في معادلة الحركة التوافقية البسيطة (2·7) فنحصل على

$$a^2 A \sin at \qquad \omega_0^2 A \sin at$$

ولكي يتساوى الطرفان يجب أن تكون $a = \omega_0$ لذلك يجب أن يصبح شكل الحل المقترح (2·8) كالآتي

$$x = A \sin \omega_0 t \qquad (2\cdot11)$$

ان هذا الحل يشير الى ان الحركة الخطية التوافقية البسيطة هي جيبية يمكن تمثيلها بالمنحنى الجيبي المبين في الشكل (2·4).



شكل (24) يبين منحنى الجيب

حيث إن X تمثل الازاحة الخطية الآنية للجسم من موضع التوازن في الزمن t

A يمثل سعة الاهتزاز وتساوي أقصى قيمة للازاحة من موضع التوازن.

ω_0 يمثل التردد الزاوي ويساوي $\frac{2\pi}{T_0}$

τ_0 يمثل الزمن الدوري للحركة الخطية التوافقية البسيطة ويساوي $\frac{1}{f_0}$

f_0 يمثل تردد الحركة الخطية التوافقية البسيطة (التردد الطبيعي)

إن الزمن الدوري للحركة هو الزمن اللازم لاكمال دورة واحدة من الاهتزاز والتردد

هو عدد الاهتزازات او الذبذبات التي يصنعها المهتز في وحدة الزمن. والذبذبة هي دورة واحدة من الحركة.

إن الحل (2.11) يحتوي على ثابت إختياري واحد لذلك لايعتبر حلاً كاملاً لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية. حيث من المعلوم إن الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية يجب ان يتضمن ثابتين اختياريين.

يلاحظ من هذا الحل (2.11) إنه يمثل الشرط الابتدائي للحركة عندما $t=0$ تكون قيمة الازاحة $x=0$. أي أن الجسم المهتز يبدأ بالحركة من وضع التوازن. والواقع إن هذا يمثل حلاً خاصاً لمعادلة الحركة (2.7) لانه محدد بشرط إبتدائي واحد هو الازاحة في الزمن $t=0$ بينما سرعة الجسم في تلك اللحظة غير معلوم.

وفي الحقيقة هناك حلا اخر مناسباً يمكن ان يوافق المعادلة التفاضلية للحركة الخطيــة التوافقية البسيطة (2.7) هو

$$x = B \cos bt \qquad \ldots (2.12)$$

في هذا الحل يتوفر نفس الصفة الرياضية للحل الاول وهو ان شكل المشتقة الثانية بالنسبة للزمن مشابه لشكل الدالة المقترحة

وبأخذ المشتقة الاولى بالنسبة للزمن ينتج

$$\frac{dx}{dt} = - bB \sin bt \qquad \ldots (2.13)$$

وباخذ المشتقة الثانية بالنسبة للزمن نحصل على

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - b^2 . B \cos bt \qquad \ldots (2.14)$$

قارن المعادلتين (2.12) ، (2.14) ليتضح وجه التشابه في الشكل وبتعويــض المعادلتين (2.12) (2.14) في المعادلة (2.7) ينتج أن

$$- b^2 B \cos bt = - \omega_0^2 B \cos bt$$

ولكي يتساوى الطرفان يجب ان تكون $b = \omega_0$ وبذلك يصبح الحل (2.12) كالاتي

$$x = B \cos \omega_0 t \qquad \ldots (2.15)$$

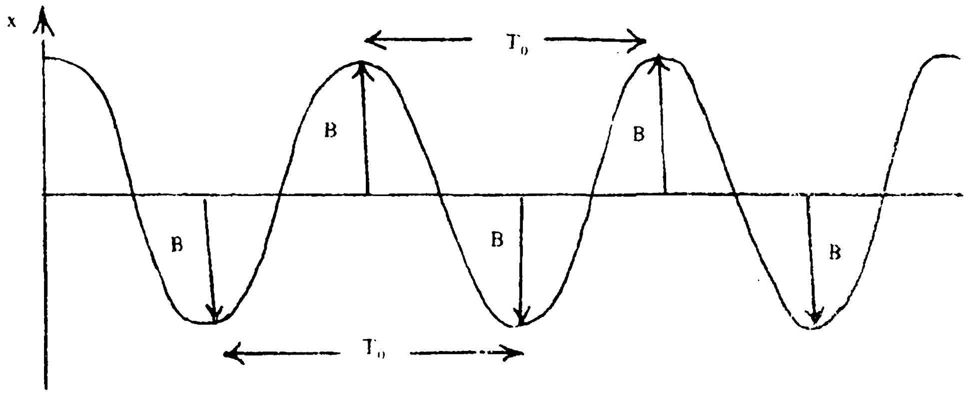
ان هذا الحل يحتوي على ثابت اختياري واحد لذلك يمثل حلا خاصا ايضا وليس حلا كاملاً .

يمكن تمثيل هذا الحل بمنحني الجيب تمام المبين في الشكل (2·5)

يلاحظ من هذا الحل أنه يمثل الشرط الابتدائي للحركة عندما $t = 0$ تكون الازاحة $x = B$. اي ان الجسيم يبدأ بالحركة في الزمن $t = 0$ من اقصى قيمة للازاحة. هذا يمثل حالة خاصة ايضا .

ولما كانت المعادلتان (2·11) و (2·15) مستقلتين عن بعضهما وكل منهما يمثل حلاً خاصاً يختلف عن الاخر . لذلك يمكن اعتبار مجموع هذين الحلين (2·11) و (2·15) حلا اخر للمعادلة (2·7) وبذلك يصبح الحل :

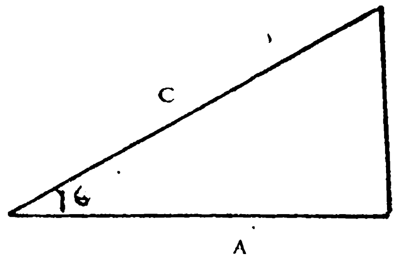
$$x = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t \qquad \ldots(2 \cdot 16)$$



الشكل (2·5) يبين منحني الجيب تمام .

ان هذا الحل يحتوي على ثابتين اختياريين B, A لذلك يمكن اعتباره حلاً عاماً وكاملاً للمعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة . ويمكن تبسيط هذا الحل بفرض ان B, A يمثلان طول ضلعين قائمين في مثلث قائم الزاوية طوله وتره C كما مبين في

الشكل (2·6)



شكل (2·6)

حيث

$$C^2 = A^2 + B^2$$

و

$$\tan \theta = \frac{B}{A}$$

نضرب الطرف الايمن من المعادلة (2·16) ونقسمه على C فيتنتج :

$$x = C\left(\frac{A}{C} \sin \omega_0 t + \frac{B}{C} \cos \omega_0 t \right) \qquad ...(2·17)$$

ولكن من المثلث لدينا .

$$\frac{A}{C} = \cos \theta \quad \text{و} \quad \frac{B}{C} = \sin \theta$$

نعوض هذه العلاقات في المعادلة (2·17) فيصبح الحل :

$$x = C\,(\cos\theta \sin\omega_0 t + \sin\theta \cos\omega_0 t)$$

$$\therefore x = C \sin(\omega_0 t + \theta) \qquad \ldots(2\cdot18)$$

ان هذه المعادلة تمثل ايضا حلا عاما للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية . لانها تتضمن ثابتين اختياريين هما C, θ تحدد قيمهما من الشروط الابتدائية للحركة . والرموز المستخدمة في هذه المعادلة (2·18) لها المعاني الاتية :

x تمثل الازاحة الخطية الانية للجسيم من موضع التوازن في اية لحظة زمنية t

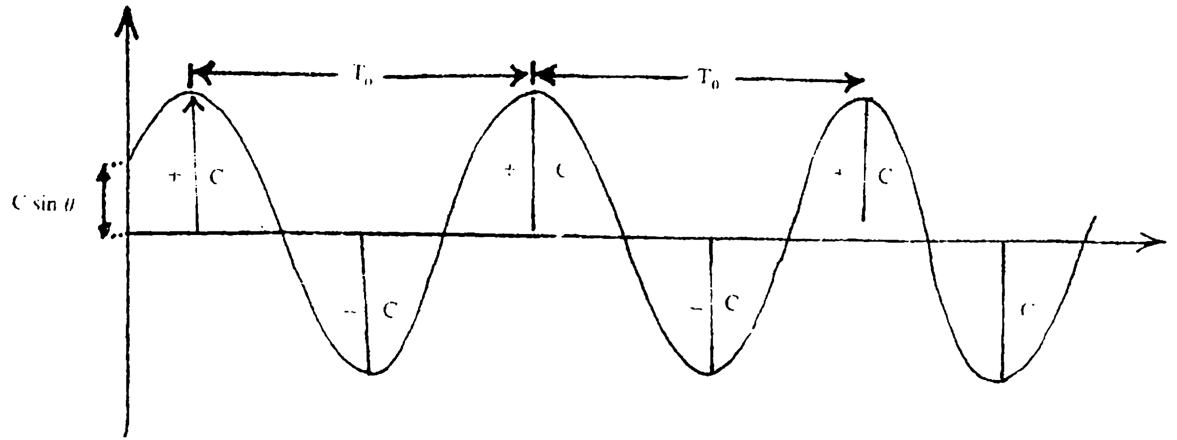
c تمثل سعة الاهتزاز وهي اكبر ازاحة عن موضع التوازن

ω_0 تمثل التردد الزاوي للحركة وتساوي $= \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

θ تمثل الطور الابتدائي لحركة الجسيم اي تحدد موضع الجسيم في الزمن $t = 0$

ويمكن تمثيل هذا الحل بالرسم البياني الجيبي المبين في الشكل (2·7)

في هذا الشكل يلاحظ ان سعة الأهتزاز هي المسافة C وتمثل أكبر ازاحة من موضع التوازن . ويلاحظ ان قيمة السعة C هي مقدار ثابت مما يشير الى ان طاقة المهتز ثابتة مع الزمن . والزمن الدوري T_0 هو زمن ذبذبة كاملة او زمن دورة كاملة ، ويقصد بالدورة الكاملة هو الزمن اللازم لاكمال دورة واحدة من $x = c$ الى $x = -c$ ثم بعد ذلك الى $x = c$ مرة اخرى . والزمن الدوري $T_0 = \dfrac{1}{f_0} = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$. حيث f_0 تمثل



الشكل (2-7) يبين منحنى الجيب

التردد الطبيعي للمهتز وهو عدد الذبذبات الكاملة التي يصنعها المهتز في وحدة الزمن عندما لايؤثر على المهتز اي قوة اخرى غير قوة الاستعادة .

ولما كانت

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

$$\therefore f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

$$\therefore T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

وزاوية الطور الابتدائي للحركة θ نحصل عليها عندما $t = 0$ اي عندما $x = c \sin \theta$ وبذلك يكون واضحا انه يمكن تحديد زاوية الطور θ من معرفة قيمة النسبة بين ازاحة الجسيم المهتز عندما $t = 0$ الى سعة الاهتزاز (اي بمعرفة الزاوية θ من العلاقة $\left(\sin\theta = \frac{x}{c} \right)$ فعلى سبيل المثال تكون $\theta = 0$ عندما $x = 0$ في الزمن $t = 0$ او تكون $\theta = \frac{\pi}{2}$ عندما $x = c$ في الزمن $t = 0$ وهلم جرا .

أما زاوية طور الحركة في اية لحظة زمنية t يمكن تحديدها من معرفة قيمة النسبة بين ازاحة الجسيم المهتز في الزمن t الى سعة الاهتزاز C (اي بمعرفة الزاوية $(\omega_0 t + \theta)$ في العلاقة $\sin(\omega_0 t + \theta) = \frac{x}{c}$. ويلاحظ هنا انه بينما تكون زاوية الطور الابتدائي للحركة θ لاي جسم مهتز هي ثابتة تعتمد على الشروط الابتدائية للحركة نرى ان زاوية طور الحركة $(\omega_0 t + \theta)$ ليست ثابتة بل تتغير دورياً مع الزمن طالما استمر الجسيم على الاهتزاز . فعلى سبيل المثال تكون زاوية طور الحركة بعد مرور زمن دورة واحدة من بدأ الحركة هي $(2\pi + \theta)$ ، وبعد مرور زمن دورتين تكون $(4\pi + \theta)$. وبعد مرور ثلاث دورات تكون $(6\pi + \theta)$

وهكذا دواليك . من ذلك يلاحظ ان زاوية طور الحركة تتغير بمقدار 2π كلما مر من دورة واحدة . اي ان طور حركة الجسيم المهتز يتغير دورياً .

7 - 2 السرعة الآنية والتعجيل الآني للمهتز التوافقي البسيط

لقد وجدنا ان الازاحة الآنية للمهتز التوافقي البسيط هي

$$x = C \sin(\omega_0 t + \theta)$$

والسرعة الآنية للمهتز يمكن ايجادها من اخذ مشتقة الازاحة بالنسبة للزمن . فاذا رمزنا للسرعة الآنية بالحرف v فان

$$v = \frac{dx}{dt} = C\omega_0 \cos(\omega_0 t + \theta) \qquad \ldots\ldots (2.19)$$

حيث ان $C\omega_0$ يمثل سعة السرعة وهي اقصى قيمة لسرعة المهتز ويرمز لها عادة بالحرف v_0 لذلك يمكن وضع المعادلة (2.19) كالآتي :

$$v = v_0 \cos(\omega_0 t + \theta) \qquad \ldots\ldots (2.20)$$

من المعادلة (2.18) لدينا $\sin(\omega_0 t + \theta) = \frac{x}{C}$

ومن المعادلة (2.19) لدينا $\cos(\omega_0 t + \theta) = \frac{v}{C\omega_0}$

ولدينا من المثلثات العلاقة

$$\sin^2(\omega_0 t + \theta) + \cos^2(\omega_0 t + \theta) = 1$$

بتربيع المعادلتين (2.19,2.18)

وبالتعويض نجد ان

$$\left(\frac{x}{C}\right)^2 + \left(\frac{v}{C\omega_0}\right)^2 = 1$$

ومن هذه المعادلة ينتج ان

$$v = \omega_0 \sqrt{C^2 - x^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.21)$$

يلاحظ من هذه المعادلة ان السرعة الآنية للجسيم المهتز تصبح صفراً عندما يصل اقصى ازاحة من موضع التوازن اي عندما تكون $x = c$ و تكون السرعة في ذروتها عندما يمر الجسيم في نقطة توازنه اي عندما تكون $x = 0$

ويمكن الحصول على التعجيل الآني للجسيم المهتز بأخذ المشتقة الثانية للازاحة بالنسبة للزمن . فاذا رمزنا للتعجيل الآني بالحرف a فان

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -C\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \theta) \qquad \ldots\ldots\ldots (2.22)$$

حيث ان $C\omega_0^2$ يمثل سعة التعجيل اي اقصى قيمة للتعجيل ويرمز له بالحرف a_0 فتصبح المعادلة الاخيرة كالاتي

$$a = a_0 \sin(\omega_0 t + \theta) \qquad \ldots\ldots\ldots (2\cdot23)$$

ان هذه المعادلة هي نفس معادلة الحركة التوافقية البسيطة فاذا عوضنا في المعادلة الاخيرة بدل a_0 بالمقدار $C\omega_0^2$ وبدل $C\sin(\omega_0 t + \theta)$ بالمقدار x ينتج المعادلة

$$a = -\omega_0^2 x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2\cdot24)$$

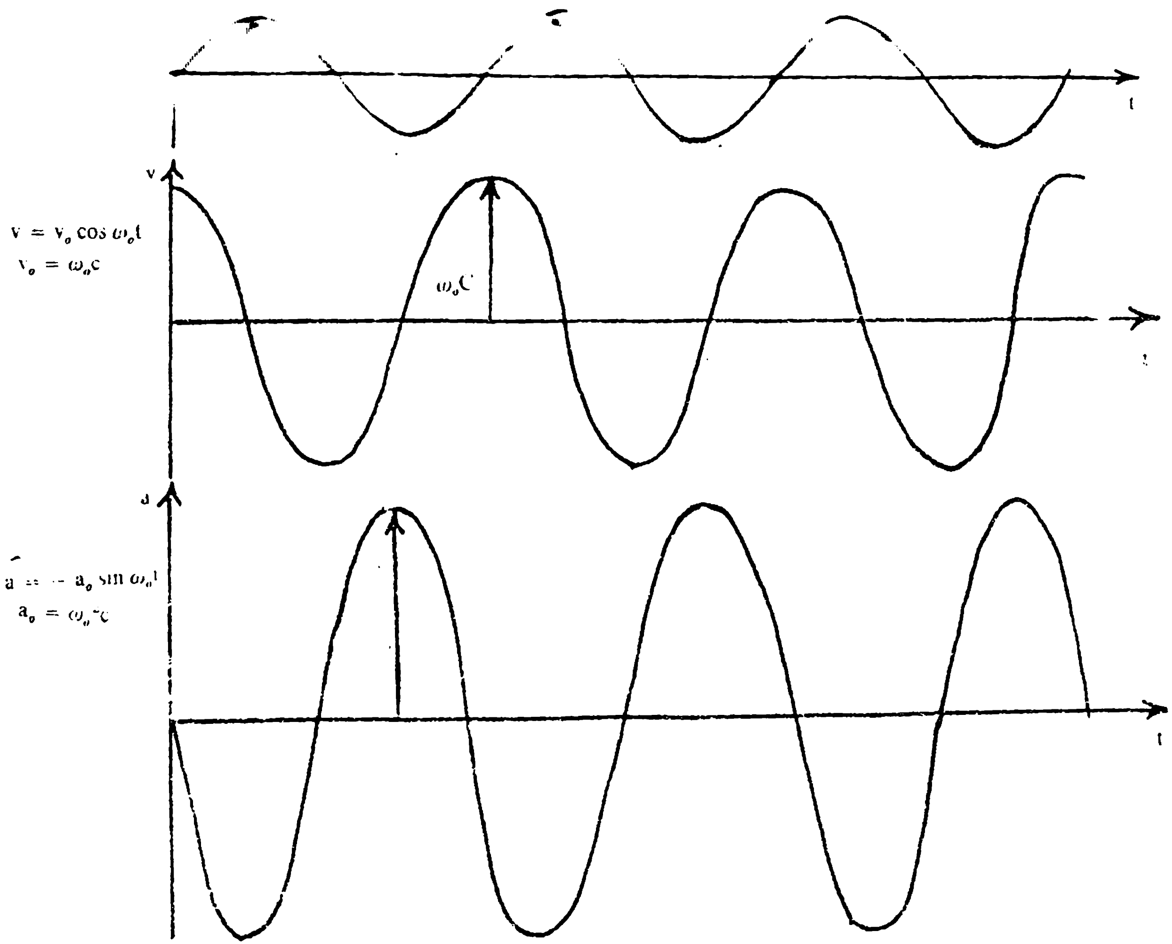
يلاحظ في هذه المعادلة ان التعجيل في ذروته عندما يكون الجسيم في اقصى ازاحة له عن موضع التوازن ، بينما يكون صفراً عندما يمر في موضع التوازن

ومن المفيد ان نوضح بيانيا التغيرات الدورية في الازاحة والسرعة والتعجيل للمهتز التوافقي البسيط خلال دورة كاملة . وللسهولة سنفرض ان زاوية الطور الابتدائي للحركة θ تساوي صفراً

ومن مقارنة المنحنيات البيانية في الشكل (2·8) يمكن الحصول على الجدول (2·1) الذي يبين قيم الازاحة والسرعة والتعجيل في كل ربع دورة .

الجـــدول (1 – 2)

الزمن t	الازاحة $x = C\sin\omega_0 t$	السرعة $V = C\omega_0 \cos\omega_0 t$	التعجيل $a = -C\omega_0^2 \sin\omega_0 t$
0	0	$+C\omega$	
$T_0/4$	$+C$	0	$C\omega_0^2$
$T_0/2$	0	$-C\omega_0$	0
$3T_0/4$	$-C$	0	$+C\omega_0^2$
T_0	0	$C\omega_0$	0



الشكل (2:8) التغيرات الدورية في الازاحة والسرعة والتعجيل

من هذا الجدول يتضح انه لوكان لدينا مهتز توافقي بسيط مستمر على الاهتزاز وتتبعنا حركة الجسيم خلال دورة واحدة بدءاً من موضع توازنه وهو يشرع بالحركة نحو اليمين لوجدنا انه في لحظة عبوره نقطة التوازن تكون ازاحته صفراً وسرعته في ذروتها وتساوي ($C\omega_0$) وتعجيله صفراً . وعندما يصل الجسيم الى أقصى ازاحة له الى يمين موضع التوازن تكون ازاحته على اقصاها وتساوي ($+C$)وسرعته صفرا ، وتعجيله في ذروته ($-C\omega_0^2$) ويكون متجهاً نحو نقطة التوازن . ان قوة الاستعادة في هذا الموضع تكسب الجسيم سرعة نحو اليسار، وعندما يمر الجسيم بموضع التوازن تكون ازاحته صفرا ، وسرعته في ذروتها وتساوي ($-C\omega_0$) وتعجيله صفراً . وعندما يصل الجسيم الى أقصى ازاحة له في جهة اليسار بالنسبة لموضع التوازن تكون ازاحته ($-C$)وسرعته صفراً وتعجيله في ذروته ($+C\omega_0^2$) ويكون متجهاً نحو موضع التوازن . ان قوة الاستعادة في هذا الموضع تكون على اقصاها وتؤدي الى اكساب الجسيم سرعة بالاتجاه الموجب وتصبح السرعة في أقصى قيمة لها عندما تكون الازاحة صفراً وبفضل هذه السرعة يتجاوز الجسيم موضع توازنه، وهكذا تتكرر العملية ويحدث الاهتزاز وخلاله يتغير كل من الازاحة والسرعة والتعجيل دورياً مع الزمن .

8 – 2 طاقة المهتز التوافقي البسيط

عندما يهتز الجسيم بحركة توافقية بسيطة فان كل من الطاقتين الحركية والكامنة للجسيم تتغيران باستمرار ما عدا في نقطتين فقط يختفي أحد الشكلين ليتحول كلياً الى الشكل الآخر. ففي أقصى ازاحة للجسيم من موضع التوازن حيث يتوقف الجسيم لحظياً عن الحركة تتحول الطاقة كلياً الى شكل طاقة كامنة وفي لحظة مرور الجسيم في نقطة التوازن (أي عندما $x = 0$) تتحول الطاقة كلياً الى شكل طاقة حركية . من هذا يتضح ان الاهتزاز يعني عملية تبادل متناوب بين شكلي الطاقة . واذا لم يكن هناك تبديد أو فقدان في الطاقة فان مجموع الطاقة للمهتز يبقى ثابتاً في أي لحظة زمنية t

وفي الحقيقة ان الحل العام

$$x = C \sin(\omega_0 t + \theta)$$

يشير نظريا الى ان سعة الازاحة c يبقى ثابتا خلال الاهتزاز مما يعني ان مجموع الطاقة الكلية يبقى ثابتاً . اذ لوكان هنالك تبديد بالطاقة لتضاءل الاهتزاز وتناقصت سعته تدريجياً حتى يتوقف عن الحركة .

والواقع انه في أي عملية اهتزاز ميكانيكي لابد ان يصاحبها مقدار من الضياع في الطاقة على شكل حرارة . ووفق قانون حفظ الطاقة يكون المجموع الكلي للطاقة ثابتاً اذا اخذنا بالاعتبار كل اشكال الطاقة . ولكن هنا سنتعامل مع حالة مثالية تماماً لا يمكن ادراكها عملياً باعتبار ان المجموع الكلي للطاقة الميكانيكية للمهتز مقدار ثابت في أية لحظة زمنية . وهذا يعني عدم وجود تبديد أو استنزاف للطاقة الميكانيكية على شكل حرارة أو صوت . . . الخ .

اذا فرضنا ان المجموع الكلي للطاقة الميكانيكية للمهتز في اية لحظة زمنية هو مقدار ثابت ويساوي E فان

$$E = K.E + P.E \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2\cdot25)$$

حيث أن K.E. تمثل الطاقة الحركية الآنية التي تكتسبها كتلة الجسيم المهتز بفضل سرعته .

وان P.E تمثل الطاقة الكامنة الآنية التي يختزنها النابض الحلزوني بفضل مرونته اذا حدث تشوه فيه (استطالة أو انكباس)

ان الطاقة الحركية الآنية في الزمن t تعطى بالمعادلة :

$$K.E. = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{1}{2} mv^2 \qquad \ldots\ldots\ldots (2\cdot26)$$

حيث أن m يمثل كتلة الجسيم المهتز و $\dot{x}$ أو v تمثل السرعة الآنية في الزمن t

واذا كانت الازاحة الآنية للجسيم من موضع توازنه في نفس اللحظة الزمنية t هي x فان الطاقة الكامنة الآنية التي يختزنها النابض بفضل هذا الوضع تساوي مقدار الشغل اللازم لاحداث الاستطالة x في طول النابض . أي أن

$$P.E. = \int_0^x F.dx$$

لكن القوة الخارجية اللازمة لاحداث الاستطالة x في طول النابض هي :

$$F = kx$$

$$P.E = \int_0^x kx.dx = \frac{1}{2} kx^2 \qquad \ldots\ldots\ldots (2\cdot27)$$

نعوض (2·26) و (2·27) في (2·25) فنحصل على مجموع الطاقة الميكانيكية E للمهتز في اية لحظة زمنية t .

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \qquad \text{.............. (2·28)}$$

ولما كانت E ثابتة لا تتغير مع الزمن فان $\frac{dE}{dt} = 0$

نفاضل (2·28) بالنسبة للزمن فنحصل على

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0$$

وهذه تعطي معادلة الحركة التوافقية البسيطة

$$m\ddot{x} = -kx$$

من هنا نستنتج انه عندما لا يكون هنالك تبديد أو فقدان في الطاقة فان الطاقة الميكانيكية الكلية للمهتز الحر تساوي مجموع الطاقتين الحركية والكامنة E . وان المشتقة الاولى لـ E بالنسبة للزمن t تقود الى معادلة الحركة التوافقية البسيطة لذلك المهتز وهذه تدعى بطريقة الطاقة . وكثيراً ما تستخدم هذه الطريقة لايجاد التردد الطبيعي لاي مهتز توافقي بسيط عندما يتعذر تطبيق طريقة التحليل التقليدية .

ان ذروة الطاقة الكامنة $P.E_{max}$ التي يمكن أن يختزنها النابض الحلزوني تحدث عندما تكون استطالة النابض في أقصى قيمة لها أي عندما $x = \pm c$ وبذلك فان

$$P.E_{max} = \frac{1}{2} kC^2 \qquad \text{........(2·29)}$$

وان ذروة الطاقة الحركية التي تكتسبها كتلة الجسيم المهتز تحدث عندما تكون السرعة $\dot{x}$ في أقصى قيمة لها ، أي عندما $\dot{x} = \omega_0 c$ وبذلك فان

$$K.E_{max} = \frac{1}{2} m (\omega_0 C)^2 = \frac{1}{2} mC^2\omega_0^2 \qquad \text{............ (2·30)}$$

وهذا يعني أن

$$E = P.E_{max} = K.E_{max} = \frac{1}{2} kC^2 = \frac{1}{2} mC^2\omega_0^2 \qquad \text{........(2·31)}$$

مما يشير الى أن المجموع الكلي لطاقة المهتز E يتحول كليا الى شكل طاقة كامنة في الموقع $x = +C$ والى شكل طاقة حركية في الموقع $x = o$. وبين الموقعين تكون موزعة بين الشكلين . وسنلاحظ في البند القادم ان متوسط الطاقة خلال دورة واحدة من الاهتزاز موزع بالتساوي بين الشكلين .

9 – 2 متوسط الطاقة الحركية للمهتز التوافقي البسيط

لقد وجدنا ان سرعة الجسيم المهتز تتغير باستمرار مع الزمن خلال الدورة الواحدة وقد وجدنا ان الطاقة الحركية الآنية في أية لحظة زمنية هي

$$\boxed{K.E} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

ولدينا من

$$\dot{x} = Cw_o \cos(\omega_o t + \theta)$$

لذلك فان

$$K.E = \frac{1}{2} mc^2\omega_o^2 \cos^2(\omega_o t + \theta)$$

وحيث ان القيمة الآنية للطاقة الحركية تتغير من لحظة لاخرى خلال الدورة الواحدة لذلك يفضل ايجاد قيمة متوسط الطاقة الحركية خلال دورة واحدة كاملة من الاهتزاز .
فاذا رمزنا لمتوسط الطاقة الحركية خلال الدورة الواحدة بالرمز $\overline{K.E}$ فان

$$\overline{K.E.} = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} \frac{1}{2} mC^2\omega_o^2 \cos^2(\omega_o t + \theta)\, dt$$

حيث ان T_o يمثل زمن دورة واحدة

$$\overline{K.E} = \frac{1}{T} \frac{mC^2\omega_o^2}{4} \int_0^{T_0} 2\cos^2(\omega_o t + \theta)\, dt$$

$$= \frac{mC^2\omega_0^2}{4\,T_0} \int_0^{T_0} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \theta)]\, dt$$

$$= \frac{mC^2\omega_0^2}{4T_0} \left[\int_0^{T_0} dt + \int_0^{T_0} \cos(\omega_0 t - \theta)\, dt \right]$$

ولكن

$$\int_{0}^{T_0} \cos 2(\omega_o t + \theta)\, dt = 0$$

$$\overline{K.E.} = \frac{1}{4} m C^2 \omega_o^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2\cdot32)$$

10 – 2 متوسط الطاقة الكامنة للمهتز التوافقي البسيط

لقد وجدنا ان الطاقة الكامنة الآنية التي يختزنها النابض الحلزوني تساوي مقدار الشغل اللازم لاحداث استطالة آنية x التي تمثل التشوه الطولي الاني المرن في طول النابض . وأن

$$P.E. = \int_{o}^{x} F.\, dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2\cdot33)$$

لكن القوة الخارجية F التي تحدث استطالة x في النابض تؤثر بنفس الوقت على الجسيم الذي كتلته m والمتصل بالنابض ومن تطبيق قانون نيوتن الثاني في الحركة نجد أن

$$F = am \qquad (2\cdot34)$$

حيث a يمثل التعجيل المكتسب ويساوي $\omega_o^2 x$ يكون بنفس اتجاه تأثير القوة F وبذلك فان

$$F = \omega_o^2\, mx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2\cdot35)$$

وبتعويض (2·35) في (2·33) فنجد أن

$$P.E. = \int_{o}^{x} m\, \omega_o^2 x dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2\cdot36)$$

$$P.E = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$$

هذه تمثل مقدار الطاقة الكامنة عندما تكون الإزاحة الآنية x وحيث أن هذا المقدار يتغير مع x خلال الدورة الواحدة لذلك يفضل أخذ متوسط قيمة الطاقة الكامنة خلال دورة واحدة . فاذا رمزنا لمتوسط الطاقة الكامنة خلال الدورة الواحدة بالرمز $\overline{P.E.}$ فإن

$$\overline{P.E} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2\, dt \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.37)$$

لدينا من (2.18)

$$x = C \sin(\omega_0 t + \theta)$$

لذلك فان

$$\overline{P.E} = \frac{1}{2}\, \frac{mC^2\omega_0^2}{T_0} \int_0^{T_0} \sin^2(\omega_0 t + \theta)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\, mC^2\omega_0^2 \int_0^{T_0} \frac{1}{2}\left[1 - \cos 2(\omega_0 t + \theta)\right] dt$$

$$= \frac{mC^2\omega_0^2}{4T_0}\int_0^{T_0} dt - \int \cos 2(\omega_0 t + \theta)\, dt$$

لـكن

$$\int_0^{T_0} \cos 2(\omega_0 t + \theta)\, dt = 0$$

$$\therefore \overline{P.E} = \frac{1}{4} mC^2\omega_0^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.38)$$

ومن مقارنة المعادلتين (2.32) و (2.39) نجد أن متوسط الطاقة الحركية خلال الدورة الواحدة يساوي متوسط الطاقة الكامنة خلال نفس الدورة . وبمقارنة هاتين المعادلتين مع المعادلة (2.31) نجد أن الطاقة الكلية للمهتز تتوزع بالتساوي على شكلي الطاقة خلال الدورة الواحدة .

11 – 2 تطبيقات على الحركة الخطية التوافقية البسيطة

هناك امثلة عملية كثيرة على الحركة التوافقية البسيطة يتعذر حصرها جميعاً، ولكن بالنظر لاهمية العديد منها للاغراض التطبيقية، ولغرض إبراز السمة الاساسية المشتركة بين هذه المهتزات رغم التباين الظاهر فيما بينها، سنورد في هذا البند مجموعة متنوعة من هذه المهتزات وسنحلل كلاً منها على انفراد اما بطريقة التحليل التقليدية او بطريقة الطاقة او بكلا الطريقتين معاً، وعلى ضوء ذلك سيتمكن الطالب من معالجة اي مهتز آخر لم يرد ذكره في هذا البند.

ان المهتزات التي سنتعامل معها هي

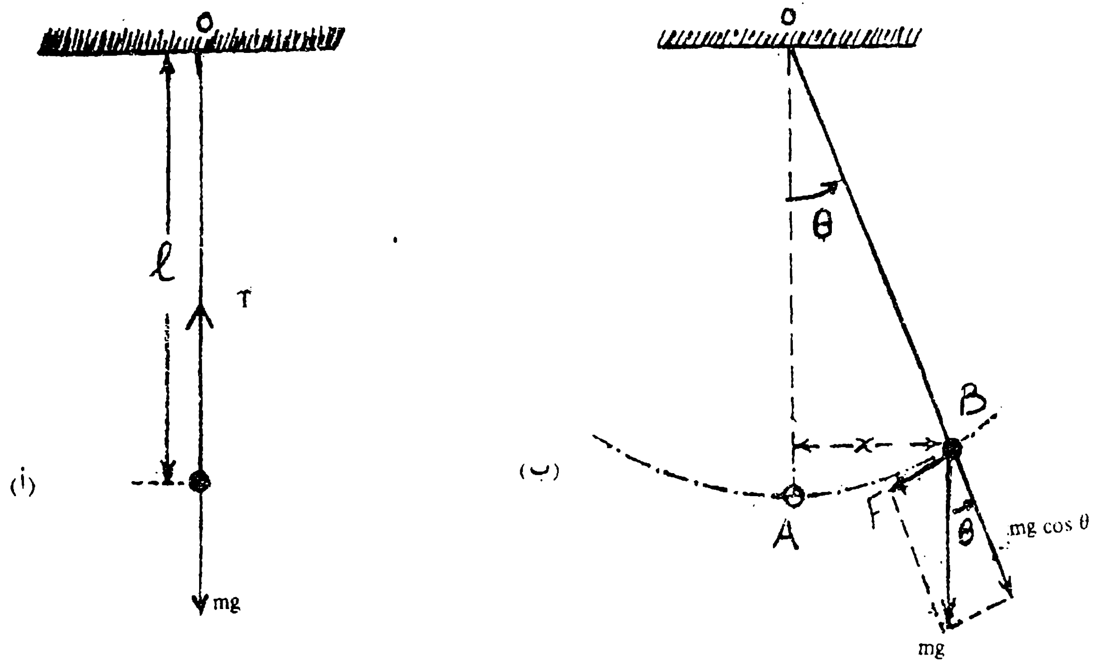
1 – البندول البسيط
2 – الجسم الطافي
3 – السائل في انبوبة على شكل حرف U
4 – الكتلة المتصلة وسط سلك متوتر.
5 – الكتلة المتصلة بين نابضين.
6 – الغاز المحصور في اسطوانة مغلقة.

12 – 2 البندول البسيط

يتالف من جسيم كروي صغير متصل بطرف خيط خفيف ورفيع وثابت الطول وطرفه الاخر مثبت باحكام بنقطة ثابتة كما مبين في الشكل (2-9)

نفرض ان طول البندول من نقطة التعليق الى مركز الجسيم يساوي l وان كتلة الجسيم m وان شدة الجذب الارضي يتمثل بالتعجيل الأرضي g في حالة الأستقرار أي عندما يكون البندول في حالة التوازن تكون قوة الجذب الأرضي على كتلة البندول هي mg ومتجهة نحو مركزالارض وقوة رد الفعل المساوية لها بالمقدار والمعاكسة لها بالاتجاه هي قوة الشد بالخيط T . في هذه الحالة تكون محصلة القوى المؤثرة في البندول صفراً.

نفرض ان البندول مقيد بالحركة في مستوى واحد وليكن مستوى الورقة فاذا ازيح الجسيم قليلا عن موضع توازنه وترك وشأنه فانه سيبدأ بالاهتزاز ذهابا



الشكل (2-9) يبين (أ) البندول في موضع التوازن و(ب) في وضع مزاح بزاوية θ عن موضع التوازن.

وايابا حول موضع التوازن A . واضح ان مسار حركة الجسيم لن يكون خطا مستقيما بل يكون على شكل قوس (يشكل جزء من محيط دائرة مركزها o) . اي ان حركة الجسيم المهتز ستكون في بعدين وليس في بعد واحد ، وهذا ينافي احد شروط الحركة التوافقية البسيطة التي تقتضي ان يكون مسار الحركة في بعد واحد اي على خط مستقيم . اذن لابد من معالجة هذا الاختلاف ولو بشكل تقريبي . لهذا الغرض سنفرض ان الازاحة الزاوية للبندول في اية لحظة زمنية t هي θ كما مبين في الشكل (2·9) ولما كانت قوة الشد في خيط البندول عمودية دائما على مسار الجسيم لذلك فان تأثيرها على الحركة يكون معدوما . لذلك سنحلل قوة الجذب الارضي على كتلة البندول m والتي تساوي وزنه mg الى مركبتين :

المركبة الاولى باتجاه الخيط = $mg\cos\theta$

المركبة الثانية عمودية على اتجاه الخيط = $- mg\sin\theta$

ان الاشارة السالبة هنا تشير الى ان اتجاه زيادة القوة يعاكس اتجاه زيادة الزاوية θ

ولما كانت المركبة الاولى $mg\cos\theta$ تساوي قوة الشد في الخيط T اي ان

$$mg\cos\theta = T \qquad \ldots\ldots\ldots (2·39)$$

فان هذه المعادلة تشير الى التوازن الدائم بين القوتين المؤثرتين في امتداد الخيط والتي تحافظ على مسار الجسيم ثابتا على قوس دائرة نصف قطرها l

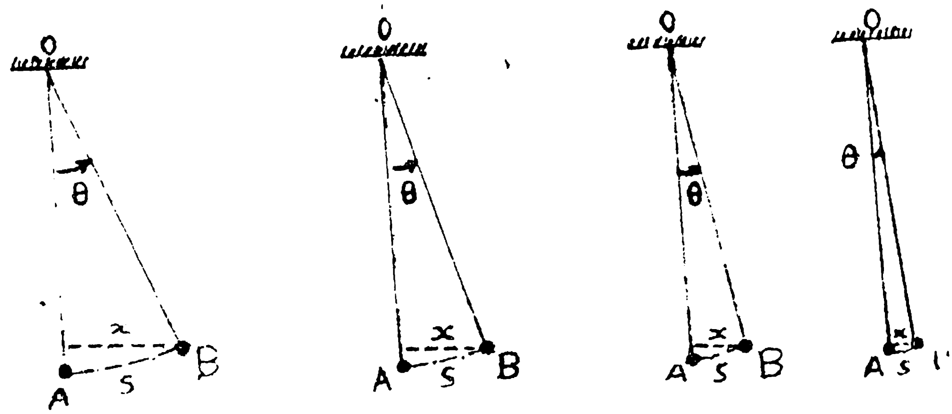
لذلك فان القوة الوحيدة المؤثرة في حركة الجسيم هي المركبة العمودية على اتجاه الخيط والتي هي بالحقيقة القوة المماسية لمسار الجسيم وتدعى بقوة الاستعادة التي تسبب الحركة الاهتزازية للبندول فاذا رمزنا لهذه القوة بالحرف F فان

$$F = - mg\sin\theta \qquad \ldots\ldots\ldots (2·40)$$

حيث الأشارة السالبة تشير الى ان اتجاه قوة الأستعاد يعاكس اتجاه زيادة الأزاحة الزاوية θ

يلاحظ من الشكل (9 – 2 ب) ان اتجاه قوة الأستعادة F لايكون متجهاً بالضبط نحو نقطة التوازن A لكن يلاحظ أنه كلما قلت الأزاحة الزاوية فان طول القوس المقابل لها AB يقترب من طول الأزاحة الخطية x حيث ان x تمثل الأزاحة الأفقية لكتلة البندول من نقطة التوازن A كما موضح في الشكل (2·10)

وعندما تصبح الأزاحة الزاوية θ صغيرة جداً فان طول القوس s (AB) يساوي تقريباً طول الأزاحة الأفقية x وبذلك يصبح اتجاه القوة المماسية مقاربا جدا لأتجاه x وعندئذ



الشكل (2·10) يبين انه كلما قلت الزاوية θ اقترب طول القوس s من طول الخط x

يكون اتجاه قوة الأستعادة F متجهاً لدرجة مقبولة من الدقة نحو نقطة التوازن A ، طبقاً لمفكوك تايلر لدنيا (بالمقياس النصف قطري للزاوية θ) :

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots \qquad \ldots\ldots(2{\cdot}41)$$

وعندما تكون الأزاحة الزاوية θ صغيرة (أي أقل من 5 ، فان $\sin\theta$ تصبح مساوية تقريباً للزاوية θ بالتقدير النصف قطري ، أي أن

$$\sin\theta \sim \theta$$

نعوض في المعادلة 2·46 فتصبح

$$F = mg\,\theta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2{\cdot}43)$$

وبأخذ قيمة θ بالمقياس النصف القطري نحصل على

$$\theta = \frac{x}{l} \qquad \ldots\ldots\ldots(2{\cdot}44)$$

نعوض (2·44) في (2·43) فينتج :

$$F = -\frac{mg}{l}\cdot x \qquad (2{\cdot}45)$$

(لاحظ التشابه بين هذه المعادلة ومعادلة قانون هوك $F = -kx$) . الآن نطبق قانون نيوتن الثاني في الحركة على كتلة البندول فينتج

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg}{l} \cdot x$$

حيث أن $\frac{d^2x}{dt^2}$ تمثل التعجيل الآني لكتلة البندول في اتجاه المحور x
وبحذف m من الطرفين نحصل على

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot x \qquad (2{\cdot}46)$$

وبمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة القياسية للحركة التوافقية البسيطة (2·7) نجد ان المعادلتين متشابهتان تماماً مما يشير الى ان حركة البندول البسيط اذا ترك يتذبذب بذبذبات صغيرة ولايتعرض لقوى مقاومة هي حركة توافقية بسيطة . وهذا الاستنتاج بالطبع صحيح فقط اذا كانت الزاوية θ التي يصنعها خيط البندول مع العمود صغيرة جداً . وبهذا التقريب فقط تتحقق شروط الحركة التوافقية البسيطة للبندول البسيط .
من المقارنة بين المعادلتين (2·7) و (2·46) نحصل على

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \qquad \text{...............} (2{\cdot}47)$$

لكـن

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_o}$$

$$\therefore T_o = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{...........} (2{\cdot}48)$$

ولكن

$$f_o = \frac{1}{T_o}$$

$$\therefore f_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \text{...............} (2{\cdot}49)$$

هذه المعادلة تشير الى ان التردد الطبيعي f_o للاهتزاز الحر للبندول البسيط يعتمد على طول البندول l والتعجيل الأرضي المحلي g وليس هنالك تأثير لكتلة البندول .

ان الحل العام للمعادلة (2·46) يمكن الحصول عليه بنفس الطريقة السابقة . فنجد ان الازاحة الخطية x لكتلة البندول في الزمن t هي

$$x = A \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t + B \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t \qquad \text{.........} (2\cdot50)$$

حيث A و B ثابتان اختياريان يعتمدان على الشروط الابتدائية للحركة . وبدلالة الازاحة الزاوية θ في الزمن t يكون الحل العام كالآتي :

$$\theta = A' \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t + B' \cos\theta \sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t \qquad \text{.........} (2\cdot51)$$

حيث A' و B' ثابتان اختياريان ايضاً ويساويان $\frac{A}{l}$ و $\frac{B}{l}$ على الترتيب .

ويمكن ايجاد قيم كل من A' و B' من الشروط الابتدائية للحركة . فاذا فرضنا ان الازاحة الزاوية الابتدائية $\theta = \theta_o$ والسرعة الزاوية الابتدائية $\frac{d\theta}{dt} = o$ في اللحظة $t = o$ فعند تطبيق الشرط الابتدائي الاول $\theta = \theta_0$ في اللحظة $t = 0$ على المعادلة (2·51) نجد ان

$$B' = \theta_o$$

وبتطبيق الشرط الابتدائي الثاني $\frac{d\theta}{dt} = o$ في اللحظة $t = o$ على المعادلة (2·51) نجد ان

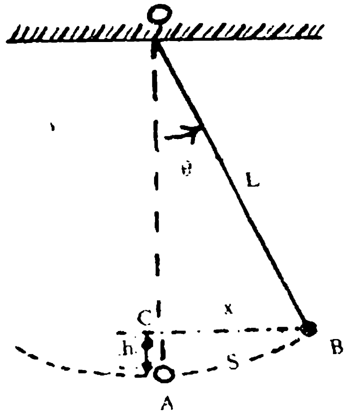
$$A = o$$

وبذلك يكون الحل العام وفق الشروط المذكورة هو

$$\theta = \theta_o \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t \qquad \text{.........} (2\cdot52)$$

وهنالك طريقة اخرى للحصول على معادلة الحركة التوافقية البسيطة للبندول وهي طريقة الطاقة . وبالنظر لاهميتها سنوضحها باختصار .

لنفرض ان كتلة جسيم البندول عند لحظة زمنية t كانت في الموقع B المبين في الشكل (2·11)



الشكل (2.11)

ان الطاقة الـكامنة التـي يختزنها الجسيم في هذا الموقع تساوي طاقة الوضـــع التـي يكتسبها بفضل انتقاله من اوطأ نقطة في مسار حركته A الى الوضع B وهــذه الطاقة تساوي مقدار الشغل اللازم انجازه ضد قوة الجذب الارضــي للارتفاع مسافـــة مقدارها h . اذن تكون الطاقة الـكامنة P.E في الوضع B هي

$$P.E = mgh \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.53)$$

حيث ان h تمثل المسافة التي ارتفعتها الـكتلة m ضد قوة الجذب الارضـــــي . ومن الشكل (2.11) نرى ان

$$h = OA - OC$$

$$h = l - l\cos\theta = l(1 - \cos\theta)$$

$$\therefore P.E = mgl(1 - \cos\theta) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.54)$$

والطاقة الحركية الآنية في الموضع B هي P.E حيث

$$K.E = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.55)$$

حيث ان $\frac{ds}{dt}$ تمثل السرعة الخطية الآنية لـكتلة البندول فـــي الموقع B ولــكن $s = \theta l$ لذلك فان الطاقة الحركية الآنية هي :

$$\therefore K.E = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.56)$$

لـكن في حالة عدم وجود فقدان في الطاقة على شكل حرارة ...
الاحتكاك او مقاومة الهواء) فانه وفق قانون حفظ الطاقة يكون ...
الميكانيكية E في اية لحظة زمنية ثابتا . أي ان

مقدار ثابت

$$\ldots \cos\theta) + \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \qquad \ldots\ldots(2\cdot57)$$

نفاضل بالنسبة للزمن t فنحصل على

$$\frac{d}{dt}(P.E + K.E) = o$$

اي ان

$$mgl\sin\theta \frac{d\theta}{dt} + ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \frac{d\theta}{dt} = o \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2\cdot58)$$

نختزل المعادلة ونرتبها فتصبح كالاتي

$$\left(\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta \right) \frac{d\theta}{dt} = o \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2\cdot59)$$

اما

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right) = o$$

وهذا لايحدث الا في حالة السكون . اذن لابد ان يكون

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = o \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2\cdot60)$$

وعندما تكون الزاوية θ صغيرة بمافيه الـكفاية فيمكن اعتبار ان
$\sin\theta \simeq \theta$

وبذلك تصبح المعادلة الاخيرة كالاتي

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = o \qquad (2\cdot61)$$

وهذا هو الشكل القياسي لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة بدلالة الازاحة الزاوية θ ويمكن وضعها بدلالة الازاحة الخطية S اذا عوضنا $S = l\theta$ فتصبح المعادلـــة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة للبندول البسيط

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{l}s \qquad (2\cdot62)$$

واذا كانت θ صغيرة جداً فان طول القوس s يساوي تقريباً x وبذلك تصبح المعادلة الأخيرة كالآتي :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2\cdot63)$$

لحد الان نحن نتعامل مع البندول البسيط عندما تكون ذبذباته صغيرة والازاحة الزاوية θ من الصفر. بحيث يمكن اجراء التقريب $\sin\theta \simeq \theta$ دون ان يؤثر ذلك في دقة النتيجة بشكل محسوس . ولـكن ماذا يحدث لو ان ذبذبات البندول لم تكن صغيرة ؟ عندئذ ناخذ معادلة الحركة للبندول البسيط لاي زاوية θ وهي (2·60)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

ونعوض مفكوك $\sin\theta$ بدلالة الزاوية النصف القطرية θ من المعادلة (2·41)

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.41)$$

فينتج ان

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots\right) = 0 \qquad \ldots(2\cdot64)$$

ان هذه المعادلة التفاضلية غيرخطية وحلها ليس سهلاً . فهي تحتاج الى رياضيات متقدمة لتحليلها وحلهــا .

ان الزمن الدوري T الذي تعطيه هذه المعادلة لأزاحة زاوية ابتدائية θ_o هو

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\theta_o}{2}\right) + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\theta_o}{2}\right) + \right.$$

$$\left. \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6\left(\frac{\theta_o}{2}\right) + \ldots \right\} , \qquad \ldots (2.65)$$

من هذه المعادلة يتضح ان الزمن الدوري T للبندول البسيط يعتمد على الازاحة الزاوية الابتدائية θ عندما تكون هذه الزاوية كبيرة نسبياً. لكن اذا علمنا ان الخطأ المئوي الذي يسببه اعتبار $\sin\theta = \theta$ لايزيد عن 1.14 عندما تكون قيمة $\theta_o = \frac{\pi}{12}$ اي 15° . عندئذ يمكن اجراء تقريب مقبول في المعادلة الأخيرة وذلك بأخذ الحدين الأولين فقط داخل القوس واهمال الحدود الاخرى. وبذلك تصبح المعادلة (2.65) كالآتي

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \theta^2_o \right) \qquad \ldots (2.66)$$

وبمقارنة الزمن الدوري T للبندول غير الخطي المعطى بالمعادلة (2.66) مع الزمن الدوري T_o للبندول الخطي المعطى بالمعادلة (2.48) نحصل على :

$$\frac{T}{T_o} = \left(1 + \frac{1}{16} \theta^2_o \right) \qquad \ldots\ldots (2.67)$$

ومن مقارنة النتائج النظرية والعملية للنسبة $\frac{T}{T_o}$ لبندول طوله 276 سنتيمتر وجد ان هذه النسبة تتغير مع θ_o كما مبين في الجدول (2.2).

الجدول (2.2)

θ_o درجة	$\omega/_o$ مقياس نصف قطري	T_s ثانية قياس عملي	T/T_o قياس عملي	T/T_o حساب نظري
8.34	0.1456	3.368	1.00	1.00
13.18	0.2300	3.368	1.00	1.00
18.17	0.3171	3.372	1.00	1.01
23.31	0.4068	3.372	1.00	1.01
33.92	0.5011	3.390	1.01	1.02
33.92	0.5920	3.400	1.01	1.02
39.99	0.6980	3.434	1.02	1.03
46.62	0.8137	3.462	1.03	1.04

من هذا الجدول يتضح ان اعتماد الزمن الدوري على الازاحة الزاوية الابتدائية θ_o التي منها يترك البندول ليتذبذب يكون معدوماً عندما $\theta_o \leq 15^\circ$ ويكون طفيفاً جداً عندما $15^\circ < \theta_o < 25^\circ$ ، ويكون واضحاً عندما $\theta_o \geq 30^\circ$

2 - 13 الجسم الطافي

ان اي جسم طافي على سطح سائل اذا ما دفع قليلاً الى الأسفل او رفع قليلاً نحو الأعلى ثم ترك حراً فانه سوف يهتز بحركة صعود ونزول عمودية على سطح السائل . ولايجاد طبيعة هذه الحركة يجب ايجاد معادلة الحركة للجسم الطافي . ان تحليل مثل هذه الحركة يصبح سهلاً اذا تعاملنا مع جسم طاف له مساحة مقطع عرضي ثابت في الجزء الذي يتقاطع مع سطح السائل . لهذا السبب سنفرض ان لدينا جسماً اسطوانياً منتظماً يطفو في سائل بحيث يكون محور الاسطوانة عمودياً على سطح ذلك السائل

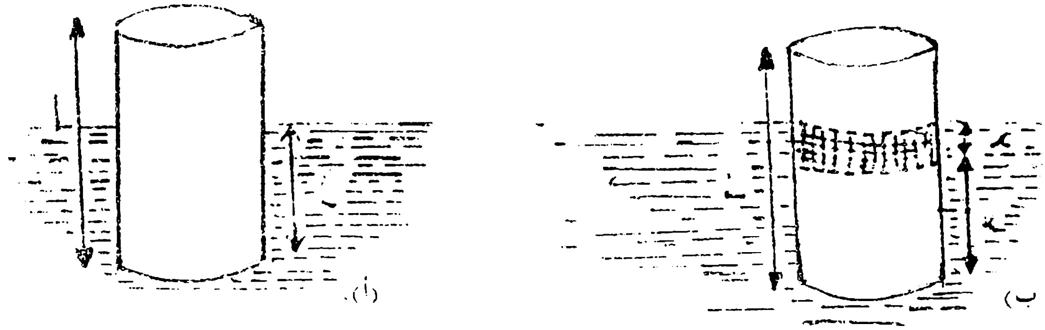
نفرض ان طول الاسطوانة L ومساحة مقطعها العرضي A وكثافتها ρ وان كثافة السائل σ في حالة التوازن نفرض ان طول الجزء المغمور من الاسطوانة داخل السائل هو l كما مبين في الشكل (2.12 أ) وحسب قاعدة ارخميدس بالنسبة للجسم الطافي في حالة التوازن يكون وزن الجسم الطافي مساوياً لوزن السائل المزاح . وبما ان

وزن الاسطوانة = $AL\rho g$

وزن السائل المزاح = $Al\sigma g$

حيث g يمثل التعجيل الارضي .

لذلك فان



الشكل (2.12)

$$AL\rho g = Al\sigma g$$

$$\frac{L}{l} = \frac{\sigma}{\rho} \qquad \text{،} \qquad \ldots(2{\cdot}28)$$

فاذا دفعت الاسطوانة قليلاً نحو الاسفل وكانت الازاحة الآنية عن موضع التوازن تساوي x عند اللحظة الزمنية t كما مبين في الشكل (2·12 ب) فان وزن السائل الاضافي المزاح في هذه الحالة ($Ax\sigma g$) يساوي قوة دفع السائل للاسطوانة نحو الأعلى. وهذه القوة هي الوحيدة المؤثرة في الاسطوانة . وتمثل قوة الاستعادة التي تحاول اعادة الاسطوانة الى موضع توازنها . وتسبب الاهتزاز . فاذا أهملنا حركة السائل المصاحبة لاهتزاز الاسطوانة . ونطبق قانون نيوتن الثاني نجد ان

$$AL\rho \frac{d^2x}{dt^2} = -Ax\sigma g \qquad \ldots(2{\cdot}29)$$

ان الاشارة السالبة تشير الى ان اتجاه قوة دفع السائل يعاكس اتجاه زيادة الازاحة

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\sigma g}{\rho L}x \qquad \ldots(2{\cdot}30)$$

وبمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة القياسية (2·7) نستنتج ان حركة الجسم الطافي اذا رفع او خفض قليلا من موضع توازنه وترك حرا ستكون حركة توافقية بسيطة ترددها الزاوي ω_o هو

$$\omega_o = \sqrt{\frac{\sigma g}{\rho L}} \qquad \ldots(2{\cdot}31)$$

والتردد الطبيعي f_o يمكن الحصول عليه من $\omega_o = 2\pi f_o$ اي ان

$$f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\sigma g}{\rho L}} \qquad \ldots(2{\cdot}32)$$

والزمن الدوري T_o يمكن الحصول عليه من $f_o = \dfrac{1}{T}$ اي ان

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{\rho L}{\sigma g}} \qquad \ldots(2{\cdot}33)$$

ان الازاحة الآنية x في اية لحظة زمنية تكون

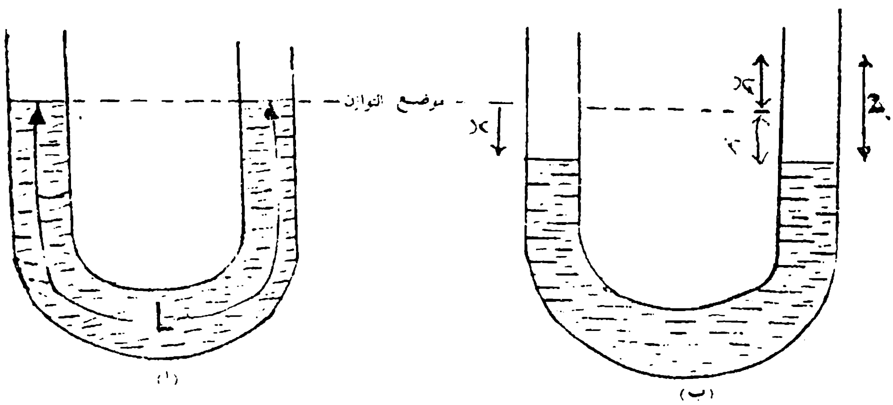
$$x = A \sin\sqrt{\frac{\sigma g}{\rho L}}\, t + B \cos\sqrt{\frac{\sigma g}{\rho L}}\, .\, t \qquad (2.34)$$

حيث A و B ثابتان اختياريان يمكن ايجادهما من الشروط الابتدائية للحركة . فاذا فرضنا انه في اللحظة $t=0$ كانت الازاحة الابتدائية X_o والسرعة الابتدائية $\frac{dx}{dt} = 0$. فمن هذه الشروط نجد ان $B = X_o$ وأن $A=0$ وبذلك يكون الحل العام وفق الشروط الابتدائية المذكورة كالاتي :

$$x = x_o \cos\sqrt{\frac{\sigma g}{\rho L}}\, t \qquad (2.35)$$

14 – 2 السائل في انبوبه على شكل حرف U

نفرض ان لينا انبوبة على شكل حرف U ذات ذراعين قائمين ومساحة مقطع ثابت كما مبين في الشكل (2.13) .



شكل 13 – 2 يبين (أ) السائل في وضع التوازن (ب) السائل في وضع آني غير متوازن

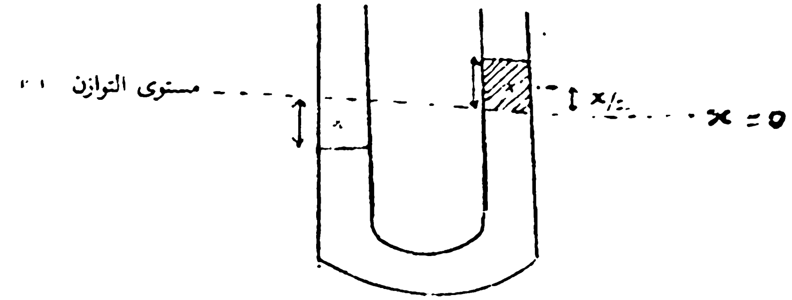
فاذا وضع سائل في الانبوبة فإن مستوى سطح السائل يكون واحداً في كلا الذراعين في حالة التوازن. واذا دفع سطح السائل في احد الذراعين قليلاً نحو الاعلى او الاسفل ثم ترك حراً فإن السائل في الانبوبة سوف يهتز. وطبيعة الحركة الاهتزازية للسائل يمكن معرفتها من معادلة الحركة.

نفرض ان الطول الكلي لعمود السائل هو L وكثافته هي ρ وان مساحة المقطع العرضي للانبوبة هو A لذلك فان الكتلة الكلية للسائل هي $\rho L A$ فاذا أزيح سطح السائل في الذراع الايسر نحو الاسفل إزاحة آنية صغيرة مقدارها x من موضع التوازن في أية لحظة زمنية t. فان مستوى سطح السائل في الذراع الايمن سوف يزاح بنفس المقدار x نحو الاعلى من موضع التوازن، وبذلك يصبح فرق الارتفاع بين سطحي السائل في الذراعين هو 2x إن ثقل عمود السائل الذي طوله 2x يمثل القوة الآنية الوحيدة المؤثرة في السائل وهي قوة الاستعادة التي تحاول إعادة السائل الى موضع توازنه وتسبب الاهتزاز. إن حركة السائل في هذا النموذج لاتكون في بعد واحد بل في بعدين (قارن مع حركة البندول البسيط) الا انه يمكن وصف هذه الحركة بدلالة الازاحة العمودية x في بعد واحد. وفي مثل هذه الحالة يفضل استخدام طريقة الطاقة لايجاد معادلة الحركة للسائل.

نفرض ان جميع اجزاء السائل تتحرك بنفس السرعة الآنية $\frac{dx}{dt}$ لذلك فان الطاقة الحركية الاتية .K.E يمكن كتابتها كالاتي:

$$K.E = \frac{1}{2} (\rho LA) \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad \ldots (2.36)$$

اما الطاقة الكامنة الآنية .P.E فيمكن حسابها من ملاحظة الشكل الآتي:



• في الحقيقة إن حركة السائل هنا ليست حركة إنتقالية بسيطة وليست حركة دورانية بسيطة حول محور ثابت بل أنها حركة في بعدين.

عندما يكون السائل في حالة توازن يكون مستوى السائل واحد في الذراعين . وفي هذه الحالة يكون مقدار الازاحة x صفرا وبذلك تكون الطاقة الكامنة في هذا الوضع مساوية للصفر . أما اذا ارتفع سطح السائل في احد الذراعين (وليكن الذراع الايمن مثلا) مسافة x عن موضع التوازن فان كل جزء من اجزاء السائل المرتفع يختلف ارتفاعه عن موضع التوازن بمسافة تتراوح بين الصفر وال x . وعليه فان كل جزء من السائل المرتفع سيمتلك طاقة كامنة تختلف عن الاجزاء الاخرى التي لاتقع في نفس المستوى . ولتلافي هذا التباين في الطاقة الكامنة في مختلف اجزاء السائل . سنفرض ان كتلة السائل المرتفع مركزة في مركز كتلة كمية السائل المحصور بين مستوى التوازن والازاحة x . وبما ان السائل المرتفع متجانس وشكله اسطواني منتظم لذلك فان مركز كتلته سيقع في منتصف الازاحة x . وعليه تكون الطاقة الكامنة التي يمتلكها السائل المرتفع في الذراع الايمن هي

$$(\rho A x) \cdot g \frac{1}{2} x$$

وبنفس الطريقة يمكن حساب الطاقة الكامنة التي يمتلكها السائل المزاح في الذراع الآخر وتساوي نفس المقدار وبذلك يكون مجموع الطاقة الكامنة الآنية P.E. التي يمتلكها السائل هي :

$$P.E. = \rho A g x^2 \qquad \ldots(2\cdot37)$$

الآن نطبق قانون حفظ الطاقة على اعتبار انه ليس هنالك اي فقدان في الطاقة فنحصل على

$$E = \rho A g x^2 + \frac{1}{2} (\rho A L) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \text{مقدار ثابت} \qquad \ldots(2\cdot38)$$

نفاضل الطرفين بالنسبة للزمن t فنجد ان

$$2\rho A g x \frac{dx}{dt} + \rho A L \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

---

* وفي الحقيقة هناك طريقة اخرى مباشرة لايجاد الطاقة الكامنة وذلك من خلال تصوران عمود السائل الذي طوله x قد نقل من الذراع الايسر للانبوبة الى الذراع الايمن وارتفع مركز كتلته مسافة x عن موضع التوازن دون ان يؤدي ذلك الى اضطراب بقية السائل . والشغل اللازم لرفع ثقل مقداره $\rho A g x$ مسافة قدرها x يمثل الطاقة الكامنة للسائل P.E وبصيغة رياضية

$$P.E. = (\rho A g x) x$$

نقسم على ρA ونرتب المعادلة فتصبح كالآتي

$$\frac{dx}{dt}\left(L\frac{d^2x}{dt^2}+2gx\right)=0$$

اما

$$\frac{dx}{dt}=0$$

وهذا لايتحقق دائما الا في حالة سكون السائل لذلك فان

$$L\frac{d^2x}{dt^2}+2gx=0$$

وعليه فان

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{2g}{L}x \qquad (2{\cdot}39)$$

هذه هي المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة . حيث أن المقدار $\left(\frac{2g}{L}\right)$ يمثل التردد الزاوي ω_o

اي ان

$$\omega_o=\sqrt{\frac{2g}{L}} \qquad \ldots(2{\cdot}40)$$

ومنها نحصل على التردد الطبيعي

$$f_o=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{L}} \qquad \ldots(2{\cdot}41)$$

والزمن الدوري T_o

$$T_o=2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}} \qquad \ldots(2{\cdot}42)$$

ان هذه المعادلة تشير الى ان الزمن الدوري لاهتزاز السائل لايعتمد على مساحة مقطع الانبوبة أو نوعية السائل المستخدم . وبالحقيقة لايعتمد ايضاً على شكل الانبوبة .
ان الحل العام للمعادلة (2·39) هو

$$x=A\sin\sqrt{\frac{2g}{L}}\,t+B\cos\sqrt{\frac{2g}{L}}\,t \qquad \ldots(2{\cdot}43)$$

حيث A و B ثابتان اختياريان يمكن ايجادهما من الشروط الابتدائية للحركة. فاذا علمنا في اللحظة الزمنية $t=0$ الازاحة الابتدائية هي x_o والسرعة الابتدائية هي O فإن $B = X_o$ وان $A = 0$ وبذلك يكون الحل العام وفق الشروط المذكورة هو
.... (2.44)

$$x = x_o \cos \sqrt{\frac{2g}{L}}\, t$$

ويمكن إيجاد نفس معادلة الحركة (2.39) من تطبيق قانون نيوتن الثاني في الحركة مباشرة. فمن ملاحظة الشكل (2.13 ب) نجد ان فرق الارتفاع بين سطحي السائل في الذراعين هو 2x ان وزن عمود السائل الذي طوله 2x هو $2x\rho Ag$ وهذا يمثل قوة الاستعادة الوحيدة المؤثرة على كتلة السائل (ρLA) التي تحاول اعادته الى موضع توازنه الاصلي.

ومن تطبيق قانون نيوتن الثاني نحصل على

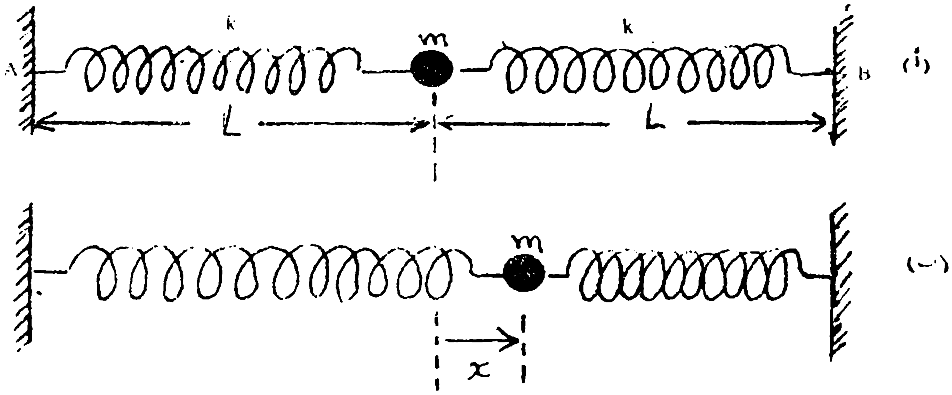
$$\rho LA \frac{d^2x}{dt^2} = -2x\rho Ag$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2g}{l} . x$$

15 – 2 الاهتزاز الطولي لجسيم بين نابضين متماثلين

نفرض ان لدينا جسيماً كتلته m مربوطاً بين نابضين حلزونيين متماثلين تماماً لهما نفس الطول l ونفس الثابت k. ويكون الجسيم موضوعاً على سطح افقي أملس عديم الاحتكاك. والطرفان الاخران للنابضين مثبتين في النقطتين B,A كما مبين في الشكل (2.14 أ). في هذه الحالة يكون الجسيم في حالة توازن اي ان محصلة القوى المؤثرة فيه تساوي صفراً.

فاذا أزيح الجسيم إزاحة طفيفة x من موضع التوازن o نحو جهة اليمين فان تشوهاً طولياً يحدث في النابضين. فالنابض الايسر يتمدد بينما النابض الايمن ينكمش كما هو موضح في الشكل (2.14 ب).



شكل (2.14)

ان قوة الاستعادة F التي تظهر في النابض الايسر تكون متجهة نحو وتعطى المعادلة.

$$F = -Kx$$

وان قوة الاستعادة F التي يظهرها النابض الايمن تكون متجهة نحو اليسار ايضاً وتعطى المعادلة.

$$F = Kx$$

ان الاشارة السالبة في المعالدتين الاخيرتين تشير الى ان اتجاه القوة معاكس لاتجاه زيادة الازاحة

واذا كانت القوتان تؤثران بنفس الاتجاه تكون محصلتها هي $\Sigma F = -2Kx$

الان نطبق قانون نيوتن الثاني في الحركة فنجد ان

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2kx \qquad \text{......... (2.45)}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2k}{m}x \qquad \text{......... (2.45)}$$

هذه تمثل معادلة الحركة التوافقية البسيطة لجسم يتحرك طولياً باتجاه النابضين بتردد زاوي ω_0 حيث

$$\omega_o = \sqrt{\frac{2k}{m}} \qquad \ldots(2\cdot46)$$

ومن هذه العلاقة نحصل على التردد الطبيعي f_o حيث

$$f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}} \qquad \ldots(2\cdot47)$$

والزمن الدوري T_o حيث

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} \qquad \ldots(2\cdot48)$$

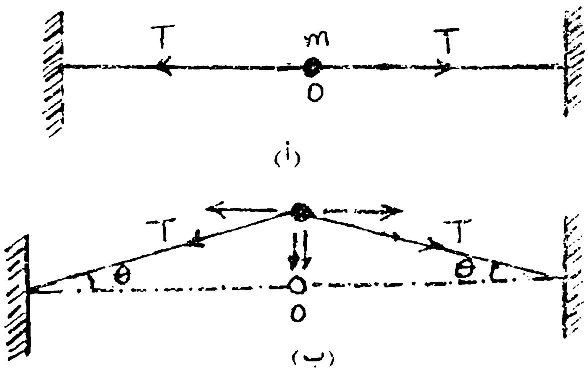
ان الحل العام للمعادلة (2·45) هو

$$x = A\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}\,.\,t + B\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\,.\,t \qquad \ldots(2\cdot49)$$

حيث A , B ثابتان اختياريان يمكن ايجادهما من الشروط الابتدائية للحركـة .

2 — 16 الاهتزاز المستعرض لجسيم في وسط سلك متوتر

لنفرض ان لدينا جسيما كتلته m مربوطا في وسط خيط مرن خفيف طوله L ومشدودا بقوة شد مقدارها T كما مبين في الشكل (2·15 أ)
عندما يكون الجسيم في موضع التوازن o تكون محصلة القوى المؤثرة فيه صفـراً .



الشكل (2·15)

فاذا ازيح الجسيم ازاحة مستعرضة صغيرة عن … ن موضع التوازن . فان محصلة قوة تظهر نتيجة تحليل قوة التوتر في نصفي السلك … تين الأفقيتين متساويتان بالمقدار ومتعاكستان بالاتجاه لذلك تبقى القوى الطو… ي الجسيم متعادلة . بينما المركبتان العموديتان على اتجاه السلك الاصلي … اويتين بالمقدار وبنفس الاتجاه وتكون محصلتهما هي $2T \sin\theta$. هذه ا… شة تمثل قوة الاستعادة التي تحاول اعادة الجسيم الى موضع توازنه الا… تسبب الاهتزاز المستعرض . يجب الانتباه الى ان الازاحة المستعرضة يجب … الصغر بحيث لاتؤثر في شدة التوتر في السلك الذي ينبغي ان يبقى ثا… وبتطبيق قانون نيوتن الثاني في الحركة نجد ا…

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -2T \sin\theta \qquad \ldots(2{\cdot}50)$$

فاذا كانت الازاحة y صغيرة جدا بالمقارنة مع … ل السلك فأنه يمكن استخدام التقريب $\sin\theta = \frac{y}{L/2}$ عندئذ تصبح المعا… دلة كالاتي :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = - \frac{4T}{mL} y \qquad \ldots(2{\cdot}51)$$

وهذه معادلة الحركة التوافقية البسيطة . حيث $\omega_o = \sqrt{\ldots}$ والتردد الطبيعي للاهتزاز المستعرض f_o هو

$$f_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4T}{mL}} \ldots \sqrt{\frac{T}{mL}} \qquad \ldots(2{\cdot}52)$$

والزمن الدوري T_o هو

$$T_o = \pi \sqrt{\frac{mL}{T}} \qquad \ldots(2{\cdot}53)$$

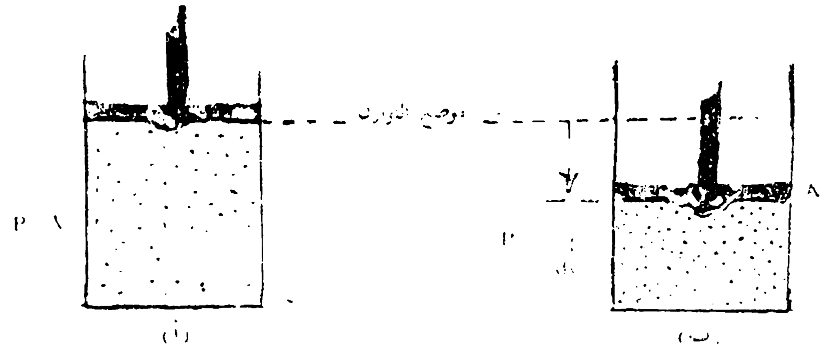
ان الحل العام للمعادلة (2·51) هو

$$y = A \sin 2 \sqrt{\frac{T}{mL}} \ldots 2 \sqrt{\frac{T}{mL}} \cdot t \qquad \ldots(2{\cdot}54)$$

حيث B,A ثابتان اختياريان يمكن ايجادهما … ة الابتدائية للحركة

13-2 اهتزاز المكبس في اسطوانة تحتوي على غاز

لنفرض ان لدينا كمية من الغاز محصور داخل اسطوانة منتظمة مزودة بمكبس عديم لاحتكاك وكتلته m في حالة التوازن يكون حجم الغاز وضغطه ثابتين والمكبس ساكناً كما بين في الشكل (2.16 أ).



الشكل (2.16) يبين (أ) المكبس في وضع التوازن (ب) المكبس في وضع آني غير متوازن

فاذا دفع المكبس قليلاً نحو الداخل ثم يترك حراً فانه سيبدأ بالاهتزاز. لايجاد طبيعة هذا الاهتزاز يجب ايجاد معادلة الحركة للمكبس.

نفرض ان حجم الغاز الاصلي عندما يكون المكبس في حالة التوازن هو V_o وان ضغطه المقابل هو P_o ونفرض ان مساحة المقطع العرضي للمكبس هو A وهذا يمثل مساحة المقطع العرضي للاسطوانة ايضاً.

فاذا ازيح المكبس ازاحة صغيرة مقدارها x نحو الداخل فان ذلك يؤدي الى تغير حجم الغاز بالمقدار $dV = AX$ والتغير المقابل في الضغط هو dp. واذا فرضنا ان العملية تتم بثبوت درجة الحرارة لذلك يمكن تطبيق قانون بويل على الغاز المحصور فنجد ان $P_1V_1 = P_2V_2 = \text{constant}$ اي ان

$$P_oV_o = (P_o + dp)(V_o - dV)$$

نفك الاقواس فنحصل على

$$P_oV_o = P_oV_o - P_o dV + V_o dp - dp dV$$

نهمل الحد الاخير لانه حاصل ضرب كميتين صغيرتين جداً بالمقارنة مع الحدود الاخرى فنحصل على

$$dp = p_o \frac{dV}{V_o} = \frac{p_o \acute{A} x}{V_o} \quad \text{.....(2.55)}$$

ان dp يمثل مقدار الزيادة بالضغط الذي يؤدي الى زيادة القوة المسلطة على المكبس بالمقدار F حيث

$$F = dp.\acute{A} \quad \text{..... (2.56)}$$

ان F هنا تمثل قوة الاستعادة المسلطة على المكبس لتحاول اعادته الى موضع توازنه الاصلي O. وهذه القوة تؤثر باتجاه معاكس لاتجاه زيادة الازاحة x وعليه فان

$$F = -\frac{p_o \acute{A}^2}{V_o} .X \quad \text{.....(2.57)}$$

الآن نطبق قانون نيوتن الثاني في الحركة فنحصل على

$$m = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{p_o A^2}{V_o} .x \quad \text{....(2.58)}$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{p_o \acute{A}^2}{V_m} .x$$

من هذه المعادلة يلاحظ ان التعجيل يتناسب طردياً مع الأزاحة x لذلك فان حركة المكبس هي حركة توافقية بسيطة ترددها الزاوي هو

$$\omega_o = \sqrt{\frac{p_o A^2}{V_o m}} \quad \text{....(2.59)}$$

والتردد الطبيعي للمكبس f_o هو

$$f_o = \frac{\acute{A}}{2\pi}\sqrt{\frac{p_o}{V_o m}} \quad \text{.... (2.60)}$$

والزمن الدوري T_o هو

$$T_o = \frac{2\pi}{\acute{A}}\sqrt{\frac{V_o m}{p_o}} \quad \text{....(2.61)}$$

والحل العام للمعادلة (2.58) هو

$$x = A \sin \acute{A}\sqrt{\frac{p_o}{V_o m}}.t + B \cos \acute{A}\sqrt{\frac{p_o}{V_o m}}.t \quad \text{.....(2.62)}$$

حيث B,A ثابتان اختياريان يمكن ايجادهما من الشروط الابتدائية للحركة في اللحظة الزمنية $t = 0$

ونترك للطالب كتمرين ايجاد معادلة الحركة للمكبس اذا ما خضع الغاز المحصور لعملية كظيمة – وهي الحالة الأكثر قرباً للواقع العملي .

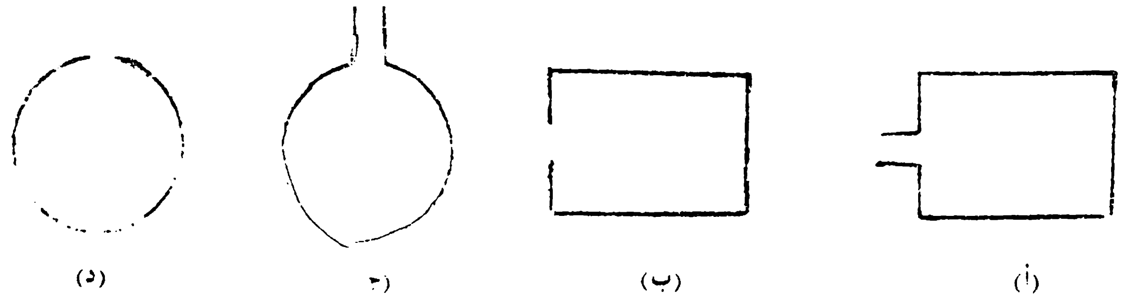
2 – 18 المرنان

ان اي تجويف مهما كان شكله ويحتوي على هواء وله فتحة ضيقة كالقنينة الزجاجية مثلاً يدعى بـ (تجويف الرنين) أو المرنان . ان الهواء المحصور داخل التجويف له تردد طبيعي يدعى بالتردد الرنيني . فاذا وضعت شوكة رنانة مهتزة ذات تردد طبيعي معين بالقرب من فتحة مرنان له نفس التردد فان الهواء داخل ذلك المرنان سيستجيب بقوة لحركة الشوكة الرنانة ويهتز بنفس ترددها . ونتيجة ذلك سينبعث صوت مسموع من فتحة المرنان وقد اثبتت التجارب ان التردد الطبيعي لاهتزاز الهواء في اي تجويف يعتمد على حجمه ومساحة فتحته ولايعتمد على شكله .

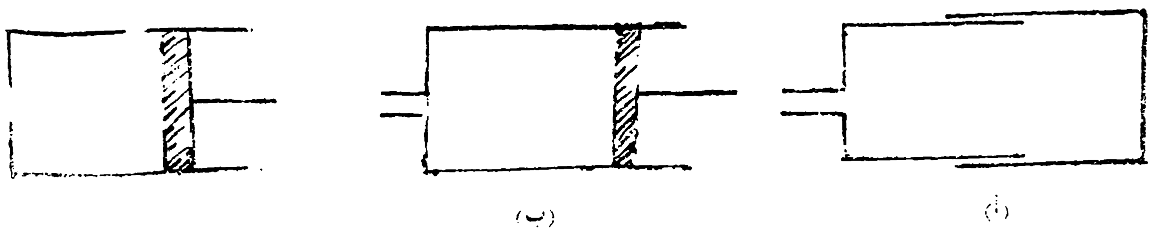
وقد كان العالم الالماني هيلمهولتز من الرواد في استخدام مثل هذا المرنان لتحليل الاصوات المعقدة . حيث صنع مجموعة من المرانين الكروية من النحاس ذات حجوم مختلفة . وعندما يحلل أي صوت مركب من ترددات كثيرة فانه يستخدم هذه المجموعة من المرانين، وعندما يحدث الرنين في اي مرنان يستنتج ان الصوت المركب يحتوي على نغمة لها تردد مساوٍ للتردد الطبيعي لذلك المرنان .

ان المرنان ياخذ اشكال مختلفة ، ولكن الشكل المألوف عادة يكون كروياً أو اسطوانياً . وقد يكون لفتحة المرنان عنق او بدون عنق كما مبين في الشكل (2·17)
وهنالك مرانين متغيرة الحجم وقد يكون لها عنق أو بدون عنق كما مبين في الشكل (2·18)

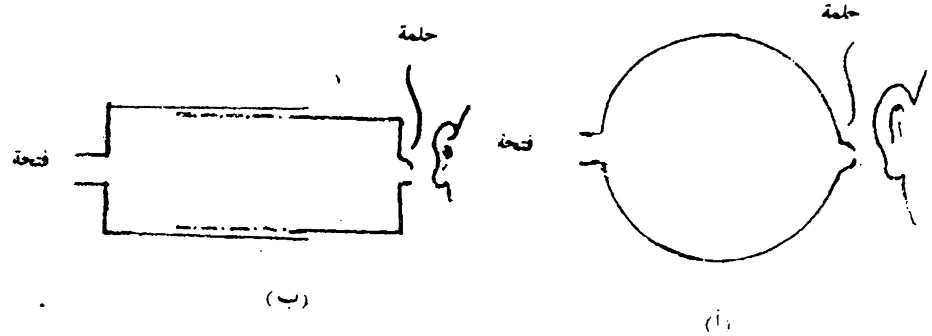
وقد طور هيلمهولتز تركيب المرنان ليتضمن حلمة مفتوحة يمكن وضعها في الاذن لألتقاط أي صوت ضعيف عند أي تردد محدد . والشكل (2·19) يبين نوعين من مرانين هيلمهولتز . النوع الاول (أ) مصمم للاستجابة لتردد محدد ثابت ، والنوع الثاني مصمم للاستجابة لترددات مختلفة وذلك من خلال تغيير الحجم .



شكل (2·17) يبين (1) مرنان اسطواني (أ) بعنق (ب) بدون عنق و (2) مرنان كروي (ج) بعنق (د) بدون عنق



شكل (2·18) مرانين متغيرة الحجم (أ) و(ب) بعنق و(ج) بدون عنق

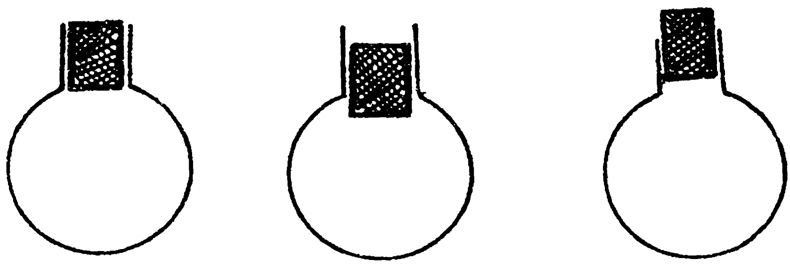


شكل (2.19) مرنان هيلمهولتز (أ) ثابت الحجم (ب) متغير الحجم

19 – 2 نظرية المرنان

لنفرض ان لدينا مرناناً كروي الشكل حجمه V_o وله عنق اسطواني طوله الفعلي l ومساحة مقطعه العرضي A. لقد إفترض العالم الانكليزي اللورد رالي في حالة كون هذه الابعاد صغيرة بالمقارنة مع الطول الموجي للصوت الذي يستجيب له المرنان فإن الهواء في عنق المرنان يتحرك كقطعة واحدة اي كالسداد او المكبس تماماً. وفي حالة التوازن يكون ضغط الهواء داخل المرنان وخارجه واحداً فاذا تحرك المكبس الهوائي (اسطوانة الهواء في عنق المرنان) حركة ذهاب وإياب حول موضع توازنه بسبب تأثير قوة خارجية متناوبة كالشوكة الرنانة مثلاً فانه عندما يندفع قليلاً نحو الداخل فان الهواء في المرنان ينكبس مما يؤدي الى زيادة ضغطه عن الضغط الخارجي فيؤدي الى ظهور قوة تدفع المكبس الهوائي نحو الخارج. وحالما يتجاوز المكبس موضع توازنه نحو الخارج يتخلخل ضغط الهواء في المرنان مما يؤدي الى نقص ضغطه عن الضغط الخارجي مما يؤدي الى ظهور قوة تدفع المكبس الهوائي نحو الداخل وهكذا تتكرر عملية الذهاب والاياب بسبب ظهور قوة استعادة تحاول دائماً اعادة المكبس الهوائي الى موضع توازنه. وهكذا يبدو ان الهواء داخل المرنان يسلك سلوكاً مشابهاً لسلوك نابض حلزوني مرن بينما اسطوانة الهواء في العنق تسلك سلوك الكتلة المتصلة بطرف النابض.

الشكل (2.20) يبين اوضاع مختلفة للمكبس الهوائي :
ان كتلة اسطوانة الهواء في العنق = ρlA ،
حيث ρ تمثل كثافة الهواء في حالة التوازن .



الشكل (2.20) يبين اوضاع مختلفة للمكبس الهوائي في العنق

اذا ازيحت اسطوانة الهواء ازاحة صغيرة مقدارها x نحو الداخل فإن حجم الهواء في المرنان سينقص بمقدار dV حيث $dV = Ax$. فإذا كانت الحركة الاهتزازية لاسطوانة الهواء سريعة فان العملية تكون كظمية (اديباتيكية) وعليه يخضع الهواء داخل المرنان للمعادلة :
مقدار ثابت = $(p + dp)(v - dv)^{\gamma} = PV^{\gamma}$

حيث P هو الضغط الآني للهواء و X هو الحجم الآني للهواء الذي يقابل الضغط P و γ تمثل النسبة بين السعة الحرارية ~~للهواء~~ تحت ضغط ثابت الى السعة الحرارية للهواء تحت حجم ثابت .
بتفاضل المعادلة : ثابت = PV^{γ} فينتج $V^{r}dp + rV^{r-1}pdV = 0$

ومن ذلك نحصل على
(أ 63 – 2)
$$dp = -\frac{\gamma p}{V}dV$$
ولكن
$$dV = A\,dx$$
لذلك فان

$$dp = -\frac{\gamma P A}{V}x \qquad \text{(ب 63 – 2)}$$

ان هذه الزيادة بضغط الهواء dp تؤدي الى ظهور قوة استعادة مقدارها F تؤثر في اسطوانة الهواء. وهذه القوة يمكن ايجادها من العلاقة

$$dp = \frac{F}{A}$$

$$\therefore F = dp.A = -\frac{\gamma P A^2}{V}x \qquad ...(2.64)$$

ان هذه القوة F المؤثرة على كتلة اسطوانة الهواء ρlA تؤدي الى اكسابها تعجيل مقداره

$$\frac{d^2x}{dt^2}$$

الآن نطبق قانون نيوتن الثاني في الحركة فنجد ان

$$\rho lA.\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\gamma P A^2}{V}.x \qquad ...(2.65)$$

نرتب هذه المعادلة فتصبح كالآتي

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\gamma P A}{\rho V l}.x \qquad ....(2.66)$$

ان هذه المعادلة تشير الى ان التعجيل يتناسب طرديا مع مقدار الازاحة. مما يعني ان حركة اسطوانة الهواء هي حركة توافقية بسيطة لها تردد زاوي ω_o حيث

$$\omega_o = \sqrt{\frac{\gamma PA}{\rho Vl}} \qquad ...(2.67)$$

والتردد الطبيعي للمرنان (اي تردد الرنين) f_o هو

$$f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma PA}{\rho Vl}} \qquad .....(2.68)$$

لكن سرعة الصوت في الهواء c هي

$$= \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

$$f_0 = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{l}\cdot\frac{1}{V}} \qquad ...(2\cdot69)$$

f_0 الثابت $\sqrt{\frac{1}{V}}$

ان النسبة $\frac{A}{l}$ تعرف بـ (التوصيلية الصوتية للعنق) ان هذه المعادلة تشير الى ان المقدار $f_0^2 V$ يكون ثابتاً لأي مرنان $f_0 \propto \sqrt{\frac{1}{V}}$

ان الحل العام للمعادلة (2·66) هو

$$x = C\sin c\sqrt{\frac{A}{Vl}}\,.\,t + D\cos c\sqrt{\frac{A}{Vl}}\,.\,t \qquad ...(2\cdot70)$$

حيث C و D ثابتان اختياريان يمكن ايجادهما من الشروط الابتدائية للحركة في اللحظه الزمنيـــة $t = 0$

أما اذا كان المرنان بدون عنق فانه يخضع لنفس التحليل النظري باستثناء انكتلة الهواء في فوهة المرنان التي تسلك سلوك السداد المتحرك يتعذر تعيين شكلها تماماً مما يقتضي ان يكون التحليل بالضرورة تقريبياً . والحقيقة ان كتلة الهواء المتحرك لايكون شكلها اسطوانيا كما في الحالة السابقة بل مقارب لشكل العدسة اللامة .

وقد وجد ان التوصيلية الصوتية للفتحة الدائرية الصغيرة في جدار رقيق تساوي تقريباً (2r) حيث r يمثل نصف قطر الفتحة الدائرية . وعليه يكون التردد الطبيعي لمرنان بدون عنق هو

$$f_0 = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{2r}{V}} \qquad ...(2\cdot71)$$

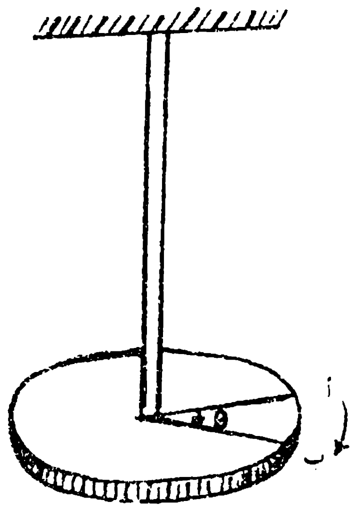
20 2 الحركة الزاوية التوافقية البسيطة

لقد وجدنا ان الحركة التوافقية البسيطة يمكن ان تكون خطية أو زاويّة وذلك تبعاً لطبيعة حركة الجسيم المهتز . فاذا كانت حركة الجسيم مقيدة بمسار خطي وتحت تأثير قوة معيدة تحاول اعادته دائماً الى نقطةالتوازن وصفت حركته بأنها حركة خطية توافقية واذا كانت حركة الجسيم مقيدة بمسار دائري حول محور ثابت وتحت تأثير عزم قوة يحاول اعادته دائماً الى موضع التوازن فعندئذ توصف الحركة بأنها حركة زاوية توافقية . وفي الواقع اننا اسهبنا في شرح وتحليل الحركة الخطية التوافقية البسيطة ،

ومن المناسب هنا ولغرض ايفاء الموضوع حقه سنتطرق الى الحركة الزاوية التوافقية البسيطة وسنجد ان هناك تشابها واضحاً في شكل معادلات الحركتين التوافقيتين الخطية والزاوية . وسنكتفي هنا بدراسة مهتزين زاويين مألوفين عملياً هما بندول اللي والبندول الفيزياوي (او البندول المركب) .

بندول اللي

يتألف بندول اللي من قرص اسطواني معلق من مركزه بطرف قضيب رقيق (او سلك) يتصل بمركز ثقل القرص اتصالاً وثيقاً ويتصل الطرف الآخر من القضيب بمسند ثابت كما مبين في الشكل (2-21)



الشكل (2-21) يبين بندول اللي والقرص ينحرف بزاوية θ حول محور يمر بمركزي القرص والقضيب .

عندما يكون البندول في وضع التوازن اي في حالة سكون نرسم خطاً من المركز الى النقطة أ كما هو موضح في الشكل . اذا ادير القرص افقياً الى النقطة ب بزاوية صغيرة θ يحدث ليّ في القضيب ونتيجة ذلك يؤثر القضيب بعزم ليّ (L) يعمل على اعادة البندول الى موضع التوازن الاصلي . ومن قانون هوك الذي يشير الى ان عزم ليّ الارجاع L يتناسب طردياً مع مقدار الليّ الذي يتمثل بمقدار الازاحة الزاوية θ اي ان

$$L \,\alpha\, \theta$$

وبذلك نحصل على

$$L = -K\theta \qquad (2.72)$$

حيث ان K هو ثابت التناسب ويدعى بثابت اللي ويتوقف مقداره على طول وقطر وطبيعة مادته. والاشارة السالبة توضح إن عزم اللي يعمل في اتجاه معاكس لاتجاه الازاحة الزاوية.

فاذا تحرر البندول بعد ازاحته بزاوية θ فإن عزم اللي الذي يمثل عزم القوة المعيدة يولد تعجيل زاوي $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ يتناسب طردياً مع الازاحة الزاوية (θ)، والحركة الناتجة تدعى الحركة الزاوية التوافقية البسيطة. ومعادلة الحركة لهذا البندول هي

$$L = K\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (2.73)$$

حيث ان I يمثل عزم القصور الذاتي للقرص

وعليه هذه المعادلة تصبح

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{K}{I}\theta \qquad \ldots(2.74)$$

نلاحظ ان شكل هذه المعادلة مطابق تماما من وجهة النظر الرياضية للمعادلة القياسية للحركة الخطية التوافقية البسيطة.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}x \qquad \ldots\ldots(2.75)$$

فاذا استبدلنا الازاحة الخطية x بالازاحة الزاوية θ والكتلة m بعزم القصور الذاتي I وثابت النابض k بثابت اللي K فالحل العام للمعادلة (2 – 74) يمكن الحصول عليه بنفس الطريقة السابقة فنجد ان الازاحة الزاوية θ في أية لحظة زمنية t هي

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t - \alpha) \qquad (2.76)$$

حيث أن θ_0 هـي النهاية العظمـى للازاحة الزاوية أي سعة الذبذبة الزاوية و α هـي زاوية الـطور الابتدائـي للحركـة و ω_0 هـو التردد الزاوي والترددالزاوي لبندول اللـي هو

$$\omega_o = \sqrt{\frac{K}{I}} \qquad \ldots(2\text{·}77)$$

ومنها نجد التردد الطبيعـي f_o والزمن الدوري T_o على الترتيب :

$$f_o = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{K}{I}} \qquad \ldots(2\text{·}78)$$

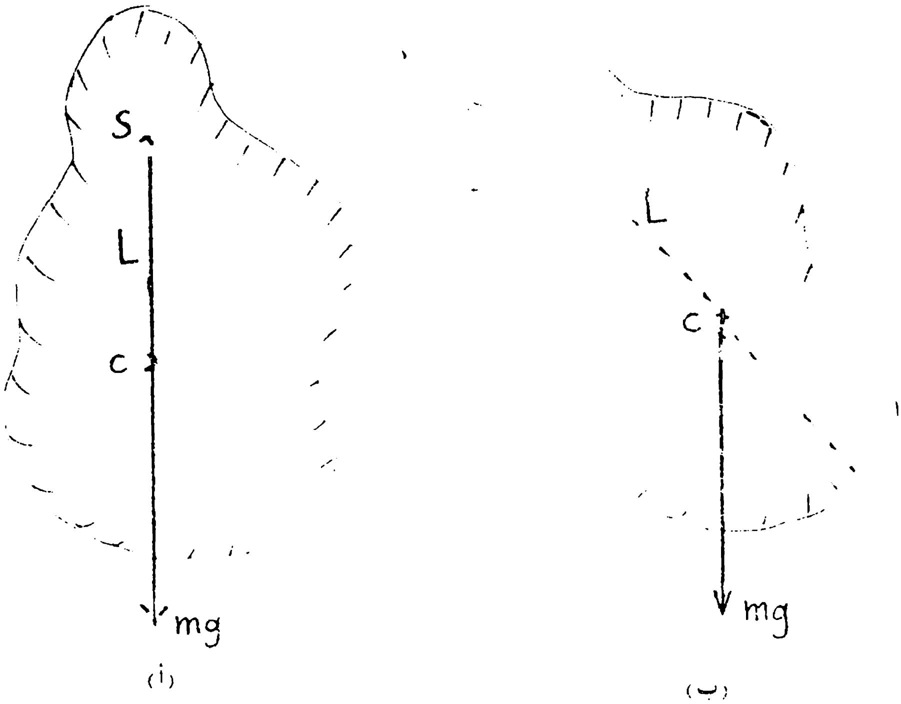
$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}} \qquad \ldots(2\text{·}79)$$

البندول الفيزيائي (أو البندول المركب) :

أن أي جسم صلب مهما كان شكله وقادر على التذبذب حول أي محور افقـي يمر خلاله يدعـى بالبندول الفيزيائـي (المركب) . وفـي الواقـع فان جميع البندولات الحقيقية هـي بندولات فيزياوية . وما البندول البسيط الا حالة خاصة من هذا النوع من البندولات .

لنأخذ بندول فيزياوي على شكل جسم غير منتظم يمكنه ان يدور حول محور أفقي املس يمر من النقطة S التي تدعـى بنقطة التعليق كما مبين في الشكـــل (2·22)

يلاحظ من الشكل (أ 22 - 2) انه في حالة التوازن يقع مركز الـكتلة c للجسم على نفس الخط العمودي المار بنقطة التعليق S فاذ فرضنا ان المسافة بين نقطـة التعليق ومركز الـكتلة هي L وان كتلة الجسم هي m وان عزم القصور الذاتي للجسم حول نقطة التعليق حيث يمر محور الدوران هي I في اية لحظة زمنية تكون القوة المؤثرة على الجسم عموديا نحو الاسفل هي mg وعند ازاحة الجسم ازاحة زاويـة صغيرة θ فان الخط الواصل بين S و c يصنع زاوية θ مع العمود وبذلك يكون



الشكل 2 - 22 يبين (أ) البند … ـب (ب) البندول وقد ازيح ازاحة زاوية θ عن موضع التوازن

…ه القوة المعيدة التي تحاول … ـسم الى موضع توازنه الاصلي تساوي $mg\,L\sin\theta$
، هذا العزم الوحيد الذي … ل الزاوي $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ في البندول . وعليه فان
معادلة الحركة للبندول هي

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\,mgL\sin\theta \qquad ...(2\text{-}80)$$

ان الاشارة السالبة هنا تشير … ة المعيدة متجهة دائما نحو موضع التوازن . واذا
كانت الزاوية θ صغيرة … . فعندئذ تكون العلاقة $\sin\theta = \theta$ صحيحة
لدرجة عالية من الدقة . . … ح المعادلة (2 - 80) كالاتي :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgL}{I}\right)\theta \qquad \text{.........} (2-81)$$

وهذه تمثل معادلة الحركة الزاوية التوافقية البسيطة التي تحدث عندما تكون السعات صغيرة . وفي هذه الحالة يكون التردد الزاوي ω_o هو

$$\omega_o = \sqrt{\frac{mg\,L}{I}} \qquad \text{...............} (2-82)$$

ومن هذه العلاقة نجد التردد الطبيعي f_o والزمن الدوري T_o على الترتيب

$$f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg\,L}{I}} \qquad \text{..............} (2-83)$$

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\,L}} \qquad \text{..............} (2-84)$$

ويمكن ايجاد قيمة عزم القصور الذاتي I حول محور الدوران من العلاقة

$$I = m\,L^2 + m\,K^2$$

حيث ان K يمثل نصف قطر التدويم حول مركز كتلة البندول وبالتعويض نجد ان التردد الطبيعي للبندول المركب هو

$$f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{gL}{L^2 + K^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L + K^2 / L}}$$

وان الزمن الدوري هو

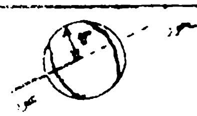
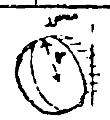
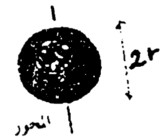
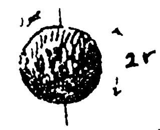
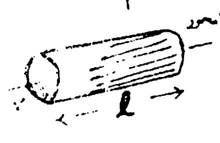
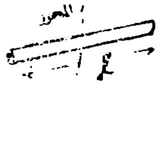
$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{L + K^2 / L}{g}}$$

وهنا يشير المقدار $\left(L + \frac{K^2}{L}\right)$ الى الطول المكافيء للبندول البسيط .

وجدير بالذكر انه في حالة السعات الكبيرة تكون حركة البندول الفيزيائي دورية ، ولكنها لاتكون توافقية بسيطة . وبالنظر لاهمية عزم القصور الذاتي في حل المسائل المتعلقة

بالنبدول المركب سنعطي هنا جدولاً يضم القصور الذاتي لبعض الاجسام [illegible]
محاور معينة .

جدول (2-3) عزم القصور الذاتي لبعض الاجسام [illegible]

[illegible]	شكل الجسم ومحور الدوران
	حلقة (طوق) حول محور الحلقة 
	حلقة حول اي قطر 
	حلقة حول اي مماس 
	كرة صلبة مصمتة حول اي قطر 
	قشرة كروية رقيقة جداً حول اي قطر 
	اسطوانة مصمتة (او قرص) حول المحور 
	اسطوانة مصمتة (او قرص) حول قطر مركزي 
	ساق رقيقة حول محور يمر بمركزها وعمودي على طولها 

امثلة محلولة

مثال ([illegible])

جسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة ، ازاحته 12 سم في اللحظة التي تكون فيها سرعته 5 سم / ثا وازاحته 5 سم في اللحظة التي تكون فيها سرعته 12 سم / ثا . احسب (أ) سعته (ب) تردده (جـ) زمنه الدوري .

الحـــل

ان السرعة الآنية لجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة هي

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega \sqrt{c^2 - x^2}$$

في اللحظة الأولى لدينا

$$v_1 = \omega \sqrt{c^2 - x_1^2}$$

حيث

$$5 = v_1 \quad \text{سم / ثا}$$
$$12 = x_1 \quad \text{سم}$$

وبالتعويض نحصل على

$$5 = \omega \sqrt{c^2 - 144} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

وفي اللحظة الثانية لدينا

$$v_2 = \omega \sqrt{c^2 - x_2^2}$$
$$12 = v_2 \quad \text{سم / ثا}$$
$$5 = x_2 \quad \text{سم}$$

حيث

نعوض فنجد

$$12 = \omega \sqrt{c^2 - 25} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

نقسم (2) على (1) ثم نربع الطرفين فنحصل على

$$\frac{144}{25} = \frac{c^2 - 25}{c^2 - 144}$$

ومنها نجد قيمة السعة C هي :

$$C = 13 \text{ سم}$$

نعوض قيمة السعة C = 13 سم في المعادلة (1) و (2) . ولنعوض في المعادلة (1) .

$$5 = \omega \sqrt{(13)^2 - 144}$$

فنجد ان قيمة التردد الزاوي ω_o هو

$\omega_o = 1$ زاوية نصف قطرية لكل ثانية

ومن العلاقة $\omega_o = 2\pi f$

نجد قيمة التردد f حيث

$$f = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \text{ هيرتز}$$

ومن العلاقة $f = \frac{1}{T}$

نجد قيمة الزمن الدوري T حيث

$T = 2\pi = 6.28$ ثانية

مثـــال (2.2)

جسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة ازاحته الآنية x بالسنتمترات معطاة بالمعادلة :

$$x = 12 \sin\left(\frac{2\pi t}{10} + \frac{\pi}{4}\right)$$

احسب مايلي :

1 - السعة 2 - التردد 3 الزمن الدوري

4 زاوية الطور الأبتدائي للحركة 5 زاوية الطور في اللحظة الزمنية t = 5 ثا

6 - فرق الطور بين موضعين للجسيم يفصلهما فترة زمنية 15 ثا .

7 - الأزاحة والسرعة والتعجيل في اللحظة الزمنية t = 1.25 ثا

8 النهاية العظمى للازاحة والسرعة والتعجيل .

الحـــل :

لدينا معادلة الأزاحة الآنية للجسيم المهتز هي

$$X = 12 \sin\left(\frac{2\pi t}{10} + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \ldots (1)$$

ولدينا المعادلة القياسية التي تمثل الحل العام لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة وهي

$$X = C \sin(\omega t + \theta) \qquad \ldots (2)$$

نقارن المعادلتين (1) و(2) فنجد

1 - السعة C حيث

$C = 12$ سم

2 - التردد الزاوي ω حيث

$\omega = \frac{2\pi}{10}$ زاوية نصف قطرية / ثا

ومن العلاقة بين التردد الزاوي ω والتردد f

$$\omega = 2\pi f$$

نجد أن

$f = 0.1$ هيرتز

3 - ومن العلاقة بين التردد f والزمن الدوري T

$$T = \frac{1}{f}$$

نجد أن

$T = 10$ ثانية

4 - ان زاوية الطور لحركة الجسيم المهتز هي $(\omega t + \theta)$ وزاوية الطور الأبتدائي نحصل عليها عندما $t = 0$ أي أن زاوية الطور الأبتدائي θ هي

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

5 - ان زاوية الطور في اللحظة الزمنية $t = 5$ ثانية هي

$$\frac{2\pi}{10} \times 5 + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

6 - ان زاوية طور الحركة للجسيم في اللحظة الزمنية $t = 0$ ثانية هي

$$\frac{\pi}{4}$$

وزاوية طور الحركة للجسيم في اللحظة الزمنية t = 15 ثانية هي

$$\frac{2\pi}{10} \times 15 + \frac{\pi}{4} = \left(3\pi + \frac{\pi}{4} \right)$$

وفرق الطور بين الحالتين هو الفرق بين الزاويتين ويساوي π زاوية نصف قطرية .

7 – الأزاحة في اللحظة الزمنية t = 1·25 ثانية هي

$$X = 12 \operatorname{Sin} \left(\frac{2\pi}{10} \times 1{\cdot}25 + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= 12 \operatorname{Sin} \frac{\pi}{2}$$

ومنها نجدان

X = 12 سم

والسرعة الآنية V في اللحظة الزمنية t = 1·25 ثانية هي

$$V = \frac{dx}{dt} = 12 \times \frac{2\pi}{10} \operatorname{Cos} \left(\frac{2\pi}{10} \times t + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$V = \frac{24\pi}{10} \operatorname{Cos} \left(\frac{2\pi}{10} \times 1{\cdot}25 + \frac{\pi}{4} \right)$$

ومنها نجد أن

$$O = V$$

وهذه النتيجة تشير الى ان الأزاحة الآنية للجسيم في تلك اللحظة تكون في نهايتها العظمى لأن سرعة الجسيم صفراً .

ولأيجاد التعجيل الآني a للجسيم في اللحظة t = 1·25 ثانية نعوض في

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -12 \times \left(\frac{2\pi}{10} \right)^2 \operatorname{Sin} \left(\frac{2\pi}{10} \times t + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= -12 \times \left(\frac{2\pi}{10}\right)^2 \text{Sin}\left(\frac{2\pi}{10} \times 1{\cdot}25 + \frac{\pi}{4}\right)$$

فنجد ان التعجيل

$a = -4{\cdot}8$ سم / ثا^2

والأشارة السالبة تعني ان اتجاه التعجيل معاكس لأتجاه الأزاحة ، أي أن التعجيل يكون متجه نحو موضع التوازن .

8 - النهاية العظمى للازاحة تحدث عندما

$$\text{Sin}\left(\frac{2\pi}{10} \times t + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

وهذا يعني ان أقصى قيمة للازاحة x يطابق قيمة السعة 12 سم والنهاية العظمى للسرعة تحدث عندما

$$\text{Cos}\left(\frac{2\pi}{10} \times t + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

وهذا يعني ان النهاية العظمى للسرعة هي

$$V = 12 \times \frac{2\pi}{10} \times 1$$

اي ان

$v = 7{\cdot}536$ سم / ثا

وهذه السرعة تحدث في موضع التوازن اي عندما $x = o$

والنهاية العظمى للتعجيل تحدث عندما

$$\text{Sin}\left(\frac{2\pi}{10} \times t + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

اي عندما

$$a = 12 \times \left(\frac{2\pi}{10}\right)^2$$

وهذه هي نفس القيمة التي حصلنا عليها في الخطوة السابقة .

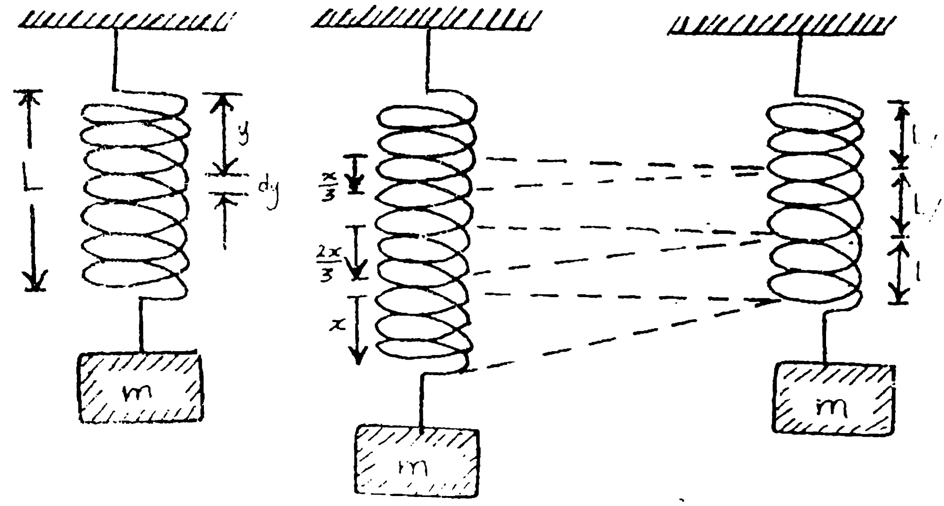
مثـــــال (2.3)

مهتز يتألف من جسيم كتلته m معلق بطرف نابض حلزوني [illegible] التوازن L وثابت النابض k . اذا كانت كتلة النابض M [illegible] ذلك على خواص المهتز . وضح اجابتك بالتفصيل .

الحـــــل

لقد تعاملنا في دراستنا لحد الان مع النابض الحلزوني باعتباره خزانا يستودع الطاقة الـــكامنة وانه يوفر خاصية المرونة اللازمة لحدوث الاهتزاز وتجاهلنا كتلة النابض تماما . وبالطبع ان اهمال كتلة النابض يوفر لنا سهولة التحليل ولـــكن يقود الى نتيجة تقريبية . وقد تكون هذه النتيجة دقيقة الى حدما اذا كانت كتلة النابض صغيرة جدا بالمقارنة مع كتلة الجسم المتصل بالنابض . اما اذا كانت كتلة النابض كبيرة نسبيا فانه لايجوز اهمالها لـــكونها تلعب دورا لايقل اهمية عن دور الـــكتلة المعلقة ان لم يفوقها احيانا . ولايجاد تاثير كتلة النابض على خواص المهتز سنتبع طريقة الطاقة .

نفرض ان الاجزاء المختلفة للنابض تعاني ازاحات تتناسب مع بعد تلك الاجزاء من الطرف الثابت للنابض كما هو مبين في الشكل (23 - 2)



الشكل (23-2) يبين ان الاستطالة تختلف باختلاف بعد اجزاء النابض من [illegible]

فاذا ازيحت الكتلة m المتصلة بطرف النابض ازاحة صغيرة مقدارها x عن موضع التوازن فان القوة المعيدة التي تظهر في النابض تساوي $-kx$ والان اذا ازيحت الكتلة ازاحة اضافية مقدارها dx فان الشغل المنجز لاحداث هذه الاستطالة $= kx\,dx$ وبذلك يكون الشغل اللازم لاحداث استطالة كلية في النابض مقدارها x هو

$$\int_0^x kx\,dx = \frac{1}{2} kx^2$$

ان هذا المقدار من الشغل يمثل الطاقة الكامنة المخزونة في النابض بفضل التشوه الحاصل في النابض نتيجة الوضع الجديد للكتلة المعلقة بالنسبة لموضع التوازن . وفي هذا الوضع اذا ترك النابض وشأنه فان الطاقة المخزونة تتحول تدريجيا الى طاقة حركية واثناء تحولها تكتسب الكتلة المعلقة سرعة آنية مقدارها $\frac{dx}{dt}$ وبذلك تكون الطاقة الحركية الآنية للكتلة المتحركة m هي

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

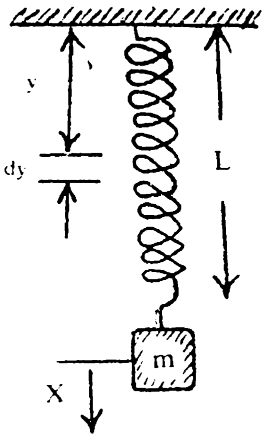
وفي هذه الحالة لاتقتصر الحركة على الكتلة المعلقة فقط بل تشمل أيضاً النابض ذاته . فاذا كانت كتلة النابض M لايمكن اهمالها بالمقارنة مع m فان الطاقة الحركية للنابض يجب ان تؤخذ بالاعتبار ايضا .

ولغرض ايجاد الطاقة الحركية للنابض يجب ان نلاحظ انه بينما يتحرك طرف النابض المتصل بالكتلة m بسرعة $\left(\frac{dx}{dt} \right)$ يكون الطرف الاخر للنابض ثابتا .

وبذلك يمكن ان نفرض ان السرعة تتغير خطيا على امتداد النابض بين الطرفين . والطاقة الحركية لاي عنصر صغير من النابض محصور بين y و $y + dy$ يمكن ايجادها كالاتي :
اعتبر ان y مقاسة من الطرف الثابت كما مبين في الشكل التالي
ان كتلة العنصر الذي طوله dy ويبتعد عن الطرف الثابت بالمسافة y =

$$\frac{M}{L} dy$$

وسرعة العنصر الذي طوله dy $= \frac{y}{l} \left(\frac{dx}{dt} \right)$



وعليه فان الطاقة الحركية dK للعنصر الصغير dy هي

$$dK = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{L}\,dy\right)\left(\frac{y}{L}\,\frac{dx}{dt}\right)^2$$

وبذلك يمكن الحصول على الطاقة الحركية الكلية للنابض فقط باجراء التكامل المناسب على طول النابض من $y = o$ الى $y = L$ فنجد ان

$$K = \int_{o}^{L} \frac{M}{2L}\,.\left(\frac{y}{L}\,\frac{dx}{dt}\right)^2 dy$$

$$K = \frac{1}{6}\,M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

وعليه تكون الطاقة الحركية الكلية للمهتز هي مجموع الطاقتين الحركيتين للنابض ذاته وللكتلة المعلقة به . اي ان الطاقة الحركية الكلية للمهتز هي

$$\frac{1}{2}\,m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{6}\,M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{3}M\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

واذا لم يكن هناك ضياع او تبديد للطاقة اثناء الاهتزاز فأن الطاقة الكلية للمهتز تكون ثابتة المقدار مع الزمن . اي ان

$$\text{مقدار ثابت} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{3}M\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

نفاضل الطرفين بالنسبة للزمن t نحصل على :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)\left[\left(m + \frac{1}{3}M\right)\frac{d^2x}{dt^2} + kx\right] = 0 .$$

ولما كانت السرعة $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ لاتساوي عموماً صفراً الا في حالة سكون المهتز لـذلك فأن

$$\left(m + \frac{1}{3}M\right)\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

نرتب هذه المعادلة فتصبح

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m + \frac{1}{3}M}\right)x$$

نقارن هذه المعادلة مع المعادلة القياسية للحركة الخطية التوافقية البسيطة فنجد ان التردد الزاوي للمهتز الذي لايمكن اهمال كتلة النابض فيه هي :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{1}{3}M}}$$

حيث ان $\frac{M}{3}$ تمثل الكتلة الفعالة للنابض .

واذا توخينا الدقة يجب ان نلاحظ اننا في هذا المثال لم نأخذ بالاعتبار حركة المائع المحيط بالمهتز اثناء اهتزازه . ان المائع الملاصق للكتلة المتصلة بالنابض يتحرك مع هذه الكتلة ويؤثر في زيادة الكتلة المهتزة . ان مقدار هذه الزيادة يمكن تقديرها فقط عند الترددات الواطئة وللسوائل الكثيفة . فالسوائل الكثيفة تكون لزوجتها عالية وتسبب تبديد كبير في الطاقة الاهتزازية للمهتز وعليه لايمكن تجاهل تأثير المائع المحيط بالمهتز . كما

يجدر بنا ان نلاحظ ان تحليلنا السابق يعد صحيحاً فقط اذا كان النابض يتحرك بأبسط انماط الاهتزاز. اما اذا كان نمط الاهتزاز معقد اً فأن التحليل يصبح في غاية التعقيد . اذ يتعذر عندئذ ايجاد الطاقة الحركية للنابض . لان الاستطالة تتناوب قيمتها من موقع الى آخر على امتداد النابض .

مثــال (4 - 2)

(أ) عرف ثابت اللــي . واذكر اهميته العملية

(ب) هل يشترط في بندول اللي ان تكون الأزاحة الزاوية θ صغيرة للحصول على الحركة الزاوية التوافقية البسيطة ؟

(ج) هل يمكن الحصول على معادلة الحركة لبندول اللــي بطريقة الطاقة . وضــح اجابتك بالتفصيل

(د) علق قضيب اسطوانــي كتلته M كلغم وطوله L متراً وقطره D متراً بوساطة سلــك يمر بمركزه ويتعامد على طوله . أحدث لــيّ في السلك وترك القضيب ليتذبذب . فوجد ان الزمن الدوري للذبذبة الواحدة يساوي T_1 ثانية ولــكن عنــدمــا علق القضيب بحيث يمر السلك بمركزه ويوازي طوله وجد ان الزمن الدوري T_2 ثانية . فكيف تعلل هذا الاختلاف في الزمن الدوري في الحالتين . ومــا هــي اهمية هذه النتيجة عملياً ؟

الحــــل :

(أ) يعرف ثابت اللي بأنه مقدار عزم اللي اللازم لاحداث ليّ في قضيب التعليق مقداره زاوية نصف قطرية واحدة .

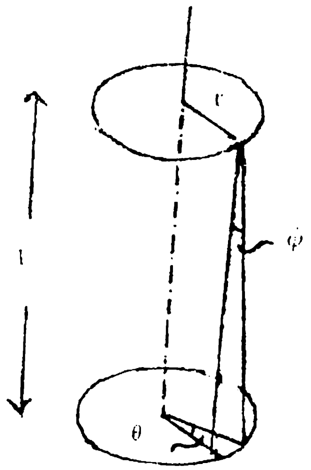
وفي الواقع ان هذا الثابت له أهمية كبيرة في تصميم الاجهزة التــي تعتمــــد حساسيتها على اللــي في السلك حيث تدخل ذبذبات اللــي في العديد من الاجهزة المختبرية . واشهرها الـكالفانومتر و ميزان كافندش المستخدم لتحقيق قانــون نيوتن في الجذب العام . وما عجلة التوازن في ساعة اليد الا مثال آخر للحركة الزاوية التوافقية يزودها اللولب الحلزوني بعزم الارجاع .

(ب) لايشترط ان تكون الازاحة الزاوية θ صغيرة للحصول على الحركة الزاوية التوافقية البسيطة وذلــك لان العلاقة بين θ وعزم اللي τ تكون خطية لدرجة عالية من الدقة لغاية مدى كبير من قيم θ . وهذا يعزى لــكون θ ترتبط مع النهاية

العظمى لزاويـــة القص ϕ في مادة قضيب، اللي وفق العلاقة الهندسيـــة

$$\theta = \frac{l}{r}\phi ،$$

حيث l يمثل طول القضيب و r نصف قطره كما هـو مبين فــي الشكـــل (2 - 24)



الشكل (2-24) يبين الازاحة الزاويه θ وزاوية القص ϕ في سلك اللي

وتكون عادة قيمة $\frac{l}{r}$ كبيرة . لذلك فان θ تكون دائما اكبر بكثير من ϕ والسلوك المرن للقضبان والاسلاك المعدنية غالبا مايكون خطيا لقيم لـ ϕ تصل الى حوالي $\frac{1}{1000}$

(ج) نعم يمكن الحصول على معادلة الحركة بطريقة الطاقة اذا لم يكن هنالـــك تبديدا للطاقة الميكانيكية خلال الاهتزاز . وفي مثل هذه الحالة يكون المجموع الـكلي للطاقة الميكانيكية في اية لحظة زمنية ثابتا . وعادة تكون الطاقة الميكانيكية على شكلين احدهما الطاقة الحركية K المخزونة في الـكتلة بفضل سرعتها والاخر على شكل طاقة كامنة U مخزونة على شكل شغل منجز لاحداث تشويه مرن . وفي اية لحظة زمنية يكون لدينا

$$k + U = \text{ثابت} \qquad \text{الطاقة الكلية}$$

ولذلك فان

$$\frac{d}{dt}(K+U)=0$$

ان الطاقة الحركية K لقرص بندول اللي اثناء الاهتزاز هي

$$K=\frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad \ldots(1)$$

حيث ان I يمثل عزم القصور الذاتي حول محور الدوران .

والطاقة الكامنة U هي الشغل المنجز لاحداث اللي في قضيب التعليق من 0 الى θ

$$U=\int_0^{\theta} K\theta\,d\theta=\frac{1}{2}K\theta^2$$

واذا لم يكن هنالك ضياع او تبديد للطاقة على شكل حرارة او صوت اثناء الاهتزاز فان

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}K\theta^2=\text{مقدار ثابت} \qquad \ldots(2)$$

وبمفاضلة المعادلة (2) بالنسبة للزمن نجد ان

$$I\frac{d\theta}{dt}\;\frac{d^2\theta}{dt^2}+K\theta\frac{d\theta}{dt}=0$$

ومنها نجد ان معادلة الحركة لبندول اللي هي

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{K}{I}\theta$$

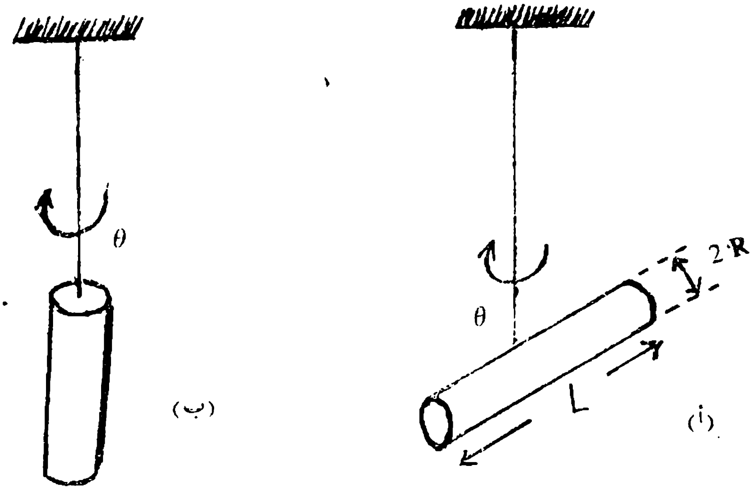
(د) عندما يعلق القضيب في وضعين مختلفين كما هومبين فـي الشكل (25 - 2)

فانه في الحالة الاولى (أ) يتذبذب القضيب حول محور يمر بمركزه من خلال احد اقطاره وعمودي على طوله وفي هذه الحالة يكون عزم القصور الذاتي I_1 هو

$$I_1=\frac{ML^2}{12}+\frac{MR^2}{2}$$

حيث ان R تمثل نصف قطر القضيب D / 2

بينما في الحالة الثانية (ب) يتذبذب القضيب حول محوره المار بمركزه وفي هذه الحالة يكون عزم القصور الذاتي I_2 هو



الشكل (2-25) يبين قضيب معلق بوضعين مختلفين

$$I_2 = \frac{MR^2}{2}$$

ولما كان عزم القصور الذاتي ليس واحدا في الوضعين لذلك يجب ان يختلف الزمن الدوري في الحالتين

في الحالة الاولى يكون الزمن الدوري T_1 هو

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{k}} \qquad \ldots (3)$$

وفي الحالة الثانية يكون الزمن الدوري T_2 هو

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_2}{k}} \qquad \ldots (4)$$

وبمقارنة المعادلتين (3) و (4) نجد ان .

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{I_1}{I_2} \right)^{1/2} \qquad \ldots (5)$$

ومن هذه المعادلة (8) يتضح انه يمكن عمليا مقارنة عزم القصور الذاتي لجسمين من خلال مقارنة الزمن الدوري لكليهما باستخدام نفس بندول الي . فاذا كان عزم القصور الذاتي لأحدهما معلوماً أمكن ايجاد عزم القصور للجسم الأخر مهما كان شكله معقداً .

مثال (2 - 5)

(أ) اذكر بعض الاستخدامات العملية للبندول الفيزياوي ؟

(ب) اوجد طول البندول البسيط الذي يتساوى زمنه الدوري والزمن الدوري لبندول فيزياوي معلوم

(ج) اثبت ان البندول البسيط هو حالة خاصة من البندول الفيزياوي (المركب)

الحــل :

ان من بعض استخدامات البندول الفيزياوي مايلي :

1 - ايجاد القيمة الدقيقة للتعجيل الأرضي في اي موقع على سطح الارض وبذلك يفيد في التنقيبات والفحوص الجيوفيزيائية .

2 - ايجاد عزم القصور الذاتي لاي جسم مهما كان شكله بتركه يتذبذب كبندول .

فيزياوي حول محور الدوران

(ب) بمساواة الزمنين الدوريين للبندولين البسيط والفيزياوي يتضح ان

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}} \quad \ldots (1)$$

اي ان

$$l = \frac{I}{mL} \quad \ldots (2)$$

اي انه اذا كان مايهمنا هو الزمن الدوري للذبذبات فانه يمكن اعتبار ان كتلة البندول الفيزياوي تتركز في نقطة تبعد عن محور الدوران بقدر $l = \frac{I}{mL}$. وتعرف هذه النقطة باسم مركز الذبذبة للبندول الفيزياوي . وتحديد موقع هذه النقطة يتوقف على موضع محور الدوران لاي جسم معلوم .

وقد كان هيجنز اول من استنتج هذه القاعدة في أثناء دراسته للاجهزة المبينة للزمن

(ج) ان المعادلة (84 ـ 2) تمثل العلاقة العامة لايجاد الزمن الدوري لأي جسم صلب مهما كان شكله يتذبذب حول اي محور في اي مكان منه . بينما البندول البسيط يمثل حالة خاصة التي تتصل فيها نقطة مادية كتلتها m بنهاية خيط عديم الوزن له طول L . في هذه الحالة لدينا

$$I = mL^2 \qquad \ldots (3)$$

ويلاحظ هنا ان ($l = L$) لأن طول البندول البسيط يمثل المسافة من نقطة التعليق الى مركز الكتلة . نعوض I في المعادلة (1) فينتج :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{mgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

وهو الزمن الدوري لبندول بسيط سعته صغيرة .

اسئلة

2 - 1 أ – عرف الحركة الخطية التوافقية البسيطة

ب – اعط بعض الأمثلة في الطبيعة لحركات تكاد تكون توافقية بسيطة . لماذا لاتكون هذه الحركات توافقية بسيطة تماماً ؟

2 - 2 – ماهـي الفروق الاساسية بين الحركة ذات التعجيل المنتظم والحركة الدورية ؟

2 - 3 – لماذا تسمى الحركة الخطية التوافقية البسيطة بالحركة الجيبية . عزز اجابتك بالمعادلات اللازمة .

2 - 4 ماهـي الشروط اللازمة في أي مهتز لـكـي يتحرك حركة توافقية بسيطة في حالة عدم وجود أي عوامل مبددة للطاقة .

2 - 5 في أي مهتز تتحول الطاقة تبادلياً من طاقة حركية الى طاقة كامنة . وضح كيف يتم ذلك ثم بين

أ – هل يمكن ان تكون الطاقة الـكلية للمهتز طاقة حركية تماماً .

ب – هل يمكن ان تكون الطاقة الـكلية للمهتز طاقة كامنة تماماً .

حـ – هل يمكن استخدام قانون حفظ الطاقة لايجاد معادلة الحركة للمهتز واذا كان ذلك ممكناً فما هـي شروط ذلك .

2 - 6 اذا كان مهتز ما يخضع لقانون هوك ويعانـي اثناء اهتزازه مقاومة احتكاكية فهل يمكن وصف حركته بالحركة التوافقية البسيطة ؟

2 - 7 في الغالب لايمكن اهمال قوى الأحتكاك في المهتزات أثناء اهتزازها . فما هو مصدر هذه القوى وماهو تأثيرها على حركة المهتزات .

2 - 8 اذا سقطت كرة مرنة تماماً على ارضية صلدة فانها ترتد ثم تسقط ثانية وترتد مرة أخرى وهكذا تتكرر هذه الحركة . فهل يمكن وصف هذه الحركة بالحركة التوافقية البسيطة ؟ وهل هنالك أي تشابه على الأطلاق ؟ وضح أجابتك بالتفصيل .

2 - 9 كرة صغيرة منتظمة تتحرك في مستوى عمودي في اناء مقعر (جزء من سطح كروي) . اشرح طبيعة حركة الكرة الصغيرة في حالة (أ) حركتها حركة انزلاقية انتقالية فقط (ب) حركتها حركة انتقالية ودورانية معاً على فرض ان قوى الأحتكاك مهملة ؟

2 - 10 اشرح كيف ان حركة المكبس في اسطوانة الماكنة البخارية لاتمثل حركة توافقية بسيطة

11 - 2 - هل يمكن اعتبار حركة القمر حول الأرض أو حركة الأرض حول الشمس حركة توافقية بسيطة ، ولماذا ؟

12 - 2 - (أ) ماهي الحركة الزاوية التوافقية البسيطة ؟ وماهي أوجه الشبه مع الحركة الخطية التوافقية البسيطة .

(ب) ماهي أهم الفروق بين البندول البسيط والبندول الفيزياوي (أوالبندول المركب) .

13 - 2 - وضح كيف يمكن ان يستخدم البندول البسيط في التنقيبات الجيوفيزيائية لتحديد مواقع النفط تحت سطح الأرض ؟

14 - 2 - (أ) هل يتأثر الزمن الدوري لبندول بسيط معين اذا أنتقل من مستوى سطح البحر الى قمة جبل عال ؟

(ب) اذا أنتقل نفس البندول من سطح الأرض الى سطح القمر فما هو التأثير على الزمن الدوري . وضح ذلك .

15 - 2 - (أ) اذا افترض وجود نفق مستقيم داخل الأرض يمر في مركزها . فما هي طبيعة حركة الجسم الساقط في هذا النفق ؟

(ب) اذا لم يمر النفق في مركز الأرض فما هو تأثير ذلك على طبيعة الحركة ؟

16 - 2 - هل يمكن استخدام النابض المهتز عمودياً لأيجاد التعجيل الأرضي ؟ وضح اجابتك .

17 - 2 - وضح بالرسم العلاقة بين حركة الجسم في مسار دائري والحركة التوافقية البسيطة .

18 - 2 - وضح لماذا لاتظهر سعة الأهتزاز في معادلة الزمن الدوري لمختلف أنواع المهتزات التوافقية البسيطة .

19 - 2 - برهن أنه في الحركة التوافقية البسيطة يكون التعجيل صفراً عندما تكون السرعة في أقصى قيمة لها بينما قيمة السرعة تكون صفراً عندما يكون التعجيل في نهايته العظمى .

20 - 2 - اشرح كيف يتأثر الزمن الدوري لنابض يهتز عمودياً مع كل مما يلي :

(أ) سعة الأهتزاز. (ب) كتلة الجسم المعلق .

(ج) ثابت النابض. (د) التعجيل الأرضي.

21 - 2 (أ) عرف زاوية طور الجسيم المهتز .

(ب) ماهي زاوية الطور لجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة عندما :

(1) تكون ازاحته في نهايتها العظمى .

(2) سرعته في نهايتها العظمى .

(3) تعجيله في النهاية العظمى .

2 – 22 ارسم الخطوط البيانية التي توضح كيف يتغير كل من الأزاحة والسرعة والتعجيل لجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة مع الزمن . ثم وضح ان فرق الطور بين (1) منحني السرعة ومنحني الأزاحة هو $\frac{\pi}{2}$ و (2) منحني التعجيل ومنحني الأزاحة هو π .

2 – 23 تعتبر الحركة التوافقية البسيطة حركة دورية . فهل جميع الحركات الدورية هي حركات توافقية بسيطة وضح

2 – 24 لديك بندول بسيط طوله ثابت والثقل المعلق بطرفه عبارة عن كرة مجوفة نصف قطرها ثابت . ناقش كيف تتغير خواص البندول اذا كانت الكرة :

(1) فارغة تماماً .

(2) مملوءة بالماء

(3) مملوءة بالزئبق

(4) مملوءة الى المنتصف بالزئبق

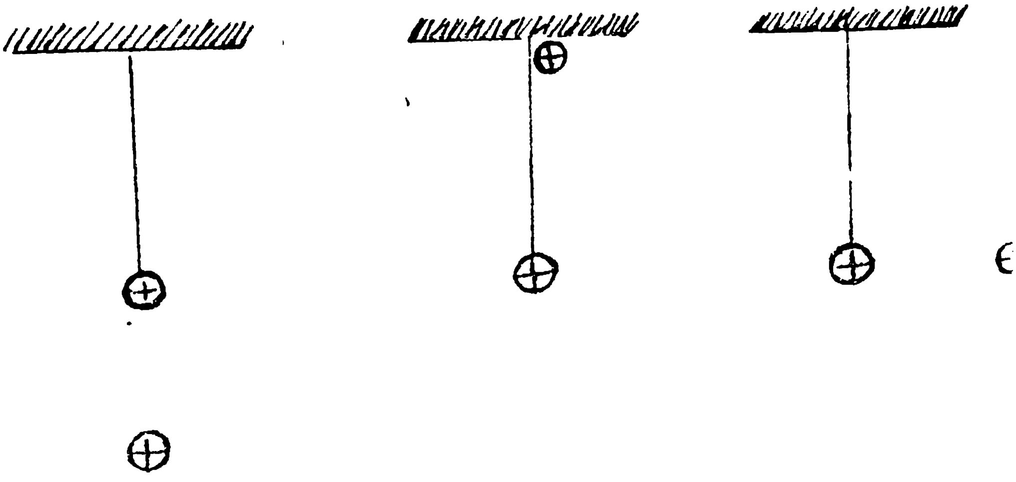
(5) مملوءة الى النصف بالماء

(6) نصفها مملوء بالزئبق والنصف الآخر مملوء بالماء .

2 – 25 سطل مملوء بالماء ومعلق بطرف نابض حلزوني فاذا ازيح السطل قليلاً عن موضع توازنه وترك يهتز اهتزازاً حراً . ناقش كيف تتغير خواص هذا المهتز اذا كان في قعر السطل ثقب صغير يسمح بتسرب الماء أثناء الأهتزاز .

2 – 26 لقد وجد ان وجود الخامات ورواسب النفط التي تختلف كثافاتها عن المواد المحيطة بها تسبب في تغير التعجيل الأرضي . فهل يوفر البندول وسيلة دقيقة لقياس التعجيل الأرضي الموقعي فوق المنطقة المستكشفة من اعطاء معلومات مفيدة عن طبيعة الرواسب المعدنية . ناقش ذلك ؟

2 – 27 (أ) اذا كانت كرة البندول البسيط مشحونة بشحنة كهربائية موجبة . فهل يؤثر على الزمن الدوري وجود شحنة مماثلة في المواقع المبينة في الشكل ادناه :



(أ) (ب) (ج)

الشكل يبين بندول بسيط كرته مشحونة بشحنة موجبة وبعد شحنة اخرى مماثلة (أ) تقع تحته مباشرة وعلى امتداد الخط العمودي المار بنقطة التعليق (ب) تقع في نقطة التعليق (ج) تقع على نفس مستوى التوازن

(ب) ناقش الحالات عندما تكون الشحنتين مختلفتين.

28 - 2 هل حركة كرة البندول البسيط هي حركة خطية توافقية بسيطة أم حركة زاوية توافقية بسيطة. وضح اجابتك بالتفصيل.

29 - 2 ناقش هل تنجز النظم التالية حركةتوافقية بسيطة عندما يزاح الجسيم قليلاً عن موضع التوازن ثم يطلق :

(أ) جسيم معلق بطرف خيط عمودي قابل للانبساط ويخضع لقانون هوك.

(ب) جسيم يستقر في وسط غشاء دائري مرن في مستوى أفقي ومثبت من حدوده (مثل غشاء الطبل)

(ج) اسطوانة منتظمة تطفو على سائل ومحورها عمودي على سطح السائل.

30 - 2 لديك وتر من المطاط طوله 5 سم مثبت بين نقطتين ونقر ولوحظ تردده. فاذا تضاعف طوله مرتين. وثلاث واربع مرات على التوالي. وفي كل مرة ينقر ويلاحظ التردد فما هي الترددات المتوقعة في كل مرة. ثم وضح لماذا يسلك هذا الوتر سلوك مختلف عن سلك الكمان الذي يمكن ان يتغير طول الجزء المهتز فيه من خلال تغيير طول السلك ؟

31 - 2 ماهو مرنان هلمهولتز واذكر العوامل التي تؤثر على التردد الرنيني في مثل هذا المرنان.

32 – 2 اذا وضعت اذنك قريبة من فتحة قنينة زجاجية تسمع صوتاً خافتاً ذو نغمة محددة ماهو مصدر هذا الصوت .

32 – 2 لديك مجموعة من القناني المتشابهة (كقناني الحليب مثلاً) تحتوي على كميات متفاوتة من الماء . هل يكون التردد الرنيني واحداً في جميع هذه القناني ؟ هل باستطاعتك ترتيبها تصاعدياً (أو تنازلياً) حسب تردداتها الرنينية .

33 – 2 اذا نفخت بطريقة مناسبة في فوهة قنينة زجاجية يصدر صوت ذو نغمة محددة . هل يمكنك تقدير تردد هذه النغمة . اختبر صحة اجابتك بالأستعانة بشوكات رنانة

34 – 2 اشرح كيف يمكن مقارنة كتل الأجسام بمشاهدة تردداتها عند تعليقها من نهاية نابض حلزوني

35 – 2 اذا علم ان ثابت النابض الحلزوني هو k وعلقت كتلة m في نهايته ثم قطع النابض الى جزئين متساويين وعلقت نفس الكتلة m من نهاية أحد النصفين . هل يكون تردد الأهتزازات متساوياً قبل وبعد قطع النابض ؟ ماهي العلاقة بين تردديهما ؟

36 – 2 اذا أخذت في الأعتبار كتلة النابض . اوصف كيف يؤثر ذلك في زمن الذبذبة في نابض تتصل بنهايته كتلة ما .

37 – 2 استنتج بطريقة وصفية اذا ماكان الزمن الدوري لبندول يتذبذب بسعات كبيرة أطول أو أقصر من الزمن الدوري له اذا تذبذب بسعات صغيرة (اعتبر الحالات المتطرفة)

مسائل

1 – 2 بندول بسيط طوله 50 سم جد تردده والزمن الدوري لاهتزازه ؟

2 – 2 الزمن الدوري لبندول بسيط على سطح الأرض هو ثانية واحدة فقط . فكم يكون الزمن الدوري له اذا اخذ الى سطح القمر علما ان التعجيل الارضي على سطح القمر يساوي حوالي سدس التعجيل الأرضي .

3 – 2 بندول بسيط طوله 1 م . فكم هو تقديرك للزمن الدوري لهذا البندول في المواضع التالية :

(أ) عند مستوى سطح البحر

(ب) في قمة جبل ارتفاعه 1 كيلومتر عن سطح البحر

(ج) في قعر منجم عمقه 1 كيلومتر عن سطح البحر

اعتبر التعجيل الارضي عند سطح البحر هو 9.8 م / ثا^2

4 – 2 اثبت ان اقصى سرعة لكتلة البندول البسيط تعطى بالعلاقة

$$v = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta)}$$

اذا كان البندول يبدأ في الاهتزاز من زاوية قدرها θ مع العمود .

5 – 2 علقت كتلة مقدارها 200 غم في طرف نابض حلزوني له ثابت يساوي 0.60 نيوتن / متر ثم سحبت الكتلة الى اسفل مسافة قدرها 3 سم من موضع التوازن ثم حررت . ماهو :

(أ) التعجيل الابتدائي للكتلة (في لحظة الأطلاق مباشرة)

(ب) سرعتها عند مرورها بموضع التوازن

(ج) تردد الكتلة حول موضع التوازن .

6 – 2 علقت كتلة مقدارها 2 غم في طرف سلك دقيق عمودي مصنوع من الحديد وطوله 15 سم ومساحة مقطعه العرضي 8×10^{-3} سم^2 جد مايلي :

(أ) مقدار استطالة السلك تحت تاثير هذا الحمل ؟

(ب) التردد الطبيعي للاهتزاز العمودي للكتلة المعلقة في طرف السلك ؟

علما ان معامل يونك لمادة السلك 19×10^{10} نيوتن / م^2

7 – 2 تتذبذب كتلة مقدارها 2 كيلوغرام معلقة بطرف نابض حلزوني بحركة توافقية بسيطة حول موضع التوازن . وكانت سعة الحركة 30 سم وثابت النابض 400 نيوتن / م اوجد سرعة الكتلة عندما تكون ازاحتها (أ) 30 سم (ب) 0 سم (ج) 15 سم .

2 – 8 جسيم يهتز بحركة توافقية بسيطة ازاحته 8 سم في اللحظة التي تكون فيها سرعته 6 سم/ ثا وازاحته 6 سم في اللحظة التي تكون فيها سرعته 8 سم / ثا احسب (أ) السعة (ب) التردد (ج) الزمن الدوري .

2 – 9 قفص كتلته 1 كلغم معلق بطرف نابض حلزوني ، عندما يقف طير داخل القفص فان القفص يهبط مسافة قدرها 0.5 سم تحت موضع التوازن الذي يشغله عندما يكون فارغا . جد الزمن الدوري لاهتزاز القفص (أ) عندما يكون فارغا (ب) عندما يكون الطير واقفا داخله .

2 – 10 نابض له ثابت قوة يساوي 100 نيوتن لكل متر يهتز بتردد مقداره 40 دورة في الدقيقة عندما يعلق به جسم . فما هي كتلة ذلك الجسم ؟

2 – 11 قطعة من الحديد كتلتها 4 كغم ومتصلة بطرف نابض وتهتز بحركة توافقية بسيطة . اذا كانت سعة الاهتزاز 30 سم والزمن اللازم لاكمال دورة واحدة من الاهتزاز 0.6 ثانية . اوجد : (أ) اقصى قيمة للسرعة (ب) اقصى قيمة للطاقة الحركية (ج) ادنى قيمة للطاقة الكامنة (د) ثابت النابض .

2 – 12 ماهو الزمن الدوري لجسم يهتز بحركة توافقية بسيطة اذا كان تعجيله 8 م / $ثا^2$ عندما تكون ازاحته 1 م

2 – 13 جسم يتحرك بحركة توافقية بسيطة بسعة 24 سم وزمن دوري 1.2 ثانية . احسب مايلي :

(أ) سرعة الجسم عندما يكون في موضع التوازن

(ب) سرعة الجسم عندما يكون على بعد 24 سم من موضع التوازن .

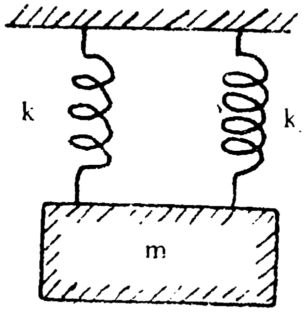
(ج) التعجيل في الموضعين (أ) و (ب)

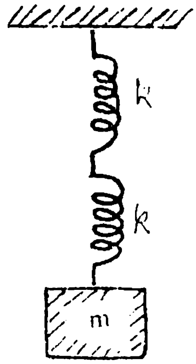
2 – 14 في موقع ما وجد ان بندول بسيط طوله 1 م يصنع 250 دورة كاملة في 8.38 دقيقة فما هو طول البندول الذي زمن دورته 1 ثانية في نفس الموقع .

2 – 15 ماهو الزمن الدوري للكتلة المهتزة m في الحالتين :

(أ) مربوطة بنابضين متماثلين على التوازي كما في الشكل (أ)

(ب) مربوطة بالطرف الاسفل لنابضين متماثلين متصلين على التوالي كما في الشكل (ب)





16 – 2 سيارة كتلتها 1 طن تستند على اربعة نوابض متماثلة فكم هو ترددها الطبيعي . وهل لهذا التردد اهمية خاصة ؟ وضح بالتفصيل .

17 – 2 . بندول ساعة مصنوع من الالمنيوم طوله 100 سم عندما تكون درجة الحرارة 20 سيلزيوس . فكم ثانية تفقد هذه الساعة في 24 ساعة اذا كانت درجة الحرارة ثابتة في 30 سيلزيوس اعتبر معامل التمدد الطولي للالمنيوم 25×10^{-6} لكل درجة سيلزيوس (الجواب : 11 ثانية)

18 – 2 بندول الساعة يهتز بزمن دوري 1 ثانية حيث التعجيل الارضي 981 سم/ ثا^2 فكم ثانية تفقد الساعة في 24 ساعة اذا وضعت في قمة جبل عال حيث التعجيل الارضي 980.8 سم/ ثا^2

19 – 2 علق جسم كتلته 2.5 كلغم في الطرف السفلي لنابض حلزوني فتمدد النابض مسافة قدرها 8 سم . فاذا ازيح الجسم المعلق مسافة قليلة عن موضع توازنه على امتداد النابض ثم ترك حرا . احسب ماهو تردده ؟

20 – 2 جسم كتلته 250 غم معلق في طرف نابض ، فاذا حرض النابض على الاهتزاز الطبيعي وكان تردده 20 هيرتز ، فما هي قيمة ثابت النابض (3.95×10^6 داين / سم)

21 – 2 عندما يعلق جسم كتلته 00 غم في طرف نابض فانه يؤدي الى استطالة النابض بمسافة قدرها 5 سم . فاذا رفع الجسم وحل محله جسم اخر كتلته 30 غم وترك يهتز صعودا ونزولا فكم سيكون التردد ؟

22 – 2 عندما يعلق جسم كتلته 25 كلغم في طرف نابض فإنه يتمدد بمسافة مقدارها 15 سم فاذا ازيل هذا الجسم وقفز طفل وتعلق في الطرف السفلي للنابض

وأخذ يهتز صعوداً ونزولاً وكان الزمن الدوري لهذا الاهتزاز هو 1 ثانية فكم يكون وزن الطفل؟

2 جسيم يهتز بحركة توافقية بسيطة فاذا كانت سعة الحركة 20 سم والزمن الدوري 0.5 ثانية أحسب (أ) أقصى قيمة للتعجيل (ب) اقصى قيمة للسرعة.

2 جسم كتلته ١ كلغم علق بطرف نابض حلزوني وعندما سحب الجسم نحو الاسفل من موضع التوازن وترك حراً اخذ يهتز بزمن دوري 2 ثانية ، وعندما أزيل الجسم المعلق وحل محله جسم آخر مجهول الكتلة فان الزمن الدوري للاهتزاز اصبح ١ ثانية اعتبر ان كتلة النابض مهملة ، جد كتلة الجسم المجهول؟ ناقش هل يمكن اعتماد هذه الطريقة لايجاد كتلة أي جسم مجهول؟

2 النهاية العظمى لسرعة جسيم يتحرك بحركة توافقية بسيطة هي 24 سم/ثا فاذا كان الزمن الدوري للاهتزاز هو ١ ثانية احسب : (أ) السعة (ب) النهاية العظمى للتعجيل (3.18 سم. 125.8 سم/ثا٢).

2 بندول صغير جداً طوله 1 ملم مصنوع من ليف حجر الصوان (الكوارتز) احسب (أ) الزمن الدوري للاهتزاز (ب) التردد (0.0653ثا. 15.3 هيرتز).

2 بندول بسيط يدعى ببندول فوكلت ، طوله 30 متر ومعلق من قبة برج عال ، من هذا الترتيب يمكن ملاحظة تأثير دوران الارض. جد الزمن الدوي لهذا البندول.

2 جسم كتلته 50 غم مربوط بطرف نابض خفيف ويهتز نزولاً وصعوداً بتردد قدره 2 هيرتز، احسب التردد عندما تنقص الكتلة المعلقة وتصبح 5 غم.

2 قضيب منتظم طوله L معلق بمسمار ثابت من نقطة على بعد $\frac{1}{3}L$ من طرفه الاعلى. ماهو الزمن الدوري للاهتزازات الصغيرة للقضيب.

2 - طوق دائري قطره d معلق على مسمار. ماهو الزمن الدوري للاهتزازات الصغيرة السعة.

2 - جد تردد الاهتزاز لمكبس كتلته m يلائم اسطوانة منتظمة طرفها الآخر مغلق وتحتوي على غاز محصور. اعتبر ان الغاز يعاني (أ) عملية كظيمة (ب) عملية تحت درجة حرارية ثابتة.

32 – 2 كرة من الحديد قطرها 2 سم تهتز عموديا في انبوب زجاجي دقيق متصل بدورق حجمه 12 لتر ويحتوي على هواء تحت ضغط جوي واحد . جد الزمن الدوري لاهتزاز الكرة . اعتبر ان التغيرات كظيمة خلال الاهتزاز وان نسبة السعة الحرارية للهواء تحت ضغط ثابت ÷ السعة الحرارية للهواء تحت حجم ثابت $\gamma = 1.4$ وان كثافة الحديد 7600 كلغم / م^3 (1 ثانية تقريبا)

33 – 2 عصا منتظمة طولها 90 سم معلقة من احد طرفيها وسمح لها بالاهتزاز كبندول مركب فما هو الزمن الدوري لها . وماهو طول البندول البسيط المكافىء

34 – 2 قضيب منتظم طوله 90 سم معلق بمسمار في نقطة تبعد 15 سم من احد طرفيه وسمح له ان يهتز حول المسمار كبندول مركب ، فما هو الزمن الدوري لهذا البندول ، وماهو الطول المكافيء لبندول بسيط له نفس الزمن الدوري .

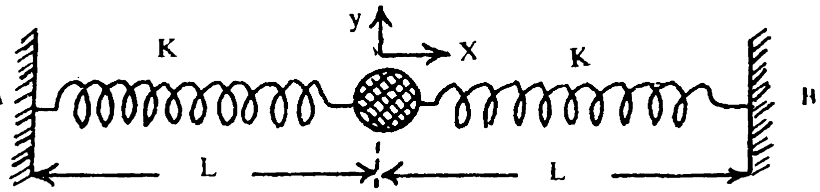
35 – 2 كرة كتلتها 200 غم ونصف قطرها 1.2 سم معلقة بسلك كبندول لي فاذا كان تردد البندول هو 0.250 هيرتز جد : (أ) عزم اللي في السلك (ب) طاقة البندول عندما يزاح بزاوية 12.5° من موضع توازنه (2.85×10^4 سم . داين لكل زاوية نصف قطرية) (677 ارك)

36 – 2 بندول لي يبدء بالحركة بتعجيل زاوي مقداره 15 زاوية نصف قطريه لكل (ثانية)^2 عندما تكون ازاحته الزاوية 90 فما هو تردد البندول ؟

37 – 2 مكبس اسطواني أملس تماماً كتلته m ومساحة مقطعه العرضي A يوافق بدقة انبوبة افقية مختومة من طرفيها بألواح مستوية . في حالة التوازن يكون المكبس في منتصف الاسطوانة ويكون طول عمود الهواء في كلا الجانبين من المكبس هو l وضغط الهواء هو P

برهن أنه اذا ما اضطرب المكبس اضطراباً طفيفاً فانه سيتحرك حركة توافقية بسيطة . وجد الطول المكافيء للبندول البسيط الذي له نفس التردد (اعتبر ان الحركة تحدث تحت درجة حرارية ثابتة) .

38 – 2 جسم كتلته m يستقر على سطح أفقي أملس ومربوط الى مسندين ثابتين بوساطة نابضين حلزونيين متماثلين . الطول الطبيعي لكل منهما في حالة التوازن هو L_o وثابت النابض هو k فاذا استطال كل نابض وأصبح طوله L ($L > L_o$) كما موضح في الشكل . وكانت الازاحة الافقية (على امتداد AB) هي x والازاحة العرضية (عمودية على AB) هي y .



(أ) اكتب المعادلة التفاضلية للحركة التي تتحكم بالاهتزازات الصغيرة في اتجاه x

(ب) اكتب المعادلة التفاضلية للحركة التي تتحكم بالاهتزازات الصغيرة في اتجاه y (اعتبر أن $L >> y$

(حـ) بدلالة L و L_o احسب نسبة الترددين للاهتزازين على امتداد x و y

(د) اذا حررت الكتلة m في اللحظة الزمنية $t = 0$ من النقطة $x = y = A_o$ بسرعة تساوي صفر، فما هي الأحداثيات y,x في أي لحظة زمنية لاحقة t .

(هـ) ارسم صورة للمسار الناتج لـ m تحت الشروط المذكورة في (د) اذا كانت

$$L = \frac{9}{5} L_o$$

39 - 2 اذا وضعت الكتلة m بين طرفي النابضين (في الشكل المرافق للمسالة 38 –2) على سطح افقي أملس . اثبت ان تردد اهتزاز هـــذا المهتـــز هـــو :

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{d}}$$

حيث ان d تمثل مقدار استطالة كل من النابضين تحت تأثير وزن الكتلة m

40 - 2 انبوبة منتظمة المقطع على شكل حرف U طول كل من فرعيها 50 سم وطول قاعها حوالي 10 سم .

احسب التردد الطبيعي لاهتزاز عمود من السائل في الانبوبة الى اعلى والى أسفل عندما تكون الانبوبة مملوءة الى ارتفاع قدره 15 سم (أ) بالماء (ب) بالزئبق .

41 – 2 لاحظ شخص انه بامكانه هز سيارة الى أعلى والى أسفل بدفعها دوريا الى أسفل . وكانت السيارة تهتز عشر دورات كاملة في زمن قدره 15 ثانية (أ) على اعتبار ان كتلة السيارة 2 طنْ اوجد ثابت النابض لنظام التعليق للسيارة (ب) ماهي المسافة التي تخفضها السيارة بالتقريب اذا دخل الشخص في السيارة وجلس في مقعدها الامامي ؟ ثم اوجد تردد الاهتزاز عندما يركب السيارة خمسة اشخاص متوسط كتلهم 60 كلغم .

42 – 2 اسطوانة من الخشب مغمورة جزئيا في ماء مقطر ومحورها عمودي على سطح الماء فاذا دفعت الاسطوانة عموديا نحو الاسفل وتركت . جد التردد الطبيعي لاهتزاز الاسطوانة على فرض انها تبقى قائمة خـــــلال الاهتزاز . اذا اذيب مقدار من الملح في الماء المقطر فهل يؤثر ذلك على التردد الطبيعي للاهتزاز .

43 – 2 بندول بسيط يتألف من كرة كتلتها m متصلة بقضيب كتلته M جد التردد الطبيعي للاهتزاز (أ) اذا كانت كتلة القضيب مهملة بالنسبة للكتلة في طرفه (ب) اذا كانت كتلة القضيب غير مهملة .

44 – 2 مرنان هلمهولتز حجمه ١ لتر ونصف قطر عنقه ١ سم وطول العنق 0.2 سم احسب التردد الرنيني . اعتبر ان سرعة الصوت في درجة حرارة المختبر هي 350 م / ثا .

45 – 2 مرنان هلمهولتز حجمه 2000 سم^3 ونصف قطر عنقه 2 سم وطول عنقه 0.3 سم . احسب التردد في حالة الرنين . (سرعة الصوت 350 م / ثا) . اذا وضعت كمية من الماء حجمها 500 سم^3 في المرنان فما هو تردد الرنين .

46 – 2 مرنان على شكل صندوق ابعاده 30 سم × 60 سم × 90 سم فيه عنق اسطواني الشكل طوله 15 سم وقطره 10 سم . ما هو التأثير على التردد الرنيني في حالة مضاعفة (أ) الحجم (ب) طول العنق (ج) مساحة مقطع العنق .

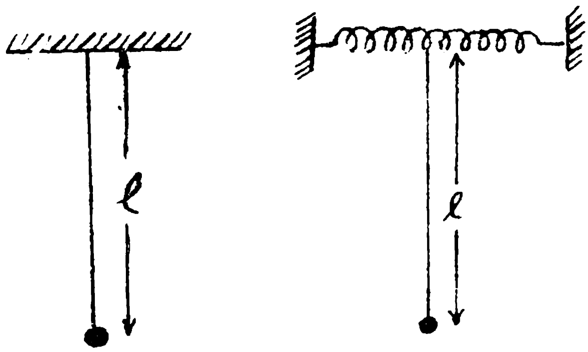
47 – 2 فتحة صغيرة ثقبت في مرنان كروي نصف قطره 5×10^{-2} متر وتردد الرنيني 300 هيرتز احسب

(أ) نصف قطر الفتحة

(ب) تردد الرنين اذا ثقب المرنان ثلاث فتحات أخرى مماثلة .

48 – 2 بندولين بسيطين متماثلين تماماً علق احدهما من نقطة ثابتة 0 وعلق الآخر من نقطة متحركة A تقع في منتصف نابض حلزوني ثابت ومشدود افقيا كما

في الشكل ادناه . فاذا ازيح البندولين عن موضع توازنهما بنفس الازاحة وتركا يهتزان اهتزازاً حراً ، فهل يكون التردد واحد لكلاهما ؟ وضح اجابتك تحليليا بالتفصيل .



2 — 49 (أ) ماهو تردد بندول بسيط طول خيطه 2 متر؟
(ب) بفرض ان السعة صغيرة . ماهو تردد البندول في مصعد يتحرك الى اعلى بتعجيل مقداره 2 م / تا^2
(ج) ماهو تردده اذا ترك يسقط سقوطا حراً .

2 — 50 ماهو الزمن الدوري للبندول الذي يتكون من قضيب منتظم طوله متر واحد يمكنه الدوران في مستوى عمودي حول أحد طرفيه ؟ حول نقطة تبعد عن احد طرفيه بمقدار 75 سم ؟ حول نقطة تبعد عن أحد طرفيه بمقدار ٥٠ سم ؟

2 — 51 اذا كانت M هي كتلة النابض الحلزوني و m كتلة الجسيم المعلق في طرفه الحر . فاثبت ان الزمن الدوري للحركة هو

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{1}{3} M}{k}}$$

لاحظ ان الاجزاء المختلفة من النابض تشترك في الحركة بصور مختلفة ، ولكن الناتج يتساوى كما لو ان $\frac{1}{3}$ كتلة النابض قد أضيفت الى الجسيم المعلق واعتبر النابض عديم الكتلة .

52 – 2 تنحرف حزمة الالكترونات في جهاز راسم ذبذبات الاشعة المهبطية بوساطة مجالين كهربائيين متعامدين بحيث انه بعد مضي زمن t تعطى ازاحة الالكترون بالمعادلتين :

$$x = a \cos \omega t \quad و \quad y = a \cos(\omega t + \theta)$$

(أ) صف مسار الالكترون وعين معادلته عندما $\theta =$ صفر

(ب) عندما $\theta = 30$ درجة

(ج) عندما $\theta = 90$ درجة

الفصل الثالث

تركيب الحركات التوافقية البسيطة

3 - 1 تمهيد

لقد درسنا في الفصل السابق امثلة على حركة الجسيم المهتز بحركة توافقية بسيطة واحدة ، ولكن في الواقع هناك امثلة كثيرة في الفيزياء تندمج فيها حركتان توافقيتان بسيطتان أو أكثر في آن واحد . فغشاء الطبلة في الأذن غالباً ما يتأثر بأكثر من حركة توافقية بسيطة نتيجة لالتقاط الاذن اصوات متعددة بترددات مختلفة في نفس الوقت . والبندول البسيط المعلق بمسند مثبت على سطح باخرة يتأثر آنياً بحركتين اذا ما اهتز كل من البندول والباخرة معاً . وهناك امثلة كثيرة على حركة الجسيم المتأثر بأكثر من حركة توافقية بسيطة . وقد يكون تأثير هذه الحركات في الجسيم في خط مستقيم واحد أو في خطين مستقيمين متعامدين او في اي اتجاه آخر . وفي جميع هذه الحالات سنحاول ايجاد محصلة الحركة الناتجة من تأثير هذه الحركات باستخدام قاعدة التركيب .

3 - 2 قاعدة التركيب

ان لهذه القاعدة أهمية خاصة لجميع انواع الموجات والاهتزازات في الطبيعة ، وهي حقيقة تجريبية يمكن التأكد من صحتها من خبراتنا اليومية . وهي تنص على انه يمكن لحركتين اهتزازيتين أو موجيتين أو أكثر ان تحدثا في نفس النقطة دون ان تؤثر احداها في الأخرى . اي بعبارة اخرى يمكن لموجتين أو أكثر ان تنتقلا في وقت واحد خلال نفس النقطة في الفضاء دون ان تتأثر اية موجة بحركة الموجات الاخرى . فمثلاً لو القيت حجرتين أو أكثر في مواقع متباعدة عن بعضها في بركة ساكنة من الماء فان كل حجر سيكون مصدر للموجة على سطح الماء . ان الموجات المتولدة ستتقدم وتتداخل مع

بعضها ثم تخرج من منطقة التداخل وتستمر بالتقدم دون ان يتأثر بعضها بالآخر وبالنسبة للموجات الصوتية ، فنحن نسمع الصوت الصادر من مصدر معين بالرغم من ان هذا الصوت ينتقل في الفضاء الذي قد يحتوي على موجات صوتية اخرى .

وبالنسبة للموجات الضوئية كذلك نحن نرى الاجسام حولنا بوضوح بالرغم من ان الضوء الذي يصل الى اعيننا من جسم معين ينتقل في فضاء يحتوي على موجات ضوئية كثيرة وفي مختلف الاتجاهات . ان هذه الحقيقة التجريبية تشير الى ان الموجات المختلفة تسلك سلوكاً مستقلاً عن بعضها البعض وهذا يعني انه اذا مرت مجموعة من الموجات في نقطة معينة في الفضاء فإن محصلة الازاحة في تلك النقطة تساوي مجموع الازاحات المنفردة التي تحدثها الموجات كلاً على حدة . ان هذه القاعدة تسري فقط على الحركات الموجية والحركات الاهتزازية الخطية ، اي في الحالات التي تخضع لقانون هوك ضمن حدود المرونة فقط ، ويمكن التعبير عن الحركات الموجية او الاهتزازية بمعادلات رياضية خطية . وابرز هذه المعادلات هي معادلة الحركة التوافقية البسيطة .

ان اهمية قاعدة التركيب تتضح بجلاء في انها وسيلة فعالة تمكننا من تحليل الحركات الموجية والاهتزازية المعقدة الى مركباتها التوافقية البسيطة . ولقد كان العالم الفرنسي فورير (G. Fourier) سباقاً في التأكيد على ان الحركات الموجية والاهتزازية الدورية المعقدة ماهي في حقيقتها الا مجموعة من الحركات التوافقية البسيطة .

ومن الجدير بالتنويه ان هذه القاعدة على شموليتها فانها مقيدة فقط على الحركات الصغيرة التي يمكن وصفها بالمعادلات الخطية حيث تكون سعة الموجة او الاهتزاز ضئيلة وهذا مايحدث في اغلب الحالات العملية . اما في حالات الحركة التي توصف بمعادلات غير خطية كتلك التي تمثل الاهتزازات العنيفة والموجات الراجة فان هذه القاعدة لاتتحقق .

ولغرض التحليل والتعبير الرياضي عن هذه القاعدة سنستخدم المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة التي تم اشتقاقها في الفصل السابق وهي :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x \qquad \ldots\ldots\ldots (3\cdot1)$$

ويلاحظ من هذه المعادلة ان التعجيل $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$ يتناسب خطياً مع الازاحة من موضع التوازن x وان الحدين في هذه المعادلة مرفوعان للقوة واحد مما يعني انها بتعبير

رياضي معادلة خطية. وبالأضافة لذلك يلاحظ ان الحدين يحتويان نفس المتغير X مما يشير الى انها معادلة متجانسة. وعليه تعتبر المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة معادلة خطية متجانسة. وان حل مثل هذه المعادلة يعني وصفاً كاملاً للحركة. أما اذا لم تكن المعادلة خطية أي أن حدودها مرفوعة لقوى مختلفة واذا لم تكن متجانسة أي أن حدودها لاتتضمن نفس المتغير عندئذ يصبح الحل صعباً ويحتاج الى رياضيات متقدمة لتحليل الحركة الناتجة. ان مثل هذا غير مطلوب الآن وسيقتصر تحليلنا الآن على المعادلة الخطية المتجانسة (3.1) فقط.

افرض ان الحل الاول المناسب لهذه المعادلة هو

$$x = x_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.2)$$

حيث x_1 يمكن ان يأخذ أي شكل وليكن $A\sin\omega_o t$ مثلاً. ولنفرض ان الحل الثاني المناسب لهذه المعادلة هو

$$x = x_2 \quad \ldots\ldots\ldots (3.3)$$

حيث x_2 يمكن أن يأخذ أي شكل آخر وليكن $B\cos w_o t$ مثلاً.

نعوض الحل الأول في المعادلة (3.1) فنجد ان

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2_o x_1 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (3.4)$$

ونعوض الحل الثاني في المعادلة (3.1) فنجد ان

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega^2_o x_2 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (3.5)$$

نجمع المعادلتين (3.4) ,(3.5) فينتج

$$\frac{d^2}{dt^2} + (x_1 + x_2) + \omega^2_o (x_1 + x_2) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (3.6)$$

وهذا يشير الى ان هناك ثلاثة حلول للمعادلة (3.1) هي

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 \\ x = x_1 + x_2 \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots (3.7)$$

من ذلك نستنتج ان هناك خاصية مهمة تميز المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة وهي ان التركيب الخطي لأي حلين لمثل هذه المعادلة يعتبر حلاً مناسباً لها . أي أن المجموع البسيط لأي حلين هو أيضاً حل ثالث للمعادلة الخطية المتجانسة . وهذه الخاصية غير صحيحة للمعادلات غير الخطية . ان هذه الخاصية تمثل قاعدة التركيب . وبما ان كل الحركات التوافقية البسيطة تتحكم بها معادلة خطية متجانسة فجميعها اذن تخضع لقاعدة التركيب . أي بصيغة أخرى ان محصلة اهتزازين توافقيين أو أكثر مساوياً لمجموع الأهتزازات المنفردة التي يتأثر بها الجسيم . وسنطبق هذه القاعدة على الجسيم الذي يخضع لتأثير أكثر من حركة توافقية بسيطة واحدة .

3 - 3 تركيب حركتين توافقيتين بسيطتين في نفس الأتجاه :

لنفرض ان لدينا جسيماً يخضع آنياً لحركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد على امتداد المحور السيني x وتمثل الحركة التوافقية البسيطة الأولى بالمعادلة :

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \theta_1) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3\cdot8)$$

وتمثل الحركة التوافقية البسيطة الثانية بالمعادلة

$$x_2 = a_2 \sin(\omega t + \theta_2) \qquad \ldots(3\cdot9)$$

حيث x_1 ، x_2 تمثلان الأزاحتين الأنيتين للجسيم نتيجة تأثير الحركتين التوافقيتين و a_1, a_2 تمثلان سعتي الحركتين ، θ_1, θ_2 يمثلان زاويتي الطور الأبتدائيتين و ω تمثل التردد الزاوي (نفسه) للحركتين .

ان محصلة الأزاحة x الناتجة من تركيب الأزاحتين هي

$$x = x_1 + x_2$$

$$x = a_1 \sin(\omega t + \theta_1) + a_2 \sin(\omega t + \theta_2)$$

$$x = a_1 (\sin \omega t \cos \theta_1 + \cos \omega t \sin \theta_1)$$
$$+ a_2 (\sin \omega t \cos \theta_2 + \cos \omega t \sin \theta_2)$$

نرتب المعادلة فتصبح

$$x = (a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos \theta_2) \sin \omega t$$
$$+ (a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2) \cos \omega t \qquad \ldots(3\cdot10)$$

ولما كانت الكميات a_1 a_2 θ_1 θ_2 ثوابت لذلك يمكن أن نفرض أن

$$a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2 = A \cos \theta \qquad \ldots(3\cdot11)$$

$$a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2 = A \sin \theta \qquad \ldots(3\cdot12)$$

وبتربيع وجمع المعادلتين (3·11) و (3·12) نحصل على :

$$A^2 (\sin^2\theta + \cos^2\theta) = a_1^2 (\sin^2\theta_1 + \cos^2\theta_1) + a_2^2 (\sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2)$$
$$+ 2a_1a_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2)$$

ومن هذه المعادلة ينتج أن

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos (\theta_2 - \theta_1) \qquad ...(3\cdot13)$$

وبقسمة المعادلة (3·11) على (3·12) ينتج

$$\tan\theta = \frac{a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin\theta_2}{a_1 \cos\theta_1 + a_2\cos\theta_2} \qquad ...(3\cdot14)$$

الآن نعوض المعادلتين (3·11) و(3·12) في المعادلة (3·10) فتصبح

$$x = A\cos\theta \ \sin wt + A\sin\theta \ \cos wt$$
$$\therefore x = A \sin (\omega t + \theta) \qquad ...(3\cdot15)$$

ان هذه المعادلة تمثل محصلة الأزاحة الآنية x للحركتين التوافقيتين البسيطتين، ويلاحظ أنها تشابه المعادلتين الأصليتين (3·8) , (3·9) مما يشير الى أنها تمثل حركة توافقية بسيطة أيضاً لها نفس التردد الزاوي المشترك لمركبتي الحركة . في هذه المعادلة A تمثل سعة الحركة التوافقية الناتجة ويمكن ايجادها من المعادلة (3·13) و θ تمثل زاوية

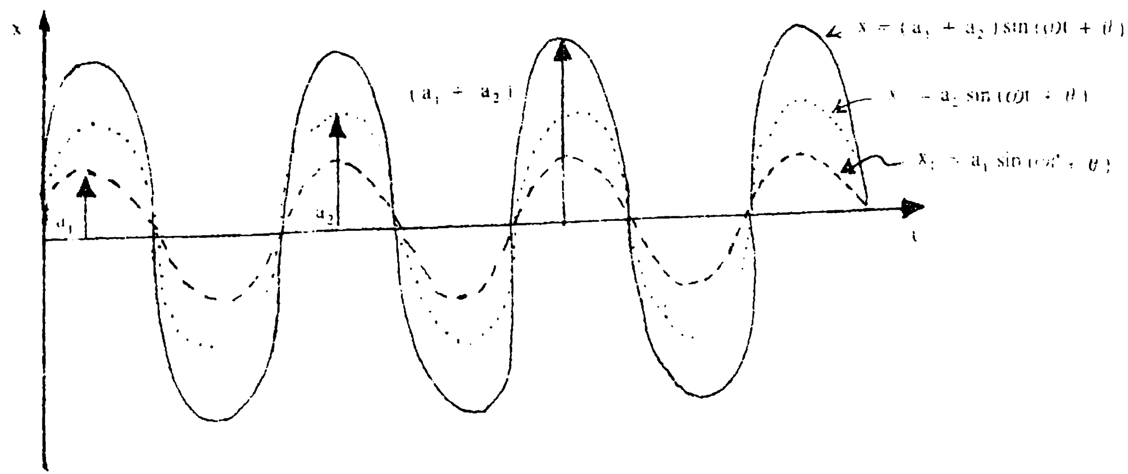
الطور الأبتدائي لمحصلة الحركة ويمكن ايجادها من المعادلة (3·14) ويمكن أستخلاص بعض النتائج الهامة من المعادلة (3·15) فيما يتعلق بالتداخل بين أي حركتين توافقيتين بسيطتين :

(أ) التداخل بين حركتين توافقتين بسيطتين لهما نفس التردد والطور ويختلفان بالسعة أي أن $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

فأن المعادلة (3·15) تصبح كالآتي

$$x = (a_1 + a_2) \sin (\omega t + \theta) \qquad (3\cdot16)$$

وهذه المعادلة هي بالحقيقة تمثل الجمع الجبري البسيط للمعادلتين (3·8) و (3·9) ويمكن تمثيل مركبتي الحركة المتمثلتين بالمعادلتين (3·8) و (3·9) ومحصلتهما المتمثلة بالمعادلة (3·16) بالرسم البياني الموضح في الشكل (3·1)



الشكل (31) التداخل البناء

يلاحظ من هذا الشكل ان سعة الحركة الاهتزازية الناتجة تساوي مجموع سعتي الحركتين المتداخلتين اللتين لهما نفس التردد والطور. أي ان الحركتين التوافقيتين في هذه الحالة تقويان بعضهما ويسمى التداخل بينهما بالتداخل البناء. والجدير بالملاحظة انه عندما تتساوى السعتين ، أي أن $a_2 = a_1$ فأن الحركتين التوافقيتين تنطبق كل منهما على الاخرى تماماً وتكون سعة محصلتهما مساوية لضعف السعة الأصلية لأي منهما.

(ب) التداخل بين حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد ولكن يختلفان بالسعة والطور

لنأخذ حالة متطرفة ونعتبر ان الحركة التوافقية البسيطة الاولى تبدأ عندما تكون $\theta_1 = 0$ وان الحركة التوافقية البسيطة الثانية تبدأ عندما تكون $\theta_2 = \pi$ فعندئذ تصبح المعادلة (3.16) كالآتي :

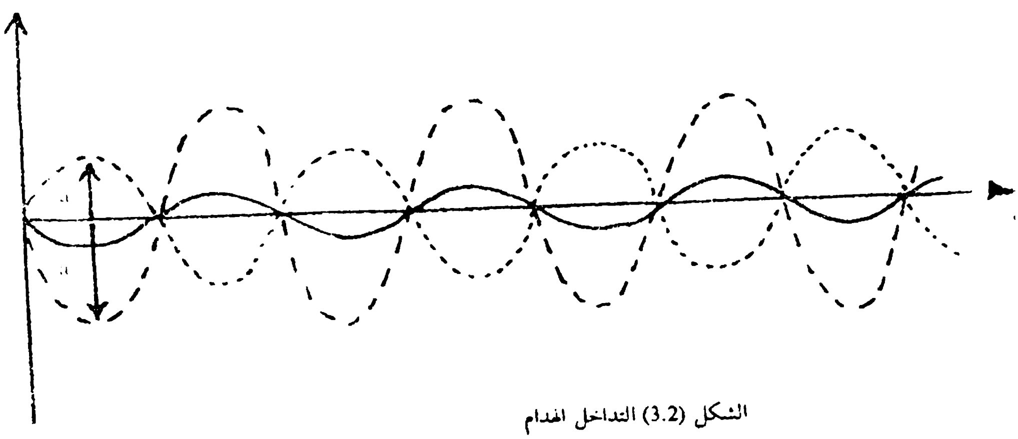
$$x = (a_1 - a_2) \sin \omega t \qquad (3.17)$$

هذه المعادلة هي بالحقيقة تمثل الجمع الجبري البسيط للمعادلتين (3.8) و (3.9) اي

$$x_1 = a_1 \sin \omega$$

$$x_2 = a_2 \sin (\omega t + \pi) \qquad \ldots (3.18)$$

ويمكن تمثيل هاتين المعادلتين ومحصلتهما المتمثلة بالمعادلة (3.17) بالرسم البياني الموضح في الشكل (3.2).



الشكل (3.2) التداخل الهدام

يلاحظ من هذا الشكل ان محصلة السعة تساوي الفرق بين سعتي الحركتين التوافقيتين المتداخلتين وتقع قمة احداهما فوق قعر الاخرى . اي ان الحركتين تعاكس احداهما الاخرى وفي هذه الحالة فان الحركتين تهدمان بعضهما الاخر ويسمى مثل هذا التداخل بالتداخل الهدام . والجدير بالملاحظة انه عندما تتساوى السعتان اي ان $a_1 = a_2$ فان محصلة السعة تصبح صفرا .

ان حالتي التداخل البناء والهدام تمثل حالتين متطرفتين من حالات للتداخل وكل حالات التداخل الاخرى تقع بين هاتين الحالتين . اي ان محصلة السعة لتداخل حركتين توافقيتين بسيطتين مهما كان فرق الطور بينهما ينحصر بين القيمتين $(a_1 + a_2)$ و $(a_1 - a_2)$ وعندما تكون $a_1 = a_2$ فان محصلة السعة تقع بين $2a$ والصفر .

3 - 4 أشكال ليساجو

عندما يخضع جسيم انيا لحركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين فان محصلة الحركة للجسيم تكون على مسار منحن . وشكل هذا المنحني يدعى بشكل ليساجو . ان هذا الشكل يعتمد على سعة وتردد كل من الحركتين التوافقيتين البسيطتين وفرق الطور بينهما .

فلو كان لدينا بندول بسيط معلق من نقطة تتحرك بحركة توافقية بسيطة باتجاه المحور الصادي وسمح لكرة البندول ان تتذبذب بنفس الوقت بسعة صغيرة باتجاه المحور السيني فان كرة البندول ستخضع لحركتين متعامدتين في وقت واحد . ونتيجة ذلك فان كرة البندول ستتحرك في بعدين بمسار يحدده محصلة هاتين الحركتين فاذا كانت النسبة بين ترددي الحركتين مساويا لعدد صحيح وفرق الطور بينهما زاوية معينة فان شكل المسار يكون مغلقا . ويمكن توضيح ذلك تحليليا وبيانيا بأمثلة محددة كما في البند القادم .

3 - 5 تركيب حركتين توافقيتين بسيطتين في اتجاهين متعامدين

لنفرض ان لدينا جسيما يتاثر انيا بحركتين توافقيتين بسيطتين احداهما تؤثر باتجاه المحور السيني والاخرى تؤثر باتجاه المحور الصادي وسنعتبر اولا الحالة التي يكون فيها الترددان متساويين .

فلو فرضنا ان الازاحة الآنية للجسيم على امتداد المحور السيني هي :

$$x = a\sin(\omega t + \theta) \qquad \ldots(3\cdot19)$$

والازاحة الانية لنفس الجسيم على امتداد المحور الصادي هي

$$y = b\sin\omega t \qquad \ldots(3\cdot20)$$

يلاحظ هنا ان الحركتين التوافقيتين السينية والصادية تختلفان في السعة والطور الابتدائي للحركة . وللحصول على المعادلة العامة لمسار الحركة نحذف الزمن (t) بين المعادلتين (3·19) و (3·20) .

من المعادلة (3·19) نحصل على

$$\frac{x}{a} = \sin\omega t\cos\theta + \cos\omega t\sin\theta \qquad \ldots(3\cdot21)$$

ومن المعادلة (3·20) نحصل على

$$\sin\omega t = \frac{y}{b}$$

وان

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$$

ينتج

$$\cos\omega t = \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$$

نعوض قيم $\cos\omega t$, $\sin\omega t$ في المعادلة (3·21) فينتج ان

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}\cos\theta + \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\,\sin\theta \qquad \ldots(3\cdot22)$$

نرتب هذه المعادلة فتصبح

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\cos\theta = \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\,\sin\theta$$

نربع الطرفين

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\cos^2\theta - \frac{2xy}{ab}\cos\theta = \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\sin^2\theta$$

نختزل هذه المعادلة ونرتبها فتصبح كالاتي :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\theta = \sin^2\theta \qquad \ldots(3\cdot23)$$

ان هذه تمثل المعادلة العامة للقطع الناقص (Ellipse) وهذه تمثل شكل المسار الذي يسلكه الجسيم عندما يخضع لتأثير حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد

وسعتين مختلفتين وفرق الطور بينهما
ومن هذه المعادلة يمكن الحصول على اشكال ليساجو لمختلف قيم كما يأتي :
(أ) عندما 2π او $\theta = 2$ فان المعادلة (3.23) تصبح

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0$$

$$\therefore\ y = \frac{b}{a}\, x \qquad \text{...... (3.24)}$$

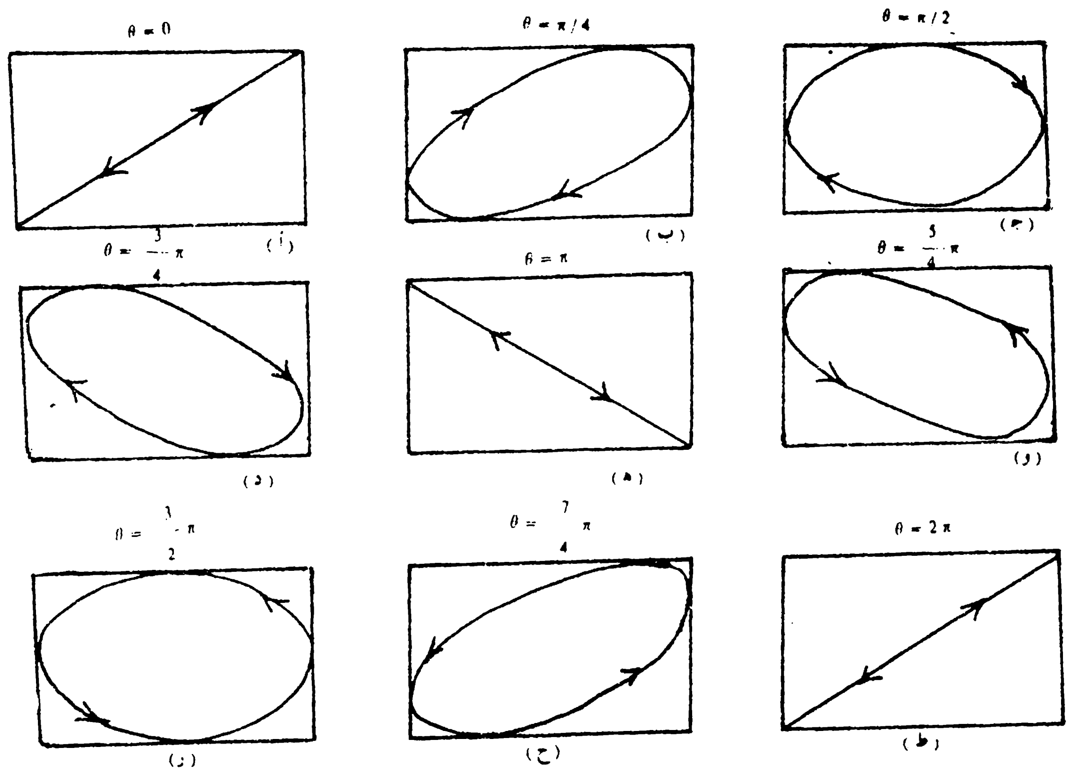
هذه المعادلة تشير الى ان شكل المسار الذي يسلكه الجسيم يكون خطاً مستقيماً ميله يكون مقداراً موجباً يساوي $\frac{b}{a}$ كما في الشكل (3 – 3 أ و ط) وهذا يعني ان y,x لهما نفس الاشارة الجبرية دائماً. اي اما ان يكون كلاهما موجباً اوكلاهما سالباً. وهذه الحالة يقابلها في البصريات مايدعى بالاهتزاز المستقطب خطياً.

(ب) عندما $\theta = \frac{3\pi}{2}$ او $\theta = \frac{\pi}{2}$ فان المعادلة (3.23) تصبح

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{........(3.25)}$$

وهي معادلة القطع الناقص التي يقع محوراها الاساسيان على امتداد المحورين السيني والصادي. ان اتجاه حركة الجسيم على هذا المسار عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$ يمكن تفسيرها كالاتي : عندما يبدأ الجسيم بالحركة في لحظة زمنية $t = 0$ فان x تبدأ بالتناقص من اقصى قيمة موجبة لها ، بينما y تبدأ مباشرة بالزيادة من الصفر. وهذا يعني ان المسار الناقص يحدث باتجاه معاكس لاتجاه حركة عقرب الساعة. كما مبين في الشكل (3 = 3 ج). اما اذا كانت الزاوية $\theta = \frac{3\pi}{2}$ فان اتجاه حركة الجسيم تكون باتجاه حركة عقرب الساعة كما مبين في الشكل (3.3 ز).

ويلاحظ ان المعادلة (3.25) تختزل الى شكل دائري عندما تصبح $b = a$



الشكل (3-3) يبين أشكال ليساجو لقيم مختلفة لـ θ بين اهتزازين توافقيين لهما نفس التردد

(جـ) عندما $\theta = \pi$ فان المعادلة (3·23) تصبح

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 = 0$$

$$\therefore y = - \frac{b}{a} x \qquad \ldots (3\cdot26)$$

ان هذا الحل يمثل الحالة في الشكل (3·3أ)لكن ميل الخط المستقيم هومقدار سالب يساوي $- \frac{b}{a}$

(د) عندما $\frac{7\pi}{4}$ او $\theta = \frac{\pi}{4}$ فان المعادلة (3·23) تاخذ شكل قطع ناقص مائل .

فعندما تكون $\theta = \frac{\pi}{4}$ فان اتجاه حركة الجسيم يكون معاكسا لاتجاه حركة عقرب الساعة كما مبين في الشكل (3·3 ب) . والحقيقة ان هذا الشكل يمثل الحالة عندما تكون θ بين o و $\frac{\pi}{2}$ وبذلك يكون هذا الشكل وسطا بين الحالتين (أ)و(جـ)

اما عندما تكون $\theta = \frac{7\pi}{4}$ فان اتجاه حركة الجسيم تكون بنفس اتجاه حركة عقرب الساعة كما مبين في الشكل (3·3 جـ)

(هـ) عندما $\frac{5}{4}\pi$ او $\theta = \frac{3}{4}\pi$ فان المعادلة 3·23 تاخذ ايضا شكل قطع ناقص مائل وتكون محصلة مسار الحركة للجسيم كما مبين في الشكل(3·3 د –و)

ان هذه السلسلة من التغييرات في شكل ليساجو تتكرر بنفس الطريقة في كل زمن دوري .

من هذا نستنتج ان محصلة الحركة لتركيب أي حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين لهما نفس التردد يكون مسارها على شكل قطع ناقص في جميع الحالات ، على أعتبار ان الدائرة والخط المستقيم هما حالتان خاصتان من القطع الناقص . والحركة الفعلية للجسيم أما أن تتم مع اتجاه حركة عقرب الساعة أو في الأتجاه المضاد، ويتوقف ذلك على أي الحركتين تتقدم الأخرى في طورها .

بالأضافة للطريقة التحليلية هناك الطريقة البيانية لتركيب الحركات التوافقية المتعامدة ، هذه الطريقة تستدعي التعبير عن الحركة التوافقية البسيطة بدلالة المتجه الدوار.

3 - تمثيل الحركة التوافقية البسيطة بالمتجه الدوار

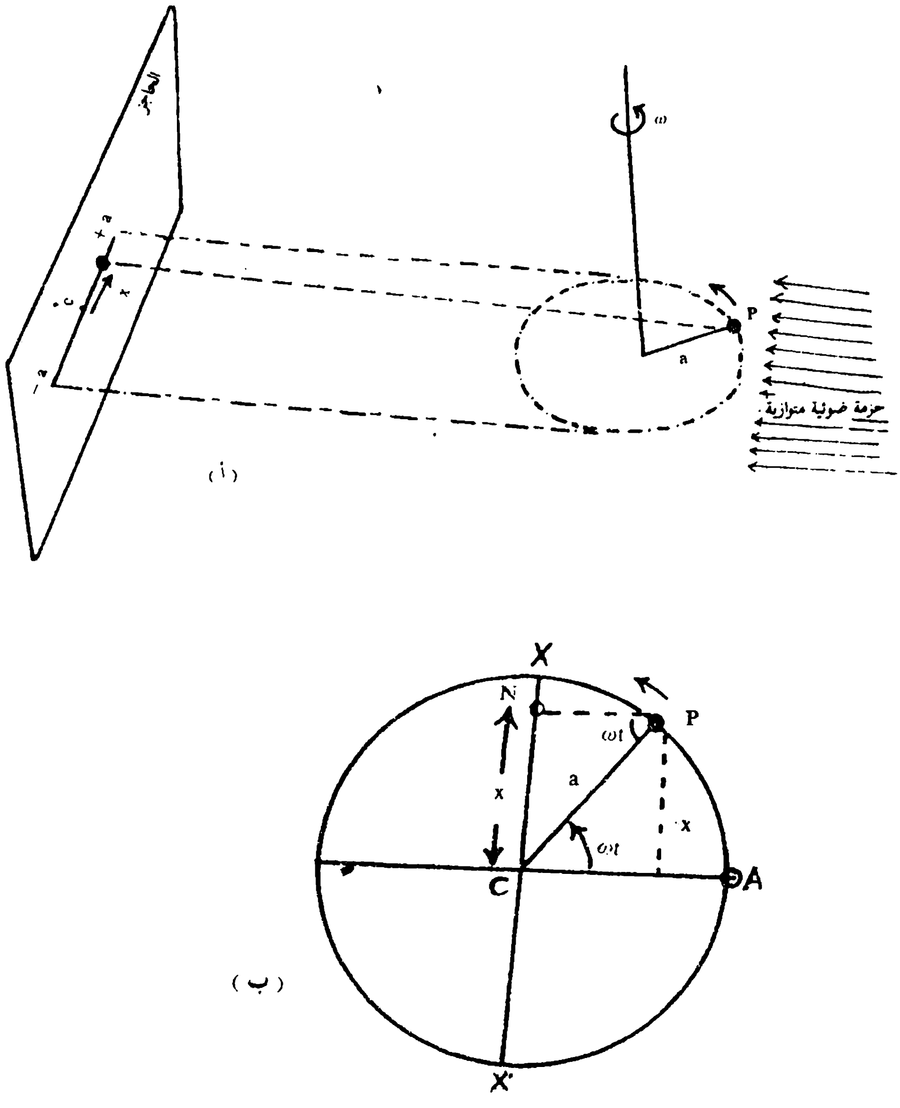
ان من الطرق المفيدة في الفيزياء هي وصف الحركة التوافقية البسبطة من خلال مسقط الحركة الدائرية المنتظمة.

لنفرض أن لدينا جسيماً P مثبت بطرف ذراع أفقي طوله a وهذا الذراع متصل بمحور عمودي يدور بسرعة منتظمة ω . ان a تمثل نصف قطر المسار الدائري الذي يسلكه الجسيم خلال الحركة ويدعى بالمتجه الدوار. ونفرض ان حزمة ضوئية أفقية تلقي ظلاً للجسيم على حاجز عمودي كما مبين في الشكل (3·4 أ) فعند أمعان النظر على حركة ظل الجسيم على الحاجز نلاحظ أنه ينجز حركة توافقية بسيطة على طول الخط الأفقي على الحاجز الذي مركزه c وبزمن دوري T قدره $\frac{2\pi}{\omega}$ وبسعة مقدارها a.

وللحصول على معادلة الحركة التوافقية البسيطة نلاحظ الشكل (3·4 ب) . نرسم القطر X'X للدائرة التي مركزها c ومن النقطة p التي تمثل الموقع الآني للجسيم نقيم العمود PN حيث N هي النقطة التي تقابل الجسيم وتمثل قاعدة العمود الساقط على القطر من ذلك الجسيم . فاذا استمر الجسيم p بالدوران بسرعة منتظمة على محيط الدائرة فان النقطة N ستستمر بالحركة التوافقية البسيطة على امتداد القطر XX' فلو فرضنا ان الجسيم بدأ بالحركة في الزمن $t = 0$ من الموقع A فان النقطة N تكون في تلك اللحظة في مركز الدائرة C . وعندما يصل الجسيم الموقع X فان النقطة N تتطابق مع X' وعندما يستمر الجسيم بالحركة على محيط الدائرة ويصل الموقع X فان النقطة N تتطابق مع X' وعندما يعود الجسيم الى A بعد اكمال دورة واحدة تعود النقطة الى المركز C وهكذا عندما يتكرر دوران الجسيم على محيط الدائرة بسرعة منتظمة تتكرر الحركة التوافقية البسيطة للنقطة N على طول القطر XX'.

نفرض ان الجسيم بدأ بالحركة من الموقع A في اللحظة الزمنية $t = 0$ وبعد فترة زمنية t فان موقعه الآني يكون P والنقطة المقابلة هي N . وفي هذه الحالة تكون الزاوية ACP مساوية للزاوية NPC وعليه يكون لدينا

$$\sin \omega t = \frac{x}{a}$$



الشكل (3·4) الحركة التوافقية البسيطة تمثل بمسقط للحركة الدائرية المنتظمة في نفس مستوى الحركة .

حيث ان x تمثل المسافة من النقطة N الى مركز الدائرة C وندعى بالازاحة الآنية . لذلك فان .

$$x = a \sin \omega t \qquad \ldots\ldots(3\cdot27)$$

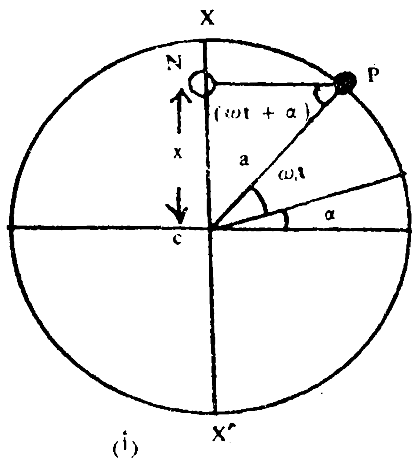
اما اذا بدا الجسيم بالحركة في الزمن $t = o$ من الموقع B المبين في الشكل (3·5 أ)

فان الازاحة الآنية x للنقطة N من مركز الدائرة c في الزمن t هي

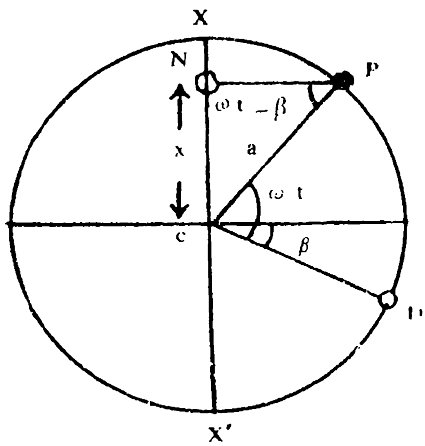
$$x = a \sin(\omega t + \alpha) \qquad \ldots\ldots(3{\cdot}28)$$

اما اذا بدأ الجسيم بالحركة في اللحظة الزمنية t = 0 من الموقع D المبين في الشكل (3·5 ب) . فان الازاحة الآنية للنقطة N من مركز الدائرة C في الزمن t هـــي

$$x = a \sin(\omega t - \beta) \qquad \ldots\ldots(3{\cdot}29)$$



(أ)



(ب)

الشكل (3·5)

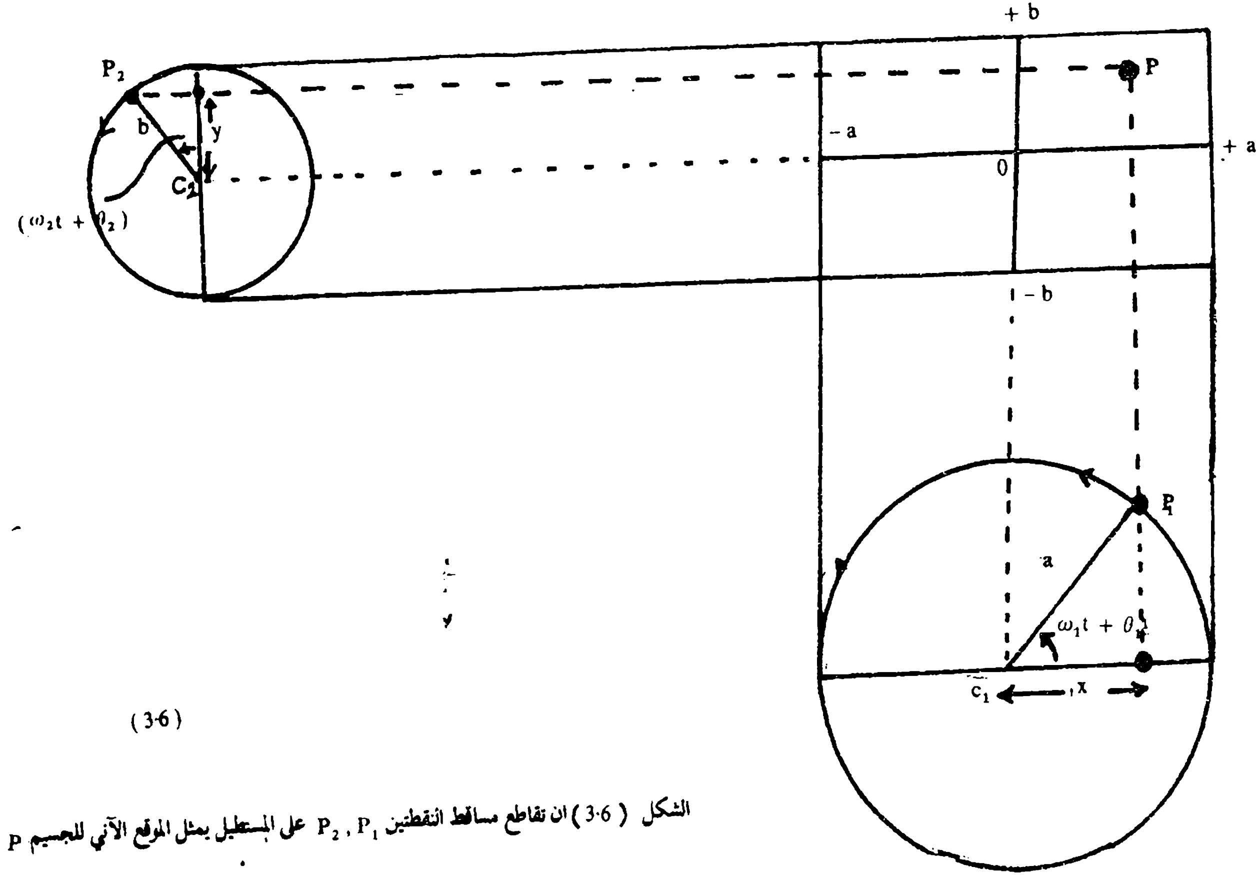
/ 3 الطريقة البيانية لتركيب حركتين أهتزازيتين متعامدتين

نتصور ان لدينا جسيماً مثل P يعاني انياً حركتين توافقيتين بسيطتين في اتجاهيـــن متعامدين . ونفرض ان الازاحتين الآنيتين في الاتجاهين السيني والصادي هما عـــلى الترتيب :

$$x = a \sin(\omega_1 t + \theta_1) \qquad \ldots\ldots(3{\cdot}30)$$

$$y = b \sin(\omega_2 t + \theta_2) \qquad \ldots\ldots(3{\cdot}31)$$

ويمكن بناء شكل مسار الحركة الذي يسلـكه الجسيم الخاضع لهاتين الحركتيـــن . باستخدام طريقة تمثيل الحركة التوافقية البسيطة بمتجه دوار في اتجاهين متعامديـــن . نبدأ اولاً برسم دائرتين مرجعيتين مركزهما c_2, c_1 وانصاف اقطارهما b، a على الترتيب كما مبين في الشكل (3·6) .



(3·6)

الشكل (3·6) ان تقاطع مساقط النقطتين P_1 , P_2 على المستطيل يمثل الموقع الآني للجسيم P

الدائرة الاولى التي مركزها C_1 تستخدم لتعيين الازاحة الآنية x للنقطة P_1 والدائرة الثانية التي مركزها C_2 تستخدم لتعيين الازاحة الآنية y للنقطة P_2. وبأخذ الازاحتين الآنيتين معاً يمكن وصف الموقع الآني للجسيم P بالنسبة لنقطة الاصل O التي تقع في مركز المستطيل الذي طول ضلعيه 2b, 2a . ان موقع الجسيم P يقابل دائما موقع النقطتين P_2, P_1 في اية لحظة زمنية t .

ان السمة الظاهرة في هذا الشكل هي انه مهما كانت العلاقة بين ترددات واطوار الحركتين اللتين يخضع لهما الجسيم فأن حركته تكون دائما مقيدة ضمن مساحة المستطيل وكذلك فأن اضلاع المستطيل تكون مماسية مع مسار حركة الجسيم في النقطة التي يلامس فيها المسار حدود المستطيل ، ماعدا الحالات التي تصل فيها محصلة الحركة الى زوايا المستطيل .

ان وصف هذه الطريقة يكون اكثر وضوحاً عندما نحدد معلومات حول تردد وسعة الحركتين وفرق الطور بينهما .

8 – 3 تركيب حركتين توافقيتين متعامدتين لهما نفس التردد بطريقة بيانية

بالاضافة للطريقة التحليلية التي سبق ان تطرقنا لها بالتفصيل في البند (3·4) هناك طريقة بيانية بسيطة للحصول على اشكال ليساجو من تركيب حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين لهما نفس التردد .

لنفرض ان لدينا جسيماً يتأثر آنيا بحركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين متمثلتين بالمعادلتين (3·19) و (3·20) اي

$$x = a \sin(\omega t + \theta)$$

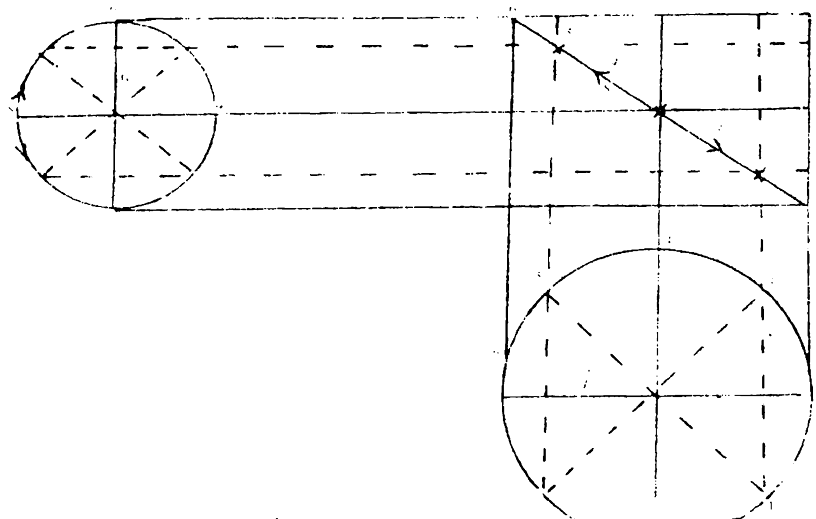
$$y = b \sin \omega t$$

حيث ان θ تشير الى فرق الطور بين الحركتين .

نرسم دائرتين مرجعتين مركزهما C_2, C_1 وانصاف اقطارهما b, a على الترتيب كما في الشكل (3·7) . نقسم محيط كل دائرة الى ثمانية اجزاء متساوية . كل جزء يمثل $\frac{1}{8}$ من زمن الدورة الواحدة T . اي مايعادل زاوية مقدارها $\frac{\pi}{4}$. نؤشر على هذه الاجزاء بالارقام 2, 1, 0 ..... ,7, 8 ليشير كل رقم الى طور الحركة بدلالة الزاوية او الزمن . فمثلاً

الرقمين (0,0) على محيطي الدائرتين يقابلان موضعي النقطتين P_2 , P_1 على التوالي في الزمن $t = o$. ومسقط هاتين النقطتين يتقاطع في النقطة O التي تمثل الموضع الآني للجسيم P في بداية الحركة اي في اللحظة الزمنية $t = 0$ والرقمين (1,1) يشيران الى موضع النقطتين P_2 , P_1 على محيطي الدائرتين بعد مرور $\frac{1}{8}$ من زمن الدورة الواحدة ومسقطهما يتقاطع في النقطة 1 التي تمثل الموضع الاني للجسيم P بعد مرور زمن مقدار $\frac{T}{8}$ من بداية الحركة . والرقمين (2,2) يشيران الى موضع النقطتين P_2 , P_1 بعد مرور $\frac{1}{4}$ من زمن الدورة الواحدة...وهكذا يستمر الحال حتى تكمل الدورة الواحدة عندما تقابل النقطتان P_2 , P_1 الرقمين (8,8) حيث يعود الجسيم الى نفس موضعه الاصلي في بدء الحركة . ان المساقط المقابلة للنقطتين p_2 , p_1 في مختلف المواضع تعطي مجموعة من التقاطعات على المستطيل . وكل نقطة تقاطع على المستطيل تمثل الموضع الآني للجسيم P الذي يتحرك ضمن مساحة المستطيل . وبتوصيل نقاط التقاطع مع بعضها حسب تسلسلها يتشكل محصلة مسار الحركة الذي يسلكه الجسيم P تحت تأثير الحركتين التوافقيتين المتعامدتين .

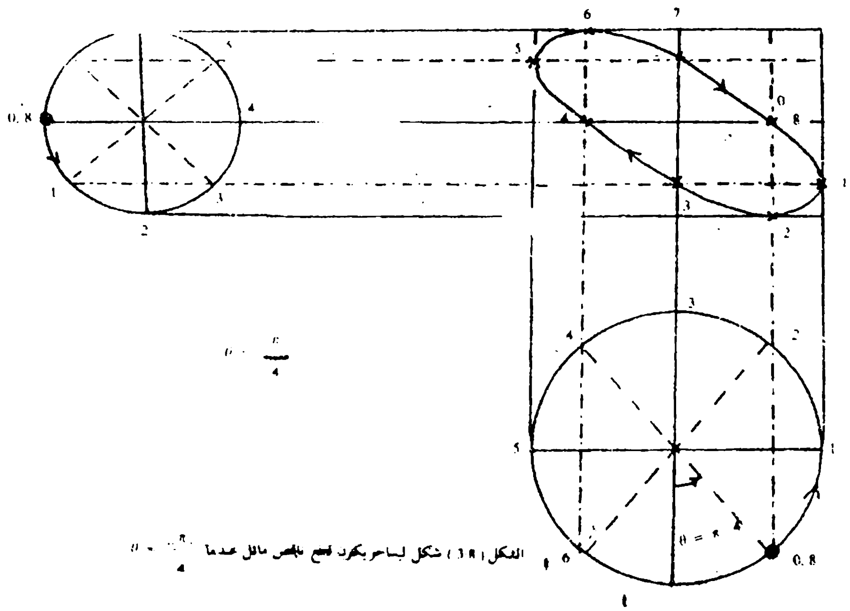
فمثلا اذا كان فرق الطور بين الحركتين $\theta = 0$ في الزمن $t = 0$ فأن النقطتين p_2 , p_1 تبدأن بالحركة من الموضعين (0,0) على محيطي الدائرتين حيث يكون المتجه الدوار a موازيا للمحور السيني والمتجه الدوار b موازياً للمحور الصادي كما مبين في الشكل (3-7) .



الشكل (3-7) شكل ...

ان الشكل (3.7) يبين ان مواضع النقطتين P_2, P_1 على محيطي الدائرتين تحدد ان الموقع الآني للجسيم P على المستطيل. ويلاحظ ان مساقط النقاط 3,1 على الدائرتين يتقاطعان في نفس الموقع على المستطيل ، وكذلك النقاط 8,4,0 والنقاط 7,5 . وعند ربط نقاط التقاطع على المستطيل مع بعضها نحصل على خط مستقيم وهذا الخط يمثل محصلة مسار الجسيم الخاضع لحركتين توافقيتين متعامدتين لهما نفس التردد وفرق الطور بينهما صفر.

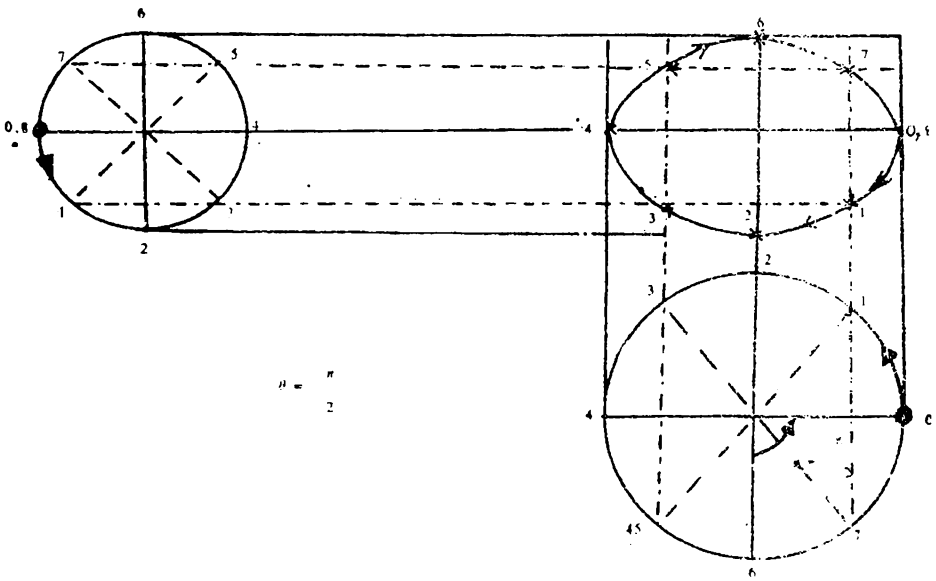
وعندما يكون فرق الطور بين الحركتين $\theta = \frac{\pi}{4}$ في اللحظة الزمنية $t = 0$ فان النقطتين P_2, P_1 تبدءان بالحركة من الموضعين (0,0) على محيطي الدائرتين حيث يصنع المتجه الدوار a زاوية مقدارها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور السيني ومن هذا الموضع تبدأ الحركة التوافقية على المحور السيني. بينما المتجه الدوار يكون موازياً للمحور الصادي كما مبين في الشكل (3.8) .



الشكل (3.8) شكل ليساجو يكون قطع ناقص مائل عندما $\theta = \frac{\pi}{4}$

يلاحظ من هذا الشكل ان مسقط كل نقطتين متناظرتين على محيطي الدائرتين يلتقي في نقطة واحدة فقط على المستطيل ماعدا النقطتين 8, 0 حيث يمثلان نقطتي بدأ الدورة ونهايتها لذلك يلتقيان في نفس الموضع . وبتوصيل نقاط التقاطع على المستطيل وفق تسلسل تقاطعها نحصل على منحنى مغلق شكله يمثل قطعاً ناقصاً مائلاً. ان هذا الشكل يمثل محصلة مسار الحركة للجسيم الواقع تحت تاثير حركتين توافقيتين متعامدتين لهما نفس التردد وفرق الطور بينهما $\frac{\pi}{4}$.

أما اذا كان فرق الطور بين الحركتين $\theta = \frac{\pi}{2}$ في اللحظة الزمنية $t =$ فان النقطتين P_2, P_1 تبدءان بالحركة من الموضعين (0,0) على محيطي الدائرتين حيث يصنع المتجه الدوار a زاوية مقدارها $\frac{\pi}{2}$ مع المحور السيني بينما المتجه الدوار b يكون موازيا للمحور الصادي كما مبين في الشكل (3-9) .



الشكل (3-9) يمثل شكل ليساجو يكون قطع ناقص معتدل عندما $\theta = \pi / 2$

من هذا الشكل يتضح ان شكل المسار الذي يسلكه الجسيم الخاضع لتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين لهما نفس التردد وفرق الطور بينهما $\frac{\pi}{2}$ يكون قطعاً ناقصاً معدلاً .

وبنفس الطريقة تماماً يمكن الحصول على اشكال ليساجو الاخرى بعد أخذ زاوية فرق الطور بالاعتبار .

أما اشكال ليساجو الناتجة من تركيب حركتين توافقيتين بسيطتين تختلفان في التردد وتعملان في اتجاهين متعامدين فهي اكثر تعقيداً . ولكن سنكتفي هنا فقط في عرض طريقة تركيب حركتين توافقيتين متعامدتين تردد احدهما ضعف تردد الاخرى وعلى غرار ذلك يمكن ايجاد ناتج تركيب اي حركتين توافقيتين مهما كان تردد وسعة كل منهما وفرق الطور بينهما.

ب - 3 تركيب حركتين توافقيتين متعامدتين نسبة ترددهما كنسبة 2 الى 1

نفرض ان لدينا جسيماً يخضع لحركتين توافقيتين متعامدتين تمثلهما المعادلتين :

$$x = a \sin (2\omega t + \theta) \qquad ......(3\cdot32)$$

$$y = b \sin \omega t \qquad ......(3\cdot33)$$

نحاول الان ربط المعادلتين بالتخلص من الزمن t .

من المعادلة (3·33) نحصل على

$$\frac{y}{b} = \sin \omega t$$

ومن العلاقة $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$ نجد ان

$$\cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t}$$

$$\cos \omega t = \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \qquad ......(3\cdot34)$$

ومن المعادلة (3·32) نحصل على

$$\frac{x}{a} = \sin (2\omega t + \theta)$$

$$= \sin 2\omega t \cos\theta + \cos 2\omega t \sin\theta$$

لـــكن

$$\sin 2\omega t = 2\sin \omega t \cos \omega t$$

و

$$\cos 2\omega t = 1 - 2\sin^2 \omega t$$

وبالتعويض نجد ان

$$\frac{x}{a} = 2\sin \omega t \cos \omega t \cos\theta + (1 - 2\sin^2 \omega t)\sin\theta$$

نعوض قيم $\cos\omega t , \sin\omega t$ فنجد ان .

$$\frac{x}{a} = 2 \cdot \frac{y}{b} \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\ \cos\theta + \left(1 - \frac{2y^2}{b^2}\right)\sin\theta$$

نرتب المعادلة الاخيرة فتصبح

$$\left[\frac{x}{a} - \left(1 - \frac{2y^2}{b^2}\right)\sin\theta\right] = \frac{2y}{b}\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\ .\cos\theta$$

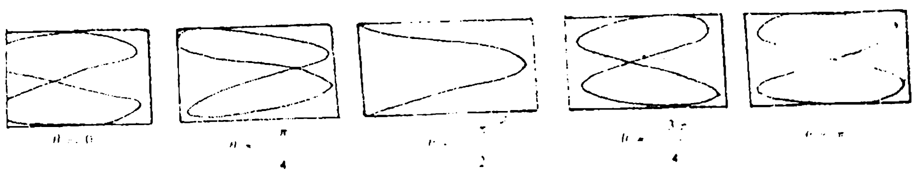
نربع الطرفين ونبسط الحدود فتصبح المعادلة الناتجة كالاتي

$$\left(\frac{x}{a} - \sin\theta\right)^2 + \frac{4y^2}{b^2}\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{x}{a}\sin\theta - 1\right) = 0 \qquad \ldots\ldots(3\text{-}35)$$

ان هذه تمثل المعادلة العامة للمنحنى الذي يحتوي على حلقتين مغلقتين .وهي تحدد شكل المسار الذي يسلكه الجسيم لمختلف قيم θ والشكل (3-10)يوضح اشكال المنحنيات التي نحصل عليها عندما تأخذ θ القيم

$$\pi\ ,\ \frac{3\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ \ 4$$

ويمكن الحصول على هذه الاشكال بطريقة بيانية كالآتـــي :



شكل (3-10)

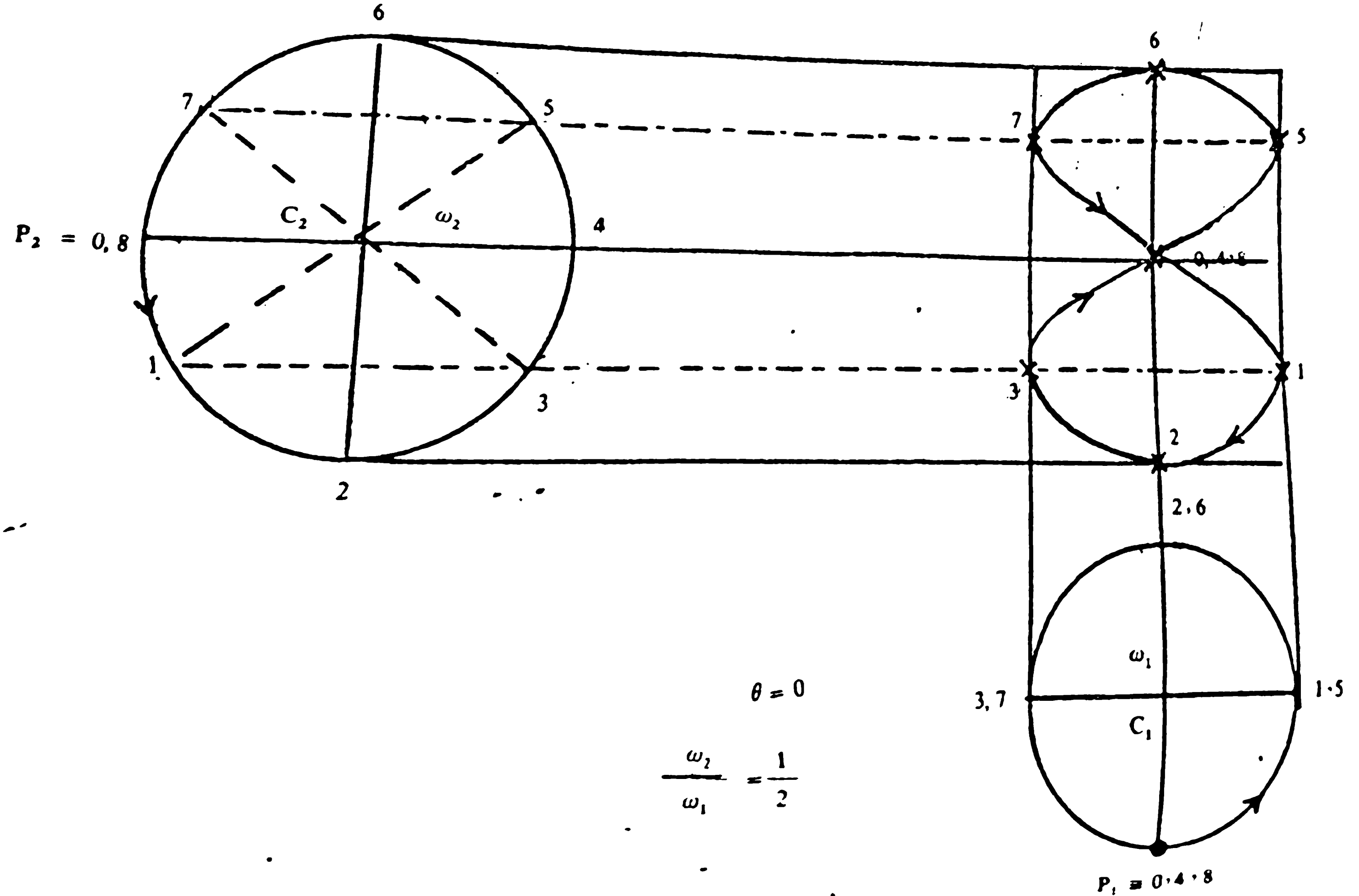
اشكال ليساجو لاهتزازين متعامدين ترددهما كنسبة 2 : 1 ولقيم مختلفة لفرق الطور

نرسم دائرتين مرجعيتين مركزهما C_2, C_1 وانصاف اقطارهما b, a على الترتيب . ولما كان التردد الزاوي للحركة التوافقية باتجاه المحور السيني ضعف التردد الزاوي باتجاه المحور الصادي لذلك فان الزمن الدوري للحركة الاولى يكون نصف الزمن الدوري للحركة الثانية . اي ان الحركة الاولى تكمل دورتين مقابل الحركة الثانية التي تكمل دورة واحدة فقط . لذلك نقسم محيط الدائرة الاولى التي مركزها C_1 الى اربعة اجزاء متساوية ونقسم الدائرة الثانية الى ثمانية اجزاء متساوية . كما مبين في الشكل (3-11) .

فعندما يكون فرق الطور بين الحركتين $\theta = 0$ في الزمن $t = 0$ فان الحركتين تبدءان من الموضعين (0,0) على محيطي الدائرتين وعندما تكمل النقطة P_1 دورة كاملة فان P_2 تكمل نصف دورة وبذلك تتكون حلقة واحدة من شكل ليساجو وعندما تتكرر دورة P_1 تكمل P_2 دورتها وبذلك تتكون الحلقة الثانية من شكل ليساجو . ان شكل ليساجو في هذه الحالة يشبه الرقم (8) وهذا الشكل يمثل المسار الذي يتحرك خلاله الجسيم عندما يخضع لحركتين توافقتين متعامدتين تردد احداهما ضعف تردد الاخرى وفرق الطور بينهما صفر . ان هذا الشكل يتكرر دوريا طالما استمر الجسيم بالاهتزاز تحت تاثير هاتين الحركتين المتعامدتين . ونترك للطالب كتمرين التحقق من ان اشكال ليساجو عندما يكون فرق الطور بين الحركتين هو $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، π مشابها للاشكال المبينة في الشكل (3-10)

ان من المهم ان يلاحظ ان اشكال ليساجو لاتكون دورية الا اذا كانت النسبة بين الترددين الزاويين للحركتين المتعامدتين كالنسبة بين عددين صحيحين .

ان لاشكال ليساجو فوائد عملية عديدة ، فهي تعتبر وسيلة لمقارنة ترددين او الزمن الدوري لحركتين توافقيتين ، ولذلك يمكن استخدامها لايجاد قيمة التردد المجهول اذا توفرلدينا تردد معلوم . وتفيد ايضا في الكشف عن التغير في طور الحركة الناتجة من تركيب اهتزازين متعامدين الى جانب فوائد اخرى . وهناك طرق عملية عديدة للحصول على اشكال ليساجو منها طرق ميكانيكية واخرى بصرية الا ان اهمها على الاطلاق هي الطريقة الالكترونية باستخدام راسم ذبذبات الاشعة المهبطية .

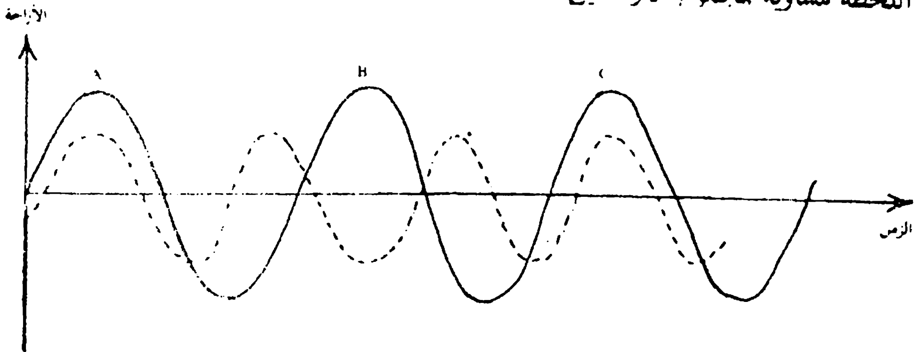


الشكل 3.11 ، شكل ليساجو عندما $\omega_1 = 2\omega_2$ ، $\theta = 0$

10 - 3 الضربات او تركيب أهتزازين مختلفين قليلاً في التردد

عندما يتأثر جسيم آنيا بحركتين توافقيتين بسيطتين الفرق بين ترددهما قليل فان سعة الحركة الاهتزازية الناتجة للجسيم تتناوب بين نهايتين عظمى وصغرى مع مرور الزمن وهذا النمط الخاص من الحركة الدورية يدعى بظاهرة الضربات .

فعندما تحدث الحركتان التوافقيتان على امتداد محور معين فنتيجة للاختلاف الضئيل بين ترديهما يحدث تغير تدريجي في فرق الطور بين الحركتين مع مرور الزمن . وفي لحظة زمنية معينة كتلك المقابلة للنقطة A في الشكل (3.12) تكون الحركتين بنفس الطور اي تحدث الازاحتان بنفس الاتجاه وبذلك تكون سعة الحركة الاهتزازية في ذروتها . وهذا يمثل التداخل البناء ،حيث تكون محصلة الازاحة للجسيم في تلك اللحظة مساوية لمجموع الازاحتين .



الشكل (3.12) حركتين توافقيتين مختلفتين قليلا في التردد

وعندما يمر الزمن فان الحركتين تخرجان عن الطور ويزداد فرق الطور بينهما حتى يصبح π (180°) كما مبين في اللحظة الزمنية المقابلة للنقطة B في الشكل (3.12) حيث تكون الازاحتان متعاكستين وتحاول كل منهما ابطال الاخرى وبذلك تكون سعة الحركة الاهتزازية في تلك اللحظة في ادنى قيمة لها . وهذا يمثل التداخل الهدام حيث تكون محصلة الازاحة للجسيم مساوية للفرق بين الازاحتين . ومع مرور الزمن يزداد فرق الطور بين الحركتين حتى يصبح (2π) كما مبين في اللحظة الزمنية المقابلة ل C ويحدث التداخل البناء مرة اخرى ثم يعقبه بعد فترة زمنية معينة تداخل هدام وهكذا تتكرر العملية وتتناوب محصلة سعة الحركة الاهتزازية بين اقصى وادنى قيمة لها مع مرور الزمن بتردد ثابت يدعى تردد الضربات ويساوي الفرق بين ترددي الحركتين التوافقيتين . ويمكن توضيح ذلك تحليليا كالاتي :

نفرض ان لدينا جسيما في وسط يتذبذب تحت تاثير حركتين توافقيتين بسيطتين مختلفتين قليلا في التردد . ونتيجة لاختلاف الترددين فان فرق الطور بين الحركتين يتغير باستمرار ولذلك فانه ليس مهما في هذه الحالة تحديد قيمة ابتدائية لفرق الطور بين الحركتين .

فاذا كانت الأزاحة الآنية للجسيم في الزمن t بسبب تاثير الحركة التوافقيـة الاولى التـي سعتها A_1 وترددها f_1 هـي x_1 حيث

$$x_1 = A_1\sin\omega_1 t = A_1\sin 2\pi f_1 t \qquad \ldots (3\cdot36)$$

والازاحة الآنية لنفس الجسيم في نفس اللحظة الزمنية t نتيجة تاثير الحركة التوافقيـة الثانية التـي سعتها A_2 وترددها f_2 هي x_2 حيث

$$x_2 = A_2\sin\omega_2 t = A_2\sin 2\pi f_2 t \qquad \ldots (3\cdot37)$$

ان محصلة الازاحة x في الزمن t تنتج من تركيب الحركتين . اي ان

$$x = x_1 + x_2$$

$$\therefore x = A_1\sin\omega_1 t + A_2\sin\omega_2 t \qquad \ldots (3\cdot38)$$

ان تاثير الضربات يمكن تحليله بسهولة اذا اعتبرنا الحركتين لهما نفس السعة . اي اذا افترضنا $A = A_2 = A_1$. وبذلك تصبح المعادلة كالاتـي .

$$x = A\sin\omega_1 t + A\sin\omega_2 t \qquad \ldots (3\cdot39)$$

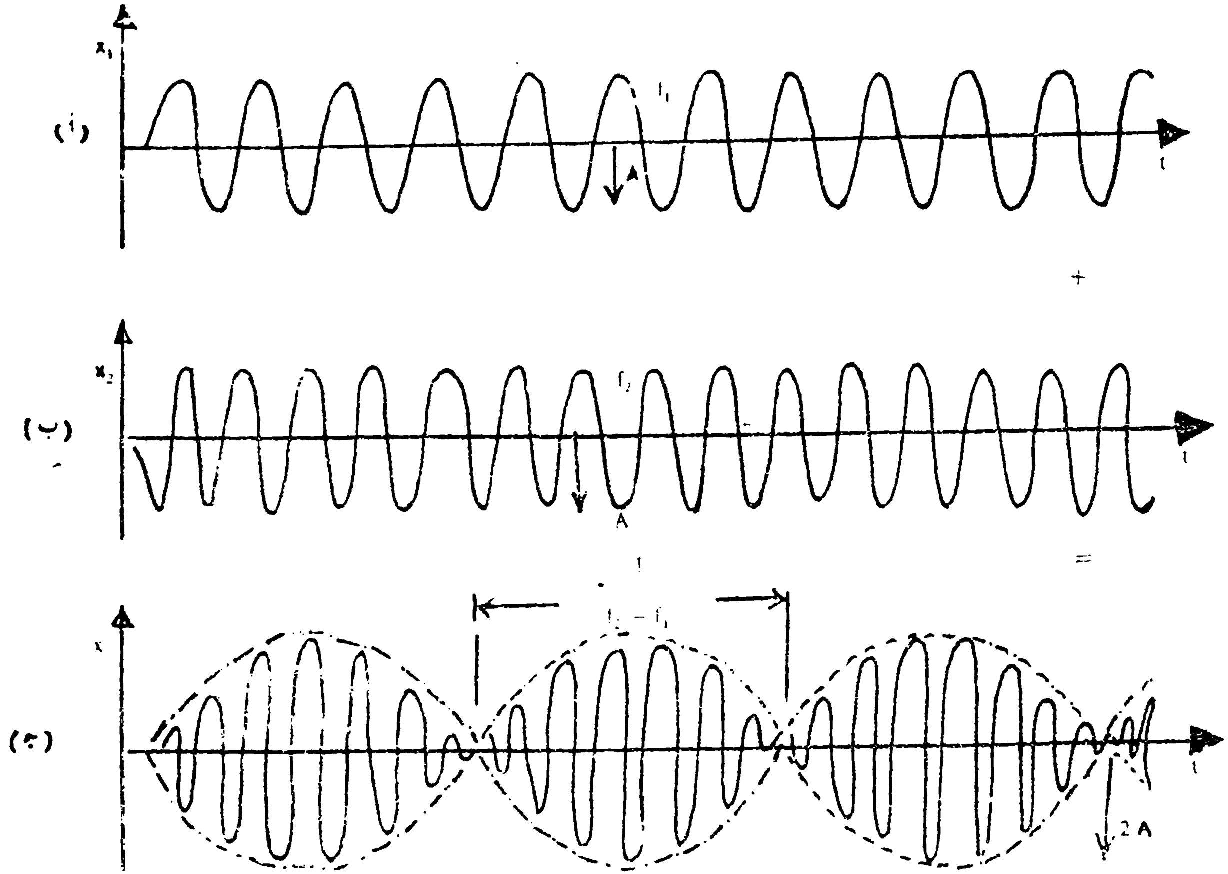
$$x = 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t\,\sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)t \qquad \ldots (3\cdot40)$$

ان هذه المعادلة تشير الى نتيجة رياضية بحتة وعامة لـكل قيم ω_2, ω_1 ولـكن وصفها لظاهـرة الضربات لايتحقق الا اذا كـان الفرق بين ω_2, ω_1 قليلاً . اي ان

$$f_2 - f_1 = \Delta f$$

حيث Δf لايتجاوز 10 هيرتز . وهـذا يتوقـف عـلى الفاصـل الزمنـي بيـن أي ضربتين متتاليتين وقدرة الاذن البشرية على تمييز ذلك .

ان المعادلة (3·40) يمكن تمثيلها بيانياً كما مبين في الشكل (3·13) فالجزء (أ) يمثل الحركة التوافقية الاولى التي ترددها f_1 والجزء (ب) يمثل الحركـة التوافقية الثانية التـي ترددها f_2 والجزء (ج) يمثل محصلة تركيب الحركتين . الذي



الشكل (٣ ١٣) – أهتزاز معدل السعة

يتضمن ترددين الاول تردد عال يقع ضمن الغلاف المنقط والثاني تردد واطيء يمثله الغلاف المنقط ذاته . ويلاحظ في هذا الشكل ان السعة تتغير جيبياً ، وهذه الظاهرة معروفة باسم تعديل أو تضمين السعة وهي ذات اهمية عملية في عملية الاتصالات الكهرومغناطيسية والالكترونية فضلاً عن الصوتيات .

ان التفسير الفيزياوي للمعادلة (3.40) يمكن اعطاؤه بسهولة اذا وضعناها بالصيغة الآتية :

$$x = B \sin \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \right) t \qquad \ldots (3.41)$$

حيث

$$B = 2 A \cos \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) t \qquad \ldots (3.42)$$

فالمعادلة (3.41) تمثل حركة دورية سعتها B وتتذبذب بتردد عال ، وهذا التردد يساوي المتوسط الحسابي للترددين الاصليين أي $\left(\frac{f_1 + f_2}{2} \right)$ والذي

يمثل التردد الفعلي لمحصلة الحركة ويقع ضمن الغلاف المنقط المبين في الشكل (3.13 جـ) . والعامل المتذبذب $\sin \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \right) t$ تقع قيمته دائماً بين الحدين ± 1 .

والمعادلة (3.42) تعطي سعة الحركة B . ويلاحظ انها تتغير دورياً مع الزمن . والخط المنقط في الشكل (3.13 جـ) يمثل شكل التغير الدوري في هذه السعة مع الزمن . ان قيمة السعة B تتغير بين أكبر قيمة لها 2A واصغر قيمة لها O واكبر قيمة للسعة B هي 2A تحدث عندما

$$\cos \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) t = \pm 1$$

اي عندما تكون

$$\pi (f_2 - f_1) t = N\pi$$

حيث :

$$N = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

اي عندما يكون الزمن t مساويا للقيم

$$t = \frac{0}{f_2 - f_1} , \frac{1}{f_2 - f_1} , \frac{2}{f_2 - f_1} , \frac{3}{f_2 - f_1} , \ldots$$

يلاحظ من هذه القيم ان الفترة الزمنية τ بين اكبر سعتين متتاليتين هي :

$$\tau = \frac{1}{f_2 - f_1} = \frac{1}{\Delta f}$$

وهذا يعني ان عدد السعات الكبرى في الثانية الواحدة هو Δf . اما اصغر قيمة للسعة B فهي صفر، وتحدث عندما

$$\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) t = 0$$

اي عندما تكون

$$\pi (f_2 - f_1) t = N\pi + \frac{\pi}{2}$$

حيث : $N = 0, 1, 2, 3, \ldots$

اي عندما تكون قيمة t هي

$$t = \frac{N}{f_2 - f_1} + \frac{1}{2 (f_2 - f_1)}$$

اي عندما يكون الزمن t مساويا للقيم

$$t = \frac{1}{2 (f_2 - f_1)} , \frac{3}{2 (f_2 - f_1)} , \frac{5}{2 (f_2 - f_1)} , \ldots$$

يلاحظ من هذه القيم ان الفترة الزمنية τ بين اصغر سعتين متتاليتين هي :

$$\tau = \frac{1}{f_2 - f_1} = \frac{1}{\Delta f}$$

وهذا يعني ان عدد السعات الصغرى في الثانية الواحدة هو Δf، وحيث ان الدورة الكاملة تتكون من سعة كبرى واحدة وسعة صغرى واحدة. وان الفترة الزمنية بين اكبر سعتين متتاليتين هي نفس الفترة الزمنية بين اصغر سعتين متتاليتين. لذلك فأن عدد الضربات في الثانية الواحدة هو Δf من هذا نستنتج ان محصلة تركيب حركتين توافقيتين

بسيطتين يكون حركة توافقية بسيطة ايضاً ترددها يساوي متوسط تردد الحركتين الاصليتين وسعتها تتغير دورياً مع الزمن بين مجموع السعتين والفرق بينهما وتردد مقداره الفرق بين الترددين الاصليين.

ويمكن توضيح ظاهرة الضربات في مثال عملي محدد. فاذا اصبحنا الشوكتين رنانتين مهتزتين معاً وقريبتين من بعضهما، وكان تردد احداهما 255 هيرتز وتردد الاخرى 257 هيرتز فأن الاذن ستسمع صوت تردده 256 هيرتز ترتفع شدته وتنخفض مرتين في الثانية الواحدة. اي ان الصوت المسموع يكون تردده مساوياً لمتوسط الترددين الاصليين اي

$$256 = \left(\frac{255 + 257}{2}\right)$$

وعدد ضرباته مساوياً للفرق بين الترددين الاصليين اي (2 = 355-257) ويمكن تفسير استجابة الاذن للضربات كالآتي: اذا اهتزت الشوكتان الرنانتان سوية، وكانت حركة كل منهما هي حركة توافقية بسيطة وكان فرق التردد بينهما ضئيلاً. فأن حركة كل شوكة ستنتقل كاهتزازات في الهواء على شكل موجات صوتية. فاذا التقطت الاذن الموجتين معاً فأن غشاء الطبلة داخل الاذن، سيهتز تحت تأثير حركتين توافقيتين بسيطتين الفرق بين ترددیهما قليل. ومحصلة ذلك ان اهتزاز غشاء الطبلة سيكون متناوباً بين اكبر واصغر سعة. ولما كانت شدة الصوت تتناسب طردياً مع سعة الموجة الصوتية، لذلك فأن شدة الصوت المسموع ستتغير بالتناوب بين قيمتين محددتين الاولى تمثل اكبر شدة والثانية تمثل اصغر شدة للصوت. وعدد مرات اكبر شدة او اصغر شدة تسمعها الاذن في الثانية الواحدة يساوي الفرق بين ترددي الشوكتين وهذا يمثل عدد الضربات التي تسمعها الاذن في الثانية الواحدة. وعموماً فأن الاذن البشرية لا يمكنها ان تميز بين ضربات نغمتين اذا كان فرق التردد بينهما يزيد عن 7 ضربات في الثانية الواحدة. والاذن المرهفة الحس تستطيع ان تستخدم هذه الظاهرة لمقارنة نغمتين متقاربتين بالتردد. واذا اختفت الضربات فهذا يعني ان النغمتين لهما نفس التردد.

أمثلة محلولة

امثلة محلولة :

مثال (3.1)

موجتان لهما نفس السعة والتردد وتختلفان في الطور، ماهي محصلة الموجة الناتجة فاقشها بالتفصيل

الحل

نفرض ان الموجة الاولى تمثلها المعادلة

$$y_1 = A\sin(\omega t - kx) \quad ...(1)...$$

وانالموجة الثانية تمثلها المعادلة

$$y_2 = A\sin(\omega t - kx + \phi) \quad ...(2)...$$

ويمكن كتابة المعادلة الثانية هكذا

$$y_2 = A\sin\left[\omega t - k\left(x - \frac{\phi}{k}\right)\right] \quad ..... (3) .....$$

أو

$$y_2 = A\sin\left[\omega - \left(t + \frac{\phi}{\omega}\right) - kx\right] \quad ..... (4)$$

من المعادلتين (1) ، (3) يتضح ان الموجتين يفترقان عن بعضهما في أي لحظة زمنية t بمسافة قدرها ($\frac{\phi}{k}$) في اتجاه الحركة X ومن المعادلتين (1) و (4) يتضح ان الموجتين عند الموضع x يعطيان حركتين توافقيتين بسيطتين باختلاف زمني قدره ($\frac{\phi}{\omega}$) محصلة الموجتين هي

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = A\,[\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t - kx + \phi) \quad (5)$$

ولكن من نظريات المثلثات لدينا

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

لذلك فان المعادلة (5) تصبح

$$y = A\left[\ 2\sin\left(\omega t - kx + \frac{\phi}{2}\right)\ \cos\frac{\phi}{2}\ \right] \qquad \ldots (6)$$

$$= 2A\cos\frac{\phi}{2}\ \sin(\omega t - kx + \phi/2)$$

وهذه تمثل معادلة موجة لها نفس تردد الموجات الأصلية ولكن سعتها تساوي

$$2A\cos\frac{\phi}{2}$$

واذا كانت ϕ صغيرة جداً فان

$$\cos\frac{\phi}{2} \simeq 1$$

وتكون السعة مساوية تقريباً $2A$ أي ضعف السعة الأصلية تقريباً واذا كانت $\phi = 0$ فان السعة تكون ضعف السعة الأصلية وتكون الموجتين متحدتين في الطور وتنطبق كل منهما على الأخرى ، أي ان الموجتين تقويان بعضهما ويسمى التداخل بينهما بالتداخل البناء .

واذا كانت ($\phi = 180°$) فان محصلة السعة تصبح صفراً وتقع قمة احداهما فوق قاع الأخرى. أي ان الموجتين تهدمان بعضهما ، ويسمى التداخل في هذه الحالة بالتداخل الأتلافي أو التداخل الهدام. واذا كان فرق الطور يختلف بين الموجتين فان محصلة السعة تتراوح قيمتها بين الصفر و $2A$.

مثـــال (3.2)

احسب سرعة الصوت في غاز تولد فيه موجتان أطوالهما 100 سم و 101 سم 18 ضربة في 6 ثواني .

الحـــل :

نفرض ان سرعه الصوت في الغاز $= V$

لدينا السرعة = التردد × الطول الموجي

تردد الموجة الأولى $\dfrac{V}{100} = f_1$

وتردد الموجة الثانية $f_2 = \frac{V}{101}$ ،

عدد الضربات في الثانية الواحدة = $\frac{18}{6} = 3$ ضربة في الثانية وعليه فان

$$f_1 - f_2 = \frac{V}{100} - \frac{V}{101} = 3$$

ومنها نجد ان $V = 303$ م / ثا

مثال (3 – 3)

دولاب مسنن يحتوي على 15 سن يدور بمعدل 1020 دورة في الدقيقة. في هذه السرعة يولد ضربة واحدة مع شوكة رنانة. وعندما تزداد سرعة دوران الدولاب الى 1032 دورة في الدقيقة. فان عدد الضربات المسموعة تصبح 2 فما هو تردد الشوكة الرنانة ؟

الحل :

ان تردد الدولاب في السرعة الأولى = $\frac{1020}{60} \times 15 = 255$ هيرتز.

وعليه فان تردد الشوكة الرنانة هو أما 254 أو 256 هيرتز.

ان تردد الدولاب في السرعة الثانية = $\frac{1032}{60} \times 15 = 258$ هيرتز.

ان ضربتين تتولد فقط عندما يكون تردد الشوكة الرنانة هو 256 هيرتز.

مثال (4 – 3)

في تجربة للحصول على أشكال ليساجو استخدمت شوكتا رنين ، تردد الأولى 250 هيرتز ووجد ان شكل ليساجو الدائري يكمل بعد مرور 5 ثانية. كيف يمكن ايجاد تردد الشوكة الثانية ؟

الحل

لنأخذ شوكة رنانة مجهولة التردد ولنفرض ان هذا التردد هو f_1 فاذا اخذنا شوكة رنانة اخرى ترددها f_2 وهذا التردد يكاد يكون مساوياً لـ f_1 (او بالاحرى يختلف قليلاً جداً عن f_1) اذا اهتزت الشوكتين في مستويين متعامدين فان اي جسم يتأثر آنياً بالاهتزازين يسلك مسار يدعى بشكل ليساجو. وعندما يكون فرق التردد بين الشوكتين صغيراً فان فرق الطور بين الاهتزازين يتغير مع الزمن. وعليه فان شكل ليساجو يتغير استمرار مع الزمن. وهكذا نلاحظ ان الشكل يتغير باستمرار مع تغير الطور من صفر الى 2π.

واذا فرضنا ان دورة كاملة من التغير في الشكل تستغرق t ثانية فان فرق التردد بين الشوكتين $= \frac{1}{t_1}$

وعليه فان تردد الشوكة المجهولة $= \left(\frac{1}{t}\right) \mp f_2$

الآن لدينا

تردد الشوكة المعلومة التردد = 250 هيرتز

الزمن المستغرق ليكمل شكل ليساجو الدائري = 5 ثانية.

لذلك فان فرق التردد بين الشوكتين $= \frac{1}{5}$ هيرتز

وعليه فان الترددات المتوقعة للشوكة المجهولة التردد

اما $0.2 + 250 = 250.2$ هيرتز

أو $0.2 - 250 = 249.8$ هيرتز

اسئلة

3 - 1 ماهي قاعدة التركيب؟

3 - 2 اذا كنت تصغي لحديث زميل يتحدث معك في قاعة مزدحمة بضيوف يتكلمون جميعاً فكيف تفسر عدم تداخل صوت زميلك مع اصوات الآخرين وضياع المعلومات التي يحملها صوته لك.

3 - 3 هل قاعدة التركيب عامة وتصح لجميع الموجات مهما كانت شدتها؟ وضح.

3 - 4 شوكتا رنين تردد احداهما f_1 والثانية f_2 تهتزان سوية فما هي طبيعة اهتزاز غشاء الطبلة ناقش ذلك وبين متى تسمع الأذن ضربات ومتى تختفي الضربات.

3 - 5 شوكتا رنين متكافئتان تصدران نغمتين لهما نفس التردد. اشرح لماذا قد نستمع الى الضربات بينهما؟

3 - 6 اطلقت باخرتان صفارتيها اللتين تتميزان بنفس التردد. هل تتوقع ان يؤدي هذا الى نمط تداخل به مناطق تتميز بشدة مرتفعة ومناطق بشدة منخفضة؟

3 - 7 ماهي ظاهرة الضربات.

3 - 8 ماهي اشكال ليساجو، كيف تحصل عليها، وماهي اهميتها العملية؟ وضح ذلك.

3 - 9 ماهو التداخل البناء وماهو التداخل الهدام.

3 - 10 ما الفرق بين ظاهرتي التداخل والضربات. وضح ذلك بالتفصيل.

3 - 11 وضح كيف يمكن استخدام ظاهرة الضربات لايجاد تردد مصدر صوتي مجهول بالأستعانة بتردد مصدر صوتي معلوم.

3 - 12 ماهما الحركتان التوافقيتان البسيطتان المتعامدتان اللتان يمكن تركيبهما لأستنتاج منحن على صورة شكل 8.

مسائل

1 - 3 جسم يخضع آنياً لثلاث حركات توافقية بسيطة ، جميعها بنفس التردد وفي اتجاه المحور السيني . اذا كانت سعاتها 0.25 ؛ 0.20 و 0.15 ملم على التوالي وفرق الطور بين الأولى والثانية هو 45° وبين الثانية والثالثة هو 30° جد سعة محصلة الأزاحة وطورها بالنسبة للحركة التوافقية الأولى .

2 - 3 اهتزازين على طول نفس الخط يمكن وصفهما بالمعادلتين

$$y_1 = A \cos 10\pi t$$

$$y_2 = A \cos 12\pi t$$

جد الزمن الدوري للضربات وارسم شكلاً تخطيطياً لشكل الأضطراب على طول زمن دورة واحدة للضربات

3 - 3 جد تردد الحركة المركبة لكل مما يأتي :

(أ) $\sin(2\pi t - \sqrt{2}) + \cos 2\pi t$

(ب) $\sin 12\pi t + \cos(13\pi t - \pi/4)$

(جـ) $\sin(3t) - \cos \pi t$

4 - 3 اهتزازين متعامدين يمكن وصفهما بالمعادلتين :

$$x = 10 \cos 5\pi t$$

$$y = 10 \cos(10\pi t + \pi/3)$$

ارسم شكل ليساجو للحركة المركبة

5 - 3 جد اشكال ليساجو في الحركات التالية

(أ) $x = \cos 2\omega t$ و $y = \sin 2\omega t$

(ب) $x = \cos 2\omega t$ و $y = \cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$

(جـ) $x = \cos 2\omega t$ و $y = \cos \omega t$

6 - 3 برهن ان محصلة الحركة لجسيم يخضع آنيا لتأثير حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد وبنفس الأتجاه تكون حركة توافقية أيضاً . جد سعة محصلة الحركة الأهتزازية الناتجة .

7 - 3 برهن ان جسيم يخضع آنياً لتأثير حركتين توافقيتين متعامدتين يتحرك في مسار على شكل قطع ناقص . ثم وضح متى يكون مسار الحركة دائرياً ؟

3 - 8 ماهي أشكال ليساجو ؟
وضح كيف يمكن توليد هذه الأشكال واذكر وسيلة لتوضيحها . اشرح كيف تساعد هذه الأشكال في مقارنة ترددات شوكتا رنين ترديدهما f_1 , f_2

3 - 9 شكل ليساجو يتولد من اهتزاز شوكتا رنين . ولوحظ ان هذا الشكل يتغير دورياً من قطع مكافيء الى شكل رقم 8 ثم الى شكل قطع مكافيء في اتجاه معاكس ثم الى شكل 8 ثم يعود مرة ثانية الى شكل قطع مكافيء . وتستغرق هذه الدورة من التغيرات 6 ثانية . فاذا كان تردد احدى الشوكتين هو 100 هيرتز فماهوالتردد المحتمل للشوكة الثانية؟

$\left(200 \pm \frac{1}{6} \right)$ هيرتز

3 - 10 جد محصلة الحركة لحركتين توافقيتين لهما نفس الزمن الدوري ويؤثران باتجاهين متعامدين على بعضهما . ناقش الحالات المختلفة المهمة الناتجة من هذا التركيب .

3 - 11 احسب محصلة تركيب اهتزازين توافقيين متعامدين سعتاهما وكذلك زمنهما الدوري كنسبة 1 الى 2 وفرق الطور بينهما (أ) صفر (ب) 90 درجة . ماذا يحدث عندما يكون ترددهما كنسبه 100 الى 101 ؟

3 - 12 شوكتا رنين B , A استخدمتا لأنتاج أشكال ليساجو . ووجد ان الشكل الدائري يستغرق 10 ثانية ليكمل . فاذا كان تردد الشوكة A هو 200 هيرتز ، وان هذا التردد هو أعلى قليلاً من تردد الشوكة B . احسب تردد الشوكة B .

(199.9 هيرتز)

3 - 13 شوكة رنانة مجهولة التردد تعمل ثلاث ضربات في الثانية مع شوكة رنانة قياسية ترددها 384 هيرتز . ويقل تردد الضربات عند لصق قطعة صغيرة من الشمع على أحد فرعي الشوكة الأولى . ماهوتردد هذه الشوكة ؟

3 - 14 وتران متكافئان من أوتار البيان ترددهما الأساسي 600 هيرتزعندما يكونان تحت نفس الشد . ماهي الزيادة النسبية في شد أحد الوترين التي تؤدي الى حدوث ست ضربات في الثانية الواحدة عندما يهتز الوتران آنياً ؟

3 - 15 شوكتا رنين ترددهما 164 و 592 هيرتز على التوالي . جد تردد الضربات الناتجة من اهتزازهما معا .

3 - 16 شوكتا رنين B , A لهما ترددات متساوية تقريباً عندما استخدمتا معاً للحصول على أشكال ليساجو وجدان دورة كاملة من التغيرات في الشكل تستغرق 10 ثانية . وعندما يلصق بالشوكة B قطعة صغيرة من الشمع فان

الزمن المستغرق يصبح 20 ثانية . احسب تردد الشوكة B قبل لصق الشمع بها . علماً ان تردد الشوكة A هو 250 هيرتز.

(256.1 هيرتز)

3 – 17 شوكتا رنين B, A لها ترددين متساويين تقريباً. تردد الشوكة A هو 288 هيرتز. عندما تستخدم الشوكتين آنياً للحصول على اشكال ليساجو وجد ان الدورة الكاملة للتغيرات في شكل ليساجو تستغرق 20 ثانية . عندما تحمل الشوكة B شمعاً قليلاً فان الزمن المستغرق لدورة كاملة من التغير تصبح 10 ثانية . احسب التردد الاصلي للشوكة B .

(287.95 هيرتز)

3 – 18 التردد الاقل لشوكتين رنانتين هو 380 هيرتز. وان دورة كاملة من التغيرات في اشكال ليساجو تحدث خلال 10 ثانية احسب تردد الشوكة الرنانة الاخرى .

(380.1 هيرتز)

3 – 19 ماهي اشكال ليساجو؟ ناقش كيفية تكوين اشكال ليساجو عندما يكون الزمن الدوري للاهتزازين متساوياً وفرق الطور بينهما هو 90 درجة .

3 – 20 جد محصلة حركتين توافقيتين بسيطتين تؤثران في جسم في نفس الخط ونسبة ترددهما 1 الى 2 وفرق الطور بينهما (أ) صفر (ب) 45 درجة (ج) 90 درجة .

3 – 21 جد محصلة حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين تؤثران في جسم ونسبة ترددهما 1 الى 2 وفرق الطور بينهما (أ) صفر (ب) 45 درجة (ج) 90 درجة .

3 – 22 قورن تردد مجهول بشوكة رنانة قياسية ترددها 2000 هيرتز فوجد انه يعطي ضربتين في الثانية .

3 – 23 قرن عازف كمان نغمة صادرة من وتر كمانه بالنغمة المقابلة على البيانو فوجد ان الضربات بين الصوتين تحدث مرة في كل 3 ثانية . ماهو الفرق بين عددي الاهتزازات في الثانية للآلتين الموسيقيتين؟

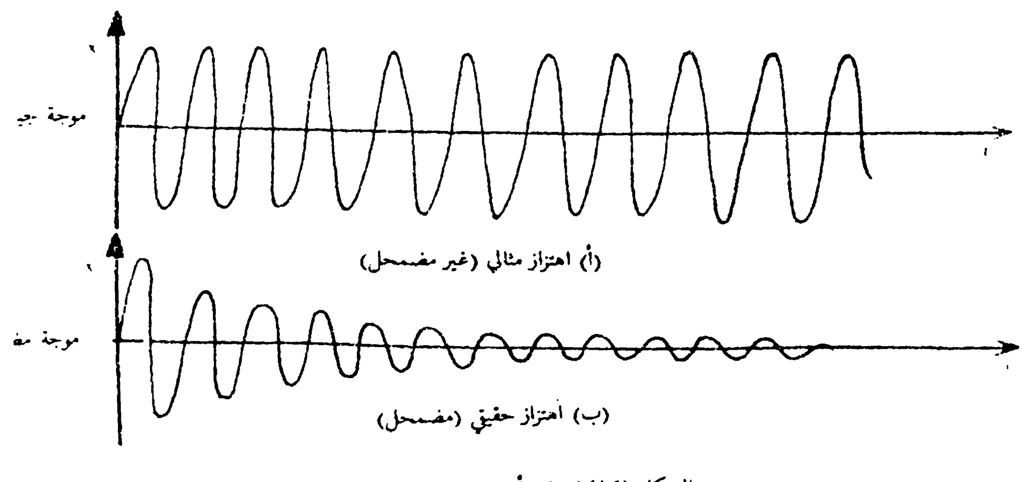
3 – 24 برهن ان محصلة موجتين جيبيتين مختلفتين في السعة والتردد والطور تكون دورية وليست توافقية .

الفصل الرابع

الاهتزاز المضمحل

1 — 4 مقدمة

لقد اعتبرنا في دراستنا للحركة التوافقية البسيطة في الفصل الثاني ان الاهتزاز حر وغير مضمحل ، وهو الاهتزاز الحاصل من ازاحة الجسيم قليلاً عن موضع توازنه ومن ثم تركه يهتز بصورة حرة تحت تأثير قوة الاستعادة الناتجة من خاصية المرونة فقط ، دون ان يعاني اي مقاومة خارجية او اي تبديد في الطاقة مهما كان شكله . ونتيجة ذلك فان سعة الحركة الاهتزازية تبقى ثابتة مما يعني ان الاهتزاز يستمر دون توقف مع مرور الزمن كما هو مبين في الشكل (4.1 أ)



الشكل (4.1) اهتزاز (أ) غير مضمحل (ب) مضمحل

وفـي الحقيقة ان مثل هذا الاهتزاز يمثل حالة مثالية تماماً اذ لايوجد مهتز حقيقـــي يستمر على الاهتزاز الحر الى الأبد . وفـي الواقع ان اي مهتز حقيقـي لابد ان يعانـي شيئاً من الفقدان في الطاقة بشكل أو بأخر . ونتيجة ذلك فان سعة الحركة الاهتزازية تتضاءل تدريجياً مع مرور الزمن كما مبين في الشكل (4-1 ب) . ان مثل هذا الاهتزاز يدعـى بالاهتزاز المضمحل الذي يمثل حالة اكثر واقعية من الاهتزاز غير المضمحـل . في هذا الفصل ستنحصر دراستنا على هذا النوع من الاهتزاز .

2 — 4 القوى المسببة لأضمحلال الاهتزاز

بصورة عامة يمثل الاهتزاز بحد ذاته شكلاً من الضياع في الطاقة ، وهو لهذا السبب غير مرغوب فيه في كثير من الاحيان لاسباب متعددة ، منها على سبيل المثال انه قد يكون سبباً في انهيار الاجزاء المهتزة ، او في توليد اصوات مزعجة او في نقل قوى وحركات غير مطلوبة الى اجزاء او اجسام اخرى قريبة . يمكن اعتبار ان الطاقة المصاحبة للاهتزاز تستهلك بشكل أو بآخر. وفي الواقع ان كل جسيم مهتز يجابه نوعاً من القوى المقاومة لحركته والتي تودي الى اضمحلال حركته الاهتزازية تدريجياً مع الزمن وقد يكون مقدار هذه القوى من الكبر مالايسمح بحدوث الاهتزاز اصلاً . ومن الصعب وصف القوى الحقيقية المؤدية الى تبديد الطاقة المصاحبة للاهتزاز. الا انه بالتأكيد يمكن حصر القوة المقاومة لحركة الجسيم المهتز بعامل او اكثر من عوامل الاضمحلال التي قد تكون ناتجة من لزوجة المائع (كالهواء او السائل) الذي يتحرك خلاله الجسيم المهتز او الاحتكاك الداخلي بين الجزيئات التي تعاني حركة نسبية نتيجة الاهتزاز أو قوى كهربائية مستقرة (كهروستاتيكية) كتلك الناتجة عن الاحتكاك الجاف (احتكاك كولومب لتوليد الشحنات الساكنة أو قوى محتثة ناتجة من الحث الكهرومغناطيسي المتولد بسبب اهتزاز المهتز الذي يحتوي مواد قابلة للتمغنط قرب مغناطيس طبيعي او كهربائي . ان واحداً أو اكثر من هذه العوامل أو غيرها موجود دائماً في اي عملية اهتزاز، لذلك فان شغلاً يجب ان يصرف دائماً للتغلب عليها ، وهذا الشغل المصروف يتبدد تدريجياً على شكل حرارة مفقودة الى الوسط المحيط بالمهتز. ونتيجة لذلك فان سعة الاهتزاز تتناقص باستمرار مع الزمن حتى يتوقف المهتز عن الحركة . ان هذا التضاؤل في السعة يعرف بالاضمحلال او التبديد في الطاقة . ومثل هذه الحركة الاهتزازية تدعى بالحركة التوافقية المضمحلة . ان جميع المهتزات في الطبيعة التي تهتز اهتزازاً حراً تعانـي هـذا النـوع مـن الاهـتـزاز ولكـن بـدرجـات متفاوتـة فالبنـدول ،

البسيط المهتز في الهواء يعاني مقاومة قليلة نسبياً لذلك فان سعته تتضاءل تدريجياً بمقدار ضئيل وعليه يستمر على الاهتزاز لفترة طويلة نسبياً اذا ما ترك يهتز اهتزازاً حراً .

ولكن اذا غمر البندول المهتز في الماء فان المقاومة التي يعانيها تصبح كبيرة لذلك فان سعته تتضاءل بمقدار ملحوظ تماماً وعليه فانه يتوقف عن الاهتزاز بعد فترة قصيرة جداً ، أما أذا غمر في سائل عالي اللزوجة كالعسل مثلاً فانه لايهتز بل يرجع الى موضع توازنه الاصلي اذا ماازيح عن ذلك الموضع وترك حراً كما مبين في الشكل (4-2). ونفس الشيء يحدث لاي مهتز آخر اذا ماتعرض الى نفس الشروط . كما هو الحال مع الكتلة المعلقة في طرف نابض حلزوني عمودي مثبت طرفه الاعلى باحكام ومثبت منع الكتلة المهتزة من الاسفل قرص مغمور في السائل كما مبين في نفس الشكل .

والحقيقة ان اي جسم يهتز في وسط ما كالهواء مثلا يفقد بالضرورة طاقة . فأثناء عملية الاهتزاز فان جزيئات الهواء المحيطة به تهتز ايضا والطاقة الاهتزازية التي اكتسبتها هذه الجزيئات تمثل جزء من الطاقة التي فقدها الجسم المهتز. والحقيقة ان الصوت المنبعث من اي جسم مهتز كالشوكة الرنانة مثلا يمثل الطاقة الاهتزازية المنقولة عبر الهواء الى اذاننا وهذه الطاقة تمثل شكلاً من اشكال الطاقة المستنزفة من الجسم المهتز .

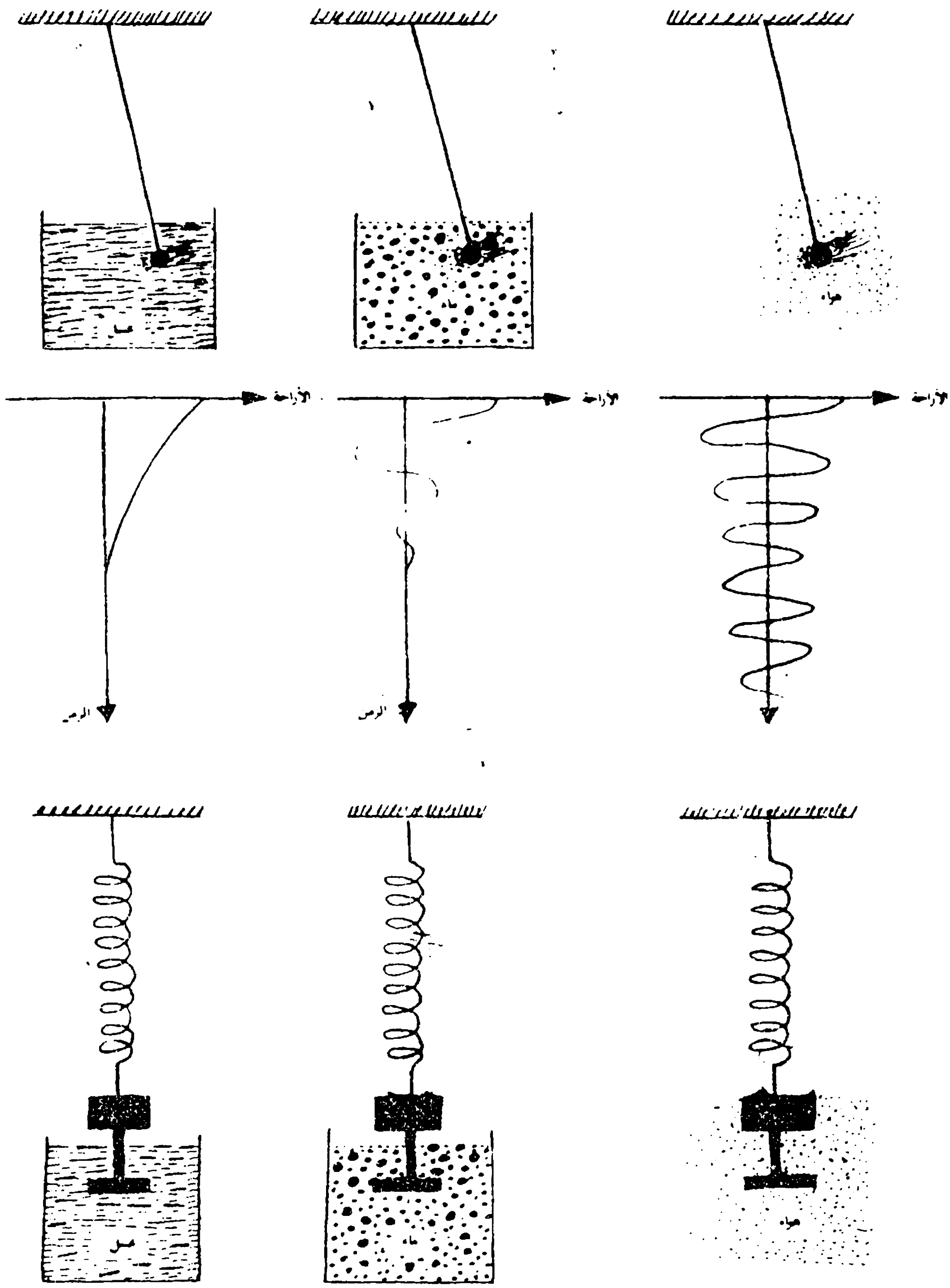
ولغرض دراسة الاهتزاز المضمحل دراسة وافية لابد من اخذ كل قوى التبديد في الاعتبار، ولكن ليس من السهل حصر كل عوامل التبديد بالطاقة خاصة وان قوى التبديد قد تعتمد على عوامل عديدة ومختلفة مثل الازاحة . السرعة ، الاجهاد...الخ . لذلك ستقتصر دراستنا في هذا الفصل على اعتبار اكثر العوامل بروزاً في احداث الاضمحلال في حركة المهتز. وهذا العامل ناتج من مقاومة المائع بسبب لزوجته لحركة الجسيم . ان مقدار المقاومة التي يبديها المائع لحركة الجسيم تعتمد على سرعة الجسيم وشكله وخواص المائع . وبالنسبة لجسيم ما يتحرك في مائع معين تختلف العلاقة بين قوة مقاومة المائع لحركة الجسيم باختلاف السرعة . فعند السرع العالية يكون مقدار القوة المقاومة متناسب طرديا مع مربع السرعة تقريباً . وعند السرع الواطئة او الاعتيادية يكون مقدار القوة المقاومة F_R متناسب خطيا مع السرعة الآنية v للجسيم المهتز. ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً بالتناسب

$$F_R \propto v$$

ومن هذا التناسب ينتج ان

$$F_R = -Rv \qquad \text{......(4-1)}$$

حيث R يمثل ثابت التناسب ويدعى بثابت المقاومة او ثابت الاضمحلال . والاشارة السالبة تشير الى ان اتجاه القوة المقاومة يكون دائما معاكساً لاتجاه حركة الجسم . وهذا يعني ان هذه القوة تحاول دائما ابطاء حركة الجسيم المهتز .



الشكل (4-2) يبين نموذجين لمهتزين يهتزان أهتزاز مضمحل في اوساط مختلفة

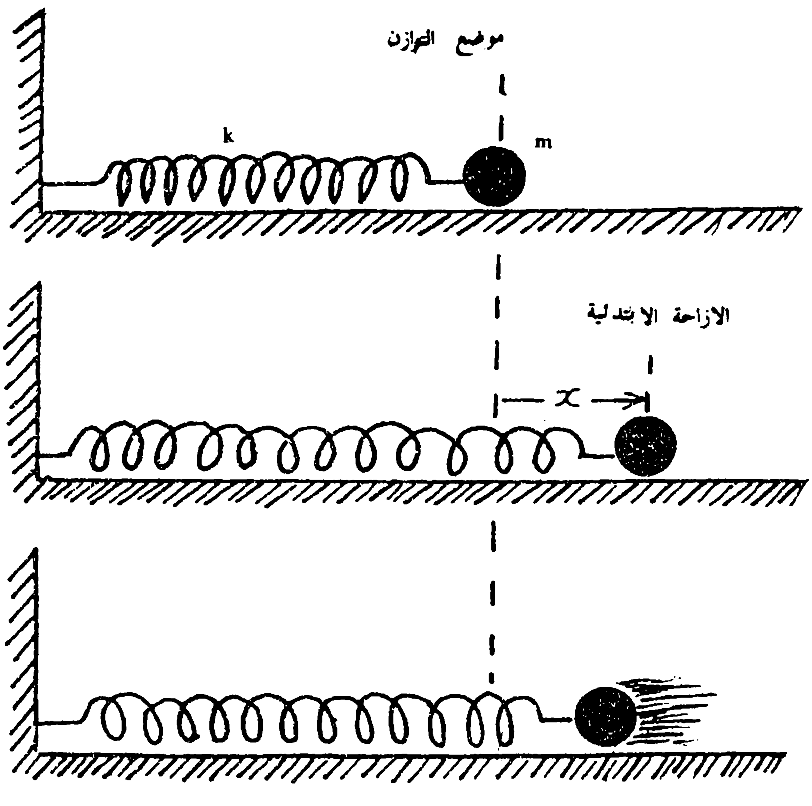
ويمكن ان نعبر عن السرعة الآنية v للجسيم بالمقدار $\frac{dx}{dt}$ اذا كان الجسيم يتحرك باتجاه المحور السيني ، وتصبح المعادلة (4.1) كالاتي :

$$F_R = -R \frac{dx}{dt} \qquad ......(4.2)$$

ان هذه العلاقة الخطية الى جانب كونها تمثل حالة ليست بعيدة عن الواقع فأنهـا تقود الى ابسط التحليلات الرياضية فيما يتعلق بالاهتزاز المضمحل ، لذلك ستقتصـر دراستنا في هذا الفصل على اعتبار ان القوة المقاومة التي يعانيها الجسيم المهتز والناجمة عن اللزوجة او الاحتكاك تتناسب طرديا مع السرعة الآنية للجسيم .

4 ـ ١ معادلة الحركة التوافقية المضمحلة

سنعتبر هنا حركة المهتز المؤلف من جسيم كروي كتلته m متصل بطرف نابض حلزوني ثابت مرونته k ومثبت طرفه الاخر باحكام بمسند ثابت كما مبين فـي الشكـل (4.3) .



الشكل (4.3) يبين مهتز توافقي تؤثر عليه قوتان هما قوة الأستعادة وقوة مقاومة المائع

عندما تزاح الـكتلة m ازاحة صغيرة مقدارها x فأن قوة استعادة تظهر مقدارهـا ($-kx$) ، وحينما تترك الـكتلة فأنها تتحرك للعودة الى موضع توازنها وخلال حركتها تعاني قوة مقاومة ناتجة من الاحتكاك اولزوجة المائع ومقدار هذه القوة هو $\left(-R\frac{dx}{dt}\right)$ حيث الاشارة السالبة تشير الى ان اتجاه هذه القوة يعاكس دائما اتجاه السرعة النسبيـة للـكتلة المهتزة . ان محصلة القوة المؤثرة على الـكتلة المتحركة في اية لحظة زمنيـة t هي

$$\left(-R\frac{dx}{dt}-kx\right)$$

والآن نطبق قانون نيوتن الثاني في الحركة فينتج
وبالتعويض ينتج ان

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-R\frac{dx}{dt}-kx \qquad \ldots\ldots(4\cdot3)$$

نقسم طرفي المعادلة على m ونرتب الحدود فتصبح

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{R}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$$

نفرض ان $\frac{R}{m}=2r$. وستتضح فائدة هذا الفرض فيما بعد في تسهيل شكل الحل لهذه المعادلة . ولما كانت $\omega_0^2=\frac{k}{m}$ فأن معادلة الاخيرة تصبح

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2r\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0 \qquad \ldots\ldots(4\cdot4)$$

هذه هي المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية الحرة المضمحلة ، ويلاحظ انها معادلـة تفاضلية من الرتبة الثانية .

4 – 4 حل معادلة الحركة التوافقية المضمحلة

ان الحل المناسب للمعادلة العامة (4.4) والتي هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية يتم بأختيار دالة يكون فيها شكل المشتقة الاولى والثانية مشابهة لتلك التي في المعادلة العامة وبأن نختار المؤثر التفاضلي

$$D = \frac{d}{dt} \quad , \quad D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$$

ونعوض في المعادلة العامة

ونحصل على

$$D^2x + 2rDx + w_o^2x = 0$$

$$(D^2 + 2rD + w_o^2)x = 0$$

وهذا يعني اما $X = O$ وهذا غير ممكن

او ان

$$D^2 + 2rD + w_c^2 = 0$$

والطريقة المناسبة لحل هذه المعادلة ، هي طريقة الدستور وبالتعويض نجد ان

$$D = \frac{-2r \pm \sqrt{4r^2 - 4w_o^2}}{2}$$

اي ان

$$D = -r \pm \sqrt{r^2 - w_o^2} \qquad \text{...(4.5)}$$

من حل الجزء الموجب من المعادلة تكون

$$Dx = (-r + \sqrt{r^2 - w_o^2})x$$

$$\frac{dx}{dt} = (-r + \sqrt{r^2 - w_o^2})x$$

وبالترتيب نجد ان

$$\frac{dx}{x} = (-r + \sqrt{r^2 - w_o^2})dt$$

وباخذ التكامل للطرفين ينتج ان

$$\ln x = (-r + \sqrt{r^2 - w_o^2})t + \ln c$$

حيث C ثابت التكامل ، وبأعادة الترتيب نحصل على

$$\ln \frac{x}{c} = (-r + \sqrt{r^2 - w_o^1})t$$

$$x = ce^{(-r + \sqrt{r^2 - w_o^2})t}$$

وبالمثل نجد ان حل الجزء السالب من المعادلة تتكون

$$x = ce^{(-r+\sqrt{r^2-w_o^2})t}$$

∴ الحل الكامل للمعادلة التفاضلية هي

$$x = c_1e^{(-r+\sqrt{r^2-w_o^2})t} + c_2e^{(-r-\sqrt{r^2-w_o^2})t} \quad \text{...(4.6)}$$

وبأخذ المشتقة الثانية للمعادلة

$$\frac{dx}{dt} = (-r+\sqrt{r^2-w_o^2})\,c_1e^{(-r+\sqrt{r^2-w_o^2})t} + (-r-\sqrt{r^2-w_o^2})\,c_2e^{(-r-\sqrt{r^2-w_o^2})t} \quad \text{.........(4.7)}$$

وبفرض ان الجسم في البداية يتحرك بمسافة X_o عن نقطة التوازن اي انه عندما $t = o$

فان $X = X_o$

وان $\frac{dx}{dt} = 0$

وبالتعويض في المعادلة نجد ان

$$x_o = c_1 + c_2 \quad \text{...(4.8)}$$

وكذلك نجد ان

$$o = (-r+\sqrt{r^2-w_o^2})c_1 + (-r-\sqrt{r^2-w_o^2})c_2 \quad \text{...(4.9)}$$

وبضرب طرفي المعادلة (4.8) بـ $-r-\sqrt{r^2-w_o^2}$ وبالتعويض في معادلة (4.9)
نحصل على :

$$(r+\sqrt{r^2-w_o^2})\,x_o = 2\sqrt{r^2-w_o^2}\,c_1$$

$$\therefore c_1 = \frac{x_o}{2}\left[\,1+\frac{r}{\sqrt{r^2-w_o^2}}\,\right]$$

وبالتعويض في قيمة C_1 في المعادلة (4.8) ينتج

$$c_2 = \frac{x_o}{2}\left[\,1+-\frac{r}{\sqrt{r^2-w_o^2}}\,\right]$$

وبذلك فان

$$x = \frac{x_0}{2}\left[\left(1+\frac{r}{\sqrt{r^2-w_o^2}}\right)e^{(-r+\sqrt{r^2-w_o^2})t}+\left(1-\frac{r}{\sqrt{r^2-w_o^2}}\right)e^{(-r-\sqrt{r^2-w_o^2})}\right]$$

وان

$$x = \frac{x_0}{2}e^{-rt}\left[\left(1+\frac{r}{\sqrt{r^2-w_o^2}}\right)e^{(\sqrt{r^2-w_o^2})t}+\left(1-\frac{r}{\sqrt{r^2-w_o^2}}\right)e^{(-\sqrt{r^2-w_o^2})t}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4\ 1)$$

وهذه المعادلة تأخذ اشكالاً مختلفة تعتمد على قيمة عامل الاضمحلال (r).

وفيزيائياً نجد ان هنالك اربعة حالات للحركة يعتمد كل منها على قيمة r بالنسبة لـ W_o وهذه الحالات هي

5 – 14 الحالة الاولى : عندما عامل الاضمحلال r = 0

وهي تمثل حالة انعدام الاضمحلال (r = 0). اي ان المقاومة التي يعانيها الجسم المهتز معدومة تماماً (R = 0) وهذه الحالة تقابل الحركة التوافقية البسيطة غير المضمحلة والتي سبق تحليلها بالتفصيل في الفصل الثاني وبذلك فان المعادلة العامة للحركة تصبح

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w_o^2 x = 0$$

وان الزمن الدوري للاهتزاز $T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$

وان حل المعادلة تكون

$$X = C\sin(W_o t + 0)$$

حيث C تمثل سعة الحركة وتبقى ثابت مع الزمن

6 – 4 الحالة الثانية : حالة الحركة الناقصة الاضمحلال

في هذه الحالة ان عامل الاضمحلال r صغيرة بالمقارنة مع التردد الزاوي W_o ، اي ان

$$\frac{r}{2m} < \frac{K}{m} \Leftarrow r < w_o$$

اي ان الكمية $W_o^2 = r^2$ سالبة وان الكمية تعتبر خيالية لذلك اذا كان
فان $w_o^2 - r^2 = w^2$ $\sqrt{r^2 - w_o^2} = iw$
وبالتعويض نحصل على

$$X = \frac{X_0}{2} e^{-rt}\left[(1+\frac{r}{iw})e^{iwt} + (1-\frac{r}{iw})e^{-iwt} \right]$$

$$X = X_o e^{-rt}\left[\frac{e^{iwt}+e^{-iwt}}{2} + \frac{r}{w}\frac{e^{iwt}-e^{-iwt}}{2} \right]$$

اي ان

$$X = X_o e^{-rt}\frac{1}{w}\left[w\cos wt + \text{Sin}wt \right]$$

والان نضع $W = A\sin$ وان $r = A\cos$ نحصل على

$$X = X_o e^{-rt}\frac{A}{w}\text{Sin}(wt+\theta)$$

واضح ان $A = \sqrt{r^2 + W^2}$ وان $\theta = \tan\frac{W}{r}$

اي ان

$$X = Ce^{-rt}\text{Sin}(Wt+\theta) \qquad (4.11)$$

وهذه المعادلة تمثل معادلة الحركة التوافقية المضمحلة وبتردد زاوي $w = \sqrt{w_o^2 - r^2}$

وان سعة الحركة ce^{-rt}
حيث $C = 1 - \frac{r^2}{w^2}$
واضح من ذلك ان السعة تتناقص اسياً مع الزمن
وان زمن الاهتزاز

$$T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{\sqrt{w_o^2 - r^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}} \qquad (4.12)$$

7 – 4 الحالة الثالثة : حالة الحركة الحرجة

ان هذه الحالة الخاصة تمثل الحد الفاصل بين سلوكين مختلفين تماماً للمهتز الاول هو سلوك اهتزازي فيه ان $r < W_0$ والسلوك الثاني هو سلوك غير اهتزازي فيه $r > W_0$. وفي هذا البند والبند القادم نحلل هذه الحالات.

في هذه الحالة ان عامل الاضمحلال يقترب عن قيمة السرعة الزاوية او التردد الطبيعي للمهتز اي ان

$$\frac{r}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad r = w_o \quad \sqrt{r^2 - w_o^2} = 0$$

وبذلك تكون قيمة

وبالتعويض في المعادلة نجد

$$X \equiv \frac{X_o}{2} e^{-rt}\left[\left(1+\frac{r}{\sqrt{r^2 - w_o^2}}\right) + \left(1-\frac{r}{\sqrt{r^2 - w_o^2}}\right) \right]$$

ونحصل على .

$$X = X_o e^{-rt} \qquad \text{.....................(4.13)}$$

وبذلك فان X تهبط بسرعة الى الصفر اي ان الجسم يرجع وبسرعة الى نقطة التوازن والحركة تسمى بالاضمحلال الحرج.

ان الحالة الحركة الحرجة اهمية علمية كبيرة في تصميم اجهزة القياس العلمية التي تتضمن اجزاء متحركة كالمؤشرات في اجهزة القياس الكهربائية مثل الكالفانومترات والاميترات والفولتميترات وغيرها. وفيه ان المؤشر يصل الى نقطة توازنه بسرعة وبدون ان يتذبذب حول تلك النقطة مما يتيح اخذ قراءة صحيحة وسريعة حال ربط جهاز القياس بالدائرة الكهربائية.

8 – 4 الحالة الرابعة : حالة الحركة الزائدة الاضمحلال

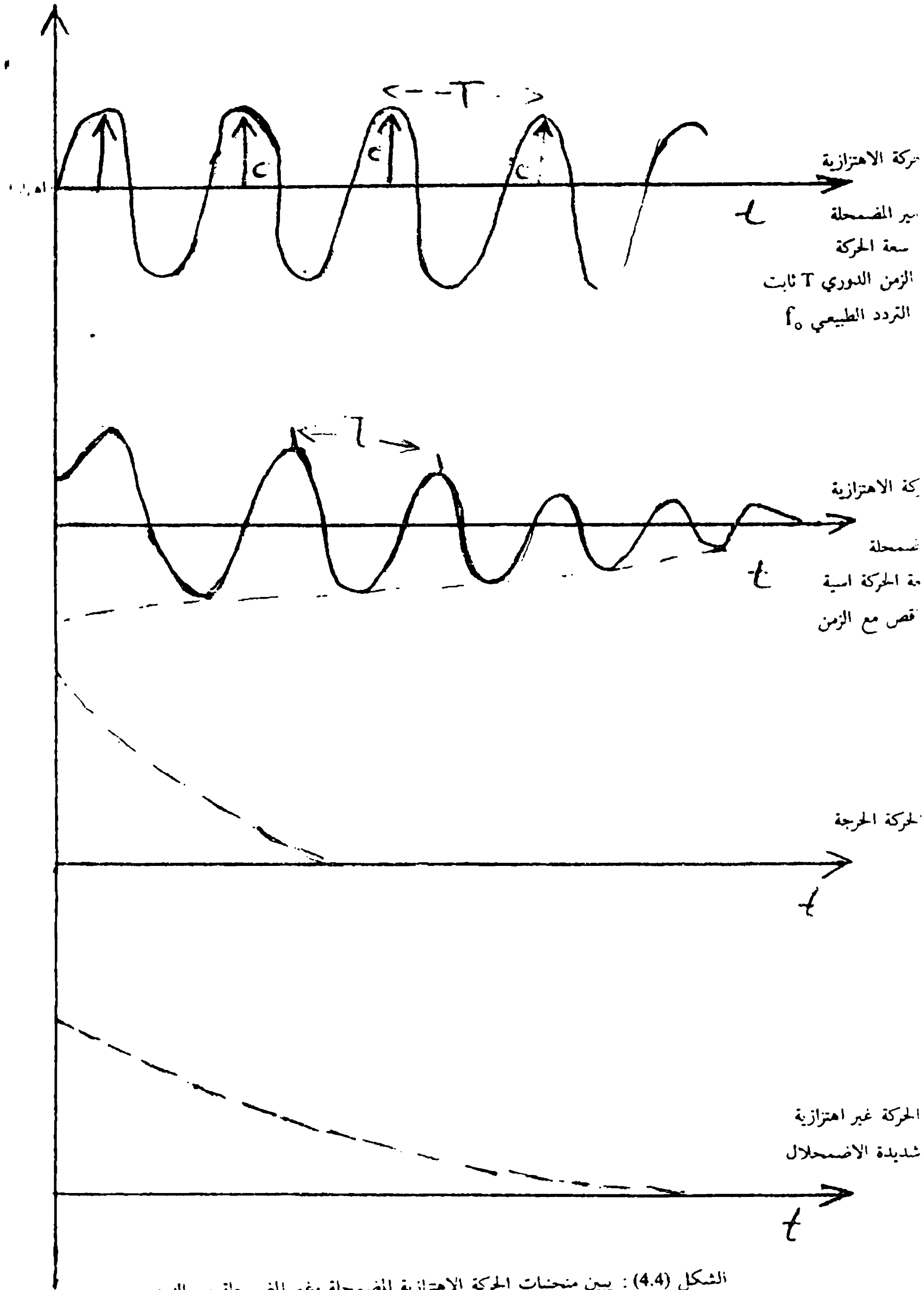
في هذه الحالة يعاني المهتز مقاومة احتكاكية كبيرة وتكون قيمة معامل الاضمحلال (r) كبيرة بالمقارنة مع التردد الزاوي الطبيعي للمهتز W_o ، اي $w_o < r > w_o$

وان

$$\frac{r}{2\,m} > \sqrt{\frac{k}{m}}$$

اي ان الكمية $r^2 - W^2_o$ موجبة ولذلك فان الكمية $\sqrt{r^2 - w_o^2}$ كمية حقيقية وهذا يشير الى انه كلما تزداد الزمن t فان e^{-rt} تقل وان الكمية $\sqrt{r^2 - W^2_o}\, t$ ايضاً تقل ولكن الكمية $\sqrt{r^2 - W^2_o}$ تزداد ، وبذلك فان الكمية e^{-rt} تقل بسرعة فائقة اي ان X تقل من X_o وتصل الى الصفر مع الزمن ، والحركة هي حركة غير اهتزازية وتسمى (overdamped) زائدة الاضمحلال

ويمكن اجمال النتائج التي حصلنا عليها في الحالات الاربع التي تمثل الحالات الخاصة للحل العام لمعادلة الحركة التوافقية المضمحلة كما في الشكل (4.4)



الشكل (4.4) : يبين منحنيات الحركة الاهتزازية المضمحلة وغير المضمحلة مع الزمن

٩ – 4 مقياس الأضمحلال

ان اي مهتز ميكانيكي طبيعي اذ ما تـرك يهتز اهتزازا حرا فانه لايستمر على الاهتزاز الى الابد . لان سعة حركته ستتناقص تدريجيا . وذلك بسبب وجود قوى داخلية وخارجية تقاوم حركته وتستنزف طاقته وتؤدي بالتالي الى تلاشي حركته وتوقفه عن الاهتزاز . فمثلا عندما يهتز البندول في الهواء فان قوى احتكاكية تظهر في نقطة التعليق وبسبب لزوجة الهواء وكنتيجة .لذلك فان طاقة المهتز تتبدد في كل هزة او ذبذبة عـلى شكل حرارة مفقودة للمحيط. ونتيجة لذلك فان سعة الاهتزاز تتناقص في كل هزة وهكذا يحدث تناقص تدريجي في سعة الحركة مع مرور الزمن . حتى تنعدم السعة ويتوقف البندول من الاهتزاز . ان كل المهتزات في الطبيعة تعاني اضمحلال في حركتها ولكن بدرجات متفاوتة . وان درجة الاضمحلال لاي مهتز مضمحل يمكن ايجادها من خلال احدى الـكميات الآتية :

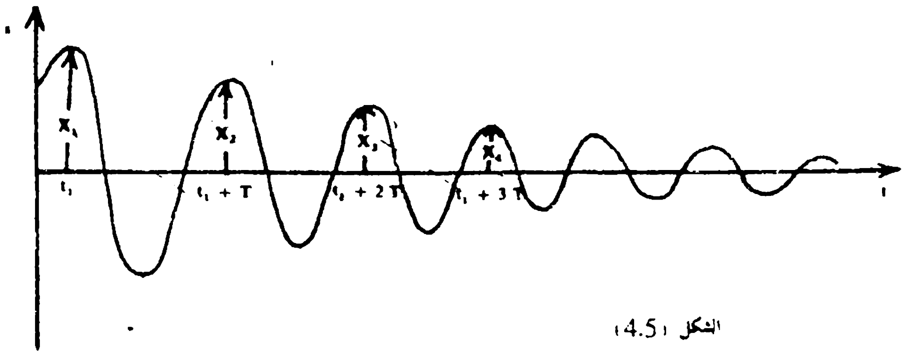
١ التناقص اللوغاريتمي
٢ معامل النوعية
٣ زمن الاسترخاء

10 – 4 التناقص اللوغاريتمي

يعرف التناقص اللوغاريتمي بانه اللوغاريتم الطبيعي للنسبة بين اي سعتين متتاليتين من سعات الاهتزاز المضمحل . ويرمز للتناقص اللوغاريتمي بالرمز δ . ويعبر عن ذلك رياضيا كالاتي :

$$\delta = \ln \left(\frac{X_1}{X_2} \right) \qquad \ldots (4.14)$$

حيث ان X_1 تمثل سعة الاهتزاز في الزمن t_1
وان X_2 تمثل سعة الاهتزاز في الزمن $t_1 + T$
حيث ان السعتين تقاسان على نفس الجانب من موضع التوازن وكما هومبين في الشكل (4.5)



الشكل (4.5)

ان المعادلة التي تصف حركة الاهتزاز المضمحل هي :

$X = Ce^{-n}\sin(\omega t + \theta)$

من هذه المعادلة يمكن ايجاد قيمة X_1 التي تمثل اقصى قيمة للازاحة في الزمن اي ان

$X_1 = Ce^{-n}\sin(\omega t_1 + \theta)$ .....(4.15)

وكذلك يمكن ايجاد قيمة X_2 التي تمثل اقصى قيمة للازاحة في الزمن $(t_1 + T)$ اي أن

$X_2 = Ce^{-r(t_1+T)}\text{din}\,[w(t_1 + T) + \theta]$ .....(4.16)

لكن لدينا

$$w\frac{2\pi}{T}$$

لذلك فان المعادلة (4.19) تصبح

$$X_2 = Ce^{-r(t_1 - T)}\sin(\omega t_1 + 2\pi + \theta)$$

$$X_2 = Ce^{-r(t_1 \; T)}\sin(\omega t_1 + \theta)$$

$$\sin(\phi + 2\pi n) = \sin\phi \qquad 4.17$$

حيث من المعلوم ان $\sin(\omega + 2nn) = \sin$ عندما n تساوي صفراً او اي عدد صحيح .

نعوض X_1 و X_2 من المعادلتين (4.16) و (4.15) في المعادلة (4.14) فينتج ان

$$\delta = \ln\frac{Ce^{-rt_1}\sin(\omega t_1 + \theta)}{Ce^{-r(t_1+T)}\sin(\omega t_1 + \theta)}$$

$$\delta = \ln e^{rT}$$

$$\therefore \delta = rT$$

أي أن التناقص اللوغاريتمي δ يعتمد على الزمن الدوري T للاهتزاز المضمحل ومعامل الاضمحلال r . ولكن يمكن ايجاد T بدلالة r من العلاقة

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - r^2}}$$

$$\therefore \delta_{\cdot} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\omega_0^2 - r^2}} \qquad \text{....(4.18)}$$

هذه المعادلة تعطي قيمة التناقص اللوغاريتمي مهما كانت المقاومة التي يجابهها المهتز في حالة الاهتزاز اي مهماتكن قيمة معامل الاضمحلال r* ولكن عندما تكون قيمة r صغيرة جداً بالمقارنة مع ω_0 فعندئذ يمكن اجراء التقريب التالي

$$\delta \simeq \frac{2\pi r}{\omega_0} \qquad \text{... (4.19)}$$

يلاحظ من هذه المعادلة ان التناقص اللوغاريتمي يتناسب طردياً مع معامل الاضمحلال r عندما تكون قيمة r صغيرة .

ان مايجدر الاشارة اليه انه عندما يكون معامل الاضمحلال r صغيراً . أي عندما تكون المقاومة التي يعانيها المهتز صغيرة فان مقدار الفرق بين سعتين متتاليتين يكون ضئيلاً مما يتعذر قياسه ، لذلك يفضل عموما ايجاد قيمة التناقض اللوغاريتمي من قياس سعتين غير متتاليتين اي بعد n دورة . وعندئذ يمكن حساب δ من العلاقة :

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{X_1}{X_n} \qquad \text{... (4.20)}$$

حيث ان X_1 تمثل سعة الاهتزاز في الدورة الاولى

وان X_n تمثل سعة الاهتزاز في الدورة n .

و n تمثل عدد الدورات او الهزات من السعة X_1 الى السعة X_n

ويمكن اثبات هذه العلاقة كالاتي

من تعريف δ لدينا

$$\delta = \ln \frac{X_1}{X_2} = \ln \frac{X_2}{X_3} = \ln \frac{X_3}{X_4} = \ldots = \ln \frac{X_{n-1}}{X_n}$$

من هذه العلاقة نجد ان

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{X_2}{X_3} = \frac{X_3}{X_4} = \quad = \frac{X_{n-1}}{X_n} = e^{\delta}$$

ويمكن ضرب هذه النسب المتساوية مع بعضها فينتج ان

$$\frac{X_1}{X_2} \cdot \frac{X_2}{X_3} \cdot \frac{X_3}{X_4} \cdot \frac{X_4}{X_5} \ldots \frac{X_{n-1}}{X_n} = e^{n\delta}$$

* من الطبيعي ان ذلك لاينطبق على الحالات التي لايحدث فيها اهتزاز أي عندما ($r \geq \omega_0$)

وبالأختصار ينتج أن

$$\frac{X_1}{X_n} = \frac{x_1}{x_n} = e^{n\delta}$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين ينتج

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{X_1}{X_n}$$

و يمكن استخدام هذه العلاقة عملياً لأيجاد قيمة δ . وذلك بقياس النسبة بين أي سعتين تفصلهما n دورة . وبأخذ قيم مختلفة لـ n يمكن الحصول على مجموعة من القياسات . ومن رسم الخط البياني بين $\ln \left(\frac{X_1}{X_n} \right)$ و n نحصل على خط بياني مستقيم ميله يساوي δ .

4·11 زمن الاسترخاء

يعرف زمن الأسترخاء بأنه الزمن اللازم لهبوط قيمة السعة الى $\frac{1}{e}$ من قيمتها الأصلية . حيث e تمثل أساس اللوغاريتم الطبيعي وتساوي 2·718 .
من المعادلة التي تصف حركة الأهتزاز المضمحل لدينا

$$x = ce^{-rt} \sin(\omega t + \theta)$$

لاحظ أن ce^{-rt} يمثل أقصى قيمة للأزاحة ويدعى بالسعة الفعالة . فاذا رمزنا السعة الفعالة للاهتزاز المضمحل بالرمز C_t فان

$$C_t = Ce^{-rt} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.21)$$

وبعد زمن $t = \frac{1}{r}$ تكون

$$C_t = \frac{1}{e} C = 0{\cdot}368\ C$$

ان الزمن t اللازم لهبوط قيمة السعة من C الى 0·368 C يمثل زمن الأسترخاء ويساوي $\frac{1}{r}$ وبماان $r = \frac{R}{2m}$ لذلك فان

$$\therefore t = \frac{1}{r} = \frac{2m}{R} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.22)$$

وبقياس كتلة الجسيم المهتز ومعرفة ثابت المقاومة R الذي يمثل القوة المقاومة لكل وحدة سرعة يمكن حساب زمن الأسترخاء . ويلاحظ ان زمن الأسترخاء يتناسب عكسياً مع ثابت المقاومة . كما يجدر بنا ان نلاحظ ان زمن الأسترخاء يمكن أن يقاس بصورة مباشرة .

ان قياس الأضمحلال من خلال زمن الأسترخاء بعد اجراءاً مألوفاً في فروع الفيزياء المختلفة

4·12 معامل النوعية

يعرف معامل النوعية لأي مهتز مضمحل بأنه حاصل ضرب 2π في النسبة بين متوسط الطاقة المخزونة في المهتز الى الطاقة المفقودة منه خلال دورة واحدة من دورات الأهتزاز . ويرمز لمعامل النوعية عادة بالحرف Q وبصيغة رياضية تعرف Q كالآتي :

$$Q = 2\pi \left(\frac{\text{متوسط الطاقة الكلية المخزونة خلال دورة واحدة}}{\text{متوسط الطاقة المفقودة خلال نفس الدورة}} \right) \quad ---(4.26)$$

وبالنظر لاهمية هذا المعامل ولغرض تسليط اضواء كاشفة على التفاصيل الدقيقة للحركة الاهتزازية المضمحلة ، سنحاول ايجاد قيمة Q بدلالة الكميات التي يمكن قياسها للمهتز المضمحل . لهذا الغرض سنبدأ التحليل من المعادلة التفاضلية الأصلية للحركة وهي :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{dx}{dt} - kx$$

نرتب هذه المعادلة بحيث يكون الحدان المسؤولان عن الحركة الاهتزازية (حد القصور الذاتي+حد المرونة) في الطرف الايسر ويكون الحد المسؤول عن الاضمحلال (حد المقاومة الاحتكاكية) في الطرف الايمن فينتج ان

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + Kx = -R \frac{dx}{dt}$$

نضرب الطرفين في $\frac{dx}{dt}$ فنحصل على

$$m \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + kx \frac{dx}{dt} = -R \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

ان هذه المعادلة يمكن وضعها بالشكل الاتي

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{1}{2} kx^2\right] = -R\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad (4.24)$$

ان الحد الاول في الطرف الايسر يمثل الطاقة الحركية الآنية للمهتز ويرمز لها بالحرف K والحد الثاني في الطرف الايسر يمثل الطاقة الكامنة الانية المصاحبة لقوة الاستعادة ويرمز لها بالحرف P

اي ان

$$K = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad \text{......... (4.25)}$$

$$P = \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{......... (4.26)}$$

واذا اعتبرنا ان الطاقة الميكانيكية الكلية للمهتز هي E فأن

$$K + P = E \quad (4.27)$$

وعليه تصبح المعادلة (4.27) كالآتي :

$$\frac{d}{dt}(K + P) = - R \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

اي ان

$$\frac{dE}{dt} = - R \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad \text{............. (4.28)}$$

ان الطرف الايمن يمثل المعدل الزمني لتبديد الطاقة نتيجة المقاومة الاحتكاكية التي يعانيها المهتز اثناء الحركة وهي تساوي القدرة المستنزفة من المهتز.

فاذا فرضنا ان المهتز لم يعان اية مقاومة احتكاكية خلال الاهتزاز فان قيمة R تساوي صفراً . عندئذ تصبح المعادلة (4.28) كالاتي

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \text{..................(4.29)}$$

وهذه تشير الى ان المعدل الزمني لتغير الطاقة الكلية للمهتز يساوي صفراً . مما يعني ان قيمة E تبقى ثابتة مع مرور الزمن وبذلك فأن المهتز يستمر على الاهتزاز دون ان يفقد طاقة خلال الحركة .

أما اذا كان المهتز يعاني مقاومة احتكاكية طفيفة فان اهتزازه يكون مضمحلاً . والحد المسؤول عن استنزاف القدرة منه يكون متغيراً خلال اي دورة من دورات الاهتزاز

وذلك لان قيمة السرعة الانية $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ تتغير خلال الدورة الواحدة . وعليه يفضل حساب متوسط القدرة المستنزفة خلال الدورة الواحدة . ولاجراء ذلك نستخدم المعادلة (4.25) فنحصل على

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2K}{m}$$

ونعوض هذه في المعادلة (4.28) فنجد ان

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2RK}{m}$$

ولحساب متوسط قيمة متغيرين K و $\frac{dE}{dt}$ خلال الدورة الواحدة يجب ان نتذكر ان المقدار $\frac{2R}{m}$ هو ثابت . لذلك فان

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{2R}{m} < K > \qquad \dots(4.30)$$

حيث ان $< K >$ يمثل متوسط قيمة الطاقة الحركية للمهتز خلال دورة واحدة وان $\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle$ يمثل متوسط المعدل الزمني لفقدان الطاقة خلال الدورة الواحدة . نفرض الان ان المهتز كان اضمحلاله قليلاً تماماً بحيث يمكن اعتبار ان التناقص في سعته من دورة لأخرى تليها مباشرة ضئيل جداً . في

هذه الحالة ستكون حركته خلال اي دورة لاتختلف اختلافا ملحوظا عن حركة مهتز غير مضمحل يهتز بنفس السعة . ولقد وجدنا في الفصل الثاني لمهتز توافقي غير مضمحل ان متوسط الطاقة الحركية خلال الدورة الواحدة يساوي متوسط الطاقة الكامنة خلال نفس الدورة ، اي ان

$$< K > = < P > \qquad \dots(4.31)$$

ولما كان كلا من K و P يتغيران بنفس المنوال بين ادنى قيمة 0 واقصى قيمة E لذلك من السهل ان نحصل من المعادلة (4.27) على

$$< E > = < K + P > \qquad \dots(4.32)$$

وهذه بدورها تعطي

$$< E > = < K > + < P > \qquad \dots(4.33)$$

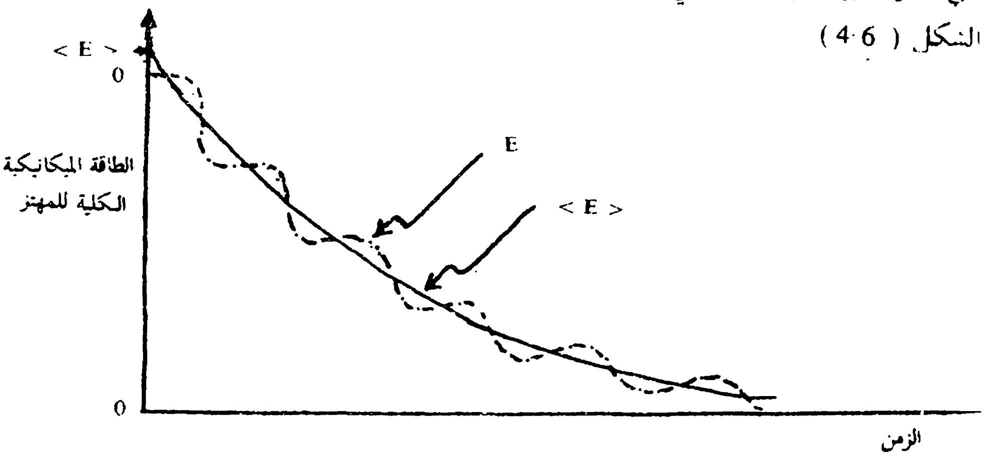
وبتركيب المعادلتين (4·31) و (4·33) نحصل على

$$< E > \; = 2 < K > \qquad \ldots (4.34)$$

وبتقريب جيد يمكن استخدام هذه العلاقة في المعادلة (4·30) لتصبـــــح :

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{R}{m} < E > \qquad \ldots (4.35)$$

وفي الواقع ان معدل تناقص E يتغير بشكل متناوب خلال كل دورة من دورات الاهتزاز ، وذلك بسبب ان فقدان الطاقة يعتمد على سرعة المهتز التي هي بدورها تتغير خلال الدورة الواحدة . ويكون استنزاف الطاقة اعلى مايمكن خلال اجزاء الدورة التي تكون فيها سرعة المهتز في ذروتها . ان هذا السلوك يمكن توضيحه كما مبين في الشكل (4·6)



215 الشكل (4·6) يبين كيفية تغير الطاقة الكلية للمهتز المضمحل مع الزمن

من هذا الشكل البياني يتضح ان الخط المنقط المتموج يبين التفاصيل الدقيقة لكيفية تغير وتناقص E مع الزمن ، بينما الخط المتصل يشير الى السلوك الاجمالي لمتوسط الطاقة الكلية < E > مع الزمن

ولغرض ايجاد كيفية تناقص الطاقة الميكانيكية الكلية على مدى عدد كبير من الدورات وليس دورة واحدة فقط سنستخدم الخط البياني المتصل وبذلك نحتاج الى الميل $\frac{d < F >}{dt}$ الذي يمثل مشتقة متوسط قيمة الطاقة بدل $\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle$ الذي يمثل

متوسط الميل للخط المنقط. اي اننا باختصار نحتاج الى الوصف الاجمالي لكيفية تغير الطاقة الكلية مع الزمن وليس الى التفاصيل الدقيقة لذلك التغير.

وبذلك يصبح شكل المعادلة (4.35) كالاتي

$$\frac{d\langle E\rangle}{dt} = -\frac{R}{m}\langle E\rangle \qquad \text{.....(4.36)}$$

ترتب هذه المعادلة وتكاملها

$$\int_{o}^{t} \frac{d\langle E\rangle}{\langle E\rangle} = \int_{o}^{t} \frac{R}{m}\, dt$$

ومنها نحصل على قيمة متوسط الطاقة الكلية $\langle E\rangle$ في أية لحظة زمنية t :
.....(4.37)

$$\langle E\rangle = \langle E\rangle_{o} e^{-\frac{R}{m}t} \qquad \text{....... (4.37)}$$

حيث أن $\langle E\rangle_{o}$ يمثل مقداراً ثابتاً ويشير الى قيمة $\langle E\rangle$ في الزمن t = o من هذه المعادلة نستنتج ان متوسط الطاقة الميكانيكية الكلية $\langle E\rangle$ المخزونة في مهتز خفيف الاضمحلال تتناقص اسياً من دورة لاخرى بعدها مباشرة بسبب التأثيرات الاحتكاكية التي تستنزف الطاقة الميكانيكية للمهتز على شكل حرارة. ان سرعة التناقص يتحكم بها قيمة $\frac{R}{m}$. ان العلاقة البيانية بين $\langle E\rangle$,t موضحة في الشكل (4.11).

ولايجاد معامل النوعية Q للمهتز المضحمل نعوض في التعريف (4.23)، حيث الطاقة المخزونة في المهتز تمثلها الكمية $\langle E\rangle$، والطاقة المفقودة لكل دورة تساوي المقدار المطلق لمتوسط تغير الطاقة الكلية في وحدة الزمن $\left|\left\langle \frac{dE}{dt}\right\rangle\right|$ مضروباً في زمن الدورة الواحدة T. من ذلك نحصل على

$$Q = 2\pi \frac{\langle E \rangle}{\left| \frac{\quad}{dt} \right| T} \qquad \text{................} \quad 4.38$$

وبتعويض $\langle \frac{DE}{dt} \rangle$ من المعادلة (4.39) نحصل على :

$$Q = \frac{2\pi \langle E \rangle}{(R\ /m) \langle E \rangle T} = \frac{2\pi m}{RT}$$

لكن لدينا

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\therefore Q = \frac{\omega m}{R} \qquad \text{................} \quad 4.39$$

ولما كانت R تعين شدة المقاومة الاحتكاكية التي يعانيها الجسم المهتز خلال الحركة ، فليس مستغرباً ان نجد أن Q تتناسب عكسياً مع R . ان القيمة العالية لـ Q تعني ان فقدان الطاقة في المهتز واطئاً .

ان لمعامل النوعية اهمية كبيرة ليس فقط للاهتزازات الميكانيكية بل ايضاً للاهتزازات الكهربائية . في دوائر الرنين التوالي والتوازي .

أمثلة محلولة

$R x = \frac{200}{v = 10} \quad = K X = 40$

مثـــال (4.1)

مهتز يتألف من جسيم ونابض حلزوني يعاني أثناء أهتزازه على أمتداد المحور السيني قوتين القوة الأولى هي قوة الأستعادة ومقدارها يتناسب مع الأزاحة الآنية x والقوة الثانية هي قوة أخماد ومقدارها يتناسب مع السرعة الآنية $\dot{x}$.

فاذا كانت قوة الأستعادة تساوي عددياً $\times$ 40 داين وقوة الأخماد تساوي 200 داين في اللحظة التي تكون فيها سرعته الأنية 10 سم / ثانية واذا فرضنا أن كتلة الجسيم 5 غم وأنه قد بدأ حركته من السكون عند نقطة تبعد 20 سم عن موضع التوازن . أوجد مايلي

(أ) المعادلة التفاضلية لحركة المهتز والشروط التي تصف حركته .

(ب) الموضع الآني للجسيم في أي لحظة زمنية

(جـ) السعة والزمن الدوري والتردد للذبذبات المضمحلة

(د) ارسم الحركة بيانياً .

(هـ) التناقص اللوغاريتمي

(و) التردد الطبيعي والزمن الدوري الطبيعي للأهتزاز

(ز) المدى الذي تتراوح فيه قيم ثابت الأضمحلال بالنسبة للحركة (1) زائدة الأضمحلال (2) الحرجة (3) ناقصة الأضمحلال .

الحـــل

(أ) : لدينا قوة الأستعادة F_k ومقدارها هو

$$F_k = -40\,x$$

وقوة الأخماد او المقاومة F_R ومقدارها هو

$$F_R = -R\,\dot{x}$$

وعندما تكون قيمة السرعة الآنية $\dot{x}$ هي 10 سم / ثانية تكون قوة الأخماد 200 داين وعليه تكون قيمة ثابت المقاومة R هي 20 داين لكل سم / ثا

لذلك فأن

$$F_R = -20\,\dot{x}$$

طبق قانون نيوتن الثاني في الحركة فينتج ان

$$m\ddot{x} = -R\dot{x} - kx$$

أي أن

$$5\ddot{x} = -20\dot{x} - 40x$$

بالقسمة على 5 فنحصل على

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 0 \qquad (1)$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية لحركة المهتز

(ب) لأيجاد الموضع الآني x للجسيم في أية لحظة زمنية t يجب ايجاد الحل لمعادلة الحركة (1)

لدينا الشروط الأبتدائية للحركة وهي

x = 20 في اللحظة الزمنية t = صفر

$\dot{x}$ = 0 في اللحظة الزمنية t = صفر

بمقارنة المعادلة (1) مع المعادلة القياسية للحركة التوافقية المضمحلة

$$\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

نجد أن

$$\omega_0^2 = 8$$
$$2r = 4$$
$$r^2 = 4$$

وهذا يعني أن

وهذا يشير الى أن قيمة ω_0^2 أكبر من r^2 $(\omega_0^2 > r^2)$ أي أن الحركة الأهتزازية مضمحلة والحل المناسب هو

$$x = e^{-rt}(A\sin\omega t + B\cos\omega t) \qquad \ldots (2)$$

نعوض القيم المناسبة

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - r^2} = \sqrt{8 - 4} = 2$$
$$r = 2$$

في المعادلة (2) فتصبح

$$x = e^{-2t}(A\sin 2t + B\cos 2t) \qquad \ldots (3)$$

ولأيجاد قيم A, B نعوض الشروط الأبتدائية

الشرط الأبتدائي الأول هو x = 20 عندما t = 0 فنجد أن

$$20 = 1(0 + B)$$

وبذلك نجد أن

$20 = B$ سم

ولتعويض الشرط الثاني $x = 0$ عندما $t = 0$ يجب ان نفاضل المعادلة (3) بالنسبة للزمن فنحصل على

$$x = \frac{dx}{dt} = -2e^{-2t} (A \sin 2t + B \cos 2t) +\_ e^{-2t} (2A \cos 2t - 2B \sin 2t)$$

$$0 = -2 (B) + (2A)$$

ومنها نجد ان $A = B = 20$ سم

وهكذا نجد أن الموضع الآني x للجسيم في اية لحظة زمنية t هو

$$x = e^{-2t} (20 \sin 2t + 20 \cos 21)$$

ويمكن التعبير عن هذا الحل بطريقة اخرى ، فلدينا العلاقة

$$A \sin 2t + B \cos 2t = C \cos (2t - 0)$$

حيث ان

$$20 \sqrt{2} \quad \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{A^2 + B^2} = C$$

وان

$$\frac{\pi}{4} = a \qquad 1 = \frac{A}{B} = \tan \theta$$

وعليه يصبح الحل العام كالآتي

$$x = 20 \sqrt{2} \quad e^{-2t} \cos (2t - \frac{\pi}{4}) \qquad \text{.... (4)}$$

ان هذه المعادلة تمكننا من ايجاد موضع الجسيم x في اية لحظة زمنية t .

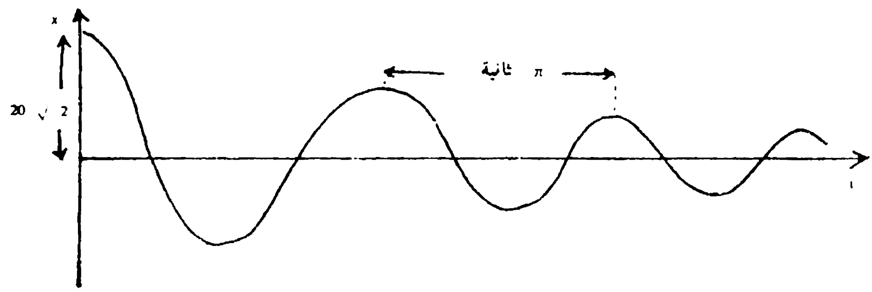
(جـ) من المعادلة (4) نجد ان

السعة $20 \sqrt{2} e\text{-}2t$ سم

الزمن الدوري $= T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ثانية

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$$ هيرتز التردد

(ا) ان حركة الجسيم يمكن تمثيلها بيانياً من خلال المعادلة (4) وذلك برسم الازاحة الآنية x مع الزمن t فنجد ان



يلاحظ من هذا الشكل ان سعة الاهتزاز تتناقص تدريجياً مع الزمن.

(هـ) ان قيمة التناقص اللوغاريتمي يمكن ايجادها من العلاقة :

$$\sigma = r\,T$$

ولدينا

$$r = \frac{R}{2m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega t_o^2 - r^2}}$$

و

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ومن هذه العلاقات نجد

$$\delta = \frac{2\pi R}{\sqrt{4km - R^2}} ,$$

$$\delta = \frac{2\pi \times 20}{\sqrt{4 \times 40 \times 5 - (20)^2}} = 2\pi$$

(و) لايجاد التردد الطبيعي والزمن الدوري في حالة انعدام الاخماد (أو المقاومة ،
نعوض $r = 0$ في الحل (2) ونضع $\omega = \omega_0$ فنحصل على $A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$

حيث ان

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$

ومنها نجد ان

$$8 = \frac{40}{5} = \omega_0^2$$

$$2\sqrt{2} = \omega_0$$

لكن

$$\frac{2\pi}{T_0} = \omega_0$$

ومنها نجد الزمن الدوري الطبيعي T_0

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ ثانية}$$

وبذلك نحصل على التردد الطبيعي f_0

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \text{ هيرتز}$$

(ز) ان قيمة ثابت الاضمحلال r بالنسبة لقيمة ω_0 هي التي تحدد طبيعة حركة المهتز.

(1) فعندما تكون قيمة r اكبر من قيمة ω_0 لايحدث اهتزاز واذا ماازيح المهتز عن موضع توازنه وترك حراً فانه يعود ببطوء الى موضع توازنه .

(2) واذا كانت قيمة $r = \omega_0$ تكون الحركة حرجة أي أن هذه القيمة تفصل بين سلوكين هما اما سلوك اهتزازي أو سلوك غير اهتزازي . وفي حالة $r = \omega_0$ اذا ما ازيح المهتز عن موضع توازنه وترك حراً فانه يعود الى موضع توازنه بأقل زمن ممكن (دون ان يصاحبه اهتزاز) .

(3) وعندما تكون قيمة r أقل من قيمة ω_0 فعندئذ يمكن للمهتز ان يهتز ولكن اهتزازه يكون مضمحل أي أن سعته تقل بالتدريج . وسرعة تناقص السعة يعتمد على قيمة r وفي حالة متطرفة عندما r تنعدم ($r = 0$) فان المهتز يستمر بالاهتزاز وتبقى سعة حركته ثابتة

مثـــال (2 4)

في بعض اجهزة القياس التي [illegible] الى [illegible] كالكلفانومتر القذفي مثلا عندما تمر خلاله شحنة كهربائية [illegible] عودة [illegible] الى موضع توازنه في أقل زمن ممكن .

ناقش كيف يتحقق [illegible]

كلفانومتر قذفي مؤشره يشير الى ازاحة [illegible] في اللحظة الزمنية $t = 0$ وامرر خلاله كمية من الشحنة [illegible] الرقعة الضوئية الموجهة الى مقياس متعين سرعة ابتدائية [illegible] تغير الازاحة مع الزمن ووضح ذلك بيانياً ؟

الحـــل

ان عودة المؤشر الى موضع [illegible] بأقل زمن ممكن يتحقق عندما $r = \omega_0$ وفي هذه الحالة يكون الحل المناسب لمعادلة الحركة التوافقية المضمحلة هو

$x = (A + Bt)$ [illegible]

ان الشروط الابتدائية للحركة هي

اولاً $x = 0$ عندما $t = 0$

ثانياً $v = \dot{x}$ عندما $t = 0$

من الشرط الاول نجد ان قيمة A = صفر
ولتعويض الشرط الثاني يجب ان نفاضل المعادلة (1) بالنسبة للزمن فنجد ان

$$\dot{x} = Be^{-rt} - r(A + Bt)e^{-rt}$$

نعوض القيم المناسبة

$$t = 0 \quad \dot{x} = V , A = 0$$

فنجد أن

$$V = B$$

وعليه يكون الحل الكامل الذي يصف حركة المؤشر هو

$$x = Vte^{-rt} \qquad \ldots(2)$$

وعند امرار شحنة كهربائيه في الجهاز فان المؤشر ينحرف ويؤدي الى تحريك البقعة الضوئية على المقياس المتري الى اقصى انحراف . بعدها تعود البقعة الى موضع التوازن . وعليه فان النهاية العظمى لقيمة الازاحة x تحدث عندما تصل البقعة الضوئية الى أقصى انحراف على المقياس وتتوقف لحظيا قبل شروعها بالعودة الى موضع التوازن ($\dot{x} = 0$) وعند النهاية العظمى للازاحة يتحقق الشرط $\dot{x} = 0$ نفاضل المعادلة (2) بالنسبة للزمن فنجد أن

$$\dot{x} = Ve^{-rt}(1 - rt) = 0$$

ولما كانت $V \neq 0$
وان المقدار $e^{-rt} \neq 0$ الا عندما $t \to \infty$
لذلك فان

$$(1 - rt) = 0$$

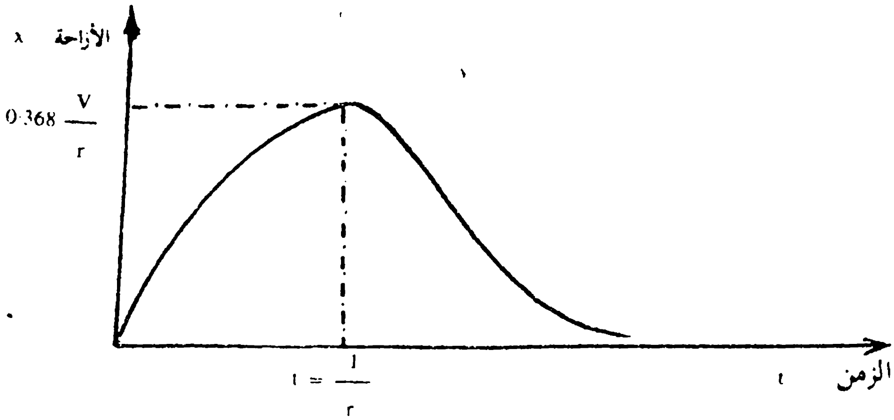
ومن هذه المعادلة نجد ان

$$t = \frac{1}{r}$$

وهذه العلاقة تعطي اللحظة الزمنية التي عندها تكون الازاحة في أقصى قيمة لها . والازاحة في هذه الحالة هي

$$x = Vte^{-rt} = \frac{V}{r}e^{-1} = 0.368 \frac{V}{r} = 0.368 \frac{2mV}{R}$$

والعلاقة البيانية بين الازاحة x والزمن t يمكن ان نحصل عليها من المعادلة (2)



وفي هذه الحالة يعود المؤشر الى موضع التوازن ($x = 0$) في أقل زمن ممكن دون ان يرافق ذلك أي سلوك اهتزازي ومن هنا تتجلى الاهمية العملية للحركة الحرجة في تصميم اجهزة القياس من هذا النوع .

مثـــال (3-4)

اذا كان التردد الطبيعي لمهتز هو 20 هيرتز بدون اضمحلال . ويصبح تردده بوجود الاضمحلال 16 هيرتز فما هو التناقص اللوغاريتمي.

الحـــل

لدينا

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - r^2} \qquad \ldots(1)$$

$$\omega_o = 2\pi f_o$$

$$\omega = 2\pi f$$

نعوض القيم المناسبة فنجد أن

$40\pi = 2\pi \times 20 = \omega_o$ زاوية نصف قطرية لكل ثانية

$32\pi = 2\pi \times 16 = \omega$ زاوية نصف قطرية لكل ثانية

نعوض في المعادلة (1) فنحصل على

$$(32\pi)^2 = (40\pi)^2 - r^2$$

ومنها نجد أن

$$r^2 = 576\pi^2$$
$$r = 24\pi$$

والتناقص اللوغاريتمي δ يمكن ايجاده من العلاقة

$$\delta = r\,T$$

حيث T هو الزمن الدوري المضمحل $= \frac{1}{f} = \frac{1}{16}$ ثانية

لذلك فان

$$\frac{3\pi}{2} = 24\pi \times \frac{1}{16} = \delta$$

اسئلة

4-1 ما هو الاهتزاز المضمحل ، وما هي عوامل الاضمحلال ؟

4-2 هل هناك مهتز يهتز بدون اضمحلال ؟

4-3 ان الاضمحلال يعني فقدان في طاقة المهتز فأين يذهب هذا الفقدان . وهل يتفق ذلك مع قانون حفظ الطاقة .

4-4 هل يمكن الحصول على مهتز مثالي بدون اضمحلال تماماً ؟

4-5 في بعض الآلات تستخدم وسائل اخماد . وضح لماذا . وأعط مثالاً لذلك .

4-6 ما هو تأثير عوامل الاضمحلال على : (أ) سعة الاهتزاز (ب) تردد الاهتزاز (ج) الزمن الدوري للاهتزاز .

4-7 اين تكمن عوامل الاضمحلال في المهتز ذاته أم في محيطه الخارجي . وضح

4-8 عندما يهتز مهتز في مائع فما هي العوامل التي تحدد مقدار القوة المقاومة لحركة المهتز .

4-9 اذكر ما هي طبيعة حركة المهتز في الحالات الآتية :

(أ) γ = صفر

(ب) $\omega_0 > \gamma$

(ج) $\omega_0 = \gamma$

(د) $\omega_0 < \gamma$

4-10 ما هي طرق قياس الاضمحلال ؟ عددها ووضح النظرية التي تستند عليها كل طريقة .

4-11 عرف ما يلي

(أ) التناقص اللوغاريتمي

(ب) زمن الاسترخاء

(ج) معامل النوعية

4-12 ناقش تأثير الاضمحلال على التردد الطبيعي للمهتز .

4-13 هل يمكن وصف حركة المهتز المضمحل انها حركة توافقية بسيطة ؟ وضح لماذا .

4-14 هل تتغير الطاقة تبادلياً بين الطاقة الكامنة والطاقة الحركية في جميع الأجسام المهتزة التي (أ) لا تعاني أي فقدان في الطاقة (ب) تعاني تبديد في الطاقة .

4-15 اذكر عوامل الاضمحلال التي تستنزف طاقة الاهتزاز في المهتزات التالية :

(أ) البندول البسيط

(ب) الجسم الطافي

(ج) السائل في انبوبة على شكل حرف U

(د) الكتلة المتصلة بين نابضين (اهتزاز طولي واهتزاز مستعرض)

(هـ) الكتلة المربوطة وسط سلك متوتر ،

(و) الجسيم الموضوع على غشاء متوتر

4-16 في أي الحالتين يكون تأثير الاضمحلال أكبر : في بندول يتذبذب بسعات كبيرة أم في آخر يتذبذب بسعات، صغيرة ؟ وضح اجابتك.

4-17 لديك مهتز مضمحل تتناقص سعة اهتزازه تدريجياً وبعد فترة زمنية قد تطول أو تقصر يتوقف عن الحركة تماماً . ناقش أين فقدت طاقة المهتز . وما هو موقف قانون حفظ الطاقة في ذلك .

4-18 هل تبقى طاقة المهتز التوافقي المضمحل محفوظة ؟ ولماذا ؟

4-19 ناقش باسهاب عوامل الاضمحلال في مرنان هلمهولتز .

4-20 ماهو شرط حدوث الحركة الحرجة في المهتزات عموماً ؟ وما أهمية ذلك على أجهزة القياس .

4-21 ماهي الأهمية العملية للحركة الحرجة . ؟

22 -- 4 اذكر الفائدة العلمية من دراسة عامل النوعية Q في مواضيع الفيزياء .

مسائل

4-1 برهن ان معادلة الحركة لمهتز توافقي مضمحل هي :

$$\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

ثم جد مجموعة الحلول المناسبة لهذه المعادلة واعط التفسير الفيزياوي لكل حل .

4-2 حل معادلة المهتز التوافقي المضمحل :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

تحت الشروط $x = 5$ و $\frac{dx}{dt} = -3$ في اللحظة الزمنية صفر ثم اعط تفسيراً فيزياوياً للنتائج التي تحصل عليها .

4-3 جسم كتلته 30 كيلوغرام علق بطرف نابض حلزوني فأدى الى استطالته بمقدار 0·5 متر . اذا سحب هذا الجسم نحو الأسفل بازاحة مقدارها 0·75 متر عن موضع التوازن ثم ترك :

(أ) جد موقع الجسم في أي لحظة زمنية اذا كانت القوة المقاومة لحركة المهتز والناتجة من اللزوجة تساوي 10 v نيوتن . حيث ان v هي السرعة الآنية للجسم :

(ب) وضح طبيعة الحركة الناتجة هل هي اهتزازية مضمحلة ، أم زائدة الاضمحلال أم حرجة

4-4 برهن ان الفرق في الأزمنة المقابلة لأقصى ازاحتين متتاليتين لمهتز توافقي مضمحل هو مقدار ثابت

4-5 هل الفرق في الأزمنة المقابلة لأدنى ازاحتين متتاليتين لمهتز توافقي مضمحل يساوي نفس المقدار في المسألة (4 - 4)

4-6 اذا كانت قوة الاحتكاك التي تقاوم حركة المهتز المؤلف من جسيم ونابض هي $7{\cdot}5\dot{x}$ نيوتن . حيث أن $\dot{x}$ هي السرعة الآنية للمهتز .

(أ) برهن ان حركة هذا المهتز هي حركة اهتزازية مضمحلة .

(ب) جد السعة والزمن الدوري والتردد

(ج) جد التناقص اللوغاريتمي .

علماً أن كتلة المهتز هي 24 كيلوغرام وان ثابت النابض 40 نيوتن لكل متر .

4-7 اذا كانت قوة اللزوجة التي يبديها المائع لحركة المهتز في السؤال السابق هي

$20 \times$ نيوتن فما هي طبيعة الحركة الناتجة اذا ازيح الجسيم عن موضع توازنه وترك .

4 - 8 اثبت ان التناقص اللوغاريتمي في الاهتزاز المضمحل يساوي الزمن اللازم لكي تنقص السعة الى $\frac{1}{e}$ من قيمتها القصوى .

4 - 9 قانون ستوك يذكر أن قوة اللزوجة التي تقاوم حركة كرة نصف قطرها a تتحرك خلال مائع بسرعة v هي $6\pi\eta a v$ حيث η يمثل لزوجة المائع . فاذا كان لديك بندول بسيط طوله 1 متر معلق به كرة صغيرة من الألمنيوم نصف قطرها 5 ملم ويهتز البندول بسعات صغيرة . جد الزمن اللازم كي تنقص سعة اهتزاز البندول عشرة بالمئة .

علماً ان كثافة الألمنيوم هي 2.65×10^{3} كلغم / م^{3}

وان لزوجة الهواء η هي 1.78×10^{-5} م$^{-1}$ كلغم ثا$^{-1}$

4 - 10 مهتز مضمحل يبدء من السكون يصل اول سعة مقدارها 5 سم وتنقص الى 50 ملم بنفس الاتجاه بعد انجاز 100 ذبذبة . فاذا كان الزمن الدوري 2.3 ثانية . جد التناقص اللوغاريتمي .

4 - 11 مهتز مضمحل معادلة حركته هي

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 10\frac{dy}{dt} + 15y = 0$$

جد الحل العام لهذه المعادلة واعط التفسير الفيزياوي لذلك .

4 - 12 علق جسم كتلته 5 كلغم من طرف نابض عمودي فاحدث استطالة 62.5 سم ثم سحب الجسم بعد ذلك الى أسفل مسافة 3 سم وترك .

(أ) عين موضع الجسم في أية لحظة زمنية ، اذا تعرض لقوة معيقة تساوي عدديا 4 مرات قدر سرعته الآنية .

(ب) ما هي طبيعة حالته الحركية ؟

4 - 13 برهن ان $x = Ae^{-\alpha t}\cos\omega t$ يمكن ان يكون حلاً للمعادلة

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

جد ω ، α بدلالة γ ، ω_0 .

4 - 14 جسيم كتلته 0.2 كلغم معلق بنهاية نابض حلزوني له ثابت مقداره 80 نيوتن لكل متر . اذا كان الجسيم يعاني مقاومة تساوي عدديا bv حيث v هي سرعته الآنية بامتر لكل ثانية ، b مقدار ثابت

(أ)   اكتب معادلة الحركة للمهتز
(ب)   اذا كان التردد المضمحل هو $\frac{\sqrt{3}}{2}$ من قيمة التردد الطبيعي لغير المضمحل فما هي قيمة الثابت b
(جـ)   ماهي قيمة عامل النوعية Q للمهتز ، وما هو مقدار التناقص في سعة الاهتزاز بعد انجاز 10 هزات كاملة ؟

الفصل الخامس

الأهتـزاز القسـري

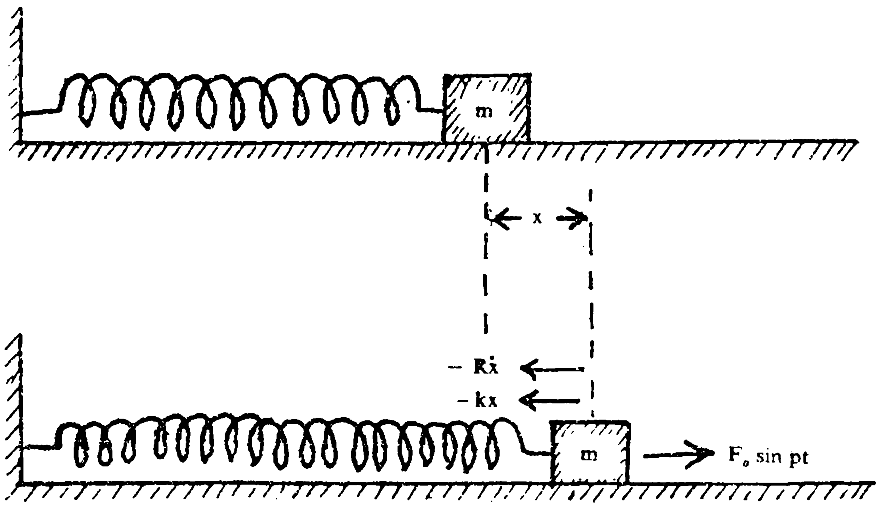
5 - 1 مقدمة

لقد اقتصرت دراستنا حتى الآن على دراسة الاهتزاز الحر المضمحل وغير المضمحل حيث وجدنا انه عندما يزاح المهتز غير المضمحل عن موضع توازنه ويترك حرا فانه سوف يهتز بتردد يعتمد على ثوابت المرونة والقصور الذاتي ، ومثل هذا التردد يدعى بالتردد الحر او التردد الطبيعي . ان مايساعد على استمرار الاهتزاز الحر هو الطاقة المخزونة في المهتز في بداية الحركة الاهتزازية ولكن بسبب المقاومة الاحتكاكية التي يتحتم وجودها دائما مهما كانت صغيرة فان سعة الاهتزاز سوف تتضاءل بالتدريج مع الزمن حتى يتوقف المهتز عن الاهتزاز . ولكي نحافظ على استمرار الاهتزاز يجب ان يزود المهتز بالطاقة باستمرار للتغلب على تأثير المقاومة الاحتكاكية . واذا كانت الوسيلة لتزويد المهتز بالطاقة على شكل قوة خارجية دورية فعندئذ يقال للمهتز انه في حالة اهتزاز قسري او اهتزاز مجبر . ولعل من ابسط الامثلة المألوفة على الاهتزاز القسري هو حركة الارجوحة فالارجوحة المهتزة اذا ماتركت وشأنها فانها سوف تتوقف عن الاهتزاز بعد فترة لن تطول كثيرا وذلك بسبب الفقدان المستمر للطاقة نتيجة الاحتكاك ، ولكن اذا مااعطيت دفعات صغيرة متعاقبة وعلى فترات زمنية مناسبة فانها سوف تستمر على الاهتزاز نتيجة التعويض المستمر للطاقة المفقودة . وبالحقيقة اذا مااحسن توقيت الدفعات بحيث تكون مؤثرة بنفس اتجاه الحركة وليس عكسها فان سعة الاهتزاز تكون كبيرة . وهناك امثلة عملية كثيرة على الاهتزاز القسري ، منها اهتزاز الجسر تحت ضربات اقدام طابور عسكري عند العبور واهتزاز هيكل المحرك نتيجة الضربات الدورية للمكابس داخل اسطوانات الاحتراق ، واهتزاز الالات الموسيقية بانواعها الوترية والهوائية وذات الاغشية الرقيقة عند الاثارة الميكانيكية او الكهربائية ..... الخ . ان مسألة الاهتزاز القسري هي مسألة عامة في الفيزياء . اذ ان حل هذه المسألة لايقتصر فائدته على الحركات الاهتزازية والموجية فقط بل يتعداها الى مجالات اخرى مختلفة في الصوتيات ودوائر

التيار المتناوب والفيزياء الذرية . في هذا الفصل ستتركز دراستنا على تحليل الاهتزاز القسري والظواهر الناتجة عنه .

5.2 معادلة الحركة للمهتز المضمحل تحت تأثير قوة خارجية دورية

سنعتبر هنا حركة المهتز المؤلف من جسيم كتلته m متصل بطرف نابض حلزوني ثابت مرونته k ومثبت طرفه الآخر باحكام كما في الشكل (5.1)



الشكل (5.1) مهتز مضمحل تحت تأثير قوة خارجية دورية

نفرض ان الجسيم يهتز في الهواء (أو أي وسط لزج) بسرعة غير عالية بحيث تكون المقاومة الاحتكاكية التي يعانيها الجسيم متناسبة طردياً مع سرعته . ونفرض ان الجسيم يخضع لقوة خارجية دورية مقدارها $F_0 \sin pt$ حيث P يمثل التردد الزاوي لهذه القوة وهذا التردد مستقل تماماً عن التردد الزاوي الطبيعي ω_0 أو التردد الزاوي المضمحل ω . ان هذه القوة الدورية تعمل على تغذية المهتز بالطاقة لتعوض عن الطاقة التي يخسرها خلال الحركة . ان الجسيم المهتز في هذه الحالة يكون خاضعاً آنياً لثلاث قوى مختلفة هي قوة الاستعادة $-kx$ وقوة الاحتكاك $-R\dot{x}$ والقوة الخارجية الدورية $F_o \sin pt$ ومحصلة هذه القوة المؤثرة في امتداد المحور السيني x هي

$$F_o \sin pt - kx - R \frac{dx}{dt}$$

الان نطبق قانون نيوتن الثاني في الحركة ، فينتج ان

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_o \sin pt - kx - R \frac{dx}{dt} \qquad \ldots (5\cdot1)$$

نقسم طرفي المعادلة على m ونرتبها فتصبح

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{R}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_o}{m} \sin pt$$

ونفرض ان $f_o = \frac{F_o}{m}$

ولما كانت $2r = \frac{R}{m}$ ، $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$

لذلك تصبح المعادلة الاخيرة كالآتي

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2r\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = f_o \sin pt \qquad \ldots (5\cdot2)$$

5·3 حل معادلة الحركة القسرية (الحل الخاص)

لحل هذه المعادلة يجب ان نتذكر ان القوة الخارجية المسلطة بتردد زاوي p ستجبر الجسيم على الاهتزاز بهذا التردد . وبذلك فان كل حد من حدود هذه المعادلة في الطرف الايسر يجب ان يتضمن دالة تتغير توافقياً مع الزمن بتردد زاوي p لهذا الغرض سنفرض الحل التجريبي باعتبار الازاحة الآنية x تتغير توافقياً مع الزمن وفق المعادلة التالية

$$x = A\sin pt + B\cos pt \qquad \ldots (5\cdot3)$$

لاختبار صحة هذا الحل نعوضه في المعادلة $(5\cdot2)$

نجد $\frac{dx}{dt}$ من هذا الحل

$$\frac{dx}{dt} = pA\cos pt - pB\sin pt$$

ثم نجد $\frac{d^2x}{dt^2}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -p^2 A\sin pt - P^2 B\cos pt$$

نعوض x و $\frac{dx}{dt}$ و $\frac{d^2x}{dt^2}$ في المعادلة (5.7) فنحصل على

$$p^2 A\sin pt - p^2 B\cos pt + 2 r p A\cos pt - 2 r B\sin pt + \omega^2_o A\sin pt + \omega^2_o B\cos pt = f_o \sin pt$$

نرتب هذه المعادلة فتصبح

$$(p^2A - 2rpB + \omega^2_o A) \sin pt + (-p^2 B + 2rpA + \omega^2_o B) \cos pt = f_o \sin pt \quad \text{...... (5.4)}$$

فاذا كان الحل المفروض صحيحاً فان الطرف الايمن في هذه المعادلة يجب ان يساوي الطرف الايسر عند أي لحظة زمنية t. وهذا يعني ان معامل sinpt في الطرف الايسر يجب ان يساوي معامل sinpt في الطرف الايمن في اية لحظة زمنية t ، وكذلك بالنسبة لتساوي معاملي cospt في الطرفين.

فبالنسبة لمعامل sinpt نجد ان

$$-p^2A - 2rpB + \omega^2_o A) = f_o \quad \text{... (5.5)}$$

وبالنسبة لمعامل cospt نجد ان

$$-p^2B - 2rpB + \omega^2_o B = 0$$

نحل هاتين المعادلتين الآنيتين فنحصل على قيم B,A كالآتي

$$A = \frac{(\omega^2_o - p^2)\, f_o}{(\omega^2_o - p^2) + (2rp)^2} \quad \text{...... (5.7)}$$

$$B = \frac{(2rp)\, f_o}{(\omega^2_o - p^2)^2 + (2rp)^2} \quad \text{...... (5.8)}$$

نعوض B,A في الحل (5.3) فنجد ان

$$X = \frac{(\omega^2_o - p^2)\, f_o}{(\omega^2_o - p^2)^2 + (2rp)^2} \sin pt - \frac{(2rp)\, f_o}{(\omega^2_o - p^2)^2 + (2rp)^2} \cos pt$$

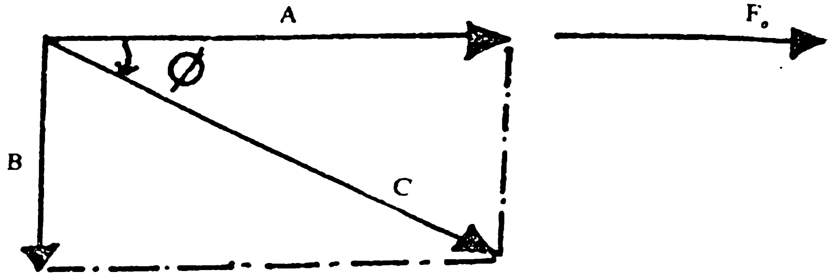
ولاجل التعبير عن هذا الحل بشكل رياضي ابسط وبصورة يسهل التفسير الفيزياوي لسلوك الجسيم المهتز ، يفضل استخدام الطريقة الاتجاهية لاختزال الحل . لهذا الغرض لدينا معادلة الازاحة الآنية x وهي

$$x = A\sin pt + B\cos pt$$

ولدينا معادلة القوة الخارجية الدورية F وهي

$$F = F_o \sin pt$$

ومن مقارنة المعادلتين نلاحظ ان متجه القوة F_o بنفس اتجاه مركبة الازاحة A لأن كليهما موجب ومضروب في sinpt . لذلك يقال ان كليهما بنفس الطور . ويعبر عن ذلك كما في الرسم (5·2)



الشكل (5·2) يبين زاوية الطور بين متجه القوة المحركة للمهتز ومتجه الازاحة .

أما مركبة الأزاحة B فهي مضروبة في cos pt لذلك فأنها حتماً خارج الطور بزاوية 90° عن القوة F_o . ولكن اشارة B سالبة كما وجدنا في المعادلة (5·8) لذلك فأنها يجب ان تكون متخلفة عن طور F_o بزاوية 90° .من الشكل (5·2) يمكن ايجاد محصلة السعة C وزاوية الطور ϕ . حيث

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad ...(5·9)$$

$$\tan\phi = \frac{B}{A} \qquad ...(5·10)$$

وبذلك تأخذ المعادلة (5·3) الشكل الآتي :

$$x = C\sin(pt + \phi) \qquad ...(5·11)$$

نعوض قيم B،A من المعادلتين (5·7) و (5·8) في المعادلات (5·9) و (5,10) و (5,11) فنحصل على

$$C = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} \qquad \ldots(5{\cdot}12)$$

$$\tan\phi = \frac{-2rp}{(\omega_o^2 - p^2)} = \frac{2rp}{(p^2 - \omega_o^2)} \qquad \ldots(5{\cdot}13)$$

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} \sin(pt + \phi) \qquad \ldots(5{\cdot}14)$$

ان المعادلة الاخيرة (5·14) تمثل حلاً صحيحاً لمعادلة الحركة (5·2) طالما انها تتفق معهـا بدون تناقض ، وهذا الحل يمثل حل الحالة المستقرة لانه يستمر على نمط واحد ولايتغير خلال الزمن . انه يمثل استجابة الجسيم للاهتزاز القسري بتردد زاوي P (ترددالقوة الخارجية المثيرة للاهتزاز) من دون اعتبار للشروط الابتدائية للحركة أو للتردد الطبيعـي للمهتز. ولذلك فان هذا الحل لايمثل حلاً عاماً لمعادلة الحركـة لانه لايحتوي على ثوابت اختيارية تحددها الشروط الابتدائية لحركة المهتز وهذا الحل يدعى بالحل الخاص

5·4 الحلول المكملة (الحلول العابرة) :

ان هناك حلاً آخر صحيحاً لمعادلة الحركة (5·2) . وهو الحل الناتج من الحركة الحرة للمهتزبدون تأثيرقوة خارجية عليه . اي هو حل المعادلة (5·2) عندما يكون الطرف الايمن فيها مساوياً للصفر . وقدسبق ان وجدنا الحل العام لمثل هذه الحالة وناقشناه بالتفصيل في الفصل الرابع . وقد وجدنا انه في حالة وجود مقاومة احتكاكية وهـذا ماهومتوقع في كل الحالات العملية .فان المهتز لايستمرعلى الحركة الحرة اوالاهتزازالحر بل يتوقف بعد فترة زمنية .

ان المعادلة (5·2) يكون لها ثلاثة حلول مختلفة عندما يكون الطرف الايمن فيها مساوياً للصفر وكل حل يعتمد على القيم النسبية لمعامل المقاومة r والتردد الطبيعـي للمهتـز ω_o . وهـذه الحلـول تـدعـى رياضيـا بـالحلـول المكملـة (Complementary solutions) وهذه الحلول هـي :

عندما $\omega_o > r$ فأن الحل المكمل يكون

$$x = Ce^{-rt} \sin(\omega t + \theta) \qquad \ldots(5\cdot15)$$

وهذا الحل يمثل حالة الاهتزاز الناقصة الاضمحلال

وعندما $\omega_o = r$ فأن الحل المكمل يكون

$$x = x_o e^{-rt} \qquad \ldots(5\cdot16)$$

وهذا الحل يمثل حالة الحركة الحرجة

وعندما $\omega_o < r$ فأن الحل المكمل يكون

$$x = e^{-rt}\left(C_1 e^{\sqrt{r^2 - \omega_0^2}\, t} + C_2 e^{-\sqrt{r^2 - \omega_0^2}\, t}\right) \qquad \ldots(5\cdot17)$$

وهذا الحل يمثل حالة الحركة الزائدة الاضمحلال .

وفي جميع هذه الحلول يلاحظ ان قيمة الازاحة x تقترب من الصفر مع مرور الزمن t . ولذلك فأن مثل هذه الحلول توصف فيزياويا بالحلول العابرة لانها تمثل حـــالات مؤقتة ولاتستمر سوى فترة زمنية قصيرة .

5·5 الحلول العامة

ولما كانت معادلة الحركة (5·2) هي معادلة خطية لذلك يكون حلها العام هـــو مجموع الحلين الخاص والمكمل . وعلى هذا الاساس يكون هناك ثلاثة حلول عامة كاملة للمعادلة (5·2) وكل حل يعتمد على القيم النسبية لـ r و ω_o

فعندما $\omega_o > r$ فأن الحل العام الـكامل هو

$$x = Ce^{-rt} \sin(\omega t + \theta) + \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} \sin(pt + \phi) \qquad \ldots(5\cdot18)$$

وعندما $\omega_o = r$ فان الحل العام الـكامل يكون

$$x = X_0 e^{-rt} (A + B't) + \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} \sin(pt + \phi) \qquad \ldots(5\cdot19)$$

وعندما $\omega_o < r$ فأن الحل العام الـكامل يكون

$$x = e^{-n}\left(C_1 e^{\sqrt{-2-\omega_o^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{r^2-\omega_o^2}\,t}\right) +$$

$$\frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} \sin(pt + \phi) \qquad \ldots(5\cdot20)$$

ويلاحظ ان كل حل من هذه الحلول العامة يتألف من حدين . الحد الاول يدعى رياضياً بالحل المكمل ويمثل فيزياوياً الجزء العابر من الحل العام ، والحد الثاني يدعى رياضياً بالحل الخاص ويمثل فيزياوياً الجزء المستقر من الحل العام .

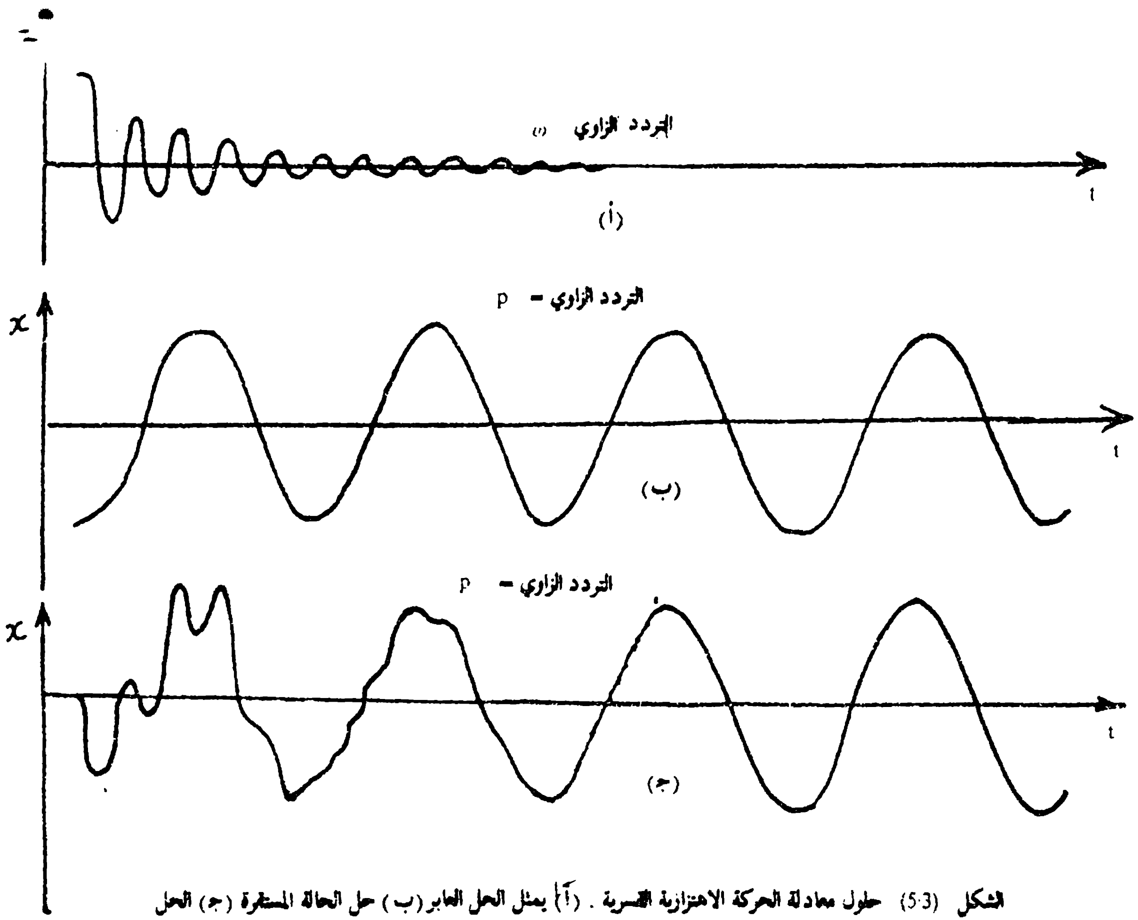
وسنحاول الآن اعطاء التفسير الفيزياوي للحل (5·18) الذي يقابل الحالة الناقصة الاضمحلال ($\omega_o > r$) وهي الحالة الوحيدة التي يحدث فيها الاهتزاز الحر المضمحل بدون تأثير قوة خارجية قسرية على المهتز .

والحل العام الكامل المقابل لهذه الحالة يمكن تمثيله بيانياً كما مبين في الشكل (5·3) . حيث الجزء (أ) يقابل الحد الاول من الحل وهو يمثل حالة الاهتزاز الحر المضمحل ويلاحظ انه يتلاشى بعد فترة زمنية قصيرة ولذلك فأن هذا الجزء من الحل ، يمثل حالة عابرة . والجزء (ب) من الشكل يقابل الحد الثاني من الحل ويلاحظ انه يستمر بالاهتزاز بنفس السعة ولايتغير مع مرور الزمن طالما كانت القوة الدورية المسلطة على المهتز مستمرة في تأثيرها ، ولذلك يدعى هذا الجزء بحل الحالة المستقرة . والجزء (جـ) يمثل محصلة جمع الحلين العابر والمستقر ، ويلاحظ فيه ان تأثير الجزء العابر ظاهر لفترة قصيرة من بدء الاهتزاز ثم بعد ذلك يختفي نهائياً ويبقى الجزء المستقر من الحل هو الطاغي في تأثيره على المهتز .

وفي دراسة الاهتزاز القسري يهمل عادة الجزء العابر من الحل العام بعد مرور فترة زمنية قصيرة من بدء الاهتزاز ، ويتركز الاهتمام بعد ذلك على حل الحالة المستقرة الذي يتحكم تماماً بسلوك المهتز .

5·6 اهمية الاهتزازات العابرة للمهتز .

ان الاهتزازات العابرة لاي مهتز يعاني اهتزازات قسرية لايمكن اهمالها دائما على الرغم من قصر فترة تأثيرها ، فهي قد تفوق احياناً في اهميتها اهتزازات الحالة المستقرة . فالصوت المميز للطبل والمنبعث منه نتيجة القرع يعزى كلياً للاهتزازات العابرة . فغشاء الطبل



الشكل (5·3) حلول معادلة الحركة الاهتزازية القسرية . (أ) يمثل الحل العابر (ب) حل الحالة المستقرة (ج) الحل التام الناتج من تراكب الحلين (أ) و (ب) .

يهتز قسرياً بفعل قوة دافعة تؤثر عليه لفترة زمنية قصيرة بينما اهتزاز الغشاء يستمر لفترة زمنية طويلة نسبياً . وبينما تتلاحق الضربات على الطبل فأن الاهتزازات العابرة تتجدد وهكذا تستمر في توليد الصوت المميز للطبل .

وللاهتزازات العابرة دور فعال في التأثير في نوعية الاجهزة الموسيقية ، فهي في بعض الحالات يمكن ان تحدث تشوهاً في نغمة الحالة المستقرة المرغوبة وقد تؤدي احيانا حتى الى تشويهها .

فالنغمة الصادرة من كمان عند الضرب السريع تختلف اختلافاً نوعياً واضحاً بالمقارنة مع النغمة التي يصدرها في حالة الضربات البطيئة . فبينما في الحالة الاولى تتلاحق الضربات السريعة قبل تلاشي الاهتزازات العابرة ، في الحالة الاخيرة هنالك وقت كاف للاهتزازات العابرة ان تتلاشى بين الضربات المتباعدة زمنياً ، وهكذا تختلف نوعية نغمة الكمان في الحالتين .

5-7 اهمية الاهتزازات القسرية للمهتز

لقد عرفنا في الفصول السابقة ان لكل مهتز ترددا طبيعيا خاصا به هو ω_o عند غياب قوى الاحتكاك و ω عند وجود قوى الاحتكاك . ومثل هذا التردد يحدث فقط عندما يزاح المهتز عن موضع توازنه ويترك حرا ، اي ان هذا الاهتزاز لادخل لاي قوة خارجية فيه . غير ان الحالة تختلف تماما عندما يقع المهتز تحت تاثير قوة خارجية دورية ترددها الزاوي p فعندئذ يعرف التردد الناتج من تاثير هذه القوة باسم التردد القسري او التردد المجبر . وتكون قيم ω_o و ω ثابتة عادة لمهتز معين ، بينما قيمة P متغيرة ويمكن التحكم بمقدارها بسهولة ومعظم الاهتزازات في مختلف المهتزات او الاجسام في الطبيعة تحدث بسبب تأثير قوة خارجية حيث هذه القوة تمد المهتز بالطاقة اللازمة التي تستنفد من الاهتزاز . ومصدر هذه القوة يختلف باختلاف الحالة . فهيكل السيارة يهتز غالبا بسبب ضربات المحرك او يرتج بدنها لانها تجري فوق طريق وعر . واسلاك الكهرباء والاشجار تهتز بفعل حركة الهواء . والجرس الكهربائي يهتز بفعل المطرقة التي تدقه بسبب الجذب المغناطيسي الذي يولده مرور تيار كهربائي في الملفات الداخلية له واهتزاز البنايات والجسور قد تسببها عواصف شديدة او مرور ناقلات

ثقيلة بالقرب منها . وسقف الغرفة يهتز عندما يتخطى انسان على سطحها .... الخ . وطبيعي ان الاهتزازات القسرية تثير ايضا الترددات العابرة لهذه الهزازات والترددات العابرة تمثل اهتزازات طبيعية حرة للمهتز . ولهذا السبب فان نفس الاهتزاز القسري اذا ما سلط على مهتزات مختلفة فان ترددات مختلفة ستثار بسبب اختلاف الاهتزازات الطبيعية لكل مهتز . ورغم ان الاهتزاز القسري هو الذي يطغي في معظم الهزازات الواقعة تحت تاثير قوة خارجية دورية . الا ان استجابة المهتز تتوقف على العلاقة بين التردد القسري المؤثر والتردد الطبيعي للمهتز . والعلاقة بين هذين الترددين تقودنا الى دراسة ظاهرة طبيعية مهمة جدا في الفيزياء هي ظاهرة الرنين . فلهذه الظاهرة تطبيقات واسعة ليس في مجال الاهتزازات الميكانيكية والصوت فحسب ، بل تتعداهما الى مجالات اخرى كالفيزياء النووية ، والبصريات ، ودوائر التيار المتناوب والكهرومغناطيسية .... وسنقتصر دراستنا للرنين في مجال الاهتزازات الميكانيكية . وهذه الدراسة يمكن التوسع فيها لفهم ظاهرة الرنين في المجالات الاخرى .

5.8 الرنين

عندما تؤثر قوة خارجية دورية ترددها الزاوي P على مهتز تردده الزاوي الطبيعي غير المضمحل W_0 فان الرنين يحدث : عندما يتساوى تردد القوة المثيرة P (القوة الخارجية) مع التردد الطبيعي للمهتز W_0 وتوخياً للدقة فان هذا التعريف للرنين غير دقيق تماماً الا تحت شروط نظرية بحتة لكون المهتز يعاني دائماً قوى احتكاكية وبذلك يجب اخذ عامل الاضمحلال بالاعتبار.

ومن أجل دراسة مفصلة للرنين سنحلل الحل الخاص للمعادلة (5·2) بطريقة وصفية للوصول الى التعريف العلمي المناسب للرنين .

ان الحل الخاص الذي يمثل الحالة المستقرة للاهتزاز القسري هو

$$x = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} \sin(pt + \phi) \qquad \ldots(5{\cdot}21)$$

حيث ان $\dfrac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}}$ يمثل سعة الاهتزاز القسري

وسنرمز له بالحرف A لذلك فان

$$A = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} \qquad ...(5.22)$$

وعليه تصبح المعادلة (5.21) كالآتي

$$x = A \sin (pt + \phi) \qquad ... (4.23)$$

يلاحظ من هذه المعادلة ان المهتز يهتز بتردد قسري P (وهو تردد القوة الخارجية الدورية) وليس بتردده الطبيعي ω_o . كما ان الحركة الناتجة هي حركة توافقية غير مضمحلة.

كما نلاحظ من المعادلة (5.22) ان سعة الاهتزاز A تعتمد على قيمة كل من التردد الطبيعي غير المضمحل ω_o والتردد القسري للقوة المؤثرة P في اعتبار ان f_o و r ثوابت فاذا اختلف التردد القسري P اختلافاً كبيراً عن التردد الطبيعي ω_o فان سعة الحركة الناتجة A تكون صغيرة وكلما اقترب تردد القوة الخارجية المؤثرة P من التردد الطبيعي غير المضمحل ω_o فان سعة الحركة الناتجة A تزداد. وتصل السعة A الى ذروتها عندما تتساوى قيمة التردد القسري P مع التردد الطبيعي ω_o . وتعرف هذه الظاهرة باسم الرنين. كما يعرف التردد القسري P الذي يقابل الذروة في سعة الاهتزاز القسري للمهتز باسم تردد الرنين. وتتوقف قيمة السعة A على معامل الاضمحلال r الذي يقيس مقدار قوة الاحتكاك التي يعانيها المهتز.

فاذا عوضنا في المعادلة (5.22) بقيمة $p = \omega_o$ عندما $r = 0$ فان قيمة السعة A تصبح لانهائية في الكبر. وهذه الحالة تقابل انعدام الاضمحلال تماماً أي عدم وجود قوة احتكاكية. وهذه الحالة لاتتحقق عملياً اذ لابد ان يكون دائماً هناك قوى احتكاكية، وبالتالي فان السعة تصل قيمة كبيرة ولكن محدودة. ولايجاد قيمة التردد الذي عنده تصبح قيمة السعة A في ذروتها يجب ان نفاضل السعة A بالنسبة لـ P ثم نساوي النتيجة للصفر، وبعدها نحسب قيمة P التي عندها نحصل على اقصى قيمة للسعة A فلدينا من المعادلة (5.22) العلاقة

$$A = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}}$$

نفرض ان

$$(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2 = y$$

نعوض فنحصل على ؛

$$A = \frac{f_o}{\sqrt{y}}$$

ان اقصى قيمة لـ A تحدث عندما تكون قيمة y في نهايتها الصغرى . ان قيمة y تكون في نهايتها الصغرى أو الكبرى عندما

$$\frac{dy}{dp} = 2 \times 2p\ (\omega^2_o - p^2) + 8r^2 p = 0$$

أو

$$p\ (p^2 - \omega^2_o + 2r^2) = 0$$

∴ من هذه المعادلة نجد قيم P اما تكون

$$p = 0$$

أو تكون

$$p = \sqrt{\omega^2_o - 2r^2}$$

الآن نفاضل ثانية فنجد ان

$$\frac{d^2y}{d^22} = -4\omega^2_o + 12p^2 + 8r^2$$

فعندما نعوض $p = 0$ نحصل على

$$\frac{d^2y}{d^2p} = -4(\omega^2_o + 2r^2 < 0$$

وعندما نعوض $p = \sqrt{\omega^2_o - 2r^2}$ نحصل على

$$\frac{d^2y}{dp^2} = 8\ (\omega^2_o - 2\ r^2) > 0$$

وعليه فان

$$p = \sqrt{\omega^2_o - 2r^2}$$

تعطي قيمة النهاية الصغرى لـ y .

وعندما تكون قيمة y في نهايتها الصغرى فان قيمة السعة A يجب ان تكون في نهايتها العظمى . وعليه فان قيمة التردد القسري P الذي يقود الى اقصى قيمة لسعة الاهتزاز A هو

$$p = p_r = \sqrt{\omega_o^2 - 2r^2}$$

$$p^2 = p_r^2 = \omega_0^2 - 2r^2 \qquad ...(5\cdot24)$$

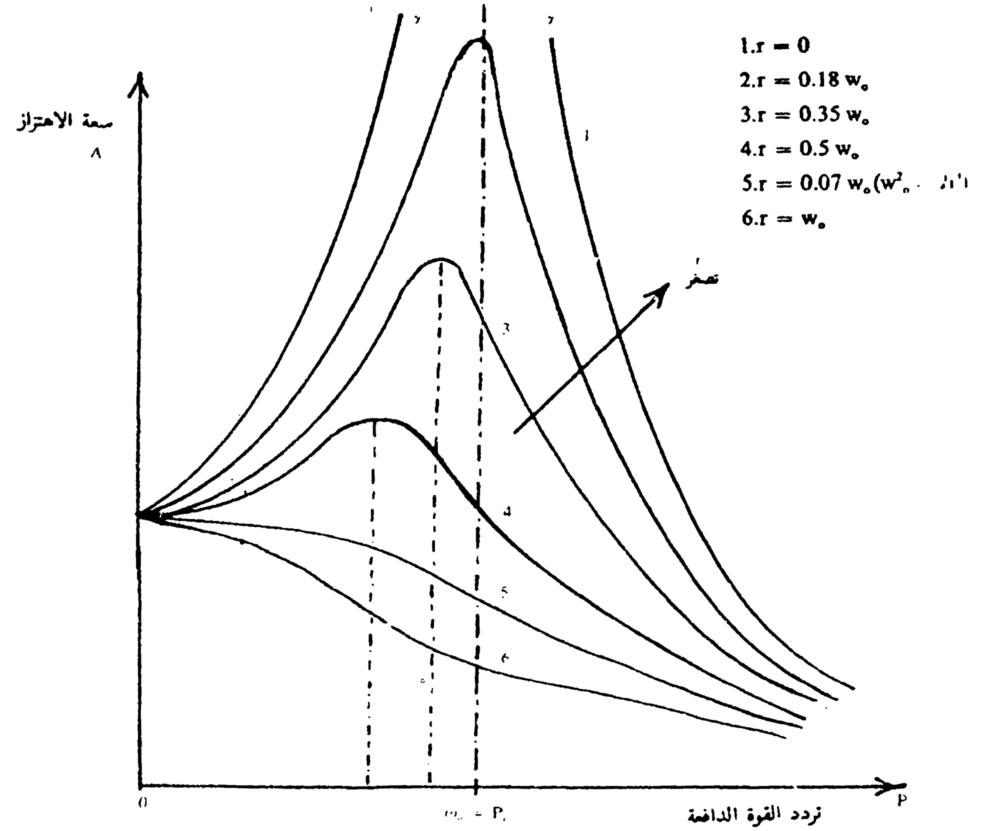
هذه المعادلة تعطي قيمة تردد الرنين p_r ويلاحظ ان هذا التردد يكون دائما اقل من قيمة التردد الطبيعي ω_o ويلاحظ انه اذا كانت قيمة معامل الاضمحلال $(\omega_o > r)$ وقيمة r اقل من 1 فأن قيمة r^2 تزداد صغراً وبذلك فأن $(\omega_o^2 > > r^2)$ وعندئذ يكون شرط حدوث الرنين هو $P = \omega_o$ مقبولاً بدرجة عالية من الدقة اما اذا كانت قيمة r كبيرة فأن قيمة $2r^2$ لايمكن اهمالها اطلاقا في المعادلة (5·24).

وباستخدام المعادلة (5·22) يمكن رسم العلاقة البيانية بين السعة A والتردد القسري P لمختلف القيم لمعامل الاضمحلال r وكما هو مبين في الشكل (5·4).

المنحنى (1) يوضح ان السعة تصبح مالانهاية في الكبر عندما $r = 0$ اي في حالة انعدام الاضمحلال وهذا يحدث عندما P تساوي تماماً ω_o وهذه الحالة النظرية لاتتحقق عملياً لان المهتز سيتحطم تماماً. اذا ماانعدم الاضمحلال واصبحت السعة مالانهاية. ولوفرضنا جدلاً ان المهتز لم يتحطم فان سعته الهائلة تعني حتماً تجاوزه لحدود المرونة وبالتالي عدم خضوع المهتز لقانون هوك. ولهذا السبب ذكرنا في بداية هذا البند ان التعريف الدقيق للرنين يجب ان يأخذ بالاعتبار عامل الاضمحلال.

توضح المنحنيات الثلاثة (2) و (3) و (4) اختلاف سعة الاهتزاز مع اختلاف قيم معامل الاضمحلال r فعندما تكون قيمة r واطئة فأن الرنين يحدث بالقرب من ω_o وعندما تزداد قيمة r فأن موقع الذروة (القمة) يزحف الى اليسار. وهذا يشير الى ان تردد الرنين لنفس المهتز يختلف باختلاف قيمة r. ويتحكم بقيمة تردد الرنين P المعادلة (5·24).

وهكذا نرى ان الرنين يحدث عملياً عندما يقترب التردد القسري P من التردد الطبيعي غير المضمحل للمهتز ω_o وتصل سعة الاهتزاز الى ذروتها. حيث في هذه الحالة تصل فعالية القوة المثيرة في امداد المهتز بالطاقة الى اقصاها. وفي هذه الحالة يقال ان القوة المؤثرة في حالة رنين مع المهتز. وللاغراض العملية يمكن اعتبار ان الرنين يحدث عند او بالقرب من ω_o



الشكل (5.4) يوضح ستة منحنيات لست درجات من الاضمحلال (1) انعدام الاضمحلال ، (2) ناقص الاضمحلال ، (6) حرج الاضمحلال . يلاحظ ان القيمة التي يحدث عندها الرنين تقترب اكثر نحو الخط العمودي المنقط كلما صغرت قيمة r.

ان المنحنى (5) في الشكل (5·4) الذي يقابل معامل الأضمحلال $r = 0{\cdot}707\,\omega_o$. (أو $\omega_o^2 = 2r^2$) . يمثل خط الأنتقال بين حالتين : فوق هذا الخط عندما تكون قيمة r صغر من $0{\cdot}707\omega_o$ فان المنحنيات الناتجة يكون لها نهايات عظمى وتحت هذا الخط عندما تكون قيمه r أكبر من $0{\cdot}707\omega_o$ فان المنحنيات الناتجة لايوجد فيها نهايات عظمى حقيقية . وعليه فان المنحنيات التي تقع فوق المنحنى (5) يقابل كل

منها حالة رنين ماعدا الحالة عندما $r=0$ والمنحنيات التي تقع تحت المنحنى (5) لا يـ...
ملاحظة اي اثر للرنين فيها. وهذا متوقع لأنه عند تعويض $\omega^2_o = 2r^2$ في المعا...
(5.24) فان تردد الرنين الناتج يساوي صفراً.

المنحنى (6) في الشكل (5.4) الذي يقابل معامل الأضمحلال $r = \omega_o$ ...
تحت خط الانتقال (5) لذلك فلا يلاحظ عليه أي ذروة مما يشير الى عدم حدوث ...
يذكر ومن هذا المنحنى يمكن ايجاد سعة الأهتزاز القسري في حالة الأضمحلال الزا...
ويكون التردد الطبيعي المضمحل ω أقل من التردد الطبيعي غير المضمحل ...
للمهتز.

ويلاحظ ان تردد الرنين P لايتساوى مع كل من التردد الطبيعي غير المضمحل ...
والتردد الطبيعي المضمحل ω ولكنه يكون اصغر من كليها. واذا كانت الـ...
الاحتكاكية التي يعانيها المهتز صغيرة فان الفروق تكون صغيرة. بحيث يمكن اعتبار تـ...
الرنين p مساوياً للتردد الطبيعي ω_o. ويكون الخطأ من الصغر بحيث يمكن اهماله.

5.9 سعة الاهتزاز عند الرنين

من الواضح من الشكل (5.4) ان أقصى قيمة للسعة A عند الرنين هي دالة لمعا...
الأضمحلال r والقيمة المضبوطة لسعة الاهتزاز في هذه الحالة يمكن ايجادها بتعويض تـ...
الرنين p المعطى في المعادلة (5.24) في العلاقة

$$A = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega^2_o - p^2)^2 + (2rp)^2}}$$

فعندئذ نحصل على اقصى قيمة للسعة A_{max} اي عند تردد الرنين فان :

$$A = \frac{f_o}{2r\sqrt{\omega^2_o - r^2}} \qquad \text{...... (5.22)}$$

يلاحظ من هذه العلاقة ان السعة في حالة الرنين تعتمد بشكل واضح على معامل
الاضمحلال r فأذا كانت قيمة هذا المعامل صغيرة أقل من 1 فان قيمة r^2 عندئذ يمكن
اهمالها بالمقارنة مع ω^2_o وبذلك تصبح العلاقة الاخيرة كالآتي :

$$A_{max} = \frac{f_o}{2r\omega_o}$$

لكن

$$2r = \frac{R}{m}$$

و

$$f_o = \frac{F_o}{m}$$

لذلك فان

$$A_{max} = \frac{F_o}{R\omega_o} \quad ...(5\cdot 26)$$

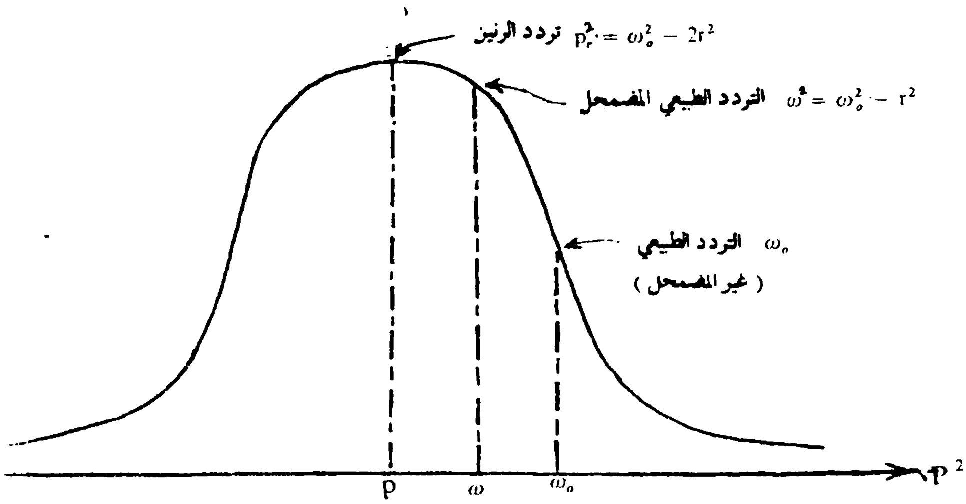
هذه العلاقة تشير الى أنه عندما تكون المقاومة الأحتكاكية التي يعانيها المهتز صغيرة، فان سعة الأهتزاز عند الرنين تتناسب عكسياً مع ثابت المقاومة R . وتصبح السعة كبيرة جداً عندما تقترب قيمة R من الصفر وهكذا نلاحظ أنه عندما يحدث الرنين فان سعة الأهتزازتزداد بدون حدود ويتحكم بها فقط مقدار المقاومة الأحتكاكية التي يعانيها المهتز. وهكذا نتوقع أنه كلما ازدادت المقاومة الأحتكاكية في مهتز، كلما قلت حدة الإهتزاز الرنيني الناجم عن استثارة خارجية معينة.

5·10 العلاقة بين تردد الرنين والترددات الطبيعية للمهتز

من المعادلتين (5·22) و (5·24) يمكن ايجاد السعه A بدلالة تردد الرنين فنجد أن

$$A = \frac{f_o}{\sqrt{(p^2 - p_r^2)^2 + 4r^2(\omega_o^2 - r^2)}} \quad ...(5\cdot 27)$$

ويمكن رسم العلاقة البيانية بين A و p^2 فنحصل على المنحنى البياني المبين في الشكل (5·5)



الشكل (5·5) يوضح كيفية تغير السعة مع مربع التردد القسري .

يلاحظ من هذا الشكل ان المنحنى متناظر حول تردد الرنين . وان قيم تردد الرنين p_r . والتردد الطبيعي المضمحل ω . والتردد الطبيعي غير المضمحل ω_o مختلفة اكبرها قيمة التردد الطبيعي ω_o يليه في القيمة ω ثم يليه p_r . وفي حالة انعدام الأضمحلال أي عندما تصبح قيمة $r = 0$ فان جميع هذه الترددات تتطابق في القيمة .

5·11 علاقة زاوية الطور بالتردد القسري وتردد الرنين

لقد وجدنا فيما سبق ان استجابة المهتز لتاثير القوة الدورية الدافعة يكون في ذروته في حالة الرنين ، حيث تصل سعة الأهتزاز الى نهايتها العظمى . ولكن قبل الرنين وبعد الرنين كيف يكون تأثير القوة الدورية على المهتز. لهذا الغرض يجب معرفة علاقة زاوية الطور ϕ بالترددالقسري p .

من الحل الخاص (5·14) الذي يمثل الحالة المستقرة لأهتزاز المهتز نلاحظ ان الأزاحة x تتخلف عن القوة الدورية المؤثرة $F_o \sin pt$ بزاوية فرق طور مقدارها ϕ . ويمكن ايجاد قيمة ϕ من الشكل (5·2) . حيث أن

$$\left.\begin{aligned} \phi &= \tan^{-1} \frac{-2rP}{\omega_o^2 - p^2}, \\ &= \sin^{-1} \frac{-2rp}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} \\ &= \cos^{-1} \frac{(\omega_o^2 - p^2)}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots(5{\cdot}28)$$

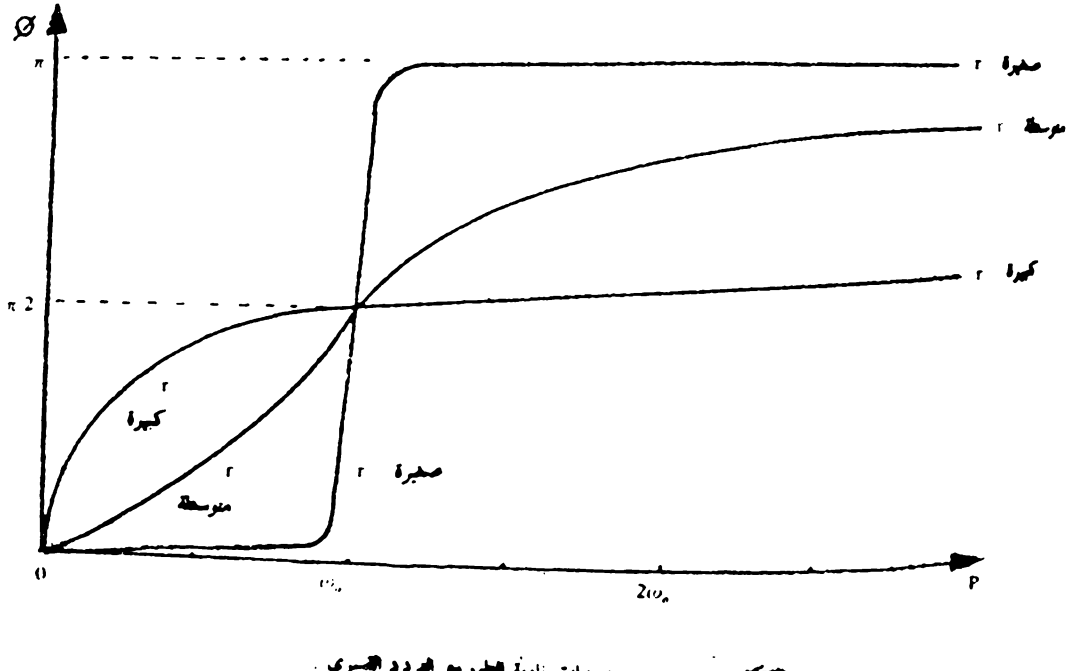
من هذه العلاقات ولقيمة معينة لمعامل الأضمحلال r يمكن ان نستخلص مايلي :-

1 - عندما $\omega_o > P$ فانقيمة ϕ تقع بين O و $\frac{\pi}{2}$

2 - عندما $\omega_o = P$ فان قيمة ϕ تساوي $\frac{\pi}{2}$

3 - عندما $\omega_o < p$ فان قيمة ϕ تقع بين $\frac{\pi}{2}$ و π

وهكذا نلاحظ ان زاوية فرق الطور ϕ بين القوة الدافعة المؤثرة على المهتز والازاحة الناتجة للمهتزتتغيرمع التردد القسري P لهذا القوة . ويمكن توضيح العلاقة بين ϕ و P بيانيا لمختلف درجات الاضمحلال r باستخدام اي واحدة من المعادلات (5·28) . وكما مبين في الشكل (5·6) .



الشكل (5·6) بعض منحنيات زاوية الطور مع التردد القسري .

من هذا الشكل نلاحظ انه عندما يكون معامل الاضمحلال r صغيراً ، فإن زاو... فرق الطور ϕ تصبح عملياً مساوية للصفر عندما يكون تردد القوة المؤثرة P صغيراً ، أي أقل من ω_0 ، وهذا يعني فيزياوياً ان ازاحة المهتز تكون بنفس الطور مع القوة الدافعة وعند تردد الرنين اي عندما تصبح $P = \omega_0$ فإن تغيراً مفاجئاً يحدث في ϕ فتقفز من الصفر الى π ، وتبقى قيمة ϕ مساوية π لكل قيم P التي تزيد عن ω_0 . وهذه النتيجة تعني فيزياوياً أنه عند الترددات العالية فإن المهتز الذي يعتز قسرياً بتأثير قوة خارجية دور... يتحرك بعكس اتجاه القوة التي تجبره على الحركة ، اي أن القوة و الازاحة تكونان خارج الطور بزاوية π .

وعندما تكون قيمة معامل الاضمحلال r متوسطة فإن زاوية فرق الطور ϕ تكون صغيرة نسبياً واقل من $\frac{\pi}{2}$ عندما يكون تردد القوة المؤثرة صغيراً ، أي أقل من ω_0 ولذلك فإن ازاحة المهتز تكون بنفس الطور تقريباً مع القوة المؤثرة . وعند تردد الرنين ، اي عندما تصبح $P = \omega_0$ فإن قيمة زاوية فرق الطور ϕ تصبح تقريباً $\frac{\pi}{2}$ ، وبذلك فإن الازاحة تكون خارج الطور بزاوية $\frac{\pi}{2}$ مع القوة المؤثرة في حالة رنين هذه القوة مع المهتز.

واذا كانت قيمة p كبيرة بالمقارنة مع ω_0 فإن زاوية فرق الطور تقترب من π وبذلك تكون حركة المهتز خارج طور القوة المؤثرة بزاوية π . أي أن اتجاه الازاحة يكون معاكساً لاتجاه القوة المؤثرة .

وعندما تكون قيمة معامل الاضمحلال r كبيرة نسبياً ، فإن زاوية فرق الطور ϕ تكون اقل من $\frac{\pi}{2}$ عندما تكون قيمة p أقل من ω_0 وبذلك تكون استجابة المهتز بدلالة الازاحة بنفس طور القوة المحركة تقريباً . وعند الرنين $(p = \omega_0)$ تزداد قيمة ϕ الى $\frac{\pi}{2}$ ، وعليه تكون استجابة المهتز خارج طور القوة المحركة بزاوية $\frac{\pi}{2}$. واخيراً عندما تصبح قيمة p اكبر من ω_0 فإن فرق الطور ϕ يصبح اكبر قليلاً من $\frac{\pi}{2}$ وتزداد قيمة ϕ كلما ازدادت قيمة p حتى تصبح p كبيرة جداً عندئذ تقترب قيمة ϕ من π وتصبح حركة المهتز خارج طور القوة المحركة بزاوية تقارب 180 درجة .

ان ما يجدر ملاحظته من الشكل (5.6) انه في حالة الرنين $(p = \omega_0)$ فإن قيمة $\phi = \frac{\pi}{2}$ عندما تكون قيمة r كبيرة نسبياً وفي هذه الحالة تكون سرعة المهتز بنفس طور القوة المحركة بينما ازاحة المهتز تكون متخلفة بالطور بزاوية

$\frac{\pi}{2}$ عن القوة المؤثرة . ويمكن التحقق من ذلك من مقارنة ازاحة المهتز x مــع سرعته v التــي يمكن ايجادها بمفاضلة المعادلة (5·14) بالنسبة للزمن . ويمكــن الاستفادة من هذه الظاهرة عند دراسة نقل الطاقة من المهتز واليه .

ومن المفيد ان نذكر ان دراستنا لغاية الآن تتعلق برنين الازاحة اي التردد الرنينــي الذي عنده تصبح ازاحة المهتز في ذروتها . وهناك الى جانب ذلك رنين السرعــة وهو الذي عنده تكون سعة السرعة في ذروتها . ويمكن الحصول على ذلك بسهولــة من ايجاد السرعة V بمفاضلة الحل الخاص (5·14) بالنسبة للزمن ومن ثم ايجــاد اقصى قيمة لسعة السرعة بنفس الطريقة السابقة .

5·12 امثلة عملية على الرنين

لقد وجدنا فيما سبق ان استجابة أي مهتز لتأثير قوة خارجية دورية يتوقف على العلاقة بين تردد القوة المؤثرة والتردد الطبيعي للمهتز . والمهتز قد يكون بسيطاً جداً فيكون له تردد طبيعي واحد أو قد يكون معقداً فيكون له ترددات طبيعية كثيرة . واذا ماأثرت قوة دورية لها تردد محدد على مهتز فانها تسبب اهتزازه بنفس ترددها . ومتى ماأقترب أو أنطبق تردد هذه القوة على أحد الترددات الطبيعية للمهتز فان الرنين يحدث ويصبح الأهــتزاز عنيفاً . وقد ينتج من دفعات صغيرة متوالية قد أحسن توقيتها على مهتز، اهتزازاً رنينيا خطيراً . بينما الأمر قد لايكون كذلك اذا ما استخدمت دفعات كبيرة متعاقبة لم يحسن توقيتها . ومن هذا يتضح أنه لكي يكون الرنين فعالاً يجب ان يتوفر شرطان أساسيان : اولاً يجب ان يكون تردد القوة المثيرة للأهتزاز مساوياً لتردد المهتز ، وثانياً ، يجب، ان يكون طور القوة المؤثرة متفقاً مع طور الحركة للمهتز.

ان اهمية الأهتزاز القسري تظهر عندما يحدث الرنين . وعلى الرغم من الفوائــد العملية العديدة لظاهرة الرنين الا أن هذه الظاهرة لاتخلو من الجوانب غير المرغوبة التي التي قد تؤدي الى كوارث . ولتجنب التأثيرات غير المرغوبة للرنين ، يجب معرفة التردد الطبيعي للمهتز واتخاذ الأجراءات المناسبة لتجنب الرنين .

وبالنظر لأهمية ظاهرة الرنين سنأتي على ذكر بعض الأمثلة العملية البسيطة والمتباينة لنقف على مدى أثر هذه الظاهرة :

(أ) رنيـن عمـود الهـواء : -

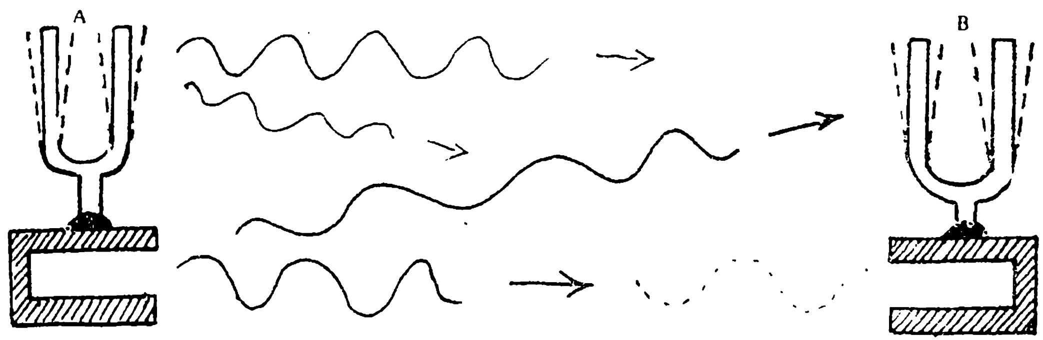
نمسك شوكة رنانة مهتزة فوق فوهة انبوبة زجاجية مملوءة جزئياً بالماء . ويحدث هذا اهتزازاً قسرياً في عمود الهواء فوق سطح الماء . ويمكن عن طريق ضبط مستوى سطح الماء ان نجعل التردد الطبيعي لعمود الهواء داخل الانبوبة مساوياً لتردد القوة المثيرة للاهتزاز - أي تردد الشوكة الرنانة - وعندما يحدث هذا فان فاعلية الشوكة المهتزة في امداد الهواء بالطاقة الاهتزازية تصل الى اقصاها . وعندئذ سنسمع رنيناً قوياً في الهواء الموجود بالانبوبة استجابة للصوت الصادر من الشوكة الرنانة . ان ما يحدث فعلاً في هذه الحالة هو ان الموجة الصوتية المنبعثة من الشوكة المهتزة تتحرك في العمود الهوائي داخل الانبوبة وعندما تصل نهاية العمود تنعكس لتعود الى موضع الشوكة المهتزة حيث تنعكس مرة أخرى بعد تقويتها الى الأسفل وهكذا فان الشوكة المهتزة سوف تقوي الموجة الصوتية المنعكسة باستمرار وبذلك يستمر الرنين . ولايقتصر حدوث الرنين في هذه الحالة على ارتفاع معين لعمود الهواء بل يحدث ايضا عند ارتفاعات مختلفة تساوي مضاعفات طول عمود الهواء الذي حصل فيه الرنين الاول .

(ب) رنيـن الأرجوحـة : -

عندما يسلط طفل دفعات دورية متتالية على ارجوحة ليهزها ، فانه يعلم أيضاً أنه يجب ان يعطي الدفعات على فترات زمنية دورية . وبذلك فان سعة الأهتزاز تزداد تدريجياً وعندما يتطابق تردد الدفعات التي يسلطها الطفل على الأرجوحة مع التردد الطبيعي للارجوحة فان الرنين يحدث وبذلك تكون سعة التأرجح كبيرة نسبياً . ويجب ان نتذكر أنه ليس المهم فقط أن يتساوى الترددين ليحدث الرنين بل يجب أيضاً أن تتفق الحركتان الأهتزازيتان بالطور ليكون كفاءة أنتقال الطاقة من أحد المهتزين الى الآخر في أعلى مداه .

(ج) رنيـن الشوكتيـن : -

نأخذ شوكتين رنانتين لهما نفس التردد ونثبتهما على صندوقين متماثلين موضوعين على مسافة من بعضهما وجوانبهم المفتوحة متقابلة كما في الشكل (5-7) . فعند طرق احدى الشوكتين A بمضرب من المطاط فانها سوف تبدأ بالأهتزاز ومنها ينتقل الأهتزاز الى الصندوق الذي يحملها وهذا بدوره يؤدي الى اهتزاز الهواء بداخله قسرياً فاذا كان طول عمود الهواء داخل الصندوق مساوياً لربع طول موجة الصوت الذي



الشكل (57) الشوكة B تستجيب لحركة الشوكة A عبر الهواء

تصدره الشوكة المهتزة فان رنيناً قوياً سوف يحدث مما يؤدي الى أنبعاث موجات صوتية قوية من فوهة الصندوق. هذه الموجات عندما تسقط على الشوكة الثانية B سوف تحفزها على الأهتزاز.

ان اهتزاز الشوكة الثانية بدون طرقها أولمسها سببه هوان الموجات الصوتية الصادرة من A هي عبارة عن سلسلة من نبضات مؤلفة من تضاغطات وتخلخلات بعد انتقالها في الهواء تصل B . فجزء منها يضرب الشوكة B مباشرة فيثير الأهتزاز فيها وجزء يسقط على الصندوق B فيسبب اهتزاز الهواء بداخله مما يؤدي الى اهتزاز الصندوق قسرياً وهذا الأهتزاز القسري ينتقل الى الشوكة B فيشتد اهتزازها. ولما كان تردد الموجات الساقطة مساوياً لتردد الشوكة B. فان هذه الشوكة سوف تهتز بنفس ترددها نتيجة الرنين. ويمكن توضيح ذلك باسكات الشوكة الأولى بمسكها باليد. والأصغاء للشوكة الثانية التي تستمر في بعث الصوت.

(د) رنيــن الجســور المعلقــة :

الجسر المعلق هوعبارة عن مهتزمعقد من السهل هزه بسبب صغرعوامل الأضمحلال فيه نوعا ما .

فاذا سار طابور من الجند على جسر معلق بخطوات منتظمة. فان ضربات الأقدام المتتالية التي تدك الجسر بنفس الطور وعلى فترات زمنية منتظمة تعمل عمل قوة دورية مؤثرة في الجسر. فاذا ما أنطبق وقع سير الجند مع أحد الترددات الطبيعية للجسر فان رنيناً عنيفاً يحدث وقد تكون سعة الأهتزاز في هذه الحالة من الكبر ما يؤدي الى انهيار الجسر. وقد حدث فعلاً ان كان الرنين سببا في تحطيم جسور عديدة. ولهذا السبب يؤمر الجند حتى وان كانوا جماعة صغيرة بالتخلي عن نظام سيرهم العسكري عند عبورهم الجسر تلافيا للكوارث .

وهنالك أمثلة عديدة على المآسي التي أحدثها الرنين في الجسور المعلقة. لقد تحطم جسر برتون المعلق فوق نهر ايرويل بمدينة مانجستر البريطانية تحت وقع اقدام طابور عسكري مؤلف من ستين رجلاً فقط. الا أن أكبر مأساة وقعت عام ١٨٥٠ حين دمرت كتيبة من المشاة الفرنسيين قوامها حوالي خمسمائة رجل جسر أنجير المعلق. ولقد هوى الجنود في واد سحيق وقتل منهم ٢٢٦. وقبل سنين قليلة فقط أنهار جسر معلق في

حدائق القناطر الخيرية في مصر بسبب تأرجح بعض الأفراد فوقه بتردد أنطبق على أحد تردداته الطبيعية مما ادى الى تحطيمه تماماً .

ولعل من أشهر الأهتزازات الرنينية هوماحدث لجسر مضايق تاكوما بولاية واشنطن الأمريكية الذي يعد الجسر الثالث في ترتيبه العالمي من حيث الطول . هذا الأهتزاز ادى الى انهياره ولم يمض على افتتاحه سوى اربعة أشهر فقط . ولم يكن سبب الأنهيار مفهوماً في حينه (١٩٤٠) . لأن الأهتزازات التي تسببها الرياح على الجسور المعلقة لم تكن محط اهتمام المصممين . لقد تعرض جسر تاكوما لرياح مطردة جعلته يتذبذب قسرياً ، وعندما طابق تردد القوة المتذبذبة التي أحدثتها الريح المنتظمة مع أحد الترددات الطبيعية لهذا الجسر، تسبب ذلك في زيادة سعة اهتزازه فتحطم . لقد جذبت كارثة جسر تاكوما قدراً كبيراً من الأهتمام لتجنب تكرر وقوعها . وبعد دراسات وبحوث مستفيضة أعيد بناء الجسر كما أعيد تصميم كثير من الجسور حتى تكون مستقرة من وجهة نظر ديناميك الهواء .

امثلة محلولة

مثـــال (5-1)

اثبت ان السعة لمهتزيهتزقسرياً بوجود الاضمحلال تكون أقصى مايمكن عندما يكون تردد الرنين p_r هو

$$p_r = \sqrt{\omega_o^2 - 2r^2}$$

الحـــل :

لقد وجدنا ان قيمة السعة من المعادلة (5.21) هي

$$\frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}}$$

وتبلغ قيمتها القصوى عندمـا يكون المقـــام (اومربع المقام) أقـــل مـايمكـــن اي ان

$$(\omega_o^2 - p^2)^2 + 4r^2p^2 = \omega_o^4 - 2\omega_0^2p^2 + p^4 + 4r^2p^2$$
$$= p^4 - 2(\omega_o^2 - 2r^2)p^2 + \omega_o^4$$

الأن نضيف ونطرح المقدار $(\omega_o^2 - 2r^2)^2$ فينتج ان

$$(\omega_o^2 - p^2)^2 + 4r^2p^2 = p^4 - 2(\omega_o^2 - 2r^2)p^2 + (\omega_o^2 - 2r^2)^2 + \omega_o^4 - (\omega_o^2 - 2r^2)^2$$
$$= [p^2 - (\omega_0^2 - 2r^2)]^2 + \omega_0^4 - \omega_0^4 + 4\omega_0^2r^2 - 4r^4$$

$$= [p^2 - (\omega_0^2 - 2r^2)]^2 + 4r^2(\omega_0^2 - r^2)$$

ويكون هذا المقدار اقل مايمكن عندما يساوي الحد الاول صفراً .
اي عندما يكون

$$[P^2 - (\omega_0^2 - 2r^2)]^2 = 0$$

ومنها نجد ان

$$p_r^2 = \omega_o^2 - 2r^2$$

وعندئذ تكون قيمة مربع المقام هي $4r^2(\omega_o^2 - r^2)$ وينتج ان اقصى قيمة للسعة هي

$$\frac{f_o}{2r\sqrt{\omega_o^2 - r^2}}$$

مثـــال (5·2)

لديك مهتز مكون من جسيم كتلته m متصل بنابض حلزوني ثابته k ويتعرض اثناء اهتزازه لقوة معيقة تتناسب طرديا مع سرعته الآنية . فأذا سلطت قوة خارجية دورية F(t) مقدارها

$$F(t) = F_o \cos pt$$

(أ) اكتب معادلة الحركة .

(ب) جد الحل العام لهذه المعادلة .

(جـ) جد الحل العام في حالة انعدام المقاومة وتساوي التردد القسري مع التردد الطبيعي .

الحـــل :

ان المعادلة التفاضلية للحركة هي

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + kx = F_o \cos pt$$

وبالقسمة على m نجد ان المعادلة تصبح كالاتي

$$\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega_o^2 x = f_o \cos pt$$

حيث ان $2r = \frac{R}{m}$ ، $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$ ، $f_o = \frac{F_o}{m}$

وقد وجدنا الحل العام لهذه الحالة في البند (5·5)

اما الحل العام في حالة انعدام المقاومة (اي عندما R = 0) فيجب ان ينحصر في حـــل المعادلة الآتية :

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = f_o \cos pt \qquad \ldots(1)$$

والحل العام لهذه المعادلة ينتج من اضافة الحل الخاص للمعادلة (1) الى الحـــل العام للمعادلة

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0 \qquad \ldots(2)$$

ان الحل العام للمعادلة (2) هو

$$x = A \sin \omega_o t + B \cos \omega_o t \qquad \ldots(3)$$

ولايجاد الحـل الخاص للمعادلة (1) سنفرض ان حـلاً خاصا عـلى الصـورة

$$x = C\sin\omega_o t + D\cos\omega_o t \qquad \ldots(4)$$

وبتعويض هذا الحل في المعادلة (1) نجد ان الطرف الايسر يساوي صفر وعليه لايكون هذا الحل صحيحاً . لذلك نقترح ان يكون الحل كالاتي :

$$x = t\,(C\sin\omega_o t + D\cos\omega_o t) \qquad \ldots(5)$$

وبتعويض هذا الحل في المعادلة (1) يجب ان نفاضل المعادلة (5) بالنسبة للزمن فنحصل على

$$\dot{x} = t\,(\omega_o C\cos\omega_o t - \omega_o D\sin\omega_o t) + (C\sin\omega_o t + D\cos\omega_o t) \qquad \ldots(6)$$

$$\ddot{x} = t\,(-\omega_o^2 C\sin\omega_o t - \omega_o^2 D\cos\omega_o t) + (\omega_o C\cos\omega_o t - \omega_o D\sin\omega_o t)$$
$$+ (\omega_o C\cos\omega_o t - \omega_o D\sin\omega_o t)$$

$$\therefore \ddot{x} = t\,(-\omega_o^2 C\sin\omega_o t - \omega_o^2 D\cos\omega_o t) + 2(\omega_o C\cos\omega_o t - \omega_o D\sin\omega_o t) \qquad \ldots(7)$$

نعوض (5) و (7) في (1) فنحصل على

$$t\,(-\omega_o^2 C\sin\omega_o t - \omega_o^2 D\cos\omega_o t) + 2(\omega_o C\cos\omega_o t - \omega_o D\sin\omega_o t)$$
$$+ \omega_o^2 (C\sin\omega_o t + D\cos\omega_o t)\,t = f_o\cos pt$$

وبعد الاختصار نجد ان

$$2\omega_o C\cos\omega_o t - 2\omega_o D\sin\omega_o t = f_o\cos pt$$

واذا فرضنا ان التردد القسري مساوياً للتردد الطبيعي للمهتز اي ان $\omega_o = p$ نحصل على

$$2\omega_o C\cos\omega_o t - 2\omega_o D\sin\omega_o t = f_o\cos\omega_o t$$

من هذه المعادلة نحصل على

$$2\omega_o C = f_o$$

$$-2\omega_o D = 0$$

ومن ذلك نجد ان قيمة D = صفر وان قيمة $C = \dfrac{f_o}{2\omega_o}$

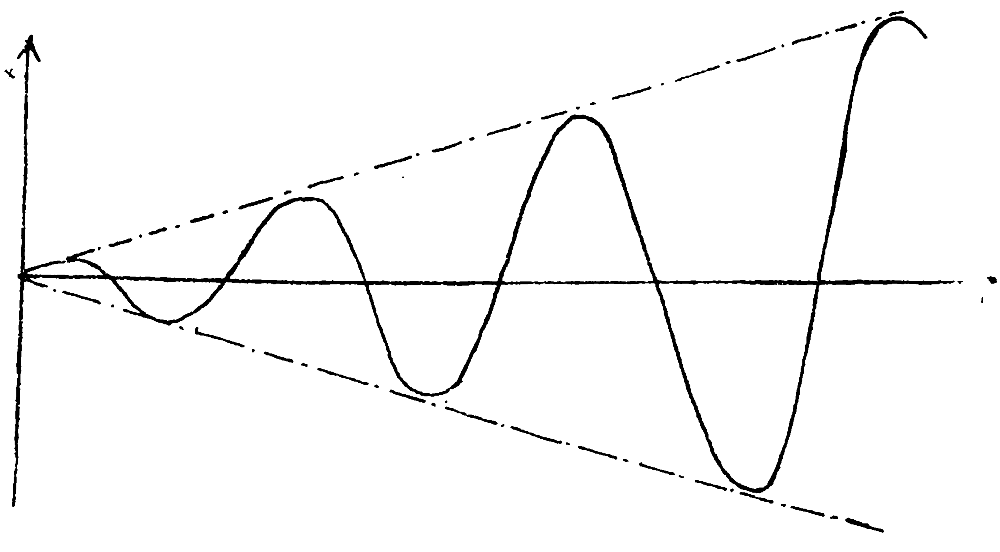
وبذلك يكون الحل الخاص المطلوب للمعادلة (5) هو

$$x = \left(\frac{f_o}{2\omega_o}\right) t\sin\omega_o t$$

وبذلك ينتج الحل العام للمعادلة (1) هو

$$x = A \sin \omega_o t + B \cos \omega_o t + \left(\frac{f_o}{2\omega_o} \right) t \sin \omega_o t \qquad \ldots(8)$$

ويمكن ايجاد قيم الثابتين A و B من معرفة الشروط الابتدائية للحركة . ان الحدين الاول والثاني يتغيران دورياً مع الزمن ولايتناقصان مع الزمن t اما الحد الاخير فأن قيمته تزداد مع الزمن t هكذا تكبر الازاحة مع استمرار الاهتزاز القسري (بدون اضمحلال). حتى تصل الازاحة حدا من الكبر يؤدي الى تحطم المهتز. ويمكن توضيح كيفية زيادة الازاحة مع الزمن كما في الشكل ادناه



يلاحظ من هذا الشكل ان سعة الاهتزاز تكبر مع الزمن . في حالة انعدام الاضمحلال وتساوي التردد القسري مع التردد الطبيعي للمهتز .

يلاحظ من هذا الشكل ان سعة الاهتزاز تكبر مع الزمن في حالة انعدام الاضمحلال وتساوي التردد القسري مع التردد الطبيعي للمهتز .

أسئلة

5-1 ماهي الاهتزازات القسرية ؟ اذكر امثلة عملية على ذلك

5-2 ميز بين الاهتزاز القسري لمهتز والاهتزاز الحر لذلك المهتز .

5-2 ماهو تاثير القوة الدورية في توليد اهتزازات في جسم مرن ؟ اذكر شروط تول، اهتزازات قسرية .

5-3 لماذا تزداد شدة الصوت بشكل ملحوظ عندما توضع قاعدة الشوكة الرنانة المهتزة على سطح منضدة ؟

5-4 ماهو الرنين ؟ اذكر امثلة توضح اجابتك

5-5 لماذا يحدث الرنين بين شوكتين عندما يكون ترددهما متساويا تماما بينما في حالة عمود من الهواء يمكن ان يحدث به الرنين دون ان يكون تردده مساويا تماماً لتردد الشوكة الرنانة المثيرة للاهتزاز ؟

5-6 ناقش دور اللوح المصوت الذي يربط به سلك مهتز بوساطة دبوسين مثبتين عليه

5-7 اشرح بوضوح معنى كل مما يلي ؟

(أ) الاهتزاز الحر بدون اضمحلال

(ب) الاهتزاز الحر المضمحل

(ج) الاهتزاز القسري

(د) الرنين

اعط امثلة على ذلك

5-8 ميز بين الاهتزازات الحرة والقسرية واذكر الشروط الضرورية لتوليد الاهتزازات القسرية .

5-9 هل يؤثر الاضمحلال على الرنين ؟ كيف

5-10 عندما تكون عجلات السيارة غير متزنة قد تهتز السيارة بشدة عند سرعة معينة اشرح لماذا .

5-11 في مطلع تموز من عام ١٩٤٠ انتهت الاعمال الانشائية وافتتح للمرور جسر تاكوما ناروز بولاية واشنطن . وقد اعتبر الثالث في ترتيبه العالمي من حيث طوله ، وبعد اربعة اشهر من افتتاحه تعرض لعاصفة متوسطة القوة جعلته يتذبذب حتى تحطم جزؤه الرئيسي وانفصل عن حوامله وانهار في الماء .
كيف تفسر حدوث هذه الكارثة .

5-10 اعط بعض الامثلة لظواهـــر شائعـة يلعب فيهـــا الرنيـن دورا هـامـــا .

5-11 عندما يسكب ماء في قنينة طويلة ، يلاحظ ان تردد الصوت المنبعث يزداد كلما ارتفع منسوب الماء في القنينة ـ كيف تفسر ذلك .

5-14 اذكر بعض الامثلة حـول الدور الذي يلعبه الرنين فـــي الآلآت الموسيقيـة .

5-15 لماذا يؤمر الجنود بالتخلي عن نظام سيرهـــم العسكري عند عبورهم الجسور المعلقة ؟

5-16 ماهي العلاقة بين :

(أ) التردد الطبيعي

(ب) التردد الطبيعي المضمحل

(ج) تردد الرنين

رتب قيـــم هذه الترددات تصاعـديا (او تنازليـا) . واذكـــر السبـــب .

5-17 يقال ان المغني الايطالي الراحل (تينور انريكوكوريوسو) قد تمكن من تحطيم قدح بلوري بأن كان يغني نغمة معينة امام القدح ، دون ان يلامسه . هل يمكن ان يكون ذلك صحيحا ؟ اشرح .

5-18 ماهي الاهتزازات العابرة في المهتز ؟ وهل لهذه الاهتزازات اهمية خاصة في بعض الالات الموسيقية ؟ وضح ذلك .

مسائل

5-1 اشتق معادلة الاهتزاز القسري بوجود الاضمحلال وجد الحل العام . وعلى ضوء ذلك :

(أ) اشرح ظاهرة الرنين

(ب) ناقش تاثير الاضمحلال على حدة الرنين

5-2 معامل الصلابة لنابض حلزوني رأسي هو 50 نيوتن لكل متر . علقت كتلة مقدارها 3 كلغم من نهاية النابض وكانت المجموعة في حالة توازن . عند اللحظة الزمنية $t = 0$ طبقت القوة $F(t) = 24 \sin 4t$ بالنيوتن . باهمال الاضمحلال اوجد موضع الكتلة عند اي لحظة زمنية

5-3 اعد حل المسألة السابقة على اساس ان القوة المطبقة في الزمن $t \geq 0$ هي $F(t) = 30 \cos 5t$ نيوتن .

5-4 اثبت ان الحل العام لمهتز مضمحل يتعرض لقوة دورية مقدارها $F(t) = F_o \sin pt$ هو

$$x = Ae^{-rt}\sin(\omega t + \theta) + \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} \sin(pt + \phi)$$

وضح معنى كل رمز مستخدم في هذه المعادلة ، وبين ماهي دلالة الحدين في هذا الحل .

5-5 جسيم معلق بطرف نابض حلزوني ويهتز اهتزازاً طبيعياً بتردد زاوي مقداره ω_o بدون اضمحلال . اذا سلطت عليه قوة خارجية دورية ترددها القسري مساوياً للتردد الطبيعي للمهتز . فما هو تاثير ذلك على المهتز ؟ حلل ذلك رياضياً وبيانياً .

5-6 مهتز يهتز بحركة توافقية بسيطة مضمحلة . طبقت عليه قوة خارجية دورية مقدارها $F_o \sin pt$ اثبت ان معادلة حركة هذا المهتز هي

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + R\frac{dx}{dt} + kx = F_o \sin pt$$

جد الحل العام لهذه المعادلة واذكر شرط الحصول على الرنين .

5-7 جد معادلة الاهتزازات القسرية بوجود الاضمحلال ، موضحاً تاثير الفرق بين تردد القوة الخارجية الدورية والتردد الطبيعي للجسيم المهتز . وناقش تاثير الاضمحلال على وضوح ظاهرة الرنين .

5 - 8 من المعلومات الاولية اشتــق معادلة الاهتزاز القسري بالشكل

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2r\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos pt$$

ثم ناقش رياضيا شرط الحصول على الرنين

5 - 9 برهن انه في حالة انعدام الاضمحلال $(r = o)$ فان الرنين يحدث عندما يكون التردد الزاوي الطبيعي ω_o للمهتز مساويا للتردد الزاوي p للقوة الخارجية المحركة . ثم ناقش هل تتحقق هذه الحالة عمليا ؟

5 - 10 ان حدة الرنين تعني ان سعة الاهتزاز تكون في نهايتها العظمى عند تردد محدد واي تغير في التردد سواء بالزيادة او النقصان يؤدي الى هبوط قيمة السعة بشكل حاد .

اشرح بوضوح العوامل التي تؤثر على حدة الرنين . وعزز اجاباتك بالتحليــــل الرياضي .

5 - 11 اذا كان الحل الخاص للازاحة في حالة الاهتزاز القسري هو

$$y = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} \operatorname{Sin}(pt - \theta)$$

برهن ان اقصى قيمة لسرعة المهتز هي

$$\frac{f_0 P}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}}$$

وتحدث في لحظة عبور المهتز لنقطة التوازن

5 - 12 برهن ان الطاقة الحركية للمهتز الواقع تحت تاثير اهتزاز قسري p في لحظة عبور المهتز لنقطة التوازن هي

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{m f_0^2 P^2}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}$$

5 - 13 باستخدام المعادلة

$$\tan \theta = \frac{2rp}{\omega_0^2 - p^2}$$

ناقش ووضح بيانيا كيف تتغير زاوية الطور θ مع قيمة التردد القسري P وبين كيف تؤثر قيمة r على هذه العلاقة البيانية .

14 - 5 برهن ان سعة الاهتزاز القسري

$$\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}}$$

تكون في نهايتها العظمى عندما يكون المقام في نهايته الصغرى . وهذا يتحقق عندما $p^2 = \omega_0^2 - 2r^2$.

الفصل السادس

الموجات المستعرضة في بعد واحد

6·1 المقدمة

لقد أقتصرت دراستنا المفصلة لحد الآن على الحركة الاهتزازية للجسيم المنفـرد. وقد كانت هذه الدراسة ضرورية وخطوة أساسية نحو فهم الحركة الموجية. فالحركة الموجية هي بالأساس حركة اهتزازية لوسط مادي يتألف من عدد كبير جداً من الجسيمات وعند دراسة الحركة الموجية نتعامل مع مجمل سلوك الوسط المادي وليس مع سلوك الجسيمات المنفردة. والخواص الأساسية للوسـط المـادي المسؤولـة عـن حـدوث وانتقـال الحركة الموجية الميكانيكية هما خاصيتا المرونة والقصور الذاتي المتمثل بالكثافة، ويفترض في مثل هذا الوسط ان يكون قابلاً للتشكيل وان يكون الأحتكاك الداخلي مهملاً.

وكما ذكرنا في الفصل الأول أنه اذا ماأزيح جزء صغير من الوسط المادي المرن من موضع توازنه الطبيعي وترك حراً فان ذلك الجزء يهتز حول موضع توازنه، ونتيجة لخواص الوسط ينتقل نمط هذا الأهتزاز (الأضطراب) من جزء الى آخر، وبالتالي يتقدم هذا الأضطراب أو هذه الموجة في الوسط المادي بسرعة ثابتة تتوقف على طبيعة ذلك الوسط من حيث مرونته وكثافته. وطبيعي ان مايتقدم هو شكل من الأضطراب يدعى بالموجة ولايرافق أنتقال هذه الموجة أي أنتقال للوسط سواء جزء منه أو ككل. وحقيقة مايحدث هو أن الأجزاء المختلفة من الوسط تتحرك حركات اهتزازية موضعية حول نقاط توازنها بأطوار مختلفة، وهذه الحركات قد تكون الى الأعلى والى الأسفل فتدعى الموجة الناشئة بالموجة المستعرضة كما في حالة الوتر المهتز عرضياً. أوقد تكون الحركة الى الأمام والى الخلف فتدعى الموجة الناشئة بالموجة الطولية كما في حالة اهتزاز جزيئات الهواء التي تسببها الشوكة الرنانة المهتزة. وسواء كانت الموجة مستعرضة أو طولية فانها وسيلة لأنتقال الطاقة.

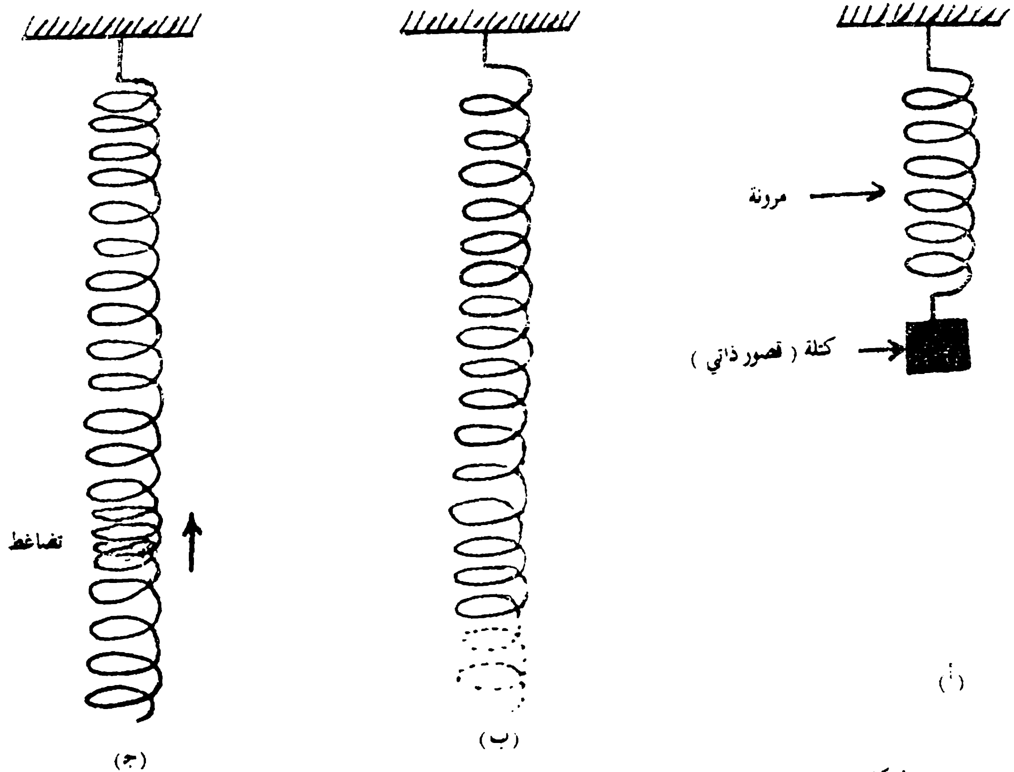
وبعد هذا الشرح المبسط لابد من التمييز بين الحركتين الأهتزازية والموجية بشكل أكثر وضوحاً.

6.2 الحركة الاهتزازية والحركة الموجية

لقد كانت دراستنا للحركة الأهتزازية في الفصول السابقة مبنية على نموذج لمهتز بسيط يتألف من كتلة صغيرة متصلة بطرف نابض حلزوني قصير مهمل الكتلة كما هو مبين في الشكل – 6.1 أ – وأهم مايميز هذا المهتز هو ان خاصية المرونة التي تكمن في النابض الحلزوني منفصلة تماماً عن خاصية القصور الذاتي المتمثلة في الكتلة. فاذا ماأزيحت الكتلة قليلاً عن موضع توازنها الاعتيادي (ضمن حدود المرونة) وتركت حرة فانها ستهتز بحركة توافقية بسيطة تدعى بالحركة الأهتزازية، وهذه الحركة الأهتزازية ليست حركة موجية لأنه لايصاحبها أنتقال للطاقة عبر النابض الحلزوني بسبب قصر طوله وصغر كتلته بالمقارنة مع كتلة الجسيم المتصلة بطرفه. أما اذا كان النابض الحلزوني طويلاً جداً كما هو مبين في الشكل – 6.1 ب، جـ – فانه عندئذ يمثل وسطاً مادياً في بعد واحد تتوزع على امتداده خاصيتا المرونة والقصور الذاتي بشكل خاص.

فاذا ماأعطي أحد طرفي النابض حركة اهتزازية على امتداد محوره فان اضطراباً طولياً سيتولد. وهذا الأضطراب (او الموجة) يتقدم عبر النابض الحلزوني كحركة موجية بسرعة ثابتة تعتمد على خاصيتي المرونة والكثافة لمادة النابض الحلزوني.

من هذا يتضح انه اذا ماكان طول النابض الحلزوني قصيرا (اقل من ربع طول الموجة) فأن تأثير اي حركة دافعة تحدث في احد طرفيه تنتقل آنياً لجميع اجزائه بسبب قصر طوله وصغر قصورة الذاتي. وهكذا اذا مااهتزت الكتلة المتصلة بطرفه ذهاباً واياباً على امتداد محوره فأنه يستجيب كله كقطعة واحدة وتكون جميع اجزائه في نفس الطور اي في حالة واحدة من التضاغط اوالتخلخل اوالتعادل. ونتيجة للتبادل المتناوب بين الطاقة الكامنة المخزونة في النابض والطاقة الحركية التي تمتلكها الكتلة المتحركة فأن الاهتزاز يستمر دون ان يرافقه انتقال للطاقة. ومثل هذه الحركة تدعى بالحركة الاهتزازية. اما اذا كان طول النابض الحلزوني كبيراً فأن تأثير طوله وبالتالي قصوره الذاتي لايمكن اهماله، حيث ان اي دفعة تعطى لاحد طرفيه تولد تشوها موضعيا على شكل انضغاط وهذا الانضغاط لاينتقل آنياً الى جميع اجزائه، بل ان الجزء المعرض مباشرة للدفعة يستجيب اولا ثم ينتقل التأثير للجزء الذي يليه وهكذا يتقدم الاضطراب اوالموجة من جزء لاخر على



الشكل (6-11) يبين ان خاصيتي المرونة والقصور الذاتي منفصلتان تماماً كما في (أ) وموزعتان بانتظام على امتداد النابض الحلزوني كما في (ب) و (ج)

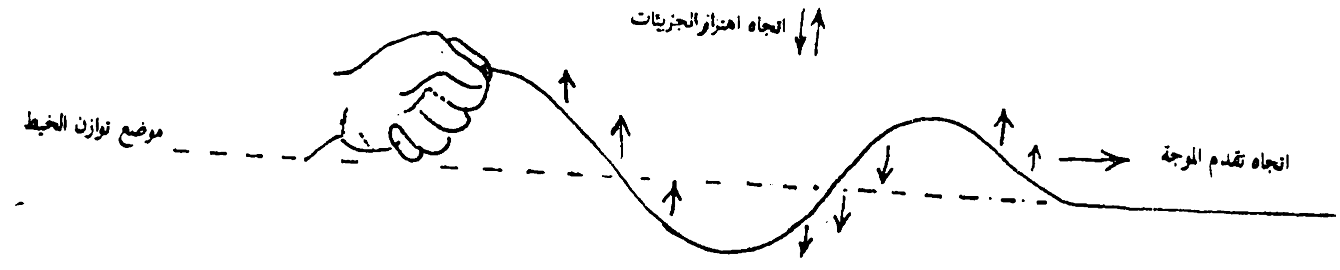
امتداد النابض بسرعة محددة تدعى بسرعة الموجة . وهكذا تنتقل الدفعة او بالاحرى الطاقة المصاحبة للدفعة من احد طرفي النابض الى الطرف الاخر بوساطة الحركة الموجيه وتتكون الطاقة في الموجة المتقدمة على النابض الحلزوني من طاقة كامنة وطاقة حركية . ولكن انتقال الطاقة يتم عن طريق تبادل الطاقة بين الاجزاء المتجاورة للنابض .

مما تقدم يتضح ان الحركة الاهتزازية تحدث عادة في اي مهتز تكون فيه خاصيتا المرونة والقصور الذاتي شبه منفصلتين عن بعضهما ، اي لاتقع الخاصيتان في موضع واحد على المهتز . وفي مثل هذه الحالة لايمكن استحداث موجات ميكانيكية في جسم المهتز لان التبادل بين شكلي الطاقة الكامنة والحركية يتم موضعيا ضمن حدود المهتز ذاته اما عندما تكون خاصيتا المرونة والقصور الذاتي مترابطتين معاً وموزعتين بطريقة خاصه على اجزاء الوسط المادي الممتد فعندئذ يمكن استحداث موجات ميكانيكية فيه عن طريق تبادل الطاقة بين الاجزاء المتعاقبة لذلك الوسط وبذلك تنتقل الطاقة من جزء الى آخر بوساطة الحركة الموجية التي يكون سببها عادة وجود مصدر مهتز . وعلى هذا الاساس لايمكن انتقال الطاقة الاهتزازية الى مسافات بعيدة عن المهتز مالم يكن المهتز ذاته متصلا بوسط مادي مرن ممتد . من ذلك نستنتج ان الحركة الاهتزازية قد تشتمل او قد لاتشتمل على حركة موجية .

6.3 الحركة الموجية المستعرضة في بعد واحد

تعد الحركة الموجية المستعرضة أحد الاصناف المألوفة للحركة الموجية الميكانيكية . حيث في مثل هذه الموجة تهتز جزيئات الوسط باتجاه عمودي على اتجاه انتقال الموجة فمثلاً ، اذا ما اهتز أحد طرفي خيط طويل مشدود افقياً الى الاعلى والى الاسفل . فان موجة عرضية تنتقل فيه . اذا ان الاضطراب المتولد يتقدم على طول الخيط ولكن الجزيئات المكونة للخيط تهتز عمودياً على اتجاه انتقال الاضطرب أو الموجة كما هو مبين في الشكل (6.2) وتوصف مثل هذه الموجة بانها موجة مستعرضة في بعد واحد .

لأن الطاقة تنتقل في بعد واحد هو امتداد طول الخيط والموجات المستعرضة قد تكون في بعدين كما هو الحال في الموجات السطحية الناتجة من الاهتزاز المستعرض لغشاء رقيق مشدود . اوكما يحدث تقريباً في التموجات المائية على سطح الماء حيث تنتقل الطاقة في بعدين .



الشكل (6:2) الموجة المستعرضة تتقدم على امتداد الخيط بينما الجزيئات المكونة للخيط تهتز حول مواضع توازنها في اتجاه عمودي على اتجاه انتقال الموجة .

وبالنظر للاهمية النظرية للحركة الموجية المستعرضة في بعد واحد كوسيلة لفهم النظرية الكهرومغناطيسية والميكانيك الكم وللاهمية التطبيقية في عمل الأجهزة الوترية ، كالالات الموسيقية مثل القيثارة والكمان وغيرها . ولما استقطبته الاوتار المهتزة من اهتمامات تاريخية منذ عصر فيثاغورس . لذلك سينصرف اهتمامنا في هذا الفصل الى دراسة الحركة الموجية المستعرضة في بعد واحد . كالموجة المستعرضة في وتر مهتز . ومن المناسب ان نوضح هنا ان المقصود بالوتر هواي سلك أوخيط أوحبل منتظم المقطع وله قطر متناه في الصغر بالمقارنة مع طوله . ويفترض في مثل هذا الوتر ان يكون مرناً قابلاً للتشكيل والاحتكاك الداخلي بين جزيئاته مهمول . وفي الواقع فان الوتر يمثل ابسط وسط مادي لانتقال الموجة .

6.4 معادلة الحركة الموجية المستعرضة في وتر مهتز

لنفرض لدينا سلكاً مرناً لانهائي الطول وذلك لتلافي حدوث انعكاسات في أحد طرفيه . ونفرض ان الوتر في وضعه الابتدائي في حالة سكون (اي حالة توازن) يقع على امتداد المحور السيني x . ونقيس الاضطراب الذي يسببه مرور موجة مستعرضة من خلال الازاحة المستعرضة y . ونفرض ان السلك تحت قوة شد منتظم مقداره F وان الكثافة الخطية اي كتلة وحدة الطول لهذا السلك هي μ .

ولغرض الاشتقاق الصحيح لمعادلة الحركة الموجية سنأخذ بالاعتبارات التالية :

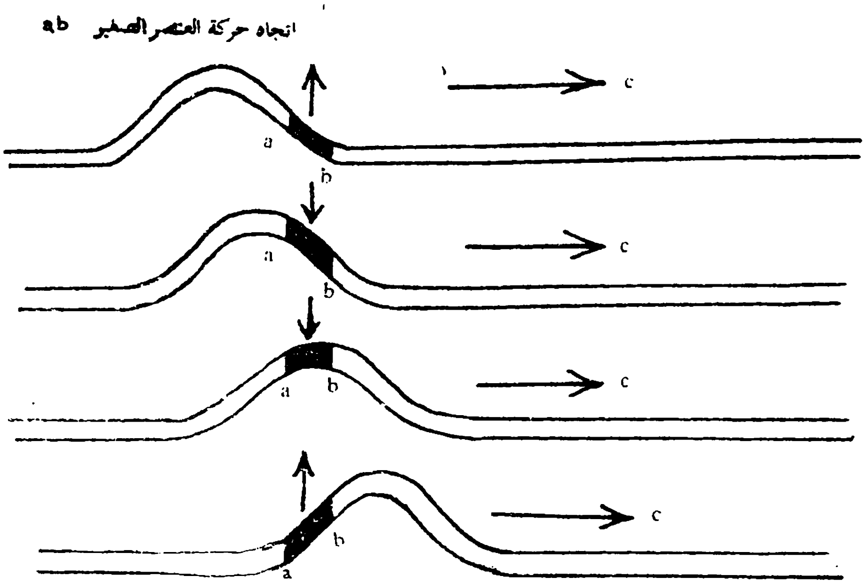
أ — ان قيمة الازاحة المستعرضة y صغيرة جداً بالمقارنة مع طول الموجة التي تسري في السلك ، وان $\frac{\partial y}{\partial x} << 1$. وذلك لكي تكون معادلة الحركة خطية .

ب — ان حركة اي جزء من السلك تكون باتجاه المحور الصادي y فقط اي ان السلك يهتز في مستوى الورقة . وعليه فأن الموجات المستعرضة تكون مستقطبة بمستوى واحد

جـ — ان قوة الشد F في السلك لاتتغير بمرور الموجة . أي ان الازاحة المستعرضة y تكون من الصغر بحيث لاتؤثر في قيمة F .

د — ان تأثيرات الجاذبية يمكن اهمالها . أي أن وزن السلك لايؤخذ بالاعتبار .

فاذا ما نقر السلك نقرة خفيفة عمودية على اتجاه طوله فان نبضة مستعرضة ستتولد فيه وتسري على طوله على شكل نبضة منفردة أو اضطراب مستعرض ينتقل بسرعة ثابتة كما موضح في الشكل (6.3)

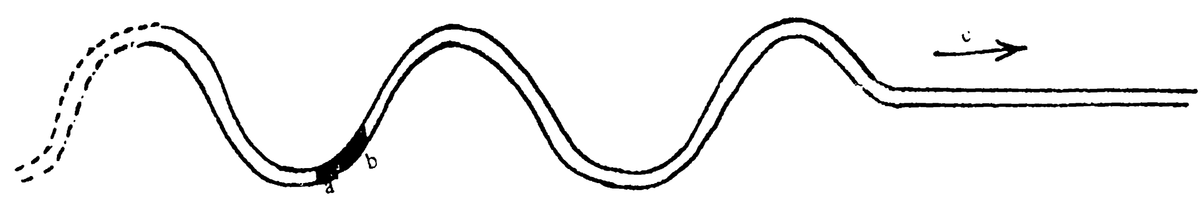


الشكل (6.3) يبين موقع نفس العنصر الصغير ab في اربع لحظات زمنية متعاقبة خلال مرور النبضة في السلك . كما يوضح ان اتجاه حركة العنصر يكون دائماً عمودي على اتجاه انتقال النبضة .

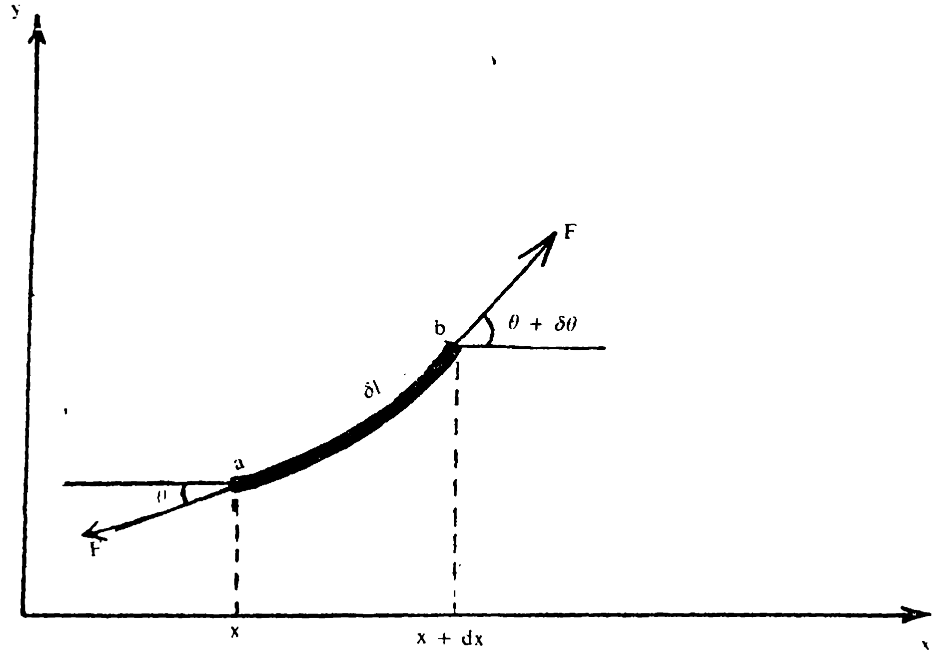
واذا ماغذي السلك بحركة اهتزازية من مصدر ما في الطرف الايسر منه فان نبضات مستعرضة متتالية ودورية تستحدث وتتلاحق على طول السلك بسرعة ثابتة C هي نفس سرعة النبضة الواحدة في المثال السابق. انظر الشكل (6.4).

ولغرض تشكيل معادلة الحركة . التي تتحكم بانتقال الموجات المستعرضة على طول السلك . نطبق قانون نيوتن الثاني في الحركة على عنصر صغير من السلك في أية لحظة زمنية خلال مرور الموجة أو النبضة . لنفرض ان العنصر الصغير المختار على السلك هو ab وليكن طوله δl . فعند مرور نبضة مستعرضة خلال هذا الجزء الصغير من السلك فانه سيتحرك باتجاه عمودي على اتجاه أنتقال النبضة . وعند مرور سلسلة من الموجات المستعرضة خلال السلك فان الجزء الصغير ab سيتحرك حول موضع توازنه حركة توافقية بسيطة عمودية على اتجاه طول السلك .

الآن نرسم صورة آنية مكبرة للجزء ab من السلك كما هو مبين في الشكل (6.5) ثم نحلل القوى المؤثرة عليه .



الشكل (6·4) يبين سلسلة من النبضات أو الموجات المستعرضة تتقدم على طول السلك بسرعة C.



الشكل (6-5) يوضح القوى المؤثرة في الجزء الصغير ab المختار من طول السلك المهتز عرضياً .

ان القوتين الوحيدتين المؤثرتين في العنصر الصغير من السلك ab هما قوتا الشد اللتان يسلطهما الأجزاء المجاورة من السلك للعنصر الصغير عند الطرفين b , a واتجاه قوة الشد F في كل طرف تكون مماسية مع السلك عند ذلك الطرف . فاذا اعتبرنا زاوية ميل قوة الشد F مع اتجاه المحور السيني x عند الطرف a تساوي θ وعند الطرف b تساوي $\theta + \delta\theta$ فان مركبات القوى المؤثرة في العنصر ab هي :

المركبة العمودية لقوة الشد F في الطرف $F\sin\theta = a$

المركبة الأفقية لقوة الشد F في الطرف $F\cos\theta = a$

المركبة العمودية لقوة الشد F في الطرف $F\sin(\theta + \delta\theta) = b$

المركبة الأفقية لقوة الشد F في الطرف $F\cos(\theta + \delta\theta) = b$

واذا فرضنا ان محصلة القوة المؤثرة أفقياً هي F_x . فان :

$$F_x = F\cos(\theta + \delta\theta) - F\cos\theta \qquad \ldots (6\text{-}1)$$
$$= F[\cos(\theta + \delta\theta) - \cos\theta]$$

ولما كانت الأزاحة المستعرضة للسلك صغيرة بالفرض فان قيمة الزاوية θ تكون صغيرة أيضاً وعليه تكون قيمة $\delta\theta$ صغيرة جداً .

وعندما تكون قيمة θ صغيرة فان قيمة $\cos\theta$ تقترب من الواحد وكذلك قيمة $\cos(\theta + \delta\theta)$. وعليه تصبح قيمة القوة المؤثرة أفقياً F_x على الجزء الصغير من السلك ab صغيرة تماماً وتصبح صفراً عندما تكون قيمة θ صغيرة بما فيه الكفاية

واذا فرضنا ان محصلة القوة العمودية المؤثرة في العنصر ab هي F_y ، فان :

$$\begin{aligned} F_y &= F\sin(\theta + \delta\theta) - F\sin\theta \\ &= F[\sin(\theta + \delta\theta) - \sin\theta] \qquad \ldots\ldots\ldots(6\cdot2) \end{aligned}$$

فاذا كانت قيمة θ صغيرة بما فيه الكفاية فأنه يمكن اعتبار بدرجة عالية من الدقة أن :

$$\operatorname{Sin}\theta \simeq \tan\theta = \frac{\partial y}{\partial x} \qquad \ldots\ldots\ldots(6\cdot3)$$

يلاحظ هنا ان التفاضل جزئياً وليس كلياً لأنه يعتمد أيضاً على عنصر الزمن . وعليه تصبح القوة العمودية F_y كالآتي :

$$F_y = F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] \qquad \ldots\ldots\ldots(6\cdot4)$$

حيث $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{+dx}$ يشير الى ميل السلك عند الموقع $x + dx$

و $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x$ يشير الى ميل السلك عند الموقع x

وبتطبيق العلاقة الرياضية المعروفة التي تعبر عن أي دالة بدلالة الحدين الأول والثاني لمفكوك مسلسل تايلر لتلك الدالة . أي أن

$$f(x + dx) = f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x}dx \qquad \ldots\ldots(6\cdot5)$$

فان المعادلة (6.4) تصبح كالآتي

$$F_y = F\left[\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)_x + \frac{\delta\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)'}{\delta x}\,dx - \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)_x\right] \qquad \text{........ (6.6)}$$

وبذلك تكون محصلة القوة المؤثرة عمودياً على عنصر السلك ab هي F_y حيث

$$F_y = F\,\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}\,dx \qquad \text{........ (6.7)}$$

ولأيجاد طول العنصر المنحني dl بدلالة y ، x نجد أن

$$dl = \left[1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2\right]^{1/2} dx \qquad \text{........ (6.8)}$$

ولكن ضمن الحدود المفروضة باعتبار θ صغيرة بما فيه الكفاية فان $\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)$ تكون صغيرة أيضا بحيث يمكن اهمال مربعها $\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)$. وعليه تصبح المعادلة (6.8) كالآتي :

$$dl = dx \qquad \text{........ (6.9)}$$

وبذلك يمكن أخذ كتلة عنصر السلك الذي طوله dl باعتبارها $\mu\,dx$ فاذا كان التعجيل المستعرض لعنصر السلك dl مساوياً لـ $\frac{\delta^2 y}{\delta y^2}$ فعندئذ يمكن تطبيق قانون نيوتن الثاني في الحركة فنجد ان محصلة القوة المؤثرة عموديا على عنصر السلك ab تساوي حاصل ضرب كتلة العنصر $\mu\,dx$ في تعجيله المستعرض $\frac{\delta^2 y}{\delta t^2}$ أي أن

$$F\,\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}\,dx = \mu\,dx\,\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} \qquad \text{........ (6.10)}$$

وبترتيب هذه المعادلة تصبح

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{\mu}{F}\,\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} \qquad \text{........ (6.11)}$$

هذه المعادلة تدعى بمعادلة الحركة الموجية المستعرضة في بعد واحد X ومن سرعة الموجة X وبمقارنة المعادلة (6.11) مع المعادلة العامة للموجة في بعد واحد :

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{1}{C^2}\,\frac{\delta^2 y}{\delta^2 x} \qquad \text{(6.12)}$$

نجد ان قيمة F تمثل مربع سرعة الموجة المستعرضة في السلك ويتوقف مقدارها على الشد F وطبيعة مادة السلك اي كثافته الخطية μ .
اي ان سرعة الموجة المستعرضة (C) هي :

حيث

$$C^2 = \frac{F}{\mu}$$

$$C = \mp \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6 \cdot 13)$$

يلاحظ هنا ان كلا من معادلة الموجة وسرعة الموجة لايتوقفان على شكل الموجة اذ اننا لم نستخدم في تحليلنا اي فرض خاص بشكل الموجة . الا ان المهم ان نؤكد ان هذه المعادلات لاتكون صحيحة الا في حالة الازاحات العرضية الصغيرة نسبيا في الوتر وهذا غالبا مايحدث في الواقع .

6·5 حل معادلة الحركة الموجية المستعرضة

من الواضح ان المعادلة (6·12) هي معادلة تفاضلية جزئية ، اي انها معادلة تحتوي على مشتقات جزئية وذلك لكون الازاحة y تتوقف على متغيرين هما الموقع x والزمن t في هذا البند سنحاول وبطريقة تحليلية ايجاد الحل y بدلالة المتغيرين x و t الذي يصف الموجات المستعرضة المتقدمة على السلك ولنفرض ان الحل هو الدالة

$$y = f(x, t) \qquad \ldots (7 \cdot 14)$$

ولكن من معرفتنا السابقة بخواص الموجة نستطيع ان نحدد شكل الدالة بحيث يتضمن حقيقتين معروفتين عن الموجة وهما ان الموجة مهما كان شكلها يبقى ثابتا اثناء الحركة وان سرعة تقدم الموجة c يبقى ثابتاً ايضا . وعلى ضوء هاتين الحقيقتين نستطيع ان نخمن ان شكل الدالة الذي يصلح ان يكون حلاً مناسباً للمعادلة (6·12) يكون على الشكل التالي :

$$y = f(x - ct) \qquad \ldots (6.15)$$

ويمكن التأكد من صحة هذا الحل بتعويض المشتقات الجزئية الثانية لـ y بالنسبة لـكل من x و t ، اي $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ اللتين يمكن ايجادهما من المعادلة (6.15) في المعادلة (6.12) فاذا تساوى الطرفان فأن ذلك يعني قطعاً ان المعادلة (6.15) تمثل حلاً صحيحا ، للمعادلة (6.12).

من المعادلة (6.15) نحسب المشتقة الاولى لـ y بالنسبة لـ x عندما تكون t ثابتة فنحصل على

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f'(x - ct) \qquad \ldots (6.16)$$

حيث f' تمثل التفاضل الكلي لدالة f بالنسبة للقوس (x — ct) نحسب المشتقة الثانية لـ y بالنسبة لـ x فنجد ان

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(x - ct) \qquad \ldots (6.17)$$

الآن نحسب المشتقة الاولى لـ y بالنسبة لـ t عندما تكون x ثابتة فنحصل على

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -c f'(x - ct) \qquad \ldots (6.18)$$

نحسب المشتقة الثانية لـ y بالنسبة لـ t فنجد ان

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 f''(x - ct) \qquad \ldots (6.19)$$

الان نعوض المعادلتين (6.17) و (6.19) في معادلة الموجة (6.12) فنجد ان ، الطرفين متساويان ومتطابقان ممايشير الى ان الدالة (6.15) تمثل حلا صحيحاً للمعادلة . (6.12)

ان الدالة (6.15) تصف اي شكل موجي يتحرك بسرعة ثابتة c بالاتجاه الموجب . وعليه يعتبر هذا الحل خاصاً بالموجة المتحركة باتجاه زيادة قيمة x على المحور السيني . وهذه الحالة تقابل السرعة الموجبة للموجة $+\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ في المعادلة (6.13)

ويمكن ايضا ان نخمن ان الدالة

$$y = f(x + ct) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6.20)$$

السابقة نتأكد ان هذا التخمين صحيح. وهذه الدالة تصف اي شكل موجي يتحرك بسرعة ثابتة c بالاتجاه السالب وهذه الحالة تقابل السرعة السالبة للموجة $\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ في المعادلة (6.13). تصلح ان تكون حلاً لمعادلة الموجة (6.12). وبالتعويض المناسب كما في الحالة

ولما كانت الدالتان (6.15) و (6.20) تمثلان حلين صحيحين للمعادلة الخطية (6.12) لذلك فان مجموعها يمثل ايضاً حلاً صحيحاً للمعادلة المذكورة. ان الحل الاخير، اي

$$y = f(x - ct) + f(x + ct)$$

يمثل حلاً عاماً لمعادلة الحركة الموجية المستعرضة (6.12). الحد الاول فيها يشير للموجة المتقدمة على طول السلك بالاتجاه الموجب والحد الثاني فيها يشير للموجة المتقدمة على طول السلك بالاتجاه المعاكس اي بالاتجاه السالب. ويمكن توضيح ذلك بمثال عملي. لنأخذ الحد الاول $f(x-ct)$. فأن قيمة هذا الحد تتحدد بمعرفة قيمة المقدار $(x-ct)$. وهذا يقتضي معرفة قيم كل من المتغيرين x و t والثابت c. فمثلاً لو كانت قيمة $c=10$ فان المعادلة $y=f(x-ct) = f(100)$ تتحقق لمجموعة من قيم t و x المبينة في الجدول التالي

t	x
0	+ 100
1	+ 110
2	+ 120
4	+ 140
6	+ 160
8	+ 180
10	+ 200
:	:
:	:
:	:
:	:

وهذا يشير الى ان الشكل الموجي يتقدم بسرعة ثابتة c باتجاه زيادة قيمة x اي بالاتجاه الموجب لـ x . وبنفس الطريقة تماما يمكن توضيح ان الحد الثاني $f(ct + x)$ يمثل الموجة المتقدمة بالاتجاه السالب لـ x بسرعة ثابتة c ويترك للطالب ان يتحقق من صحة ذلك كتمرين .

6.6 الشكل الجيبي للموجة المستعرضة

ان المعادلة (6.21) تصف اي شكل موجي او اضطراب متحرك سواء كان نبضة واحدة (اي موجة منفردة) او موجة ضمن سلسلة طويلة من الموجات المتتالية . وقد يكون شكل الموجة او شكل النبضة المتقدمة على السلك جيبيا او مستطيلا او مربعا او مثلثا او اي شكل اخر سواء كان بسيطا او معقدا . والمهم عند اختيار اي شكل موجي محدد ان يكون شكل الدالة f موافقا لذلك الشكل . وعموما يفضل دراسة الموجة الجيبية الشكل اي الموجة التي يمكن وصف مقطعها بدلالة دوال الجيب او الجيب التمام او كليهما . ومثل هذا الشكل الموجي الى جانب بساطته يمثل حالات عملية كثيرة بالاضافة الى ذلك فأنه يمكن بطريقة تركيب عدد مناسب من الموجات الجيبية الحصول على أي شكل موجي مهما كانت درجة تعقيده . وكذلك يمكن العكس ايضا اي تحليل اي شكل موجي معقد الى مركباته التي تتألف من مجموعة من الموجات الجيبية البسيطة المتداخلة . فقد وضح العالم الفرنسي فورير (1768 – 1830) ان بناء اي شكل موجي دوري لايحتاج الا الى موجات توافقية بسيطة والتي هي بحقيقتها ماهي الا موجات جيبية .

لغرض السهولة فقط سنأخذ الحد الاول من المعادلة (6.21) الذي يمثل اي شكل موجي يتقدم بسرعة ثابتة c بالاتجاه الموجب . فاذا كان الشكل الموجي جيبيا فعندئذ يمكن وصفه بالدالة الجيبية .

$$y = A \sin k(ct - x) \qquad \text{..........(6.22)}$$

حيث ان A هو مقدار ثابت يمثل أقصى قيمة للازاحة المستعرضة في السلك ويدعى بسعة الموجة .

و k يمثل عامل تحويل البعد الى زاوية ويدعى بالعدد الموجي ويساوي $\frac{2\pi}{\lambda}$ حيث λ هي طول الموجة المستعرضة في السلك .

ان طول الموجة في السلك λ يعتمد على تردد الموجـة الذي يرمز له عادة بالحرف f . ويتحدد تردد الموجة طبيعياً من تردد المصدر المغذي للسلك بالحركة الموجية . أما السرعة 'C' التي تنتقل بها الموجة فانها تتوقف على خواص السلك وحاصـل ضرب المتغيرين λ و f يساوي مقدار ثابت c أي أن

$$c = f\lambda \qquad \text{...........(6·23)}$$

هذه العلاقة مهمة جداً وتنطبق على جميع انواع الموجات ويمكن ايجادها بسهولة باستخدام تعريف الزمن الدوري T للحركة الموجية وهـو الزمن اللازم للموجة حتـى تنتقل مسافة تعادل طول الموجة . أي بعبارة اخرى هو الزمن الدوري للاهتزاز لـكـي يرسل المصدر طولاً موجياً كاملاً على الوتر . وخلال هذا الزمن تكون الموجات قد تحركت مسافة قدرها λ . بسرعة c ، أي أن

$$T = \frac{\lambda}{c} \qquad \text{...........(6·24)}$$

ولما كان الزمن الدوري T هو الزمن اللازم لاكمال دورة واحدة من الاهتزاز . والتردد f هو عدد الدورات التـي يصنعها المهتز في وحدة الزمن لذلك فان

$$T = \frac{1}{f} \qquad \text{........(6·25)}$$

وبمساواة T في المعادلتين (6·24) و (6·25) تنتج المعادلـــــة (6·23) . الآن نرتب المعادلة (6·22) فتصبح

$$y = A \sin (kct - kx) \qquad \text{...........(6·26)}$$

لـكن من العلاقتين $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, و $\lambda = \frac{c}{f}$ ينتـــــج ان

$$kc = 2\pi f = \omega$$

حيث ان ω هو التردد الزاوي .

وبالتعويض في المعادلة الاخيرة (6·26) ينتج :

$$y = A \sin (\omega t - kx) \qquad \text{........(6·27)}$$

هذه المعادلة تقدم وصفا فيزياويا كاملا للحركة الموجية الجيبية المستعرضة التي تسري في سلك بالاتجاه الموجب . فهي تمثل الاضطراب في السلك بدلالة الازاحة المستعرضة y في اي موقع x على امتداد السلك وفي اية لحظة زمنية t ، عندما يكون التردد

الزاوي للاضطراب هو ω وسرعة تقدمه هو C . ويلاحظ من هذه المعادلة انه عند تثبيت قيمة x اي عند تركيز النظر على جزء محدد من السلك نلاحظ الازاحة المستعرضة لذلك الجزء y تتغير دوريا مع الزمن بين السعتين $\pm A$. وعند تثبيت الزمن نلاحظ ان y تتغير دوريا بين نفس السعتين مع تغير الموقع x على امتداد السلك .

وبنفس الطريقة تماما يمكن الحصول على الحل الذي يصف الحركة الموجية الجيبية المستعرضة التي تسري في السلك بالاتجاه السالب . وهي

$$y = A \sin(\omega t + kx) \qquad \text{.........}(6\cdot28)$$

6/7 العلاقة بين سرعة اهتزاز جسيمات السلك وسرعة الموجة .

اذا اعتبرنا الموجة المستعرضة المتقدمة على السلك بالاتجاه الموجب والمتمثلة (بالازاحة الانية للجسيم المهتز في السلك) في المعادلة

$$y = A \sin(\omega t - kx) \qquad \text{............}(6\cdot29)$$

فعندئذ يمكن ايجاد السرعة الآنية لاهتزاز اي جسيم في اية نقطة على السلك من المشتقة الاولى لـ y بالنسبة للزمن فنجد ان سرعة اهتزاز الجسيم u هي

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = A\omega \cos(\omega t - kx) \qquad \text{............}(6\cdot30)$$

ومن خلال العلاقة المثلثية

$$\sin^2(\omega t - kx) + \cos^2(\omega t - kx) = 1 \qquad \text{.........}(6\cdot31)$$

و

$$\sin(\omega t - kx) = y/A \qquad \text{............}(6\cdot32)$$

نجد ان

$$\cos(\omega t - kx) = \pm\sqrt{1 - \frac{y^2}{A^2}} \qquad \text{............}(6\cdot33)$$

نعوض المعادلة الاخيرة في المعادلة (6·30) فنجد ان

$$u = \pm\, \omega A \sqrt{1 - \frac{y^2}{A^2}} \qquad \text{............}(6\cdot34)$$

من هذه العلاقة يتضح ان سرعة اي جزء من السلك تتوقف على قيمة الازاحة المستعرضة y لذلك الجزء . فعندما تكون الازاحة في اقصى قيمة لها اي ان $y = A$ فان السرعة u تصبح صفراً ، وعندما يكون الجزء المهتز في موضع توازنه اي ان $y = 0$ فأن السرعة u تصبح في اقصاها وتساوي $\mp \omega A$ حيث الاشارة الموجبة تشير الى الاتجاه الموجب للحركة (اي نحو الاعلى) والاشارة السالبة تشير الى الاتجاه السالب للحركة (اي نحو الاسفل) .

ولايجاد سرعة الموجة C نجد المشتقة الاولى لـ x بالنسبة للزمن t . لهذا الغرض نفاضل y من المعادلة (6·29) بالنسبة لـ x فنحصل على

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -kA\cos(\omega t - kx) \qquad \text{.........(6·35)}$$

ومن المعادلتين (6·30) ، (6·35) نجد ان

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -C\frac{\partial y}{\partial x} \qquad \text{.........(6·36)}$$

حيث ان $\frac{\partial y}{\partial t}$ تمثل سرعة الجسيم

و $\frac{\partial y}{\partial x}$ تمثل ميل منحنى الموجة

و C تمثل سرعة الموجة

ومن المعادلة الاخيرة نجد ان

$$C = -\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial x}{\partial y} \qquad \text{.........(6·37)}$$

وبالتعويض المناسب نجد ان سرعة الموجة هي

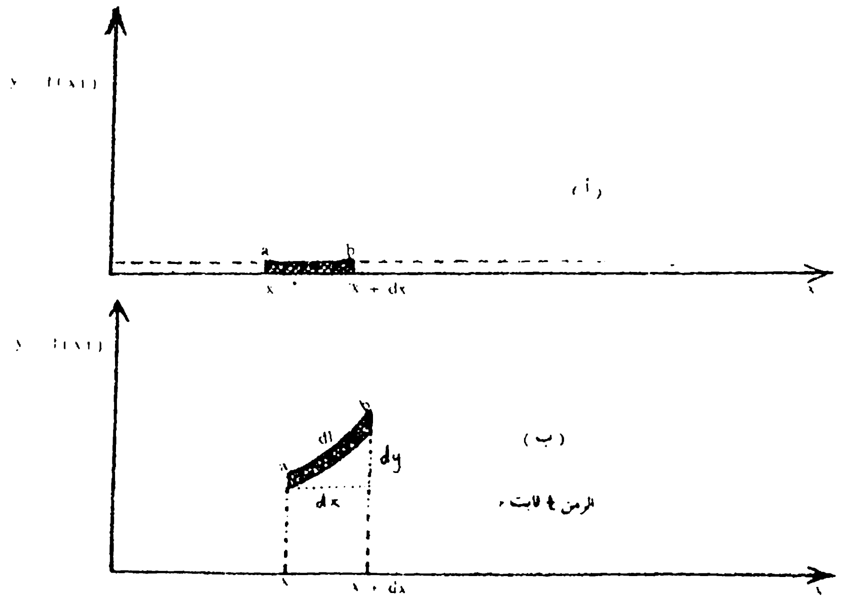
$$C = \frac{\omega}{k} \qquad \text{.........(6·38)}$$

من ذلك يتضح ان سرعة الموجة C في سلك معين هي مقدار ثابت يساوي $\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ ولايتغير الا اذا تغيرت قوة الشد T او كثافة السلك او كلاهما . بينما سرعة الجسيم u في اي موقع على السلك مقدار متغير يعتمد على قيمة الازاحة المستعرضة y

6·8 طاقة الموجة المستعرضة

ان الموجة هي وسيلة لنقل الطاقة . وهذه هي أهم خاصية من الخواص الاساسية للموجات عموما . فالموجة تحتوي على طاقة . وعندما تتقدم الموجة فانها تحمل معها الطاقة اثناء تقدمها . وهكذا يمكن نقل الطاقة خلال السلك الذي تسري فيه الموجة من المصدر الى النقطة التي يتغذى بها السلك بالطاقة الى اي نقطة اخرى على السلك . والامثلة العملية على نقل الطاقة بواسطة الموجة كثيرة منها انتقال الطاقة من الحجر الساقط على سطح الماء الى قطعة صغيرة من الفلين تطفو على سطح الماء بعيدا عن نقطة سقوط الحجر (المصدر) ، ومثال اخر اكثر اهمية هو انتقال الطاقة بواسطة الموجات الزلزالية الناجمة من الهزات الارضية ، ومثال اخر ذو أهمية خاصة هو انتقال الطاقة من الشمس الى الارض بواسطة الموجات الكهرومغناطيسية .

في هذا البند سنحاول ايجاد مقدار الطاقة الذي تنقله ابسط انواع الحركة الموجية الميكانيكية وهي الموجة المستعرضة التي تتقدم على طول سلك مشدود . لهذا الغرض سنأخذ عنصراً صغيراً ab من السلك طوله dx في حالة التوازن اي في حالة مرور موجة خلال السلك وكما مبين في الشكل (6·6 أ) .



الشكل (6.6) يبين (أ) ان طول العنصر ab في حالة التوازن يساوي dx (ب) ان طول نفس العنصر عند مرور الاضطراب خلاله يكون dl

وعندما تستحدث موجة مستعرضة في الطرف الايسر من السلك وذلك بهزه عرضيا في اتجاه المحور العمودي فان موجة تتقدم وعندما تمر هذه الموجة خلال الجزء ab من السلك فانهـا تزيحه ازاحة آنيـة مستعرضة مقدارها y حيث

$$y = A \sin(\omega t - kx) \qquad \ldots\ldots\ldots (6\cdot39)$$

والطاقة الحركية الانية K للعنصر الصغير ab يمكن حسابها من خلال كتلة العنصر وسرعته .

ان كتلة العنصر ab تساوي μdx حيث μ هي الكثافة الخطية للسلك . ولما كان العنصر ab يتحرك فقط باتجاه عمودي على اتجاه انتقال الموجة لـذلك يمكن ايجاد سرعته العرضية بايجاد مشتقه y بالنسبة للزمن عند ثبوت الموقع x . وعليه فالسرعة الانية للعنصر ab هي

$$\frac{dy}{dt} = A\omega \cos(\omega t - kx)$$

ان الطاقة الحركية لاي جسيم تساوي نصف كتلته في مربع سرعته ولذلك فان الطاقة الحركية للعنصر ab هي

$$K = \frac{1}{2} \mu\, dx\, A^2\omega^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

وبقسمة طرفي هذه المعادلة على dx نحصل على الطاقة الحركية لوحدة الطول على امتداد المحور x . وهذه الكمية تعرف بكثافة الطاقة الحركية ونرمز لها بالحرف K_ρ حيث

$$K_\rho = \frac{1}{2} \mu A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6\cdot40)$$

ان السرعة التي يكتسبها العنصر الصغير ab من السلك عندما تمر الموجة خلاله تتناسب مع اقصى ازاحة مستعرضة تحدثها الموجة وهي A . ولما كانت الازاحة صغيرة بالفرض . لذلك فأن سرعة العنصر تكون صغيرة ايضا . وعليه فأن مربع هذه السرعة سيكون صغيرا جداً وبالتالي ستكون قيمة K_ρ ضئيلة المقدار .

في الخطوة التالية نحسب الطاقة الكامنة U التي يختزنها العنصر ab اثناء مرور الموجة خلاله . ان طول العنصر ab اثناء مرور الموجة هو dl حيث

$$dl = dx \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad ....(6{\cdot}41)$$

ولكون $1 << \frac{\partial y}{\partial x}$ فان المعادلة الاخيرة يمكن تقريبها بدرجة عالية من الدقة بأحد الحدين الاولين من مفكوك القوس فينتج ان

$$dl = dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \ldots \right] \qquad ....(6{\cdot}42)$$

ولما كان طول العنصر ab في حالة التوازن أي في حالة عدم مرور الموجة خلاله يكون مساوياً لـ dx . وعليه فان مرور الموجة يؤدي الى حدوث استطالة ضئيلة جداً في طول العنصر الصغير مقدارها

$$dl - dx = dx \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \qquad ....(6{\cdot}43)$$

ولما كان العنصر ab تحت قوة شد مقدارها F حتى قبل مرور الموجة ، لذلك فان طوله كان أطول مما هو عليه في حالة الاسترخاء أي قبل تسليط قوة الشد عليه. وعليه فان الاستطالة الضئيلة التي حصلت لطول العنصر ab أثناء مرور الموجة لا تؤثر في قيمة قوة الشد F لذلك سنعتبر ان مقدار F يبقى ثابتاً خلال عملية الاستطالة . ولما كانت قوة الشد F تؤثر خلال المسافة المساوية لمقدار الاستطالة لذلك فانها تنجز شغلاً على العنصر الصغير مقداره حاصل ضرب قوة الشد F في الاستطالة (dl − dx) . وهذا الشغل يخزن في العنصر على شكل طاقة كامنة U مقدارها هو

$$U = F(dl - dx) = \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \qquad ......(6{\cdot}44)$$

وبايجاد $\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)$ من المعادلة (6·39) عند ثبوت الزمن t نحصل على

$$U = \frac{1}{2} F A^2 k^2 \cos^2(\omega t - kx)\, dx \qquad ....(6{\cdot}45)$$

وبقسمة الطرفين على dx نحصل على الطاقة الكامنة لوحدة الطول على امتداد المحور x وهذه الكمية تدعى بكثافة الطاقة الكامنة ويرمز لها U_p حيث

$$U_p = \frac{1}{2} F A^2 k^2 \cos^2(\omega t - kx) \qquad ....(6{\cdot}46)$$

ولكن لدينا العلاقة $c^2 = \frac{F}{\mu}$

من هذه العلاقة نعوض μ بدل F في المعادلة الاخيرة (6.46) فينتج

$$U_\rho = \frac{1}{2}\,\mu A^2 c^2 k^2 \cos^2(\omega t - kx) \qquad \text{......... (6.47)}$$

ولكن

$$c^2 k^2 = \omega_o^2$$

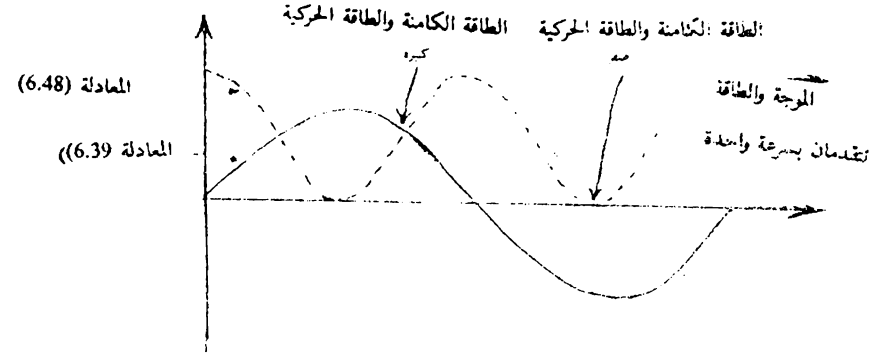
لذلك فأن

$$U_\rho = \frac{1}{2}\,\mu A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

وبمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (6.40) نجد أن

$$U_\rho = K_\rho = \frac{1}{2}\,\mu A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx) \qquad \text{........... (6.48)}$$

من ذلك نستنتج ان كثافة الطاقة الحركية يساوي كثافة الطاقة الكامنة في كل عنصر صغير على امتداد السلك الذي تسري فيه الموجة المستعرضة. ان توزيع هذين الشكلين من الطاقة على طول السلك موضحاً كما هو مبين في الشكل (6.7).



الشكل (6.7) يبين توزيع الطاقة في الموجة المتقدمة يلاحظ ان تردد كثافة الطاقة هو ضعف تردد الموجة. الخط الداكن يمثل مقطع الموجة المتقدمة الذي تمثله المعادلة (6.39) والخط المتقطع يمثل كيفية تغير كثافة طاقة الموجة الذي يمثله المعادلة (6.48)

ان الطاقة الكلية الميكانيكية لكل وحدة طول من الموجة هو مجموع الطاقة الحركية لوحدة الطول K_p والطاقة الكامنة لوحدة الطول U_p اي ان كثافة الطاقة الكلية I_p للموجة هي

$$I_p = K_p + U_p \qquad \text{... (6.49)}$$

وباستخدام المعادلة (6·48) نجد أن

$$E_p = 2\,K_p = 2\,U_p \qquad \ldots\ldots\ldots(6\cdot50)$$

وبذلك يمكن حساب كثافة الطاقة الكلية للموجة المتقدمة على سلك اما بأخذ ضعف كثافة طاقتها الحركية أو ضعف كثافة طاقتها الكامنة .

أي أن

$$E_p = \mu A^2 \omega^2 \cos^2 (\omega t - kx).$$

ان الطاقة الكلية التي تحتويها موجة كاملة λ يمكن ايجادها من خلال التكامل

$$\int_o^\lambda E_p\,dx = \int_o^\lambda \mu A^2 \omega^2 \cos^2 (\omega t - kx)\,dx$$

ومتوسط الطاقة الكلية لوحدة الطول (أي كثافة الطاقة الكلية) يمكن ايجادها من خلال التكامل

$$\frac{1}{\lambda} \int_o^\lambda E_p\,dx = \frac{1}{\lambda} \int_o^\lambda \mu A^2 \omega^2 \cos^2 (\omega t - kx)\,dx$$

وباجراء التكامل الاخير نجد أن متوسط الطاقة الكلية لوحدة الطول هو

$$\frac{1}{2}\mu A^2 \omega^2$$

ان هذه الطاقة تنتقل مع الموجة المتقدمة بسرعة C. وبذلك فان طاقة الموجة المتقدمة على السلك تتدفق بمعدل .

$$\frac{1}{2}\mu A^2 \omega^2 C$$

من هذا يتضح ان القدرة أو المعدل الزمني لسريان الطاقة التي تحملها الموجة المتقدمة على سلك معين يتناسب طردياً مع مربع السعة ومربع التردد .

6·9 انعكاس الموجة

لقد افترضنا في بداية هذا الفصل ان طول السلك الذي سنتعامل معه لانهائي وذلك لتجنب حدوث انعكاس الموجة من أحد طرفيه أوكليهما ، والحقيقة ان ذلك لا يتحقق الا نظرياً ، اذ في الواقع غالباً ما يكون السلك محدود الطول . واي طرف من طرفي السلك قد يكون متصلاً بنقطة ثابتة أو يكون حراً أو يكون متصلاً بنقطة متحركة .

والحقيقة ان ظاهرة الانعكاس تحدث لان الموجة هي عبارة عن طاقة متحركة ، فعندما تتقدم موجة في وسط ما ثم تصطدم بوسط ثانٍ مختلف فان جزء من الموجة الاصلية

ينعكس مرتداً الى الوسط الاول وجزء ينفذ الى الوسط الثاني . وهناك حالات خاصة متطرفة هما حالة الانعكاس الكامل للموجة التي تحدث عندما لا يرافق الانعكاس أي فقدان في الطاقة . وحالة النفاذ أو الانتقال الكامل للموجة التي تحدث عندما تخترق الموجة الوسط الثاني كلياً . والآن سندرس عملية انعكاس الموجة المستعرضة المتقدمة في سلك عندما يكون طرف السلك تحت شروط حدودية مختلفة .

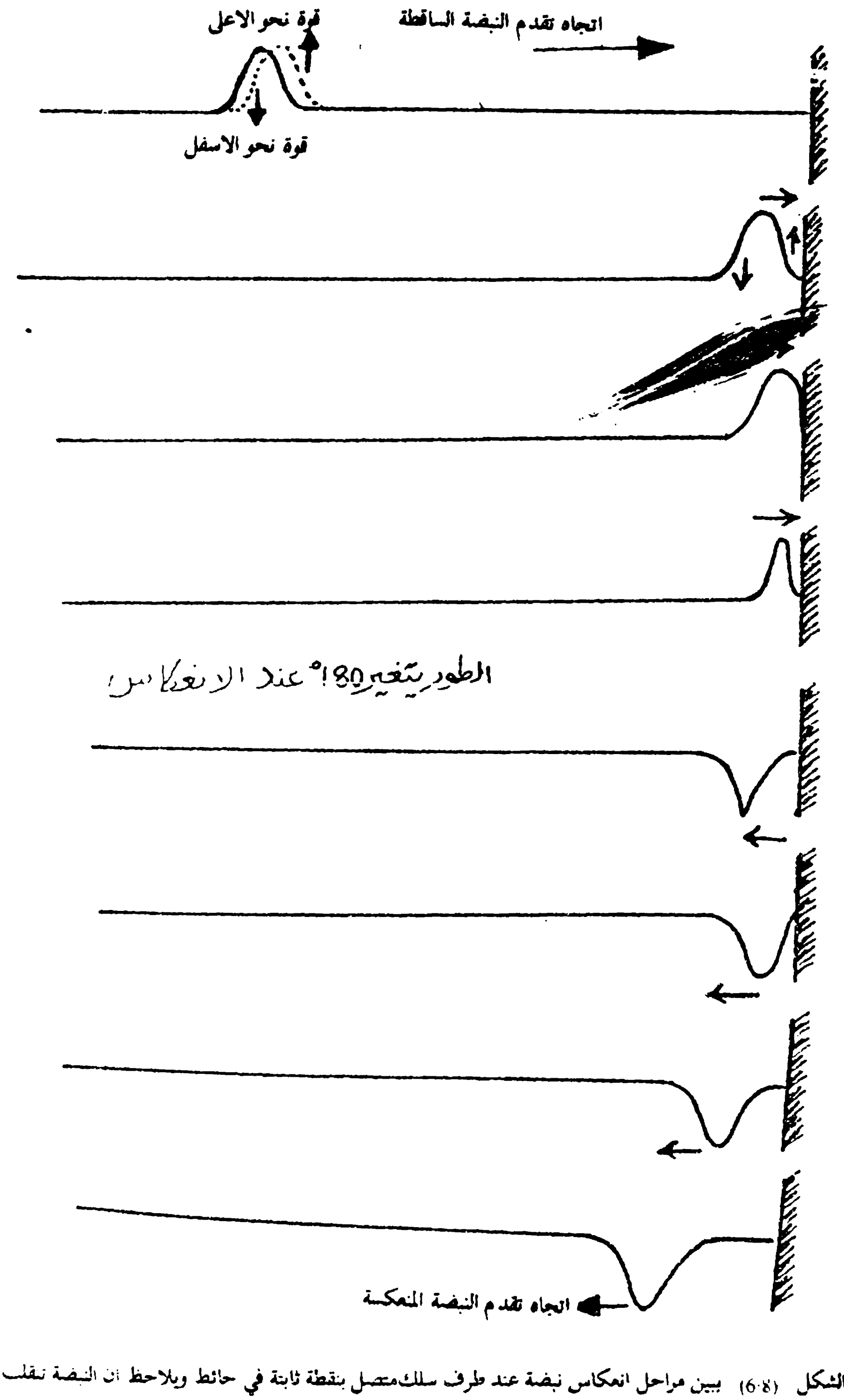
6.10 انعكاس الموجة عند الطرف الثابت من سلك مشدود

لنفرض لدينا نبضة تتقدم نحو اليمين في سلك مشدود يتصل طرفه الايمن بنقطة ثابتة في حائط صلب تماماً . كما هو مبين في الشكل (6.8)

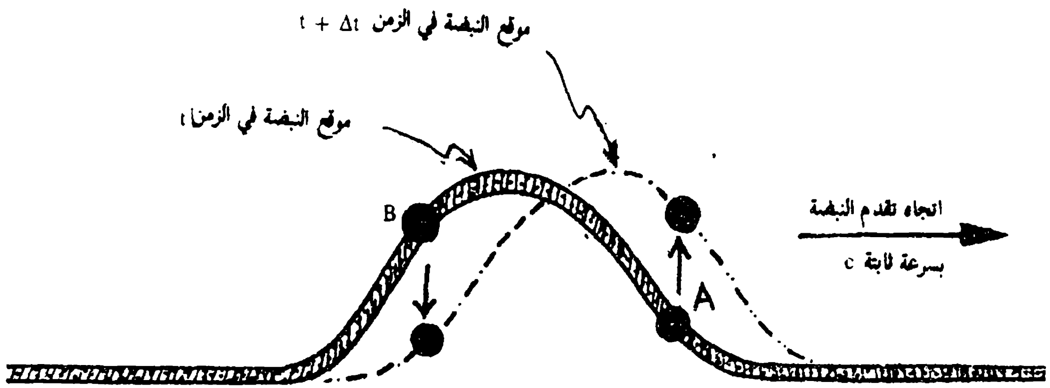
عندما تتقدم النبضة على السلك فان مقدمتها تجذب الجزء من السلك امامها مباشرة نحو الاعلى بينما مؤخرة النبضة تجذب الجزء المزاح من السلك نحو الاسفل وبهذه الطريقة تحافظ النبضة على شكلها ثابتاً اثناء التقدم ويمكن ملاحظة ذلك من الشكل المبين ادناه (الشكل 6.9) . وعندما تصل مقدمة النبضة الى الحائط فانها تؤثر بقوة نحو الاعلى في نقطة الاتصال الثابتة في الحائط ولكن هذه النقطة لاتتحرك لانها جزء من حائط صلب جدا . ونتيجة لذلك فان هذه النقطة الثابتة ستؤثر في السلك بقوة رد فعل مساوية له بالمقدار ومعاكسة بالاتجاه حسب قانون نيوتن الثالث .ان قوة رد فعل الحائط تؤثر في طرف السلك بجذبه نحو الاسفل . وهذا يعني تسارع السلك الى الاسفل مما يؤدي الى انقلاب النبضة رأساً على عقب عند اصطدامها بالحائط . والنبضة المنقلبة تأخذ بالانتقال في السلك نحو اليسار اي في اتجاه معاكس لاتجاه النبضة المتقدمة بفرق طور مقداره π مما تقدم يتضح انه عند النقطة الثابتة يحدث شيئان اولهما ان النبضة المعتدلة تنقلب فتصبح نبضة مقلوبة وثانيهما ان اتجاه تقدم النبضة ينعكس . من ذلك نستخلص ان النبضة المتقدمة تنقلب بالانعكاس عند الطرف الثابت من السلك

اما في حالة سقوط سلسلة من الموجات على الطرف الثابت من السلك فان جميع الموجات الساقطة تنقلب بالانعكاس عند هذه النقطة بنفس الطريقة .

ولغرض ترسيخ فكرة انقلاب النبضة او الموجة عند انعكاسها في نقطة ثابتة . نتذكر انه عندما يكون لدينا نبضتان متشابهتان تماما احداهما معتدلة والاخرى مقلوبة ويتقدمان نحو بعضهما على نفس السلك فعند منطقة مرور احداهما بالاخرى اي عند تطابق موقعهما



الشكل (6-8) يبين مراحل انعكاس نبضة عند طرف سلك متصل بنقطة ثابتة في حائط ويلاحظ ان النبضة تنقلب عند الانعكاس .



الشكل 9 ·6 يبين ان النبضة تتقدم بسرعة ثابتة C ، عندما تتحرك A الى الاعلى فان الجزء الذي يليها يستلم دفعة نحو الاعلى . بينما عندما B تتحرك الى الاسفل فان الجزء الذي يليها يستلم دفعة نحو الاسفل وهكذا تحتفظ النبضة بشكلها ثابتا اثناء التقدم .

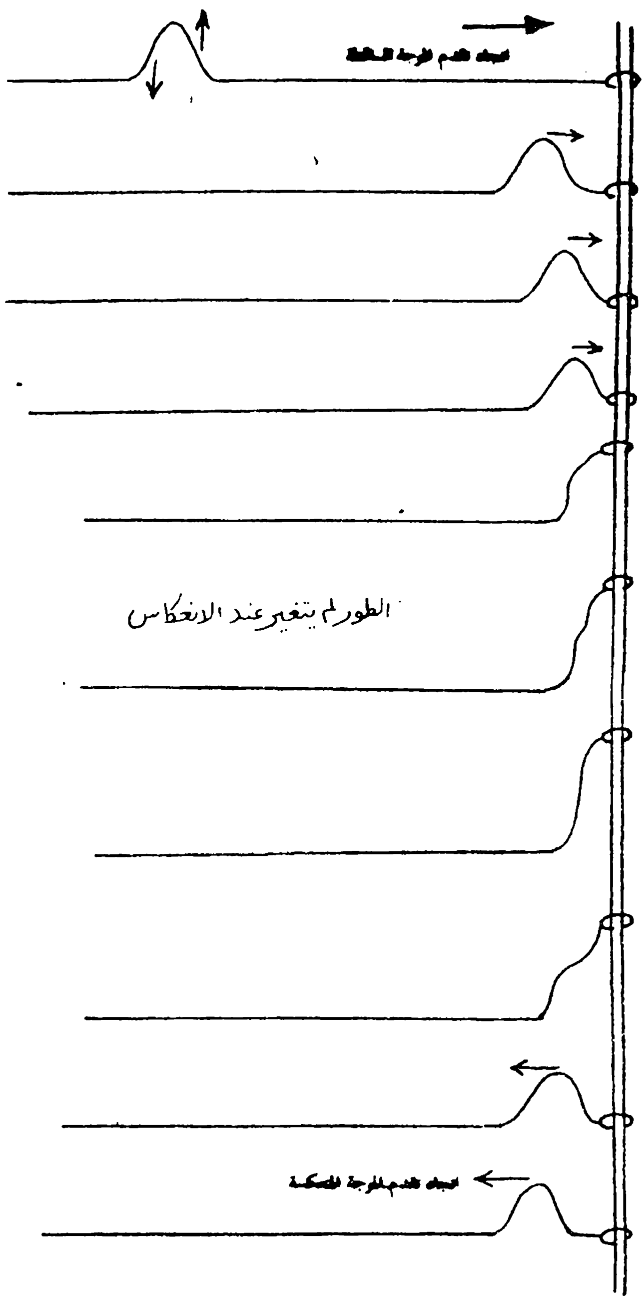
تكون محصلة الازاحة صفرا . وقياسا على ذلك في حالة انعكاس نبضة عند نقطة ثابتة يكون لدينا نبضة واحدة ونقطة ثابتة ، لذلك يمكن ان نتصور ان النبضة المنعكسة يجب ان تكون مقلوبة لـكي تكون الازاحة صفرا عند النقطة الثابتة . ولاننسى ان النبضة قبل وصولها النقطة الثابتة هي نفسها النبضة بعد اكمال انعكاسها الا انهـا مقلوبة ولذلك لايمكن اجراء الجمع الجبري لازاحتيهما الا في لحظة الانعكاس ، حيث تكون محصلة الازاحة صفرا عند نقطة الانعكاس الثابتة . اما في حالة سقوط سلسلة متتالية من الموجات فـأن تتابعا موجيا منعكسا يتولد ، وتداخلا يحدث بين الموجتين الساقطة والمنعكسة ، وتكون ازاحة أية نقطة من السلك هي مجموع الازاحتين الناتجتين عن الموجتين الساقطة والمنعكسة ، وحيث ان طرف السلك ثابت لذلك يجب ان يكون التداخل هداما في تلك النقطة حتى تكون محصلة الازاحة فيها صفرا . اي ان طور الموجة المنعكسة يختلف دائما عن طور الموجة الساقطة بمقدار $180°$ عند الطرف الثابت . وعندئذ يقال ان الموجة المنعكسة من الطرف الثابت للسلك قد تغير طورها بمقدار π .

6.11 انعكاس الموجة عند الطرف الحر

لنفرض ان لدينا نبضة تتقدم نحو اليمين في سلك مشدود وطرفه الايمن حر الحركة عرضيا . ويمكن عمليا الحصول على مثل هذا السلك بربط هذا الطرف الى حلقة خفيفة ملساء تتحرك على قضيب عمودي أملس كما هو مبين في الشكل (6.10) .

عندما تصل النبضة الى الطرف الحر للسلك فانها تؤثر في ذلك الطرف بقوة نحو الاعلى . ولما كان هذا الطرف حراً تماماً في أن يتحرك الى أعلى والى الأسفل ، لذلك فان الحلقة التي تمثل ذلك الطرف ستنزاح عن موضع توازنها وتتحرك نحو الاعلى . وكنتيجة لتأثير قوة النبضة في الطرف الحر للسلك فان ذلك الطرف سيبدي قوة رد فعل ، وهذه القوة تولد نبضة معتدلة تنتقل في السلك في اتجاه معاكس لاتجاه انتقال النبضة الساقطة . وفي هذه الحالة نحصل على انعكاس للنبضة من طرف حر . هذا الطرف سوف يعاني أكبر ازاحة لنقط السلك ، وهذا يعني ان النبضتين الساقطة والمنعكسة يجب ان يتداخلا تداخلاً بناءاً عند هذه النقطة . من ذلك نستخلص ان النبضة الساقطة تنعكس من دون ان تنقلب عند النهاية الحرة للسلك .

أما في حالة سقوط سلسلة من الموجات على الطرف الحر من السلك فان جميع الموجات ستنعكس بالتتابع دون انقلاب عند ذلك الطرف بنفس الطريقة . [illegible]



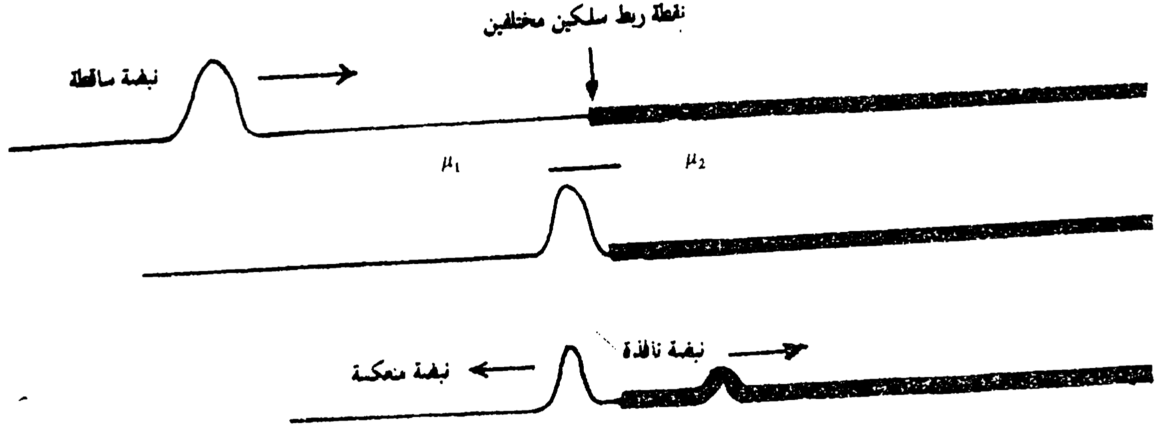
الشكل (6-10) يبين مراحل انعكاس نبضة عند طرف حر يقبل الحركة في اتجاه مستعرض . ويلاحظ ان النبضة لم
معتدلة عند الانعكاس .

ان الموجة المنعكسة تكون دائماً بنفس الطور مع الموجة الساقطة عند الطرف الحر . وعندئذ نجد أن الموجة الساقطة عند طرف حر تنعكس بدون ان يتغير طورها .

6.12 انعكاس الموجة عند طرف متحرك لسلك مشدود

لقد وجدنا في البندين (6.10) و (6.11) ان انعكاسا كاملاً للموجة يحدث عند طرف الخيط عندما يكون ثابتا أو حرا تماماً . ولكن عملياً يوجد انعكاس جزئي ونفاذ جزئي عند أي طرف . فمثلاً ، لو فرضنا ان طرف سلك معين يربط بطرف سلك اخر بدلاً من تركه حراً أو تثبيته بنقطة في حائط صلب كما هو مبين في الشكل (6.11) .

فاذا فرضنا ان نبضة تتقدم نحو اليمين فعند وصولها للنقطة التي تفصل بين السلكين يحدث لها انعكاس جزئي وانتقال جزئي . وتكون سعة النبضة المنعكسة أقل من سعة الموجة الساقطة وذلك لأن النبضة النافذة للسلك الثاني تحمل معها جزءاً من الطاقة الساقطة . فاذا كانت الكثافة الخطية μ_2 للسلك الثاني أكبر من الكثافة الخطية μ_1 للسلك الأول فأن الموجة المنعكسة في السلك الاول تعاني تغيراً في الطور مقداره 180 درجة عند الانعكاس . وحيث ان سعة الموجة المنعكسة أقل من سعة الموجة الساقطة . فان النقطة الفاصلة بين السلكين لا تصبح عقدة أي نقطة ثابتة بل نقطة متحركة ، وهذا يشير الى ان طاقة تنتقل من السلك الاول الى السلك الثاني . أما اذا كانت الكثافة الخطية μ_2 للسلك الثاني أقل من الكثافة الخطية μ_1 للسلك الاول فان انعكاساً جزئياً يحدث دون ان تعاني الموجة المنعكسة تغيراً في الطور ، ولكن جزءاً من الطاقة الساقطة ينتقل الى السلك الثاني . ويمكن التحكم بمقدار الطاقة المنقولة من السلك الاول الى السلك الثاني باختيار قيم مناسبة لـ μ_2 , μ_1 . ومن هذا يتضح انه يمكن عملياً الحصول على طرف حر في سلك ما بتوصيله الى سلك آخر طويل ودقيق ذي كثافة خطية صغيرة جداً بالمقارنة مع الكثافة الخطية للسلك المطلوب . في هذه الحالة تكون الطاقة المنقولة مهملة . كما ان السلك الثاني يعمل على الاحتفاظ بالشد في السلك الاول . وهذه الطريقة افضل عملياً من طريقة استخدام الحلقة الملساء التي تم ذكرها في البند السابق .



الشكل (6.11) يبين ان النبضة الساقطة يحدث لها انعكاس جزئي ونفاذ جزئي عند النقطة الفاصلة بين سلكين مختلفين .

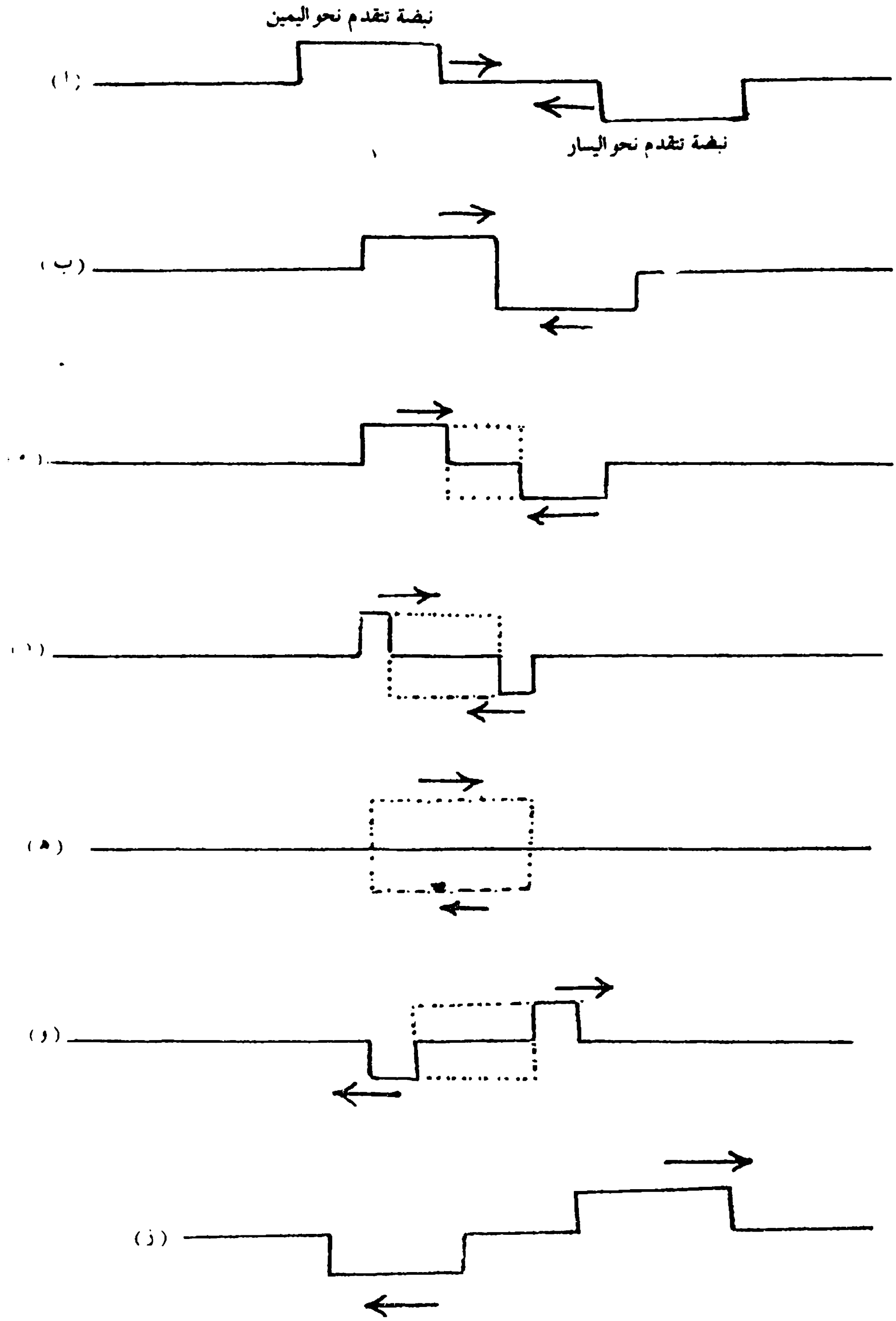
6·13 الانعكاس الآني من طرفي سلك محدود الطول

لقد درسنا الانعكاس عند أحد طرفي السلك ، ولكن اذا كان لدينا سلك محدود الطول فان الانعكاس سيحدث في كلا الطرفين . ومثل هذا الانعكاس المزدوج مهم جداً في عمل الالات الوترية لانه المسؤول عن حدوث الحركة الدورية في أي وتر مهتز من أوتارها وبالتالي عن الصوت الموسيقي المنبعث منها . لنفرض ان لدينا نبضة تحدث نتيجة نقرة خفيفة تضرب قرب أحد طرفي الوتر . إن هذه النبضة ستتقدم على طول الوتر حتى تصل الطرف الثاني فتنعكس راجعة الى الطرف الاول . ان الزمن الكلي T اللازم للنبضة حتى تعود الى نقطة بدايتها سيكون $\frac{2l}{c}$ ، حيث l هو طول الوتر و c سرعة تقدم الموجة (أو النبضة) على الوتر . وهذا يعني انه بعد زمن T فان أي نقطة على الوتر ستعيد حركتها الاصلية . وبهذه الطريقة تكون حركات كل النقاط على الوتر . بالضرورة دورية . ويمكن احياناً ان تؤدي بعض التشوهات الابتدائية في الوتر الى أن يكون الزمن الدوري لحركته أقل من $\frac{2l}{c}$ ولكن ليس أكبر من ذلك اطلاقاً . ان نمط الحركة الدورية للسلك المهتز في مثل هذه الحالة يقود الى ظهور موجات واقفة على السلك .

6·14 الموجات الواقفة

في الاوتار المحدودة الاطوال أو بالاحرى في جميع الاجسام المحدودة الابعاد . اذا ما استحدثت فيها موجات فأن هذه الموجات ستتقدم باتجاه ، ونتيجة لوجود سطوح محددة لهذه الاجسام فان الموجات الساقطة عليها ستنعكس وتتقدم في الاتجاه المضاد . وطبقاً لقاعدة التركيب التي تنص على انه اذا ما تعرضت نقطة لتأثير حركتين موجيتين في نفس الوقت فان محصلة الازاحة لتلك النقطة تساوي المجموع الجبري للازاحات التي تحدثها الموجات كل على حدة . ونتيجة لتركيب الموجتين الساقطة والمنعكسة يظهر نمط موجي واقف يدعى بالموجات الواقفة .

وقبل التطرق بالتفصيل لكيفية توليد الموجات الواقفة من المفيد ان نتعرض الى الحالة الحركية لوسط يتعرض في وقت واحد لتأثير نبضتين منفصلتين في البداية نفرض ان لدينا نبضتين مستطيلتين متماثلتين متحركتين على نفس السلك في اتجاهين متعاكسين احداهما معتدلة والاخرى مقلوبة كما هو مبين في الشكل (6·12 أ)



الشكل 12 - 6 يبين محصلة الشكل الناتج من تركيب نبضتين احداهما معتدلة الاخرى مقلوبة تتحركان على نفس الو.. باتجاهين متعاكسين . تمثل الخطوط المتقطعة الاجزاء المتداخلة من النبضتين الاصليتين في مراحل زمنية مختلفة

فعندما تتقابل النبضتان جزئيا في موضع معين على الوتر فأن الجزء المشترك مـــن الوتـــر الذي تشغله النبضتان معا يتعرض لتأثير ازاحتين متعاكستين ومحصلتهما هو الفرق بينهما واتجاه هذه المحصلة هو باتجاه الازاحة الكبرى . ونتيجة لذلك فان محصلة الازاحة للوتر في الجزء المشترك بين النبضتين يساوي المجموع الجبري (الاتجاهي) للازاحتين المنفصلتين . وعندما تصبح النبضتان متقابلتين تماما كما في الشكـل (6.12 هـ) فان محصلة ازاحتهما تكون صفرا وهذا هو التداخل الهدام التام . لكن في هذه الحالة لاتلغي النبضتان احداهما الاخرى نهائيا بل يقتصر التلاشي على لحظة التقابل فقط اذ بعدها تستمر النبضتان بالتقدم كلا باتجاهها الاصلي دون ان تتأثر احداهما بالاخرى على افتراض ان النبضتين خطيتان اي سعاتهما صغيرة .

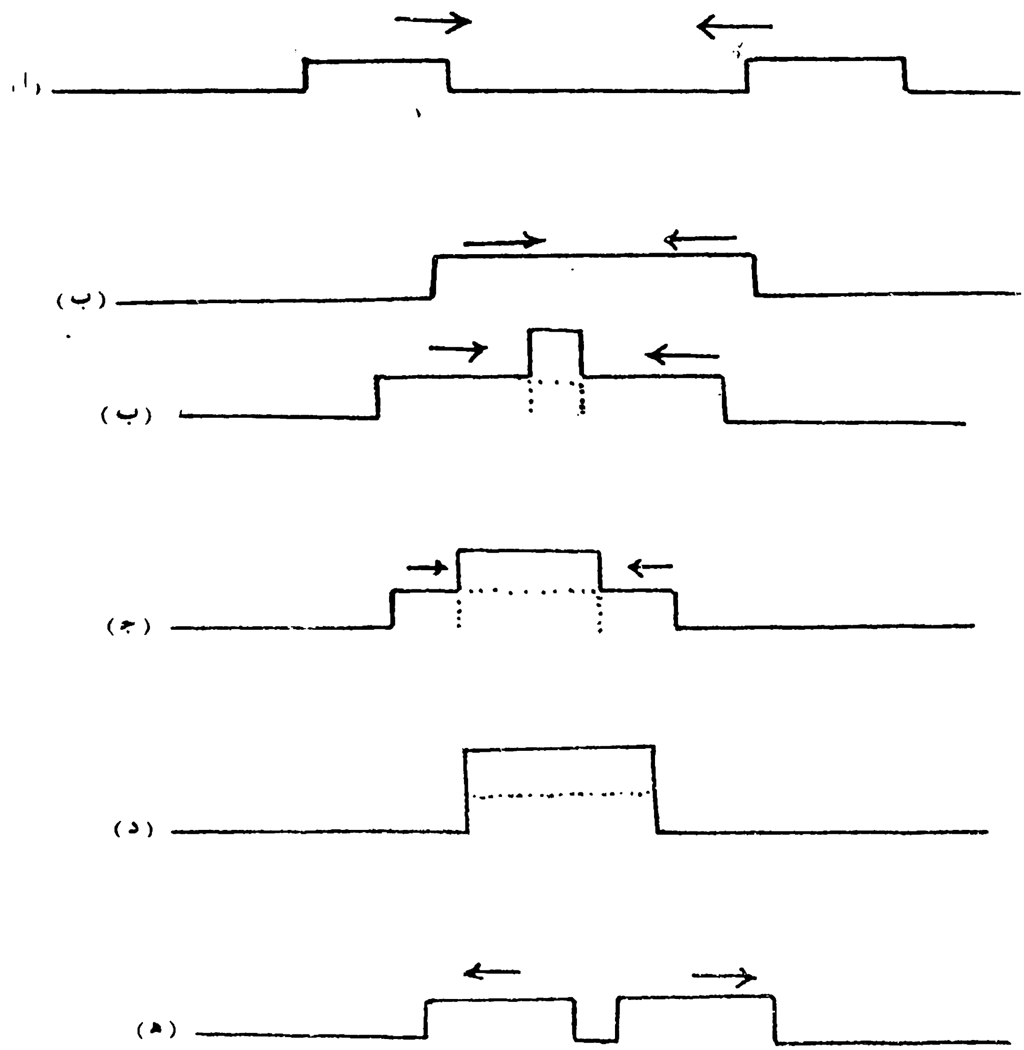
اما اذا كـان لدينا نبضتان معتدلتان متحركتان على نفس السلك في اتجاهين متعاكسين كما هو مبين في الشكل (6.13 أ)

فان ما يحدث في منطقة تراكب النبضتين أي الجزء من الوتر الذي تشترك فيه النبضتان معاً جزئياً أو كلياً هو أنه يتعرض لتأثير ازاحتين بنفس الاتجاه ومحصلتهما هو حاصل جمعهما واتجاه هذه المحصلة يكون بنفس اتجاه المركبتين . ونتيجة لذلك فان محصلة الازاحة للوتر في الجزء المشترك بين النبضتين يساوي المجموع الجبري (الاتجاهي) للازاحتين المنفصلتين . وعندما تشغل النبضتان موقع مشترك واحد على الوتر كما فـي لشكل (6.13 د) فان محصلة ازاحتهما تكون أكبر ما يمكن وهو حاصل جمعهما وهذا هو التداخل البناء التام . بعد ذلك تتفرق النبضتان مبتعدتين عن بعضهما ودون ان تترك احدهما أثراً في الاخرى ، وهذا هو جوهر قاعدة التركيب .

الان بعد هذه المقدمة الضرورية سنأتي على موضوعنا في هذا البند وهو الموجات الواقفة والتي تدعى ايضاً بالموجات الساكنة .

ان الموجات الواقفة (أو الساكنة) تنتج عندما تتقدم سلسلتان من الموجات المتماثلة تماماً من كل الوجوه في اتجاهين متعاكسين خلال نفس الوسط . والموجات المتقدمة يمكن أن تكون كلاهما مستعرضة اوكلاهما طولية . وسنتطرق هنا للموجات المستعرضة فقط . وفيما يلي سنشرح خواص الموجات الواقفة بيانياً وتحليلياً .

من الناحية البيانية يمكن القول ان الطريقة المناسبة للحصول على موجتين متماثلتين تماماً من حيث السعة والتردد ومتحركتين باتجاهين متضادين هو باستخدام الموجات



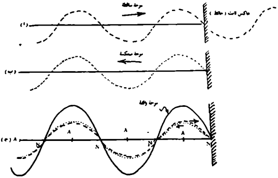
الشكل (6·13) يبين محصلة الشكل الناتج من تركيب نبضتين معتدلتين في مراحل زمنية مختلفة . الخطوط المتقطعة تمثل النبضتان الاصليتان في منطقة التركيب .

الساقطة والموجات المنعكسة . فالموجة المستعرضة عندما تسري في سلك مشدود نحو طرفه المثبت باحكام في حائط صلب تماماً . فان هذه الموجة ستنعكس ، والموجة المنعكسة في هذه الحالة يختلف طورها دائماً عن طور الموجة الساقطة بمقدار $180°$. ويمكن تفسير ذلك بسهولة كالآتي :

لما كان السطح العاكس وهو الحائط الصلب غير قابل للحركة فعندئذ تكون جسيمات السلك الكائنة في طرفه المثبت على الحائط غير قابلة للحركة ايضاً . وعلى هذا الاساس فان قاعدة التركيب تستلزم ان تكون ازاحة هذه الجسيمات الناتجة عن الموجة المنعكسة فقط مساوية ومعاكسة دائماً للازاحة التي سيسببها تأثير الموجة الساقطة لو انها اثرت وحدها فقط في نفس الجسيمات ولكي يتحقق ذلك يجب ان تكون الموجتان الساقطة والمنعكسة متطابقتين من كل الوجوه (باستثناء اتجاهي تقدمهم المتعاكس) ويجب ان يكون هناك فرق طور بينهما يعادل نصف دورة أو π عند نقطة الانعكاس . وللدقة ينبغي ان نؤكد انه لكي تكون سعة الموجتين الساقطة والمنعكسة واحدة يفترض ان يكون الانعكاس كاملاً عند الطرف الثابت للسلك ، اي دون ان يرافقه اي امتصاص للطاقة بواسطة الحائط ، كما يفترض ايضاً ان يكون الاحتكاك الداخلي بين الجسيمات المؤلفة للسلك معدوماً لكي يمكن اهمال الطاقة المفقودة اثناء مرور الموجات في السلك . (والحقيقة أنه لايمكن التخلص نهائياً من الامتصاص والاحتكاك) .

الآن يمكن تصور مايحدث لو احدثنا تتابعاً موجياً جيبياً في السلك . فان كل موجة عند وصولها الطرف الثابت تنعكس وتسير في الاتجاه المضاد بنفس السرعة ونفس السعة والتردد ، ويتكون من وجود الموجتين الساقطة والمنعكسة في نفس الوقت على نفس السلك تشكيلاً موجياً جديداً نحصل عليه من تركيب الموجتين معاً ، هذا التشكيل يدعى بالموجات الواقفة . ويمكن توضيح ذلك كما في الشكل (6.14)

ان الموجة الساقطة المتحركة نحو اليمين يمثلها الخط المتقطع في يسار الحائط (الشكل 6.14) ، بينما الخط المنقط يشير الى موقع الموجة المنعكسة في نفس اللحظة الزمنية . ان الازاحة التي تسببها الموجة المنعكسة عند الحائط يجب ان تكون دائماً مساوية ومعاكسة للازاحة التي تسببها الموجة الساقطة لكي تكون محصلة الازاحة للسلك في هذه النقطة مساويةً للصفر دائماً . ومثل هذه النقطة التي تنعدم فيها الحركة والازاحة تدعى بالعقدة ويرمزلها بالحرف N ولايجاد محصلة الازاحة في اية نقطة أخرى على السلك وفي اية لحظة زمنية يجرى جمع جبري لازاحتي الموجتين الساقطة والمنعكسة طبقاً لقاعدة التركيب . ومحصلة الازاحة في الشكل (6.14) يمثلها الخط المتصل الذي يمثل الموجة الواقفة . ويلاحظ ان هناك نقاطاً محددة على المنحنى المتصل تتلاشى فيها الازاحة كما في طرف السلك المثبت في الحائط ، وفي مثل هذه النقاط تنعدم الحركة ولذلك فان مثل هذه النقاط تدعى بالعقد . كما يلاحظ ايضاً على المنحنى المتصل ان هناك نقاطاً محددة تقع في منتصف المسافة بين كل عقدتين متتاليتين تكون فيها محصلة الازاحة اكبر من جميع

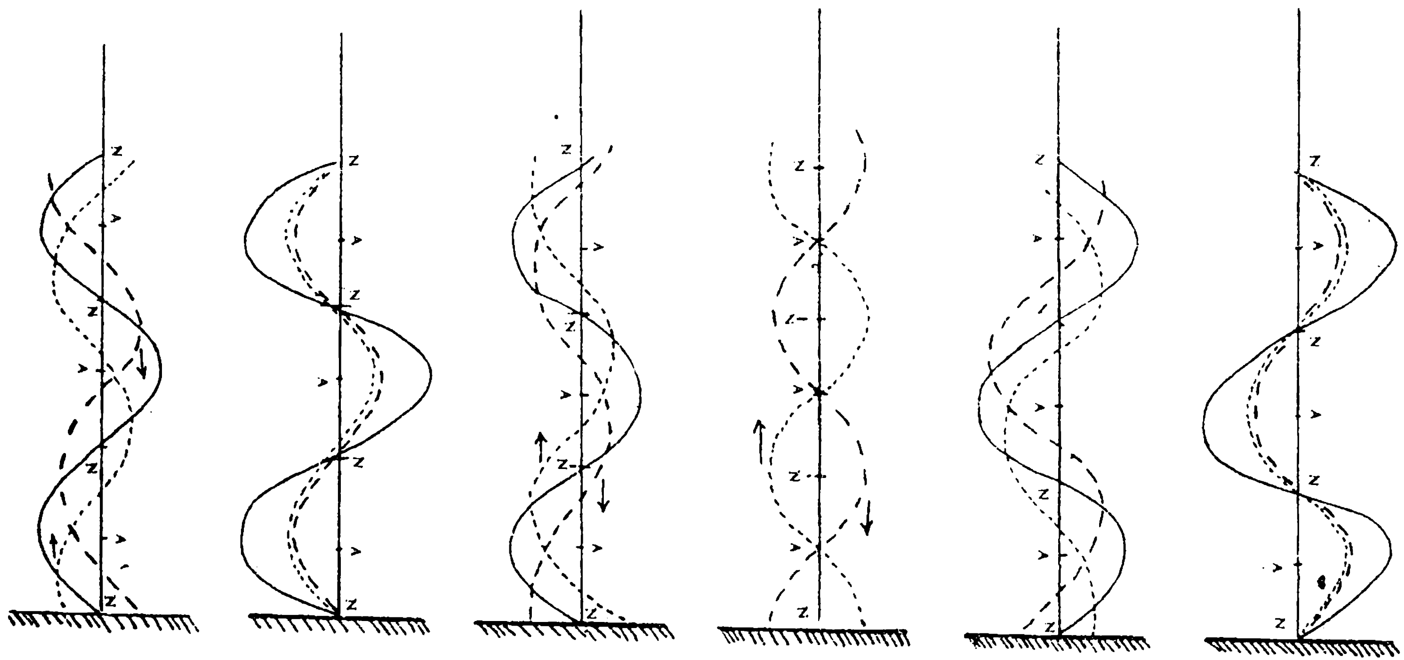


الشكل (14-6) تجمع الموجتان الساقطة والمنعكسة طبقا لقاعدة التركيب ليعطيا موجة واقفة ذات عقدة عند الطرف الثابت

النقاط الاخرى على السلك ، ومثل هذه النقاط تدعى بالبطون ويرمز لكل بطن بالحرف A. ان مواقع العقد N والبطون A تبقى ثابتة ولهذا السبب تدعى محصلة الموجة الناتجة من تركيب الموجتين الساقطة والمنعكسة بالموجة الواقفة أو الساكنة.

في الشكل (6.14) يلاحظ ان الموجة المنعكسة مطابقة تماماً للموجة الساقطة وبذلك تكون محصلة الازاحة في كل نقطة هي ضعف الازاحة لأي من الموجتين (الساقطة او المنعكسة)، ولكن هذا التطابق لا يحدث دائماً. اذ عندما يستمر تقدم الموجات الساقطة نحو العاكس الثابت فإن الموجات المنعكسة لا تتطابق معها الا في لحظات زمنية محددة تحدث دورياً. وفي جميع اللحظات الزمنية يمكن الحصول على الموجات المنعكسة باعتبار ان محصلة الازاحة عند نقطة الانعكاس صفر اي ان ازاحة الموجة المنعكسة تكون دائماً مساوية ومعاكسة لازاحة الموجة الساقطة على العاكس الثابت وهذا يعني ان هنالك دائماً فرقاً في طور الحركة بين الموجتين يساوي $180°$ اي بعبارة اخرى ان العاكس الصلب يؤدي الى عكس الموجة الساقطة بعد ان يغير طورها بما يعادل نصف طول موجة. ويمكن توضيح هذه النقطة باعتبار الخط المتقطع الى يمين العاكس في الشكل (6.14) الذي يمثل استمراراً وهمياً للموجة الساقطة. واذا ارتد هذا المنحنى كما هو الى الجهة اليسرى من العاكس فإنه لا يمثل الموجة المنعكسة ما لم يقلب المنحنى رأساً على عقب ان الخطوة الاخيرة تدخل تغيراً في الطور مقداره π وبهذه الطريقة يمكن الحصول في اية لحظة زمنية على تتابع موجي منعكس في حالة سقوط تتابع موجي على الطرف الثابت من السلك. وتكون محصلة الازاحة في اية نقطة من السلك وفي اية لحظة زمنية هي مجموع الازاحتين الناتجتين عن الموجتين الساقطة والمنعكسة وتكون ازاحة الطرف الثابت من السلك صفراً دائماً.

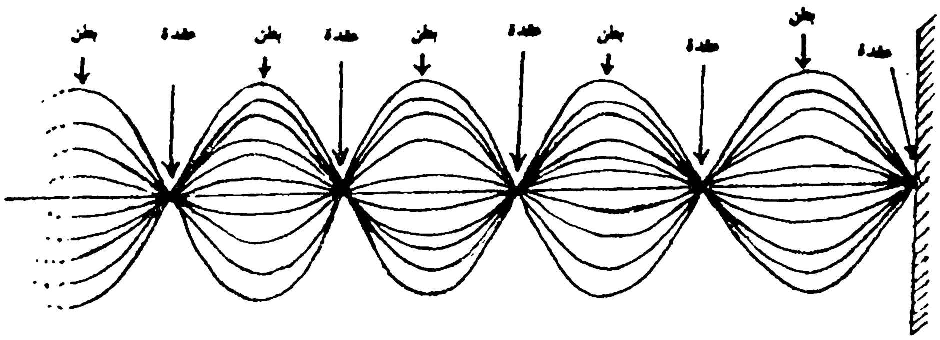
وفي حالة توالي سقوط الموجات على الطرف الثابت من السلك فإن موجات منعكسة متتالية تتولد في ازمنة مختلفة. والشكل (6.15) يبين الموجات الواقفة الناشئة في لحظات زمنية متعاقبة تفصلها فترات زمنية تساوي $\frac{1}{8}$ من الزمن الدوري للموجة الساقطة. ان المنحنى المتقطع يمثل الموجة الساقطة والمنحنى المنقط يمثل الموجة المنعكسة والمنحنى المتصل يمثل محصلة الموجة الناتجة والتي هي الموجة الواقفة من هذا الشكل يلاحظ انه في جميع المراحل الزمنية هناك نقط معينة على السلك تنعدم فيها الحركة تماماً كما يحدث في طرف السلك الثابت وهذه النقط هي العقد N وهي تتوزع على ابعاد متساوية تساوي نصف طول الموجة. كما يلاحظ ايضاً انه في اية لحظة زمنية تكون ازاحة النقط الواقعة في منتصف المسافة بين كل عقدتين متتاليتين هي اكبر ما يمكن وهذه النقط هي البطون A ، وهي



الشكل (6.15) الموجات الواقفة المتكونة في سلك في لحظات زمنية مختلفة. المنحنى المتقطع يمثل الموجة الساقطة، والمنحنى المنقط يمثل الموجة المنعكسة، والمنحنى المتصل يمثل محصلة ازاحة الموجتين الساقطة والمنعكسة وهو يمثل الموجة الواقفة.

تتوزع على ابعاد متساوية تساوي نصف طول الموجة . وعليه فان المسافة بين العقدة والبطن المجاور هي ربع طول الموجة .

والان من الضروري ان تلاحظ بامعان الاشكال المتعاقبة في الشكل (6·15) وبالاخص المنحنى المتصل الذي يمثل الموجة الواقفة اي محصلة الحركة الناتجة من استمرار وجود الموجات الساقطة والمنعكسة على السلك . فكل شكل يشير الى مرحلة محددة من الحركة في اجزاء ثابتة من السلك . والنقط الفاصلة بين الاجزاء المتحركة هي العقد الثابتة N . بينما الاجزاء المتحركة عرضيا وهي البطون A تهتز في مواقعها بين العقد الثابتة بحركة توافقية بسيطة حول مواضع توازنها . وعليه يمكن تمثيل نمط الحركة الناتجة في السلك بالشكل (6·16) .



الشكل (6·16) يبين الغلاف الخارجي للموجة الواقفة على السلك .

ان هذا الشكل يبين ان هناك نقطاً على السلك تكون ازاحتها صفراً دائماً وتنعدم فيها الحركة تماماً وتكون ثابتة في مواقعها وهذه النقط هي العقد . وأي جزء من السلك واقع بين أي عقدتين يهتز ذهاباً واياباً ضمن الغلاف المبين حيث تتذبذب كل نقطة في ذلك الجزء في حركة توافقية بسيطة ترددها يساوي تردد الموجة الساقطة (أوالمنعكسة) وبسعة تتغير تبعاً لموقع النقطة ، وتكون أقصى قيمة لسعة الأهتزاز مساوية لضعف سعة الموجة الساقطة وتحدث عادة في منتصف المسافة بين عقدتين متتاليتين ، أي في البطن .

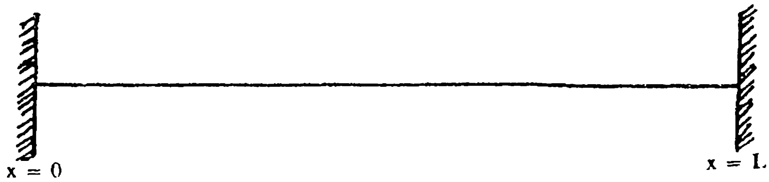
ومن الجدير بالملاحظة ان الأجزاء المهتزة من السلك تهتز عادة بسرعة عالية جداً للدرجة التي لايظهر معها غير الغلاف المبين في الشكل (6·16) وفي هذه الحالة يبدو السلك كصورة بدون حركة .

وفي الواقع ان الطاقة في الموجات الواقفة لاتنتقل على طول السلك الى اليمين أو الى اليسار، اذ ان الطاقة لايمكنها أن تنساب عبر النقط الثابتة وهي العقد في السلك لأن هذه العقد تكون في حالة سكون دائم. ولذلك فان الطاقة تبقى «واقفة» في السلك، هذا بالرغم من أنها تتغير على التعاقب بين طاقة حركية اهتزازية وطاقة كامنة في الوسط المرن. لهذا السبب لايمكن على وجه الدقة اعتبار الموجة الواقفة كحركة موجية لأنها لاتنقل الطاقة من نقطة الى اخرى على امتداد السلك، بل تعتبر حركة اهتزازية للسلك يسببها تراكب الموجتين المنتقلتين في اتجاهين متعاكسين.

15 – 6 نظرية الاهتزاز الحر لوتر مشدود ومحدود الطول

في هذا البند سنحاول بطريقة تحليلية التعبير عن الحقائق التي تم ايضاحها بيانياً في البند السابق. لهذا الغرض سنستخدم وتراً مشدوداً ومحدود الطول ومثبت من طرفيه باحكام، ونحاول ايجاد معادلة الموجة الواقفة على هذ الوتر. ومن هذه المعادلة وبمعرفة الشروط الحدودية للوتر نجد الترددات الطبيعية التي تسمح بتكون الموجات الواقفة عليه.

نفرض ان لدينا وتراً مشدوداً طوله L وطرفاه مثبتان باحكام بمسندين صلبين جداً كما هو مبين في الشكل (6·17)



الشكل (6·17) يبين وتر مشدود طرفاه مثبتان باحكام بحائطين صلبين غير قابلين للحركة.

اذا أثرنا في الوتر بدفعات دورية ذات تردد احادي مناسب فان تتابعاً موجياً يستحدث في الوتر ويتقدم في كلا الأتجاهين على امتداد الوتر. وبالنظر لمحدودية طول الوتر فان انعكاساً سيحدث في كلا الطرفين. فاذا فرضنا ان الموجة المتقدمة على الوتر نحو اليمين أي بالأتجاه الموجب للمحور x يمكن تمثيلها بالمعادلة

$$y_1 = a \sin(\omega t - kx) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(6{\cdot}52)$$

والموجة المتقدمة بالأتجاه المعاكس أي نحو اليسار يمكن تمثيلها بالمعادلة :

$$y_2 = b \sin(\omega t + kx) \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (6.53)$$

حيث ان y_1 و y_2 تمثلان الأزاحتين الآنيتين المستعرضتين اللتين تسببهما الموجتان المنتقلتان في اتجاهين متضادين في اية نقطة x على طول الوتر. يلاحظ ان هاتين الموجتين لهما نفس التردد الزاوي ω والطول الموجي λ والسرعة c الا انهما يختلفان بالسعة b ، a

ان محصلة الأزاحة y في أية نقطة x على امتداد الوتر المهتز يمكن الحصول عليها من تطبيق قاعدة التركيب التي تنص على أنه اذا وقعت نقطة تحت تأثير موجتين في نفس الوقت فان محصلة ازاحتها تساوي المجموع الجبري للأزاحتين اللتين تسببهما الموجتان على انفراد. وعليه فان

$$y = y_1 + y_2 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (6.54)$$

نعوض المعادلتين (6.52) و (6.53) في (6.54) فنجد ان

$$y = a \sin(\omega t - kx) + b \sin(\omega t + kx) \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (6.55)$$

الآن نطبق الشروط الحدودية عند طرفي الوتر. لما كان كل طرف مثبتاً بسطح صلب غير قابل للحركة تماماً لذلك يجب أن تكون قيمة محصلة الأزاحة عند السطح الصلب تساوي صفراً دائماً. وعليه يكون الشرطان الحدوديان هما :

أولاً : الشرط الحدودي عند الطرف $x = 0$ هو $y = 0$ لكل قيم t

ثانياً : الشرط الحدودي عند الطرف $x = L$ هو $y = 0$ لكل قيم t

نطبق الشرط الحدودي الأول في المعادلة (6.55) فنحصل على :

$$0 = (a + b) \sin \omega t \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (6.56)$$

ولما كانت هذه المعادلة صحيحة مهما كانت قيمة t وان $\sin \omega t$ لاتساوي صفراً دائماً الا عند قيم محدودة لـ t لذلك يجب ان تكون قيمة $(a + b)$ = صفراً. ومن ذلك نجد ان

$$a = -b \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (6.57)$$

ان هذه المعادلة تشير الى ان سعتي الحركتين الموجيتين يجب ان تكونا متساويتين بالمقدار وهذا يعني أن الموجة الساقطة على الطرف الأيسر قد أنعكست بالكامل. وهذا متوقع لأن السطح العاكس ذو ممانعة عالية جداً ولم يمتص شيئاً من طاقة الموجة

الساقطة ، والأشارة السالبة تعني ان السعتين تكونان متعاكستين بالأتجاه عند نقطة الأنعكاس وهذا يشير الى تغير في الطور مقداره π عند نقطة الأنعكاس .

الآن نعوض المعادلة (6·57) في المعادلة (6·55) فينتج

$$y = a \sin(\omega t - kx) - a \sin(\omega t + kx) \qquad \text{..............}(6{\cdot}58)$$

ان هذه المعادلة تشير الى وجود موجتين متماثلتين تماماً لهما نفس التردد والسرعة والسعة والطول الموجي وينتقلان على طول الوتر في اتجاهين متضادين. وباستخدام العلاقات المثلثية

$$\sin(\omega t \pm kx) = \sin \omega t \cos kx \pm \cos \omega t \sin kx$$

وتعويضها في المعادلة (6·58) ينتج ان

$$y = -2a \cos \omega t \sin kx \qquad \text{...............}(6{\cdot}59)$$

هذه المعادلة هي معادلة الموجة الواقفة على الوتر. ويلاحظ أن أي نقطة ثابتة x لاتقع على طرف الوتر (و لاتنطبق على مواقع العقد) تتحرك حركة توافقية بسيطة مع مرور الزمن ، وان جميع النقاط تهتز بنفس التردد الزاوي ω . في حالة الموجة المتقدمة تهتز كل نقطة من الوتر بنفس السعة. أمّا مايميز الموجة الواقفة فهو ان سعة الأهتزاز للنقط المختلفة تختلف باختلاف الموضع x على الوتر. وفي الواقع تصل السعة $(2a \sin kx)$ الى ذروتها $2a$ عند المواضع التي تكون فيها

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots,$$

أو

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots\ldots\ldots$$

وتعرف هذه النقط بالبطون. وهذه النقط تتوزع على أبعاد متساوية عن بعضها تساوي نصف طول الموجة .

وتصبح السعة في ادنى قيمة لها (أي صفراً) عند المواضع

$$kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots,$$

أو

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, 2\lambda, \ldots,$$

وتعرف هذه النقط بالعقد وهي تتوزع على أبعاد متساوية تساوي نصف طول الموجة .
الآن نطبق الشرط الحدودي الثاني في المعادلة (6.59) فنحصل على

$$0 = -2a \cos \omega t \sin kL$$

هذه المعادلة صحيحة لكل قيم t ، ولما كانت قيمة $\cos \omega t$ لاتساوي صفراً الا عند قيم محددة لـ t . لذلك يستلزم ان يكون

$$\sin kL = 0$$

أي أن

$$kL = n\pi \qquad \text{.................(6.60)}$$

حيث أن n يساوي صفراً أو أي عدد صحيح ، أي أن :

$$n = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 \text{ ،... الخ}$$

ولكن

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}$$

لذلك فان

$$f = \frac{nc}{2L} \qquad (6.61)$$

هذه العلاقة تحدد الترددات الطبيعية المسموحة للوتر ولما كانت هذه الترددات تعتمد على العدد n لذلك يفضل ان تكتب العلاقة الأخيرة كالآتي :

$$f_n = \frac{nc}{2L} \qquad (6.62)$$

ولما كانت سرعة انتقال الموجة في الوتر c ثابتة وتساوي التردد مضروباً في الطول الموجي $(c = f_n . \lambda_n)$ لذلك فان

$$L = \frac{n \lambda_n}{2} \qquad (6.63)$$

هذه العلاقة تحدد عدد أنصاف الطول الموجي المسموحة بين طرفي الوتر للحصول على الموجات الواقفة .

ان الترددات الطبيعية للوتر يمكن الحصول عليها بتعويض القيمة المناسبة لـ n في المعادلـة (6.62) . فنجد أنـه

عندما تكون قيمة $n = 0$ فان

$$f_0 = 0$$

وهذا يعني ان التردد الطبيعي صفراً أي لايحدث اهتزاز للوتر .

وعندما $n = 1$

$$f_1 = \frac{c}{2L}$$

وهذا التردد الطبيعي يدعى بالتردد أو النغمة الأساسية للوتر وغالباً مايدعى بالترد التوافقـــي الأول

وعندما $n = 2$

$$f_2 = \frac{c}{L}$$

وهذا التردد الطبيعـي يدعى بالتردد التوافقـي الثاني للوتـر .

وعندما $n = 3$

$$f_3 = \frac{3c}{2L}$$

وهذا التردد الطبيعي يدعى بالتردد التوافقـي الثالث للوتـر .

وعندما $n = 4$

$$f_4 = \frac{2c}{L}$$

وهذا التردد الطبيعي يدعى بالتردد التوافقي الرابع للوتر – وهكذا يمكن الاستمرار في حساب الترددات الطبيعيـــة للوتـر .

ان هذه الترددات هي التي تحدد عدد الموجات الواقفة المسموحة بين الطرفين المثبتين للوتر . ويمكن توضيح الموجات الواقفة المقابلة للتوافقيات الاربعة الاولى للوتر في الشكـــل (6-18) .

يلاحظ من هذا الشكل ان العدد n يمثل عدد أنصاف الطول الموجي على طول الوتر أو عدد البطون . ويترك للطالب كتمرين الحصول على الموجات الواقفة المسموحة للوتر عندمـا $4 < n$.

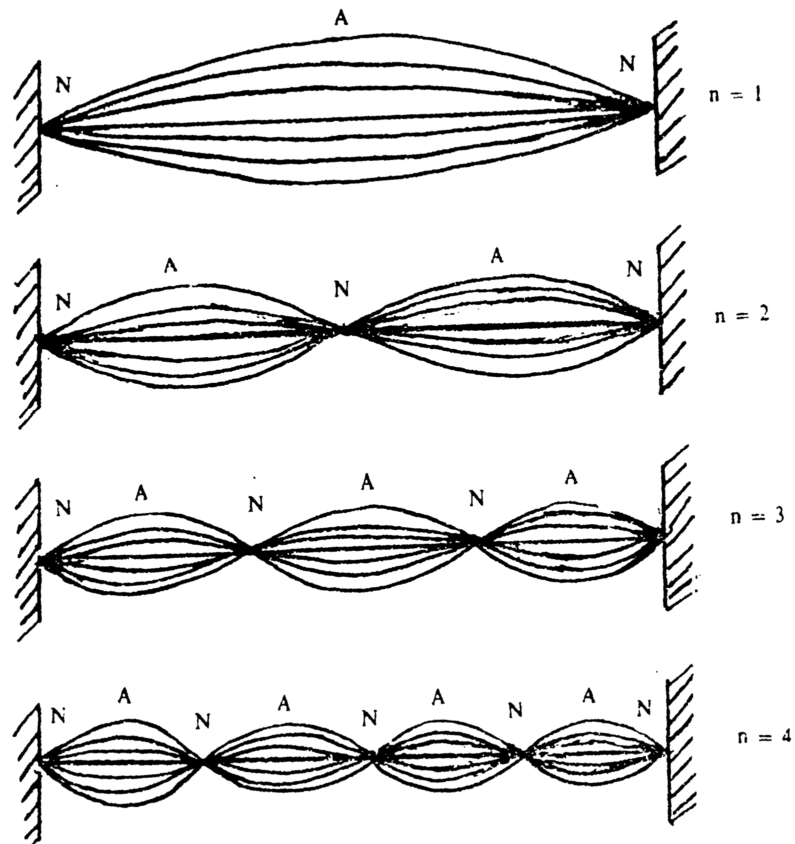
وهكذا يتضح ان الترددات الطبيعية للوتر المحدود الطول والمثبت من طرفيه باحكام هي الترددات f_n المسموح حدوثها في الوتر عندما يكون طوله مساوياً تماماً لعدد صحيح مضروباً في نصف الطول الموجي المناسب λ_n . ويكون حاصل ضرب $f_n \lambda_n$ مساوياً دائماً لسرعة تقدم الموجة على الوتر c مهما كانت قيمـة n

$$f_{n=1} = \frac{c}{2L} \text{ ، } \lambda_{n=1} = 2L$$

$$f_{n=2} = \frac{c}{L} \text{ ، } \lambda_{n=2} = L$$

$$f_{n=3} = \frac{3c}{2L} \text{ ، } \lambda_{n=3} = \frac{2L}{3}$$

$$f_{n=4} = \frac{2c}{L} \text{ ، } \lambda_{n=4} = \frac{L}{2}$$

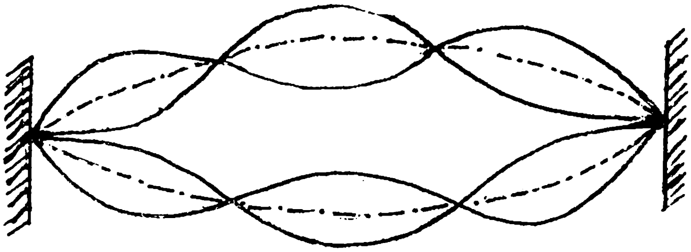


الشكل (6-18) يوضح الموجات الواقفة المسموحة للوتر عند التوافقيات الاربعة الاولى. النقط N تمثل العقد والنقط A تمثل البطون .

وعملياً يمكن اثارة اي نغمة توافقية في الوتر بالنقر الخفيف في الموقع المناسب على الوتر. فمثلاً يمكن اثارة النغمة الأساسية $f_{n=1}$ عندما ينقر الوتر بنقرة خفيفة من وسطه ويمكن إثارة النغمة التوافقية الثانية $f_{n=2}$ عندما يلمس الوتر من وسطه بخفة فتصبح تلك النقطة عقدة . ويهتز الوتر كقطعتين متساويتين بالطول ويكون تردده في هذه الحالة ضعف التردد الأساسي وبالمثل اذا لمسنا الوتر بخفة بنقطتين على بعد ثلث طوله من طرفيه فانه سيهتز كثلاث قطع ويكون تردده ثلاثة أضعاف التردد الأساسي . وهكذا يمكن جعل الوتر يهتز بأكثر من ثلاث قطع وبالطبع فان تردده يزداد بالتناظر .

وبالحقيقة لايمكن اثارة نغمة توافقية نقية تماماً اذ غالباً مايحدث ان يهتز الوتر آنياً بأكثر من تردد طبيعي واحد . فمثلاً عندما يهتز الوتر آنياً بترددين احدهما الاساسي والآخر التوافقي الثالث فان نمط الاهتزاز يكون كما مبين في الشكل (6·19)

واذ أثرنا على الوتر بدفعات دورية ذات تردد يساوي احد تردداته الطبيعية فان الوتر يهتز بسعة كبيرة وعندئذ يقال انه في حالة رنين مع التردد الخارجي الواقع عليه وفي هذه الحالة يهتز الوتر بحركة رنينية مكوناً موجات واقفة . ويجب ان يلاحظ ان حالة الرنين مع القوى الترددية المثيرة للاهتزاز تتحقق في اي تردد طبيعي من ترددات الوتر . اي انها تتحقق في اكثر من تردد واحد . وهكذا يتضح ان اي وتر مهتز له أنماط رنينية عديدة ومختلفة كل منها يمثل موجة واقفة محددة وتحدث في تردد طبيعي معين



الشكل (6-19) يبين شكل حركة الوتر المهتز آنياً بالتردد الاساسي والتردد التوافقي الثالث

وعلى الرغم من ان الوتر المهتز يمثل أبسط المهتزات التي تحدث فيها الحركات الرنينية أي الموجات الواقفة الا ان تفهم سلوكه الرنيني يساعد كثيراً في تفهم الخصائص الرنينية للمهتزات المعقدة . لهذا السبب سنقوم في بند لاحق بدراسة السلوك الرنيني للوتر المهتز باستخدام جهاز بسيط هو الصونومتر .

16– 6 طريقة ثانية لايجاد التردد الطبيعي لسلك متوتر محدد الطول

ان معادلة الموجة (6·12) يمكن حلها بطريقة ثانية هي طريقة فصل المتغيرات . فنفرض ان الحل المناسب في هذه الحالـــة هـــو

$$y(x,t) = X(x)\,T(t) \qquad \ldots (6{\cdot}64)$$

حيث أن X دالـة للمتغير x و T دالة للمتغير t فقط .
نعوض هذا الحل في المعادلـة (6·12) فنحصل عـلى

$$\frac{1}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{C^2}\,\frac{1}{T}\,\frac{d^2T}{dt^2} \qquad \ldots (6{\cdot}65)$$

ولما كان الطرف الأيسر من هذه المعادلة لايعتمد على t بينما الطرف الأيمن لايعتمد على x لذلك فان كل طرف يجب ان يكون مقداراً ثابتاً . فاذا فرضنا ان هذا الثابت يساوي $\left(\frac{\omega}{c}\right)^2$ – فعندئذ نحصل على معادلتين تفاضليتين اعتياديتين :

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \qquad \ldots (6{\cdot}66)$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\omega^2}{c^2} X = 0 \qquad \ldots (6{\cdot}67)$$

والحل العام لكل منهما يكون على الترتيـــب :

$$X = A \sin \omega t + B \cos \omega t \qquad \ldots (6{\cdot}68)$$

$$T = C \sin \frac{\omega}{c} x + D \cos \frac{\omega}{c} x \qquad \ldots (6{\cdot}69)$$

حيث ان D, C, B, A ثوابت اختيارية . الثابتان B, A يعتمدان على الشروط الابتدائية لحركة السلك ، بينما الثابتان D, C يعتمدان على الشروط الحدودية للسلك . وبتعويض (6·68) , (6·69) في (6·64) نجد ان الحل العام لمعادلة الموجة 6·12 هو

$$y(x,t) = (A\sin\omega t + B\cos\omega t)\left(C\sin\frac{\omega}{c}x + D\cos\frac{\omega}{c}x\right) \quad \ldots (6{\cdot}70)$$

والآن اذا أخذنا سلكاً مشدوداً بين نقطتين ثابتتين المسافة الفاصلة بينهما هي L ، فان الشروط الحدودية لهذا السلك هي $y(0,t) = y(L,t) = 0$ لكل قيم t وبتعويض الشرط الحدودي الاول $y(0,t) = 0$ في المعادلة (6·70) ينتج ان

$$D = 0$$

وبذلك يصبح الحل العام كالآتي

$$y(x,t) = C(A\sin\omega t + B\cos\omega t)\sin\frac{\omega}{c}x \quad \ldots (6{\cdot}71)$$

او

$$y(x,t) = (A'\sin\omega t + B'\cos\omega t)\sin\frac{\omega}{c}x$$

حيث ان $CB = B'$, $CA = A'$

وبتعويض الشرط الحدودي الثاني $y(L,t) = 0$ في المعادلة الاخيرة ينتج ان

$$\sin\frac{\omega L}{c} = 0 \quad \ldots (6{\cdot}72)$$

او

$$\frac{\omega_n L}{c} = \frac{2\pi f_n L}{C} = n\pi \quad \ldots (6{\cdot}73)$$

حيث ان n تمثل اي عدد صحيح ($n = 1, 2, 3, 4, \ldots$)

$$f_n = \frac{n}{2L}c = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \ldots (6{\cdot}74)$$

وهذه المعادلة هي نفسها المعادلة (6·62) التي تحدد الترددات الطبيعية للسلك .

ان الحل العام الشامل يجب ان يتضمن جميع الحلول التي تمثل الترددات الطبيعية الحرة التي يمكن ان يهتز بها السلك اذا ماإستثير بأية طريقة كانت ، وعليه فأن المعادلة (6·71) يمكن وضعها بصيغة تمثل الحل العام الشامل :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n' \sin \omega_n t + B_n' \cos \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \ldots (6{\cdot}75)$$

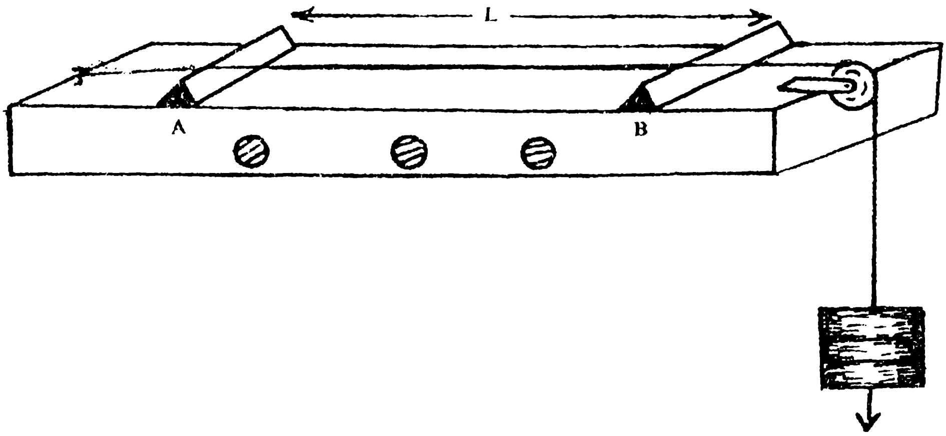
حيث ان

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

واذا علمنا الشروط الأبتدائية للحركة في اللحظة الزمنية $t = 0$ للأزاحة $y(x,0)$ والسرعة $\dot{y}(x,0)$ فأن قيم A_n' و B_n' يمكن ايجادهما .

17 - 6 الصونومتر

يتألف جهاز الصونومتر في الشكل (6·20) بأبسط اشكاله من صندوق من الخشب مجوف طوله حوالي متر واحد فيه فتحات جانبية . وعليه جسران من الخشب احدهما



الشكل (6·20) الصونومتر A جسر ثابت و B جسر متحرك . الحافة العليا لكلا الجسرين حادة ليسهل تحديد طول السلك المهتز بين الجسرين بدقة

ثابت A والاخر متحرك B ويمر فوقهما سلك معدني دقيق . احد طرفي السلك مربوط بمسمار في نهاية الصندوق والطرف الاخر يمر فوق بكرة خفيفة ملساء مثبتة في النهاية الاخرى من الصندوق ومعلق في هذا الطرف من السلك ثقل يحدد مقدار قوة الشد فيه .

وبتحريك الجسر B يمكن تغيير طول الوتر L . وباختيار اثقال معلقة مناسبة يمكن تحديد مقدار قوة الشد F في السلك المعدني المستعمل .

ان الغرض من هذا الجهاز هو تحقيق قوانين الاوتار المهتزة باستخدام ظاهرة الزنين او ظاهرة الموجات الواقفة .

17 — 6 قوانين الاوتار المهتزة

لقد وجدنا في البند السابق ان التردد الطبيعي لاي وتر محدود الطول ومثبت من طرفيه باحكام يمكن ايجاده من المعادلة .

$$f_n = \frac{nc}{2L}$$

ولدينا ايضا ان سرعة تقدم الموجة المستعرضة c في وتر مشدود بقوة F وكثافته الخطية μ هي

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

وبتركيب هاتين المعادلتين نحصل على المعادلة الاساسية للاوتار المهتزة .

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \ldots (6\cdot76)$$

ان هذه المعادلة صحيحة فقط للاوتار المثالية ، اي تلك التي مرونتها تامة ومساحة مقطعها منتظم تماما ولاتعاني تغيراً محسوساً بالطول نتيجة الاهتزاز ان مثل هذه الاوتار تعتبر صلابتها مهملة . ولكن عندما لايتحقق هذا الشرط فأن المعادلة اللازمة لايجاد التردد الطبيعي للوتر هي .

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}\left(1 + \frac{\pi^2 n^2 r^4 E}{8L^2 F}\right) \qquad \ldots (6.77)$$

حيث ان r هي نصف قطر المقطع الدائري للوتر الذي طوله الكامل L . و E هي معامل المرونة (معامل يونك) . من الواضح في هذه المعادلة ان عامل التصحيح وهو الحد الثاني تزداد اهميته في الترددات التوافقية العليا للوتر اي عندما تكون قيمة n كبيرة حيث لايمكن اهمال معامل الصلابة فيه . ولغرض الحصول على ترددات توافقية واطئة في بعض الاجهزة الوترية ولتقليل أثر الصلابة في الاوتار المهتزة اما ان نختزل قوة الشد F الى الحد الذي لايمكن تحقيقه عملياً او أن نزيد طول الوتر او سمكه زيادة مفرطة وهذا لايمكن عملياً أيضاً . وللتغلب على هذه الصعوبات تلف الأوتار المهتزة بأسلاك نحاسية في غاية الدقة بلفات متجاورة على طول الوتر . ان هذا يؤدي الى زيادة الكثافة الخطية للوتر وبالتالي ينقص قيمة التردد f_n دون أن يؤثر على مرونة الوتر . وبهذه الطريقة يمكن أيضاً التخلص من الأهتزازات غير التوافقية .

وفي معظم الاحوال العملية تعامل الاوتار المهتزة باعتبارها اوتاراً مثالية ، ولذلك سيكون اهتمامنا مقتصرا على المعادلة (6.76) . فأذا اعتبرنا ان الوتر يهتز كقطعة واحدة بين نقطتين ثابتتين فأن التردد الطبيعي لمثل هذا الاهتزاز هو :

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \ldots (6.78)$$

وهذا هو التردد الاساسي او النغمة التوافقية الاولى .

من هذه المعادلة (6.78) نستخلص ان هنالك ثلاثة قوانين للاهتزاز المستعرض في سلك محدود الطول وهي :

(1) ان التردد الاساسي يتناسب عكسيا مع طول الوتر المهتز . اي ان

$$f \propto \frac{1}{L} \qquad \ldots (6.79)$$

(2) ان التردد الاساسي يتناسب طرديا مع الجذر التربيعي لقوة الشد في الوتر . اي ان

$$f \propto \sqrt{F} \qquad \ldots (6{\cdot}80)$$

(3) ان التردد الأساسي يتناسب عكسيا مع الجذر التربيعي للكثافة الخطية (اوكتلة وحدة الطول) اي ان

$$f \propto \frac{1}{\sqrt{\mu}} \qquad \ldots (6{\cdot}81)$$

ان العلاقات (6·79) , (6·80) , (6·81) التي تم استخلاصها نظرياً من المعادلة (6·78) هي نفسها تمثل القوانين الثلاثة التجريبية التي سبق ان حققها (Mersenne) عمليا لذلك فان هذه القوانين تدعى باسمه ، اي قوانين ميرسين التجريبية .

وبتركيب القوانين الثلاثة (6·79) , (6·80) , (6·81) نجد ان

$$f \propto \frac{1}{L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$f = \frac{K}{L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

وبمقارنة هذه المعادلة مع (6·78) نجد ان قيمة ثابت التناسب K هي

$$K = \frac{1}{2}$$

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

ويمكن التعبير عن المعادلة الاخيرة بصيغة اخرى . نفرض طول الوتر المهتز L وقطره D وكثافة مادته ρ . فعندئذ يكون حجم الوتر V هو

$$v = \frac{\pi}{4} D^2 L$$

وكتلة الوترm تساوي كثافة الوتر ρ في حجم الوتر v اي ان

$$m = \rho v = \frac{\pi}{4} D^2 L\rho$$

$$\text{وكتلة وحدة الطول للوتر } \mu = \frac{\text{كتلة الوتـر}}{\text{طول الوتـر}} = \frac{m}{L}$$

$$\therefore \mu = \frac{m}{L} = \frac{\pi}{4} D^2\rho$$

وبتعويض هذه القيمة لـ μ في المعادلة (6·78) نجد ان

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\frac{\pi}{4} D^2 \rho}} = \frac{1}{LD} \cdot \sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$$

وعليه فأن التردد الاساسي للوتر هو

$$f = \frac{1}{LD} \sqrt{\frac{F}{\pi\rho}} \qquad \text{..................(6 - 82)}$$

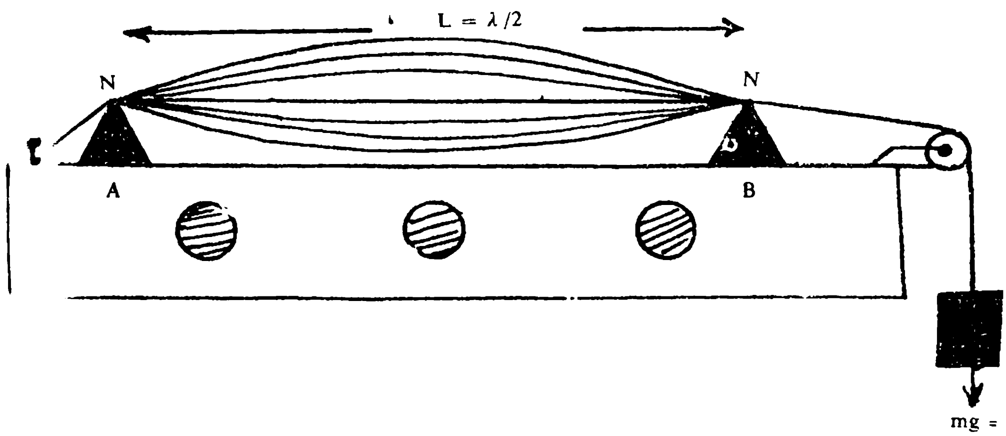
ان قوانين الوتر المهتز يمكن تحقيقها عمليا باستخدام جهاز الصونومتر

18 – 6 عمل جهاز الصونومتر

ان الهدف الرئيسي من استخدام الصونومتر هو ايجاد التردد الطبيعي (اوالتردد الرنيني) لاي جسم مهتز. ويستند عمل هذا الجهاز على ظاهرة الرنين في الوتر المهتز، او بالاحرى على تكوين الموجات الواقفة (او الساكنة او المستقرة) . وكما رأينا ان الموجات الواقفة ماهي

بالحقيقة الا نمط ثابت من الاهتزاز يحدث في الوتر المهتز عند ترددات محددة تمثل الترددات الطبيعية او الترددات الرنينية للوتر.

فأذا نقر وتر الصونومتر نقرة خفيفة من وسطه وترك حراً فأنه سيهتز بتردد طبيعي يمثل التردد الاساسي للوتر. وقيمة هذا التردد يحددها مقدار قوة الشد F وطوله L وكثافته الخطية μ. ويكون شكل الموجة الواقفة في الوتر BA كما مبين في الشكل (6-21)

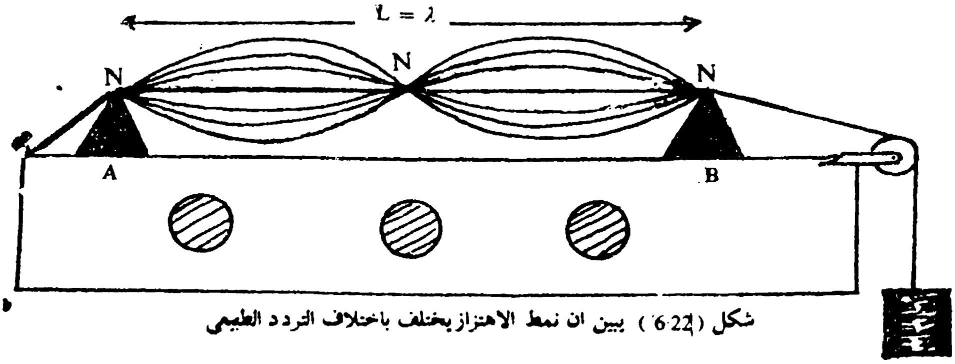


الشكل (6-21) نمط الاهتزاز عند التردد الاساسي للوتر يمثل الموجة الواقفة عند ذلك التردد.

وعندما يهتز الوتر فان الصندوق وبالاخص الوجه الاعلى منه سيهتز قسريا ، وذلك بسبب انتقال الاهتزاز اليه عن طريق الجسرين B,A . والهواء. وهذا يؤدي الى ارتفاع شدة الصوت المسموع الناتج من اهتزاز الوتر.

ولكن عندما يهتز الصندوق فأنه بدوره يسبب اهتزاز الهواء بتجويفه قسرياً. والهواء المهتز ينتج صوتاً. واذا كان الصندوق المجوف مزوداً بفتحات جانبية فأن الصوت الذي ينتجه الهواء المهتز ينبعث من تلك الفتحات وهذا يؤدي بالتالي الى زيادة شدة الصوت الناتج اصلا من الوتر المهتز. ان وجود هذه الفتحات يجعل طاقة الهواء تتبدد بسرعة. مما يساعد على كبت الرنين الذي قد يحدث للهواء في تجويف الصندوق.

ومن الممكن ان يهتز الوتر بأي تردد طبيعي آخر غير التردد الاساسي . فمثلاً اذا لمسنا منتصف الوتر بواسطة القلم ونقرنا احد نصفي الوتر من وسطه ورفعنا القلم وتركنا الوتر يهتز فانه سيهتز بتردد يساوي ضعف التردد الاساسي . وفي هذه الحالة يكون شكل الموجة الواقفة في الوتر AB كما مبين في الشكل (6.22) .



شكل (6.22) يبين ان نمط الاهتزاز يختلف باختلاف التردد الطبيعي

الآن اذا كان لدينا شوكة رنانة مهتزة وضغطنا قاعدتها على الوجه الأعلى من الصندوق فان الصندوق وبالأخص الوجه الأعلى منه سيهتز قسرياً ، وهذا الأهتزاز ينتقل عن طريق الهواء والجسرين B,A الى الوتر وان الوتر سيهتز قسرياً أيضاً . ولكن اهتزاز الوتر سيكون ضعيفاً أو معدوماً مالم يكن تردده مساوياً لتردد الشوكة الرنانة . ولما كان تردد الشوكة الرنانة ثابتاً عادة ، وتردد الوتر يمكن تغييره . لذلك يفضل في هذه الحالة أن نغير تردد الوتر . وأسهل الطرق لتغيير تردد وتر معين هو بجعل قوة الشد فيه ثابتة وبتغيير طوله من خلال تحريك الجسر B . لنبدأ بضغط ساق الشوكة الرنانة المهتزة عندما يكون طول الوتر قصيراً أي عندما يكون الجسر B قريباً من A . نزيد طول الوتر ببطء وذلك من خلال تحريك الجسر B بعيداً عن A بينما الشوكة الرنانة تهتز وأثناء ذلك نراقب سلوك الوتر بين الجسرين ، وتستمر في هذه العملية حتى نلاحظ ان الوتر يبدأ في الأهتزاز بشدة عند طول محدد تماماً ، ويكون نمط الأهتزاز كما مبين في الشكل (6.21) وفي هذه الحالة اذا رفعنا الشوكة الرنانة وأوقفنا حركتها بمسكها باليد فان الوتر يستمر في الأهتزاز بنفس تردد الشوكة الرنانة . وفي الواقع ان ماحدث هو ان الوتر المحصور بين الجسرين B,A قد استجاب لأهتزاز الشوكة الرنانة عندما تساوى تردده الأساسي مع تردد الشوكة الرنانة . ويسهل تفسير هذه الحالة الخاصة على أساس ان طرفي الوتر أو أحدهما في الأقل يستلم دفعات اهتزازية من الشوكة الرنانة بمعدل يساوي ترددها f ان الزمن الدوري الفاصل بين دفعتين متتاليتين يساوي

$T = \frac{1}{f}$. ان الدفعة أو النبضة التي تبدأ بالحركة من الطرف A. وتنتقل خلال الوتر

لتصل B ثم تنعكس لتعود ثانية الى الطرف A تستغرق زمناً مقداره $\frac{2L}{c}$ حيث L

تمثل طول الوتر المحصور بين B,A والثابت C يمثل سرعة الموجة في الوتر ويساوي

$\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ فاذا ماتساوى الزمن الدوري T أو مضاعفاته لأمداد الطرف A من

الوتر بالنبضات مع زمن رحلة النبضة خلال الوتر من A الى B ثم عودتها ثانية الى A

(أي أن $T = \frac{L}{2c}$) فان ذلك يعني ان النبضة المنعكسة من الطرف B تصل الطرف

A في لحظة مناسبة تماماً لتقويتها بواسطة النبضة الجديدة التي يستلمها الطرف A من الشوكة الرنانة. وفي لحظة أنعكاس النبضة من B فان كليهما يكونان متفقين في

الطور تماماً وهذا يؤدي الى تقوية النبضة. ونتيجة لتكرار ذلك فان النبضات المنعكسة تتقوى باستمرار بسبب اضافة الطاقة الى النبضات المتحركة ذهاباً واياباً على الوتر. ولذلك فان النبضات تصبح كبيرة وبالتالي يكون الأهتزاز شديداً. أما اذا اختلف طول الوتر فان التزامن ينعدم ولاتزود النبضة المنعكسة بالطاقة في الوقت المناسب مما يؤدي الى ضعف الأهتزاز أو حتى انعدامه تماماً. وهذه هي فكرة الرنين عموماً التي تتمثل باختصار بشرطين أساسيين أولهما تساوي تردد القوى المثيرة (الشوكة الرنانة) مع التردد الطبيعي للمهتز (الوتر المحصور بين B , A) وثانيهما ان يكون طور القوة المثيرة (النبضة الجديدة) بنفس طور حركة المهتز (النبضة المنعكسة) ، أو أن يكون فرق الطور بينهما مساوياً لـ 2π أو مضاعفات 2π . وهكذا نرى أنه عندما يتساوى تردد الشوكة مع تردد الوتر فعندئذ يقال ان الشوكة في حالة رنين مع الوتر. وعندئذ ستكون سعة الأهتزاز كبيرة اذا لم تكن المقاومة الأحتكاكية عالية.

وهناك ثلاث طرائق للكشف عن حالة الرنين أي حالة تطابق تردد الشوكة الرنانة مع التردد الطبيعي للوتر المهتز. وهي :

أولاً : طريقة الضربات .

ثانياً : طريقة مقارنة درجات الصوت .

ثالثاً : طريقة الورقة المعابة على الوتر .

في الطريقة الأولى عندما يحفز كل من الوتر والشوكة الرنانة على الأهتزاز في نفس الوقت يكون ترددهما متقاربين بحدود 10 هيرتز فان ضربات تسمع على شكل تناوب دوري في ارتفاع وانخفاض شدة الصوت الناتج من تداخل الصوتين ويكون تردد الضربات مساوياً للفرق بين الترددين المنفصلين. وعندما يحدث ذلك فاننا نستمر في تغيير تردد الوتر من خلال التحكم بطوله بواسطة الجسر المتحرك. لكي نقلل عدد الضربات حتى تختفي تماماً. ان هذه الطريقة تحتاج الى مكان هادىء تماماً وآذان حساسة.

وفي الطريقة الثانية عندما يهتز كل من الوتر والشوكة الرنانة في نفس الوقت بترددين مختلفين فان الأذن تحس باختلاف درجتيهما*. واذا كانت الأذن مدربة ومرهفة الحس فانها تستطيع التمييز بين درجتي صوتي ترددهما متقارباً الى حد واحد هيرتز. ان هذه الطريقة في البت بتساوي ترددين من خلال الحكم على تساوي درجتيهما بواسطة الأذن هي بالطبع طريقة سهلة وسريعة خاصة بالنسبة لمن يمتلكون آذاناً موسيقية!

وفي الطريقة الثالثة نلجأ الى مبدأ الرنين الذي عنده تصبح سعة الأهتزاز أكبر مايمكن عند البطن. وللكشف عن ذلك نضع ورقة صغيرة وخفيفة على شكل رقم ٨ في منتصف المسافة بين الجسرين B, A ثم نضغط قاعدة الشوكة الرنانة المهتزة على الوجه الأعلى لصندوق الصونومتر وبنفس الوقت نبدأ بتحريك الجسر B من مسافة قريبة من A لتغيير التردد الطبيعي للوتر. نزيد طول الوتر ببطء وبين فترة واخرى نحرك الورقة لتكون في منتصف المسافة بين B. A دائماً. ومتى ماتساوى التردد الطبيعي للوتر مع تردد الشوكة المهتزة حدث اهتزاز شديد وبسعة كبيرة يؤدي الى سقوط الورقة بسهولة. في هذه الطريقة من المهم ان يكون تغيير التردد الطبيعي للوتر من خلال تحريك الجسر ببطء شديد لأن الرنين يحدث في نقطة محددة يسهل تجاوزها ان تحرك الجسر بسرعة.

وعلى طالب الفيزياء أن يتبع جميع هذه الطرق العملية عند اجراء أية تجربة تتعلق بالصونومتر لأن ذلك لا يخلو قطعاً من فائدة بالأضافة الى كونه جزءاً من التدريب المطلوب في حقل دراسته.

* ان تردد اي نغمة نقية يمثل كمية فيزياوية محددة تماما. وهذا التردد يثير احساساً معيناً في الاذن البشرية. وان الاحساس المقابل لهذا التردد يدعى بدرجة النغمة.

19 – 6 تحقيق قوانين الاوتار المهتزة

(أ) تحقيـــق القانـــون الأول $f \propto \frac{1}{L}$

نأخذ شوكتين رنانيتين معلومتين التردد f_2 , f_1 . نطرق احداهما ولتكن الشوكة الأولى بقطعة من المطاط لقسرهاعلى الأهتزاز. وأثناء اهتزازها نضغط/قاعدتهاعلى السطح الأعلى من الصونومتر فينتقل الأهتزاز قسرياً الى السلك . وأثناء ذلك نغير طول السلك بتحريك الجسر المتحرك ببطء حتى يحصل رنين بين الشوكة الرنانة التي ترددها f_1 والسلك المهتز الذي طوله l_1 حيث يكون التردد الطبيعي للسلك المهتز مساوياً لـ f_1 وسعة اهتزازه أكبر مايمكن . الآن نعيد نفس التجربة مرة أخرى مع الشوكة الرنانة الثانية التي ترددها الطبيعي f_2 ونجد طول السلك الذي سيكون في حالة رنين معها وليكن l_2 . فاذا كان الثقل المعلق في طرف السلك ثابتاً والسلك نفسه خلال اجراء التجربة فعندئذ نجد أن

$$f_1 = \frac{1}{2l_1} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

و

$$f_2 = \frac{1}{2l_2} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

ومنهما نحصل على العلاقة

$$f_1 \, l_1 = f_2 \, l_2$$

وهذا يحقق القانون الأول .

(ب) تحقيـــق القانـــون الثـــاني : $f \propto \sqrt{F}$

نعلق ثقلا معلوما في طرف السلك ليكون مقدار قوة الشد فيه معلوماً وليكن F_1 ثم نضغط قاعدة الشوكة الرنانة المهتزة والتي ترددها f_1 على السطح الأعلى للصونومتر وأثناء ذلك نغير طول السلك بتحريك الجسر المتحرك ببطؤ حتى يحصل الرنين بين الشوكة الرنانة وطول الجزء المهتز من السلك الذي طوله l_1 ،

$$f_1 = \frac{1}{2\,l_1} \sqrt{\frac{F_1}{\mu}}$$

ثم نحسب التردد الرنيني للسلك عندما يكون طوله ايضا L_1 وتحت قوة شد مقدارها F_2 وليكن هذا التردد هو f_2 فعندئذ نحصل على

$$f_2 = \frac{1}{2\,l_1}\sqrt{\frac{F_2}{\mu}}$$

من المعادلتين اعلاه نحصل على ان :

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\sqrt{F_1}}{\sqrt{F_2}}$$

وهذا يحقق القانون الثاني $f \alpha \sqrt{F}$

(جـ) تحقيـق القـانـون الثـالث : $f \propto \frac{1}{\sqrt{\mu}}$

ناخذ سلكين مختلفين وليكن أحدهما من الحديد والآخر من النحاس مثلاً ، ونفرض ان كتلة وحدة الطول لكل منهما μ_1 و μ_2 على الترتيب. ونعلق نفس المقدار من الثقل في طرف كل منهما وبذلك يكون كلاهما تحت نفس الشد F . نستخدم شوكة رنانة معلومة التردد وليكن f_1 ثم نجد طول كل من السلكين l_1 و l_2 الذي سيكون في حالة رنين مع هذه الشوكة .

بعد ذلك نحسب التردد الرنيني f_2 الذي سيهتز به طول مقدار l_1 من السلك الثاني تحت نفس المقدار من الشد وذلك باستخدام القانون الأول فنجد أن

$$f_1\, l_2 = f_2\, l_1$$

وعندئذ يمكن ان نثبت ان

$$f_1 \sqrt{\mu_1} = f_2 \sqrt{\mu_2}$$

أو

$$\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

وهذا يحقق القانون الثالث .

$$f \alpha \frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

امثلة محلولة

مثال (1 − 6)

احسب تردد النغمة الاساسية لوتر طوله 1 متر وكتلته 2 غم عندما يكون تحت قوة شد تعادل ثقل كتلته 400 كلغم .

الحل :

لدينا

طول السلك = l = 1 متر

كتلة السلك = m = 2 غم = 0.002 كلغم

كتلة وحدة الطول = $\mu = \frac{m}{l} = \frac{0.002}{1} = 0.002$ كلغم لكل متر

قوة الشد في الوتر $T = 400 \times 9.8$ نيوتن

نعوض في العلاقة

$$f = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

التردد الاساسي للوتر يحدث عندما n = 1

والآن نعوض القيم المناسبة فنجد ان

$$f = \frac{1}{2 \times 1} \sqrt{\frac{400 \times 9.8}{0.002}}$$

ونحصل على النغمة الاساسية

f = 700 هيرتز

مثال (2 − 6)

يتذبذب وتر مشدود بتردد قدره 30 هيرتز عندما يصدر النغمة الاساسية الاولى فاذا كان طول الوتر 60 سم وكتلة وحدة الاطوال منه هي 0.5 غم / سم .

(أ) احسب سرعة انتقال الموجة المستعرضة في الوتر.
(ب) احسب قوة الشد في الوتر.

الحل :

(أ) ان التردد الاساسي للوتر يحدث عندما يهتز الوتر كقطعة واحدة حيث تتكون بطناً واحدة عند منتصفه بينما عند نهايتيه المثبتين عقدتين. وفي هذه الحالة يكون طول الوتر مساوياً لنصف طول الموجة. اي ان

$$\frac{\lambda}{2} = 60$$

ومنها نجد ان

$\lambda = 120$ سم $= 1.2$ متر

وحيث ان سرعة الموجة c هي حاصل ضرب التردد f في الطول الموجي λ أي ان

$$c = f\lambda$$

نعوض القيم المناسبة فنجد ان

$c = 30 \times 120 = 36$ م / ثا

(ب) لحساب قوة الشد F في الوتر لدينا

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

ومنها نجد ان

$$F = \mu c^2$$

نعوض القيم المناسبة فنحصل على

$F = (36)^2 \times 0.05 = 64.8$ نيوتن

مثال (3 – 6)

سلكين من نفس المادة لهما نفس القطر مربوطين في صونومترين تحت نفس الشد. ينتج من اهتزازهما معاً ضربتين في الثانية الواحدة. فاذا كان طول السلك الاول 50 سم وطول السلك الثاني 50.1 سم. احسب تردد السلكين.

الحل :

- نفرض ان تردد السلك الاول f_1 وتردد السلك الثاني f_2

لدينا $\qquad$ (1) .... $2 = f_1 - f_2$ $\qquad$ ضربة في الثانية

$50 = l_1$ سم

$50.1 = l_2$ سم

ولدينا العلاقة

$$f_1 = \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$f_2 = \frac{1}{2\,l_2}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

ولما كانت قوة الشد F واحدة في السلكين وان طبيعة المادة وقطرها متماثلاً لذلك تكون قيمة μ في السلكين واحدة ايضاً .

ومن المعادلتين (2) و (3) نحصل على

$$f_1\, l_1 = f_2\, l_2$$

نعوض القيم المناسبة فنحصل على

$$f_1 = \left(\frac{50.1}{50}\right) f_2$$

نعوض قيمة f_1 في المعادلة (1) فنحصل على

$$\left(\frac{50.1}{50}\right) f_2 - f_2 = 2$$

ومنها نجد ان

$1000 = f_2$ هيرتز

وبالتعويض في المعادلة (1) نجد ان

$$2 = f_1 - 1000$$

ومنها نجد ان

$$f_1 = 1002 \text{ هيرتز}$$

مثال (6 – 4)

سلك مرن طوله 0·99 متر وكتلته 1 غم مشدود بقوة تعادل F نيوتن . اذا كان السلك يهتز بثلاث بطون بتردد قدره 500 هيرتز. احسب قوة الشد ؟

الحل

لدينا المعلومات التالية

طول السلك $l = 0{\cdot}99$ متر

كتلة السلك $m = 1$ غم $= 0{\cdot}001$ كلغم

كتلة وحدة الطول $\mu = \dfrac{m}{l} = \dfrac{0{\cdot}001}{0{\cdot}99}$ كلغم لكل متر

التردد $f = 500$ هيرتز

الشد $F = ?$

لدينا العلاقة العامة

$$f = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \text{...........} (1)$$

وعندما يهتز السلك بثلاث بطون تفصلها عقد فانه يهتز كثلاث قطع تفصلها نقاط ثابتة . وفي هذه الحالة نضع

$$n = 3$$

نعوض القيم المناسبة في العلاقة (1) فنحصل على

$$500 = \frac{3}{2 \times 0{\cdot}99}\sqrt{\frac{F}{0{\cdot}001/0{\cdot}99}}$$

نربع الطرفين ونضرب الطرفين في الوسطين فنحصل على

$$\frac{(500)^2 \times 4 \times (0{\cdot}99)^2 \times 0{\cdot}001}{9 \times 0{\cdot}99} = F$$

ومنها نجد ان

$$F = 110 \text{ نيوتن}$$

مثال (5 – 6)

تتولد موجة مستعرضة جيبية في أحد طرفي حبل افقي طويل بوساطة قضيب يحرك هذ الطرف الى اعلى والى اسفل مسافة عمودية قدرها 15 سم . فاذا علم ان هذه الحركة مستمرة وأنها تتكرر بانتظام مرتين في كل ثانية . وان الكثافة الخطية للحبل هي 2 غم / سم وان الشد فيه يكون مساوياً ثقل كيلوغرام واحد . أوجد مايلي :
(أ) السعة (ب) التردد (ج) السرعة (د) طول الموجة

الحل :

(أ) ان طرف الحبل يتحرك مسافة مقدارها 7.5 سم بعيداً عن موضع التوازن ، أولاً الى أعلى ثم الى أسفل وتكون الازاحة الكلية الناتجة هي 15 سم . وبالتالي فان السعة هي 7.5 سم واذا فرضنا ان المعادلة التي تحدد الازاحة المستعرضة y في اية لحظة زمنية على امتداد السلك هي :

$$y = A \operatorname{Sin} (\omega t - kx)$$

فان السعة $A = 7.5$ سم

(ب) ولما كانت الحركة كلها تتكرر مرتين في الثانية ، لذلك فان التردد هو اهتزازتان في الثانية اي ان التردد $f = 2$ هيرتز .

(ج) ان سرعة الموجة المستعرضة c في السلك يمكن ايجادها من العلاقة .

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

حيث ان $F = 1 \times 9.8 = 9.8$ نيوتن

$\mu = 2$ غم / سم $= 0.2$ كلغم / م

وبالتعويض المناسب نجد ان

$$c = \sqrt{\frac{9.8}{0.2}}$$

فنحصل على

$c = 7$ م / ثا

(د) طول الموجة λ يمكن ان نحصل عليه من العلاقة

اي ان

$$c = f\lambda$$

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

وبالتعويض المناسب نجد ان الطول الموجي λ هو

$$\lambda = \frac{7}{2} = 3\cdot5 \text{ متر}$$

مثال (6·6)

في المثال (6·5) أوجد السرعة والتعجيل لنقطة تقع على الحبل وتبعد بمقدار 3·5 متر عن الطرف المتحرك (المصدر).

الحل :

ان الموجة المستعرضة عندما تنتقل في الحبل ، فان كل نقطة من الحبل تتحرك الى اعلى والى أسفل في اتجاه عمودي على اتجاه انتقال الموجة .
ان المعادلة الجيبية التي تصف هذه الموجة هي

$$y = A \sin(\omega t - kx), \qquad (1)$$

$$y = A \sin k\left(\frac{\omega}{k} - x\right) = A \sin k(ct - x)$$

ان c هنا تدل على السرعة الافقية الثابتة للتتابع الموجي . أما مانبحث عنه الأن فهو سرعة نقطة في الخيط تمر بها الموجة . هذه السرعة ليست افقية كما انها ليست ثابتة ، في الواقع تتحرك جميع النقط عمودياً ، اي في اتجاه المحور العمودي Y ولتحديد سرعة النقطة المادية التي نرمز لها بالحرف v سنركز اهتمامنا على نقطة مادية في موضع يبعد بمقدار x اي ان x في هذه الحالة أصبحت ثابتاً ، ويمكن ايجاد كيف تتغير الازاحة العمودية y مع الزمن t من خلال ايجاد مشتقة y بالنسبة للزمن t واعتبار x مقداراً ثابتاً فنجد ان

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = A\omega \cos(\omega t - kx) \quad ....(2)$$

أما التعجيل a للنقطة المادية فيمكن ايجاده بأخذ المشتقة الثانية لـ y بالنسبة للزمن فنجد ان

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t - kx) \quad ....(3)$$

وبتعويض المعادلة (1) في (3) نجد ان

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y \quad .....(4)$$

وهذه المعادلة توضح أن أية نقطة مادية تمر بها موجة جيبية تتحرك حركة توافقية بسيطة ، حيث ان تعجيل النقطة المذكورة يتناسب مع الازاحة ، ويكون اتجاهه بعكس اتجاه زيادة الازاحة .

للنقطة المادية عند $x = 3\cdot5$ م في الحركة الموجية الموضحة في المثال (6·5) والتي فيها

$A = 7\cdot5$ متر

$\omega = 2\pi f = 4\pi$ لكل ثانية

$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{4\pi}{7}$ لكل متر .

نعوض القيم المناسبة في المعادلة (2) فنجد ان السرعة v هي

$$v = 7\cdot5 \left[4\pi \cos\left(4\pi t - \frac{4\pi}{7} \times 3\cdot5 \right) \right]$$

وبذلك نحصل على

$v = 30\pi \cos(4\pi t - 2\pi)$ متر لكل ثانية .

هذه المعادلة تشير الى ان سرعة النقطة تتغير مع الزمن t .

ولايجاد التعجيل نعوض القيم المناسبة في المعادلة (3) فنجد ان

$$a = -7\cdot5 \times (4\pi)^2 \times \sin\left(4\pi t - \frac{4\pi}{7} \times 3\cdot5 \right)$$

ومنها نجد ان

$$a = 120\pi^2 \sin(4\pi t - 2\pi)$$ متر/ ثا^2

هذه المعادلة تشير ايضا الى ان التعجيل يتغير مع الزمن t.

مثـــال (7 – 6)

ماهو الشد اللازم تسليطه على سلك من النحاس مساحة مقطعه العرضي 10^{-2} سم^2 لكي تكون سرعة الموجتين الطولية والمستعرضة فيه واحدة.
معامل يونك للنحاس = 9.1×10^{11} داين لكل سم^2
ناقش هل يمكن ادراك ذلك فيزياويا ؟

الحـــل

لدينا سرعة الموجة المستعرضة في السلك = $\sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$

وسرعة الموجة الطولية في السلـــك = $\sqrt{\dfrac{Y}{\rho}}$

وفي حالة تساوي السرعتين نحصل عـــلى

$$\frac{F}{\mu} = \frac{Y}{\rho}$$

ومنها نجـــد ان

$$F = \frac{\mu}{\rho} Y$$

لكـــن

$$\mu = \rho A$$

لذلـــك فان

$$F = AY \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث A هي مساحة المقطع العرضي للسلك. وبالتعويض المناسب نجد ان

$F = 10^{-2} \times 9.1 \times 10^{11} = 9.1 \times 10^{9}$ داين

هذا من ناحية الحسابات. ولكن هل تتفق هذه النتيجة مع الواقع. لدينا معامل يونك يعطى بالعلاقـــة

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L / L}$$

ومن هذا التعريف نجـد ان

$$F = AY \frac{\Delta L}{L} \qquad ....(2)$$

وبمقارنة المعادلتين (1) ، (2) نلاحظ انه كي تتساوى السرعتين يجب ان تكون المطاوعة $1 = \frac{\Delta L}{L}$. وهذا يعني ان السلك قد تجاوز بكثير حد المرونة ولم يعد يخضع للعلاقة الخطية التي على اساسها تم اشتقاق معادلات الموجة . وعلى هذا الاساس فان تساوي السرعتين لايمكن ادراكه فيزياوياً . والموجات الطولية سوف تنتقل دائماً اسرع من الموجات المستعرضة في السلك

اسئلة

6 – 1 ماهي الموجات المستعرضة ؟ وضحها واذكر امثلة عليها .

6 – 2 وضح كيف ان سرعة الموجات المستعرضة في سلك تزداد مع زيادة الشد وتقل بزيادة كتلة وحدة الطول من السلك .

6 – 3 هل يمكن اعتبار الموجات على سطح الماء موجات مستعرضة ؟

6 – 4 كيف تتغير سعة وشدة الموجات المستعرضة مع البعد عن مصدر الاهتزاز .

6 – 5 عندما تتداخل موجتان مستعرضتان ، هل تعوق احداهما تقدم الاخرى ؟

6 – 6 عندما تتداخل الموجات ، هل تكون هناك طاقة مفقودة ؟ اشرح اجابتك .

6 – 7 اذا اختلفت موجتان مستعرضتان في السعة فقط وانتشرتا في اتجاهين متعاكسين في سلك ما ، هل يحدثان موجة واقفة ؟ وهل تكون هناك طاقة منقولة ؟ هل توجد هناك أية عقد ؟

6 – 8 تصنع اوتار بعض الالات الموسيقية الوترية من امعاء القطط الملفوف عليها سلك دقيق . مافائدة السلك الملفوف ؟ وضح ذلك .

6 – 9 يهتز وتر مثبت من طرفيه مع تكون أربع بطون عليه . اي انه منقسم الى الى اربع قطع . هل يمكننا ان نلمس الوتر بحد السكين دون ان يضطرب اهتزازه ؟ وضح كيف ؟

6 – 10 هل يمكن ان تؤدي موجتان متماثلتان تسيران في نفس الاتجاه على وتر الى تكوين موجة واقفة ؟ وضح .

6 – 11 وضح مايحدث عندما تصل موجة مستعرضة الى (أ) الطرف المثبت للوتر (ب) الطرف الحر للوتر . وضح اجابتك واستعن بالرسم

6 – 12 هل يتغير طول الوتر عندما تنتقل موجة مستعرضة فيه ؟ وضح ذلك .

6 – 13 ايهما أسرع في الانتقال في سلك معدني رقيق الموجة الطولية او الموجة المستعرضة ؟

6 – 14 يقوم مهتز متغير التردد بارسال الموجات الى وتر طوله 1 ويمكن اعتبار ان طرفيه عقدتين . ثبت الوتر في نقطة تبعد مسافة $\frac{1}{3}$ عن أحد طرفيه

بحلقة صغيرة بحيث امتنعت حركة الوتر في هذه النقطة بالرغم من ان الحلقة لاتزال تسمح للطاقة بالمرور. صف الموجات الواقفة التي سوف تلاحظ على الوتر عند زيادة تردد المذبذب ببطء ابتداء من قيمة منخفضة جداً.

كرر العملية اذا ثبت الوتر في نقطة اخرى ولتكن على بعد $\frac{L}{5}$ عن احد طرفيه

6 – 15 تحتوي اجزاء الوتر الصغيرة القريبة من البطون على طاقة حركية كبيرة اشرح كيف تنتقل الطاقة من المصدر الى البطون بالرغم من ان الطاقة الحركية لاجزاء الوتر القريبة من العقد صغيرة جداً.

6 – 16 في الموجات الواقفة في وتر تلاشي كل من الموجتين الساقطة والمنعكسة الاخرى عند مواضع العقد. هل فقدت الطاقة؟ ماذا حدث لها؟

6 – 17 هل يمكن وصف الموجات المستعرضة بأنها موجات صوتية؟

6 – 18 ماهي قوانين الاهتزازات المستعرضة في الاوتار المشدودة.

6 – 19 ماهو التردد الاساسي وماهي التوافقيات في الاوتار المهتزة. وماهي العلاقة بينهما؟

6 – 20 اذا تضاعفت قوة الشد ونصفت كتلة وحدة الطول لسالك متوتر فما هو تأثير ذلك على سرعة الموجة؟

6 – 21 في دراستنا للحركة الموجية المستعرضة في وتر مشدود تعرضنا لسرعة الموجة المستعرضة ولسرعة جسيمات الوتر هل هناك علاقة بين السرعتين.

6 – 22 هل يمكن ان تكون سرعة الموجة المستعرضة في السلك المتوتر مساوية للنهاية العظمى للسرعة المستعرضة لأي جسيم في السلك؟ اذا كان ذلك ممكناً. اذكر الشروط اللازمة لحدوث ذلك.

6 – 23 ماهو تأثير زيادة قوة الشد في سلك مهتز على (أ) التردد (ب) طول الموجة (جـ) سرعة الموجة (د) عدد العقد (هـ) عدد البطون.

6 – 24 سلك متوتر مثبت الطرفين فهل يكون طوله ثابتاً في مختلف الاهتزازات الرنينية؟

6 – 25 ماهي الموجة الواقفة وماهي علاقتها بالرنين.

6 – 26 ماهو الصونومتر. اشرح تركيبه، وبين اهميته العملية.

مسائل

6 - 1 سلك طوله 50 سم وكتلته 6.5×10^{-3} كلغم تحت قوة شد تجعله يهتز بتردد مقداره 80 هيرتز. جد مقدار قوة الشد في السلك.

(83.2 نيوتن)

6 - 2 سلكين من نفس المادة لهما نفس الطول ولكن نسبة أقطارهما كنسبة 1 : 1.44 السلك الأول تحت قوة شد تعادل ثقل كتلته 8 كلغم والثاني تحت قوة شد تعادل ثقل كتلته 11.52 كلغم . فاذا كان تردد النغمة الأساسية للسلك الأول هو 240 هيرتز فما هو تردد السلك الثاني ؟

(200 هيرتز)

6 - 3 خيط طوله 4 متر وكتلته 30 غم أحد طرفيه مربوط بنقطة ثابتة والطرف الآخر يمر فوق بكرة ومعلق به جسم كتلته 2 كلغم . فما هي سرعة الموجة المستعرضة في هذا الخيط ؟

(161.7 م / ثا)

6 - 4 سلك صونومتر طوله 0.4 متر وقطره 0.5 ملم وكثافة مادته 8.9×10^{3} كلغم / $م^3$ يبعث عندما يهتز اهتزاز مستعرض نغمة أساسية ترددها يساوي تردد الصوت الناتج من قرص صفارة تنبيه تحتوي على 20 ثقب وتدور بمعدل 30 دورة في الثانية . فما هو مقدار الشد في السلك

(ملاحظــة : تردد النغمة المنبعثة من صفارة التنبيه $20 \times 30 = 00$ هيرتز) .

(402.7 نيوتن)

6 - 5 سلكان لهما نفس الطول أحدهما من النحاس والآخر من الحديد مشدودان على صونومتر . ونظم الشد لكلا السلكين حتى نحصل على نفس النغمة الأساسية فاذا كان الشد في السلك الأول يعادل ثقل كتلته 5 كلغم والشد في السلك الثاني يعادل ثقل كتلته 3 كلغم وكان قطر سلك الحديد هو 0.8 ملم . جد قطر سلك النحاس . علماً ان الوزن النوعي لكل من السلكين النحاس والحديد 8.4 و 7.8 على الترتيب .

(1 ملم تقريباً)

6 - 6 خيط كتلته 10 غم وطوله 100 سم مشدود بقوة . احسب مقدار الشد بالكيلو غرام اللازم لكي يولد السلك نغمة ترددها 140 هيرتز عندما يهتز السلك لكي يبعث (أ) نغمة أساسية (ب) نغمة توافقية اولى

أ — 80 كلغم

ب — 20 كلغم

7 6 حبل طوله 1·2 متر وكتلته 0·3 غم . ماهي سرعة الموجات المستعرضة في هذا الحبل عندما يكون مشدوداً بحمل كتلته 1 كلغم .

(198 م / ثا)

8 − 6 سلك متوتر طوله 100 سم يولد نغمة ترددها 256 هيرتز عندما ينقر. قسم بجسر الى قطعتين 40 سم و 60 سم على الترتيب ماهو تردد النغمة الأساسية المنبعثة من كل قطعة ؟

640 هيرتز

426·6 هيرتز

9 − 6 اذا كان اضافة 75 كلغم الى قوة الشد في سلك مهتز يرفع التردد الى الضعف فما هو مقدار قوة الشد الأصلي في السلك بالكيلو غرام .

(25 كلغم)

10 − 6 كثافة سلك الحديد 7·7 غم / سم^3 ولسلك النحاس 8·9 غم / سم^3 ، فما هي نسبة قطر سلك الحديد الى قطر سلك النحاس اذا كان لهما نفس الطول وتحت نفس الشد لكي يولدان نفس النغمة . (1·07 : 1)

11 − 6 سلك طوله 10 سم يصدر نغمة أساسية ترددها 256 هيرتز تحت قوة شد ابتدائية محددة . اذا ازداد الشد 1 كيلوغرام فان التردد يزداد الى 320 هيرتز جد الشد الأبتدائي بالكيلو غرام وكتلة السلك

16 / 9 كلغم

0·665 غم

12 − 6 احسب سرعة الموجة المستعرضة في حبل طوله 2 متر وكتلته 0·06 كلغم وتحت قوة شد 500 نيوتن .

13 − 6 يتذبذب وتر طبقاً للمعادلة

$$y = 5 \sin \frac{\pi x}{3} \cos 40\pi t$$

حيث (y ، x) بالسنتمترات و t بالثواني . اوجد السعة والسرعة لموجتين لو ركبتا معاً لأعطتا المعادلة السابقة . ماهي المسافة بين العقد ؟ وماهي سرعة جسيم من الوتر في الموقع x = 1·5 سم في اللحظة الزمنية $t = \frac{9}{8}$ ثانية .
(الجواب : 2.5 سم ، 120 سم / ثا ، 0·3 سم 0)

6 – 14 سلك معين يهتز بتردد قدره 100 هيرتز، جد تردده عندما يتضاعف كل من طوله وتوتره

(70.7 هيرتز)

6 – 15 قالب معدني معلق في الهواء بطرف سلك الصونومتر. المسافة بين الجسرين عندما يتوافق تردد السلك المحصور بينها مع تردد شوكة رنانة هي 40سم. وعندما يغمر القالب المعدني في الماء فان المسافة بين الجسرين يجب ان تصبح 32سم لكي يحصل التوافق. جد الوزن النوعي للقالب المعدني.

(2.78)

6 – 16 سلكان يهتزان عرضياً بنفس التردد. اذا ازداد الشد في احد السلكين بمقدار واحد بالمئة يسمع ضربتين في الثانية الواحدة. فما هو التردد الاصلي للسلك.

6 – 17 سلك طوله 100 سم ومثبت طرفاه باحكام يهتز اهتزاز مستعرض بتردد اساسي مقداره 50 هيرتز وضع جسر تحت السلك وسمح للجزئين من السلك بالاهتزاز معاً فتولد 5 ضربات مسموعة في الثانية الواحدة. جد بعد الجسر عن مركز السلك.

((1.25 سم)

6 – 18 عندما يهتز سلك صونومتر طوله 65سم يكون في حالة رنين مع شوكة رنانة مهتزة. وعندما ينقص طوله بمقدار 1سم يسمع 8 ضربات في الثانية الواحدة جد تردد الشوكة الرنانة.

(512 هيرتز)

6 – 19 في تجربة وجد انه عندما يمر مركز سلك الصونومتر بين قطبي مغناطيس على شكل حدوة الحصان ويمرر تيار كهربائي متناوب في السلك فان حالة رنين تحدث عندما يكون طول السلك 70.3سم وقوة الشد في السلك تعادل 5 كلغم. احسب تردد التيار الكهربائي المتناوب.
علماً ان كثافة مادة السلك هي 8.75 غم / سم^3 وقطر السلك 1 ملم.

(60.05 هيرتز)

6 – 20 شوكة رنانة ترددها 160 هيرتز تهتز عندما كان سلك الصونومتر يهتز ايضاً، فاذا كان طول سلك الصونومتر 25سم ومشدود بثقل كتلته 1.25 كلغم. احسب عدد الضربات في الثانية.

(20 ضربة / ثا)

6 – 21 جسم كتلته 20 كلغم معلق بطرف سلك من الحديد. وجد ان تردد السلك عندما يسمح من طرفه يكون 20 مرة قدر تردده عندما ينقر من وسطه. جد مساحة المقطع العرضي للسلك.

علماً ان معامل يونك للحديد = 19.6×10^{-11} داين / سم^{2}

(0.4 ملم مربع)

6 – 22 تحت شد معين استطال السلك بمقدار $\frac{1}{m}$ من طوله الاصلي. برهن ان التردد الاساسي للأهتزاز الطولي هو $\sqrt{m}$ مره قدر التردد الاساسي للاهتزاز المستعرض في السلك.

6 – 23 في تجربة وجدان السلك يهتز بخمس قطع عندما يكون الثقل المعلق بطرف السلك يعاد 10 غم. فما مقدار مانضيفه من الغرامات لكي يهتز السلك بسبع قطع.

(غم)

6 – 24 اثبت ان

$$y = A \sin(\omega t - kx)$$

يمكن وضعها في الصور الآتية

$$y = A \sin k(ct - x)$$

$$y = A \sin 2\pi \left(ft - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$y = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

6 – 25 تعطى معادلة موجة مستعرضة تنتقل في حبل بالعلاقة الآتية :

$$y = 10 \sin \pi (21 - 0.01\, x)$$

حيث يعبر عن y, x بالسنتمترات, t بالثواني.

(أ) اوجد السعة والتردد والسرعة والطول الموجي.

(ب) اوجد اكبر سرعة مستعرضة لنقطة من نقط الحبل.

26 – 6 ماهي سرعة موجة مستعرضة في حبل طوله 2 متر وكتلته 0.06 كلغم تحت تأثير شد قدره 500 نيوتن ؟

27 – 6 أثبت ان ميل خيط عند النقطة x يتساوى عددياً مع النسبة بين سرعة النقطة وسرعة الموجة عند هذه النقطة .

28 – 6 في تجربة على الموجات الواقفة وصل خيط طوله 90 سم الى فرع شوكة رنانة كهربائية تهتز عمودياً على طول الخيط . وكانت تهتز بمعدل 60 هيرتز. فاذا علم كتلة الخيط هي 5 غم

(أ) اوجد الشد في الخيط اذا كان غلاف الموجات الواقفة يتكون من اربع بطون .

(ب) ماالذي يحدث اذا اديرت الشوكة الرنانة حتى تهتز في اتجاه طول الخيط ؟

29 – 6 يهتز وتر مثبت من طرفيه اهتزاز رنينياً بعدة ترددات . أقلها 100 هيرتز. ماهي الترددات الرنينية الثلاثة التالية ؟

30 – 6 يهتز وتر اهتزاز رنينياً في ثلاث قطع عندما يكون التردد الحافز 60 هيرتز أكتب اربعة ترددات رنينية اخرى لهذا الوتر .

31 – 6 وتران متساويان تماماً في الشد وفي الطول . ومع ذلك فان أقل تردد رنيني لأحدهما يساوي نصف تردد الآخر فقط . (أ) أيهما أكبر في الكتلة لوحدة الطول (ب) ماهي النسبة بين كتلتي وحدة الطول لهذين السلكين ؟

32 – 6 يهتز وتر مثبت من طرفيه باحكام في ثلاث قطع عندما يكون التردد الحافز f_1 وفي اربع قطع عندما يكون التردد الحافز f_2 اوجد النسبة f_1 / f_2 ؟

33 – 6 يهتز سلك طوله 80 سم بحيث تتكون عليه اربع عقد . أثنتان منهما عند الطرفين . اوجد (أ) الطول الموجي (ب) سرعة الموجة في السلك اذا كان تردد اهتزازه 500 هيرتز .

34 – 6 سلك مشدود بين نقطتين البعد بينهما 50 سم . وعندما نقر السلك بالقرب من وسطه أصدر نفس النغمة التي تصدرها شوكة رنانة ترددها 250 هيرتز. اوجد الطول الموجي وسرعة الموجة في هذا السلك

35 – 6 ماهو الثقل الذي يجب تعليقه في طرف خيط طوله 200 سم لكي تكون سرعة الموجات المستعرضة فيه 400 سم / ثا . علماً بأن كتلة كل 100 سم من الخيط هي 0.5 غم .

36 – 6 يندفع الريح بشدة على سلك تلفون مشدود بين عمودين قائمين البعد بينهما 20 متر، ونتيجة لذلك يطن السلك في الريح بتردد قدره 15 هيرتز، ولذلك يمكننا ان نفترض ان السلك يهتز بذلك التردد بفرض ان نقطتي تثبيت السلك في العمودين القائمين هما عقدتان ،

(أ) ماهو الطول الموجي المحتمل ؟

(ب) ماهي سرعة الموجة التي يسببها الريح في السلك ؟

37 – 6 أحد طرفي سلك أفقي مثبت والطرف الآخر يمر فوق بكرة ملساء ومعلق به جسم ثقيل . عندما نقر السلك من وسطه أصدر نغمة أساسية ترددها 392 هيرتز وحينما غمر الجسم المعلق كلياً في الماء هبط التردد الى 343 هيرتز. احسب كثافة الجسم المعلق ؟

(4.27 غم / سم^3)

38 – 6 سلك يصدر نغمة أساسية مقدارها 250 هيرتز عندما يكون تحت تأثير شد يعادل ثقل 10 كلغم .

(أ) تحت أي شد يكون تردد النغمة الصادرة من السلك 512 هيرتز.

(ب) كيف تجعل السلك يصدر نغمة ترددها 768 هيرتز مع الأحتفاظ بالشد ثابت (ثقل 10 كيلوغرام)

39 – 6 سلك مشدود يعطي ضربتين في الثانية مع شوكة رنانة عندما يكون طوله 1.43 متر وكذلك عندما يكون طوله 1.45 متر. وكان الشد ثابتاً في السلك في الحالتين . فما هو تردد الشوكة الرنانة ؟

40 – 6 موجة مستعرضة تتبع المعادلة

$$y = 8 \sin 2\pi \left(\frac{x}{2.5} - \frac{t}{0.08} \right)$$

فما هي (أ) السعة (ب) الطول الموجي (جـ) التردد (د) سرعة الموجة .

(اعتبر ان الكميات مقاسة بالنظام المتري) .

41 – 6 لديك موجة مستعرضة تصفها المعادلة :

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - ft \right)$$

فهل تتقدم هذه الموجة بنفس اتجاه تقدم الموجة التي تصفها المعادلة :

$$y' = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right)$$

ثم وضح ماهي العلاقة بين y و ý

الفصل السابع

الموجات الطولية في بعد واحد
(موجات الصوت)

1 — 7 مقدمة

في هذا الفصل سنتطرق للحركة الموجية الطولية التي تتميز عادة باهتزاز جسيمات الوسط الناقل للموجة بصورة موازية لحركة الموجة. فالصوت في الهواء ينتقل على شكل موجات طولية وهو موجات تضاغطية. وهذه الموجات تتقدم في الهواء الممتد بثلاثة أبعاد ولكن لغرض معرفة تفاصيل الحركة الموجية الطولية ولسهولة التحليل الرياضي ستقتصر دراستنا اولاً على الموجات الطولية في بعد واحد.

وفي الواقع ان جميع الموجات الطولية في بعد واحد والتي تدعى ايضا بالموجات التضاغطية تسلك تماماً نفس سلوك الموجات الصوتية. وعليه يمكن وصف جميع هذه الموجات تحت عنوان واحد مشترك هو موجات الصوت. بالرغم من ان ترددها قد لايقع ضمن المدى المسموع من التردد. وسنحاول ايجاد معادلة الحركة الموجية الطولية (او. التضاغطية المتحركة في بعد واحد في ثلاثة اوساط مادية مختلفة صلبة، سائلة وغازية على شكل عمود. ويفترض في هذه الحالة ان يكون الوسط المادي ممتداً في اتجاه واحد فقط اي ان يكون طوله كبيرا جدا بالمقارنة مع ابعاده الاخرى، وهذا الأفتراض يحقق هدفين اولهما ان الموجة تتقيد بالحركة في بعد واحد موازياً لطول العمود فقط وثانيهما ان الموجة المنعكسة يمكن اهمالها. وطبيعي يفترض ان يكون الوسط متجانساً وله خواص واحدة في جميع النقاط على طول العمود. وعلى هذا الاساس سنقوم بدراسة الموجات الصوتية الاتية :

أ — الموجات الطولية (او التضاغطية) في عمود صلب (قضيب معدني)
ب — الموجات الطولية (او التضاغطية) في عمود سائل
ج — الموجات الطولية (او التضاغطية) في عمود هواء .

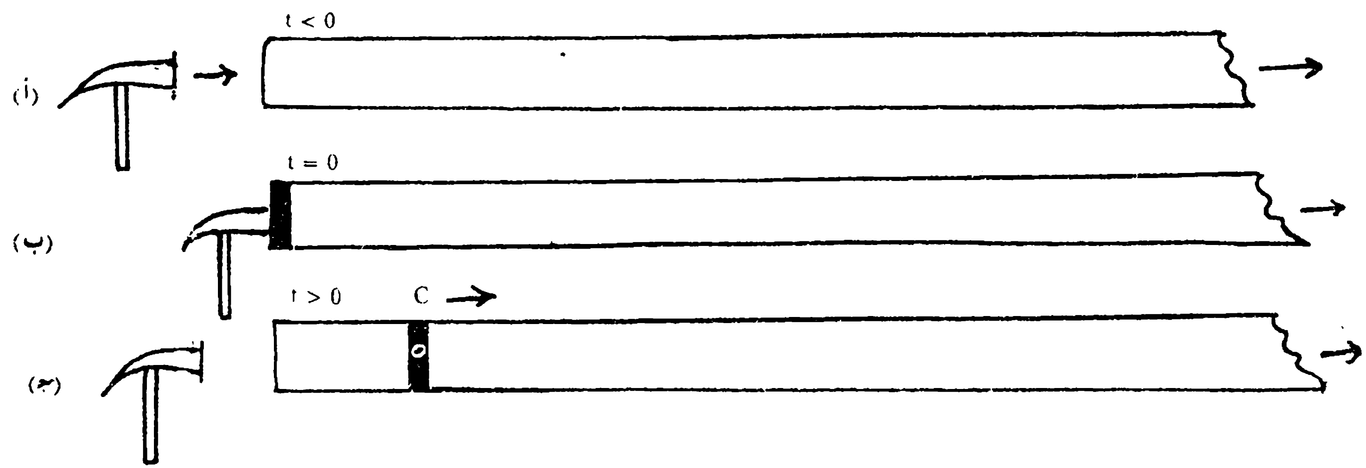
2 – 7 الموجات الطولية في قضيب معدني

نفرض ان لدينا قضيبا معدنيا مرنا منتظم المقطع وطويلاً جداً . كثافة مادته ρ ومساحة مقطعه العرضي A . فاذا طرق القضيب من احد طرفيه بطرقة خفيفة على امتداد محوره فأن نبضة تضاغطية تتولد وتنتقل على طول القضيب بسرعة ثابتة . وكما هو مبين في الشكل (7.1)

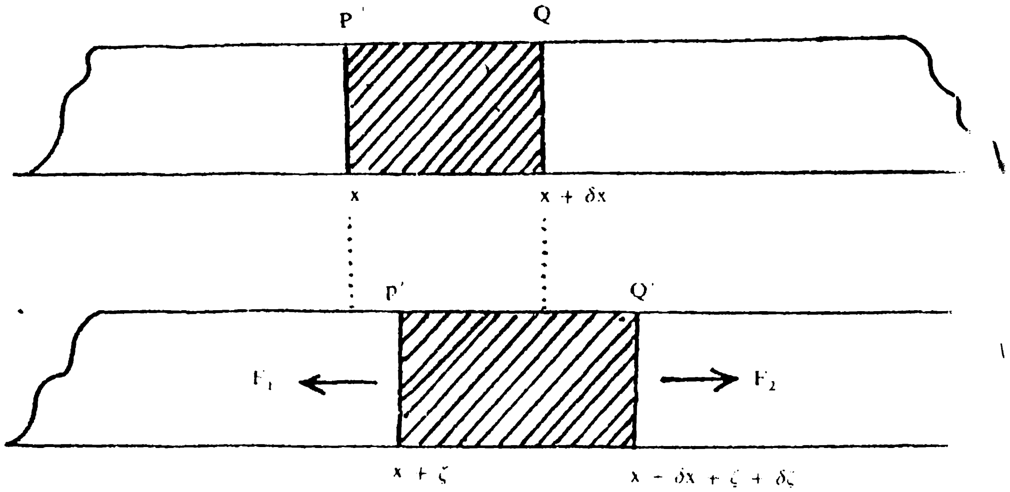
ولغرض اشتقاق معادلة الحركة الموجية اومعادلة النبضة المتحركة على طول القضيب نتصور ان محور القضيب يقع على امتداد المحور السيني x ونختار شريحة رقيقة في ي موقع على طول القضيب ولنفرض ان الشريحة هي PQ تقع في البدء اي في حالة التوازن في الموقع المحصور بين x و $x + \delta x$ على اعتبار ان x مقاسة من مقطع نعتبره ثابتا (اي بدون تعجيل) . كما هو مبين في الشكل (7.2 أ)

فعند مرور النبضة او الموجة خلال الشريحة المضللة فانها تؤدي الى حدوث زحف آني في موقعها اي تؤدي الى ازاحتها من موضع التوازن PQ . الى الموضع الآني الجديد $P'Q'$ كما تؤدي ايضا الى استطالتها . الا ان كمية المادة في الشريحة يبقى ثابتاً فـي الحالتين . وكلما في الامران الشريحة تزحف وتتمدد بنفس الوقت اثناء مرور الموجة . وهذا يحدث نتيجة ظهورقوتين غير متساويتين تسحبان الشريحة في اتجاهين متعاكسين وهاتان القوتان هما F_1 , F_2 كما مبين في الشكل (7.2 ب) . ان مقدار القوة F_1 يعتمد على مقدار التغير النسبـي في المسافات الفاصلة بين الذرات في الموقع x وبالمثل فأنها مقدار القـوة F_2 تعتمد على مقدار التغير النسبـي في المسافات الفاصلة بين الذرات في الموقع $x + \delta x$. وعموما تكون هاتان القوتان F_1 , F_2 مختلفتين قليلا بسبب اختلاف التغير النسبـي فـي المسافات الفاصلة بين الذرات من موقع الى آخر اثناء مرور الموجة . وكنتيجة لتأثير هاتين القوتين آنيا على الشريحة فان تشوهاً طولياً يحدث وتكون المادة ضمن الشريحة $P'Q'$ فـي حالة اجهاد .

فأذا فرضنا انه عند مرور النبضة خلال الشريحة تكون الازاحة الطولية الانية في اي نقطة في الموقع x هي ξ وفي اي نقطة في الموقع $x + \delta x$ هي $\xi + \delta\xi$. فعندئـذ يكون الموقع الآني للشريحة اثناء مرور النبضة محصوراً بين $x + \xi$, $x + \delta x + \xi + \delta\xi$ وبذلك يكون طول الشريحة $P'Q'$ تحت الاجهاد هو $\delta x + \delta\xi$ فاذا علمنا ان الطـول الاصلي للشريحة في حالة التوازن هو δx . فأن التغير الاني في طول الشريحة يكون مساويا لـ $\delta\xi$. وبذلك نحصل على المطاوعة الاجمالية للشريحة من العلاقة



الشكل (7.1) يبين قضيب معدني طويل جداً (أ) في حالة توازن قبل الطرق (ب) لحظة تولد نبضة تضاغطية عند الطرق (جـ) النبضة التضاغطية تتقدم بسرعة C على امتداد القضيب.



شكل (7·2) يبين شريحة من قضيب معدني مكبرة جداً (الجزء المظلل) (أ) في حالة توازن (قبل مرور النبضة) PQ
(ب) في حالة اضطراب اثناء مرور النبضة P'Q'

$$\text{متوسط المطاوعة} = \frac{\text{الزيادة بالطول}}{\text{الطول الاصلي}} = \frac{\delta \zeta}{\delta x}$$

ا كن ضمن حدود المرونة تكون العلاقة بين الاجهاد والمطاوعة خطية وثابت التناسب هو معامل المرونة الطولي او معامل يونك الذي يرمز له عادة بالحرف Y . اي ان

$$\text{معامل يونك } Y = \frac{\text{الاجهاد}}{\text{المطاوعة}}$$

من هذه العلاقة نحصل على متوسط الاجهاد الذي تتعرض له الشريحة وهو

$$\text{متوسط الاجهاد} = \frac{\delta \zeta}{\delta x} Y$$

الان نستطيع ان نعرف الاجهاد في اي موقع محدد x على طول القضيب كالآتي

$$\text{الاجهاد في الموقع } x = \frac{\partial \zeta}{\partial x} Y$$

يلاحظ هنا اننا استخدمنا التفاضل الجزئي للاشارة الى ان الاجهاد في اي موقع x يتغير ايضاً مع الزمن t.

وعلى بعد δx من الموقع x يمكن ايجاد الاجهاد من العلاقة *

الاجهاد في الموقع $(x' + \delta x) = Y \left(\frac{\delta \zeta}{\delta x} + \frac{\delta^2 \zeta}{\delta x^2} \delta x \right)$

ولما كان الاجهاد في الموقع $x = \frac{F_1}{A}$

فأن

$$F_1 = AY \frac{\delta \zeta}{\delta x}$$

والاجهاد في الموقع $x + \delta x = \frac{F_2}{A}$

اي ان :

$$\therefore F_2 = AY \left(\frac{\delta \zeta}{\delta x} + \frac{\delta^2 \zeta}{\delta x^2} \delta x \right)$$

ان محصلة القوة المؤثرة في الشريحة $PQ = F_2 - F_1$

$$\therefore F_2 - F_1 - AY \frac{\delta^2 \zeta}{\delta x^2} \delta x$$

الان نطبق قانون نيوتن الثاني في الحركة على كتلة الشريحة الذي ينص على :

محصلة القوة = كتلة الشريحة × تعجيلها

حيث كتلة الشريحة في حالة التوازن = حجم الشريحة × الكثافة

أي أن الشريحة في حالة التوازن = $\rho \times A \, \delta x$

* ان قيمة الاجهاد في نقطة تبعد عن الموقع X بالمسافة dX يمكن ايجادها بدرجة عالية من الدقة نأخذ الحدين الاول والثاني من مفكوك مسلسل تايلر حيث :

$$f(x + dx) = f(x) + \frac{\delta\, I\, (x)}{\delta x} dx + \ldots\ldots$$

وتعجيل الشريحة هو المشتقة الثانية للازاحة ξ بالنسبة للزمن عندما δx تقترب حدياً من الصفر – انظر الشكل (7.2 ب) وتصور أن δx تكاد تتلاشى من الصغر – . فعندئذ يكون تعجيل الشريحة هو $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$

وبذلك نحصل على

$$AY \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \delta x = \rho A \delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{Y} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad \ldots (7 - 1)$$

هذه تمثل معادلة الحركة الموجية الطولية في قضيب معدني ذي بعد واحد . وقد وجد ان قيمة $\frac{Y}{\rho}$ مقدار ثابت يمثل مربع سرعة النبضة او الموجة المنتقلة خلال القضيب المعدني . فاذا فرضنا ان سرعة الموجة هي c فان

$$c^2 = \frac{Y}{\rho} \qquad \ldots (7.2)$$

ويمكن التاكد من صحة هذه العلاقة من خلال تحليل الابعاد في الطرفين فنجد ان كلا الطرفين لهما مربع وحدة السرعة . وبتعويض c^2 بدل $\frac{Y}{\rho}$ تصبح معادلة الحركة الموجية الطولية في قضيب معدني هي :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad \ldots (7.3)$$

والآن يمكن مقارنة هذه المعادلة مع معادلة الحركة الموجية المستعرضة في سلك (6.12) ليتضح مدى التشابه الكبير بين شكلي المعادلتين .

3 – 7 حل معادلة الموجة في قضيب معدني

سنحاول حل المعادلة التفاضلية الجزئية للحركة الموجية الطولية بطريقة فصل المتغيرات . نلاحظ من المعادلة (7·3) ان الازاحة الطولية ξ تعتمد على المتغيرين x و t . اي ان

$$\xi(x,t) = f(x,t) \qquad \dots (7\cdot4)$$

نفصل المتغيرين x و t ونفرض ان الحل يأخذ الشكل :

$$\xi(x,t) = X(x)\,T(t) \qquad \dots (7\cdot5)$$

حيث X تمثل دالة تعتمد فقط على الموقع x
و T تمثل دالة اخرى مستقلة عن X وتعتمد فقط على الزمن t .

نفاضل هذا الحل مرتين بالنسبة للزمن فنجد ان

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = X(x)\,\frac{d^2T}{dt^2} \qquad \dots (7\cdot6)$$

نفاضل نفس الحل مرتين بالنسبة للموقع x فنجد ان

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = T(t)\,\frac{d^2X}{dx^2} \qquad \dots (7\cdot7)$$

في هاتين المعادلتين نلاحظ ان التفاضل في الجانب الايمن كلـي لأن T تعتمد كلياً على t و X تعتمد كلياً على x بينما التفاضل في الجانب الايسر جزئـي لأن الدالـــة تعتمد على متغيرين x , t معاً .
الآن نعوض (7·6) , (7·7) في المعادلة (7·3) ونرتب فنجد ان

$$\frac{1}{T}\,\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{c^2}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2} \qquad \dots (7\cdot8)$$

يلاحظ من هذه المعادلة ان الطرف الايسر يعتمد فقط على المتغير t والطرف الايمن يعتمد فقط على المتغير x. ولما كان المتغيرين t, x مستقلين عن بعضهما لذلك يجب ان يساوي كلا الطرفين مقداراً ثابتاً وليكن هذا الثابت هو $-\omega^2$ (ان وضع الاشارة السالبة

ليس ضروريا ولـكنه يسهل علينا الحل كثيراً كما سنرى) . وبذلك تصبح المعادلـــة الاخيرة

$$\frac{1}{T}\ \frac{d^2T}{dt^2} = \frac{c^2}{X}\ \frac{d^2X}{dx^2} = -\omega^2 \qquad \ldots (7{\cdot}9)$$

من هذه المعادلة ينتج لدينا معادلتان تفاضليتان اعتياديتان

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \qquad \ldots (7{\cdot}10)$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X = 0 \qquad \ldots (7{\cdot}11)$$

ان شكل هاتين المعادلتين مألوف تماماً . أنه يماثل معادلة الحركة التوافقيـــة البسيطة . لذلك يمكن ان يكون الحل العام لكل منهما كالاتـــي وعلى الترتيب

$$T(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \qquad \ldots (7{\cdot}12)$$

$$X(x) = C \sin \frac{\omega}{c} x + D \cos \frac{\omega}{c} x \qquad \ldots (7{\cdot}13)$$

على الترتيب

وبتعويض هذين الحلين في المعادلة (7·5) نجد أن الحل العام لمعادلة الموجة الطولية في القضيب المعدني هو

$$\xi(x, t) = (A \sin \omega t + B \cos \omega t)\left(C \sin \frac{\omega}{c} x + D \cos \frac{\omega}{c} x\right) \qquad \ldots (7{\cdot}14)$$

حيث A . B ثابتان اختياريان يمكن ايجادهما من الشروط الابتدائية للحركـــة و C و D ثابتان اختياريان يمكن ايجادهما من الشروط الحدودية للقضيب

4 – 7 الاهتزازات الطولية الطبيعية للقضيب المعدني

لقد فرضنا عند اشتقاقنا لمعادلة الموجة الطولية في قضيب معدني ان طول القضيب كبير جداً وذلك لغرض التخلص من الموجات المنعكسة . ولكن اذا كان طول القضيب محدوداً فان الموجة المتقدمة في أحد الاتجاهين على امتداد القضيب تنعكس عندما تصل أحد الطرفين وتتقدم بالاتجاه المعاكس حتى تصل الطرف الآخر وتنعكس مرة أخرى وهكذا تتكرر العملية مرات عديدة ما لم يكن الاحتكاك الداخلي كبيرا لدرجة يبدد طاقة الموجة الى طاقة حرارية بسرعة . ونتيجة لتداخل الموجات الساقطة مع الموجات المنعكسة يمكن ان يتولد نمط من الموجات الواقفة على طول القضيب وهذا النمط لا يتشكل الا تحت شروط فيزياوية محددة للقضيب . وفي الواقع عندما يثار القضيب المعدني طولياً بطريقة ما ويترك حراً فان اهتزازات طولية كثيرة تحدث على طول القضيب . ونظرياً يمكن ان يتولد طيف مستمر من الاهتزازات الطولية . ولكل اهتزاز تردد محدد يمثل أحد الترددات الطبيعية للقضيب . ان كل تردد طبيعي يرتبط بنمط خاص من الاهتزاز الطولي الذي يمثل شكلاً محدداً من الموجات الواقفة على طول القضيب تماماً كما يحدث في حالة الرنين . فمثلا اذا ما أثير القضيب طوليا بقوة خارجية دورية لها تردد مساو لأحد الترددات الطبيعية للقضيب . فان استجابة القضيب لتلك القوة تكون أشد ما يكون عند ذلك التردد حيث تهتز جزيئات القضيب طولياً بنمط خاص يحتوي على عقد وبطون ثابتة. وكما سنرى في البنود القادمة ان الترددات الطبيعية تعتمد على نوع مادة القضيب وطوله وشروطه الحدودية . ولكل قضيب محدود الطول شرطان حدوديان كل منهما يطبق على أحد طرفيه . وقد يكون هذا الشرطان مختلفين أو متماثلين . فمثلاً قد يكون طرفا القضيب المهتز مثبتين باحكام أو قد يكونان حرين تماماً أي غير مثبتين اطلاقاً . أو قد يكون أحد الطرفين مثبتا باحكام بينما الطرف الاخر حراً تماماً أو [illegible] الخ . وفي البنود القادمة سنجد الترددات الطبيعية لأي قضيب معدني يهتز اهتزازاً حراً تحت مختلف الشروط الحدودية .

5 – 7 الترددات الطبيعية لقضيب معدني طرفيه مثبتين باحكام .

في هذه الحالة يكون طرفا القضيب مثبتين بأحكام ومقيدين بشكل لايسمح لهما بالحركة كما في الشكل (7.3)

الشكل (7·3) يبين قضيب معدني طوله L طرفيه مثبتين باحكام

لايجاد الترددات الطبيعية للقضيب عندما يهتز طولياً . نفرض ان طوله L . ولما كان طرفاه مثبتين باحكام فان الازاحة في كلا الطرفين تساوي صفراً أي أن الشروط الحدودية للقضيب في هذه الحالة هي

الشرط الحدودي في الطرف $x = 0$ هو $\xi = 0$ لكل قيم t

الشرط الحدودي في الطرف $x = L$ هو $\xi = 0$ لكل قيم t

نعوض الشرط الحدودي الاول في الحل العام (7·14) فينتج

$$0 = (A \sin \omega t + B \cos \omega t)\, D$$

اما

$$(A \sin \omega t + B \cos \omega t) = 0$$

وهذا لا يمكن رياضياً عند جميع قيم t

أو

$$D = 0$$

الآن نعوض الشرط الحدودي الثاني في الحل العام (7·14) فينتج

$$0 = (A \sin \omega t + B \cos \omega t)\, C \sin \frac{\omega L}{c}$$

وهذا يعني اما

$$(A \sin \omega t + B \cos \omega t) = 0$$

وهذا لا يمكن

أو

$$C = 0$$

وهذا لا يمكن ايضا لأن قيمة

$$D = 0$$

اذن لابد ان تكون

$$\sin \frac{\omega L}{c} = 0$$

$$\frac{\omega_n L}{c} = n\pi$$

حيث

$$n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

ولما كانت $\omega_n = 2 \pi f_n$

لذلك فأن الترددات الطبيعية f_n لاهتزاز القضيب طولياً عندما يكون طرفاه مقيدان تماماً وغير قابلين للحركة هي .

$$f_n = \frac{nc}{2L} \quad \text{.... (7.15)}$$

ان هذه المعادلة تشير الى ان القضيب يمتلك عدداً كبيراً جداً من الترددات الطبيعيه وكل تردد طبيعي يقابل عدداً صحيحاً لـ n . واهم هذه الترددات عادة هي تلك التي تقابل الاعداد الصحيحة الواطئة . ولما كانت

$$c = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

فان

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad \text{.... (7.16)}$$

ان هذه المعادلة تشير الى ان قيمة التردد الطبيعي لقضيب معين عند ثبوت n يتناسب عكسياً مع طوله L .

6 – 7 التردد الطبيعي لقضيب معدني حر الطرفين

عندما يكون كل من طرفي القضيب حراً خلال الاهتزاز الطولي فان القوى المؤثرة في طرفيه تكون معدومة اي تساوي صفراً ، وهذا يعني ان الاجاد يكون صفراً عند الطرفين لعدم وجود مادة مجاورة تؤدي الى سحب القضيب عند تلك النقاط . لدينا من قانون يونك في المرونة

$$F = AY \frac{\delta\zeta}{\delta x}$$

ولما كانت F تساوي صفراً عند الطرف الحر فعندئذ تكون

$$\frac{\delta\zeta}{\delta x} = 0$$

وعلية تكون الشروط الحدودية للقضيب المعدني الحر الطرفين هي:

الشرط الحدودي

عند الطرف $x = o$ هو $0 = \frac{\delta\zeta}{\delta x}$ لكل قيم t

والشرط الحدودي عند الطرف $x = L$ هو $0 = \frac{\delta\zeta}{\delta x}$ لكل قيم :

الآن نفاضل الحل العام (7.14) بالنسبة لـ x فنجد ان

$$\frac{\delta\zeta}{\delta x} = (A\sin\omega t + B\cos\omega)\left(\frac{\omega}{c} C\cos\frac{\omega}{c} \times \frac{\omega}{c} D\sin\frac{\omega}{c} x\right)$$

الان نطبق الشرط الحدودي الاول فنحصل على

$$O = (A\sin\omega t + B\cos\omega)\ \frac{\omega}{c} C$$

ونطبق الشرط الحدودي الثاني فنجد ان

$$\therefore C = O$$

$$O = (A\sin\omega t + B\cos\omega t)\ \left(\frac{\omega}{c} CD\sin\frac{\omega t}{c}\right)$$

ومنها نجد ان

$$\sin = \frac{\omega L}{c} = 0$$

أي أن

ولما كانت

$$\sin = \frac{\omega_n L}{c} = 0$$

فان

$$\omega_n = 2\pi f_n$$

$$f_n = \frac{nc}{2L}$$

$$\therefore f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad \text{....... (7.17)}$$

وهذه النتيجة تشير الى ان قيمة التردد الطبيعي في هذه الحالة مماثلة للحالة السابقة.

7 – 7 التردد الطبيعي لقضيب معدني أحد طرفيه حر والاخر مثبت باحكام

في هذه الحالة يطبق على الطرف الحر من القضيب الذي يقع عند الموقع $x = 0$ الشرط الحدودي $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$ لكل قيم t بينما يطبق على الطرف المثبت باحكام والمقيد الحركة والذي يقع عند الموقع $x = L$ الشرط الحدودي $\xi = 0$ لكل قيم t .

لتطبيق الشرط الحدودي الاول عند الموقع $x = 0$ نفاضل المعادلة (7·14) بالنسبة لـ x فنجد ان

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \left(A \sin \omega t + B \cos \omega t\right)\left(C \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega}{c} x - D \frac{\omega}{c} \sin \frac{\omega}{c} x\right)$$

نعوض فنجد ان

$$O = (A \sin \omega t + B \cos \omega t) C \frac{\omega}{c}$$

ولما كانت قيمة المقدار داخل القوس لاتساوي صفراً ، لذلك فان

$$C = O$$

الآن نطبق الشرط الحدودي الثاني عند الموقع $x = L$ فنجد ان

$$O = \left(A \sin \omega t + B \cos \omega t\right) D \cos \frac{\omega}{c} L$$

ولما كانت قيمة المقدار داخل القوس لاتساوي صفراً ، وكذلك قيمة D لايمكن ان تكون صفراً لذلك فان .

$$\cos \frac{\omega}{c} L = 0$$

$$\frac{\omega_n L}{c} = (n - \frac{1}{2})\pi \qquad (7.18)$$

حيث n تساوي اي عدد موجب صحيح ، اي ان $n = 1, 2, 3, \dots$

ان استخدام $\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$ بدلاً من $\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ في المعادلة يسمح لنا باختيار الترددات الطبيعية بجعل قيمة $n = 1, 2, 3, 4, 5 \dots$ .. الخ .

ومنها نجد ان التردد الطبيعي للقضيب

$$\omega = \frac{(n - 1/2)\,\pi\, c}{L}$$

$$f_n = \frac{(n-1/2)\, c}{2L}$$

$$f_n = \frac{(n - 1/2)}{2L}\sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad \text{............ (7.19)}$$

وهذه النتيجة تشير الى ان اوطأ تردد طبيعي للقضيب (أي التردد الأساسي) هو

$$f_1 = \frac{1}{4L}\sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad \text{............. (7-20)}$$

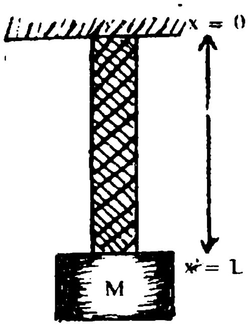
8 – 7 التردد الطبيعي لقضيب أحد طرفيه مثبت ومعلق بطرفه الآخر ثقل

في هذه الحالة الطرف المثبت من القضيب لايمكن أن يتحرك ولذلك يكون الشرط الحدودي عند هذا الطرف في الموقع x = 0 هو 0 لكل قيم t بينما في الطرف الثاني معلق ثقل كتلته M وهذا الثقل عندما يهتز على امتداد محور القضيب يسبب أجهاداً متناوباً ويمكن تطبيق قانون نيوتن الثاني في الحركة على الكتلة المهتزة M فنجد أن

$$Y\,\cdot\, - \quad M\frac{\delta^2 \xi}{\delta^2 t} \qquad \text{.............. (7-21)}$$

ان الاشارة السالبة تشير الى ان اتجاه القوة يعاكس اتجاه زيادة الازاحة ... المعادلة تحدد الشرط الحدودي عند الطرف المعلق به الكتلة M اي في ... عند الموقع x = L كما مبين في الشكل (7-4)

الآن نطبق الشرط الحدودي الاول في الموقع x = 0 على المعادلة ...
0 = (1 نطبق الشرط الحدودي الثاني عند الموقع x = L ... المعادلة



(7·4)

(7.14) فنحصل على

$$\frac{\delta\zeta}{\delta x} = (A\sin\omega t + B\cos\omega t)\, C\,\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega}{c}L \quad \text{.... (7.22)}$$

ونجد $\frac{\delta^2\zeta}{\delta t^2}$ من المعادلة (7.14) فنحصل على

$$\frac{\delta\zeta}{\delta t} = (A\omega\cos\omega t + B\omega\sin\omega t)\, C\sin\frac{\omega}{c}L + D\cos\frac{\omega}{c}L)$$

$$\frac{\delta^2\zeta}{\delta t^2} = (A\omega^2\cos\omega t + B\omega^2\sin\omega t)\,(C\sin\frac{\omega}{c}L + D\cos\frac{\omega}{c}L) \quad \text{...... (7.23)}$$

نعوض (7.22) و (7.23) في المعادلة (7.21) فنجد ان

$$AY.C\,\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega}{c}L = M\,\omega^2\, C\sin\frac{\omega}{c}L \quad \text{... (7.24)}$$

$$\tan\frac{\omega}{c}L = \frac{AY}{wM\,c}$$

لكن من $c = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ نجد ان $Y = \rho c^2$

$$\tan\frac{\omega}{c}L = \frac{A\rho\, c}{M\omega}$$

نضرب الطرف الايسر في L ونقسمه على L ونرتب المعادلة فينتج

$$\frac{\omega L}{c}\tan\frac{\omega L}{c}=\frac{A\rho L}{M}$$ ،

فاذا فرضنا ان كتلة القضيب هي m حيث

$$m = A\rho L$$

فتصبح المعادلة (7·24) كالآتي :

$$\frac{\omega L}{c}\tan\frac{\omega L}{c}=\frac{m}{M} \qquad \ldots(7{\cdot}25)$$

لايجاد التردد الطبيعي للقضيب في هذه الحالة هنالك عدة احتمالات.الاحتمال الاول ان تكون كتلة الثقل المعلق M صغيرة بالمقارنة مع كتلة القضيب m فيمكن اهمالها . فعندئذ تصبح معادلة التردد الطبيعي للقضيب في هذه الحالة كالاتي

$$\tan\frac{\omega L}{c}\to\infty$$

اي في هذه الحالة نحصل على

$$\cos\frac{\omega L}{c}=0$$

ومن هذه المعادلة نحصل على التردد الطبيعي

$$\frac{\omega_n L}{c}=\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi \qquad \ldots(7{\cdot}26)$$

حيث ان n يساوي عددا موجبا صحيحا 4, 3, 2, 1 ...... الخ وهذه تناظر حالة القضيب المثبت من احد طرفيه باحكام والطرف الاخر حر .

والاحتمال الثاني ان تكون كتلة الثقل المعلق M كبيرة جدا بالمقارنة مع كتلة القضيب m . وفي هذه الحالة تصبح معادلة التردد الطبيعي للقضيب كالاتي :

$$\tan\frac{\omega L}{c}\to 0$$

وفي هذه الحالة نحصل على

$$\sin\frac{\omega L}{c}=0$$

ومن هذه المعادلة نجد أن :

$$\frac{\omega_n L}{c} = 2n\pi \qquad ,$$

حيث ان n يمثل اي عدد صحيح .

$$\omega_n = \frac{2n\pi c}{L}$$

وهذه تناظر حالة القضيب المثبت من طرفيه باحكام .
ومن المعادلة الاخيرة نجد ان

$$2\pi f_n = \frac{2n\pi}{L} \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

لكن لدينا

$$m = \rho L A$$

اذن

$$f_n = n \sqrt{\frac{YA}{mL}} \qquad \ldots(7\cdot27)$$

واذا اخذنا التردد الاساسي للقضيب في هذه الحالة اي عندما $n = 1$
نجد ان

$$f_1 = \sqrt{\frac{YA}{mL}} \qquad \ldots(7\cdot28)$$

وهذه تناظر التردد الطبيعي للكتلة المتصلة بطرف نابض حلزوني بسيط طرفه الاخرمثبت باحكام . حيث يمكن اعتبار الكتلة المعلقة هي m وثابت النابض الحلزوني هو $\frac{YA}{L}$. وهذا صحيح في حالة اهمال كتلة النابض الحلزوني بالمقارنة مع الكتلة المعلقة بطرفه *

وهناك احتمالات اخرى كثيرة لايجاد التردد الطبيعي للقضيب . ولكن للسهولة فقط سنختار الحالة التي تصبح فيها المعادلة (7·25) كالاتي

* في الحقيقة أنه لايمكن أهمال تأثيركتلة النابض الحلزوني على التردد الطبيعي للمهتز . اذ أن الكتلة المؤثرة للنابض تساوي $\frac{1}{3}$ كتلة النابض

$$\tan \frac{\omega L}{c} = \frac{mc}{M\omega L} = 1$$

وفي هذه الحالة نحصل على

$$\frac{\omega_n L}{c} = \left[\frac{\pi}{4} + 2 (n - 1) \pi \right]$$

حيث ان n تمثل اي عدد صحيح ...3, 2, 1, الخ
اي ان التردد الزاوي الطبيعي في هذه الحالة هو

$$\omega_n = \frac{c}{L} \left[\frac{\pi}{4} + 2 (n - 1) \pi \right] \qquad ...(7{\cdot}29)$$

ونحصل على التردد الزاوي الاساسي عندما $n = 1$ وهذا التردد يساوي ايضا

$$\omega = \frac{mc}{ML}$$

وهذا يعني ان

$$\omega = \frac{\pi c}{4L} = \frac{mc}{ML}$$

وفي هذه الحالة تكون كتلة القضيب m مساوية تقريبا لكتلة الثقل المعلق بطرفه M وعلى وجه الدقة تكون

$$m = \frac{\pi}{4} M$$

وفي الواقع ان هناك شروطا حدودية اخرى اكثر تعقيدا . ولكن مهما كانت الشروط الحدودية فان القضيب يمكن ان يهتز طوليا بأكثر من تردد طبيعي واحد في نفس الوقت . وفي مثل هذه الحالة تتداخل الموجات المرافقة لتلك الترددات ويكون الحل العام الشامل لجميع الترددات المسموحة في القضيب هو :

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t) (C_n \sin \frac{\omega_n}{c} x + D_n \cos \frac{\omega_n}{c} x) \qquad ...(7{\cdot}30)$$

حيث ان $B_n . A_n$ ثوابت اختيارية يمكن ايجادها من الشروط الابتدائية للحركة و $D_n . C_n$ ثوابت اختيارية ايضا يمكن أيجادها من الشروط الحدودية للقضيب و ω_n تمثل الترددات الزاوية الطبيعية للقضيب التي يحددها طبيعة مادة القضيب وطوله الهندسي وشروطه الحدودية .

9 – 7 الموجات الطولية في عمود من المائع (سائل اوغاز)

من الواضح ان عموداً من المائع كعمود من السائل أوعمود من الهواء يماثل الى درجة كبيرة عموداً من الصلب من حيث توزيع خواص الكتلة والمرونة على طول الوسط في اتجاه واحد . وطبيعي ان مقدار المرونة والكثافة يختلف باختلاف طبيعة الوسط وهذا يعني اختلاف سرعة انتقال الموجة من وسط الى آخر . الا أن طريقة انتقال الموجة الطولية هي واحدة في جميع هذه الأوساط (الصلبة . السائلة . الغازية) في حالة تقييد حركة الموجة في اتجاه واحد فقط . ويفترض في أي وسط أن يكون متجانساً وله خواص واحدة في جميع النقاط وان يخضع لقانون هوك تماماً الذي ينص على أن المطاوعة تتناسب طردياً مع الاجهاد . أي ينبغي أن يكون التشوه الناتج من الاضطراب أو الموجة واقع ضمن حدود المرونة . وكما وجدنا ان للقضيب الصلب ترددات طبيعية لاحصر لها كذلك سنتوقع ان لعمود من المائع ترددات طبيعية غير محدودة .
وهذا متوقع لأن الوسط يتألف من عدد كبير جداً من الجسيمات . والجسيمات المختلفة في الوسط المرن الممتد تحتاج الى مالانهاية من الاحداثيات لتحديد مواقعها ، وعليه يسلك كل جسيم سلوك مهتز بذاته . ولذلك يمتلك مثل هذا الوسط مالانهاية من الترددات الطبيعية وتحت شروط فيزياوية محددة تتحرك جميع الجسيمات التي يتألف من عمود الوسط المادي بطور واحد ولكن بازاحات مختلفة . أي أن نمط الحركة يكون واحدا لجميع الجسيمات . وفي هذه الحالة تتغير احداثيات جميع الجسيمات بنفس الطريقة ، وهذه الحالة الخاصة تماماً تقابل الاهتزاز الطبيعي الأساسي الذي يحدث عند أقل تردد طبيعي للوسط المهتز . وهذا التردد يعتبر غالباً من أهم الترددات الطبيعية للموجات المسموحة في الوسط المهتز .

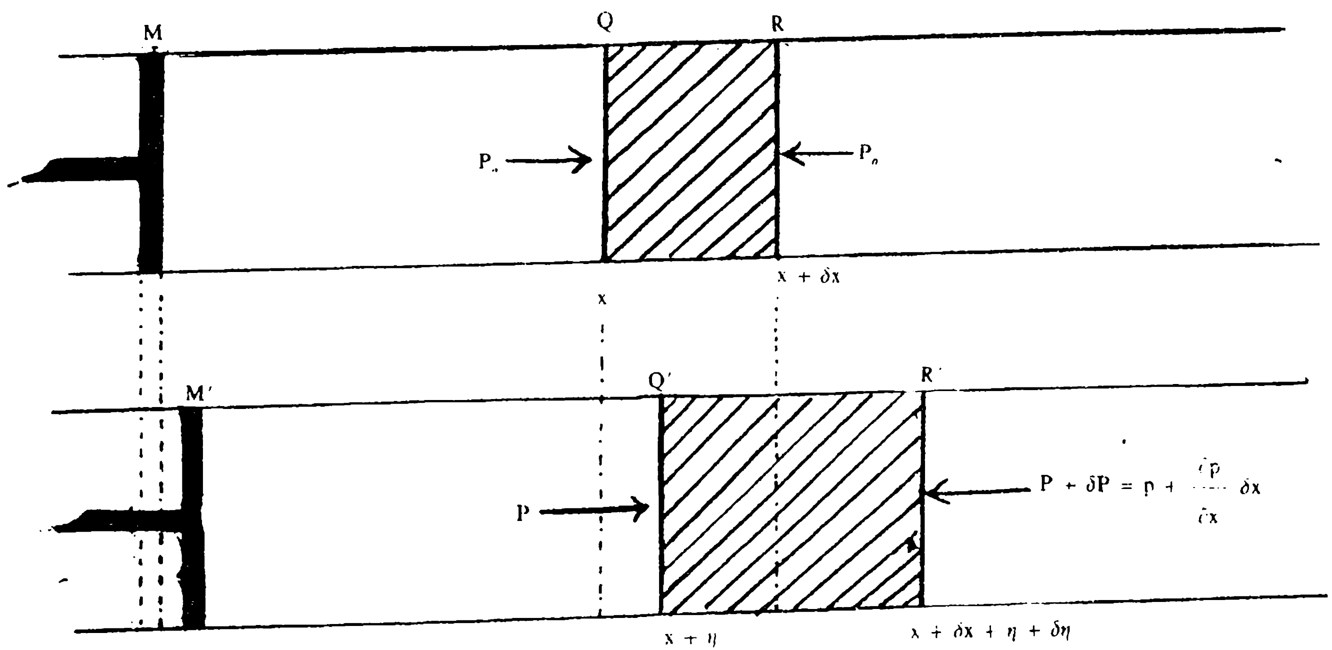
10 – 7 معادلة الحركة الموجية الطولية في عمود من المائع

إن معادلة الحركة الموجية الطولية في عمود من المائع هي بالحقيقة معادلة الموجة الصوتية في بعد واحد وهذه المعادلة يمكن اشتقاقها بدلالة الازاحة الطولية لجزيئات المائع الناتجة من مرور الموجة أو بدلالة ضغط الموجة أو بدلالة أي متغير آخر يرتبط مباشرة بالموجة مثل سرعة او تعجيل جزيئات المائع اوكثافة المائع. ولاشتقاق معادلة الموجة نتصور ان لدينا انبوباً مجوفاً دائرياً ومنتظم المقطع ولا نهائي الطول كما مبين في الشكل (7.5) مساحة مقطعه العرضي A ويحتوي على مائع (سائل او غاز) متجانس كثافته في حالة التوازن ρ_o وتحت ضغط منتظم P_o ومعامل مرونته الحجمي K (راجع البند (1.5)).

فاذا فرضنا ان المكبس M اندفع فجأة نحو اليمين مسافة قليلة الى الموقع M فان طبقة المائع المجاورة للمكبس مباشرة والموازية له ستزاح عن موضع توازنها الاصلي كما وستنضغط نفس الوقت، وبذلك فان نبضة تضاغطية (أو موجة تضاغطية منفردة) ذات جبهة مستوية ستتشكل، وهذه الموجة التضاغطية ستتقدم على طول المائع داخل الانبوب بسرعة ثابتة هي c، ولما كان الانبوب منتظماً ولا نهائي الطول فان الموجة ستستمر بالتقدم في اتجاه واحد فقط دون ان تعاني انعكاساً، وبذلك نتخلص من الموجة المنعكسة ويسهل تحليل المسألة ولاشتقاق معادلة الموجة الطولية نختار عنصراً صغيراً من المائع على شكل شريحة رقيقة ثم نجد معادلة الحركة لهذه الشريحة نتيجة مرور الموجة خلالها. وفي الواقع ان ما يحدث لهذه الشريحة بتأثير الموجة يحدث لجميع شرائح المائع التي تمر خلالها نفس الموجة ولكن بلحظات زمنية مختلفة.

لنفرض ان شريحة المائع المختارة في حالة التوازن هي QR محصورة بين x و $x + \delta x$ ان هذه الشريحة تكون على شكل اسطوانة رقيقة طولها δx ومساحة قاعدتها A كما مبين في الشكل (أ 7.5). وفي حالة التوازن اي في حالة عدم وجود موجة او اضطراب في المائع يكون حجم هذه الشريحة هو $V_o = A\,\delta x$.

وكتلتها $\rho_o A\,\delta x$ ، وطبيعي ان تكون هذه الشريحة في حالة سكون في الموضع QR لان ضغط المائع المسلط عليها من الجانبين متساوياً ويساوي P_o وبذلك تكون القوة المسلطة عليها نحو اليمين هي P_oA والقوة المسلطة عليها نحو اليسار هي P_oA وبذلك تكون محصلة القوة المؤثرة فيها في هذه الحالة صفراً.



الشكل (7.5) المساحة المظللة تمثل شريحة رقيقة من المائع مكبرة جداً. (أ) في حالة التوازن يكون سمك الشريحة QR هو δx (ب) في حالة مرور الموجة فأن الشريحة تزاح عن موضع توازنها بمقدار η ويصبح سمكها الجديد Q′R′ هو $\delta x + \delta\eta$

وفي حالة مرور الموجة (او الاضطراب) خلال هذه الشريحة فانها تؤثر فيها بقوة مما يؤدي الى ازاحتها عن موضع توازنها فيصبح موضعها الاني الجديد هو $Q'R'$ حيث يتحرك وجه الشريحة Q مسافة η الى الوضع الجديد Q' كما يتحرك الوجه R مسافة $\eta + \delta\eta$ الى الوضع الجديد R' كما مبين في الشكل (7.5 ب) ان المتغير η يمثل الازاحة الطولية لاي جسيم نتيجة مرور الموجة . لنفرض ان الضغط المسلط على الوجه الايسر للشريحة نتيجة مرور الموجة هو P وعلى الوجه الايمن هو $P + \delta p$ ان الفرق بين الضغط في حالة مرور الموجة والضغط في حالة التوازن اي $P - P_0$)يمثل التغير في الضغط الموضعي نتيجة مرور الموجة وهذا التعبير في الضغط يدعى بضغط الصوت او ضغط الموجة وسنرمز له بالحرف $\hat{P}$ اي ان

$$\hat{P} = P - P_0 \qquad ...(7.31)$$

ان قيمة $\hat{P}$ تكون عادة صغيرة جدا بالمقارنة مع ضغط المائع في حالة التوازن P_0

ان الضغط الصوتي يؤدي الى احداث تشوه طولي في الشريحة . وهذا التشوه يكون على شكل تغير في حجم الشريحة. ان حجم الشريحة الاصلي في حالة التوازن هو $A\delta x$ وحجم الشريحة تحت تاثير ضغط الموجة هو $A(\delta x + \delta\eta)$ وعليه يكون التغير في حجم الشريحة نتيجة مرور الموجة هو $A\delta\eta$. والنسبة بين التغير في الحجم $A\delta\eta$ الى الحجم الاصلي $A\delta x$ يمثل المطاوعة الحجمية ، والتغير في الضغط $(P - P_0)$ اي الضغط الصوتي، $\hat{P}$ يمثل الاجهاد الذي احدث هذا التشوه النسبي في الحجم . والنسبة بين الاجهاد $\hat{P}$ الى المطاوعة الحجمية تساوي معامل المرونة الحجمي K . اي ان

$$K = - \frac{\hat{P}}{A\delta\eta / A\delta x} \qquad ...(7.32)$$

ومنها نحصل على

$$\hat{P} = - K \frac{\delta\eta}{\delta x} \qquad ...(7.33)$$

ان الاشارة السالبة هنا تعني ان الزيادة في الضغط يصاحبها دائما نقصان في الحجم.

في هذا التحليل لقد اهملنا التغير في الضغط على طول الشريحة (δp) بالمقارنة مع $\hat{P}$ ($p - p_0$) واعتبرنا ان كل اجزاء الشريحة $Q'R'$ خاضعة لنفس الضغط الصوتي واذا اخذنا القيمة الحدية لسمك الشريحة عندما يقترب من الصفر نحصل على :

$$P^{\wedge} = -K \lim_{\delta \to 0} \frac{\delta\eta}{\delta x} = -K \frac{\delta\eta}{\delta x} \qquad \dots (7.34)$$

يلاحظ هنا قد إستخدمنا التفاضل الجزئي وليس الكلي لان الازاحة الطولية n تعتمد على المتغيرين الموقع x والزمن t.

ان القوة المسلطة على الشريحة نحو اليمين هي PA والقوة المسلطة عليها نحو اليسار هي A (p + p) وتساوي $(p + \frac{\delta p}{\delta x} dx)$ وبذلك تكون محصلة القوة المؤثرة في الشريحة هي :

$$PA - (P + \frac{\delta P}{\delta x} \delta x) A = - \frac{\delta p}{\delta x} \delta x$$

إن هذه هي القوة الناتجة من تأثير الموجة والتي تؤدي الى تحريك الشريحة وازاحتها عن موضع توازنها الاصلي. ان اي قوة تؤثر في جسم وتحركه تكسبه تعجيلاً. فاذا اعتبرنا الشريحة رقيقة جداً اي ان سمكها يقترب من الصفر فعندئذٍ يمكن اعتبار على درجة عالية من الدقة إن الازاحة الطولية لكل أجزاء الشريحة هي n أي إننا يمكن أن نهمل

بالمقارنة مع وبذلك فإن التعجيل الذي تكتسبه الشريحة من تأثير القوة $A \frac{\delta p}{\delta x} \delta x$ هو $\frac{\delta^2\eta}{\delta t^2}$ والآن نطبق قانون نيوتن الثاني في الحركة الذي ينص على أن محصلة القوة المؤثرة في جسم تساوي حاصل ضرب كتلته في التعجيل المكتسب فينتج :

$$- A \frac{\delta p}{\delta x} \delta x = \rho_0 A \delta x \frac{\delta^2\eta}{\delta t^2} \qquad \dots\dots\dots\dots (7.35)$$

نبسط المعادلة فتصبح

$$- \frac{\delta p}{\delta x} = \rho_0 \frac{\delta^2\eta}{\delta t^2} \qquad \dots. (7.36)$$

لدينا العلاقة

$\hat{P} = P - P_o$

ولما كان ضغط المائع في حالة التوازن P_o ثابتاً لذلك مفاضلة الطرفين بالنسبة x نحصل على

$$\frac{\delta\hat{p}}{\delta x} = \frac{\delta p}{\delta x} \qquad ....(7.37)$$

نعوض في المعادلة (7.36) فينتج

$$\frac{\delta\hat{p}}{\delta x} = \rho_0 \frac{\delta^2\eta}{\delta t^2} \qquad ... (7.38)$$

نفاضل المعادلة (7.34) بالنسبة x فنحصل على

$$\frac{\delta\hat{p}}{\delta x} = -K \frac{\delta^2\eta}{\delta x^2} \qquad ....(7.39)$$

نعوض هذه المعادلة في (7.38) فنجد ان

$$K \frac{\delta^2\eta}{\delta x^2} = \rho_0 \frac{\delta^2\eta}{\delta t^2}$$

نرتب المعادلة الاخيرة فتصبح

$$\frac{\delta^2\eta}{\delta t^2} = \frac{K}{\rho_0} \frac{\delta^2\eta}{\delta x^2} \qquad ...(7.40)$$

هذه هي المعادلة التفاضلية الجزئية للحركة الموجية الطولية في مائع ذي بعد واحد. والمقدار الثابت يمثل نسبة المرونة الى القصور الذاتي او الكثافة للمائع وهذه النسبة لها ابعاد مربع السرعة. وفي الحقيقة ان هذه النسبة تساوي مربع سرعة الموجة c اي ان

$$c^2 = \frac{K}{\rho_0}$$

وبذلك تصبح معادلة الموجة الطولية كالآتـي ،

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad \ldots(7\cdot41)$$

وهذه هـي المعادلة القياسية للموجات الصوتية في بعد واحد بدلالة الأزاحة الطوا ؛ سواء في سائل اوغاز . وفي الواقع ان هذه المعادلة رغم أهميتها النظرية لاتقدم فائـا ؛ عملية خاصة في مجال القياسات والتطبيقات الصوتية ، اذ من المعلوم ان النظرية الحرذ ؛ تشير الى ان الجسيمات التـي يتألف منها المائع في حالة حركة عشوائية سريعة ومستم ؛ ولذلك فمن المتعذر قياس الازاحة الطولية للجسيمات التـي تسببها الموجات المنتقلة خلال المائع لأن حركة الجسيمات في هذه الحالة تكون مركبة من حركتين الاولـى ناشئة من الطاقة الحرارية والاخرى من الطاقة الموجية . وهنالك عدة طرق للتعبيـر عن معادلة الموجة الصوتية واهمها على الاطلاق هي بدلالة الضغط الصوتـي . حيث غالباً مايعول للاغراض العملية على قياس الضغط الصوتي الذي يسببه مرور الموجات الصوتية في المائع وخاصة في الغازات .

11 — 7 معادلة الموجة الصوتية بدلاله الضغط

لقد وجدنا في البند السابق ان المعادلتين التفاضليتين الاساسيتين للحصول عـلى معادلة الموجة (7·41) هما (7·34) و (7·36) أي

$$\hat{P} = -K \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \ldots(7\cdot34)$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad \ldots(7\cdot36)$$

حيث يمكن حذف $\hat{p}$ من هاتين المعادلتين للحصول على معادلة الموجة بدلالة الازاحة الطولية η والآنيمكن حذف η من هاتين المعادلتين للحصول على معادلة الموجة بدلالة الضغط الصوتـي $\hat{p}$. لهذا الغرض تفاضل المعادلة الاولى (7·34) مرتين بالنسبة للزمن فنحصل على

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial t^2} = -K \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

عندما نفاضل الطرف الايمن من المعادلة نحصل على ما يدعى بالمشتقة المختلطة التي يمكن كتابتها بالشكل التالي

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^2 \partial x}$$

يلاحظ هنا ان ترتيب المتغيرات في مقام الطرف الايمن يوضح ترتيب التفاضل . وعليه تصبح المعادلة الاولى بعد مفاضلتها مرتين بالنسبة للزمن

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial t^2} = -K \frac{\partial^3 \eta}{\partial t^2 \partial x} \qquad \ldots(7\cdot42)$$

الآن نفاضل المعادلة الاولى (7.34) بالنسبة لـ x فينتج

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = -K \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \qquad \ldots(7\cdot43)$$

ولكن لدينا معادلة الموجة (7.41) وهي

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\rho_o}{K} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

نحذف $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ بين المعادلتين (7.41) و (7.43) فنحصل على

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = -\rho_o \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \qquad \ldots(7\cdot44)$$

نفاضل هذه المعادلة مرة ثانية بالنسبة لـ x فنجد ان

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} = -\rho_o \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right) = -\rho_o \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial t^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(7\cdot45)$$

وبمقارنة المشتقات في الطرف الايمن من المعادلتين (7·42) و (7·45) نجد أن الفرق الوحيد بينهماهو ترتيب التفاضل . ولكن في كل الدوال الرياضية التي تتضمن أكثر من متغير فان ترتيب التفاضل غير مهم . وعليه يمكن أن نكتب دائما أن

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial t^2 \, \partial x} = \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \partial t^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(7{\cdot}46)$$

وهذه المتطابقة يمكن استخدامها لكل الدوال التي تظهر في الفيزياء . وبحذف هذه الكمية بين المعادلتين (7·42) و (7·45) نجد أن

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_o} \, \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7{\cdot}47)$$

هذه هي معادلة الموجة التضاغطية في المائع . وبمقارنة معادلة الموجة بدلالة الأزاحة الطولية η (7·41) مع معادلة الموجة بدلالة الضغط الصوتي $\hat{p}$ (7·47) نلاحظ ان لهما نفس الشكل تماماً

12 — 7 معادلة الموجة الطولية بدلالة سرعة الجسيمات والتكاثف

وبنفس الطريقة تماماً يمكن ايجاد معادلة الموجة الطولية في مائع بدلالة سرعة الجسيمات u حيث

$$u = \frac{\partial \eta}{\partial t} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(7{\cdot}48)$$

فنجد أن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_o} \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7{\cdot}49)$$

وكذلك يمكن التعبير عن معادلة الموجة الصوتية بدلالة التكاثف s حيث

$$s = - \frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad (7{\cdot}50)$$

نحصل على

$$\frac{\delta^2 s}{\delta t^2} = \frac{K}{\rho_o} \frac{\delta^2 s}{\delta x^2} \qquad \text{...... (7.51)}$$

ويترك للطالب كتمرين الحصول على المعادلتين (7.49) و (7.51) باتباع نفس الطريقة التي سبق عرضها تواً.

ويستحسن هنا ان نوضح كيف نحصل على التكاثف s بدلالة مشتقة الازاحة بالنسبة للموقع. ان التكاثف s في اية نقطة في مائع يمر خلاله موجة صوتية يعرف كالآتي :

$$s = \frac{\rho - \rho_o}{\rho_o} \qquad \text{...... (7.52)}$$

حيث ان ρ_o هي الكثافة الثابتة للمائع في حالة التوازن و ρ هي الكثافة الانية للمائع في حالة مرور الموجة. ومن هذه المعادلة نحصل على الكثافة الانية في اية نقطة

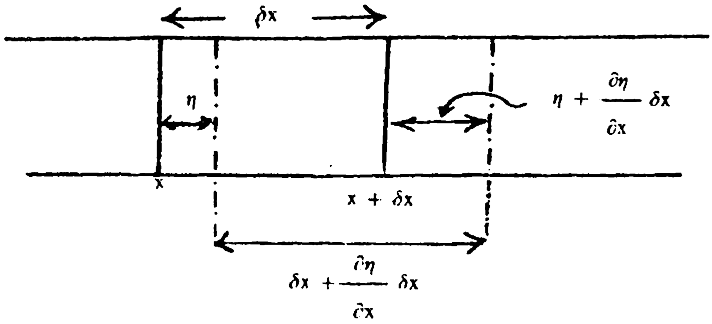
$$\rho = \rho_o (1 + s) \qquad \text{....... (7.53)}$$

ان التكاثف يحدث نتيجة ازاحة الجسيمات عن موضع توازنها بتأثير قوة الموجة مما يؤدي الى احداث تغير في كثافة الوسط. ولايجادا لعلاقة بين الازاحة وتغير الكثافة يستخدم الشكل (7.6).

في حالة التوازن تكون كتلة الشريحة هي $\rho_o A \delta x$ وفي حالة مرور الموجة فان حجم الشريحة يتغير مما يعني ان الكثافة الموضعية تتغير حتماً وتصبح الكثافة الآنية للمائع ضمن الشريحة هي ρ ان كتلة الشريحة في هذه الحالة هي $\rho A (\delta x + \frac{d\eta}{\delta x} \delta x)$

ومن مبدأ حفظ الكتلة نجد أن كتلة الشريحة تبقى نفسها رغم تغير كل من الحجم والكثافة فنحصل على

$$\rho_o A \delta x = \rho A \delta x (1 + \frac{d\eta}{\delta x}) \qquad \text{......... (7.54)}$$



الشكل (7·6) الازاحات الطولية في الموجة الصوتية المستوية .

نعوض ρ من المعادلة (7·53) ونحذف الكميات المشتركة من الطرفين فنجد

$$1 = (1 + s)\left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \qquad \text{............(7·55)}$$

ولما كانت التغيرات في كثافة المائع والازاحات الطولية صغيراً ولا تتجاوز قيمة s أو $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ المقدار 10^{-4} مهما كانت شدة الصوت . لذلك يمكن اهمال حاصل ضرب s و $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ فتصبح المعادلة الاخيرة كالآتي

$$s = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad (7·56)$$

هذه المعادلة هي صيغة خاصة لقانون حفظ الكتلة للموائع . وهي تشير الى أن كثافة المائع تقل اذا ابتعدت الجسيمات عن بعضها وتزداد اذا أقتربت الجسيمات من بعضها ، اي تزداد الكثافة في حالة التضاغط وتنخفض في حالة التخلخل .

13 – 7 سرعة الموجة الصوتية في الغاز

بالرغم من اختلاف المتغيرات التي استخدمت للتعبير عن معادلة الموجة الصوتية في المائع كما هو مبين في المعادلات (7·41) و (7·47) و (7·49) و (7·51) الا أن سرعة الموجة c لها نفس القيمة هي $\sqrt{\frac{K}{\rho_o}}$ ولقد اعتبر العالم اسحق نيوتن

ان عملية انتقال الموجات الطولية أي الموجات الصوتية في الهواء هي ظاهرة تحدث في درجة حرارية ثابتة . حيث اعتقد ان كمية الحرارة القليلة المتولدة في مناطق التضاغط تنتقل حال تولدها الى مناطق التخلخل . حيث يحدث فيها تبريد ضئيل وبذلك تتساوى درجات الحرارة في جميع النقاط في الغاز . ولذلك أعتبر نيوتن ان الغاز الذي يحمل الموجة الصوتية خاضعاً لمعادلة الغاز الايزوثرمية اي تحت درجة حرارية ثابتة . أي أن

$$PV = \text{مقدار ثابت} \qquad (7{\cdot}57)$$

حيث P يمثل ضغط الغاز و V حجم الغاز قبل مرور الموجة . وبمفاضلة الطرفين نجد أن

$$d(PV) = 0$$

$$pdV + Vdp = 0$$

حيث dp يشير الى مقدار الزيادة في الضغط الذي يحدث نقصان في الحجم مقدار dV

$$P = -\frac{Vdp}{dV} = -\frac{dp}{dV/V} \qquad \ldots(7{\cdot}58)$$

ولكن معامل المرونة الحجمي K يعرف بانه

$$K = -\frac{dp}{dV/V} \qquad (7{\cdot}59)$$

وبمقارنة (7·58) مع (7·59) نجد أن

$$K = P \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7{\cdot}60)$$

وفي هذه الحالة تعرف K بانها تمثل معامل المرونة الايزوثرمي . وعليه تكون سرعة الصوت تحت الشروط الايزوثرمية هي .

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho_o}} = \sqrt{\frac{P}{\rho_o}} \qquad (7{\cdot}61)$$

وباستخدام هذه العلاقة يمكن حساب سرعة الصوت في الهواء الجوي تحت الشروط القياسية حيث الضغط القياسي P_o هو

$$P_o = 0{\cdot}76 \times 13{\cdot}6 \times 10^3 \times 9{\cdot}81 \quad N/m^2$$

وكثافة الهواء في درجة الصفر سيلزيوس هي ρ_o حيث

$$\rho_o = 1{\cdot}293 \text{ Kgm.}/m^3$$

لذلك فان

$$c = \sqrt{\frac{P_o}{\rho_o}} = \sqrt{\frac{0{\cdot}76 \times 13{\cdot}6 \times 10^3 \times 9{\cdot}81}{1{\cdot}293}}$$

وبذلك نحصل على

$$C = 280 \ m/s$$

وهذه القيمة هي دون القيمة الحقيقية لسرعة الصوت في الهواء تحت الشروط القياسية حيث ان القيمة التجريبية الصحيحة هي $[c = 331{\cdot}36 \pm 0{\cdot}08 \ m/s]$ على هذا الاساس فان هناك اختلافاً في النتيجة يساوي 16 بالمئة وهذا يمثل مقداراً كبيراً في الخطأ . ولقد عزا نيوتن هذا الاختلاف في النتيجة الى انه لم يأخذ بالاعتبار الحجم الذي تشغله الجزيئات نفسها في الجووقد اعتبر ان الموجات تنتقل آنياً اي بدون ان تستغرق زمناً خلال مرورها في الفضاء الذي تشغله هذه الجزيئات كما انه اعتبر ان بخار الماء في الجو لادور له في انتقال الموجة الصوتية في الهواء . ان هذه الأفتراضات ليس لها أساس عملي يبررها . ورغم ذلك حتى لو أخذت هذه الأفتراضات بالأعتبار فأنها لاتقود الى نتيجة تماثل النتيجة التجريبية الصحيحة . ان التفسير الصحيح لهذا الاختلاف قدمه العالم الفرنسي لابلاس بعد حوالي 120 سنة من ظهور نتيجة نيوتن

14 — 7 تصحيح لابلاس

لقد استفاد لابلاس من نتائج اختبارات مئة سنة من التجارب العملية المتلاحقة فتوصل الى الأستنتاج ان انتقال الموجات الصوتية خلال الهواء ليس عملية ايزوثرمية (كما اعتقد نيوتن) بل انما عملية كظيمة (أي عملية اديباتيكية) . فمن قانون حفظ الطاقة نعلم انه عندما ينضغط حجم الغاز فانه يحتاج الى صرف شغل وهذا الشغل يتحول الى طاقة حرارية مما يؤدي الى زيادة درجة حرارة الغاز المضغوط . ومالم تكن العملية بطيئة جداً بحيث يتسنى للحرارة المتولدة أن تتسرب الى المحيط فأن درجة حرارة الغاز المضغوط تبقى أعلى من درجة حرارة الغاز المحيط به. ووفق هذا المنطق أستخلص لابلاس

انه نتيجة (1) التتابع السريع للتضاغطات والتخلخلات . (2) والمسافات الكبيرة بين مناطق التخلخل والتضاغط المتتالية و (3) لرداءة التوصيل الحراري للهواء ، فانه لايحدث تدفق حراري ذو قيمة محسوسة من مناطق الانضغاط (حيث درجة الحرارة اعلى قليلاً من درجة حرارة الهواء في حالة التوازن) الى مناطق التخلخل (حيث درجة الحرارة أقل بمقدار ضئيل) . ونتيجة لهذه الاسباب فان الأرتفاع الضئيل في درجة الحرارة في مناطق التضاغط لايعادل ويبطل الهبوط الضئيل في درجة الحرارة في مناطق التخلخل لذلك اعتبر لابلاس ان الهواء الذي يحمل الموجات الصوتية يخضع لمعادلة الغاز الكظيمة (او الاديباتيكية) ، حيث

$$PV^{\gamma} = \text{مقدار ثابت} \quad \ldots\ldots (7 \cdot 62)$$

حيث ان γ تمثل النسبة بين السعة الحرارية النوعية للهواء تحت ضغط ثابت C_p الى السعة الحرارية النوعية للهواء تحت حجم ثابت C_v اي ان

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (7 \cdot 63)$$

الآن نفاضل طرفي المعادلة ($7 \cdot 62$) فنجد ان

$$\gamma P V^{\gamma - 1} dV + V^{\gamma} dp = 0$$

نرتب هذه المعادلة فتصبح

$$\gamma P = - \frac{dp}{dV / V} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7 \cdot 63)$$

ولكن بالتعريف لدينا

$$K = - \frac{dp}{dV / V} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7 \cdot 64)$$

وبالمقارنة نجد ان معامل المرونة الحجمي الاديباتيكي للهواء هو

$$K = \gamma P \quad (7 \cdot 65)$$

وبذلك تكون سرعة الصوت في الهواء هي

$$C = \sqrt{\frac{K}{\rho_o}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_o}} \quad (7 \cdot 66)$$

وباستخدام هذه العلاقة يمكن ايجاد سرعة الصوت في الهواء تحت الشروط القياسية . حيث ان قيمة γ للهواء هي $\gamma = 1 \cdot 40$ فنجد ان سرعة الصوت هي

$$\sqrt{\frac{1.14 \times 0.76 \times 13.6 \times 10^3 \times 9.81}{1.293}}$$

$$\therefore \quad c = 331.34 \ m/s$$

وهذه النتيجة تتفق بشكل جيد مع القيمة التجريبية الصحيحة وهذا يشير قطعاً الى ان عملية انتقال الموجة الصوتية في الهواء هي عملية ادياباتيكية وليست ايزوثرمية.

15 – 7 حل معادلة الموجة الصوتية

ان من المفيد ان نعرف انه ليس من الضروري ان نحل جميع معادلات الموجة الصوتية (7.41) و (7.47) و (7.49) و (7.51). اذ يكفي ان نجد الحل بدلالة الازاحة الطولية η فقط. ثم من هذا الحل نستطيع ان نحصل على المتغيرات الاخرى المرتبطة بالموجة الصوتية كسرعة الجسيمات u والتكاثف s والضغط الصوتي $\hat{p}$ باستخدام العلائق التي سبق اشتقاقها وهي

$$u = \frac{\delta\eta}{\delta t}$$

$$s = -\frac{\delta\eta}{\delta x}$$

$$p = -K\frac{\delta\eta}{\delta x} = -c^2\rho_o\frac{\delta\eta}{\delta x}$$

الآن سنحاول ايجاد الحل العام لمعادلة الموجة

$$\frac{\delta^2\eta}{\delta t^2} = c^2\frac{\delta^2\eta}{\delta x^2}$$

ان هذه المعادلة متطابقة بالشكل مع معادلة الموجة الطولية في قضيب معدني ومعادلة الموجة المستعرضة في سلك متوتر. والحل العام لمثل هذه المعادلة يكون عادة بالشكل :

$$\eta = f_1(ct - x) + f_2(ct + x) \quad \ldots (7.68)$$

* يمكن أثبات ان هذه الصيغة تمثل حلاً عاما لمعادلة الموجة كما في البند (6-5)

حيث الحد الأول يشير الى الموجة المتقدمة في الاتجاه الموجب على المحور x بسرعة ثابتة c والحد الثاني يشير الى الموجة المتقدمة في الاتجاه المعاكس . وهذا الحل لايقتصر على شكل موجي محدد فهو حل عام يتضمن كل أشكال الموجة . وفي دراستنا هنا سنتقيد بشكل موجي مألوف هو الشكل التوافقي وذلك باعتبار حركة جسيمات المائع كدالة للموجات الجيبية وبذلك يصبح الحل العام في هذه الحالة هو

$$\eta = A \sin k (ct - x) + B \sin k (ct + x) \quad ......(7{\cdot}69)$$

حيث ان A هو مقدار ثابت يمثل قصى قيمة للأزاحة الطولية لجسيمات المائع ذي تسببه الموجة المتقدمة بالاتجاه الموجب ويدعى بسعة الموجة ، و B هو مقدار ثابت أيضاً يمثل سعة الموجة المتقدمةبالاتجاه السالب و k يمثل عامل تحويل البعد الى زاوية ويدعى بالعدد الموجـــي ويساوي $\frac{2\pi}{\lambda}$ حيث λ هـــي طول الموجة الطوليـــــة .

ويمكن التاكد من صحة هذا الحل بتعويضه في معادلة الموجة (7·41) وملاحظة تطابق الطرفين تماما . وللسهولة فقط سنتعامل في البداية مع الموجة المتقدمة في اتجاه واحد فقط وليكن الاتجاه الموجب مثلا ، نأخذ الحد الاول من الحل (7·69) فنجد ان

$$\eta = A \sin (K\sigma t - kx) \quad ....(7{\cdot}70)$$

ولما كان بعد A يمثل بعد الطول مثل η لذلك يمكن ان نستخدم بدل A الرمز η_o الذي يشير الى اقصى قيمة للازاحة ، وبتعويض $kc = \omega$ نجد ان الحل للموجة المتقدمة في الاتجاه الموجب يصبح

$$\eta = \eta_o \sin (\omega t - kx) \quad ....(7{\cdot}71)$$

من هذا الحل نستطيع ايجاد اهم المتغيرات التي تميز الموجة الصوتية مثل سرعـة الجسيم u ، والتكاثف او تغير الكثافة s ، وضغط الصـــــــوت $\hat{p}$ فسرعة الجسيمات u يمكن ايجادها من العلاقة

$$u = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

وبمفاضلة الازاحة η في الحل (7·71) بالنسبة للزمن نجد ان

$$u = \frac{\partial \eta}{\partial t} = \eta_o \omega \cos(\omega t - kx)$$

حيث ان $\eta_o \omega$ يمثل اقصى قيمة لسرعة جسيمات الوسط المادي ويرمز لها عادة بالرمز u_o فيصبح الحل بدلالة سرعة الجسيم u كالاتي .

$$u = u_o \cos(\omega t - kx) \qquad \text{...........(7·72)}$$

والتكاثف s يمكن ايجاده ايضا باستخدام العلاقة

$$s = -\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

وبمفاضلة الازاحة η في الحل (7·71) بالنسبة للموقع x نجد ان

$$s = -\frac{\partial \eta}{\partial x} = \eta_o k \cos(\omega t - kx)$$

حيث ان $\eta_o k$ يمثل اقصى قيمة لتكاثف الجسيمات ويرمز له عادة بالرمز s_o فيصبح حل معادلة الموجة بدلالة التكاثف s كالاتي

$$s = -s_o \cos(\omega t - kx) \qquad \text{...........(7·73)}$$

وضغط الصوت اوضغط الموجة $\hat{p}$ وهومن اهم المتغيرات التي تمثل الموجة الصوتية وهوالكمية التي تقاس عادة في معظم الاغراض العملية والتطبيقية . ويمكن ايجاد $\hat{p}$ باستخدام العلاقة

$$\hat{p} = -K \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\rho_o c^2 \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

وبمفاضلة الازاحة η في الحل (7·71) بالنسبة للموقع x نجد أن

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -k\eta_o \cos(\omega t - kx)$$

نعوض $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ في العلاقة السابقة فنحصل على

$$\hat{P} = \rho_o c^2 k \eta_o \cos(\omega t - kx)$$

حيث أن $\rho_o c^2 k \eta_o$ يمثل أقصى قيمة لضغط الصوت ويرمز له عادة بالرمز $\hat{P}_o$
فيصبح حل معادلة الموجة بدلالة ضغط الصوت $\hat{p}$ كالآتي :

$$\hat{P} = \hat{P}_o \cos(\omega t - kx) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7\cdot74)$$

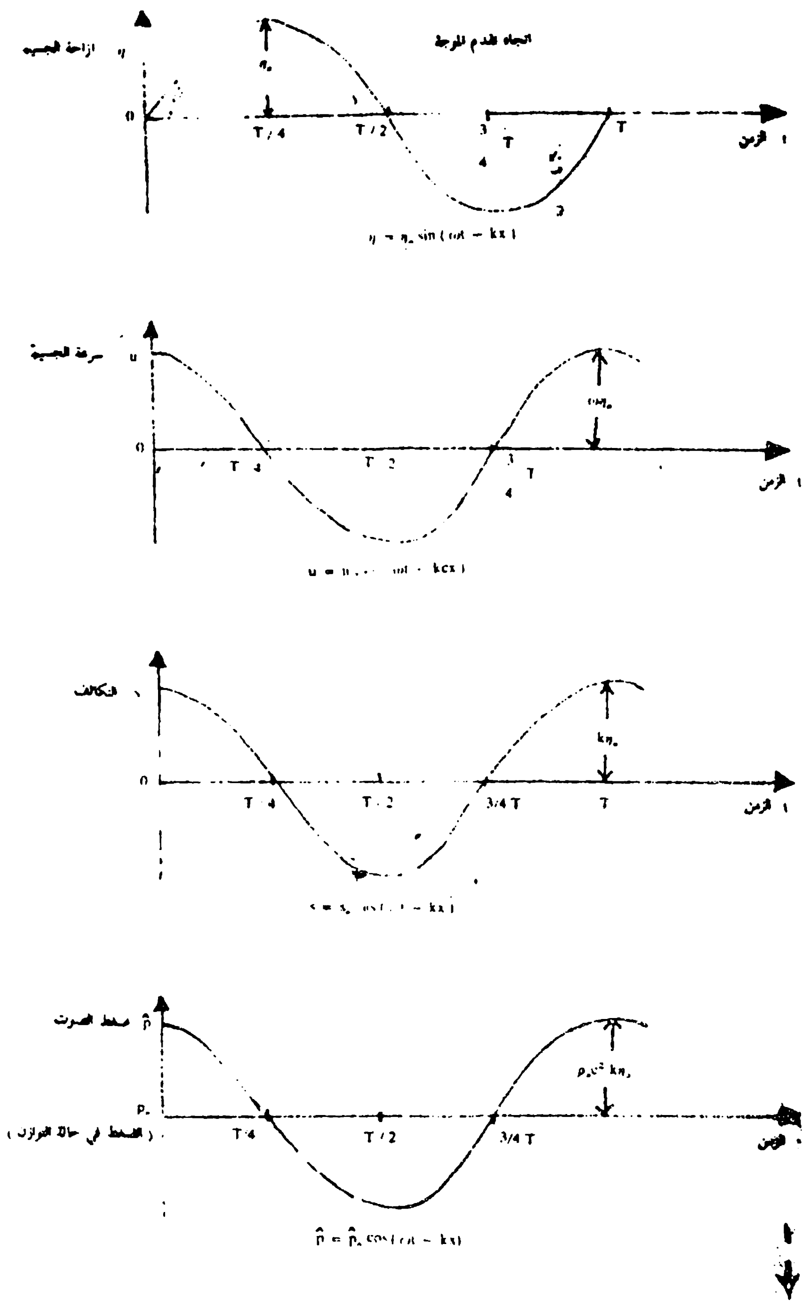
ان المعادلات (7·71) ، (7·72) ، (7·73) ، (7·74) تمثل حلول لمعادلة الموجة الصوتية بدلالة المتغيرات $\hat{p}, s, u, \eta$

16 — 7 العلاقة بين المتغيرات المختلفة للموجة الصوتية .

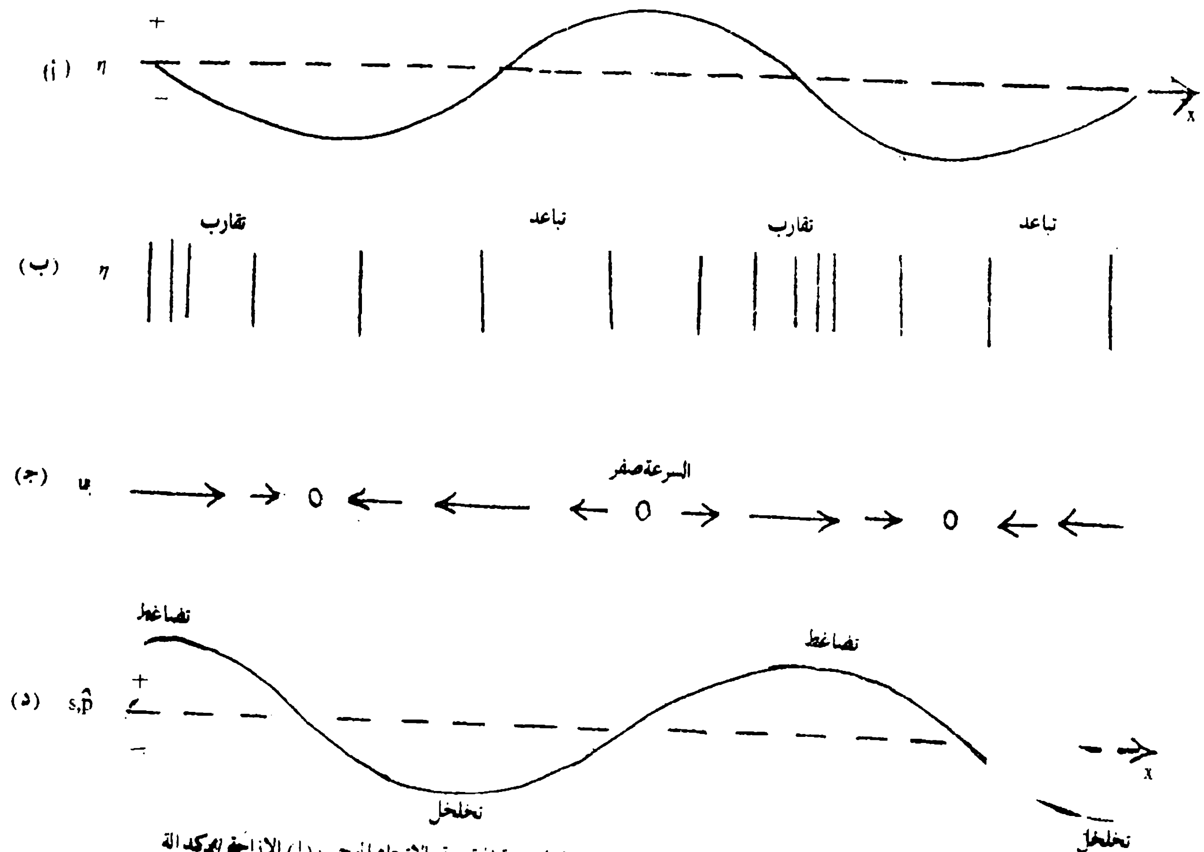
ان الموجة الصوتية يمكن وصفها من خلال أي من الخواص η و u و s و $\hat{p}$ والحلول (7·71) ، (7·72) ، (7·73) ، (7·74) توضح انه عندما تتقدم الموجة الصوتية المستوية في الاتجاه السيني الموجب فان ضغط الصوت $\hat{p}$ والتكاثف s وسرعة الجسيم u تكون جميعها بنفس الطور وتتقدم على طور الازاحة بربع دورة .

أي أن الازاحة تتخلف بزاوية طور تعادل $\frac{\pi}{2}$ كما هو مبين في الشكل (7·7) .

ان هذا الشكل يشير أنه عند انتقال الموجة الصوتية المستوية في مائع فان جسيمات ذلك المائع تهتز بتأثير الموجة حول مواضع توازنها وفي اللحظة الزمنية التي تصل فيها الجسيمات الى موضع توازنها في موقع معين أي تكون η صفراً كما مبين في الشكل (7·7 أ) فان سرعة الجسيمات والتكاثف والتضاغط في ذلك الموقع تكون في أقصى قيمة لها كما مبين في (ب) و (جـ) و (د) في الشكل (7·8) . ويمكن التعبير أيضاً عن علاقات الطور بين η و u و s و p بالنسبة للموقع x كما هو مبين في الشكل



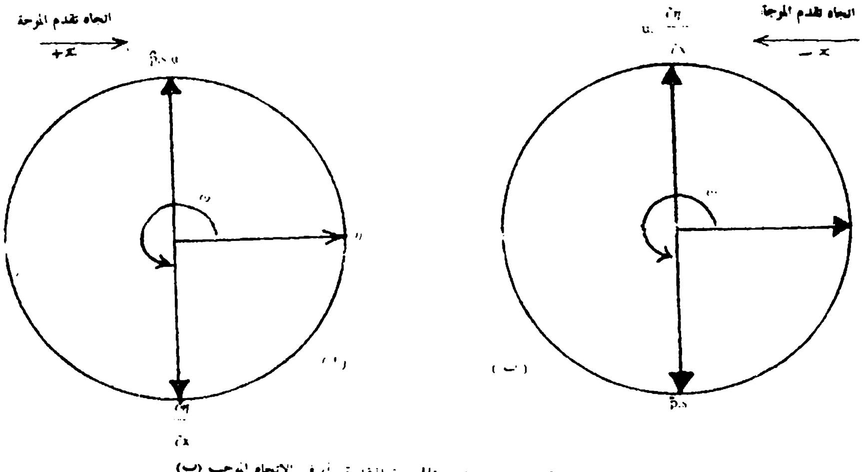
الشكل (7-7) يبين توزيع ازاحة الجسيم وسرعة الجسيم والتكاثف وضغط الصوت في الموجة الصوتية المستوية المتقدمة بسرعة c بالاتجاه الموجب



الشكل (7-8) يوضح العلاقة بين طور المتغيرات المرتبطة بالموجة الصوتية المتقدمة بالاتجاه الموجب (أ) الازاحة η كدالة للموقع و(ب) يبين المسافات الفاصلة بين الجسيمات عندما تزاح كما مبين في أ (ج) سرعة الجسيم u كدالة للموقع (د) التضاغط او التكاثف كدالة للموقع x.

ومن الجدير بالملاحظة انه عندما تتقدم الموجة الصوتية بالاتجاه السالب للمحور السيني فان سرعة الجسيم u تتقدم على طور الازاحة η بزاوية $\frac{\pi}{2}$. لكن التكاثف s والتضاغط $\hat{p}$ يتخلف بزاوية طور $\frac{\pi}{2}$ عن الازاحة . ان هذا الاختلاف في علاقة الطور بين مختلف المتغيرات المرتبطة بالموجات المتقدمة بالاتجاهات المتعاكسة يظهر بسبب ان الضغط والتكاثف كميات عددية بينما الازاحة والسرعة كميات اتجاهية . ويجب ان يلاحظ هنا انه بغض النظر عن اتجاه انتقال الموجة فان اقصى ضغط للصوت واقصى تكاثف يصاحب دائماً اقصى سرعة للجسيم عندما تكون حركة الجسيم بنفس اتجاه حركة الموجة وفي هذه الحالة فان طور الكميات الثلاث s, u, p يكون متقدماً على طور اقصى قيمة للازاحة بزاوية تعادل $\frac{\pi}{2}$

ويمكن اجمال علاقات الطور بين p, s, u, η للموجات الصوتية المتقدمة في الاتجاهين الموجب والسالب على امتداد المحور السيني كما هو مبين في الشكل (7·9) .



الشكل (7·9) علاقات الطور بين $\hat{p}, s, u, \eta$ للموجات الصوتية المستوية المتقدمة (أ) في الاتجاه الموجب (ب) الاتجاه السالب الازاحة η اخذت في الاتجاه الموجب للمحور x لكلا الموجتين

يلاحظ من هذا الشكل ان السكميات الثلاث u وξ و P تكون بنفس الطور عندما تكون حركة الجسيم بنفس اتجاه تقدم الموجة . وفي هذه الحالة تتقدم هذه السكميات الثلاث على طور الازاحة بزاوية $\frac{\pi}{2}$ وفي حالة حركة الجسيم بعكس اتجاه تقدم الموجة فأن سرعة الجسيم تتقدم على الازاحة بزاوية طور مقدارها $\frac{\pi}{2}$ بينما التكاثف والتضاغط يتخلف عن الازاحة بزاوية طور مقدارها $\frac{\pi}{2}$

17 — 7 طاقة الموجة الصوتية المتقدمة

في حالة الموجات الصوتية المتقدمة . فان موجات جديدة تتولد باستمرار من المصدر . وهذا يعني ان هنالك نقلاً مستمراً للطاقة باتجاه تقدم الموجة ، وهذه الطاقة يزودها عادة المصدر المهتز . ان الطاقة المنقولة في الثانية الواحدة تساوي مجموع الطاقة التي تمتلكها الجسيمات الواقعة ضمن مسافة طولها C حيث C هي سرعة الموجة وتساوي طول المسافة التي تقطعها الموجة في الثانية الواحدة . ان طاقة الجسيمات تكون مؤلفة من شكلين : الشكل الاول هو الطاقة الحركية التي تمتلكها الجسيمات المهتزة بفضل سرعتها . والشكل الثاني هو الطاقة الكامنة التي تمتلكها الجسيمات بفضل مواضعها ومرونة المائع . وفي الموجات الصوتية تتشكل مناطق تضاغط ومناطق تخلخل وعليه يكون توزيع الطاقة غير منتظم على طول الموجة . فالطاقة الحركية في الموجة الصوتية المستوية يمكن ايجادها باعتبار حركة الشريحة الرقيقة من الغاز سمكها dx ومساحة مقطعها A وتتحرك بسرعة آنية u وعليه تكون الطاقة الحركية E_k لمثل هذه الشريحة هي

$$E_k = \frac{1}{2} (\rho_0 A\, dx) u^2 \qquad (7-75)$$

حيث ان $\rho_0 A\, dx$ تمثل كتلة الشريحة التي تتحرك بسرعة آنية u
وكثافة الطاقة الحركية ρ_k تساوي الطاقة الحركية لوحدة الحجم وعليه فسان

$$\rho_k = \frac{E_k}{A\,dx} = \frac{1}{2} \rho_0 u^2 \qquad (7-76)$$

ان قيمة u تعتمد على موقع الشريحة x ، وعليه فان متوسط قيمة كثافة الطاقـــة الحركية ρ_k يمكن ايجادها بمعرفة قيمة متوسط u^2 على مسافة طولها $n\lambda$. حيث ان n أي عدد صحيح .

لدينا

$$u = u_0 \cos(\omega t - kx)$$

لذلك فان متوسط مربع سرعة الجسيمات يمكن ايجادها من

$$\bar{u^2} = \frac{u_0^2 \int_0^{n\lambda} \cos^2(\omega t - kx)\, dx}{n\lambda} = \frac{1}{2} u_0^2$$

وعليه فان متوسط كثافة الطاقة الحركية في الوسط الناقل للموجة الصوتية المستوية هو

$$\bar{\rho}_k = \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{1}{2} u_0^2 \right)$$

$$= \frac{1}{4} \rho_0 u_0^2 = \frac{1}{4} \rho_0 \omega^2 \eta_0^2 \qquad \ldots(1\cdot11)$$

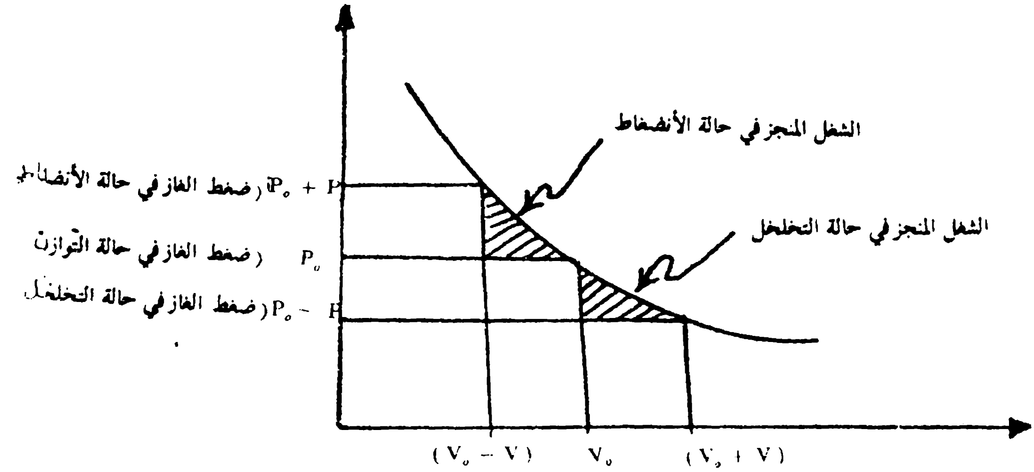
ويمكن مقارنة هذه النتيجة مع متوسط الطاقة الحركية لمهتز توافقـي بسيط كما هـــو مبين في المعادلة (2·32) في الفصل الثانـــي .

ان الطاقة الكامنة E_p في الموجة الصوتية المستوية يمكن ايجادها من حساب مقدار الشغل Pdv المنجز على كتلة ثابتة من الغاز حجمها في حالة التوازن V_0 خلال العملية الأديباتيكية أثناء مرور الموجة الصوتية . حيث

$$E_p = - \int P dV \qquad \ldots(7\cdot78)$$

حيث الأشارة السالبة تعني أن ازدياد الضغط يرافقه نقصان في الحجم والعكس بالعكس . وهذا يشير الى ان الطاقة الكامنة تكون دائماً موجبة سواء في حالة الأنضغاط

($\hat{p}$ موجب ، dV سالب) أو في حالة التخلخل (p سالب و dV موجب) كما مبين في الشكل (7·10)



(7·10) بين ان المساحة المظللة العليا تمثل مقدار الطاقة الكامنة التي أكتسبها الغاز في حالة الأنضغاط وتساوي $pv / 2$. والمساحة المظللة السفلى تمثل مقدار الطاقة الكامنة التي أكتسبها الغاز في حالة التخلخل وتساوي أيضاً $\frac{pv}{2}$

في هذا الشكل الحجم السالب ($V -$) يمثل مقدار النقص في حجم الغاز في حالة الأنضغاط ، والحجم الموجب ($V +$) يمثل مقدار الزيادة في حجم الغاز في حالة التخلخل من تعريف التكاثف s بدلالة التغير النسبي في الكثافة .

$$s = \frac{\rho - \rho_o}{\rho_o}$$

يمكن ان نحصل على التغير في التكاثف بدلالة التغير في الحجم فنجد أن

$$ds = -\frac{dV}{V_o} \qquad \ldots(7·79)$$

ومنها نحصل على $\qquad dV = -V_o ds$

ومن $\qquad \hat{p} = K_o S$

حيث K_a هو معامل المرونة الحجمي الأديباتيكي .
نعوض في (7·78) فنجد أن

$$E_p = -\int p\,dV = \int_o^s K_a s V_0 ds$$

$$\therefore E_p = \frac{1}{2} K_a s^2 V_o \qquad \ldots(7{\cdot}80)$$

فاذا كان سمك الشريحة dx ومساحة مقطعها العرضي A فان $V_o = Adx$ نعوض ذلك في المعادلة الأخيرة فنحصل على

$$E_p = \frac{1}{2} K_a s^2 A\,dx \qquad \ldots(7{\cdot}81)$$

ان كثافه الطاقة الكامنة ρ_p تساوي الطاقة الكامنة لوحدة الحجم . أي أن

$$\rho_p = \frac{E_p}{Adx}$$

فنحصل على

$$\rho_p = \frac{1}{2} K_a S^2 \qquad (7-82)$$

ولكن لدينا

$$\eta = \eta_o \sin(\omega t - kx)$$

منها نجد أن

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\eta_o k \cos(\omega t - kx) = -s$$

و

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \eta_o \omega \cos(\omega t - kx) = u$$

من المعادلتين الأخيرتين نجد أن

$$s = \frac{k}{\omega} u = \frac{u}{c}$$

نعوض $\left(\frac{u}{c}\right)$ بدل s في المعادلة (7·82) فنجد ان

$$\rho_p = \frac{1}{2} K_a \frac{1}{c^2} u^2$$

لكن

$$c^2 = \frac{k_a}{\rho_o}$$

$$\therefore \rho_p = \frac{1}{2} \rho_o u^2 \qquad \ldots(7\cdot83)$$

ان قيمة u تتغير مع الموقع x . لذلك فان متوسط كثافة الطاقة الكامنة يمكن ايجادها بأخذ متوسط قيمة u^2 على مسافة طولها $n\lambda$. أي ان

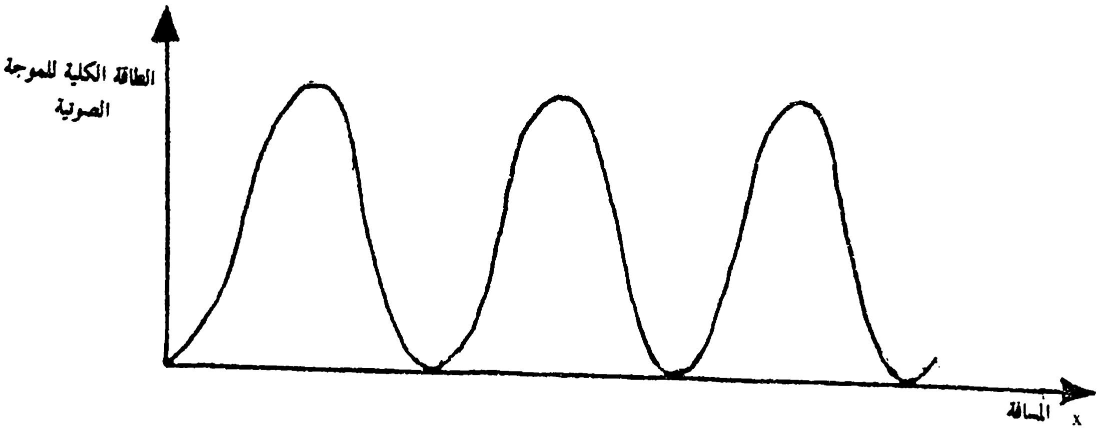
$$\overline{u^2} = \frac{u_o^2 \int_o^{n\lambda} \sin^2(\omega t - kx)\, dx}{n\lambda} = \frac{1}{2} u_o^2$$

وبذلك نحصل على متوسط كثافة الطاقة الكامنة $\bar{\rho}_p$ حيث

$$\bar{\rho}_p = \frac{1}{4} \rho_o u_o^2 \qquad \ldots(7\cdot84)$$

وبمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (7·77) نجد ان متوسط قيم كثافة الطاقة الكامنة والحركية يكون متساوياً في الموجات الصوتية .

لقد وجدنا ان الطاقة الحركية أو الطاقة الكامنة في أي شريحة رقيقة من الغاز سمكها dx ومساحة مقطعها A هي $\left(\frac{1}{2} \rho_o u^2 A dx\right)$ ولما كانت قيمة u نفسها في الحالتين لذلك نلاحظ ان الشريحة تمتلك أقصى طاقة أو ادنى طاقة كامنة أو حركية في نفس الوقت. وفي الواقع ان قيمة u هي التي تتحكم بمقدار الطاقة التي تمتلكها الشريحة. ففي حالة التضاغط أي عندما تتحرك الجسيمات في نفس اتجاه حركة الموجة وفي حالة التخلخل أي عندما تتحرك الجسيمات في عكس اتجاه حركة الموجة تكون الطاقة التي تمتلكها الشريحة في ذروتها . وعليه فان الطاقة الكلية المصاحبة للموجة الصوتية تتوزع على امتداد الموجة باتجاه المحور x كما مبين في الشكل (7 11)



الشكل (7-11) يبين توزيع الطاقة في الفضاء لموجة صوتية في الغاز. ان كلاً من الطاقة الحركية والطاقة الكامنة تكونان في ذروتهما عندما تكون قيمة u في أقصى قيمة لها وتكونان صفراً عندما u تساوي صفراً.

18 – 7 شدة الصوت :

ان شدة الصوت أوشدة الموجات الصوتية تعرف بانها متوسط المعدل الزمني لتدفق الطاقة الصوتية خلال وحدة المساحة العمودية على اتجاه تقدم الموجة وبوحدة قياس شدة الصوت هي الجول لكل ثانية لكل مترمربع . أو الواط لكل مترمربع .
ان الطاقة الصوتية الكلية التي يحتويها عمود طوله C dt متر ومساحة مقطعه A تساوي حاصل ضرب كثافة الطاقة الصوتية الكلية (الكامنة والحركية) في الحجم Cdt A حيث c هي سرعة أنتقال الموجة .

ولما كان متوسط كثافة الطاقة الصوتية الكلية $= \bar{\rho}_k + \bar{\rho}_p$

$$= \frac{1}{2} \rho_o u_o^2$$

لذلك فأن متوسط الطاقة الصوتية التي يحتويها عمود طوله cdt ومساحة مقطعه A هي

$$\frac{1}{2} \rho_o u_o^2 c \ A \, dt$$

وعليه فان متوسط الطاقة الصوتية التي تتدفق خلال المساحة A في وحدة الزمن هي

$$\frac{1}{2} \rho_o u_o^2 c \ A$$

ومتوسط الطاقة الصوتية التي تتدفق خلال وحدة المساحة في وحدة الزمن هي

$$\frac{1}{2} \rho_o u_o^2 c$$

وهذه الكمية تمثل شدة الصوت ويرمزلها عادة بالحرف I لذلك فان

$$I = \frac{1}{2} \rho_o u_o^2 \quad \ldots(7\cdot85)$$

ان الموجات الصوتية الأعتيادية تتراوح شدتها بين 10^{-12} و 1 واط لكل متر مربع ورغم ان الموجات الصوتية العالية الشدة تسبب عموماً ازعاجاً شديداً للسمع لحساسية جهاز السمع لديه الا أن الطاقة التي تحملها هذه الموجات صغيرة جداً بالمقارنة مع

الأشكال الأخرى للطاقة . فالطاقة الصوتية المتولدة من هدير الجماهير وهي تحيي فريقها الفائز بهدف ستكون على وجه التقريب كافية لتسخين قدح واحد فقط من الشاي .

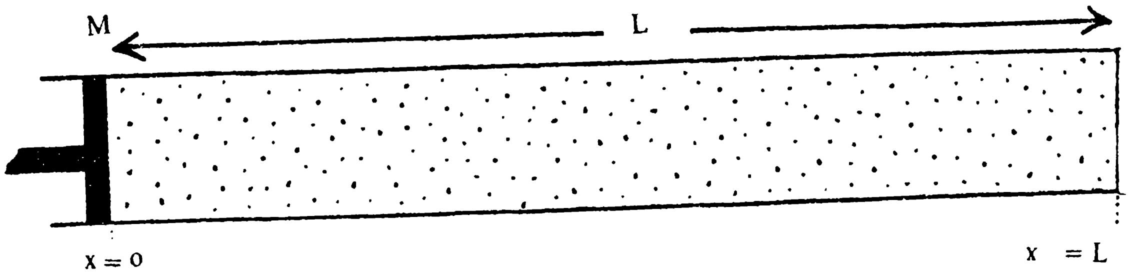
19 – 7 الموجات الطولية الواقفة في أنابيب الرنين :

لقد ذكرنا في الفصل السابق انه عندما تتقدم سلسلتان من الموجات المتماثلة تماماً من كل الوجوه في اتجاهين متعاكسين خلال نفس الوسط فان نمطاً من الموجات الواقفة او الساكنة يتولد . وهذا ما يحدث تماماً عندما تستحدث موجات طولية داخل انبوب مجوف محدود الطول . فالموجات المتقدمة بأحد الأتجاهين تنعكس عندما تصل طرف الانبوب وتتحرك بعكس الاتجاه . وعندما يكون الانعكاس كاملاً فان الموجة المنعكسة تماثل الموجة الساقطة تماماً من حيث السرعة والسعة والتردد والطول الموجي . وبتركيب الموجات الساقطة مع الموجات المنعكسة ينتج موجات واقفة . وقد تم في الفصل السابق تقديم شرح مفصل عن الموجات الواقفة في سلك متوتريحمل موجات مستعرضة وفي الحقيقة انه بقدر تعلق الامر بالموجات الواقفة فان ماينطبق على الموجات المستعرضة ينطبق ايضاً على الموجات الطولية لأن قاعدة التركيب عامة لكل الموجات . وفي البنود القادمة سنستعرض الموجات الواقفة في انابيب مجوفة محددة الطول وبشروط حدودية مختلفة .

20 – 7 الموجات الواقفة في أنبوب مجوف مغلق الطرفين :

نفرض أن لدينا انبوباً منتظماً مجوفاً محدود الطول يحتوي على هواء ومغلق الطرفين كما هومبين في الشكل (12 – 7)

لنفرض ان سلسلة من الموجات الطولية استحدثت داخل الانبوب بطريقة ما ولتكن مثلاً بواسطة حركة المكبس بحركة توافقية بسيطة على امتداد محور الانبوب لفترة زمنية قصيرة ، ثم التوقف عن الاهتزاز ليصبح المكبس بعد ذلك سداداً للانبوب من جهة اليسار.



الشكل (7-12) يبين أنبوب مجوف طوله L ومغلق الطرفين بسداد صلب. نصف قطر الأنبوب صغير جداً بالمقارنة مع L

ان المعادلة التي تصف الموجة المتقدمة نحو اليمين بدلالة ازاحة الجسيمات المهتزة هي

$$\eta_1 = a \sin(\omega t - kx) \qquad ...(78\cdot6)$$

حيث ان a تمثل اقصى قيمة لازاحة الجسيم الذي تسببه الموجة المتقدمة نحو اليمين

والمعادلة التي تصف الموجة المنعكسة والمتقدمة نحو اليسار بدلالة ازاحة الجسيمات المهتزة هي :

$$\eta_2 = b \sin(\omega t + kx) \qquad ...(7\cdot87)$$

حيث ان b تمثل اقصى قيمة لازاحة الجسيم الذي تسببه الموجة المتقدمة نحو اليسار .

ان موجتين تتقدمان في عمود الهواء داخل الانبوب باتجاهين متعاكسين . وعليه فأن أي جسيم داخل الانبوب يخضع لتأثير الموجتين معاً وبذلك فان محصلة ازاحته η حسب قاعدة التركيب هي

$$\eta = \eta_1 + \eta_2$$

$$\eta = (a \sin(\omega t - kx) + b \sin(\omega t + kx)) \qquad ...(7\cdot88)$$

الآن نطبق الشروط الحدودية عند طرفي عمود الهواء داخل الانبوب المجوف عندما يكون المكبس الصلب ثابتاً تماماً فعند الطرف $x = 0$ تكون $\eta = 0$ لكل قيم t وعند الطرف $x = L$ تكون $\eta = 0$ لكل قيم t ان جزيئات الهواء المجاورة للمكبس الصلب لايمكنها الحركة طوليا لذلك تكون محصلة الازاحة الطولية صفراً دائما .

نعوض الشرط الحدودي الاول في المعادلة (7·88) فينتج

$$0 = a \sin \omega t + b \sin \omega t$$

$$\therefore a = -b \qquad ...(7\cdot89)$$

ان هذه النتيجة تشير الى ان سعة الموجة الساقطة تساوي بالمقدار سعة الموجة المنعكسة وهذا يعني أن الانعكاس كامل دون ان يرافقه امتصاص للطاقة . والاشارة السالبة هنا تشير الى ان الانعكاس قد أدى الى تغير في الطور مقداره π

الآن نعوض المعادلة (7·89) في المعادلة (7·88) فنجد ان

$$\eta = a \sin(\omega t - kx) - a \sin(\omega t + kx)$$

ومنها نحصل على

$$\eta = -2a \cos \omega t \sin kx \qquad (7{\cdot}90)$$

ان هذه المعادلة تمثل معادلة الموجة الطولية الواقفة في الهواء المحصور داخل الانبوب . وبقية التحليل في هذه الحالة يماثل تماماً التحليل الذي سبق تقديمه في البند (6-15) مع الاخذ بالاعتبار ان الموجات هنا طولية وليست مستعرضة .

وعند تطبيق الشرط الحدودي الثاني في المعادلة (7·90) نحصل على

$$0 = -2a \cos \omega t \sin kL$$

ولما كانت $\cos \omega t \neq 0$ و $2a \neq 0$

لذلك يجب ان يكون

$$\sin kL = 0$$

وهذا يتحقق عندما

$$kL = n\pi \qquad \ldots(7{\cdot}91)$$

حيث ان n اي عدد صحيح موجب .

ومن هذه العلاقة نجد ان الترددات الطبيعية المسموحة لعمود الهواء ان يهتز بها طولياً هي

$$f_n = \frac{nc}{2L}$$

ولما كانت

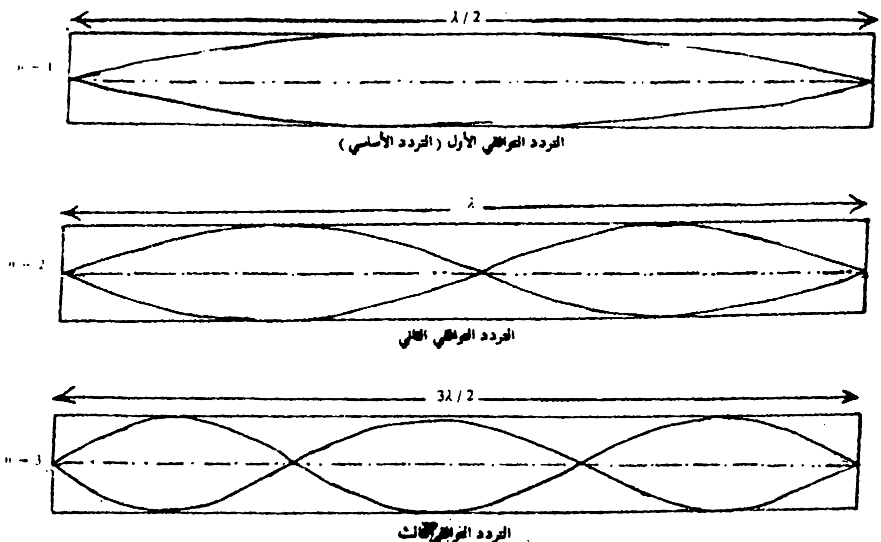
$$c = f_n \lambda_n$$

لذلك فان

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \qquad \ldots(7{\cdot}92)$$

وهذه العلاقة تحدد عدد أنصاف الطول الموجي المسموحة داخل عمود الهواء . وهذا يعني ان طول عمود الهواء L يساوي نصف طول الموجة λ عندما n تساوي واحد . وهذا يقابل اقل تردد طبيعي أو تردد رنيني لعمود الهواء . ويمكن توضيح اشكال الاهتزاز

الرنينـي في عمود الهواء المحصور داخل انبوب مغلق الطرفين كما مبين في الشكـل (7·13) وعلى هذا الاساس يمكن الحصول على كل اشكال الاهتزازات . ولما كانت سرعة الصوت C هـي



الشكل (7·13) نمط الاهتزاز لعمود الهواء داخل انبوب مغلق الطرفين .

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_o}{\rho_o}}$$

فان الترددات الطبيعية المسموحة لعمود الهواء داخل الانبوب المغلق هـي

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{\gamma P_o}{\rho_o}} \qquad \ldots(7\cdot93)$$

ويلاحظ هنا ان تحليل الموجات الرنينية في هذه الحالة يماثل الى درجة كبيرة التحليل الذي سبق تقديمه عن اهتزاز السلك المتوتر والمثبت من طرفيه باحكام . ويمكن للطالب ان يستمر في اكمال التحليل كما في البند (6–16) على ان يراعـي طبيعة الموجات التـي يتعامل معها .

21 – 7 الموجات الطولية الواقفة في أنبوب مجوف مفتوح الطرفين :

نفرض ان لدينا أنبوباً منتظماً طوله L . مفتوح الطرفين فاذا ماأثير عمود الهواء داخل الأنبوب بطريقة النفخ مثلاً فان موجات طولية تتولد . وفي هذه الحالة فان الموجة الساقطة على الطرف المفتوح تنعكس عند ذلك الطرف . وعند الأنعكاس فان الأنضغاط يتحول الى تخلخل والعكس بالعكس ، ولكن اتجاه حركة جزيئات الهواء في الموجة المنعكسة تبقى بنفس اتجاه حركة جزيئات الهواء في الموجة الساقطة ، ولذلك فان الطور لاينقلب .

ان الموجة الساقطة يمكن تمثيلها بالمعادلة (7.86)

$$\eta_1 = a \sin(\omega t - kx)$$

والموجة المنعكسة تمثلها المعادلة (7.87)

$$\eta_2 = b \sin(\omega t + kx)$$

ومعادلة الموجة الواقفة الناتجة من تركيب الموجتين هي (7.88)

$$\eta = \eta_1 + \eta_2$$

$$\eta = a \sin(\omega t + kx) + b \sin(\omega t + kx)$$

الآن نطبق الشروط الحدودية عند الطرفين .

في أي طرف مفتوح للأنبوب يكون الضغط الصوتي p مساوياً للصفر . ومن العلاقة

$$\hat{p} = K \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

نجد أنه عندما $\hat{p} = 0$ فان

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

لذلك يكون الشرط الحدودي الأول عند الطرف $x = 0$ هو $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ لكل قيم t . والشرط الحدودي الثاني عند الطرف $x = L$ هو $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ لكل قيم t

الآن نفاضل المعادلة (7.89) بالنسبة لـ x فنجد ان

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = ak \cos(\omega t + kx) - bk \cos(\omega t - kx)$$

نطبق الشرط الحدودي الأول على هذه المعادلة فنحصل على

$$0 = ak\cos\omega t - bk\cos\omega t$$

ولما كانت $k\cos\omega t \neq 0$

فان $a - b = 0$

ومن ذلك ينتج ان $a = b$

لاحظ ان اشارة b موجبة

وهذا يعني ان الموجة المنعكسة لها نفس طور الموجة الساقطة.

الآن نعوض $a = b$ في المعادلة (7·89) فنحصل على معادلة الموجة الواقفة وهي

$$\eta = a\sin(\omega t - kx) + a\sin(\omega t + kx)$$
$$\eta = 2a\sin\omega t\cos kx \qquad \ldots(7{\cdot}94)$$

وفي أية لحظة زمنية يمكن ان نضع المعادلة الأخيرة بالشكل :

$$\eta = [\,2a\sin\omega t\,]\cos kx$$

حيث المقدار داخل القوس يمثل سعة الموجة. ومن الواضح ان هذه السعة تتغير جيبياً مع الزمن ، وان أقصى قيمة لها هي $2a$ وتحدث عندما

$$\omega t = \frac{\pi}{2}(2n - 1)$$

حيث ان n هي أي عدد صحيح موجب ، أي أن $n = 1, 2$ و3... الخ وتكون ادنى قيمة للسعة صفراً عندما

$$\omega t = m\pi$$

حيث ان m هي أي عدد صحيح.

والآن اذا ركزنا أنتباهنا على جسيم معين في الهواء فان محصلة الأزاحة الطولية η يمكن التعبير عنها كالآتي.

$$\eta = [\,2a\cos kx\,]\sin\omega t$$

من هذه المعادلة نلاحظ ان كل جسيم في الهواء ينجز حركة توافقية بسيطة. ولكن بسعه (المقدار داخل القوس) تعتمد على موقع الجسيم x وأقصى قيمة للسعة تساوي (2a) وتحدث عندما

$$kx = n'\pi \qquad \ldots(7\cdot95)$$

حيث $n = 0 , 1 , 2 , \ldots$ الخ

والنقاط التي تحدث فيها أقصى قيمة للسعة تدعى بالبطون . وادنى قيمة للسعة تساوي صفراً وتحدث عندما

$$kx = \frac{\pi}{2}(2m' - 1) \qquad \ldots(7\cdot96)$$

حيث $m' = 1, 2, 3, 4..$ الخ

والنقاط التي تحدث فيها ادنى قيمة للسعة تدعى بالعقد وهذه النقاط تكون دائماً في حالة سكون

من العلاقة (7·95) نجد أن البطون تقع في المواقع

$$x = 0 , \frac{\lambda}{2} , \lambda , \frac{3\lambda}{2}$$

ومن العلاقة (7·96) نجد ان العقد تقع في المواقع

$$x = \frac{\lambda}{4} , \frac{3\lambda}{4} , \frac{5\lambda}{4} , \ldots$$

ويلاحظ هنا ان المسافة الفاصلة بين عقدتين متتاليتين أو بطنين متتاليين يساوي نصف طول الموجة . والمسافة الفاصلة بين عقدة وبطن متتاليين يساوي ربع طول الموجة .

الآن نفاضل المعادلة (7·94) بالنسبة لـ x فنحصل

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -2ak \sin \omega t \sin kx \qquad \ldots(7\cdot97)$$

ونطبق الشرط الحدودي الثاني على هذه المعادلة فنجد أن

$$0 = -2ak \sin \omega t \sin kL$$

ولما كان

$$2ak \sin \omega t \neq 0$$

لذلك فان

$$\sin kL = 0$$

ومن هذه المعادلة نجد أن

$$kL = n\pi$$

حيث n يساوي أي عدد صحيح موجب

$$\frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi$$

$$\therefore L = n \frac{\lambda}{2}$$

من هذه المعادلة يتضح ان طول عمود الهواء يجب أن يستوعب عدداً صحيحاً من أنصاف طول الموجة الطولية في حالة الرنين. والشكل (7·14) يبين عدداً من الأنماط المسموحة لأهتزاز عمود الهواء في داخل أنبوب مفتوح الطرفين.

ولأيجاد الترددات الطبيعية أوالترددات الرنينية المصاحبة لهذه الأنماط من الأهتزازات لدينا

$$\lambda_n f_n = c$$

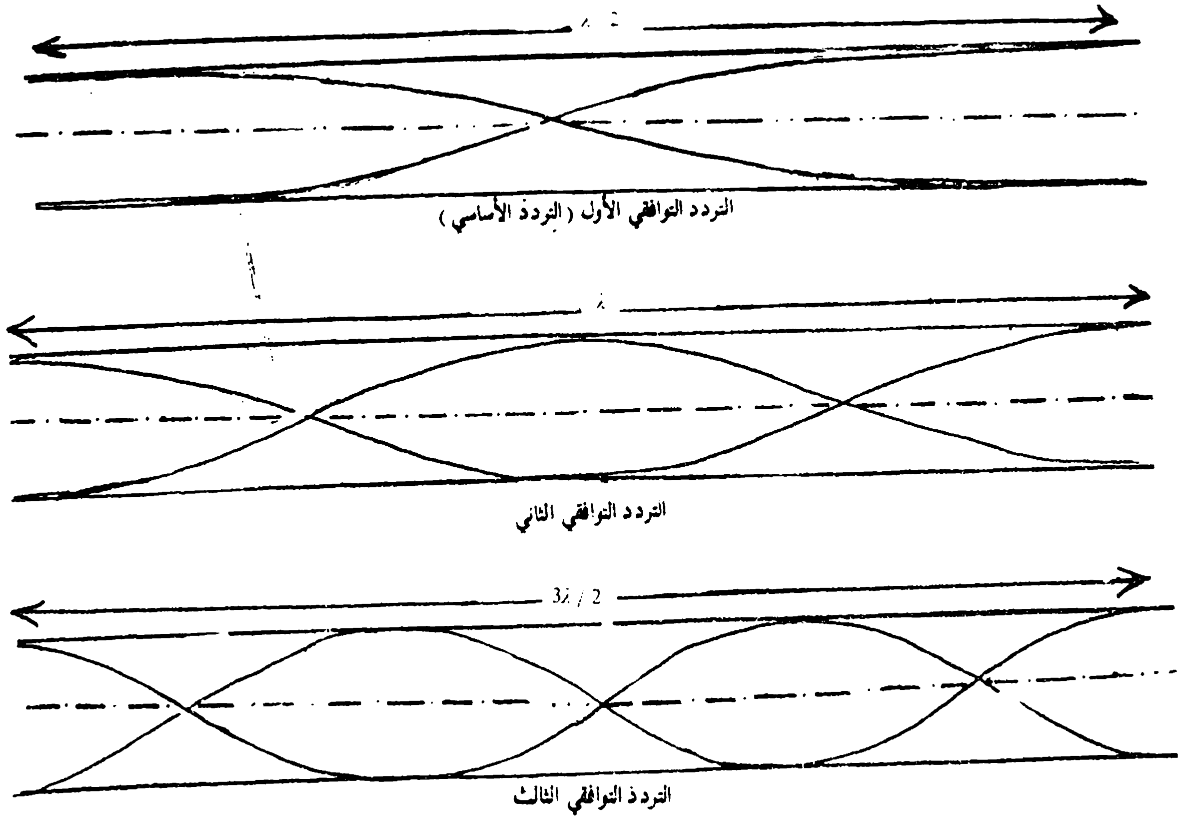
ولدينا أيضاً

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_o}{\rho_o}}$$

ومنها نحصل على

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} \qquad \ldots (7{\cdot}98)$$

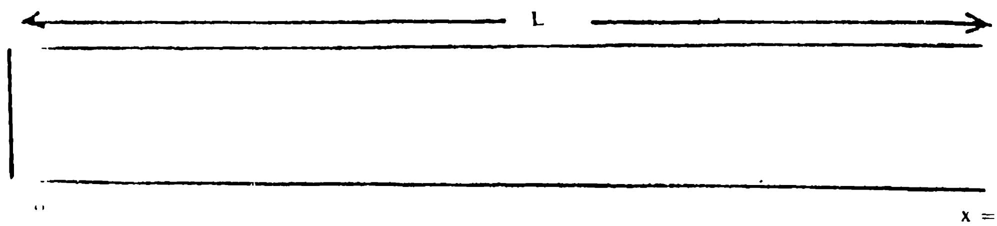
وهذه المعادلة تشير الى ان الترددات الطبيعية لعمود الهواء داخل انبوب مفتوح الطرفين مساوية للترددات الطبيعية لعمود الهواء داخل انبوب مغلق الطرفين.



الشكل (7-14) يبين أشكال الأهتزاز لعمود الهواء داخل أنبوب مجوف مفتوح الطرفين .

22 – 7 الموجات الطولية الواقفة في أنبوب مجوف أحد طرفيه مغلق والآخر مفتوح .

نفرض ان لدينا أنبوباً منتظماً مجوفاً طوله L أحد طرفيه مغلق والآخر مفتوح كما مبين في الشكل (7·15)



الشكل (7·15) أنبوب أحد طرفيه مفتوح والآخر مغلق .

ولأيجاد معادلة الحركة للهواء داخل الأنبوب اذا حصل له أضطراب .
نفرض ان الموجة الساقطة هي

$$\eta_1 = a \sin(\omega t - kx)$$

والموجة المنعكسة هي

$$\eta_2 = b \sin(\omega t + kx)$$

ان وجود الموجتين معاً داخل الأنبوب يعني ان محصلة الأزاحة الطولية لأي جسيم هي η حيث

$$\eta = \eta_1 + \eta_2$$

$$\eta = a \sin(\omega t - kx) + b \sin(\omega t + kx) \quad \ldots (7\cdot 99)$$

والآن نطبق الشروط الحدودية عند طرفي الأنبوبة .
فالشرط الحدودي الأول عند $x = 0$ تكون $\eta = 0$ لكل قيم t .
والشرط الحدودي الثاني عند $x = L$ تكون $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$ لكل قيم t

نطبق الشرط الأول على المعادلة (7·99) فنجد أن

$$o = a \sin \omega t + b \sin \omega t$$

مما يعني أن

$$a = -b$$

والمعنى الفيزياوي لذلك واضح أن الأنعكاس يؤدي الى تغير في الطور مقداره π
نعوض ذلك في المعادلة (7·99) فنحصل على

$$\eta = a \sin (\omega t - kx) - a \sin (\omega t + kx)$$

ومنها نجد أن

$$\eta = -2a \cos \omega t \sin kx \qquad \ldots (7{\cdot}100)$$

هذه المعادلة تمثل محصلة الأزاحة الطولية للموجة الواقفة.
الآن نفاضل هذه المعادلة بالنسبة لـ x فنحصل على

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -2ak \cos \omega t \cos kx \qquad \ldots (7{\cdot}101)$$

نطبق الشرط الحدودي الثاني على هذه المعادلة (7·101) فنجد أن

$$o = -2ak \cos \omega t \cos kL$$

ولما كان

$$2ak \cos \omega t \neq 0$$

$$\cos kL = 0$$

لذلك فان

$$kL = \frac{\pi}{2} (2n - 1)$$

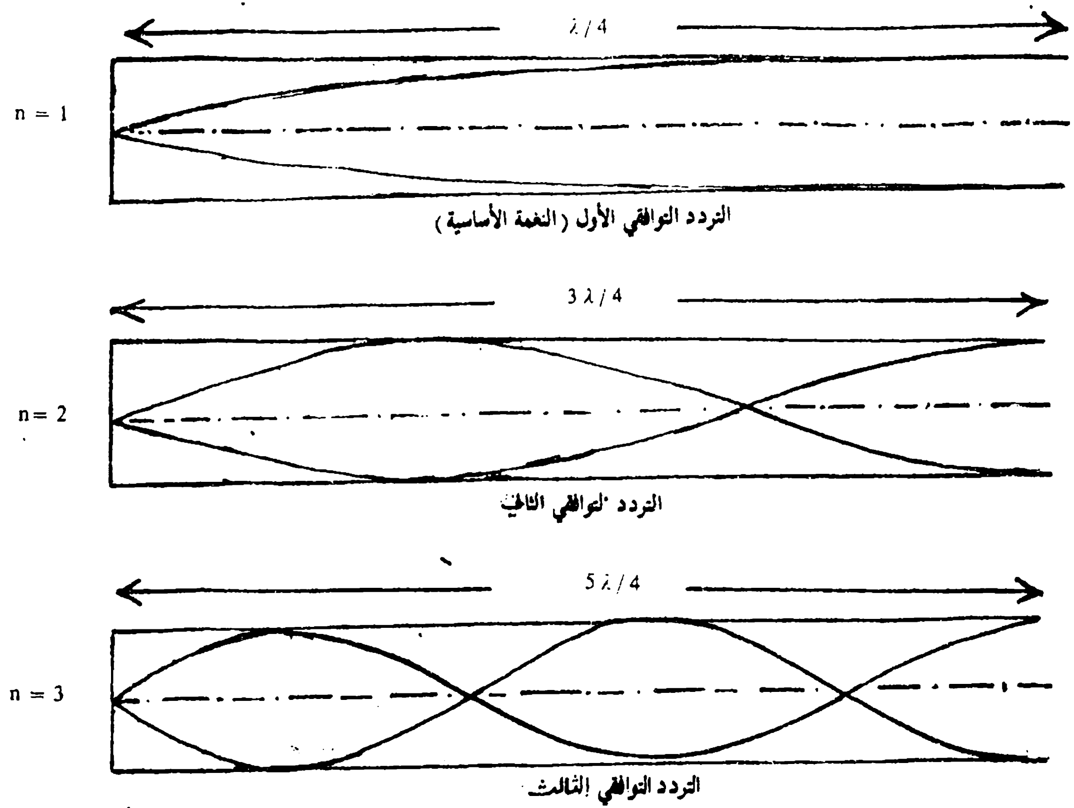
وهذا يستلزم أن تكون

$$\frac{2\pi}{\lambda} L = \frac{\pi}{2} (2n - 1)$$

حيث أن n أي عدد صحيح موجب

$$L = \frac{\lambda}{4} (2n - 1) \qquad \ldots (7{\cdot}102)$$

في هذه الحالة يلاحظ ان طول عمود الهواء يجب أن يستوعب ربع طول الموجة أو مضاعفاتها الفردية في حالة الرنين. والشكل (7·16) يبين الأنماط المسموحة لأهتزاز عمود الهواء في داخل أنبوب أحد طرفيه مفتوح والاخر مغلق.
ولأيجاد الترددات الرنينية المصاحبة لهذه الانماط من الأهتزاز لعمود الهواء. لدينا $C = f_n \lambda_n$ ولدينا أيضاً



شكل (7·16) نماط الأهتزاز لعمود الهواء داخل أنبوب أحد طرفيه مفتوح والآخر مغلق.

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$$

ومن المعادلة (7·102) والعلاقتين الاخيرتين نجد ان التردد. الرنيني لعمود الهواء في انبوب أحد طرفيه مفتوح والآخر مغلق هو f_n حيث

$$f_n = \frac{(2n-1)}{4L} \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} \qquad \ldots (7\cdot103)$$

وعندما تكون $n = 1$. نحصل على تردد النغمة الاساسية لعمود الهواء

$$f_1 = \frac{1}{4L} \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} \qquad \ldots (7\cdot104)$$

ومن المفيد للطالب ان يقارن بين هذا التردد والتردد الطبيعي لمرنان هلمهولتز له نفس ابعاد الانبوبة .

أمثلة محلولـة :

مثال (7.1) سلك معدنـي مثبت من طرفيه باحكام وتحت قوة شد تعـادل ثقل كتلته 20 كلغم فاذا كان تردده عندما يمسح طولياً أحد طرفيه بقطعة رطبة من القماش هو 20 مرة قدر تردده عندما تسحب نقطة من منتصفه عرضياً ثم تترك ، احسب مساحة مقطع السلك اذا علـم ان معامـل يونـك لمادتـه هو 19.0×10^{10} نيوتـن لكل متر مربع

الحـل

عند مسح السلك من طرفه بقطعة رطبة من القماش تحدث اهتزازات طوليـة فيه . ولأن طرفـي السلك مثبتين وتحدث عندهما عقدتين لذلك فان التردد الاساسي في هذه الحالة هو f_1 حيث

$$f_1 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad \ldots (1)$$

وفـي حالة سحب نقطة من وسط السلك جانبياً ثم تترك تحدث اهتزازات مستعرضة ، ولأن طرفـي السلك مثبتين وتحدث عندهما عقدتين لذلك فان التردد الاساسـي في هذه الحالة هو f_2 حيث

$$f_2 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \ldots (2)$$

وبقسمة المعادلة (1) على المعادلة (2) نحصل على -

$$\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{Y}{\rho} \cdot \frac{\mu}{F}} \quad \ldots (3)$$

ولـكن

$$\mu = \rho A$$

حيث ان A تمثل مساحة المقطع العرضـي للسلك و ρ هـي كثافته لذلك فان المعادلة (3) تصبح :

$$\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{YA}{F}}$$

نعوض القيم المناسبة في هذه المعادلة

$20 = f_1 / f_2$

$20 \times 9.8 = F$ نيوتن

$19.0 \times 10^{10} = Y$ نيوتن لكل متر مربع

فنحصل على

$$20 = \sqrt{\frac{19.0 \times 10^{10} \times A}{20 \times 9.8}}$$

ومنها نجد ان

$4 \times 10^{-7} = A$ متر مربع

مثال (2 - 7)

قضيب معدني طوله 0.925 متر مثبت من وسطه باحكام وعندما يسحب أحد طرفية بقوة ويترك فان اهتزاز رنيني يحدث بتردد قدره 2700 هيرتز. أوجد معامل المرونة الطولي للقضيب اذا كانت كثافته 7.8×10^3 كلغم / م^3

الحـــل :

عند سحب القضيب طولياً وتركه فان اهتزازات طولية تحدث فيه . ولان مركز القضيب مثبت تتكون عقدة في ذلك الموضع وبطنان عند طرفيه . والتردد الرنيني المقابل لهذه الحالة هو التردد الاساسي f وطول القضيب يكافيء نصف طول الموجة $\frac{\lambda}{2}$ لذلك فان طول الموجة $1.850 = 2L = \lambda$ متر .

ومن العلاقة $C = f\lambda$ نجد ان سرعة الموجة C هي

$1.850 \times 2700 = C$

$5000 =$ متر / ثانية

ان سرعة الموجة الطولية في القضيب المعدنـي هي،

$$C = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

وبالتعويض المناسب

$C = 5000$ م / ثا

$\rho = 10^3 \times 7.86$ كلغم / م³

نجد ان

$$5000 = \sqrt{\frac{Y}{7.86 \times 10^3}}$$

ومنها نجد ان معامل المرونة الطولـي (معامل يونك) هو

$Y = 2.0 \times 10^{11}$ نيوتن / م²

مثال (3 − 7)

قضيب من الالمنيوم طوله 1 مترمثبت من أحد طرفيه بمسند صلب والطرف الأخر حر . فاذا علمت ان معامل مرونته 6.0×10^{11} نيوتن / م² وكثافته 2.7×10^3 كلغم / م³ فما هو تردده الاساسـي ؟

الحل

لدينا المعادلة التـي تعطـي أي تردد طبيعـي لهذا القضيب وهي :

$$f_n = \frac{(n - 1/2)}{2L}\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

والتردد الاساسـي يحدث عندما تأخذ n القيمة واحد (n = 1) لذلك فـأن

$$f_1 = \frac{1}{4L}\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

نعوض القيم المناسبة ونجد ان

$f_1 = 1200$ هيرتز

مثال (4 − 7)

اذا علمت ان حجم الماء ينقص بمقدار 2·3 بالمئة من حجمه عند تسليط ضغط مقداره حوالي 500 جو (1 جو= 10^5 نيوتن / م٢) وان كثافة الماء هي 10^3 كغم / م٣ فما هي سرعة الموجات الصوتية في الماء ؟

الحـــل

ان سرعة الموجة الصوتية في المائع هي C حيث

$$C = \sqrt{\frac{K}{\rho_o}} \qquad \text{.........} (1)$$

حيث ان K هي معامل المرونة الحجمي و ρ_o هي كثافة المائع

لدينا

$$K = -\frac{dp}{dv / v_o} \qquad \text{...........}(2)$$

حيث dp = مقدار التغير في الضغط المسلط = 500×10^5 نيوتن / م٢

dv / v_o = مقدار التغير النسبي في الحجم = $\frac{2\cdot3}{100}$

وبالتعويض المناسب نجد ان

$$K = \frac{500 \times 10^5}{2\cdot3 / 100}$$

وعليه فان

$K = 2\cdot2 \times 10^9$ نيوتن / م٢

(لماذا اختفت الأشارة السالبة ؟)

وبتعويض قيم K, ρ_o في المعادلة (1) نحصل على

$$C = \sqrt{\frac{2\cdot2 \times 10^9}{10^3}}$$

ومنها نجد ان

$C = 1500$ م / ثا .

مثـــال (7 - 5)

احسب سرعة الصوت في الهواء تحت الشروط القياسية من ضغط ودرجة حرارة علماً ان كثافة الهواء تحت هذه الشروط هي 1.293 كلغم / م^3

الحـــل

ان سرعة الصوت في الهواء يمكن ايجادها من المعادلة

$$C = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

حيث ان P = الضغط الجوي = $9.8 \times 13.6 \times 10^3 \times 0.76$ نيــــوتـــــن / م^2

$\gamma = 1.41$

ρ = كثافة الهواء = 1.293 كلغم / م^3

نعوض فنحصل على

$$c = \sqrt{\frac{1.41 \times 0.76 \times 13600 \times 9.8}{1.293}}$$

ومنها نجد ان $c = 332.5$ م / ثا

مثال (7 - 6)

(أ) برهن ان سرعة الصوت في أي غاز تتناسب طردياً مع الجذر التربيعـــي لدرجة الحرارة المطلقة للغاز .

(ب) قارن سرعة الصوت في غاز الهيدروجين في درجة الصفر المئوي (سيلزيوس) مع سرعة الصوت في غاز النايتروجين في درجة 100 مئوي (سيلزيوس) علماً ان الوزن الجزيئي للهيدروجين هو 2 وللنايتروجين هو 28 .

الحـــل

لدينا سرعة الصوت في اي غاز هي

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ونفرض ان الغاز يتبع معادلة الحالة العامة للغاز المثالـي :

$$PV = nRT \qquad (2)$$

حيث ان P هو ضغط الغاز
V هو الحجم الذي يشغله الغاز
T هـي درجة الحرارة المطلقة للغاز
R هو الثابت العام للغازات
و n هو عدد المولات
ان عدد المولات n يعرف بالعلاقة

$$n = \frac{m}{M} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

حيث ان m هي كتلة الغاز
M هو الوزن الجزيئي للغاز
نعوض (3) في (2) فنحصل على

$$PV = \frac{m}{M} RT$$

$$P = \frac{m}{V} \frac{RT}{M} = \rho RT / M \qquad (4)$$

حيث ان $\frac{m}{V} = \rho$ وتمثل كثافة الغاز
من المعادلة (4) نحصل على

$$\frac{P}{\rho} = RT / M \qquad (5)$$

نعوض (5) في (1) ونجد ان

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

ولكن γ و R و M ثوابت ، لذلك فان سرعة الصوت c تتناسب طرديا مع الجذر التربيعي لدرجة الحرارة المطلقة للغاز .

الآن نطبق المعادلة (6) على غاز الهيدروجين فنحصل على

$$C_1 = \sqrt{\frac{\gamma R \times 273}{2}} \qquad \ldots\ldots\ldots (7)$$

وبالمثل نطبق المعادلة (6) على غاز النايتروجين فنحصل على

$$C_2 = \sqrt{\frac{\gamma R \times 373}{28}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

يلاحظ ان γ لها نفس القيمة للغازين لأن كليهما ثنائـي الذرة نقسم المعادلة (7) على (8) فنحصل على

$$\frac{C_1}{C_2} = \sqrt{\frac{28 \times 273}{2 \times 373}} = 3{\cdot}17$$

وهذه النتيجة تعنـي ان سرعة الصوت في غاز الهيدروجين هـي 3·17 مرة قـدر سرعته في غاز النايتروجين .

مثال (7 - 7)

مصدر للصوت تردده 512 هيرتز وسعته 0·25 سم . ماهو تدفق الطاقة الصوتيـة عبر وحدة المساحة في وحدة الزمن ، اذا علمت ان سرعة الصوت في الهواء هي 340 م/ثا وان كثافة الهواء هي 0·00129 غم / سم³ .

الحل

ان شدة الصوت I هـي

$$I = \frac{1}{2}\rho c u_o^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ولدينا سعة السرعة u_o هي

$$u_o = \omega\eta_o$$

حيث ω هو التردد الزاوي ويساوي $2\pi f$

و η_o هوسعة الازاحة .

لذلك فان

$$u_o = 2\pi f\eta_o \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2).$$

نعوض (2) في (1) فنحصل على

$$I = 2\pi^2 \rho c f^2 \eta_o^2$$

نعوض القيم المناسبة .

$\rho = 0{\cdot}00129$ غم / سم^3

$c = 34000$ سم / ثا

$f = 512$ هيرتز

$\eta_o = 0{\cdot}25$ سم

فنحصل على

$$I = 2 \times (3{\cdot}14)^2 \times 0{\cdot}00129 \times 34000 \times (512)^2 \times (0{\cdot}25)^2$$

ومنها نجد ان

$I = 1{\cdot}417 \times 10^{-7}$ أرك / سم^2 . ثا

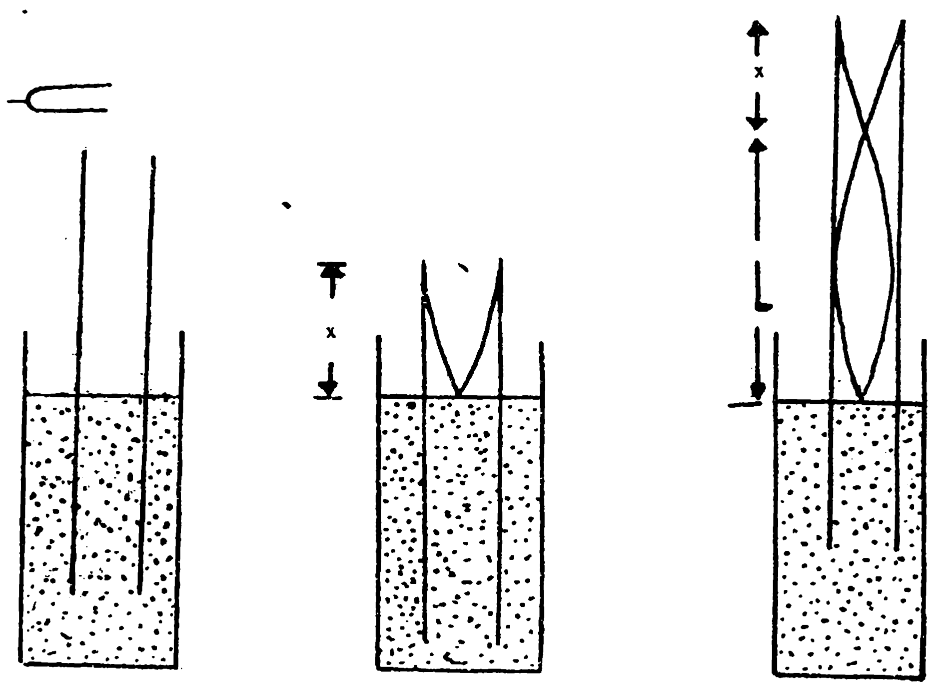
مثال (8 − 7)

انبوبة الرنين هي الجهاز البسيط المستخدم لقياس سرعة الصوت في الهـواء باعتماد قاعدة الرنين . حيث توضع شوكة رنانة مهتزة ترددها f بالقرب من الطرف المفتوح للانبوبة . التي ملئت جزئياً بالماء . ويمكن تغير طول عمود الهواء بتغيـر مستوى الماء . وقد وجد ان شدة الصوت تصل الى نهاية عظمى عندما يخفض مستوى الماء تدريجيا من الطرف المفتوح مسافة قدرها x . ويتكرر وصول شدة الصوت الى نهاية عظمـى عند المستويات L و 2L و 3L تحت المستوى x وقد وجد بالتجربة ان

المسافة بين موضعي رنين متتاليين هي المسافة بين عقدتين متتاليتين وهي 15.3 سم عند استخدام شوكة رنانة ترددها 1080 هيرتز . اوجد سرعة الصوت في الهواء

الحل

تصل شدة الصوت الى نهاية عظمى عندما يتم الرنين بين الشوكة الرنانة وعمود الهواء .



الشكل (17-7) يبين انه يمكن التحكم بطول عمود الهواء من خلال رفع أو خفض الانبوبة الداخلية.

وحيث ان الانبوبة مغلقة من الأسفل بالماء ، يتكون موجات واقفة من تداخل الموجات الساقطة القادمة من الشوكة المهتزة والموجات المنعكسة من سطح الماء ، وتقع العقدة عند سطح الماء والبطن عند الطرف المفتوح للانبوبة . وحيث ان تردد الشوكة ثابت وسرعة الصوت في عمود الهواء لها قيمة محددة ، يتم الرنين عند الموقع المبين في الشكل (7.17 ب) والرنين الثاني يتم في الموقع المبين في الشكل (7.17 جـ). وتكون المسافة بين الموقعين هي L التي تساوي نصف طول الموجة أي أن

$$L = \frac{\lambda}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ولكن سرعة الصوت C تساوي حاصل ضرب التردد f في طول الموجة λ اي ان

$$c = f\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

لذلك نحصل من المعادلتين على

$$c = 2fL$$

نعوض القيم المناسبة

f = 1080 هيرتز

L = 15·3 سم = 0·153 م

فنحصل على

$$c = 2 \times 1080 \times 0{\cdot}153$$

ومنها نجد ان

c = 330 م/ثا

ونترك للطالب الاجابة على مايلي :

1 – ماهومدلول المسافة x في الشكل (7·17)

2 – هل تصلح هذه الطريقة لايجاد سرعة الصوت في غازات اخرى غير الهواء .

اسئلـة

1 – 7 وضح ماهي ميزات الموجات التالية
(أ) الموجات الصوتية
(ب) الموجات الطولية
(ج) .الموجات التضاغطية

2 – 7 اذكر اهم مصادر الصوت حولك ، وبين ماهو الاختلاف بين هذه الاصوات المسموعة ؟

3 – 7 هل ان جميع اطوال الموجات المختلفة لها نفس السرعة في الوسط الواحد . وضح الادلة التي تشير الى ذلك .

4 – 7 في اي حالات المادة : الصلبة ام السائلة ام الغازية تكون سرعة الصوت اكبر مايمكن . وضح

5 – 7 كيف يمكن عملياً تحديـد مـواقع العقد والبطون في عمود من الهـواء ؟

6 – 7 ميز بين سرعة الجسيم وسرعة الموجة وهل هناك علاقة بينهما ؟

7 – 7 من المعلوم ان جميع المعادن تتمدد عند تسخينها . هل يؤثر ذلك على التـردد الطبيعي للاجسام كالشوكة الرنانة مثلاً ؟ وضح

8 – 7 اسقط قضيبا معدنيا على احد الطرفين على أرضية صلبة . هل تتولد موجـات تضاغطية في القضيب ؟ ومن الصوت الناتج من سقوط القضيب هل يمكـن تقدير التردد الاساسي للرنين ؟

9 – 7 اذا كان لديك مصدران للصوت متماثلين تماما احدهما في الهواء والآخر في الماء فهل :

أ – يكون تردد الصوت المسموع واحداً في الوسطين
ب – يكون الطول الموجي متساوياً في الوسطين
ج – تكون سرعة الصوت واحدة في الوسطين

10 – 7 نفق طوله اكيلومتر ماهي الترددات الرنينية له ؟ هل لهذه الترددات اية اهمية ، وضحها ؟

11 – 7 ماهو تصحيح لابلاس ؟

مسائل :

1 – 7 (أ) اشتق معادلة الموجة الطولية في قضيب معدني معامل مرونته الطولي Y وكثافته ρ .

(ب) احسب سرعة الموجة الصوتية في قضيب مصنوع من الالمنيوم اذا علمت ان معامل مرونته الطولي (معامل يونك) هو 6×10^{10} نيوتن /م² وان كثافته هي 2.7×10^3 كلغم / م³ .

2 – 7 موجة تضاغطية ترددها 250 هيرتز تتولد في قضيب من الحديد وتنبعث منه الى الهواء . سرعة الموجة في مادة القضيب هي 5×10^3 م/ثا وسرعتها في الهواء هي 350 م/ثا . جد الطول الموجي في الوسطين (20م ، 1.4 م)

3 – 7 ماهي سرعة انتقال الصوت في قضيب معدني من الفضة اذا كان معامل يونك للفضة 7.75×10^{10} نيوتن /م² وان كثافة الفضة 1.05×10^3 كلغم / م³ . (2.67×10^3 م/ ثا)

4 – 7 موجتين ترددهما 20 هيرتز و30 هيرتز على الترتيب ينتشران من نقطة مشتركة ماهو فرق الطور بينهما بعد مرور 0.75 ثانية من تولدهما .

5 – 7 موجتين ترددهما 500 هيرتز و511 هيرتز ينتشران من نقطة مشتركة ماهو الفرق الطور بعد 4. ثانية (144 درجة)

6 – 7 قضيب منتظم مثبت من منتصفه باحكام وطرفيه حران

(ا) ماهي الترددات الطبيعية للاهتزازات الطولية في القضيب .

(ب) ماهو الطول الموجي المقابل لنمط الاهتزاز المحدد بالعدد الصحيح n

(جـ) ماهي مواقع العقد لنمط الاهتزاز المحدد في الفرع (ب)

7 – 7 قضيب من النحاس طوله 4 متر ، مثبت من وسطه ويصدر نغمة ترددها 450 هيرتز عندما يهتز طوليا . اذا كانت كثافة مادته 8.3 غم / سم³ احسب معامل يونك (10.76×10^{11} داين / سم²)

7 قضيب حديدي طوله 1 متر مثبت من منتصفه ويهتز طوليا . (أ) اوجد اقل تردد رنيني لهذا القضيب (ب) اوجد اقل تردد رنيني له اذا كان مثبتاً عند احد طرفيه . علما ان سرعة الموجة الطولية خلال مادة القضيب هي 5×10^3 م/ثا

ماهو الاجهاد اللازم في سلك من الحديد المشدود لكي تكون سرعة الموجات الطولية خلاله 100 مرة قدر سرعة الموجات المستعرضة فيه .

7 قضيب معدني طوله 1.5 متر مثبت من مركزه . عندما يهتز طوليا وجد ان تردده الاساسي هو 1200 هيرتز احسب معامل يونك لمادة القضيب . علما ان كثافة مادة القضيب هي 8×10^3 كلغم /م^3 (10.4×10^{10} نيوتن /م^2)

7 قضيب من النحاس طوله 3 متر مثبت من وسطه . احسب تردد النغمة الاساسية المنبعثة منه . عندما يهتز طوليا كثافة النحاس 8.3 غم / سم^3 ومعامل يونك للنحاس 10.76×10^{11} داين لكل سم^2 . (600 هيرتز)

7 قضيب حديدي طوله 1 متر ومثبت في نقطة تبعد 1 سم من احد طرفيه . احسب اقل تردد رنيني للموجات الطولية فيه . علما ان سرعة الموجة الطولية خلاله هي 5×10^3 م/ثا

7 قضيب من الصلب طوله 1 م مثبت من احد طرفيه . ماهي الترددات الرنينية الثلاث الاولى للموجات التضاغطية . علما ان سرعة الموجة التضاغطية خلاله هي 5000 م/ ثا

7 ماهو اقل تردد رنيني لقضيب من النحاس طوله 1.5 متر وغير مقيد اطلاقاً ؟

7 برهن ان معادلة الموجة الصوتية في عمود من الهواء هي

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\rho}{K} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

ان η هي الازاحة عن موضع التوازن . ρ هي الكثافة الكتلية و K هي المرونة الحجمي .

16 – 7 برهن في حالة اهتزاز عمود الهواء داخل انبوبة :

(أ) ان الطرف المفتوح من الانبوبة يمثل بطناً ، حيث التغير في الضغط اثناء الاهتزاز يساوي صفرا وحركة الهواء في نهاية عظمى .

(ب) ان الطرف المغلق من الانبوبة يمثل عقدة ، حيث ان الحركة معدومة وان التغير في الضغط في نهاية عظمى .

17 – 7 ماهو اقصر انبوبة مفتوحة الطرفين يحدث فيها الرنين عند التردد 440 هيرتز.

18 – 7 انبوبة ارغن مملوءة بالهواء في درجة الصفر المئوي لها تردد اساسي 220 هيرتز. كم سيكون ترددها الاساسي لو استبدل الهواء بغاز ثاني اوكسيد الكاربون . علما ان سرعة الصوت في غاز ثاني اوكسيد الكاربون هي 261 م/ ثا .

19 – 7 انبوبة مفتوحة من طرفيها وطولها 0·90 مترماهي اصغر ثلاثة ترددات رنينية لها ؟ ارسم شكل الموجة داخل الانبوبة لكل تردد

20 – 7 انبوبة طولها 0·75 متر مفتوحة من احد طرفيها ومغلقة من الطرف الاخر. ماهي اقل ثلاث ترددات رنينية لها ؟ ارسم شكل الموجة في الانبوبة لكل تردد .

21 – 7 (أ) سرعة الصوت في معدن معين هي v طرقت نهاية قضيب من هذا المعدن طوله L فسمع شخص عند الطرف الاخر صوتين : احدهما من الموجة التي انتقلت في مادة القضيب والاخر من الموجة التي انتقلت في الهواء . فاذا كانت C هي سرعة الصوت في الهواء ماهي الفترة الزمنية t التي تمضي بين سماع الصوتين ؟

(ب) اعتبر ان $t = 1·4$ ثانية والمعدن هو حديد اوجد قيمة L

22 – 7 جد قيمة سرعة الصوت في الهواء من المعلومات التالية : كثافة الهواء 0·00129 غم/سم^3. ارتفاع البارومتر 76 سم زئبق كثافة الزئبق 13·6 غم / سم^3 ، الحرارة النوعية للهواء تحت حجم ثابت هي 0·172 والحرارة النوعية للهواء تحت ضغط ثابت هي 0·242 ، التعجيل الارضي 981 سم / ثا^2 (332·6 م/ثا)

23 – 7 سرعة الصوت في غاز الهيدروجين تساوي 1270 م/ثا ملئت انبوبة ارغن ترددها الرنيني الاساسي في الهواء 800 هيرتز بالهيدروجين . ماقيمة التردد الرنيني الاساسي في هذه الحالة .

24 – 7 يريد رجل ان يعين عمق سطح الماء في ماسورة من الحديد تؤدي الى بئر قديمة وبأجراء تجربة رنين على هذه الماسورة باعتبارها مغلقة من احد طرفيها ومفتوحة من الطرف الآخر، وجد هذا الرجل ان اصغر تردد رنيني هو 100 هيرتز، ماهو عمق سطح الماء عن فوهة الماسورة بالتقريب ؟

25 – 7 عندما يطرق رجل سياج مصنوع من الحديد بمطرقة فان رجلاً آخر واقفاً على بعد 100 متر منه واحدى اذنيه نحو الحاجز يسمع صوتين. كيف تبرر ذلك ؟ ثم احسب الفترة الزمنية الفاصلة بين الصوتين. علماً ان سرعة الصوت في الهواء هي 330 م /ثا ومعامل يونك للحديد 1.9×10^{12} داين سم^2 وكثافة الحديد

7.8 غم / سم^3 (0.283 ثا)

26 – 7 وجد ان سرعة الموجات الطولية في الماء هي تقريبا 1450 م / ثا عند 20 درجة مئوية. احسب الانضغاطية الاديباتيكية للماء. (ان الانضغاطية هي مقلوب معامل المرونة الحجمي) (50×10^{-12} سم^2 / داين)

27 – 7 جد النسبة بين التردد الاساسي المستعرض الى التردد الاساسي الطولي لسلك من الحديد قطره 1 ملم يستند على صونومتر ومشدود بقوة تعادل ثقل كتلته 10 كلغم . علماً أن معامل يونك للحديد هو 20×10^{26} نيوتن لكل سم^2 (النسبة = 40)

28 – 7 احسب شدة الصوت في الهواء تحت الشروط القياسية من ضغط ودرجة حرارة اذا كان تردد الصوت 800 هيرتز والسعة 10^{-5} متر. (54×10^{-2} واط / م^2)

29 – 7 برهن ان شدة الصوت I في الهواء هي

$$I = 2\pi^2 \rho c f^2 \eta_0^2$$

30 – 7 ناقش كيفية توزيع الطاقة في الموجة الصوتية المتقدمة .

31 – 7 اذا كانت شدة الصوت 10^{-4} واط /م^2 على بعد قدره 2 متر من المصدر، واذا كانت شدة الصوت تتناسب عكسيا مع مربع البعد عن المصدر، ماهي شدة الصوت على بعد 10 متر من المصدر.

الفصل الثامن

الحركة الموجية في بعدين

1 – 8 المقدمة

لقد تركزت دراستنا في الفصلين السابقين على الحركة الموجية في بعد واحد ، سواء كانت موجات مستعرضة أو موجات طولية ، كالموجات المتحركة على سلك متوتر أو في قضيب معدني او عمود هواء في أنبوب ، وهذه تمثل حالات خاصة مقيدة في اتجاه واحد. وفي هذا الفصل سندرس الحركة الموجية في بعدين ، وخير مثال على هذا النوع من الحركة الموجية هو الموجات المستعرضة المنتقلة في الاغشية الرقيقة المتوترة مثل غشاء الصابون او غشاء الطبل او مكبرة الصوت ... الخ . وفي الحقيقة أن نظير السلك المتوتر في بعدين هو الغشاء المتوتر. اي ان الغشاء في هذه الحالة يمكن تصوره عبارة عن وتر مرن ذي بعدين. وعلى هذا الاساس يمكن الحصول على معادلة الحركة الموجية في بعدين بطريقة مماثلة تماماً لتلك المستخدمة للحصول على معادلة الحركة الموجية في بعد واحد في السلك المتوتر. ودراسة الحركة الموجية في الغشاء المتوتر تسلط اضواء كاشفة على خواص الموجات في بعدين.

2 – 8 معادلة الحركة الموجية في بعدين :

لغرض اشتقاق معادلة الحركة الموجية في بعدين وتوخياً للسهولة في التحليل نفرض ان لدينا غشاء رقيقاً منتظماً تتوفر فيه الصفات التالية :

1 – **ان يكون مرناً تماماً ولايبدي مقاومة للي والأنحناء .**

2 – **ان يكون مستوياً ويمتد الى مالانهاية للتخلص من الأنعكاسات من عند حدوده .**

3 – ان يكون الغشاء متوتراً تحت اجهاد منتظم . أي أن تكون قوة الشد (S) التي تقابل الشد السطحي في الموائع ثابتة في جميع الأجزاء . ونعني بقوة الشد هنا هي أنه اذا رسم خط طوله وحدة الأطوال على سطح الغشاء . فعندئذ تسلط مادة الغشاء على أحد جانبي الخط قوة مقدارها (S) على مادة الغشاء في الجانب الآخر من الخط . وهذه القوة تكون عمودية على الخط المرسوم . ومثل هذه القوة تظهر على جانبي أي شق طوله وحدة الطول في الغشاء . وفي دراستنا هنا يفترض ان تكون قوة الشد (S) ثابتة لاتتأثر بالأزاحات العمودية الصغيرة التي ترافق الأهتزازات المستعرضة في الغشاء .

4 – ان يكون سمك الغشاء منتظماً وصغيراً جداً بحيث يمكن اهماله . يجب ان تكون للغشاء كتلة واضحة موزعة بانتظام على مساحته . بحيث تكون كثافته السطحية (σ) التي تمثل كتلة وحدة المساحة ثابتة في جميع الأجزاء

5 – ان يكون تأثير الجذب الأرضي مهملاً .

في البداية نتصور أن الغشاء في حالة توازن وينطبق على المستوي YX ونختار عنصراً صغيراً مستطيلاً ABCD ابعاده $\delta y, \delta x$ كما هو مبين في الشكل (ا – 1 – 8)

فاذا ما اعطي الغشاء دفعة عمودية صغيرة في نقطة ما فان اضطراباً مستعرضاً يتولد وينتشر على سطح الغشاء . واذا ما وصل هذا الاضطراب الى العنصر الصغير ABCD فانه يؤدي الى ازاحته عمودياً عن موضع التوازن كما يؤدي أيضاً الى تشويه شكله كما هو مبين في الشكل (ب 1 – 8) . في هذا الشكل يظهر الوضع الآني للعنصر المضطرب . ولسهولة التحليل نأخذ مقطع العنصر في الأتجاه الصادي Y الذي يبدو كما في الشكل (2 – 8أ) .

ان مركبات القوى المؤثرة على العنصر ABCD هي

المركبة العمودية لقوة الشد السطحي على حافة العنصر $AD = Sdx \sin \theta$

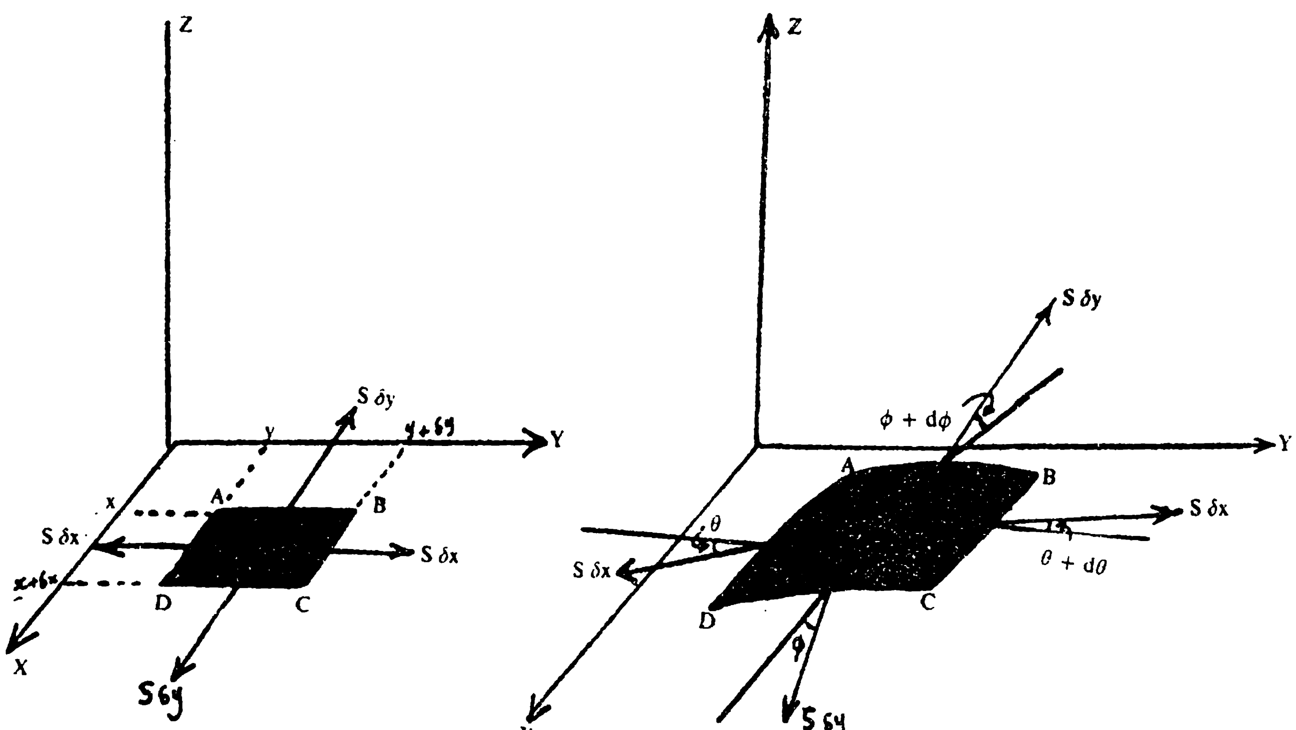
المركبة الأفقية لقوة الشد السطحي على حافة العنصر $AD = Sdx \cos \theta$

المركبة العمودية لقوة الشد السطحي على حافة العنصر $BC = Sdx \sin(\theta + d\theta)$

المركبة الأفقية لقوة الشد السطحي على حافة العنصر $BC = Sdx \cos(\theta + d\theta)$

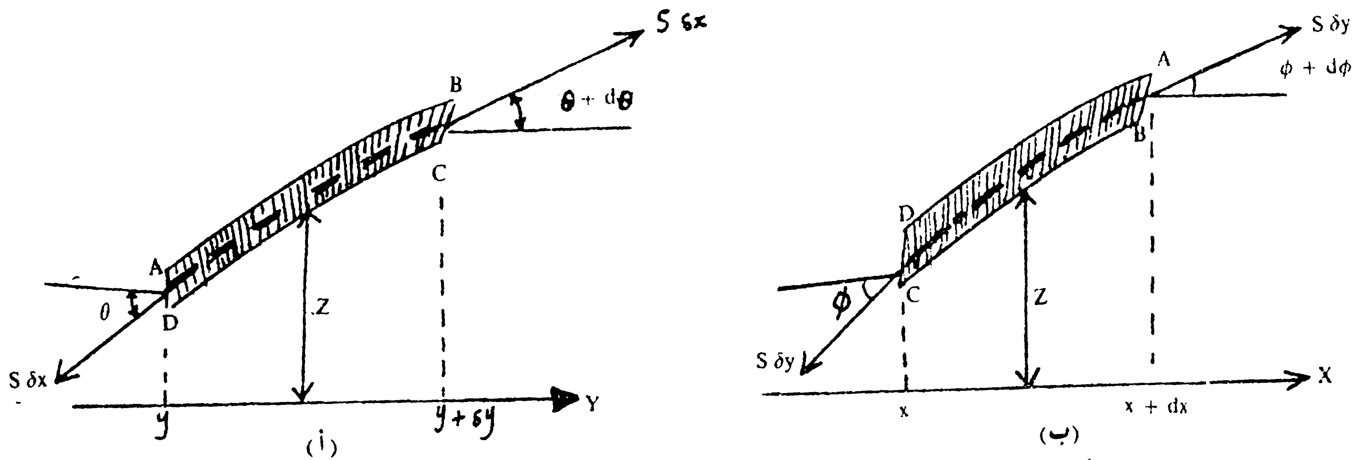
واذا فرضنا ان صافي القوة المؤثرة أفقياً بموازاة المحور Y هي F_y فان

$$F_y = Sdx [\, \cos(\theta + d\theta) - \cos \theta \,]$$



(أ) (ب)

الشكل (8 – 1) يبين عنصر مستطيل للغشاء ABCD ابعاده δx في δy يهتز باتجاه Z يخضع لقوة ممددة مقدارها $S\,\delta x$ على طول أضلاعه التي أطوالها δx ولقوة ممددة أخرى مقدارها $S\,\delta y$ على طول أضلاعه التي أطوالها δy. في الشكل (أ) يمثل العنصر في حالة التوازن (ب) العنصر في وضع آني مزاح عن موضع التوازن



الشكل (2 -8) يبين القوى المؤثرة في حافات العنصر المرن ABCD . (أ) يمثل الوضع الآني لمقطع العنصر ABCD المضطرب في اتجاه المحور Y (ب) يمثل الوضع الآني لمقطع العنصر المضطرب في اتجاه المحور X .

فاذا فرضنا ان الأزاحة المستعرضة للعنصر من موضع التوازن كانت صغيرة بما فيه الكفاية فعندئذ ستكون الزاويتان $\theta + d\theta , \theta$ صغيرتين أيضا وعندئذ تقترب قيمة $\cos \theta$ من الواحد وكذلك قيمة $\cos (\theta + d\theta)$. وبذلك تصبح قيمة القوة المؤثرة أفقيا F_y صغيرة تماماً وتصبح صفراً عندما تقترب قيمة θ من الصفر.

واذا فرضنا ان محصلة القوى العمودية المؤثرة في الحافتين AD و BC هي F_z فان

$$F_z = S\,dx\,[\sin(\theta + d\theta) - \sin\theta]$$

فاذا كانت قيمة θ صغيرة بمافيه الكفاية فانه يمكن اعتبار ولدرجة عالية من الدقة أن

$$\sin\theta \simeq \tan\theta = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_y$$

$$\sin(\theta + d\theta) \simeq \tan(\theta + d\theta) = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y+dy}$$

ويلاحظ هنا أننا استخدمنا التفاضل الجزئي وليس التفاضل الكلي وذلك لأن الأزاحة العمودية تعتمد على الموقع (x, y) والزمن t

وعليه تصبح محصلة القوة العمودية المؤثرة على الحافتين AD و BC هي

$$F_z = S\,dx\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y+dy} - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_y\right]$$

ان قيمة أي دالة f لـ y عند النقطة y + dy تساوي قيمة الدالة f في النقطة y مضافاً لها حاصل ضرب dy في معدل تغير الدالة f بالنسبة لـ y . أي أن .

$$f(y + dy) = f(y) + dy\,\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \ldots\ldots\ldots(8-1)$$

ومن هذه العلاقة نستخلص أن :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y+dy} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_y + dy\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \qquad \ldots\ldots\ldots(8-2)$$

وهكذا تصبح محصلة القوة المؤثرة عمودياً في الحافتين AD و BC هي :

$$F_z = S\,dx \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_y + dy \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_y \right] = S \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\, dx\,dy$$

وبنفس الطريقة تماماً نحصل من الشكل (2 – 8 ب) على

المركبة العمودية لقوة الشد السطحي على حافة العنصر $AB = Sdy \sin \phi$

المركبة الأفقيــة لقوة الشد السطحي على حافة العنصر $AB = Sdy \cos \phi$

المركبة العمودية لقوة الشد السطحي على حافة العنصر $CD = Sdy \sin (\phi + d\phi)$

المركبة الأفقيــة لقوة الشد السطحي على حافة العنصر $CD = Sdy \cos (\phi + d\phi)$

وعلى اعتبار ان الزاويتين ϕ ، $d\phi$. ϕ صغيرتان تماما لذلك يمكن التوصل بنفس التحليل السابق ان محصلة القوة لأفقية بموازاة المحور X تساوي صفراً ، وان محصلة القوة العمودية على حافتي العنصر AB و CD هي F'_z حيث

$$F'_z = S\,dy \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_x \right]$$

$$= Sdy \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_x + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_x \right]$$

$$= S \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx\,dy$$

وبذلك تكون المحصلة النهائية لجميع مركبات القوة المؤثرة عمودياً على العنصر ABCD هي F حيث

$$F = F_z + F_z'$$

وبذلك نحصل على

$$F = S \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) dxdy$$

وهذه تمثل صافي القوة التي تحاول اعادة العنصر الى موضع توازنه الأصلي .

ولما كانت كتلة العنصر $ABCD = \sigma dxdy$ وان التعجيل الآني للعنصر بالاتجاه العمودي يساوي $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ لذلك عند تطبيق قانون نيوتن الثاني في الحركة على العنصر ABCD ينتج ان

$$S\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dxdy=\sigma\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}dxdy \qquad \ldots\ldots(8-3)$$

وبالاختزال والترتيب نحصل على

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\sigma}{S}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \qquad \ldots\ldots\ldots(8-4)$$

هذه تمثل معادلة الحركة الموجية في بعدين . ويلاحظ أن النسبة $\frac{S}{\sigma}$ لها أبعاد (أو وحدات) تمثل مربع وحدات السرعة . وفي الواقع . ان هذه النسبة تمثل مربع سرعة الموجة المستعرضة المتحركة على غشاء قوة الشد السطحي فيه S وكثافته السطحية σ

فاذا رمزنا لسرعة الموجة بالرمز c فان

$$c^2=\frac{S}{\sigma} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(8-5)$$

وبذلك تصبح معادلة الحركة للموجة المستعرضة في الغشاء المتوتر كالاتـــــي

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(8-6)$$

ويلاحظ ان هذه المعادلة يمكن اختزالها الى معادلة الموجة في بعد واحد اذا حذفنا اي من الحدين في الطرف الأيسر.

3 – 8 حل معادلة الموجة في بعدين :

ان حل معادلة الموجة فى بعدين يمكن الحصول عليه بسهولة بطريقة فصل المتغيرات حيث نلاحظ من المعادلة (6 – 8) ان الازاحة المستعرضة z هي دالة للمتغيرات x, y, t لذلك يمكن تمثيلها بالعلاقة :

$$z(x,y,t)=X(x)\,Y(y)\,T(t) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(8-7)$$

حيث $X(x)$ هي دالة للاحداثي x فقط

$Y(y)$ هي دالة للاحداثي y فقط

$T(t)$ هي دالة للزمن t فقط

من هذه الصيغة نحصل على المشتقة الجزئية الثانية لـ z بالنسبة للمتغيرات t , y, x على الترتيب كالاتي :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= YT\,\frac{d^2X}{dx^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= XT\,\frac{d^2Y}{dy^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= XY\,\frac{d^2T}{dt^2} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (8-8)$$

نعوض (8-8) في (8-6) نجد ان

$$YT\,\frac{d^2X}{dx^2} + XT\,\frac{d^2Y}{dy^2} = \frac{XY}{c^2}\,\frac{d^2T}{dt^2} \qquad \ldots\ldots (8-9)$$

وبتقسيم الطرفين على XYT تصبح المعادلة الاخيرة كالاتـــــــي :

$$\frac{1}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\,\frac{d^2Y}{dy^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{1}{T}\,\frac{d^2T}{dt^2} \qquad \ldots\ldots (8-10)$$

وبما ان الدوال T, Y, X مستقلة عن بعضها البعض . ولان الطرف الايمن يعتمد على الزمن t فقط لذلك فان كلا الطرفين يجب ان يساوي نفس المقدار الثابت . ونفرض ان هذا المقدار الثابت هو $-k^2$ لذلك فان المعادلة الاخيرة (10-8) يمكن فصلها الى معادلتين تفاضليتين هما :

$$\frac{d^2T}{dt^2} = -k^2 c^2 T = -\omega^2 T \qquad \ldots\ldots (8-11)$$

و

$$\frac{1}{X}\,\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\,\frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2 \qquad \ldots (8-12)$$

حيث ان $k = \omega/c$

وبما ان الطرف الايسر من المعادلة(12 - 8) يحتوي على حدين مستقلين تماما عن بعضهما ومجموعهما ثابت ، لذلك يجب ان يكون كل حد بذاته مقدار ثابت ايضا . ونفرض ان الحد الاول يساوي k_1^2 - وان الحد الثاني يساوي k_2^2 - وبذلك نحصل على

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k_1^2 \qquad ....(8-13)$$

و

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k_2^2 \qquad ....(8-14)$$

حيث

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2 \qquad ....(8-15)$$

ان المعادلات التفاضلية (11 - 8) و(13- 8)و(14-8)لهم نفس الشكل الرياضي وهو يماثل شكل معادلة الحركة التوافقية البسيطة التي لها حل قياسي معروف . ولذلك فان الحل العام لهذه المعادلات هو على الترتيب :

$$T(t) = A \sin kct + B \cos kct \qquad ....(8-16)$$
$$X(x) = C \sin k_1 x + D \cos k_1 x \qquad ....(8-17)$$
$$Y(y) = E \sin k_2 y + F \cos k_2 y \qquad ....(8-18)$$

حيث ان F, E, D, C, B, A ثوابت اختيارية ويمكن ايجاد قيم كل من B, A من الشروط الابتدائية للحركة وقيم كل من F, E, D, C من الشروط الحدودية للغشاء .

نعوض هذه الحلول (18-8)و (17-8)و (16-8)في المعادلة 7 - 8)فنجد ان

$$z(x,y,t) = (A \sin ckt + B \cos ckt)(C \sin k_1 x + D \cos k_1 x)(E \sin k_2 y + F \cos k_2 y) \qquad ....(8-19)$$

ان هذه المعادلة تمثل الحل العام لمعادلة الحركة الموجية في بعدين. وباستخدام هذه المعادلة يمكن دراسة الحركة الموجية في اي غشاء محدود . وقد تكون هذه

هذه الحركة في غاية التعقيد الا ان الحل العام يوفر لنا وسيلة لتحليل هذه الحركة المعقدة الى مركباتها وبذلك نستطيع ايجاد الاهتزازات المستعرضة المسموحة في الغشاء . وهذه الاهتزازات تدعى بالاهتزازات الطبيعية للغشاء .

4 — 8 الأهتزازات الطبيعية للأغشية المحدودة

ان الاهتزاز الطبيعي لاي غشاء محدود يعتمد على طبيعته وشكله وشروطه الحدودية . وتختلف درجة التعقيدات الرياضية اللازمة للتحليل باختلاف الاشكال والشروط . فمثلا تكون الرياضيات المستخدمة لتحليل غشاء مربع اومستطيل الشكل ، وهو قليلا مايستخدم في الواقع ، ابسط بكثير من حالة الاغشية الدائرية الشكل . ولهذا السبب سنبدأ بدراسة الحالة البسيطة وهي تحليل الاهتزازات في غشاء مستطيل الشكل . وهذا التحليل يمكننا من ايجاد الترددات الطبيعية المسموحة للغشاء التي يهتز بها وانماط الحركة المرافقة لتلك الاهتزازات .

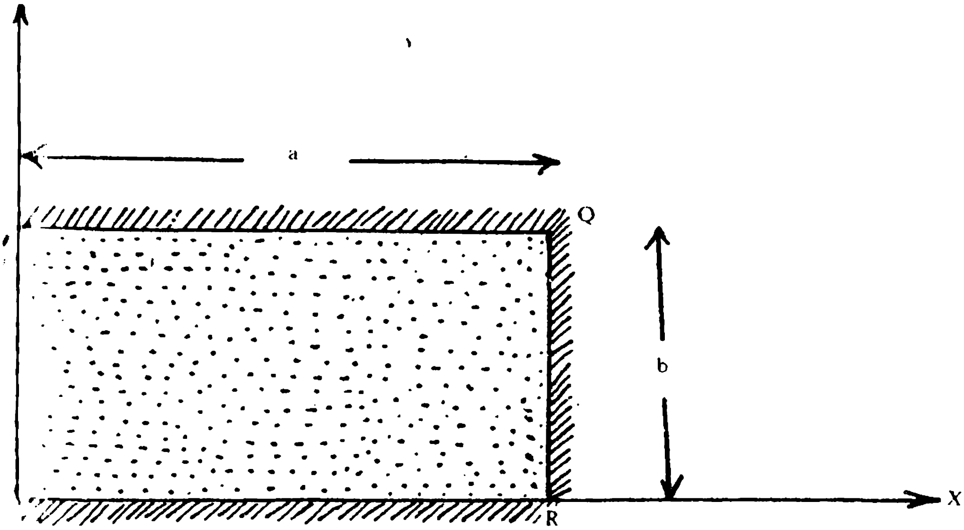
5 — 8 الأهتزازات الطبيعية للأغشية المستطيلة الشكل

نفرض ان لدينا غشاء منتظما مستطيل الشكل ابعاده b.a ومثبت من جميع حافاته باحكام كما هو مبين في الشكل (3- 8)

ان معادلة الحركة الموجية التي تصف الاهتزاز المستعرض في غشاء منتظم هي المعادلة (6-8) وحلها العام يتمثل في المعادلة (19 — 8)

ان اي جزء من الغشاء المستخدم يمكن ان يهتز ماعدا النقاط الواقعة على حدوده المقيدة باحكام . لذلك تكون الازاحة الانية المستعرضة $z(x, y, t)$ في اي نقطة حدودية تساوي صفر دائما . وعلى هذا الاساس تكون الشروط الحدودية لهذا الغشاء هـــي :

1 - عند الحد	OP	$z(o, y, t) = 0$
2 - عند الحد	RQ	$z(a, y, t) = 0$
3 - عند الحد	OR	$z(x, o, t) = 0$
4 - عند الحد	PQ	$z(x, b, t) = 0$



الشكل (3 − 8) يبين غشاء مستطيل أبعاده ($a \times b$) ومثبت من حافاته باحكام

نطبق الشرط الحدودي الاول على الحل العام فنحصل على :

$$z(o, y, t) = (A \sin ckt + B \cos ckt)\, D . (E \sin k_2 y + F \cos k_2 y) = 0$$

ومنها نجد ان

$$D = 0$$

نطبق الشرط الحدودي الثاني على الحل العام فنحصل على :

$$z(a, y, t) = (A \sin ckt + B \cos ckt)\, C \sin k_1 a \\ (E \sin k_2 y + F \cos k_2 y) = 0$$

وهذا يعني اما ان

$$C = 0$$

وهذا لايمكن لان الحل العام يختفي ويصبح مساويا للصفر دائما او

$$\sin k_1 a = 0$$

اي ان

$$k_1 a = m\pi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (8\cdot20)$$

حيث

$$m = 1, 2, 3, 4 \ldots$$

نطبق الشرط الحدودي الثالث على الحل العام فنحصل على :

$$z(x, o, t) = C \sin \frac{m\pi}{a} x \,(A \sin ckt + B \cos ckt) . F$$

ومنها نجد ان

$$F = 0$$

نطبق الشرط الحدودي الرابع على الحل العام فنحصل على :

$$z(x, b, t) = C \operatorname{Sin} \frac{m\pi}{a} x \,(A \sin ckt + B \cos ckt) . E \sin bk_2 = 0$$

وهذا يعني اما ان

$$E = 0$$

وهذا لايمكن لان الحل العام ينهار ويصبح مساويا للصفر دائما او

$$\sin bk_2 = 0$$

اي ان

$$bk_2 = n\pi \qquad (8-21)$$

حيث ان

$$n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$$

ونعلم ان

$$A \sin ckt + B \cos ckt = G \sin(ckt + \theta)$$

حيث ان

$$G = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{B}{A}$$

لذلك فبالتعويض المناسب في الحل العام نحصل على الحل الخاص الذي يصف نمط الاهتزاز الطبيعي لهذا الغشاء . وهذا الحل هو :

$$z(x,y,t) = H \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \sin(ckt + \theta) \quad \ldots\ldots (8-22)$$

حيث ان H يمثل سعة الاهتزاز (ويساوي حاصل ضرب الكميات C, E, G) .
وان ck يمثل التردد الزاوي للاهتزاز الطبيعي للغشاء ويرمز له عادة بالحرف ω .
وان (m, n) تمثل مرتبة نمط الاهتزاز الطبيعي في الغشاء .

ان مرتبة نمط الاهتزاز (m, n) ترتبط مع التردد الزاوي الطبيعي من خلال العلاقة $\omega = ck$ حيث ان

$$c^2 = \frac{S}{\sigma}$$

وان

$$\kappa^2 = k_1^2 + k_2^2$$

$$k^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

وبالتعويض المناسب في العلاقة $\omega = ck$ نجد ان

$$\omega^2 = \frac{S}{\sigma}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8-23)$$

ولما كانت

$$\omega = 2\pi f$$

حيث f هو التردد المقاس بوحدة الهيرتز لذلك فان

$$f^2 = \frac{S}{4\pi^2\sigma}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right] \quad (8-24)$$

ومنها نجد ان

$$f = \sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\frac{s}{4\sigma}} \quad (8\text{-}25)$$

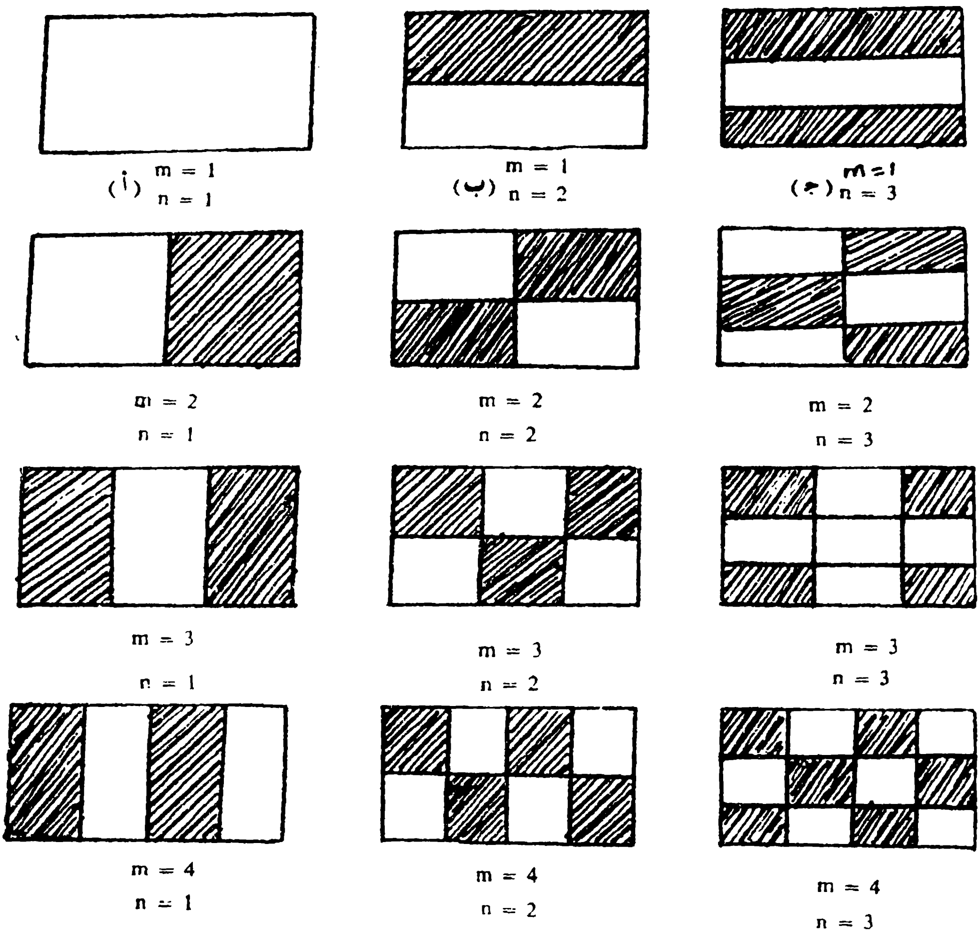
ولما كان التردد الطبيعي f يتحدد مباشرة بمرتبة نمط الاهتزاز (m, n) لذلك يستحسن استخدام الرمز f_{mn} بدل f للتعبير عن تردد اي نمط من انماط الاهتزاز . اي ان

$$f_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \frac{S}{4\sigma}} \qquad (8 - 26)$$

فمثلا ان التردد الاساسي الطبيعي الذي يقابل مرتبة نمط الاهتزاز (1,1) هو

$$f_{1,1} = \sqrt{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \frac{S}{4\sigma}} \qquad \text{.................}(8 - 27)$$

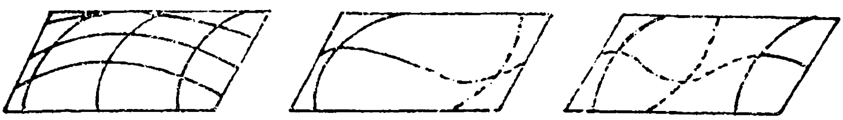
وشكل هذا النمط من الاهتزاز هوكما مبين في الشكل(4 - 8 أ)



الشكل(4 - 8)يبين انماط الأهتزاز لغشاء مستطيل مثبت من جميع حافاته باحكام .

ان عدد انماط الاهتزاز للغشاء كثير جداً وفي الحقيقة انه يبلغ نظرياً ما لا نهاية . الا ان المهمة منها هي تلك التي مراتب انماطها واطئة . والشكل (4 – 8) يبين انماط الاهتزاز المختلفة من (1,1) الى (4,3) . وان أي نمط من هذه الأنماط قد يحدث منفرداً أو مشتركاً مع أنماط اخرى . وفي حالة وجود أكثر من نمط واحد من انماط الاهتزاز في آن واحد فان نمط الاهتزاز يكون معقداً ويزداد التعقيد كلما ازدادت انماط الاهتزاز المستثارة في الغشاء .

ان طريقة اثارة أي نمط من أنماط الاهتزاز الواطئة بسيطة عملياً . فمثلاً لاثارة نمط الاهتزاز (1,1) يزاح مركز الغشاء عمودياً ازاحة صغيرة ثم يترك حراً فيهتز الغشاء كقطعة واحدة بازاحة تختلف باختلاف الموقع على سطح الغشاء فتكون صفراً عند الحافات وتكون في أقصى قيمة لها في المركز . ولاثارة نمط الاهتزاز (1,2) نلامس منتصف الغشاء بمسطرة توازي ضلعين من أضلاعه ثم يزاح مركز أحد النصفين بازاحة صغيرة ثم يترك حراً وترفع المسطرة فيهتز الغشاء كقطعتين . وتكون حركة كل نصف معاكسة لحركة النصف الآخر أي يكون فرق الطور بين حركتي النصفين هي 80 درجة . بينما الخط الفاصل بين النصفين يكون ساكناً لا يهتز ويدعى بالخط العقدي وهكذا يتضح أن النمط المثار من الاهتزاز في الغشاء يعتمد على الشروط الابتدائية للحركة . تماماً كما هو الحال في الاهتزاز المستعرض في السلك المتوتر . ان الأشكال الآنية لأنماط الاهتزاز (1,1) , (2,1) , (3,1) يوضحها الشكل (5 – 8)



(1,1) (2,1) (3,1)

الشكل (5 – 8) يبين الأشكال الآنية لأنماط الاهتزاز (1,1) و (2,1) و (3,1)

8 – 3 ... الأغشية ... الدائرية ...

... في الاحداثيات ...

... (8 – 28)

... الإزاحة العمودية عن

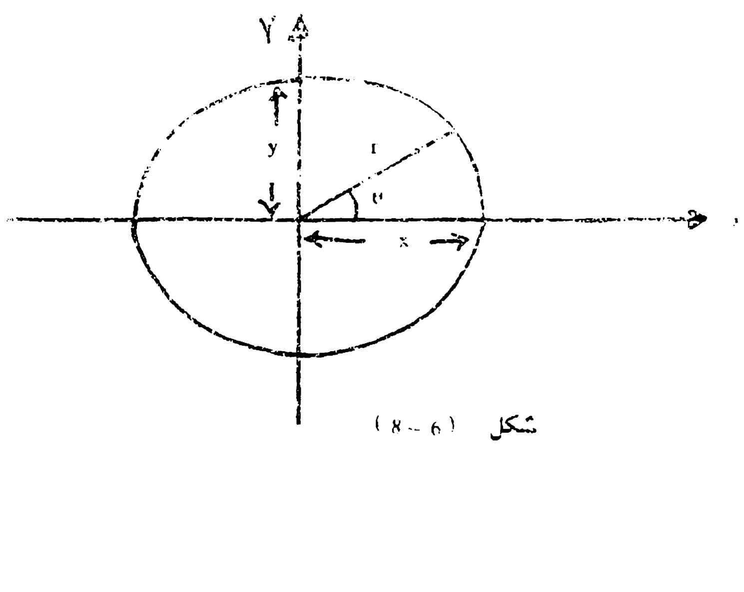
الغشاء ... تقدم الموجة وتساوي $\sqrt{\frac{S}{\sigma}}$ وهذه المعادلة

تماما لايجاد نمط الاهتزاز الطبيعي في الأغشية المستطيلة والمربعة والمثلثة الشكل اذا كان الغشاء دائري الشكل ومثبت من حدوده باحكام كما هو الحال في الحالات العملية كأغشية المايكروفون ومكبرات الصوت وبعض الآلات الموسيقية والدفوف وغيرها . فان هذه المعادلة لا تقدم حلاً سهلاً لوصف نمط الاهتزاز يقتضي ان نحورها بدلالة الاحداثيات القطبية .

وباستخدام معادلات التحويل من الشكل (6 – 8) نحصل على

$x = r\cos\theta$

... (8 – 29)



شكل (8 – 6)

$$y = r \sin \theta \qquad ....(8-30)$$

وتصبح معادلة الموجة كالآتي

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \qquad ......(8-31)$$

واذا ماسلطت قوة دورية توافقية على مركز الغشاء فان موجات دائرية تتولد وتتقدم من المركز على سطح الغشاء حتى تصل الحدود الدائرية وتنعكس . ومن تداخل الموجات الساقطة والمنعكسة يتولد نمط من الاهتزاز في الغشاء . ونتيجة للتناظر الدائري حول المركز الهندسي للغشاء فان $\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$ وبذلك تصبح المعادلة (31 – 8) كالآتي :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \qquad ....(8-32)$$

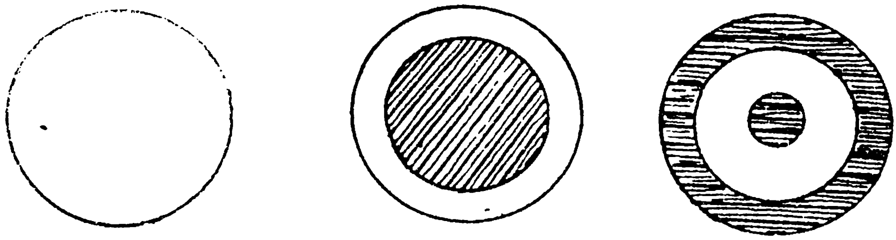
ان ايجاد الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية يقتضي استخدام رياضيات متقدمة لم يألفها الطالب في هذه المرحلة ، لذلك سنكتفي فقط باعطاء خلاصة لنتائج الحل الخاص لهذه المعادلة . في الحل الخاص للمعادلة (32 – 8) يفترض وجود تناظر دائري لنمط الموجات حول المركز . ويجب ان تكون قيمة الازاحة المستعرضة z صفراً عند حافة الغشاء أي عندما تكون قيمة r مساوية لنصف قطر الغشاء الدائري . ان الترددات الطبيعية للغشاء في مثل هذه الحالة لا تكون سلسلة توافقية مثلما هو الحال في الترددات التوافقية للسلك المتوتر . ان العلاقة بين الترددات الطبيعية فوق الأساسية مع التردد الاساسي يمكن اجمالها كما هو مبين في الجدول (1 – 8)

الجدول (1 – 8)

التردد الطبيعي	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
نسبة التردد الطبيعي الى التردد الأساسي f_n / f_1	.	1·59	2·13	2·29	2·65	2·91

في هذا الجدول f_1 يمثل التردد الأساسي وهو أقل تردد طبيعي للغشاء و f_n هو أي تردد طبيعي فوق التردد الأساسي .

ان اشكال بعض انماط الاهتزاز المتناظرة حول مركز الغشاء مبينة في الشكل (7 – 8) والاشكال الانية لهذه الانماط من الاهتزاز يمكن توضيحها في الشكل (8 – 8)

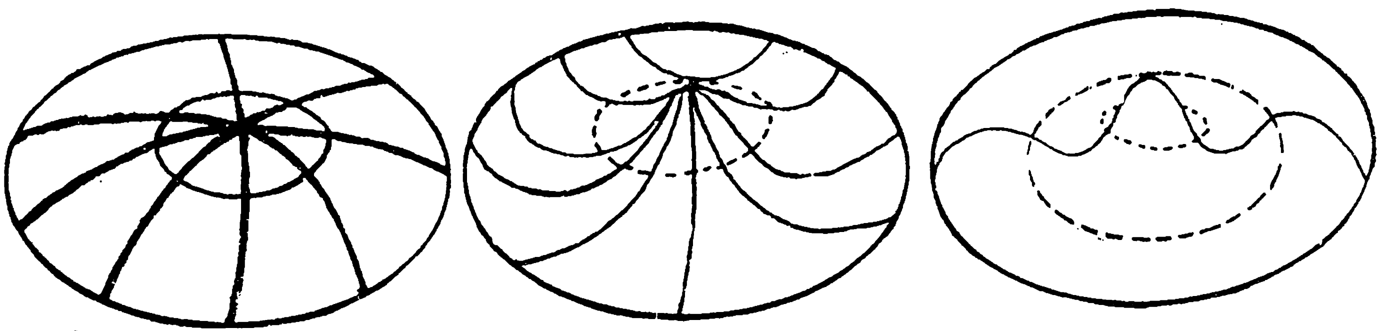


(0.1) (0.2) (0.3)

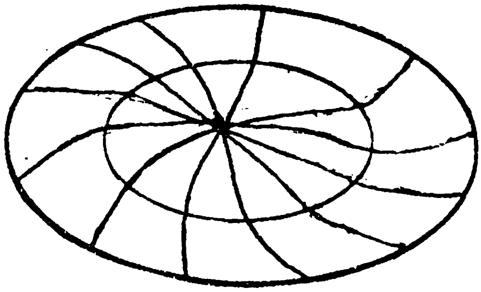
الشكل (7 – 8) يبين بعض أنماط الأهتزاز المتناظرة حول مركز الغشاء الدائري المرن والمؤطر.

وطبيعي هنالك انماط اخرى كثيرة من الاهتزاز بعضها متناظر، اذا كانت الضربات مسلطة على مركز الغشاء وبعضها غير متناظر، اذا كانت الضربات المسلطة بعيدة عن المركز. ان الشكل (9 – 8) يبين احد انماط الاهتزاز غير المتناظرة حول المركــــز

وجدير بالملاحظة ان هنالك اشكالا كثيرة لانماط الاهتزاز تختلف في درجة تعقيدات اشكالها تبع اختلاف الشكل الهندسي للغشاء وشروطه الحدودية وطريقة اثارة الاهتزاز. وقد استطاع كلادني (Chladni) ان يبتكر طريقة بسيطة للحصول على اشكال الاهتزازات في الالواح المعدنية يسهل مشاهدتها بالعين المجردة. وذلك باستخدام لوح معدني بأي شكل كان، مثبت على نقطة واحد او مسند على ثلاث نقاط او اكثر، ونثر مسحوق خفيف وجاف كالرمل مثلا بانتظام على سطح اللوح ويثار الاهتزاز في اللوح بطريقة ما، كامرار وتر مشدود على حافة اللوح او النقر الخفيف على نقطة معينة على سطح اللوح. فيلاحظ ان المسحوق الخفيف يهتز في بعض المواقع بشدة بينما في مواقع اخرى لايهتز، مما يؤدي الى توزيع المسحوق على سطح اللوح بحيث يستقر المسحوق في الخطوط والنقاط العقدية التي لاتتحرك بينما المناطق المتحركة تخلو من المسحوق، وبذلك تظهر معالم الاهتزاز على سطح اللوح من خلال ملاحظة تفاصيل توزيع المسحوق على اللوح. ولقد تمكن كلادني بهذه الطريقة من الحصول على اشكال كثيرة جدا من انماط الاهتزاز.



الشكل (8 - 8) سبن بعض الأنماط الآنية الواطئة للاهتزاز المتناظر حول مركز الغشاء الدائري . ان الخطوط المنقطة تشير الى الخطوط العقدية .



الشكل (9 - 8) يبين أحد أنماط الأهتزاز غير المتناظرة حول مركز الغشاء الدائري .

أمثلة محلولة

مثال (8 - 1)

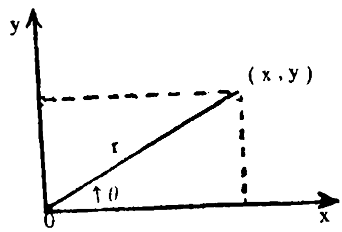
حول معادلة الموجة فى بعدين بالأحداثيات المتعامدة (x,y)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

الى الأحداثيات القطبية (r,θ)

الحل

في الأحداثيات القطبية (r,θ) لدينا



$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \ldots(1)$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \qquad \ldots(2)$$

من مفاضلة المعادلة (1) بالنسبة : x نجد أن

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \qquad \ldots(3)$$

ومن مفاضلة (2) بالنسبة ل x نجد أن

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-(y/x^2)}{1 + (y/x)^2} = -\,y/r^2 \qquad \ldots(4)$$

وبأستخدام قاعدة السلسلة

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad \ldots(5)$$

نفاضل (5) بالنسبة لـ x فنحصل على

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial x}\,\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial r}\,\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial x}\,\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\,\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

$$\ldots(6)$$

من (3) نجد أن

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r - x\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)}{r^2} = \frac{r - x\left(\frac{x}{r}\right)}{r^2} = \frac{y^2}{r^3} \qquad \ldots(7)$$

ومن (4) نجد أن

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -y\left(-\frac{2}{r^3}\right)\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2y}{r^3} \cdot \frac{x}{r} = \frac{2xy}{r^4} \qquad \ldots(8)$$

نفاضل المعادلة (5) بالنسبة لـ r فنحصل على :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\,\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}\,\frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

نفاضل المعادلة (5) بالنسبة ل θ فنحصل على :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \theta} = \frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial r}\,\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\,\frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

الآن . نعوض (3) , (4) , (7) , (8) , (9) , (10) في (6) فنحصل على

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial r}\,\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} +$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial r}\,\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\,\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\,\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

نعوض القيم المناسبة فنجد أن

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \frac{x}{r} - \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} \cdot \frac{y}{r^2} \right) \frac{x}{r} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{y^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial r} \cdot \frac{x}{r} - \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \frac{y}{r^2} \Big) \frac{y}{r^2} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{2xy}{r^4}$$

ومنها نحصل على

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - 2 \frac{xy}{r^3} \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} + \frac{y^2}{r^4} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} +$$

$$\frac{y^2}{r^3} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{2xy}{r^4} \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

وبأتباع نفس الطريقة تماماً نحصل على

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{2xy}{r^3} \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} + \frac{x^2}{r^4} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} +$$

$$\frac{x^2}{r^3} \frac{\partial z}{\partial \theta} - 2 \frac{xy}{r^4} \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

نعوض فنجد أن

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

وهذه هي معادلة الموجة في الاحداثيات القطبية .

أسئلة :

8 – 1 غشاء مستطيل ابعاده $3L, L$ مثبت من حدوده باحكام . جد التردد المقابل لمراتب نمط الاهتزاز $(1,1), (1,2), (2,1)$

8 – 2 برهن ان التردد الاساسي للاهتزاز الحر المستعرض لغشاء مثلث متساوي الاضلاع ومشدود شداً وثيقا من حدوده هو

$$f_1 = 4.77 \sqrt{\frac{S}{A\sigma}}$$

حيث A هي مساحة الغشاء

8 – 3 غشاء مرن ومنتظم ومربع الشكل طول ضلعه L مثبت على امتداد محيطه باحكام ، جد الترددات الطبيعية وارسم الانماط الاهتزازية المقابلة لتلك الترددات .

8 – 4 جد التردد الاساسي للاهتزاز المستعرض لغشاء مثلث قائم الزاوية طول احد ضلعيه القائمين L والاخر 2L

8 – 5 اذا كان التردد الاساسي لغشاء دائري منتظم هو

$$f_1 = \frac{2.4}{2\pi R} \sqrt{\frac{S}{\sigma}}$$

حيث ان S قوة الشد السطحي في الغشاء و σ كتلة وحدة المساحة و R نصف القطر .

والتردد الاساسي للوح معدني رقيق ودائري الشكل هو

$$f_1 = \frac{0.47\, t}{R^2} \sqrt{\frac{Y}{\rho(1-\mu^2)}}$$

حيث ان Y معامل يونك . t سمك اللوح . ρ كثافة مادة اللوح μ نسبة بواسون .

ناقش شروط تساوي الترددين الاساسيين .

8 – 6 غشاء منتظم مربع الشكل طول ضلعه L مثبت من ضلعين متجاورين ، فاذا كانت الازاحة الابتدائية هي

$$z(x, y, o) = A \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{3\pi y}{L}$$

برهن ان الحل الذي يمثل الاهتزاز الحر المستعرض في الغشاء هو

$$z(x, y, t) = A \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{3\pi y}{L} \cos \frac{\sqrt{13}\, \pi s}{\sigma L}\, t$$

7 – 8 هل يمكن ان يكون هنالك نفس التردد الطبيعي للغشاء المرن مستطيل الشكل لمجموعة من القيم المختلفة لـ (m, n). وضح ذلك بالتفصيل.

8 – 8 برهن انه اذا كان الغشاء المرن مربع الشكل فان قيم التردد الطبيعي للغشاء تكون واحدة في حالة تبادل قيم m و n لأي نمط من أنماط الأهتزاز.

9 – 8 يعتبر الغشاء المرن المربع الشكل حالة خاصة متطرفة لغشاء مستطيل الشكل. وضح ماهي الأهمية الفيزياوية لذلك.

10 – 8 في الغشاء المربع الشكل يكون هنالك نفس التردد لمجموعة قيم مختلفة لـ (m, n) وهذه الحالة تمثل ظاهرة الأنحلال (degeneracy) هل هنالك أمثلة على هذه الظاهرة في فروع الفيزياء الأخرى، اذكرها ان وجدت خاصة في الفيزياء الذرية والنووية.

11 – 8 ماهي أشكال كلادني.

12 – 8 اذا كانت الأزاحة المستعرضة للغشاء كبيرة نسبياً فهل يتغير شكل معادلة الحركة؟ وضح ذلك.

13 – 8 هل يمكن استخدام نفس معادلة الحركة الموجية لغشاء معدني رقيق. وضح بالتفصيل.

14 – 8 طبلة مستطيلة الشكل أبعادها 10سم × 20سم. مشدودة بقوة شد تعادل 5 كلغم لكل سم وكتلتها 20 غم أحسب التردد الأساسي لهذه الطبلة؟

(391 هيرتز)

15 – 8 هنالك عدة أنماط للاهتزاز لها نفس التردد، وعندما يكون هنالك نمطين او اكثر لهم نفس التردد فعندئذ نحصل على حالة الانحلال (degenerate)

جد نمطين من انماط الاهتزاز في حالة الانحلال لغشاء مستطيل ابعاده 6 × 3

الجواب

(2,2), (4,1)

16 – 8 غشاء مربع محاط بشروط حدودية $y = o,a,\ x = o,a$ تشوه شكله وأصبح وفق المعادلة

$$z = A \sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{3\pi y}{a}$$

وبعدئذ أطلق. فما هي الحركة الناتجة

الجواب

$$z = A \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{3\pi y}{a}\right) \cos\left(\sqrt{13}\,\pi c t / a\right)$$

17 – 8 غشاء مستطيل أبعاده b,a متوتر بصورة غير منتظمة ، حيث كانت قوة الشد في الأتجاه السيني x هي T_1 وفي الأتجاه الصادي y هي T_2

برهن أن معادلة الحركة هي

$$T_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

ثم بين كيف يمكن تحويل هذه المعادلة الى الصيغة القياسية ؟

(أستخدم متغيرات جديدة : $\frac{x}{\sqrt{T_1}}$, $\frac{y}{\sqrt{T_2}}$)

18 – 8 برهن أن عدد انماط الأهتزاز لغشاء مستطيل والتي تقل ترددا تها عن f تساوي تقريباً ربع مساحة القطع الناقص (ellipse)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{4\rho}{T} f^2$$

وبعد ذلك بين أن عدد الأنماط هو على وجه التقريب $\pi \rho a b f^2 / T$

19 – 8 برهن أن

$$z = Ae^{[\omega t \quad (k_1 x + k_2 y)]}$$

هو حل لمعادلة الحركة الموجية في بعدين

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

حيث أن $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k_1^2 + k_2^2$ وان هو عدد خيالي يساوي $\sqrt{-1}$ ،

8 – 20 برهن أنه اذا كانت الازاحة المستعرضة في شريط طوله مالانهاية وعرضه b تعطى بالمعادلة المركبة

$$z = A_1 \sin [\omega t - (k_1 x + k_2 y)] + A_2 \sin [\omega t - (k_1 x - k_2 y)]$$

وبالشروط الحدودية $z = 0$ عندما $y = 0 , y = b$ لكل قيم t

فعندئذ نحصل على $z = - 2 A_1 \sin k_2 y \cos (\omega t - k_1 x)$

حيث أن

$$k_2 = \frac{n\pi}{b}$$

(ملاحظة : أعتبر ان الموجة تنعكس بالكامل عند حافات الشريط)

الفصل التاسع

الحركة الموجية في ثلاثة ابعاد
(موجات الصوت في الهواء)

9 — 1 المقدمة

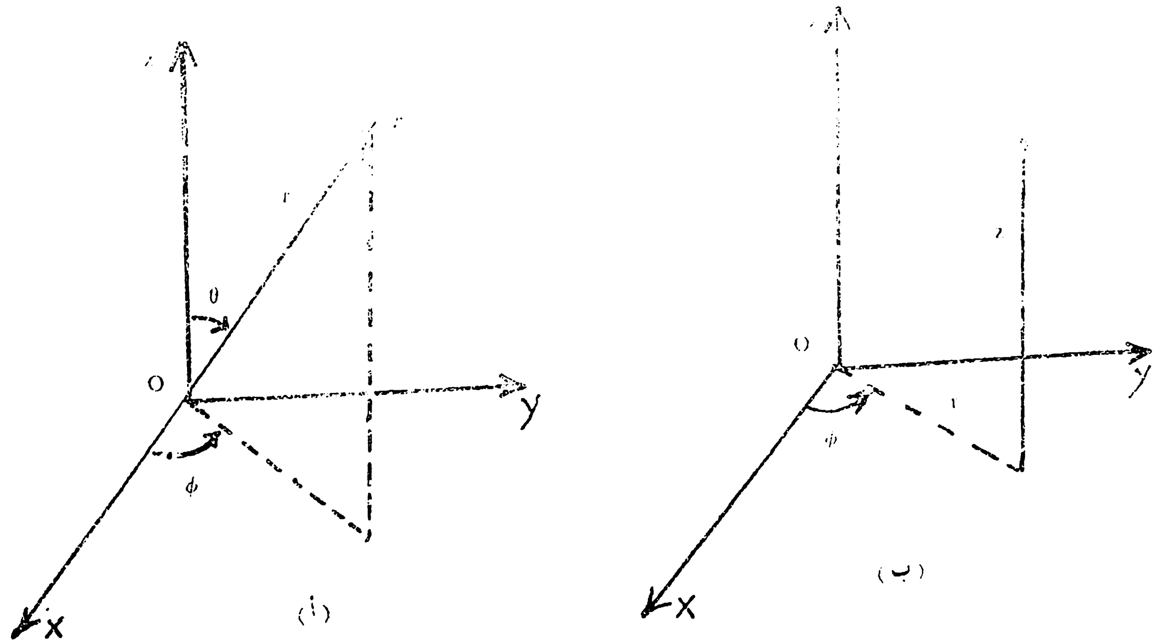
لقد سبق ان درسنا بالتفصيل الحركات الموجية المقيدة في بعد واحد وفي بعدين وهذه في الواقع لا تمثل حالات عامة ، اذ أن معظم المسائل الصوتية في ثلاثة ابعاد ، حيث ان اي مصدر صوتي يبث موجاته في ثلاثة اتجاهات . والمعادلة العامة التي تصف انتشار الموجة الصوتية في أي وسط مادي ذي ثلاثة أبعاد يمكن اشتقاقها باتباع نفس الخطوط العامة التي سبق ان اتبعناها في حالة التعامل مع الموجة الصوتية في بعد واحد كما في الفصل السابع .

ان الشكل النهائي لمعادلة الحركة الموجية في ثلاثة أبعاد يمكن اشتقاقه باستخدام أي نظام للاحداثيات سواء كان متعامداً (كارتيزياً) أوكروياً أو اسطوانياً أو أي نظام آخر مناسب . انظر الشكل (1 — 9) وفي الواقع ان الصيغة العامة لمعادلة الحركة الموجية في ثلاثة ابعاد تأخذ الشكل الآتي

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

حيث ان ψ هي دالة الموجة وتمثل الخاصية أو المتغير الذي يصف الموجة مثل ازاحة الجسيم * أو سرعة الجسيم أو تعجيل الجسيم أو ضغط الموجة أو التكاثف . . . ، وأن ∇^2 يمثل المؤثر التفاضلي ويدعى مؤثر لابلاس وهذا المؤثر يأخذ الصيغة التي يحددها نظام الاحداثيات المستخدم في اشتقاق المعادلة . فمثلاً في الاحداثيات المتعامدة (x, y, z) يكون

* راجع الفصل الأول لتعريف الجسيم



الشكل 1 – 9 يبين ان موقع النقطة A في الفضاء يمكن وصفه من خلال (أ) الاحداثيات الكروية (ϕ ،θ ،r) أو (ب) الاحداثيات الاسطوانية (z ،ϕ ،r)

$$\Delta^2 = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}$$

وفي الاحداثيات الكروية (r ، θ ، ϕ) يكون

$$\Delta^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\delta}{\delta r}\left(r^2 \frac{\delta}{\delta r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\delta}{\delta\theta}\left(\sin\theta \frac{\delta}{\delta\theta}\right)$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\delta^2}{\delta\theta^2}$$

وفي الاحداثيات الاسطوانية (r,ϕ,z) هو

$$\Delta^2 = \frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta r}\left(r \frac{\delta}{\delta r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\delta^2}{\delta\phi^2} \quad \frac{\delta^2}{\delta z^2})$$

وهذه الصيغ المختلفة للتعبير عن المؤثر التفاضلي تفيد كثيراً في تسهيل حل كثير من المسائل الصوتية التي تتضمن انتشار الموجة في ثلاثة ابعاد كما سنرى لاحقاً.

2—9 اشتقاق معادلة الحركة الموجية في ثلاثة أبعاد

من أجل اشتقاق المعادلة العامة لحركة الموجية في وسط مائع ذي ثلاثة أبعاد، سواء كان ذلك الوسط سائلاً او غازياً سنضع بعض الفرضيات التي تسهل عملية الاشتقاق. وهذه الفرضيات هي:

1— ان يكون الوسط المائع مستمراً ومتجانساً أي يجب ان يكون متصلاً وله نفس الخواص في جميع الاتجاهات.

2— ان يكون الوسط مرناً تماماً ويستعيد وضعه او شكله الاصلي بعد زوال القوى المؤثرة عليه.

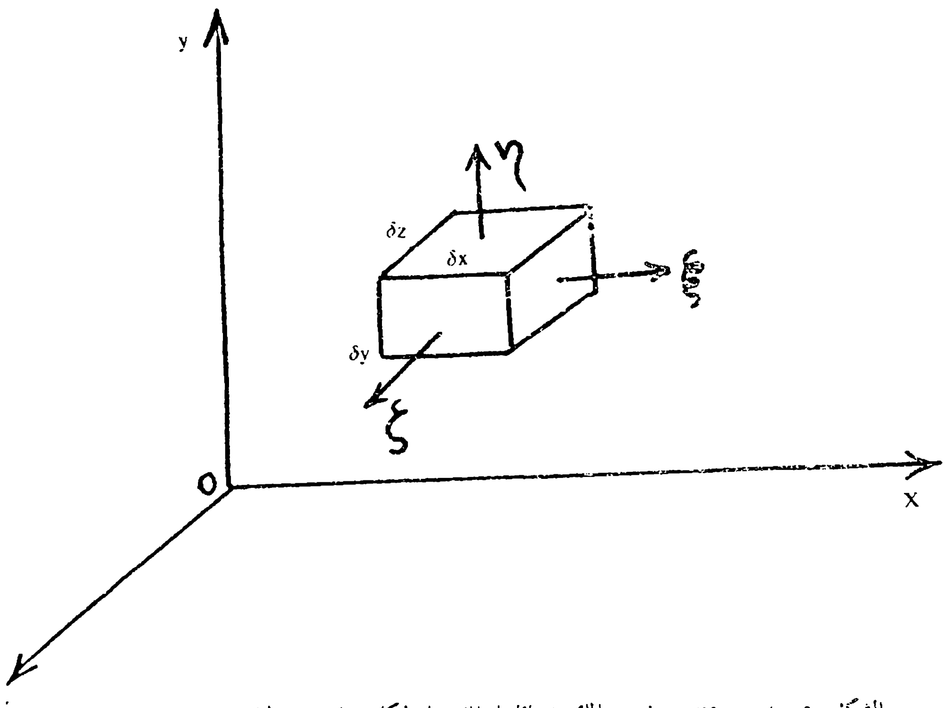
3— ان تكون سعات الازاحة والسرعة لاي جسيم في المائع صغيرة بحيث تكون التشوهات الناتجة من مرور الموجة الواقعة ضمن حدود المرونة. وهذا يعني بالطبع ان تكون التغيرات في الضغط والكثافة صغيرة ايضاً. وهذا الشرط ضروري لكي تكون المعادلات خطية يسهل التعامل معها في عملية الاشتقاق.

4— ان تكون عملية مرور الموجة في المائع كظيمة (أي عملية اديباتيكية).

5 – ان لا يكون هنالك امتصاص أو تبديد في طاقة الموجة ، أي أن لا يصاحب الحركة الموجية فقدان في الطاقة نتيجة للزوجة الوسط أو توصيله الحراري أو تخلفـــه الميكانيكي . . .

الان ، ولغرض السهولة فقط ، سنستخدم الاحداثيات المتعامدة لاشتقاق المعادلــة المطلوبة على غرار الطريقة التي استخدمناها في حالة الحركة الموجية في بعـد واحـد .

نفرض ان لدينا عنصراً صغيراً من المائع على شكل متوازي مستطيلات أبعاده δx و δy و δz مركزة في حالة التوازن هو عند الاحداثيات (x, y, z) كما مبين في الشكل (2– 9) ان هذا العنصر الصغير يمكن اعتباره جسيماً من المائع . وعند مرور موجة صوتية فان هذا الجسيم يزاح عن موضع توازنه . ونفرض ان مركبات ازاحة هذا الجسيم باتجاه المحاور x, y, z هي ξ, η, ζ على الترتيب . كما أن سرعة



الشكل (2 – 9) يبين عنصر صغير من المائع (سائل او غاز) على شكل متوازي مستطيلات ذي ثلاثة ابعاد δx ، δy و δz

هذا الجسيم لها المركبات $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ ، $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ ، $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ على امتداد نفس المحاور أعلاه

والان لتشكيل معادلة الموجة يجب ان نستخدم نفس القواعد الاساسية التي
استخدامها في الفصل السابع وهي
1 – تطبيق قانون نيوتن الثاني في الحركة
2 – تطبيق قانون المرونة

اولا تطبيق قانون نيوتن الثاني في الحركة

ويجب هنا ان ندرك ان المركبات الثلاثة لحركة العنصر الصغير (جسيم)
مستقلة عن بعضها الاخر . وذلك لان التعجيل في أي اتجاه يتناسب مع القوة المؤثرة
في ذلك الاتجاه . وعليه فان المعادلة (36 – 7) تصح للاحداثيات الثلاثة المستقلة
z، y، x اي ان :

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = -\rho_o \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial y} = -\rho_o \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \qquad (9 - 1)$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = -\rho_o \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$$

حيث ان $\hat{p}$ يمثل الضغط الصوتي وان ρ_o تمثل كثافة المائع في حالة التوازن .

ويمكن تركيب المعادلات (1 – 9) مع بعضها بمفاضلة كل منها بالنسبة للاحداثي
التابعة له ، فنحصل على مجموعة المعادلات التالية :

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} = -\rho_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial y^2} = -\rho_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \qquad 9-2$$

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} = -\rho_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)$$

وبجمع هذه المعادلات معاً نحصل على

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} = -\rho_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)$$

.... (9 – 3)

ثانيا : تطبيق قانون المرونة

ولما كان المائع (كالهواء مثلا) قابلاً للانضغاط فان اي تغير موضعي في الضغط يكون عادة مصحوبا بتغير موضعي ملحوظ في الحجم . وفي حالة مرور موجات الصوت في الهواء فان تغيراً في قيمة الضغط الموضعي يحدث بسرعة عالية وبمعدل لايقل عن 20 مرة في الثانية (في حالة الصوت المسموع) وفي مثل هذه الحالة تكون العملية كظيمة (اديباتيكية) وبذلك يخضع الهواء لمعادلة الحالة الكظيمة :

$pv^{\gamma} = k =$ مقدار ثابت (9 – 4 أ)

حيث ان p الضغط الآني للهواء v حجمه γ ثابت يمثل النسبة بين السعة الحرارية للهواء عند ضغط ثابت الى سعته عند حجم ثابت وعند عدم وجود موجة صوتية يكون لدينا

$p_o v_o^{\gamma} = k$ (9 – ب)

حيث ان P_0 هو الضغط الجوي v_o هو حجم الهواء عند الضغط الجـــوي .

وفي حالة مرور موجة صوتية في الهواء فان التوازن يختل ويتغير ضغطه بجزء عند الضغط الجوي (P_0) بمقدار ضئيل δP يمثل الضغط الصوتي وهو يمثل اما زيادة او نقصان في ضغط الهواء . ولنفرض انه كان هنالك زيادة في الضغط وفي هذه الحالة يصاحب الزيادة في الضغط نقصان في الحجم مقداره δV وعليه يكون لدينا من المعادلة (9 -4 أ)

$$(P_0 + \delta P)(V_0 - \delta V)^\gamma = K \qquad ...(9-5)$$

اما في حالة نقصان الضغط بمقدار δP فان معادلة الحالة تعطينا :

$$(P_0 - \delta P)(V_0 + \delta V)^\gamma = K \qquad ...(9-6)$$

ولايجاد قيمة δP اما ان نفك الاقواس في المعادلة (9-5) او (9 - 6) ونجري التقريبات الضرورية وهذه عملية شاقة نوعا ما او ان نفاضل المعادلة (4 - 9) مباشرة فنحصل على

$$V_0^\gamma \delta P + \gamma P_0 V_0^{\gamma-1} \delta V = 0 \qquad ...(9-7)$$

ومن هذه المعادلة نجد ان مقدار التغير في الضغط δP الذي يصاحب تغير (δV) في الحجم هو :

$$\delta P = -\gamma P_0 \frac{\delta V}{V_0} \qquad ...(9-8)$$

وهذا المقدار يمثل الضغط الصوتي الذي يرمز له عادة بالحرف $\hat{p}$ وعليه فان

$$\hat{P} = -\gamma P_0 \frac{\delta V}{V_0} \qquad ...(9-9)$$

والان اذا فرضنا ان مرور الموجة الصوتية يوسع حجم العنصر الذي يؤدي الى استطالة اضلاعه الثلاثة بالمقادير $\delta\xi$ و $\delta\eta$ و $\delta\zeta$ فعندئذ يكون حجم العنصر هو

$$V = (\delta x + \delta\xi)(\delta y + \delta\eta)(\delta z + \delta\zeta) \qquad ...(9-10)$$

ولما كان الحجم الاصلي V_0 للعنصر الصغير هو

$$V \qquad ...(9-11)$$

لذلك يكون مقدار الزيادة في الحجم δV ولدرجة عالية من الدقـــة هو :

$$\delta V = V - V_0 = \delta\xi\,\delta y\,\delta z + \delta\eta\,\delta x\,\delta z + \delta\zeta\,\delta x\,\delta y \qquad \ldots(9-12)$$

وبتقسيم المعادلة (9 - 12) على (9 - 11) نحصل على :

$$\frac{\delta V}{V_0} = \frac{\delta\xi}{\delta x} + \frac{\delta\eta}{\delta y} + \frac{\delta\zeta}{\delta z} \qquad \ldots(9-13)$$

وبأخذ القيمة الحدية للتغير النسبي في الحجم عندما تقترب أطوال اضلاع العنصر $\delta x, \delta y, \delta z$ من الصفر نحصل على

$$\frac{\delta V}{V_0} = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} \qquad \ldots(9-14)$$

نعوض هذه المعادلة (9 - 14) في المعادلة (9 - 9) فنجد ان

$$\hat{P} = -\gamma P_0\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right) \qquad \ldots(9-15)$$

وبتعويض المعادلة (9 - 15) في المعادلة (9 -3) نحصل على :

$$\frac{\partial^2\hat{P}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\hat{P}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\hat{P}}{\partial z^2} = \frac{\rho_0}{\gamma P_0}\,\frac{\partial^2\hat{P}}{\partial t^2} \qquad \ldots(9-16)$$

وهذه هي المعادلة العامة للحركة الموجية في ثلاثة ابعاد بدلالة ضغط الموجة . ويلاحظ ان المقدار $\frac{P_0}{\gamma\rho_0}$ له ابعاد مقلوب مربع السرعة . فاذا رمزنا لهذه السرعة بالحرف C فان

$$c^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \qquad \ldots(9-17)$$

وفي الواقع فان هذه السرعة تمثل سرعة الموجة الصوتية في الهواء عندما يكون ضغط الهواء وكثافته في حالة التوازن $\hat{P}_0$, ρ_0 على الترتيب .

كما يلاحظ ان هذه المعادلة (16 - 9) يمكن احترالها الى معادلة موجبة في بعد واحد اذا لم يحدث تغيرفي الضغط في الاتجاهين z,y اي ان

$$\frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial z^2} = 0$$

وبذلك نحصل على المعادلة

$$\frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial t^2} \qquad \ldots(9-18)$$

وهذه تمثل معادلة الحركة الموجية في بعد واحد التي سبق مناقشتها بالتفصيل في الفصل السابع (حركة الموجة الصوتية في الهواء داخل انبوب) ان المعادلة العامة للحركة الموجية في ثلاثة ابعاد يمكن التعبير عنها بدلالة الأحداثيات الكروية (r, θ, ϕ) فتصبح كالاتي

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \hat{P}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \hat{P}}{\partial \theta}\right) +$$

$$\frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial \phi^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial t^2} \qquad \ldots(9-19)$$

أو

$$\frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \hat{P}}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \tan\theta} \frac{\partial \hat{P}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial \theta^2}$$

$$\frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial \phi^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \qquad \ldots((9-20)$$

وهذه المعادلة يمكن التعبير عنها بدلالة الاحداثيات الاسطوانية (r, ϕ, z) فتصبح كالاتي

$$\frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta r}\left(r\frac{dp^{\wedge}}{\delta r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\delta^2 P^{\wedge}}{\delta \phi^2}+\frac{\delta^2 P^{\wedge}}{\delta z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\delta^2 P^{\wedge}}{\delta t^2}$$

.... (9-21)

$$\frac{\delta^2 P^{\wedge}}{\delta r^2}+\frac{1}{r}\frac{\delta p^{\wedge}}{\delta r}+\frac{1}{r^2}=\frac{\delta^2 P^{\wedge}}{\delta^2 \phi^2}\ \frac{\delta^2 P^{\wedge}}{\delta z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\delta^2 P^{\wedge}}{\delta t^2}$$

.... (9-22)

3 – 9 سرعة الجسيم في الهواء نتيجة تأثير الموجة الصوتية

ان مرور موجة صوتية في الهواء يؤدي الى اهتزاز جزيئات الهواء باتجاه انتقال الموجة . وتكون سرعة اي جسيم في الهواء نتيجة مرور الموجة هي u حيث :

$$u=\frac{\delta \xi}{\delta t}+\frac{\delta \eta}{\delta t}+\frac{\delta \xi}{\delta t}$$

.... (9-23)

حيث $\frac{\delta \xi}{\delta t}$ تمثل مركبة سرعة الجسيم باتجاه المحور x

و $\frac{\delta \eta}{\delta t}$ تمثل مركبة سرعة الجسيم باتجاه المحور y

و $\frac{\delta \zeta}{\delta t}$ تمثل مركبة سرعة الجسيم باتجاه المحور z

ان مركبات السرعة هذه ترتبط مع ضغط الصوت $\hat{p}$ من خلال مجموعة المعادلات (9-1) حيث

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_o}\int \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}\partial t$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_o}\int \frac{\partial \hat{p}}{\partial y}\partial t$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_o}\int \frac{\partial \hat{p}}{\partial z}\partial t$$

وبتعويض هذه العلاقات في المعادلة (9-23) نحصل على سرعة الجسيم

$$u = -\frac{1}{\rho_o}\int\left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}+\frac{\partial \hat{p}}{\partial y}+\frac{\partial \hat{p}}{\partial z}\right)\partial t \qquad \text{...(2-24)}$$

أو

$$u = -\frac{1}{\rho_o}\int \nabla\hat{p}\,\partial t \qquad \text{...(9-25)}$$

حيث $\nabla\hat{p}$ يمثل تدرج الضغط الصوتي ويساوي $\left(\frac{\partial \hat{p}}{\partial x}+\frac{\partial \hat{p}}{\partial y}+\frac{\partial \hat{p}}{\partial z}\right)$

في نظام الاحداثيات المتعامد .

ويمكن ايجاد سرعة الجسيم باي نظام آخر للاحداثيات من معرفة كل من المؤثر التفاضلي ∇^2 والتدرج ∇ في ذلك النظام .

4 – 9 حلول معادلة الحركة الموجية في ثلاثة أبعاد

لقد وجدنا ان معادلة الحركة الموجية التي تتحكم بانتقال الموجات الصوتية في الهو(أو أي غاز أو سائل) يمكن ان يعبر عنها بصيغ مختلفة تختلف باختلاف الاحداثيات المستخدمة في الاشتقاق . واختيار اي صيغة من هذه الصيغ يعتمد على طبيعة المسألة التي سنتعامل معها ، فمثلاً اذا كانت المسألة تتطلب تحليل سلوك الموجات الصوتية في - مغلق على شكل متوازي مستطيلات فعندئذ يفضل استخدام معادلة الموجة بصيغة الاحداثيات المتعامدة (16 – 9) ، واذا كانت المسألة تشتمل على مصدر كروي أو مصد على شكل نقطة يبث موجات كروية في الفضاء المحيط بالمصدر فعندئذ يفضل استخدا معادلة الموجة بالصيغة الكروية (20 – 9) . أما اذا كان مصدر الموجة اسطوانيا أو شكل خط مستقيم يرسل موجات ذات جبهات اسطوانية فعندئذ يفضل استخدام معاد الموجة بالصيغة الاسطوانية (22 – 9) . وهكذا يتضح ان اختيار الصيغة المناسبة للمعادلة الموجية بما يتفق وشكل جبهة الموجة (مستوية أو كروية أو أسطوانية) يسهل التعامل مع المسألة وبعكسه يصبح الامر في غاية التعقيد . وسنحاول هنا حل معادلة الموجة لحالات مختلفة لتتحقق الفائدة المرجوة من ذلك .

(5 – 9) حل معادلة الموجة باستخدام الاحداثيات المتعامدة

ان المعادلة العامة للموجة الصوتية في ثلاثة ابعاد بالاحداثيات المتعامدة هي (16 – 9)

$$\frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial t^2} \qquad \ldots (9-26)$$

وسنحاول حل هذه المعادلة بطريقة فصل المتغيرات التي سبق ان استخدمناها في فصول سابقة .

نفرض ان الحل يأخذ الصيغة التالية

$$\hat{P}(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t) \qquad \ldots (9-27)$$

حيث ان T, Z, Y, X هي دوال للمتغيرات t, z, y, x على الترتيـــب . نعوض الحل (27 – 9) في معادلة الموجة (26 – 9) فنحصل على

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\frac{1}{c^2T}\frac{d^2T}{dt^2} \qquad \dots(9-28)$$

يلاحظ من هذه المعادلة ان الطرف الايمن هو دالة للزمن t فقط . بينما الطرف الايسر هو دالة لـ z, y, x . وعليه يجب ان يكون كل طرف مساويا لمقدار ثابت وليكن هذا المقدار هو $-k^2$ وبذلك نحصل على المعادلتين التاليتين :

$$\frac{d^2T}{dt^2}=-c^2k^2T \qquad \dots(9-29)$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-k^2 \qquad \dots(9-30)$$

ان المعادلة (29 – 9) لها حل قياسي معروف وهو

$$T(t)=A_1\sin ckt+B_1\cos ckt \qquad \dots(9-31)$$

نرتب المعادلة (30 – 9) فتصبح كالاتي :

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-k^2-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} \qquad \dots(9-32)$$

يلاحظ من هذه المعادلة ان الطرف الايمن هو دالة لـ x فقط بينما الطرف الايسر هو دالة لـ z, y . وعليه يجب ان يكون كل طرف مساويا لمقدار ثابت ، وليكن هذا المقدار هو $-k^2 + k_x^2$ ، وبذلك نحصل على المعادلتين التاليتين :

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -k_x^2 X \qquad \dots (9-33)$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k^2 + k_x^2 \qquad \dots (9-34)$$

والحل القياسي للمعادلة (9 - 33) هو

$$X(x) = A_2 \sin k_x x + B_2 \cos k_x x \qquad \dots (9-35)$$

نرتب المعادلة (9 - 34) فتصبح كالاتي

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k^2 + k_x^2 - \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} \qquad \dots (9-36)$$

يلاحظ من هذه المعادلة ان الطرف الايمن هو دالة للمتغير y فقط بينما الطرف الايسر هو دالة لمتغير آخر هو z فقط وعليه يجب ان يكون كل طرف مساويا لمقدار ثابت وليكن هذا المقدار هو $-k^2 + k_x^2 + k_y^2$ وبذلك نحصل على المعادلتين التاليتين :

$$\frac{d^2Y}{dy^2} = -k_y^2 Y \qquad \dots (9-37)$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k^2 + k_x^2 + k_y^2 \qquad \dots (9-38)$$

والحل القياسي للمعادلة (9 - 37) هو

$$Y(y) = A_3 \sin k_y y + B_3 \cos k_y y \qquad \dots (9-39)$$

نرتب المعادلة (38 – 9) فتصبح كالاتي

$$\frac{d^2Z}{dx^2} = (-k^2 + k_x^2 + k_y^2)Z \quad \ldots (9-40)$$

نفرض ان المقدار الثابت المحصور بين قوسين يساوي k_z^2 – أي ان

$$k_z^2 = -k^2 + k_x^2 + k_y^2 \quad \ldots (9-41)$$

فتصبح المعادلة (40 - 9) كالاتي

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = -k_z^2 Z \quad \ldots (9-42)$$

والحل القياسي لهذه المعادلة هو

$$Z = A_4 \operatorname{Sin} K_z z + B_4 \cos k_z z \quad \ldots (9-43)$$

الآن نعوض الحلول (31 - 9) و (35 - 9) و (39 - 9) و (43 9) في (27 - 9)
فنحصل على الحل العام لمعادلة الحركة الموجية في ثلاثة ابعاد

$$\hat{P} = (A_1 \sin ckt + B_1 \cos ckt)(A_2 \sin k_x x + B_2 \cos k_x x)$$

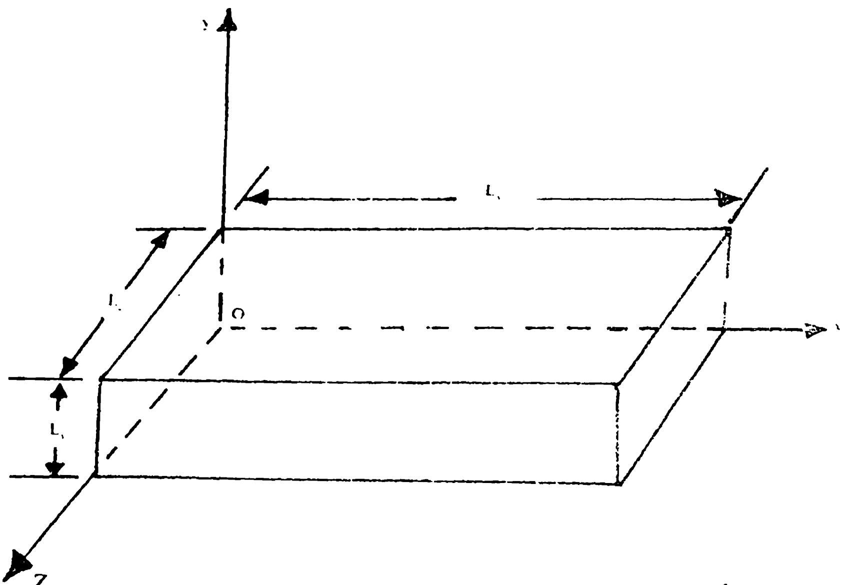
$$(A_3 \sin k_y y + B_3 \cos k_y y)(A_4 \sin k_z z + B_4 \cos k_z z) \quad \ldots (9-44)$$

حيث ان $B_4, B_3, B_2, B_1, A_4, A_3, A_2, A_1$ هي ثوابت اختيارية يمكن ايجاد قيمها من معرفة الشروط الحدودية للمسألة . ان لهذا الحل تطبيقات عديدة ومفيدة في مجال الفيزياء . ولعل اهم تلك التطبيقات في مجال الصوت هو دراسة سلوك الموجات الصوتية في حيز مغلق على شكل متوازي مستطيلات .

6 – 9 الموجات الصوتية في حيز مغلق على شكل متوازي مستطيلات قائم

ان دراسة سلوك الموجات الصوتية في أي حيز مغلق ذي ثلاثة ابعاد له اهمية خاصة في مجال التصميم الصوتي للغرف والقاعات بما يساعد على توزيع الطاقة الصوتية بشكل جيد. وفي الواقع فان القاعات المغلقة لاتكون دائما على شكل متوازي مستطيلات قائم. ان الحل (44 – 9) يخص متوازي المستطيلات بالذات، الا ان النتائج المستحصلة يمكن تعميمها على الاشكال الاخرى.

سنفرض ان لدينا حيزاً مغلقاً على شكل متوازي مستطيلات قائم ابعاده L_x ، L_y ، L_z وان جدرانه صلبة وملساء وتعكس الموجات الصوتية الساقطة عليها كليا بدون امتصاص. ونفرض ان احد زوايا الحيز هو نقطة الاصل O كما هو مبين في الشكل (9 – 3)



الشكل (3 – 9) يبين احد اشكال حيز مغلق على شكل متوازي مستطيلات قائم ابعاده L_x, L_y, L_z

ان المعادلة التي تتحكم بانتقال الموجات الصوتية في ثلاثة أبعاد بالاحداثيات المتعامدة هي

$$\frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial z^2} = \frac{1}{C^2} \cdot \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial t^2} \qquad \ldots (9-45)$$

والحل التام الذي يصف الموجات الصوتية المستوية المتقدمة في ثلاثة ابعاد هو

$$\hat{P} = (A_1 \sin ckt + B_1 \cos ckt)(A_2 \sin k_x x + B_2 \cos k_x x)$$
$$(A_3 \sin k_y y + B_3 \cos k_y y)(A_4 \sin k_z z + B_4 \cos k_z z) \qquad \ldots (9-46)$$

والشروط الحدودية التي ينبغي تطبيقها لايجاد الثوابت الاختيارية $A_1, A_2, \ldots B_1, B_2$ في هذه المسألة الخاصة هي ان مركبة سرعة الجسيم العمودية على اي جدار تساوي صفراً وذلك لأن الجدار صلب تماما ولايسمح للجسيمات بالحركة العمودية عليه . وهذه الشروط يمكن التعبير عنها رياضياً كالاتي

(مركبة سرعة الجسيم الموازية للمحور x) = u_x = صفر عند الموضعين

$x = 0 , x = L_x$

و (مركبة سرعة الجسيم الموازية للمحور y) = u_y = صفر عند الموضعين

$y = 0 , y = L_y$

و (مركبة سرعة الجسيم الموازية للمحور z) = u_z = صفر عند الموضعين

$z = 0 , z = L_z$

ومركبات سرعة الجسيم الموازية للمحاور الثلاثة z, y, x يمكن ايجادها من المعادلة (9 - 1) حيث ان

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = \rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial u_y}{\partial t} = \rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial y}$$

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = \rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial z}$$

وعليه تصبح الشروط الحدودية كالاتي

الشرط الحدودي الاول هو

$$\frac{\delta P}{\delta x} = 0 \quad \text{في الموضعين} \quad x = 0 \quad \text{و} \quad x = L_x$$

الشرط الحدودي الثاني هو

$$\frac{\delta P}{\delta y} = 0 \quad \text{في الموضعين} \quad y = 0 \quad \text{و} \quad y = L_x$$

الشرط الحدودي الثالث هو

$$\frac{\delta P}{\delta z} = 0 \quad \text{في الموضعين} \quad z = 0 \quad \text{و} \quad Z = L_z$$

الان نطبق الشرط الحدودي الاول في الموقع $x = 0$.
نفاضل الحل (46—9) بالنسبة لـ x فنجد ان

$$\frac{\delta p^{\wedge}}{\delta x} = (A_1 \sin cht + B_1 \cos ckt)(A_2 k_x \cos k_x x - B_2 K_2 \sin K_x x)$$

$$(A_3 \sin k_y y + B_2 \cos k_y y)(A_4 \sin hz + B_4 \cos K_z z)$$

نعوض $0 = \frac{\delta P^{\wedge}}{\delta x}$ عندما $x = 0$ فنحصل على

$$O = A_2 k_x (A_1 \sin ckt + B_1 \cos ckt)(A_3 \sin k_y y + B_3 \cos k_y y)$$

$$A_4 \sin k_z z + B_4 \cos k_z z)$$

من اجل ان يكون الطرف الايمن مساويا للصفر يجب ان نلاحظ انه لايمكن لاي من الاقواس الثلاثة ان يساوي صفرا والا فان الحل سينهار تماما . ولما كانت قيمة k_x لايمكن ان تساوي صفرا دائما . لذلك فان A_2 يجب ان تساوي صفراً . وبنفس الطريقة تماما يمكن ان نجد ان A_3 تساوي صفرا عندما نطبق الشرط الحدودي الثاني عند الموقع $y = 0$ ونجد ان A_4 يساوي صفراً عندما نطبق الشرط الحدودي الثالث عند الموقع $z = 0$. وبتعويض $A_1 = A_3 = A_4 =$ صفر يصبح الحل العام كالآتـــي

$$P^{\wedge} = ((A_1 \sin ckt + B_1 \cos ckt)(B_2 \cos k_y y) B_4 \cos k_z z)$$

واذا فرضنا ان

$$A_1 B_2 B_3 B_4 = C_1$$

$$B_1 B_2 B_3 B_4 = C_2$$

فان الحل العام يصبح كالاتي

$$\hat{P} = (C_1 \sin ckt + C_2 \cos ckt)(\cos k_x x)(\cos k_y y)(\cos k_z z) \quad ...(9-47)$$

الان نطبق الشروط الحدودية في المواضع $x = L_x$ و $y = L_y$ و $z = L_z$ على الترتيب
نفاضل الحل (9 - 47) بالنسبة لـ x فنجد ان

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial x} = -k_x (\sin k_x x)(\cos k_y y)(\cos k_z z)(C_1 \sin ckt + C_2 \cos ckt)$$

نعوض $\frac{\partial \hat{P}}{\partial x} = 0$ عندما $x = L_x$ فنحصل على

$$-k_x (\sin k_x L_x)(\cos k_y y)(\cos k_z z)(C_1 \sin ckt + C_2 \cos ckt) = 0$$

من أجل ان يكون الطرف الايسر مساوياً للصفر يجب ان نلاحظ ان المقدار $[(\cos k_y y)(\cos k_z z)(C_1 \sin ckt + C_2 \cos ckt)]$ لايساوي صفراً والا فان الحل (9 - 47) سينهار تماما . ولما كانت قيمة k_x لايمكن ان تساوي صفراً دائما اذن يجب ان تكون قيمة

$$\sin k_x L_x = 0$$

وهذ يتحقق عندما

$$k_x L_x = l\pi \quad ...(9-48)$$

حيث l تساوي صفراً واي عدد صحيح 1, 2, 3, 4 ... . الخ وبنفس الطريقة تماما نجد انه عند تطبيق الشرط الحدودي $\frac{\partial \hat{P}}{\partial y} = 0$ في الموضع $y = L_y$ ان

$$\sin k_y L_y = 0$$

وهذا يتحقق عندما

$$k_y L_y = m\pi \quad (9-49)$$

حيث m تساوي صفرا او أي عدد صحيح 1, 2, 3, 4.. ...... الـــخ

وبتطبيق الشرط الحدودي $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$ في الموضع $z = L_z$ نجد أن

$$\operatorname{Sin} k_z L_z = 0$$

وهذا يتحقق عندما

$$k_z L_z = n\pi \qquad \ldots(9-50)$$

حيث n تساوي صفراً أو أي عدد صحيح 4, 3, 2, 1 الخ .

الآن نعوض قيم k_z, k_y, k_x من المعادلات (9 - 48) ، (9 - 49) ، (9 - 50)

في المعادلة (9 - 41) نحصل على

$$k^2 = \left(\frac{l\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_z}\right)^2 \qquad \ldots(9-51)$$

ولكن k يمثل العدد الموجي $= \frac{\omega}{c}$

حيث ω هي التردد الزاوي للموجات الصوتية وتساوي ($2\pi f$)

و f هو تردد الصوت

و c هي سرعة الصوت في الهواء وتساوي $C = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$

وبالتعويض المناسب في المعادلة (9 - 51) نجد أن

$$f^2 = \frac{c^2}{4\pi^2}\left[\left(\frac{l\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_z}\right)^2\right]$$

وبالاختزال نحصل على العلاقة التالية

$$f = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{l}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_z}\right)^2} \qquad \ldots(9-52)$$

ان هذه العلاقة الهامة تحدد الترددات الرنينية المسموح بها داخل الحيز المغلق والذي هو على شكل متوازي مستطيلات قائم . ويلاحظ من هذه العلاقة ان عدد الترددات الرنينية المسموح بها في أي حيز يكون كبيراً جداً وتتحدد قيم هذه الترددات بقيم مجموعة الأعداد الصحيحة (l, m,n) التي لاحصر لها . وكل مجموعة مستقلة من قيم الأعداد الصحيحة تمثل نمطا خاصاً من انماط الاهتزاز الذي يظهر على

شكل موجات واقفة داخل الحيز المغلق . ويمكن رسم نمط أي موجة واقفة مصاحب لأي تردد رنيني باستخدام المعادلتين (47 - 9) و (52 - 9) وذلك بتعويض القيم المناسبة لـ (l, m, n) في المعادلة (47 - 9) وهذه المعادلة تشير الى ان نقاط الضغط العظمى تقع في كل زاوية من زوايا الحيز المغلق لجميع الموجات الواقفة ولهذا السبب يفضل في حالة الرغبة باثارة أكبر عدد ممكن من الترددات الرنينية المسموح بها في الحيز ان يوضع المصدر الصوتي (كمكبر الصوت مثلاً) في أي زاوية من زوايا القاعة التي شكلها متوازي مستطيلات . أما اذا وضع المصدر الصوتي في أي موضع آخر غير الزاويا فأن مايثار من الاهتزازات الرنينية (أو الموجات الواقفة) هي فقط تلك التي تقع عقدها في موقع المصدر الصوتي .

لقد وجدنا ان كل تردد رنيني يقابله نمط خاص من انماط الاهتزاز يتمثل بالموجة الواقفة . وقيمة أي تردد رنيني تتحدد بذكر مجموعة الاعداد الصحيحة (l, m, n) التي تحدد نمط الاهتزاز لذلك يفضل ان تكتب المعادلة الاخيرة (53 - 9) بالشكل التالي

$$f_{lmn} = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{l}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_z}\right)^2} \qquad (9 - 53)$$

وبالنظر لأهمية الموجات الواقفة في حيز مغلق ذي ثلاثة ابعاد ليس في مجال الصوت فحسب بل في جميع المجالات التي تشتمل على ظاهرة الاهتزاز ، لذلك سنوضح هذه المعادلة بمثال عملي مدعم بالحسابات .

لنفرض أن لدينا قاعة أو غرفة على شكل متوازي مستطيلات أبعادها 6 متر × 5 متر × 3 متر . وان سرعة الصوت في الهواء هي 343 متر في الثانية .
عندئذ يمكن حساب الترددات الطبيعية (الترددات الرنينية) للقاعة بتعويض القيم المناسبة للاعداد (l, m, n) التي تمثل نمط الاهتزاز وابعاد الغرفة في المعادلة (53 - 9) فنجد ان الـ 25 الاولى من الترددات الطبيعية هي كما مبينة في الجدول (9)

الجدول (1 – 9) يبين مجموعة من الترددات الطبيعية الواطئة لقاعة ابعادها 6م × 5م × 3م

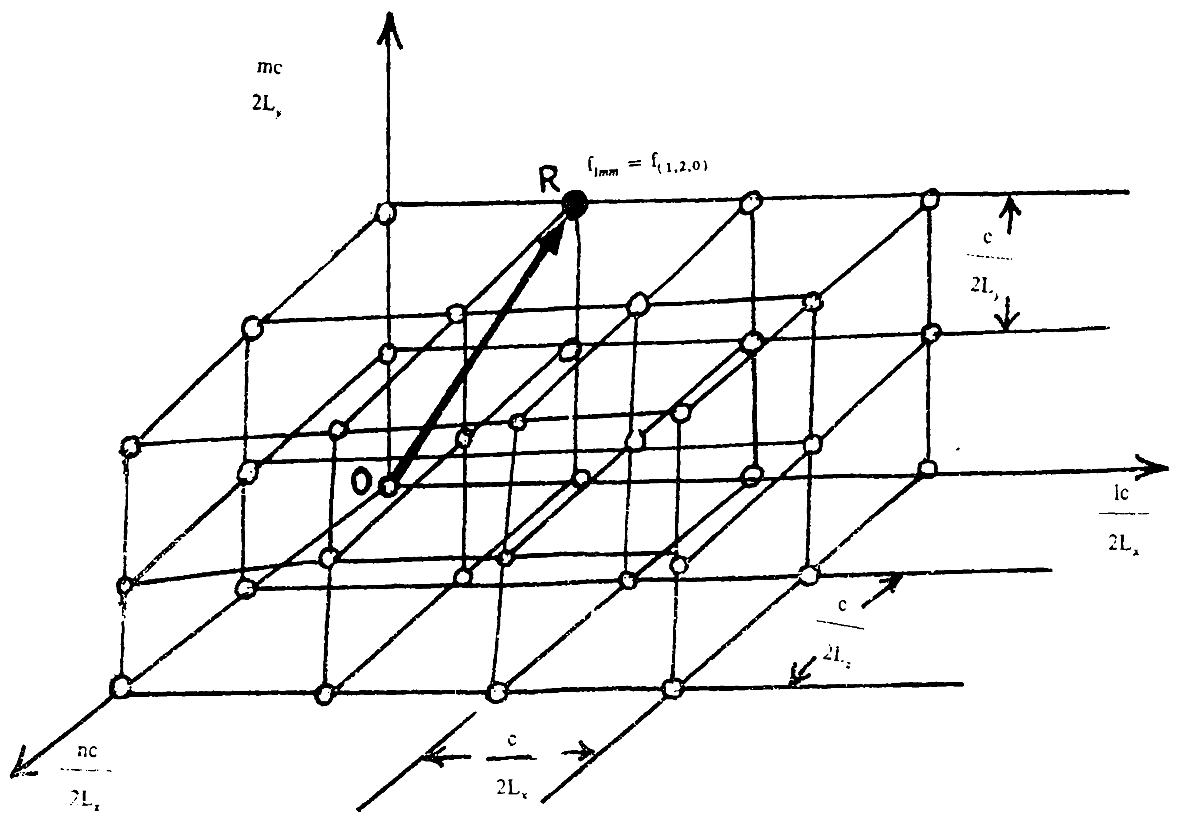
A	m	n	f هيرتز
1	0	0	29
0	1	0	34
1	1	0	45
0	0	1	57
2	0	0	57
1	0	1	64
0	1	1	67
2	1	0	67
0	2	0	69
1	1	1	72
1	2	0	74
2	0	1	80
3	0	0	86
2	1	1	88
0	2	1	89
2	2	0	89
3	1	0	92
1	2	1	92
3	0	1	103
0	3	0	103
2	2	1	106
3	1	1	108
3	2	0	109
0	0	2	114
4	0	0	114

يلاحظ من هذا الجدول ان قيم الترددات الرنينية تتقارب من بعضها كلما ارتفع مقدارها . اي ان عدد انماط الاهتزاز ضمن اي مدى محدد من التردد يزداد كلما ازداد التردد . وهذا مايعبر عنه بكثافة الانماط . ويمكن توضيح كيف تتغير كثافة الانماط مع التردد بصورة افضل بطريقة بيانية . فنحن نعلم ان لكل مجموعة مستقلة من الاعداد (l,m,n) هنالك قيمة معينة للتردد الرنيني f_{lmn} . ويلاحظ من الجدول (1 — 9) انه قد يكون هناك نفي القيمة لـ f_{lmn} لمجموعتين مستقلتين من الاعداد (l,m,n) . فاذا وضعنا المعادلة (53 — 9) بالشكل الآتي :

$$f_{lmn}^2 = \left(\frac{cl}{2L_x}\right)^2 + \left(\frac{cm}{2L_y}\right)^2 + \left(\frac{cn}{2L_z}\right)^2 \qquad \ldots\ldots (9-54)$$

وهذه المعادلة يمكن تمثيلها بيانياً بالمشبك القائم المبين في الشكل (4 — 9) ان كل تقاطع يؤشر بنقطة ، وطول الخط الواصل بين نقطة التقاطع ونقطة الاصل (OR مثلاً) يمثل قيمة التردد الرنيني المقابل لتلك النقطة واتجاه هذا الخط يعطي اتجاه الموجات الواقفة المصاحبة لذلك التردد . ان كل نقطة تقاطع عبارة عن رأس حلة على شكل متوازي مستطيلات ابعادها $\frac{c}{2L_x}$ ، $\frac{c}{2L_y}$ ، $\frac{c}{2L_z}$ وحجم هذه الخلية هو $\left(\frac{c^3}{8L_x L_y L_z}\right)$ وهنالك عدد من الخلايا يساوي عدد نقاط التقاطع (اي عدد الترددات الرنينية) ، وذلك لان كل خلية لها ثمان نقاط تقاطع وكل نقطة تقاطع تمثل زاوية مشتركة لثمان خلايا . والهدف الان هو ايجاد عدد الترددات الرنينية N (او عدد انماط الاهتزاز) التي قيمها اقل من تردد معين f . ان عدد هذه الترددات يساوي عدد نقاط التقاطع الواقعة ضمن الثمن الاول من الفضاء الكروي الذي نصف قطره f ومركزه نقطة الاصل O . وهذا الحجم يساوي .

$$\frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}\pi f^3\right) = \frac{1}{6}\pi f^3$$



الشكل (4 - 9)يبين التمثيل البياني للمعادلة (54 - 9) طول الخط OR يمثل قيمة التردد الرنيني المقابل لمجموعة لاعداد (1, 2, 0)

وعليه فان عدد الترددات الرنينية N التي قيمها اقل من f هو

$$N = \frac{1}{6}\pi f^3 / \frac{c^3}{8V}$$

$$N = \frac{4\pi V f^3}{3c^3} \quad \ldots(9-55)$$

حيث V هو حجم القاعة (ويساوي $L_x L_y L_z$

ومن هذه المعادلة يمكن ايجاد عدد انماط الاهتزاز δN التي يمكن ان تحدث ضمن مدى التردد المحصورين f و $f + \delta f$ وذلك باجراء عملية التفاضل فنحصل على

$$\delta N = \frac{4\pi V f^2}{c^3}\delta f \quad \ldots(9-56)$$

ويلاحظ من هذه المعادلة ان كثافة الانماط $(\delta N/\delta f)$ تتناسب طرديا مع مربع التردد f . والجدول (2 - 9)يبين قيم الانماط N وكثافة الانماط $(\delta N/\delta f)$

الجدول (2 - 9) يبين

عدد الأنماط N وكثافة الأنماط $(\delta N/\delta f)$ لغرفة على شكل متوازي مستطيلات حجمها 6 م × 5 م× 3م

عدد الأنماط N المثارة تحت التردد f	كثافة الأنماط	التردد f هيرتز
2	0·1	63
18	0·4	125
146	1·7	250
1170	7·0	500
9340	28	1000
74600	112	2000
597000	448	4000
4770000	1790	8000

عند مختلف الترددات f في غرفة ذات نفس الابعاد المذكورة في المثال السابق. ويجب ان يلاحظ ان كثافة الانماط محسوبة عندما يكون مدى التردد δf يساوي 1 هيرتز.

ان هذه النتائج تشير الى أنه كلما ازداد تردد مصدر الصوت داخل القاعة كلما ازداد عدد انماط الاهتزاز (أي الموجات الواقفة) المستثارة في القاعة وبذلك يكون الضغط الصوتي اكثر تجانساً في القيمة في مختلف المواضع والعكس بالعكس تماماً.

ومن المفيد أن نذكر ان لهذه الطريقة في تحليل انماط الاهتزاز تطبيقات هامة في مجالات اخرى في الفيزياء غير مجال الصوت. ومن الامثلة البارزة على ذلك هو اتباع هذه الطريقة لتحقيق كل من قانون بلانك الذي يدور حول التوزيع الطاقة الكهرومغناطيسية المنبعثة من الأجسام الحارة على طيف التردد وكذلك نظرية ديباي التي تتعلق بالحرارات النوعية للأجسام الصلبة.

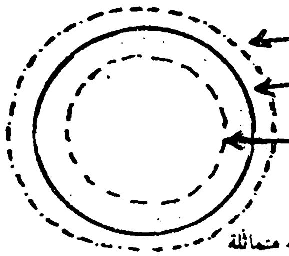
7 — 9 حل معادلة الموجة باستخدام الاحداثيات الكروية (r,θ,ϕ)

ان معادلة الحركة الموجية بالاحداثيات الكروية (r,θ,ϕ) هي

$$\frac{\delta^2 P^\wedge}{\delta r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\delta P^\wedge}{\delta r} + \frac{1}{r^2 \tan\theta}\,\frac{\delta P^\wedge}{\delta \theta} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\delta^2 P^\wedge}{\delta \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\,\frac{\delta^2 P^\wedge}{\delta \phi^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\delta^2 P^\wedge}{\delta t^2} \qquad (9-57)$$

والحل العام لهذه المعادلة ليس سهلاً لأنه يقتضي استخدام رياضيات متقدمة لم يألفها الطالب في هذه المرحلة من دراسته. ومثل هذا الحل يصلح لأي مصدر صوتي كروي الشكل يبث موجاته بصورة متماثلة او غير متماثلة في جميع الاتجاهات والحل في هذه الحالة يعطي قيمة الضغط الصوتي $\hat{P}(r, \theta, \phi, t)$ في اي لحظة زمنية t وعلى اي بعد (r) وفي اي اتجاه (θ,ϕ) وعلى الرغم من الاهمية النظرية لهذا الحل الا ان تطبيقاته العملية محدودة وفي الواقع ان الكثير من مصادر الصوت الكروية او النقطية تبث موجاتها بصورة متماثلة كروياً، أي لاتعتمد على الاتجاهات (θ,ϕ) كما في

حالة الموجات المتولدة من كرة تنبض دورياً والمبينة في الشكل (6 − 9) او الموجات الناتجة من انفجار صغير يحدث في موقع عميق في الأرض .



الشكل (6 − 9) يبين كرة نابضة تبث موجات كروية متماثلة

وفي حالة التماثل الكروي الكامل فان ضغط الموجة $\hat{P}$ يعتمد على البعد r فقط (ولا يعتمد على $\phi . \theta$) وبذلك فان معادلة الموجة تختزل الى الشكل الآتي :

$$\frac{\delta^2 P^\wedge}{\delta^2 r} + \frac{2}{r} \frac{\delta P^\wedge}{\delta r} = \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2 P^\wedge}{\delta t^2} \qquad \text{................ (9-58)}$$

وهذه تمثل الصيغة العامة لمعادلة الموجة للموجات المتماثلة كروياً ، والضغط الصوتي في هذه الحالة يكون دالة للمسافة الشعاعية r مقاسة من مركز المصدر والزمن t .
ان المعادلة (58 - 9) يمكن كتابتها أيضاً بالشكل

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\delta^2 (rP^\wedge)}{\delta r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2 P^\wedge}{\delta t^2} \qquad \text{................ (9-59)}$$

ولما كانت المسافة الشعاعية r هي متغير مستقل لا يعتمد على الزمن t ، لذلك يمكن كتابة المعادلة الاخيرة بالصيغة الآتية

$$\frac{\delta^2 (rP^\wedge)}{\delta r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2 (rP^\wedge)}{\delta t^2} \qquad \text{................ (9-60)}$$

اذا تعاملنا مع المقدار ($r\hat{P}$) باعتباره حداً واحداً ، فعندئذ تصبح معادلة الموجة الصوتية بالاحداثيات الكروية في ثلاثة أبعاد مشابهة تماماً لمعادلة الموجة الصوتية المستوية في بعد واحد التي سبق اشتقاقها وحلها في الفصل السابع . وعليه يصبح الحل العام للمعادلة (60 − 9) هو

$$rp^\wedge = f_1 (ct - r) + f_2 (ct + r)$$

أو

$$p^\wedge = \frac{1}{r} f_1 (ct - r) + \frac{1}{r} f_2 (ct + r)$$

حيث الحد الاول $\frac{1}{r} f_1(ct - r)$ يمثل موجة كروية منبعثة من نقطة الاصل وبسرعة c

وهو الحد الذي يمثل الموجة الصوتية التي ينتجها المصدر فعلاً ويبثها بالتماثل في جميع الجهات في الفضاء المحيط بالمصدر. والحد الثاني $\frac{1}{r} f_2(ct + r)$ يمثل موجة كروية التي تقترب من بعيد الى نقطة الاصل وبسرعة c . وهذا الحد له تطبيقات قليلة جدا في الصوتيات وعليه يمكن اهماله في معظم الحالات. وبذلك يأخذ الحل العام الشكل

$$\hat{P} = \frac{1}{r} f(ct - r)$$

واذا فرضنا ان المصدر الكروي ينبض بحركة توافقية جيبية عندئذ يصبح الحل كالآتي

$$\hat{P}(r, t) = \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr) \qquad \ldots (9-62)$$

حيث A ثابت اختياري يمثل قيمة الضغط الصوتي على بعد وحدة المسافة من المصدر و ω هو التردد الزاوي و $k = \frac{\omega}{c}$ هو العدد الموجي ويمكن التأكد من صحة هذا الحل بتعويضه في المعادلة (9 - 60) ويلاحظ من هذا الحل ان السعة $\left(\frac{A}{r}\right)$ تصبح مالانهاية من الكبر عند نقطة الاصل ($r = 0$) لكن في الواقع ان المصدر له حجم ومركزه ينطبق على نقطة الاصل والقياسات تتم خارج المصدر وعليه يمكن تجنب عملياً حالة المالانهاية في السعة عند نقطة الاصل (أو مركز المصدر) ويلاحظ أيضاً من الحل (9 - 62) انه على مسافات كبيرة r بالمقارنة مع الطول الموجي λ للصوت المنبعث من المصدر ان شكل جبهة الموجة لا يتغير بصورة ملحوظة كلما انتشرت الموجة بعيداً عن المصدر. وان سعة الموجة $\left(\frac{A}{r}\right)$ تتناقص كلما ازدادت المسافة r من المصدر. ولما كانت شدة الموجة (أي الطاقة المتدفقة خلال وحدة المساحة في وحدة الزمن) تتناسب طردياً مع مربع السعة ، لذلك فان شدة الصوت المنبعث تتناسب عكسياً مع مربع المسافة وهذا ينسجم مع قانون حفظ الطاقة الذي يشير الى أن الطاقة الصوتية المتدفقة من المصدر تتوزع على مساحة أكبر ($4\pi r^2$) كلما تقدمت الموجة مسافة أكبر. وهذا يؤدي الى تضاءل شدة الصوت كلما ابتعدنا عن المصدر وفق قانون التربيع العكسي ، وهذا يتم فقط في حالة غياب عوامل الامتصاص والتبديد للطاقة الصوتية في الوسط الذي ينقل الموجات الصوتية .

8 – 9 حل معادلة الموجة باستخدام الاحداثيات الاسطوانية (r, ϕ, z)

ان معادلة الحركة الموجية بالاحداثيات الاسطوانية (r, ϕ, z) هي :

$$\frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{P}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial t^2}$$

وحل هذه المعادلة ليس سهلاً حتى في حالة تبسيطها وجعلها معادلة تمثل موجات اسطوانية تبث بصورة متماثلة شعاعياً . اذ يقتضي حلها التوغل في الرياضيات المتقدمة لهذا السبب سنكتفي باعطاء خلاصة الحل على اعتبار ان المصدر هو عبارة عن سطح اسطواني يهتز حول محور معين بسعة ثابتة وبنفس الطور ويشع موجات اسطوانية تنتشر شعاعياً من المحور شدة الصوت تتناسب عكسياً مع البعد r عن المحور ، ولذلك فان الضغط الصوتي $\hat{P}$ يتناسب عكسياً مع $\sqrt{r}$

امثلة محلولة

مثال (1 — 9)

برهن ان المعادلة العامة للموجة في ثلاثة ابعاد بالاحداثيات المتعامدة

$$\frac{\delta^2 P^\wedge}{\delta x^2}\quad \frac{\delta^2 P^\wedge}{\delta y^2}\quad \frac{\delta^2 P^\wedge}{\delta z^2} + \frac{1}{c^2}\quad \frac{\delta^2 P^\wedge}{\delta t^2}$$

يمكن اختزالها الى معادلة الموجة المتماثلة كرويا .

$$\frac{\delta^2 P^\wedge}{\delta r^2}\quad \frac{2}{r}\quad \frac{\delta P^\wedge}{\delta r} + \frac{1}{c^2}\quad \frac{\delta^2 P^\wedge}{\delta t^2}$$

الحل

لدينا

$$r^2 = x^2 + v^2 + z^2 \qquad \text{.................. (1)}$$

نفاضل بالنسبة لـ x فنجد ان

$$\frac{\delta r}{\delta x} = \frac{x}{r} \qquad \text{.................. (2)}$$

واذا فرضنا ان $\hat{P}$ لايعتمد على θ, ϕ فعندئذ

$$0 = \frac{\delta P^\wedge}{\delta \phi} = \frac{\delta P^\wedge}{\delta \theta}$$

ولدينا

$$\frac{\delta P^\wedge}{\delta x}\quad \frac{\delta P^\wedge}{\delta r}\quad \frac{\delta r}{\delta x} + \frac{x}{r}\quad \frac{\delta P^\wedge}{\delta r} \qquad \text{.................. (3)}$$

نفاضل المعادلة (3) مرة اخرى بالنسبة لـ x فنجد ان

$$\frac{\delta^2 P}{\delta x^2}\quad \frac{1}{r}\quad \frac{\delta P^\wedge}{\delta r} - \frac{x}{r^2}\quad \frac{\delta P^\wedge}{\delta r}\quad \frac{\delta r}{\delta x} + \frac{x}{r}\quad \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta P^\wedge}{\delta r}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\quad \frac{\delta P^\wedge}{\delta r} - \frac{x}{r^2} - \frac{\delta P^\wedge}{\delta r}\quad \frac{\delta r}{\delta x} + \frac{x}{r}\quad \frac{\delta}{\delta r}\left(\frac{\delta P}{\delta r}\right)\quad \frac{\delta r}{\delta x}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial x^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{P}}{\partial r} - \frac{x}{r^2}\frac{\partial \hat{P}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{x}{r}\frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x}$$

نعوض $\frac{\partial r}{\partial x}$ من المعادلة (2) في المعادلة الاخيرة فنحصل على

$$\frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial x^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{P}}{\partial r} - \frac{x^2}{r^3}\frac{\partial \hat{P}}{\partial r} + + \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial r^2}$$

$$= \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)\frac{\partial \hat{P}}{\partial r}$$

$$= \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 \hat{P}}{\partial r^2} + \left(\frac{y^2 + z^2}{r^3}\right)\frac{\partial \hat{P}}{\partial r} \qquad \ldots (4)$$

وبنفس الطريقة نحصل على

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial r^2} + \left(\frac{z^2 + x^2}{r^3}\right)\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} \qquad \ldots (5)$$

و

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2} = \frac{z^2}{r^2}\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial r^2} + \left(\frac{x^2 + y^2}{r^3}\right)\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} \qquad \ldots (6)$$

نعوض المعادلات (4) ، (5) ، (6) في معادلة الموجة بالاحداثيات المتعامدة فنجد أن

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial z^2}$$

$$= \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial r^2} + \frac{y^2 + z^2}{r^3}\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial r^2} + \frac{z^2 + x^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \frac{z^2}{r^2}\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial r^2} + \frac{x^2 + y^2}{r^3}\frac{\partial \hat{p}}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \hat{b}}{\partial r}\left(\frac{y^2+z^2+z^2+x^2+x^2+y^2}{r^3}\right)+\frac{\partial^2 \hat{b}}{\partial r^2}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\right)=$$

$$\frac{\partial \hat{b}}{\partial r}\,\frac{2r^2}{r^3}+\frac{\partial^2 \hat{b}}{\partial r^2}\,\frac{r^2}{r^2}=$$

$$\frac{\partial \hat{b}}{\partial r}\,\frac{2}{r}+\frac{\partial^2 \hat{b}}{\partial r^2}=$$

اسئلة

9 – 1 وضح ماهو المقصود بما يلي :
(أ) موجة في بعد واحد
(ب) موجة في بعدين
(جـ) موجة في ثلاثة ابعاد
اذكر امثلة توضح ذلك.

9 – 2 اشرح ماهي (أ) الموجة المستوية (ب) الموجة الكروية (جـ) الموجة الاسطوانية اذكر امثلة توضح ذلك. ثم بين هل يمكن تحويل احداهما للاخرى ووضح كيف.

9 – 3 تأخذ معادلة الموجة في ثلاثة ابعاد اشكالاً مختلفة تبع نظام الاحداثيات المستخدم لاشتقاقها. فما هو وجه الاختلاف ان وجد؟ هل هو اختلاف فيزياوي ام رياضي؟ وضح

9 – 4 يمكن وصف المصدر الكروي الذي يبث موجات كروية متماثلة في جميع الاتجاهات بانه مصدر نقطي. هل صحيح ذلك؟ وضح كيف.

9 – 5 اشرح كيف تتغير شدة الصوت الناتج من مصدر كروي مع المسافة من المصدر ثم وضح كيف يتلاشى الصوت؟ واين تختفي الطاقة الصوتية وكيف يتفق ذلك مع قانون حفظ الطاقة؟

9 – 6 ايها اكثر اهمية من الناحية العملية المصدر الكروي للموجة ام المصدر الاسطواني؟

9 – 7 اذكر امثلة عملية على المصادر الكروية للموجة؟ هل يعتبر الفم اثناء الكلام مصدر كروي للموجة الصوتية؟

9 – 8 هل يمكن ان تصبح جبهة الموجة الكروية جبهة مستوية؟ وضح كيف.

9 – 9 هل جميع مصادر الصوت تشع الصوت بصورة منتظمة في جميع الجهات؟ وضح اجابتك مع ذكر امثلة.

9 – 10 لقد وجدنا ان سرعة الصوت في الهواء تساوي $\sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$ سواء كانت الموجة مستوية اوكروية. فكيف تعلل ذلك؟

9 – 11 لقد اشتققنا معادلة الموجة بدلالة الضغط الصوتي $\hat{p}$ فكيف تتوقع ان يكون شكل المعادلة بدلالة (أ) ازاحة الجسيم (ب) سرعة الجسيم (جـ) تعجيل الجسيم (د) التكاثف.

شكل المعادلة بدلالة (أ) ازاحة الجسيم (ب) سرعة الجسيم (ج) تعجيل الجسيم (د) التكاثف .

12 - 9 وضح ان الدالة $\frac{1}{r} f(ct - r)$ هي حلاً لمعادلة الموجة الكروية. ثم برهن أنه اذا كانت الموجة توافقية فان الحل يمكن ان يكون $\frac{A}{r} \cos k(ct - r)$ (ب) $\frac{B}{r} \sin(\omega t - kr)$

13 - 9 لديك مصدران للصوت لهما نفس القدرة والتردد والأبعاد، ولكن أحدهما يشع الطاقة الصوتية بصورة منتظمة حوله والآخر يشعها بصورة غير منتظمة. أقترح وسيلة مناسبة لوصف هذا الأختلاف .

14 - 9 وضح كيف يختلف كل من السعة والطور لنفس الموجة اذا كانت بدلالة (أ) الضغط الصوتي (ب) ازاحة الجسيم (ج) سرعة الجسيم (د) تعجيل الجسيم (هـ) التكاثف

15 - 9 لماذا تكون عملية انتقال الموجة الصوتية في الهواء كظيمة دائماً ؟ وهل ينتج أختلاف اذا لم نعتبرها كذلك ؟

مسائـــل

9-1 برهن أن المعادلة العامة للحركة الموجية في ثلاثة أبعاد بالأحداثيات المتعامدة تؤول في الأحداثيات الكروية الى الشكل التالي

$$\frac{\delta^2 P^\wedge}{\delta r^2} \quad \frac{1}{r^2} \quad \frac{\delta^2 P^\wedge}{\delta \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \quad \frac{\delta^2 P^\wedge}{\delta \phi^2} + \frac{2}{r} = \frac{\delta P^\wedge}{\delta r} \quad \frac{1}{r^2 \tan\theta} = \frac{\delta P^\wedge}{\delta \theta} = \frac{1}{c^2} \quad \frac{\delta^2 P^\wedge}{\delta t^2}$$

9-2 برهن ان المعادلة العامة للحركة الموجية في ثلاثة أبعاد بالأحداثيات المتعامـدة (x,y,z) تؤول في الأحداثيات الأسطوانية (r,ϕ,z) الى الشكـل التالي

$$\frac{\delta^2 P}{\delta r^2} \quad \frac{1}{r^2} \quad \frac{\delta P^\wedge}{\delta r} + \frac{1}{r^2} \quad \frac{\delta^2 P^\wedge}{\delta \phi^2} + \frac{\delta^2 P^\wedge}{\delta z^2} = \frac{1}{c^2} \quad \frac{\delta^2 P^\wedge}{\delta t^2}$$

9-3 برهن ان معادلة الموجة للموجات المتماثلة كروياً يمكن أن تتحقق بموجات توافقية بسيطة تتغير سعاتها عكسياً مع المسافة الشعاعية r من مركز المصدر الكروي

9-4 برهن أن

$$\frac{\delta^2 \zeta}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \zeta}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \zeta}{\delta z^2} = \frac{\delta^2 \zeta}{\delta r^2} + \frac{2}{r} \quad \frac{\delta^2 \zeta}{\delta r^2}$$

للمعادلة العامة للموجة في ثلاثة أبعاد.

الفصل العاشر

اعتبارات عامة في الصوت والظاهرة الموجية

10 – 1 المقدمـة

لقد تركزت دراستنا في الفصول السابقة على دراسة الصوت والحركة الموجية بطريقة موضوعية تستند اساساً على الجانب التحليلي المبسط وذلك بغية تعميق المعلومات النظرية وترسيخ المفاهيم الاساسية في ذهن الطالب. وتحاشينا في اي فصل من تلك الفصول الخوض في غمار الجوانب العملية والتطبيقية للموضوع وتأثيراته الذاتية وذلك لان تلك الجوانب عامة لاتخص فصلاً بذاته بل تخص كل الفصول المتعلقة بالموجة ، لذلك أرتأينا وضع هذ الفصل الخاص الذي يشتمل على الاعتبارات العامة التي تخص الصوت والحركة الموجبة. وسنركز في هذا الفصل بشكل خاص على الظواهر الموجية الصوتية وستكون دراستنا موزعة على جزئين: الجزء الاول وهو مايتعلق باستجابة الانسان للصوت وهو مايدعى بالجانب الذاتي للصوت والجزء الثاني وهو مايتعلق بفيزياء الصوت وهو يشمل كل مايخص الصوت وظواهره وقياساته وهو مايدعى بالجانب الموضوعـي للصوت.

10 – 2 الجانب الذاتي للصوت

هناك سؤال يطرح نفسه دائماً : اذا حدث انفجار هائل في صحراء شاسعة ولم تكن هناك اذن تسمع الانفجار فهل هناك صوت ؟ ..... للاجابة على هذا السؤال نقول طبعاً ان هناك صوت ، ولكن عدم سماع ذلك الصوت لايعني عدم وجوده بل عدم وصوله اذن السامع ، من هنا تظهر اهمية تعريف الصوت فن وجهة نظر الفيزياء مانطلق

عليه كلمة (صوت) ما هو الا سلسلة من التتابعات السريعة لتضاغطات وتخلخلات متتالية في الهواء. اما من وجهة النظر الفسلجية فان مانطلق عيه كلمة (صوت) هو الاحساس بالسمع الناتج من دخول التتابعات السريعة للتضاغطات والتخلخلات في الهواء الى الاذن البشرية. والموجات السمعية تقتصر على مدى التردد الذي يمكنه ان يهيىء الاذن البشرية والمخ للاحساس بالسمع، ويمتد هذا المدى من حوالي 20 هيرتز الى حوالي 20000 هيرتز ويقال له مدى السمع. وهكذا يتضح ان الاجابة على السؤال تتوقف على التعريف الذي يعرف به الصوت.

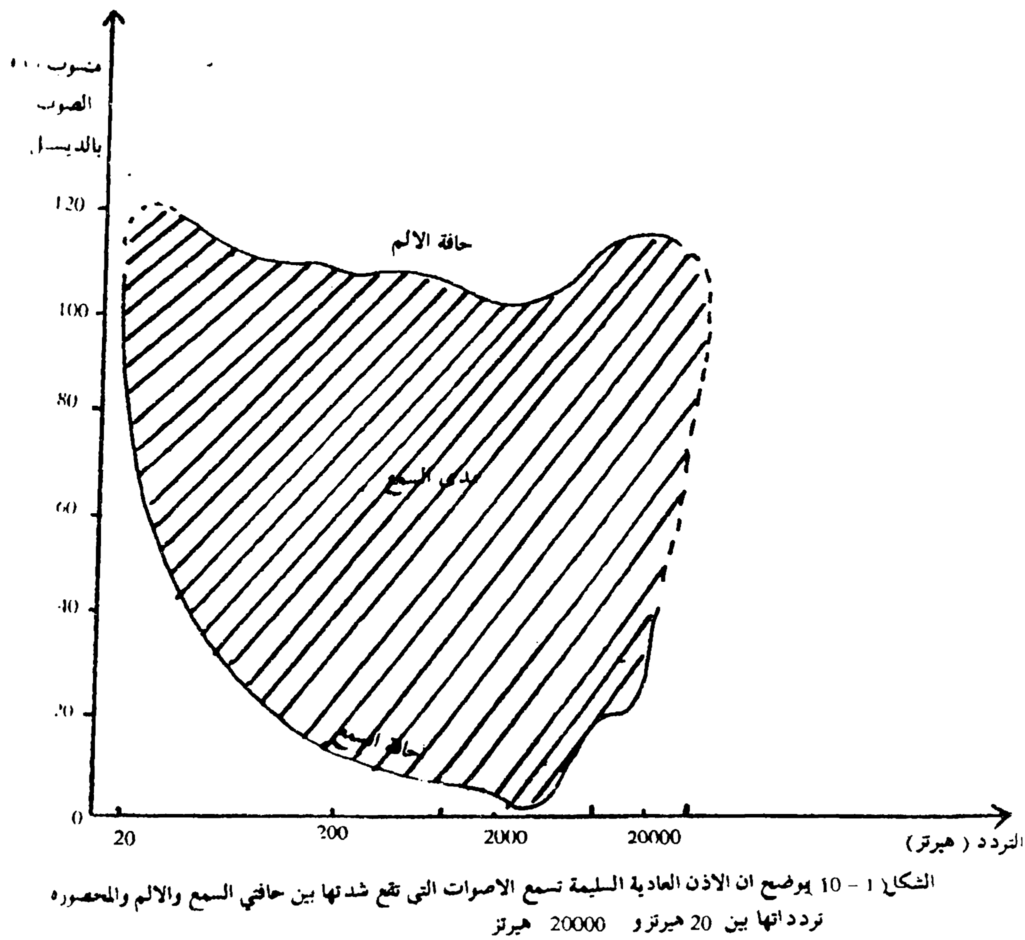
ان مصادر الموجات السمعية في الطبيعة كثيرة جداً وهي الخبوط المهتزة (مثل أوتار الكمان والبيانو والقيثارة والحبال الصوتية للانسان) والاعمدة الهوائية المهتزة (مثل الارغن وانابيب الرنين ومسكن الاصوات في السيارات) والصفائح والاغشية الرقيقة المهتزة (مثل الطبول والدفوف واجهزة تكبير الصوت) وغيرها كثير وتختلف استجابة الاذن البشرية للصوت المسموح بإختلاف خواص الصوت من حيث الشدة والتردد والنوع. ومن المفيد جداً أن نتعرف على إستجابة الاذن للصوت قبل التطرق لتأثير كل من الشدة والتردد والنوع على الاذن.

3 – 10 استجابة الاذن البشرية للصوت

ان الاذن البشرية العادية جهاز فائق الحساسية للصوت يفوق في تحسسه أدق الاجهزة المصنوعة لهذا الغرض. وهناك حدود لحساسية الاذن للصوت من حيث الشدة والتردد. فالحد الادنى لشدة الصوت المســموع هو 10^{-12} واط لكل متر مربع وهذا يقابل أضعف صوت تحسه الاذن البشرية ويعادل ضغط صوتي مقداره 20×10^{-6} باسكال (20×10^{-6} نيوتن/م^{2}) وهذا الحد من الضغط يدعى بحافة السمع (او عتبة السمع). ان هذا التغير الضئيل في مقدار الضغط الجوي 20×10^{-6} باسـكال (ويعادل جزء واحد من 5000 000 000 جزء من الضغط الجوي الاعتيـادي) يسبب ازاحة لغشاء الطبلة بمسافة تقل عن قطر جزيء الهيدروجين. ومع هذه الحساسية المفرطة فإن الاذن البشرية تتحمل ضغطاً صوتياً يفوق قيمة أدنى ضغط صوتي مسموع بأكثر من مليون مرة، وهذا الحد من الضغط يدعى بحافة الالم وهكذا يتضح ان الاذن البشرية العادية تحس بالموجات التضاغطية كصوت إذا كان ضغطها الصوتي

يتراوح بين الحدين 20×10^{-6} باسكال الى 20 باسكال واذا كان ضغط الصوت أقل من 20×10^{-6} باسكال فانه لم يعد مسموعا واذا زاد عن 20 باسكال يسبب الالم للاذن . اما من ناحية التردد فان الاذن البشرية العادية تسمع الاصوات التي تقع تردداتها ضمن المدى المحصور بين حوالي 20 هيرتز الى حوالي 20000 هيرتز أما الموجات التي تقع تردداتها خارج هذا النطاق فلايمكن للاذن البشرية ان تحسسها كصوت . وتسمى الموجات التي يقل ترددها عن 20 هيرتز بالموجات تحت السمعية وتسمى الموجات التي يزيد ترددها عن 20000 هيرتز بالموجات فوق السمعية

ان الشكل (10-1) يوضح مديات الشدة والتردد للموجات التضاغطية التي يمكن للاذن العادية ان تحسها كصوت .



الشكل (1 - 10 يوضح ان الاذن العادية السليمة تسمع الاصوات التي تقع شدتها بين حافتي السمع والالم والمحصوره تردداتها بين 20 هيرتز و 20000 هيرتز

في هذا الشكل نلاحظ ان ادنى شدة للصوت المسموع التي تمثل حافة السمع ليست ثابتة مع التردد ، اذ يلاحظ ان الاذن العادية تكون حساسيتها اعظم مايمكن للاصوات التي تقع تردداتها ضمن المدى المحصور بين حوالي 700 هيرتز الى حوالي 6000 هيرتز وفي هذا المدى تكون قيمة اقل ضغط صوتي مسموع هي 20×10^{-6} باسكال ولهذا السبب تم اعتبار هذه القيمة مرجعية في الصوتيات . وتضعف حساسية الاذن للصوت كلما ابتعد التردد عن هذا المدى سواء بالزيادة او بالنقصان. وعند الترددات الواطئة التي تقل عن حوالي 30 هيرتز او الترددات العالية التي تزيد عن حوالي 12000 هيرتز تكون الاذن العادية غير حساسة الى حد بعيد ، مما يقتضي ان ترتفع شدة الصوت كثيراً لكي يمكن سماعه. ويلاحظ من الشكل ايضاً ان شدة الصوت التي تسبب الالم للاذن (حافة الالم) تكاد تكون ثابتة مع التردد. مما تقدم يتبين ان استجابة الاذن السليمة للصوت ليست خطية بل معقدة وتختلف باختلاف تردد الصوت وشدته. وهذه الصفة المميزة للاذن البشرية تفيد كثيراً في تمييز الاصوات المختلفة. واهم الخصائص التي يعتمدها السامع لتمييز الاصوات المختلفة هي العلو والدرجة والنوعية .

4 — 10 العلو

يرتبط العلو بشدة الصوت . فبينما تعرف الشدة بانها المعدل الزمني لتدفق الطاقة الصوتية خلال وحدة المساحة وهي كمية فيزياوية يمكن قياسها وحسابها بدقة الا ان العلو يتوقف على تأثير شدة الصوت على الآذان (اي على حكم السامع) . وعليه يعرف العلو بانه ذلك الاحساس الذي يتوقف على شدة الصوت المسموع . ومع ان علو الصوت يزداد مع ازدياد شدته الا ان الاذن ليست بنفس الحساسية للاصوات ذات الترددات المختلفة ونتيجة لذلك فالاذن لاتستطيع سماع الصوت ذي التردد العالي بنفس العلو الذي تسمع به صوتاً تردده اقل وشدته مساوية لشدة الصوت الاول .

ان استجابة الاذن البشرية للاصوات التي لها نفي التردد ولكنها تختلف بالشدة تتغير لوغاريتمياً وليس خطياً . وهذه النتيجة تتفق مع علاقة فسلجية اكثر شمولاً تدعى قانون ويبر– فيخنر (Weber – Fechner Law) وطبقاً لهذا القانون :

مقدار الاحساس يتناسب طردياً مع لوغاريتم الشدة

فاذا فرضنا ان مقدار الاحساس (لعلو الصوت) هو L وان شدة الصوت هي I فان

$$L \propto \text{Log } I \qquad \dots (10-1)$$

ويجب ان نلاحظ ان هذا القانون لاينطبق بدقة عند حدود السمع الدنيا والعيا (اي قرب حافتي السمع والالم) اما في المديات الاخرى فان القانون يعطي نتائج جيدة.

ومن العلاقة الاخيرة نحصل على

$$L = K \text{ Log } I \qquad \dots (10-2)$$

حيث ان K مقدار ثابت

وبمفاضلة (10.2) نجد ان

$$\frac{dL}{dI} = \frac{K}{I} \qquad (10-3)$$

ان المقدار $\frac{dL}{dI}$ يدعى بحساسية الاذن. ويلاحظ من هذه العلاقة ان حساسية الاذن تقل مع زيادة شدة الصوت. وهذا يعني ان الاذن تحس التغيرات في شدة الصوت بصورة افضل كلما قلت شدة الصوت المسموع. أي بعبارة اخرى ان شدة الصوت يجب ان تصبح عشرة امثالها لكي تحسها الاذن وكأنها اصبحت اعلى مرتين، وان الشدة يجب ان تتضاعف مئة مرة لتبدو للاذن انها اعلى بثلاث مرات وهكذا... ولما كان العلو هو احساس سمعي يتوقف على حكم السامع ذاته، اي انه ظاهرة فسلجية وليست فيزياوية لذلك فانه يتعذر قياسه بدقة باي جهاز.

ان علو الصوت يعتمد على شدة الصوت وحساسية الاذن بينما شدة الصوت تعتمد على عدة عوامل اهمها:

1- سعة الاهتزاز للمصدر

حيث ان شدة الصوت الناتج من اي مصدر صوتي تتناسب طردياً مع مربع سعة الاهتزاز.

2- المساحة السطحية للسطح المهتز

حيث ان شدة الصوت الناتج من مصدر مهتز تتناسب طردياً مع مساحة السطح المهتز.

3 - المسافة بين المصدر والمستلم

حيث أن شدة الصوت تتناسب عكسياً مع مربع المسافة الفاصلة بين المصدر ونقطة الاستلام. (حسب قانون التربيع العكسي).

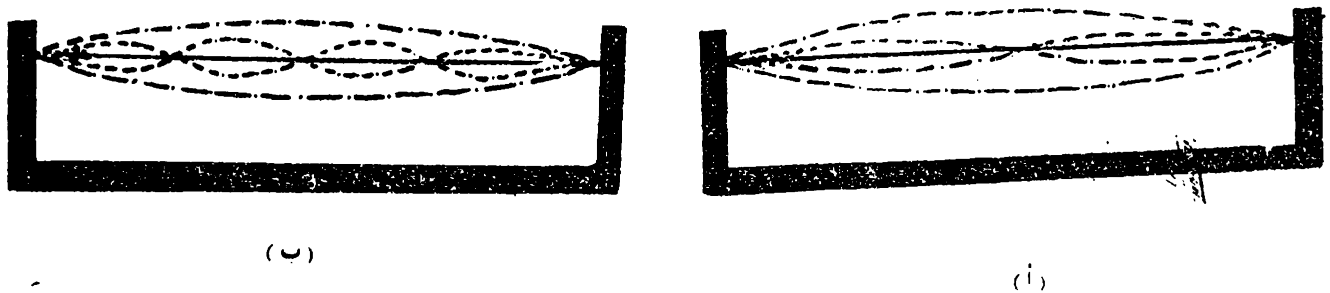
5 10 درجة الصوت

تعرف درجة الصوت بأنها ذلك الأحساس الذاتي الذي يتوقف على تردد الصوت المسموع ، أي أنها حدة نغمة الصوت كما تشعره الأذن البشرية . فمثلا عند نقر وتر مشدود فأن الوتر يهتز ويستطيع أي سامع أن يقرر درجة الصوت الناتج من أهتزاز الوتر واذا ما ازداد الشد في الوتر فأن تردد الأهتزاز يرتفع ويستطيع السامع ان يقرر حالاً ان درجة الصوت الجديد أعلى من درجة الصوت الأول . وفي هاتين الحالتين تعتبر درجة الصوت مرادفاً لتردده وهكذا يتضح ان درجة الصوت هي الحكم الذي يصدره السامع على الأصوات ويرتبها وفق سلم في مخة وفق أحساسه لترددها . أن درجة الصوت لاتعتمد على علو الصوت أو نوعيته . فأصوات النساء والأطفال درجاتها عالية لأن تردداتها مرتفعة بينما صوت الرجل الكبير درجته واطئة وأجشّ لأن تردده منخفض

اذا كان الصوت المسموع ذا تردد منفرد (نغمة نقية) فعندئذ يمكن تمييزه تماماً بمعرفة علوه ودرجته فقط . أما اذا كان الصوت معقداً اي مركباً من خليط من الترددات فعندئذ نحتاج لتمييزه الى معرفة علوه ودرجته ونوعيته .

10 - 6 نوعية النغمة او الصوت

ان نوعية النغمة هي التي تمكننا من التمييز بين صوتين لهما نفس العلو والدرجة ولكنهما صادران من مصدرين مختلفين . وهذا يعزى الى الأختلاف في عدد وترتيب وشدة التوافقيات التي يتألف منها كل صوت. فمثلا لو كان لدينا صونومتران فيهما وتران متماثلان تماماً من حيث قوة الشد والطول ومساحة المقطع العرضي والكثافة . وسمح لكلا الوترين بالأهتزاز بوساطة قوس يمر عليهما بنفس الوقت . ثم لمس الوتر الأول من منتصفه والثاني من ربعه لمسا خفيفا فعندئذ سنلاحظ ان الوتر الأول سيهتز بكاملة وبجزأين في نفس الوقت كما مبين في الشكل (2 10 أ)



الشكل (١٥-١٠) يبين وترين في حالة أهتزاز
(أ) الوتر يهتز بكامله وبجزأين (النغمة الاساسية والنغمة التوافقية الاولى)
(ب) الوتر يهتز بكامله وبأربع اجزاء (النغمة الاساسية والنغمة التوافقية الثالثة)

وبذلك ينتج نغمتين هما : النغمة الاساسية (النغمة التوافقية الاولى) والنغمة التوافقية الثانية). بينما الوتر الثاني سيهتز بكامله وبأربع اجزاء بنفس الوقت كما مبين في الشكل ((20 — 10 ب). وبذلك ينتج نغمتين هما : النغمة الاساسية والنغمة التوافقية الرابعة. وعند سماع الصوتين الناتجين من اهتزاز الوترين نلاحظ ان هناك اختلافاً بينهما ناتجاً من اختلاف النوعية ، وهذا يعزى الى اختلاف النغمات التوافقية المصاحبة للنغمة الاساسية. وعلى هذا الاساس يمكن التمييز بين الاصوات المنبعثة من الالات المختلفة في جوقة موسيقية حتى وان كانت جميعها تعزف نغماً واحداً بنفس الشدة.

ومن الجدير بالملاحظة ان النغمات الموسيقية الممزوجة بالتوافقيات يكون صوتها غنياً وجميلاً وبدون هذه التوافقيات يكون الصوت ثقيلاً وفي الواقع لوكانت جميع الالات الموسيقية تبعث نغمات نقية خالية من التوافقيات تماماً لكانت اصواتها متشابهة وليس لها عذوبة او جرس موسيقي.

ولو فرضنا ان شخصاً يناديك ، فأنك ستدرك حال سماعه من خلال علو ودرجة صوته ان كان صوت رجل او طفل او أمرأة اما نوعية الصوت فستساعدك على التعرف على الشخص المنادي وتميزه. وهذا هو السبب الذي يجعل صفة الصوت (النوعية) تلعب دوراً مهماً في تمييز الاصوات ، والا فان اصوات كافة الاشخاص ستكون متشابهة.

7 — 10 الأصوات الصامتة (او غير المسموعة)

لقد وجدنا ان الموجات الصوتية المسموعة هي تلك التي لايقل ضغطها الصوتي عن 20×10^{-6} باسكال ويتراوح ترددها بين 20 هيرتز و 20000 هيرتز. اما الموجات التي تقع ترددِاتها خارج هذا المدى من التردد فانها غير مسموعة ، وتسمى الموجات التي يقل ترددها عن 20 هيرتز بالموجات تحت السمعية ومثل هذه الموجات تتولد عادة عن المصادر الضخمة كما عند الهزات الارضية او العواصف او الاعاصير. وتسمى الموجات التي يزيد ترددها عن 20000 هيرتز بالموجات فوق السمعية ويمكن توليدها بوساطة الاهتزازات المرنة لبلورة الكوارتز التي تتجاوب مع مجال كهربائي متناوب (التأثير الكهروضغطي) وقد امكن بهذه الطريقة توليد موجات فوق سمعية تزيد ترددتها عن 6×10^{8} هيرتز وفي هذه الحالة يكون الطول الموجي المقابل في الهواء حوالي 5×10^{-5} سم وهو مايتساوى مع طول الموجات الضوئية. ولهذه الموجات تطبيقات عملية واسعة في عالم اليوم وسيكون لها شأن كبير في عالم المستقبل.

8 – 10 مقياس الديسيبل

ان الحد الادنى لشدة الصوت المسموع بالكاد للاذن البشرية السليمة هو 10^{-12} واط لكل متر مربع (وهذا يقابل ضغط صوتي قيمته 20×10^{-6} نيوتن لكل متر مربع) بينما الحد الاقصى لشدة الصوت الذي يمكن للاذن العادية ان تتحمله هو حوالي 1 واط لكل متر مربع (وهذا يقابل ضغطاً صوتياً قيمته 20 باسكال) من هذه القيم يتضح ان مدى شدة الصوت الذي تستطيع الاذن ان تسمعه واسع جداً ، وهذا يقتضي التعامل مع ارقام هائلة تتراوح قيمها بين 10^{-12} و 1 واط لكل متر مربع ، وهذا امر غير عملي تماماً. وقد وجدنا من قانون ويبر- فيخنر ان استجابة الاذن البشرية لشدة الصوت المسموع هي لوغاريتمية وليس خطية ، اي ان الاحساس بعلو الصوت في اي تردد معين لايزيد خطياً مع الشدة بل مع لوغاريتم الشدة. وعلى ضوء هذه الحقائق يمكن اقتراح وحدة مقياس لوغاريتمي لشدة الصوت المسموع يتحقق منه فائدتان هما :

اولاً انه يعطي تقريباً افضل بكثير للاحساس البشري للعلو النسبي للصوت من مقياس وحدة الشدة المباشر.

ثانياً انه يضغط الارقام الهائلة التي يصعب التعامل معها الى ارقام عملية صغيرة نسبياً يسهل تداولها

وعليه يمكن تعريف المقياس اللوغاريتمي لشدة الصوت في صورة رياضية كما يلي

$$\text{منسوب شدة الصوت} = \log \frac{I}{I_o} \ \text{بيل} \quad \ldots (8-10)$$

حيث I هي شدة الصوت المقاس بوحدة الواط لكل متر مربع و I_o هي شدة الصوت المرجعية وهي كمية اختيارية وتؤخذ عادة مساوية للحد الادنى لشدة الصوت المسموع وهي 10^{-12} واط لكل متر مربع

ان وحدة منسوب شدة الصوت هي الـ (بل) نسبة الى الكساندر غراهام بل مخترع التلفون. وعملياً تعتبر وحدة الـ (بل) كبيرة لذلك يفضل استخدام غالباً الديسيبل وهذه تساوي عشر البل. وعليه يكون منسوب شدة الصوت بالديسيبل يساوي

$$\text{منسوب شدة الصوت} = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

وهكذا يتضح ان الديسيبل ليست وحدة قياس مطلقة . بل انها لوغاريتم النسبة بين كمية مقاسة واخرى مرجعية متفق عليها وهي حافة السمع . وعلى هذا الاساس فان منسوب شدة الصوت عند حافة السمع صفر ديسيبل ومنسوب شدة الصوت عند حافة الالم هو 120 ديسيبل . وان نغمة صوتية شدتها 10 مرات القيمة المرجعية للشدة لها منسوب شدة يساوي 1 بيل أو 10 ديسيبل وصوت له شدة تعادل 100 مرة القيمة المرجعية للشدة لها منسوب شدة يعادل 2 بيل أو 20 ديسيبل .

ونلاحظ اذا ما ازداد منسوب شدة الصوت بمقدار 1 ديسيبل فان هذا يعني زيادة في شدة الصوت تعادل 26 بالمئة . والاذن السليمة تدرك حسيا هذا المقدار من الزيادة في الشدة في المدى المتوسط من الترددات المسموعة . وعليه فان أقل تغير في منسوب الشدة يمكن ان تحسه الاذن البشرية الاعتيادية هو 1 ديسيبل . ولما كانت معظم اجهزة القياس تعطي القياس المباشر للضغط الصوتي وليس الشدة . وحيث ان شدة الصوت I تتناسب طرديا مع مربع الضغط الصوتي لذلك فان

$$\text{منسوب ضغط الصوت بالديسيبل} = 10 \ \log \left(\frac{P}{P_0} \right)^2$$

حيث ان P هو الضغط الصوتي المقاس وان P_0 هو الضغط الصوتي المرجعي ويساوي 2×10^{-5} نيوتن لكل متر مربع وهو يمثل أقل ضغط صوتي مسموع اي حافة السمع . والعلاقة الاخيرة تصبح

$$\text{منسوب الضغط الصوتي بالديسيبل} = 20 \log \frac{P}{P_0}$$

وهذا يساوي عدديا منسوب شدة الصوت بالديسيبل . والجدول (1 10) يبين القيم التقريبية لشدة بعض الاصوات حينما يكون الشخص السامع قريبا من مصدر الصوت .

الجـــدول 1 - 10
يبين القيم التقريبيـة لمنسوب شدة بعــض الأصـــوات

نوع مصدر الصوت	منسوب شدة الصوت بالديسيبـل
طنين الذبابة (ادنى صوت مسموع)	0
حفيف الشجر - غرفة النوم	10
الهمس المتوسط العلو	15 - 20
في مكتبة عامة	30
الموسيقى الخفيفة	40
في غرفة الطعام	50
التخاطب العـادي	60 - 65
رنيـن الهاتـف	60 - 70
طريق كثيف المـرور	70 - 85
ساعة توقيت	80
زئير الاسد (على بعد 6 متر) والشلال	90
ثقابة الصخور تعمل بالهواء المضغوط	100
الرعد	100 - 110
مطار الطائرات النفاثة (عند التحليق)	115 - 120
المدفع الرشاش	130
منطقة هبوط حاملة الطائرات (على بعد 20 متر)	150 - 155
الصاروخ الفضائـي	175

9 - 10 الضوضاء او الضجيج

الأصوات المسموعة يمكن ان تصنف علمياً الى صنفيـن :

(أ) الاصـــوات الموسيقيـــة

(ب) الضجيـــج أو الضوضـــاء

الاصوات الموسيقية هي تلك الاصوات المسموعة التي تولد تأثيراً سلساً وساراً في الاذن البشرية ، وتمتاز بكونها اصواتاً ذات ايقاع خاص او تكرار دوري محدد ، وعليه تعتبر الاصوات الناتجة من اهتزاز اوتار الكمان او عزف الناي هي اصوات موسيقية. بينما الاصوات التي تولد تأثيراً نشازاً في الاذن البشرية تدعى بالضجيج ، وتمتاز بكونها اصوات متقطعة وغير دورية وتنتج عادة من عدم انتظام الاهتزاز في المصدر الصوتي مثل الاصوات المتولدة من دق المطرقة او سقوط طبق على الارض ، او بوق سيارة او مدفع.

لقد اعتمدنا في تصنيف الاصوات المسموعة بانها موسيقية او ضجيج استناداً الى طبيعتها. ولما كان السامع هو الحكم النهائي الذي يقرر مدى تقبله او رفضه للاصوات المسموعة لذلك يجب ان نضع تعريفاً شاملاً للضجيج يراعى فيه اساساً رد فعل السامع وليس طبيعة الصوت المسموع وعلى هذا الاساس يكون التعريف الذاتي للضجيج بأنه : (اي صوت مسموع غير مرغوب فيه) وهذا يعني ان مايمكن اعتباره ضجيجاً في وقت من الاوقات قد لايكون كذلك في وقت آخر وان ارق الاصوات الموسيقية قد تعتبر ضجيجاً بالنسبة للسامع ان لم يكن راغباً في سماعها فعلاً لسبب من الاسباب. ورغم ان هذا التعريف ليس موضوعياً لانه يستند على عوامل ذاتية للسامع الا انه معتمد ويعول عليه دولياً بشكل عام.

ان للضجيج تأثير في صحة الانسان يتوقف على الشدة والتردد وفترة التعرض.

10 – 10 ظاهرة التشتت

يمكن وصف ظاهرة التشتت بانها التغير في سرعة تقدم الموجة الجيبية في الوسط المادي مع الطول الموجي او التردد. وعموماً فان اي اشارة او اضطراب، يتألف من خليط من الترددات المختلفة. وفي الواقع فان معظم الاصوات التي نتعامل معها هي اصوات معقدة تتركب من مزيج من الترددات ونادراً ما نتعامل مع صوت احادي التردد (او نغمة نقية تماماً). ومن حسن الحظ ان ظاهرة التشتت في مجال الصوت محدودة وليست لها الاهمية كما في مجال الضوء او الموجات الكهرومغناطيسية عموماً، ولكن بالنظر لاهمية هذه الظاهرة في النظرية العامة للحركة الموجية يجب ان نتعرف عليها بشيء من التفصيل.

اذا ماتحركت مجموعة من الموجات ذات الاطوال الموجية المختلفة في وسط مادي مشتت فان كل موجة تتحرك بسرعة تختلف عن سرع الموجات الاخرى. وبذلك فان هذه الظاهرة تعني انه بعد ما كانت جميع الموجات في نفس الموقع في لحظة ما فانها تصبح منفصلة عن بعضها في موقع اخر في لحظة اخرى نتيجة اختلاف سرعها. وخير مثال عملي على هذه الظاهرة في مجال البصريات هو تحلل الضوء الابيض الى مركباته بوساطة الموشور، وذلك بسبب تباين سرع المركبات (اي الموجات المختلفة التي يتألف منها الضوء الابيض) خلال مرورها بمادة الموشور، ونتيجة ذلك تنكسر هذه المركبات بزوايا مختلفة. ومثال اخر على هذه الظاهرة في مجال الصوتيات هو تحلل الصوت المركب من عدة ترددات الى مركباته عند مروره خلال ثاني اوكسيد الكاربون. ويقال للوسط المادي الذي تعتمد فيه سرعة انتقال الموجة على الطول الموجي (او التردد) بانه وسط مشتت مثل اي وسط شفاف كالزجاج او الماء او الهواء بالنسبة للموجات الضوئية. وفي مثل هذه الاوساط تكون العلاقة بين سرعة الضوء c والطول الموجي λ هي

$$\frac{1}{c} = A + \frac{B}{\lambda^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10\text{-}4)$$

حيث A و B ثابتين بالنسبة للوسط المعني.

ومن الامثلة الاخرى في الفيزياء على توقف سرعة الموجة على الطول الموجي هو الموجات السطحية في سائل عمقه h وكثافته ρ وشده السطحي T حيث سرعة الموجة السطحية هي C

$$C^2 = \left(\frac{g}{2\pi k} + \frac{2\pi k\ T}{\rho}\right) \tanh(2\pi kh) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10\text{-}5)$$

حيث g هو التعجيل الارضي و k هو العدد الموجي

11 — 10 السرع في الحركة الموجية

في البداية يجب ان نؤكد ان الوسط الناقل للموجة كالهواء مثلاً ، ليس متصلاً بل متقطع ويتألف من عدد هائل من الجزيئات منفصلة عن بعضها تماماً. ولكن مصادر الصوت تكون عادة كبيرة جداً بالمقارنة مع الابعاد الفاصلة بين الجزيئات تحت الشروط الجوية الاعتيادية من هذه الجزيئات المنفردة التي يتالف منها الوسط لاتنتقل مع الموجة بل تهتز موضعياً حول نقاط توازنها وعلى هذا الاساس يمكن اعتبار الجزيئات

عبارة عن مهتزات تهتز بحركات توافقية بسيطة اهتزازاً طولياً حول مواضع توازنها. وطبيعي ان جميع هذه المهتزات، لاتهتز بنفس الطور بل باطوار مختلفة تتغير دورياً. واختلاف طور حركة هذه المهتزات هو الذي نلاحظه كموجات.

وهناك ثلاث سرع في الحركة الموجية متميزة عن بعضها تماماً ولكن ترتبط مع بعضها بعلاقات رياضية، وهي :-

1- سرعة الجسيم
2- سرعة الموجة او سرعة الطور (الموجة المنفردة)
3- سرعة المجموعة (لعدد من الموجات المركبة)

وبالنظر لاهمية هذه السرع في الحركة الموجية سنتطرق لكل منها بشيء من التفصيل على اعتبار ان الموجات التي سنتعامل معها جيبية

12 – 10 سرعة الجسيم

وهي السرعة التوافقية البسيطة للجسيم حول موضع توازنه، وهي مقدار متغير، فهي تكون في غايتها العظمى في لحظة مرور الجسم في موضع توازنه وتكون صفراً عندما يكون في أقصى ازاحة عن موضع التوازن.
الازاحة الآنية ζ للجسيم في أية لحظة زمنية t هي

$$\zeta = a \sin(\omega t - kx) \qquad \ldots\ldots (10-6)$$

حيث الرموز تحمل معناها الاعتيادي.
ولدينا

$$\omega = kc$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

وبذلك تصبح المعادلة (6 – 10) كالآتي

$$\xi = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} (ct - x) \qquad (10-7)$$

حيث c هي سرعة الموجة

ان سرعة الجسيم u هي

$$u = \frac{d\xi}{dt}$$

وبمفاضلة المعادلة (10 – 7) بالنسبة للزمن نحصل على

$$u = \frac{d\xi}{dt} = \frac{2\pi ac}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda} (ct - x) \qquad (10-8)$$

ان هذه المعادلة توضح العلاقة بين سرعة الجسيم المهتز u وسرعة الموجة c

ان القيمة العظمى لسرعة الجسيم هي u_0 حيث $u_0 = \frac{2\pi ac}{\lambda}$

وهذه المعادلة توضح ان

اقصى سرعة للجسيم $u_0 = \frac{2\pi a}{\lambda} \times$ سرعة الموجة c

وفي الواقع ان سرعة الجسيم u هي السرعة التي يزودها المصدر الصوتي المهتز لجسيمات الوسط وتتوقف على سعة الاهتزاز واتجاهه وتختفي متى ما توقف السطح المهتز عن الاهتزاز وهذه السرعة تختلف عن السرع الجزيئية العشوائية المرتبطة بالحركة المستمرة لجسيمات الوسط سواء كانت هناك حركة اهتزازية او لم تكن .

وطبقا للنظرية الحركية للغازات فان جزيئات اي غاز في حالة حركة دائمة في الفضاء بسرع مختلفة تتفاوت في المقدار من الصفر الى مالانهاية تقريبا (وفق توزيع ماكسويل للسرع الجزيئية) واذا فرضنا ان متوسط مربع سرعة هذه الجزيئات هو $\overline{V^2}$ فان الضغط الناتج من تصادم هذه الجزيئات مع اي سطح هو P_0 وهذا الضغط يعطي بالعلاقة

$$P_0 = \frac{1}{3} \rho_0 \overline{V^2} \qquad (10-9)$$

حيث ρ_o هي كثافة الغاز و هو ضغط الغاز
ولما كانت سرعة الموجة الصوتية في اي غاز تحت شروط كظيمة (اديباتيكية) هي c
حيث

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_o}{\rho_o}}$$

ومنها نجد ان

$$p_o = \frac{1}{\gamma} \rho_0 c^2 \qquad \ldots(10-10)$$

حيث γ هي النسبة بين السعة الحرارية للغاز تحت ضغط ثابت c_p الى سعته تحت حجم ثابت C_v

$$\left(\gamma = \frac{C_p}{C_v} \right)$$

وبتعويض p_o من المعادلة (10-9) في المعادلة (10-10) نحصل على

$$C = \sqrt{\frac{1}{3} \gamma \bar{V^2}} \qquad \ldots(10-11)$$

من هذه المعادلة يتضح ان هنالك علاقة مباشرة بين سرعة الموجة الصوتية c والجذر التربيعي لمتوسط مربع سرعة جزيئات الغاز $\bar{V^2}$ واذا علمنا ان قيمة γ تعتمد على عدد درجات الحرية للغاز وفق العلاقة

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{2}{n}$$

حيث n هو عدد درجات الحرية . فللغازات الاحادية الذرة (n = 3). وللغازات الثنائية الذرة (n = 5) وللغازات الثلاثية الذرة (n = 7) وعليه فان قيم γ لهذه الغازات هي 1·66 و 1·40 و 1·29 على الترتيب .

ومن مقارنة المعادلتين (9 – 10) و (10 – 10) يبدو واضحاً ان هناك تطابق في الشكل لايمكن ان يكون اعتباطياً. وبتعويض القيمة المناسبة لـ في المعادلة (11 – 10) يتضح انه طبقاً للنظرية الحركية للغازات ان سرعة تقدم الموجة الصوتية في اي غاز لها نفس المرتبة من المقدار للجذر التربيعي لمتوسط مربع السرع الجزيئية لذلك الغاز (يعتبر الهواء غاز ثنائي الذرة).

وهذه النتيجة تبدو صحيحة الى حد كبير اذا علمنا ان مرتبة القيمة لسرع الجسيمات الناتجة عن مرور الموجات الصوتية ذات الشدة الاعتيادية (كما في الموجات المصاحبة للكلام والموسيقى) لايتجاوز 10 سم/ثا بينما متوسط السرعة للحركة الجزيئية العشوائية هي في حدود 10^4 الى 10^5 سم/ثا تحت الشروط الاعتيادية. وعلى ضوء ماتقدم يمكن تصور عملية تقدم الموجة الصوتية كالاتي:

عندما يهتز المصدر الصوتي فان بعض الجزيئات تندفع نحوه نتيجة الحركة العشوائية وتتلامس مع السطح المهتز. وبذلك تستلم زخماً اضافياً صغيراً بالمقارنة مع متوسط الزخم الذي تمتلكه قبل التلامس. ولما كان الزخم كمية متجهة، لذلك فان الزيادة بالزخم الذي اكتسبته الجزيئات التي تلامست مع السطح المهتز سينتقل (بنفس المقدار والاتجاه) الى الجزيئات الاخرى التي ستصطدم معها. وهذا الاضطراب المصاحب لعملية انتقال الزخم من جزيئ الى اخر سينتقل باتجاه محدد في الفضاء بسرعة تحددها اساساً السرع الجزيئية العشوائية وليس سرعة الجسيم التي استلمها من المصدر المهتز.

وجدير بالملاحظة ان هذا التصور يتفق مع الحقيقة التي تشير الى ان سرعة الموجة مقدار ثابت (في الاوساط غير المشتتة) حتى على مسافات بعيدة بما فيه الكفاية لكي تصبح سرعة الجسيم المصاحبة للموجة ضئيلة جداً.

وفي الواقع اذا كانت الزيادة في سرعة الجسيم التي يكتسبها من السطح المهتز كبيرة بالمقارنة مع متوسط السرعة العشوائية للجزيئات فان سرعة الموجة تصبح، وكما هو متوقع اكبر من قيمتها الاعتيادية بالنسبة للموجات ذات السعات الصغيرة. فالاضطرابات المتولدة من الانفجارات الشديدة في الهواء تنتقل في المناطق القريبة من موقع الانفجار بسرعة تفوق عدة مرات سرعة الموجات الصوتية، وهذا يشكل مايدعى بالموجات الراجة.

13 - 10 سرعة الموجة (او سرعة الطور)

وهي سرعة تقدم طور معين للموجة المفردة وهي مقدار ثابت في الوسط الواحـــد وتساوي حاصل ضرب التردد f في الطول الموجـــي λ اي ان

$$c = f\lambda =$$ مقدار ثابت

وهذا المقدار الثابت c (سرعة الموجة) يعتمد على الثوابت الفيزياوية للوسط . فمثلا سرعة الموجة الطولية في عمود المائع (سائل او غاز) هي مقدار ثابت يتوقف على ثوابت الوسط K و ρ_0 اي ان

$$C = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}} \qquad (10-12)$$

وسرعة الموجة المستعرضة في سلك متوتر تحت شد معين هي مقدار ثابت يتوقف على ثوابت السلك F و μ اي ان

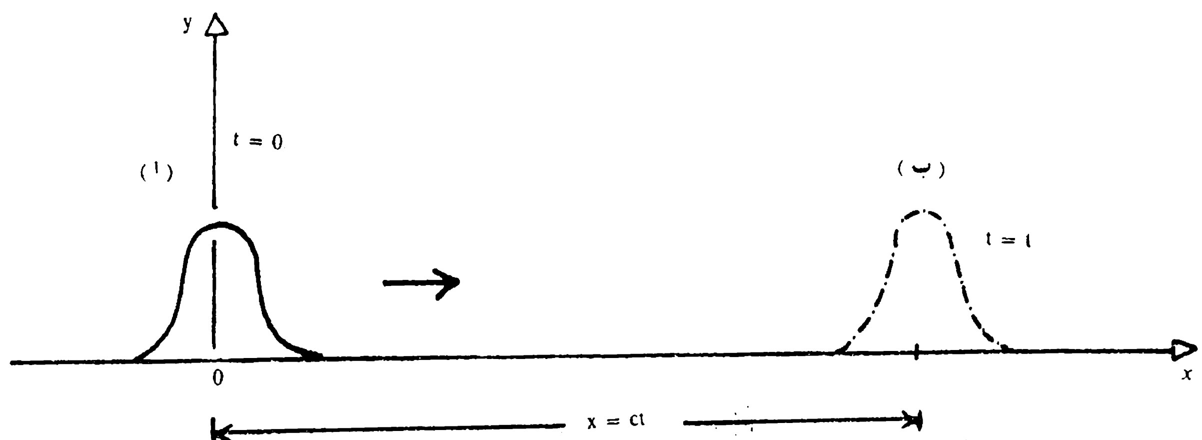
$$C = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \ldots(10-13)$$

ولاهمية توضيح مفهوم سرعة الطور (او سرعة الموجة) بطريقة تحليلية سنختار للسهولة موجة مستعرضة تنتقل في سلك طويل مشدود على طول المحور السيني x نفرض انه في لحظة معينة . ولتكن $t = 0$ يمكن تمثيل شكل الموجة (اي شكل الاضطراب الموضعي في السلك) بالمعادلة

$$y = f(x) \quad \text{في الزمن } t = 0 \qquad (10-14)$$

حيث y هي الازاحة المستعرضة للسلك عند x كما مبين في الشكـــل (3-10) واذا فرضنا انه بمرور الزمن تنتقل هذه الموجة على طول السلك دون ان يتغير شكلها وبعد مرور زمن t يكون الموجة قد انتقلت المسافة ct الى اليمين . حيث c هي مقدار سرعة الموجة . بفرض ثبوتها وبذلك يكون معادلة الموجة بعد مضي الزمن t هي

$$y = f(x - ct) \quad \text{في الزمن } t \qquad (10-15)$$



الشكل (3- 10) يبين شكل التشوه في السلك (في هذه الحالة نبضة) (أ) النبضة عند الزمن $t = 0$
(ب) النبضة عند الزمن $t > 0$ وقد تحركت الى اليمين مسافة $x = ct$

ان هذه المعادلة تعطي نفس الشكل الموجي حول النقطة $x = ct$ عند الزمن t كما كانت تعطيها المعادلة (14 – 10) حول $x = o$ عندما $t = o$ وفي الحقيقة ان هذه المعادلة تعتبر المعادلة العامة لاية موجة على اية شكل* تتحرك الى اليمين.

والان نفحص هذه المعادلة بصورة دقيقة. إذا اردنا ان نتابع جزءاً معيناً من حركة (او طور) الموجة مع مرور الزمن، فيجب ان نبحث عن قيمة خاصة للمتغير y (كأن نقول، قمة النبضة مثلاً) وفي هذه الحالة الخاصة تكون قيمة y ثابتة لانها تصف جزءاً معيناً من طور الموجة. اما من وجهة النظر الرياضية، فان هذا يعني اننا نبحث عن كيفية تغير x مع t عندما يأخذ المقدار $(x - ct)$ قيمة معينة ثابتة. وعند ثبوت قيمة $(x - ct)$ فان ذلك يعني انه بازدياد t يجب ان تزداد x حتى يظل المقدار $x - ct$ ثابتاً. وبالتالي فان المعادلة (15 – 10) تمثل في الواقع موجة تتحرك الى اليمين (اتجاه تزايد x).
اما اذا اردنا ان نمثل موجة تتحرك الى اليسار فاننا نكتب

$$y = f(x + ct) \quad \ldots (10 - 16)$$

حيث ان الموضع للطور الثابت $(x + ct)$ للموجة يتناقص بازدياد الزمن t. وهكذا يتضح انه يمكن بسهولة الحصول على سرعة طور معين للموجة. فلطور معين لموجة تتحرك الى اليمين يجب ان يتوفر الشرط التالي

$$x - ct = \text{مقدار ثابت} \quad \ldots (10 - 17)$$

وباجراء التفاضل ينتج ان

$$\frac{dx}{dt} = c \quad \ldots (10 - 18)$$

وبالتالي فان c هي سرعة طور الموجة. اما الموجة التي تتحرك الى اليسار فاننا نحصل بنفس الطريقة على سرعة طورها $(-c)$
وبنفس الطريقة تماماً يمكننا تطبيق نفس التحليل على الموجات الطولية.

* ان الشكل الخاص للموجة يتحدد بالدالة f. فعندما نقول ان y دالة في $x - ct$ نعني ان المتغيرين x و t يظهران فقط في التركيب $(x - ct)$ فمثلاً $\sin k(x - ct)$ او $\log(x - ct)$ هي دوال في $(x - ct)$ بينما $x^2 - c^2t^2 \ldots (x - ct)$ فليست كذلك.

4 – 10 سرعة المجموعة

لقد اقتصرت دراستنا لحد الان على التعامل مع الموجات الاحادية التردد (اي ذات الطول الموجي الثابت) ، وقد وجدنا في البند السابق ان الموجة المنفردة تتحرك بسرعة ثابتة في الوسط الواحد (غير المشتت) مهما كان طولها الموجي ومقدار هذه السرعة يتوقف على الثوابت الفيزياوية لذلك الوسط . وهذة السرعة (سرعة الموجة) في هذه الحالة هي نفسها سرعة تقدم الطاقة التي تحملها الموجة . اما في حالة التعامل مع عدد او مجموعة من الموجات ذات الاطوال الموجية المختلفة التي تتحرك آنياً في وسط ما ، وهذا ماهو شائع في معظم الحالات العملية ، فانه ينبغي التعامل مع السلوك الجماعي لجميع الموجات في آن واحد وعدم التعامل مع كل موجة على انفراد خاصة اذا كانت المجموعة تتحرك في وسط مشتت. ان بحث سلوك مثل هذه المجموعة من الموجات يقودنا الى النوع الثالث من السرع الذي سبق ان تطرقنا له في البند (11 – 10) وهو سرعة المجموعة .

وللسهولة فقط سنكتفي باعتبار مجموعة تتألف من موجتين تتحركان بنفس الاتجاه ولهما نفس السعة a والفرق بين ترددیها ω_1 و ω_2 مقدار ضيل ، ونفرض ان الموجتين هما

$$y_1 = a \sin(\omega_1 t - k_1 x)$$
$$y_2 = a \sin(\omega_2 t - k_2 x)$$

... (10 – 20)

وطبقاً لقاعدة التركيب ، فان التأثير المركب للموجتين يعطى بالمحصلة y حيث

$$y = y_1 + y_2 = a \sin(\omega_1 t - k_1 x) + a \sin(\omega_2 - k_2 x)$$

ومنها نحصل على

$$y = 2a \sin\left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) t - \left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right) x\right] \cos\left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) t - \left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right) x\right]$$

... (10 – 21)

ان حد الجيب يمثل موجة ترددها $\left(\frac{\omega_1 \quad \omega_2}{2}\right)$ تمثل المتوسط الحسابي للترددين الاصليين ω_1 و ω_2 وعددها الموجي $\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)$ يمثل المتوسط الحسابي لـ k_1 و k_2 وسرعة هذه الموجة هي

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2}$$

ولما افترضنا ان الفرق بين الترددين الزاويين ω_2 و ω_1 هو مقدار ضئيل وكذلك الفرق بين $k_2 k_1$ ، اي ان

$$\omega_1 + \omega_2 = \delta\omega$$

$$k_1 + k_2 = \delta k$$

لذلك فإن

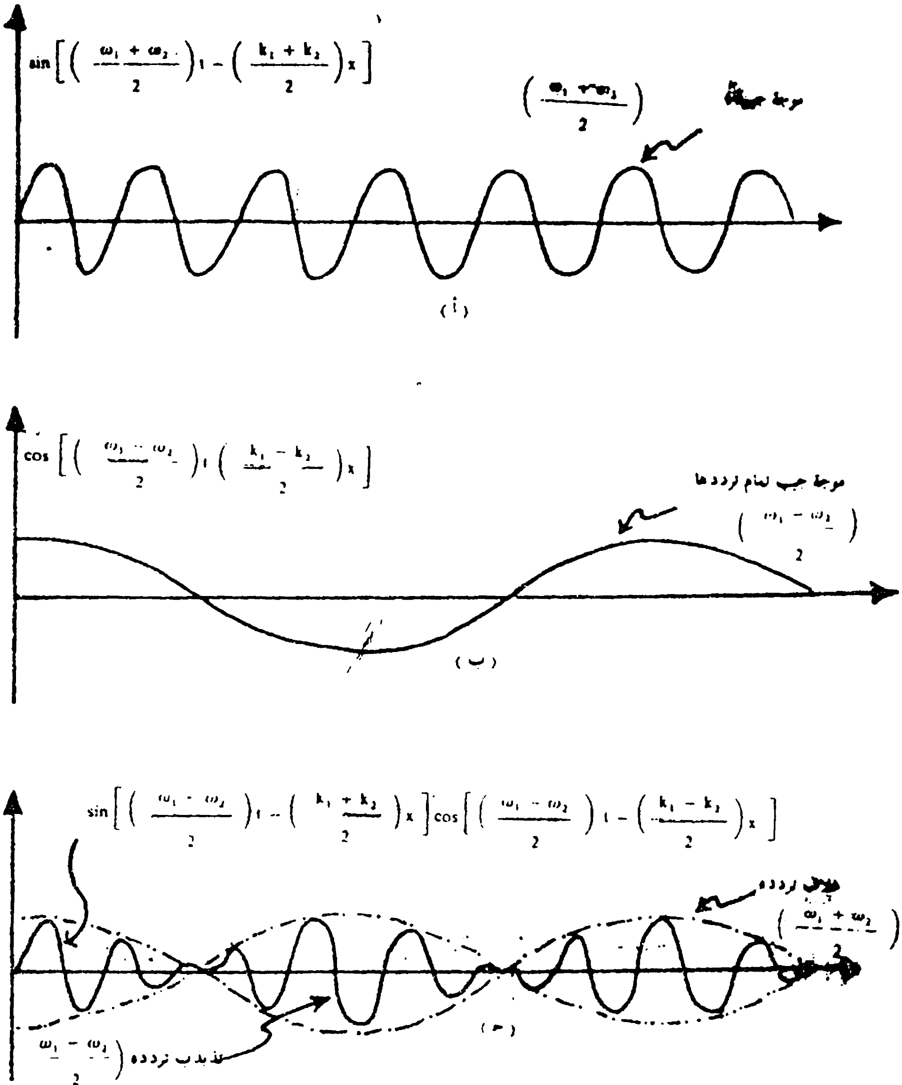
$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_1 - \frac{\delta\omega}{2} \quad \omega_2 + \frac{\delta\omega}{2}$$

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = k_1 - \frac{\delta k}{2} = k_2 + \frac{\delta k}{2}$$

وهذا يشير الى أن قيمة المتوسط الحسابي للترددين الاصليين يساوي الى درجة عالية من الدقة قيمة احد الترددين ، وكذلك فان قيمة المتوسط الحسابي للعددين الموجيين الاصليين يساوي الى درجة عالية من الدقة قيمة احد العددين الموجيين. وهذا يعني ان حد الجيب يمثل موجة جيبية طورها يماثل الى حد كبير طوري الموجتين الاصليتين. والشكل (4 — 10 أ) يبين الموجة الجيبية التي يمثلها حد الجيب في المعادلة (21 — 10) وحد الجيب تمام في المعادلة (21 — 10) يمثل موجة ترددها الزاوي $(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2})$ وعددها الموجي $(\frac{k_1 - k_2}{2})$ وسرعة هذه الموجة هي

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

إن هذا الحد يتغير مع كل من الزمن والمسافة ببطء أكثر مما هو في حد الجيب. والشكل (4 — 10ب) يبين الموجة التي يمثلها حد الجيب تمام
إن الشكل (4 — 10 جـ) يبين المنحني البياني للدالة (21 — 10) عند ثبوت الزمن t



الشكل (4- 10) يبين مجموعة موجية مركبة من موجتين (أ) يمثل حد الجيب في المعادلة (10 - 21) (ب) يمثل حد جيب التمام (جـ) يمثل الخط المتصل (وليس المتقطع) حاصل ضرب الحدين

وهذا المنحنـى يمكن الحصول عليه بضرب الاحداثيات الرأسية للحدين الجيب (أ) والجيب تمام (ب) مع بعضهما نقطة بنقطة ، فينتج المنحنـى المتواصل (جـ) الذي يظهر واقعاً داخل الغلاف المنقط. والغلاف المنقط هو في الحقيقة منحنـي الجيب تمام (ب) وصورته في المحور السيني x. ومما يجدر ملاحظته من تماثل الحدين في X و t في المعادلة (21 – 10) ان شكل المنحنـى البياني الناتج من رسم y مع t عند ثبوت X مشابه لما هو مبين في الشكل (4 – 10 جـ) الناتج من رسم X مع y عند ثبوت t ان تعاقب نمو وهبوط السعة مع الزمن يؤدي الى ظهور ظاهرة الضربات التي سبق ان درسناها بالتفصيل في فصل سابق. ومن الواضح ان الدالة (21 – 10) الممثلة بالمنحنـى البياني (جـ 4 – 10 تعني ان هناك تضمين لسعة الذبذبات العالية التردد وذات الطول الموجي القصير بوساطة غلاف طوله الموجي طويل وتردده منخفض ان موجتين او اكثر تركيب بهذا الاسلوب تعرف بمجموعة موجية. والآن سنفحص كيف تسلك المجموعة الموجية في الاوساط المشتتة وغير المشتتة.

في الاوساط غير المشتتة (اي الاوساط المادية التي لايتوقف فيها سرعة الموجة على الطول الموجـي) تكون سرعة الموجة c ثابتة وتعطـي بالعلاقة :

$$C = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

وهذا يعني ان الموجة الجيبية التي يمثلها الشكل (4 – 10أ) والموجة الجيب تمام التي يمثلها الشكل (4 – 10 ب) لهما نفس السرعة الموجية تماماً. وعلى هذا الاساس فان الغلاف المنقط الواطئ التردد والمنحنـى المتصل العالي التردد الذي يقع داخل الغلاف في الشكل (4 – 10 جـ) يتحركان الى اليمين مع مرور الزمن بنفس السرعة. وهذا يشير الى ان اي اشارة مركبة من خليط من الموجات تتقدم في وسط غير مشتت بسرعة ثابتة دون ان يصاحبها تغير في الشكل.

اما في الاوساط المشتتة حيث السرعة الموجية تتغير مع الطول الموجـي فان

$$\frac{\omega_1}{k_1} \neq \frac{\omega_2}{k_2}$$

ولذلك فان

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} \neq \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

وهذا يعني ان المنحنـى الداخلي المتصل في الشكل (4—10 جـ) يتقدم بسرعة ($\frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2}$) تختلف عن سرعة الغلاف المنقط ($\frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$) وهذا يشير الى ان اي اشارة مركبة من موجتين او اكثر يتغير شكلها مع مرور الزمن اثناء تقدمها في وسط مشتت بسبب اختلاف سرعة تقدم المنحنـى المتصل داخل الغلاف عن سرعة الغلاف.

وفي الغالبية العظمـى من الحالات التي تجابهنا في الفيزياء تكون سرعة المنحنـى المتصل ($\frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2}$) داخل الغلاف اكبر من سرعة الغلاف ($\frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$)، وهذا النوع من التشتت يدعـى بالتشتت العادي، ومثال على ذلك هو الموجات السطحية ذات الاطوال الموجية الهائلة في البحار حيث يمكن اهمال تأثيرات الشد السطحي.

وفي حالات نادرة في الفيزياء تكون سرعة الغلاف المنقط ($\frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$) اكبر من سرعة المنحنى المتصل ($\frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2}$) وهذا النوع من التشتت يدعى بالتشتت الشاذ. ومن الامثلة على ذلك هي الموجات المستعرضة في قضيب صلب والموجات الكهرومغناطيسية القريبة من مايسمى بحافة الامتصاص.

والان يجب ان نتفحص كمية ذات اهمية خاصة في الفيزياء، وهـي السرعة التي تتقدم بها الطاقة التي تحملها مجموعة موجية مركبة من موجتين او اكثر. وقد علمنا في حالة التعامل مع موجة منفردة ان الطاقة التي تحملها تتقدم بسرعة هي سرعة تقدم السعة العظمى والتي هي طبعاً سرعة الموجة (أو سرعة الطور). أما في حالة اي مجموعة موجية، ولتكن الحالة المبينة في الشكل (4—10 جـ). فنلاحظ ان سرعة تقدم السعة العظمـى

هي سرعة الغلاف المنقط ويتبع ذلك ان الطاقة تتقدم بسرعة الغلاف . وهذه السرعة تدعى بسرعة المجموعة وسنرمز لها بالحرف C_g لتمييزها عن سرعة الموجة c . وقد وجدنا ان الغلاف يتحرك بسرعة $\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \right)$ لذلك فأن

$$C_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \qquad (10-22)$$

وقد فرضنا في البداية ان ω_1 تختلف عن ω_2 و k_1 عن k_2 بمقادير ضئيلة لذلك يمكن كتابة العلاقة (10-22) بالشكل

$$C_g = \frac{\delta\omega}{\delta k}$$

وعندما تقترب قيمة δk من الصفر فعندئذ نحصل على .

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} \qquad ...(10-23)$$

ولكن لدينا

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \omega = 2\pi f$$

لذلك فأن

$$C_g = \frac{d(2\pi f)}{d(2\pi/\lambda)} = \frac{df}{d(1/\lambda)} = -\lambda^2 \frac{df}{d\lambda} \qquad ...(10-24)$$

وهذه المعادلة الهامة يمكن التعبير عنها بصيغ اخرى مفيدة وكما يلي : لدينا العلاقة

$$\omega = kc \qquad (10-25)$$

حيث ان c هي سرعة الموجة (ان الموجات المركبة التي تشكل المجموعة الموجية لها سرع مختلفة ولكن متقاربة مع بعضها في القيمة لذلك يمكن استخدام القيمة المفردة لـ c) .

وعندئذ نحصل على سرعة المجموعة بالصيغة :

$$C_g = \frac{d\,\omega}{dk} = \frac{d\,(kc)}{dk}$$

$$C_g = c + k\,\frac{dc}{dk} \qquad \ldots(10\text{-}26)$$

واذا عوضنا

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

في المعادلة (10-26) نحصل على

$$C_g = c + \frac{1}{\lambda}\,\frac{dc}{d(1/\lambda)}$$

ومنها نجد ان سرعة المجموعة بالصيغة

$$C_g = c - \lambda\,\frac{dc}{d\lambda} \qquad \ldots(10\text{-}27)$$

ولابد هنا ان نشير الى ان تسمية المجموعة الموجية غير مناسب تماما اذا كانت المجموعة مؤلفة من موجتين فقط اذ ان التسمية تكون افضل للمجموعة اذا كانت مؤلفة من عدد كبير من الموجات . ورغم ان هذه النتائج استخلصناها من تركيب موجتين فقط الا انها صحيحة تماماً لاي مجموعة مركبة من اي عدد من الموجات . فعندما يكون لدينا مجموعة مؤلفة من عدد كبير من الموجات فعندئذ نختار اقصر واطول موجتين من المجموعة ونتعامل معهما بنفس الاسلوب السابق ونتوصل الى نتائج تمثل بدقة كافية السلوك الجماعي للمجموعة الموجية . اما اذا كانت المجموعة مؤلفة من مالانهاية من الموجات فعندئذ نحتاج الى استخدام رياضيات متقدمة تشتمل على نظرية تحويلات فورير التي تقع خارج نطاق هذا الكتاب .

15 – 10 سرعة الموجات الصوتية في الاوساط المختلفة

ان الموجات الصوتية هي موجات طولية (اي موجات تضاغطية) في اي وسط مادي وان سرعة هذه الموجات c في الموائع (سائل او غاز) تعطى بالمعادلة

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \qquad \ldots(10\text{-}28)$$

حيث ان ρ هي كثافة المائع و K هو معامل المرونة الحجمي ويعطي بالعلاقة :

$$K = \frac{\Delta p}{\Delta V/V} \qquad \ldots(10\text{-}29)$$

حيث ان Δv هو مقدار التغير في الحجم V الذي يسببه تغير في الضغط قدره ΔP وفي الغازات التي تخضع لعملية كظيمة (ادياباتيكية) تكون

$$K = \gamma P \qquad \ldots(10-30)$$

حيث ان p هو ضغط الغاز و γ هي النسبة بين السعة الحرارية للغاز تحت ضغط ثابت الى السعة الحرارية للغاز تحت حجم ثابت وقيمة γ تعتمد على عدد درجات الحرية لجزيئ الغاز وهذا يعتمد بدوره على درجة تعقيد الجزيئ ، فالغازات الاحادية الذرة تكون قيمة $\gamma = 1.66$ والغازات الثنائية الذرة تكون قيمة $\gamma = 1.40$ والغازات الثلاثية الذرة تكون قيمة $\gamma = 1.29$. والهواء الجوي الذي معظم مكوناته غازات ثنائية الذرة تكون قيمة $\gamma = 1.40$.

لما كانت السوائل صعبة الانضغاط (K كبيرة) لذلك فأن سرعة الصوت فيها c كبيرة بالمقارنة مع سرعة الصوت في الغازات.

ان سرعة الموجات الطولية في المواد الصلبة تعتمد على ابعاد الجسم الصلب الذي تمر خلاله الموجة التضاغطية . ان مرورمثل هذه الموجة في اي وسط يحدث تضاغطاً في الوسط بنفس اتجاه انتقال الموجة كما يحدث تشوه مستعرض ، وهذا التشوه المستعرض

يصاحبه قوة قصية . ولما كان الوسط الصلب بخلاف الموائع (السوائل والغازات) يبدي مقاومة للقوى القصية او المماسية لذلك يحدث في الوسط الصلب موجات طولية بالاضافة الى الموجات المستعرضة . فأذا كان الجسم الصلب على شكل قضيب معدني رقيق محدود المقطع العرضي فأن تأثير التشوه المستعرض يكون معقداً جداً وغاية في الصغر ويمكن اهماله وعليه تكون سرعة الموجات الطولية C في القضيب الصلب هي

$$C = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad \ldots(10\text{–}31)\ldots$$

حيث Y هو معامل المرونة الطولي (معامل يونك) و ρ هي كثافة مادة القضيب اما في الاجسام الصلبة الممتدة فأن تأثير التشوه المستعرض لايمكن اهماله وعليه يجب ان نأخذ بالاعتبار كل من الموجتين الطولية والمستعرضة .

ان سرعة الموجات الطولية C_L في الجسم الصلب الممتد الى مالانهاية في جميع الاتجاهات تتوقف على معامل الصلابة n كما على معامل المرونة الحجمي K اي ان

$$C_L = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}n}{\rho}} \quad \ldots(10 - 32)\ldots$$

حيث ان ρ هي كثافة مادة الجسم الصلب ولدينا العلاقات بين معاملات المرونة .

$$n = \frac{Y}{2(1+\sigma)}$$

$$K = \frac{Y}{3(1-2\sigma)}$$

وبالتعويض n و K في المعادلة (32 – 10) نجد ان سرعة الموجات الطولية في الجسم الصلب الممتد هي

$$C_l = \sqrt{\frac{Y(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}} \qquad (10\text{-}33)$$

حيث ان σ هي نسبة بويسون وتساوي 0.25 لمعظم المواد الصلبة

وسرعة الموجات المستعرضة C_t في الاجسام الصلبة الممتدة تتوقف على معامل القص n اي ان

$$C_t = \sqrt{\frac{n}{\rho}}$$

ولكن

$$n = \frac{Y}{2(1+\sigma)}$$

لذلك فأن

$$C_t = \sqrt{\frac{Y}{2\rho(1+\sigma)}}$$

ان الموجات التضاغطية (الطولية) والموجات القصية المستعرضة يمكن ان تتقدم في الاوساط الصلبة الممتدة الى مالانهاية على شكل موجات مستوية اوكروية او اسطوانية

ان النسبة بين سرعة الموجة الطولية C_l الى سرعة الموجة المستعرضة C_t يمكن ايجادها بدلالة نسبة بويسون σ فقط

$$\frac{C_l}{C_t} = \sqrt{\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}} \qquad \ldots(10\text{-}35)$$

ولما كانت قيمة σ اقل من واحد لذلك نستنتج ان سرعة الموجة الطولية اكبر دائما من سرعة الموجة المستعرضة

ان سرعة الموجات التضاغطية في معظم المعادن المهمة تتراوح بين 4000 م/ثـا و 6000 م / ثا وفي بعض المواد ذات الصلابة العالية تكون السرعة اكبر. وهكذا يتضح ان سرعة الموجات الصوتية في المواد الصلبة اكبر بشكل ملحوظ مما هي في المواد السائلة . والغازية .

16 - 10 العوامل المؤثرة على سرعة الموجة الصوتية في الهواء

يعتبر الهواء واحدا من اهم الاوساط المادية لانتقال الموجات الصوتية وهناك جملة من العوامل المؤثرة على سرعة انتقال الموجة الصوتية في الهواء وهي

1 تأثير تغير الضغط على سرعة الصوت

ان سرعة تقدم الموجة الصوتية في الهواء لاتتأثر اذا تغير ضغط الهواء . وذلك لأن اي تغير في ضغط كتلة معينة من الهواء يولد تغيراً مقابلاً في حجم الهواء . اذا كان حجم الهواء V وكتلته m وعندئذ تكون كثافته ρ هي

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad (10-36)$$

وطبقاً لقانون بويل اذا كان لدينا كتلة معينة من الغاز تحت درجة حرارية ثابتة فان

$$pV = \text{مقدار ثابت} \qquad (10-37)$$

حيث p هو ضغط الهواء

وبتعويض V من (10-36) في (10-37) نحصل على

$$\frac{Pm}{\rho} = \text{مقدار ثابت}$$

او

$$\frac{P}{\rho} = \text{مقدار ثابت اخر}$$

وهذا يعني انه اذا تضاعف ضغط الغاز فأن كثافته تتضاعف ايضا وبذلك تبقى النسبة $\frac{P}{\rho}$ ثابتة . ولما كانت سرعة الصوت c هي

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

لذلك فأن سرعة الصوت في الهواء او اي غاز لاتعتمد على تغيرات الضغط بشرط بقاء درجة الحرارة ثابتة .

2 -- تأثير تغير درجة الحرارة على سرعة الصوت

لدينا سرعة الصوت في الهواء او اي غاز هي

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

ولكن المعادلة العامة للغاز (اذ كان مثالياً) هي

$$PV = \frac{m}{M} RT \qquad (10\text{-}38)$$

حيث m هي كتلة الغاز R الثابت العام للغاز و T درجة الحرارة المطلقة للغاز و M الوزن الجزيئي للغاز من هذه المعادلة نحصل على

$$p = \frac{m}{V} \frac{RT}{M} = \rho \ RT / M$$

نعوض في معادلة سرعة الصوت فنجد ان

$$c = \sqrt{\gamma RT / M}$$

ولكن γ و R و M ثوابت لاي غاز معين لذلك فأن

$$c = k \sqrt{T}$$

حيث K هو مقدار ثابت ويساوي $\sqrt{\gamma R / M}$

ولذلك فإن سرعة الصوت في أي غاز تتناسب طردياً مع الجذر التربيعي لدرجة الحرارة المطلقة لذلك الغاز.

وإذا فرضنا أن سرعة الصوت في درجة الصفر سيلزيوس هي C_0 فأن المعادلة (10−39)

$$C_0 = k\sqrt{273} \qquad \ldots (10\text{-}40)$$

وإذا فرضنا أن سرعة الصوت في درجة الحرارة t سيلزيوس هي C_t فأن المعادلة (10 − 39) تصبح

$$C_t = k\sqrt{273+t} \qquad (10\text{-}41)$$

وبقسمة (10-41) على (10-40) نحصل على

$$\frac{C_t}{C_0} = \sqrt{\frac{273+t}{273}} = (1+\frac{t}{273})^{1/2}$$

وبإهمال ... نحصل على

$$\frac{C_t}{C_0} = 1 + \frac{t}{546}$$

أو أن

$$C_t = C_0\ (1 + \frac{t}{546})$$

وإذا ... سرعة الصوت في درجة الصفر هي 332م/ ثا فإن

$$C_t = 332\ (1 + \frac{t}{546})$$

$$C_t = 332 + 0.61\ t$$

أي أن ... سرعة الصوت في درجة الصفر سيلزيوس بينما الحد ... الزيادة ... إذا ازدادت درجة الحرارة بمقدار t سيلزيوس.

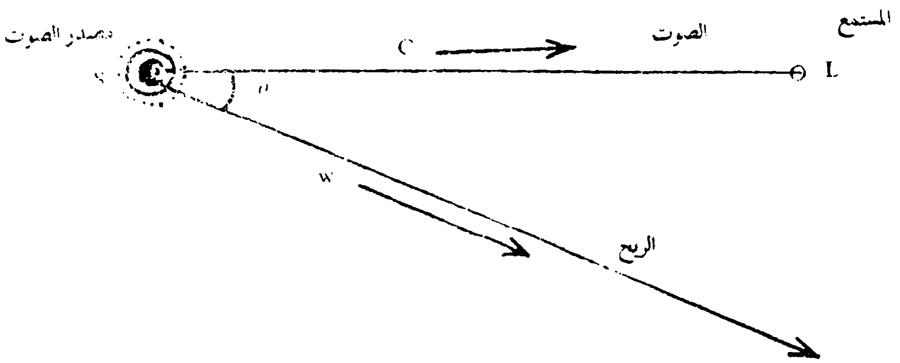
ومن ذلك نستنتج ان مقدار الزيادة في سرعة الصوت عندما تزداد [illegible]
واحد درجة سيلزيوس = 0.61 م/ ثا .

3 - تأثير تغير الرطوبة على سرعة الصوت

من المعلوم ان كثافة بخار الماء تحت الشروط القياسية من ضغط ودرجة حرارة تساوي 0.0008 غم / سم^3 ($= \frac{18 \text{ غم}}{22400 \text{ سم}^3}$) بينما كثافة الهواء الجاف تحت نفس الشروط هي 0.001293 غم / سم^3 ومعنى ذلك ان كثافة البخار أقل من كثافة الهواء الجاف . وعليه فان الهواء الرطب يجب ان تكون كثافته أقل من كثافة الهواء الجاف . ولما كانت سرعة الصوت تزداد كلما قلت كثافة الوسط الناقل فان سرعة الصوت في الهواء تزداد مع ازدياد رطوبته . على اعتبار ان قيمة γ ثابتة عملياً للهواء الجاف كما للهواء المشبع ببخار الماء .

4 - تأثير الريح على سرعة الصوت في الهواء

عندما تهب الريح بسرعة w بنفس اتجاه تقدم الصوت فان سرعة الصوت تزداد وتصبح محصلة سرعته $(c + w)$ ولكن اذا كانت الريح تهب باتجاه معاكس لاتجاه تقدم الصوت فان سرعة الصوت تقل وتصبح محصلة سرعته $(c - w)$
أما اذا كانت الرياح تهب باتجاه يصنع زاوية θ مع اتجاه انتقال الصوت كما هو مبين في الشكل (5 - 10)



الشكل (5 - 10) يبين اتجاه حركة الموجة الصوتية واتجاه حركة الريح

فان مركبة سرعة الريح باتجاه $w \cos \theta = SL$ ، وهذه المركبة تضاف الى السرعة c وعليه فان الصوت ينتقل بالاتجاه SL بمحصلة سرعة تساوي ($c + w \cos \theta$) ولذلك فان الصوت يتحرك اسرع اذا كانت الزاوية θ حادة . ويكون ابطأ اذا كانت الزاوية θ منفرجة . ولايكون للريح تأثير على سرعة الصوت اذا كانت $\theta = 90°$ أو عندما تهب الريح عمودية على اتجاه تقدم الصوت . اذا كانت الريح تهب بنفس اتجاه انتقال الصوت فان $\theta = 0°$ وبذلك تصبح سرعة الصوت $c + w$. اما اذا كانت الريح تهب بعكس اتجاه انتقال الصوت فان $\theta = 180°$ وبذلك تصبح سرعة الصوت ($c - w$)

5 - تأثير التردد الطول الموجي على سرعة الصوت

ان سرعة الصوت c في الهواء لاتعتمد على تردد الصوت f أو طوله الموجي λ وذلك لأن

$$c = f\lambda = \text{مقدار ثابت}$$

وتكون سرعة الصوت في الهواء ثابتة طالما كانت خواص الهواء ثابتة

6 - تأثير السعة على سرعة الصوت في الهواء

ان سرعة الصوت في الهواء لاتتوقف على السعة مالم تكن السعة كبيرة جداً . وفي الاصوات الاعتيادية حيث السعة صغيرة تكون سرعة الصوت ثابتة وهي سرعة الاعتيادية في الهواء . أما في حالة الاصوات الشديدة الناتجة من المدفعية أو الانفجارات حيث السعة كبيرة فان الصوت يتقدم بسرعة اكبر من سرعته الاعتيادية .

17 - 10 طرق ايجاد سرعة الصوت في الاوساط المختلفة

هنالك عدة طرق لقياس سرعة الصوت في الاوساط الغازية والسائلة والصلبة وسنكتفي بذكر اهم تلك الطرق ، ثم نشرح بالتفصيل الطرق العملية فقط ، تلك التي يمكن اجراؤها في المختبر .

1 – الطرق المباشرة لايجاد سرعة الصوت

وهذه الطرق ذات اهمية تاريخية وقد تطورت هذه الطرق منذ القرن السابع عشر حيث كانت المحاولات الاولى لايجاد سرعة الصوت بطريقة اطلاق [illegible] بعيدة وقياس الفترة الزمنية بين رؤية الومض وسماع الصوت بوساطة [illegible] توقيت. وبتقسيم المسافة التي يقطعها الصوت على الفترة الزمنية التي يستغرقها [illegible] قياس سرعته. وهذه السرعة تعتمد على الظروف الجوية والاخطاء الشخصية ولكن بعد تم قياس الفترات الزمنية التي يستغرقها الصوت لقطع نفس المسافة في اتجاهين متعاكسين وبذلك تم التخلص من الخطأ الناجم من حركة الهواء. وقد تمكن ريغنولت فيما بعد من تحسين هذه الطريقة وذلك باستخدام دائرة كهربائية تعمل على قياس الفترة الزمنية بين لحظة اطلاق المدفع ولحظة استلام الصوت وبذلك تمكن من تقليص الاخطاء البشرية المصاحبة للقياس. وقد تطورت الوسائل المستخدمة في هذه الطريقة وبذلك ازدادت دقتها، الا انها لم تكن عملية لأنها تحتاج الى مسافات طويلة في الهواء. وظروف جوية ثابتة.

2 – الطرق غير المباشرة لايجاد سرعة الصوت

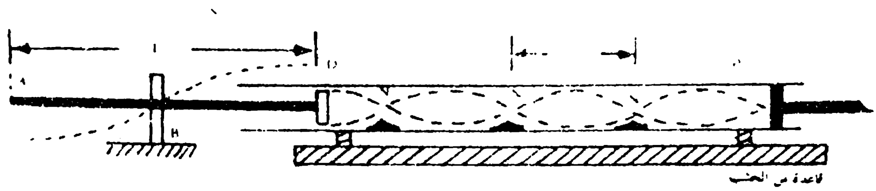
لقد تطورت وتعددت طرق ايجاد سرعة الصوت في الاوساط الغازية والسائلة والصلبة. وقد تميزت هذه الطرق بدقتها واهم هذه الطرق هي

أ – طريقة هب Hebb'sMethod
ب – طريقة بيرس Pierre's Method
جـ – طريقة كاي وشيرات Kaye and sherrat's Method
د – طريقة كندت Kundt's Method
هـ – طريقة الرنين في عمود الهواء

وفي هذا البند سنتطرق بالتفصيل لطريقة كندت لكونها طريقة مختبرية سهلة وصالحة لايجاد سرعة الصوت في المواد الغازية والسائلة والصلبة. كما سنتطرق الى طريقة انبوبة الرنين لايجاد سرعة الصوت في الهواء. اما الطرق الاخرى الاطلاق عليها مراجعة المصادر المثبتة في نهاية هذا الكتاب.

طريقة كندت

تمتاز هذه الطريقة بدقتها وسهولتها وبساطة اجهزتها. ويتألف جهاز كندت المبين في الشكل (6 – 10) من انبوبة زجاجية مفتوحة الطرفين T تدعى بانبوبة الرنين، طولها حوالي 2 متر وقطرها حوالي 5 سم وتستند على قاعدة من الخشب.
في الطرف الأيسر قضيب منتظم من المعدن او الزجاج AB طوله حوالي 1 متر وممسوك من منتصفه باحكام بمسند ثابت B ويثبت في نهاية القضيب الواقعة داخل الانبوبة قرص معدني دائري الشكل D. وقطر هذا القرص اقل بمقدار ضئيل من قطر الانبوبة لكي يسهل اهتزازه طولياً على امتداد الانبوبة دون ان يلامسها من الداخل. والطرف الآخر من الانبوبة يزود بمكبس متحرك P يسهل تحريكه داخل الانبوبة للتحكم بطول عمود الهواء المحصور بين المكبس P والقرص D. ويجب ان يكون الجهاز بكامله مثبت باحكام على مسند صلب لتجنب اي رجة او هزة عنيفة قد تؤدي الى كسر الانبوبة الزجاجية اثناء اجراء التجربة.



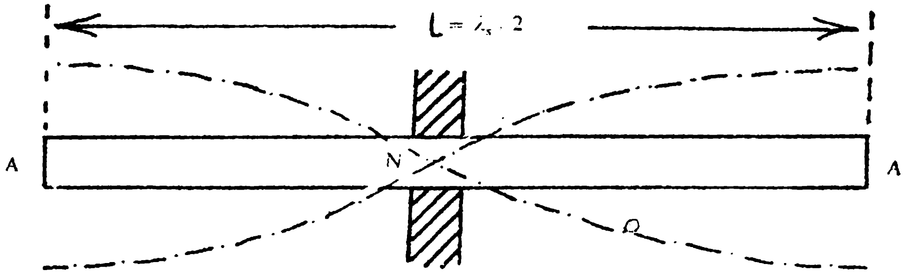
طريقة العمل

الانبوبة الزجاجية يجب ان تكون جافة تماماً ومثبتة بوضع افقي، يذر على امتدادها من الداخل طبقة رقيقة من مسحوق الليكوبوديوم الجاف (او اي مسحوق آخر خفيف كبرادة الفلين مثلاً).

يسحب القضيب على طوله من طرفه الحر. وذلك باستخدام قطعة قماش رطبة. واثناء جر القطعة الرطبة تحتك مع القضيب المعدني وتثير فيه اهتزازات طولية. ولما كان القضيب مثبتاً من مركزه فإن منتصفه يعتبر عقدة (تضاغط) بينما طرفاه الحران A يعتبران بطنين (تخلخلين) وبذلك يتشكل موجة طولية واقفة على طول القضيب كما هو مبين في الشكل (7 – 10) وعليه يكون طول القضيب L وهو يمثل المسافة بين

بطنين متتاليين مساوياً لنصف طول الموجة الصوتية λ_s خلال مادة القضيب اي ان

$$\lambda_s = 2l$$



الشكل (7 - 10) يبين موجة طولية واقفة في قضيب معدني طوله L العقدة N في منتصفه وفي طرفيه بطون A

عندما يهتز القضيب طولياً بتردد معين فإنه يسبب اهتزاز القرص D بنفس التردد. ويلاحظ انه عندما يهتز القضيب يبعث صوتاً ذا نغمة عالية. في أثناء ذلك يعدل موقع المكبس P ببطء حتى يبدأ مسحوق الليكوبوديوم بالاضطراب بشدة. وعندما يستمر القرص بالاهتزاز نلاحظ ان المسحوق يتجمع في مواقع متناوبة ومتباعدة بانتظام وهذه المواقع تدعى بالعقد N حيث تكون فيها حركة المسحوق اقل ما يمكن ويتحقق ذلك عندما يحدث الرنين بين القضيب وعمود الهواء اي عندما يتساوى التردد الطبيعي للقضيب مع التردد الطبيعي لعمود الهواء (أو المائع) المحصور بين المكبس P والقرص D وبذلك يتشكل مايعرف بالموجات الواقفة في عمود الهواء نتيجة تداخل الموجات المنبعثة من القرص المهتز مع الموجات المنعكسة من المكبس. والآن تقاس المسافة بين عدة عقد ومنها تحسب متوسط المسافة الفاصلة بين عقدتين متتاليتين ولتكن d وهذه المسافة تساوي نصف طول الموجة فيعمود الهواء الذي يهتز بتردد مقداره f وهونفس تردد القضيب. والآن نحسب سرعة الصوت في الاوساط الصلبة والسائلة والغازية.

(أ) سرعة الصوت في قضيب صلب

من الواضح ان المسافة d بين عقدتين متتاليتين في عمود الهواء داخل الانبوبة يساوي نصف طول الموجة الصوتية في الهواء λ_a اي ان

$$d = \frac{\lambda_a}{2}$$

واذا كانت سرعة الصوت في الهواء هي C_a وتردد f لذلك فان

$$C_a = f\lambda_a = 2fd \quad \dots (10-43)$$

ولما كان القضيب يهتز طوليا وفي منتصفه عقدة لذلك فان

$$L = \frac{\lambda_s}{2}$$

حيث λ_s يمثل طول الموجة الصوتية خلال القضيب واذا كانت سرعة الموجة الصوتية في القضيب هي C_s فعندئذ

$$C_s = f\lambda_s = 2fL \quad \dots (10-44)$$

يلاحظ من المعادلتين (43 - 10) و (44 - 10) ان التردد f مشترك وهذا هو الحال دائماً في ظاهرة الرنين . وعليه نحصل من هاتين المعادلتين على

$$f = \frac{C_s}{2L} = \frac{C_a}{2d}$$

واذا كانت سرعة الصوت في الهواء C_a معلومة . فعندئذ يمكن بقياس L و d ان نحسب سرعة الصوت في القضيب من العلاقة

$$C_s = C_a \frac{L}{d} \quad \dots (10-45)$$

وبهذه الطريقة يمكن حساب سرعة الصوت في اي قضيب صلب سواء كان مصنوعا من الحديد أو الزجاج أو الخشب أو النحاس.... الخ .

(ب) سرعــة الصوت فـي السائــل

في هذه الحالة تملأ الانبوبة الزجاجية بالسائل المطلوب ايجاد سرعة الصوت خلاله ويستبدل مسحوق الليكوبوديوم ببرادة الحديد الناعمة . ونجد المسافة بين عقدتين متتاليتين ولتكن d' فعندئذ

$$d' = \frac{\lambda_l}{2}$$

حيث λ_1 يمثل طول الموجة الصوتية في السائل. واذا كانت سرعة الصوت في ذلك السائل هي C_1 فان

$$C_1 = f\lambda_1 = 2fd' \quad \ldots (10-46)$$

ولما كانت سرعة الصوت في الهواء هي

$$C_a = f\lambda = 2fd \quad \ldots (10-47)$$

ومن المعادلتين الاخيرتين نحصل على

$$C_t = C_a \frac{d'}{d} \quad \ldots (10-48)$$

من هذه العلاقة نحصل على سرعة الصوت في السائل اذا كانت سرعة الصوت في الهواء معلومة.

(جـ) سرعة الصوت في الغاز

في هذه الحالة تفرغ الانبوبة من الهواء وتملأ بالغاز المطلوب ايجاد سرعة الصوت خلاله. ومرة اخرى يهتز القضيب طولياً واذا كانت المسافة بين عقدتين متتاليتين هي d فان

$$d^n = \frac{\lambda_g}{2}$$

حيث λ_g يمثل الطول الموجي للصوت في الغاز. واذا كانت سرعة الصوت في ذلك الغاز هي C_g فان

$$C_g = f\lambda_g = 2fd^n$$

ولما كانت سرعة الصوت في الهواء هي

$$C_a = f\lambda_a = 2fd^n$$

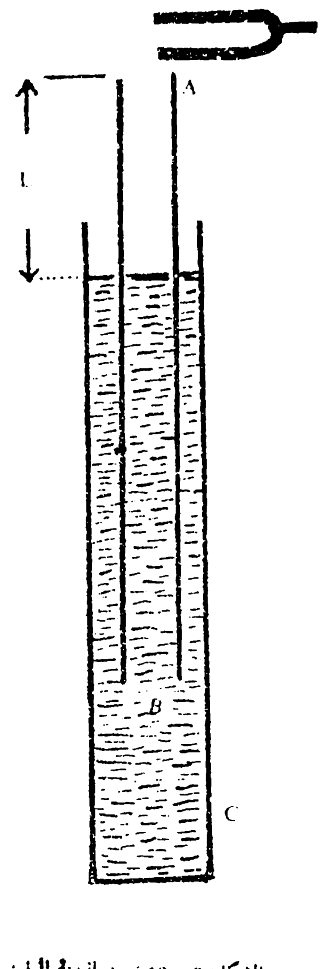
ومن المعادلتين الاخيرتين نحصل على

$$C_g = C_a \frac{d^n}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10\text{-}49)$$

ومنها يمكن مقارنة سرعة الصوت في الغازمع سرعته في الهواء. واذا كانت سرعة الصوت في الهواء معلومة فعندئذ يمكن حساب سرعة الصوت في اي غاز

طريقـــة انبوبـــة الرنيـــن

ان هذه الطريقة المألوفة هي من ابسط الطرق المختبرية لايجاد سرعة الصوت في الهواء في درجة حرارة المختبر . والجهاز الرئيسي في هذه الطريقة هو عبارة عن انبوبـــة متغيرة الطول ومغلقة من احد طرفيها . ويمكن الحصول على مثل هذه الانبوبة التي تدعى بانبوبة الرنين كما هو مبين في الشكل (8 - 10) حيث تمثل AB انبوبة مفتوحة الطرفين وتغمر جزئيا في ماء داخل الاسطوانة C ذات قطر داخلي اكبر من قطر انبوبة الرنين . اذا وضعت شوكة رنانة مهتزة بالقرب من الفتحة العليا لانبوبة الرنين فان رنينا



الشكل (8 - 10) يبين انبوبة الرنين AB

سوف يحدث عندما يتساوى تردد الشوكة الرنانة مع تردد عمود الهواء داخل انبوبة الرنين . وهذا لايتحقق الا عند اطوال معينة لعمود الهواء .وللحصول على هذه الاطوال نبدء عندما يكون طول عمود الهواء حوالي واحد سنتمتر . ونرفع الانبوبة ببطء من الماء والشوكة مستمرة بالاهتزاز حتى نحصل على اقصى شدة للصوت المسموع وهذا يشير

الى حصول الرنين الأول . وهذا يحدث عندما يكون طول عمود الهواء L فوق سطح

الماء يساوي $\frac{\lambda}{4}$ وهذا يقابل التردد الاساسي لاهتزاز عمود الهواء . وللحصول على

أفضل موقع للرنين يستلزم عناية خاصة وذلك لأن اهتزاز عمود الهواء عند هذا التردد بالذات يضمحل بشدة وبنفس الوقت فانه يستجيب بسهولة لأي تردد آخر فضلاً عن تردد الشوكة الرنانة اذا كان ذلك التردد مساوياً أومقارباً للتردد الاساسي . وعليه يجب ان يتكرر اجراء التجربة عدة مرات للحصول على متوسط طول عمود الهواء L واذا فرضنا أن الطول الموجي للنغمة التي تبثها الشوكة الرنانة هو λ فان

$$L = \frac{\lambda}{4}$$

واذا كان تردد الشوكة الرنانة هو f فان سرعة الصوت في الهواء C_a تعطى بالعلاقة :

$$C_a = f\lambda = 4fL$$

وعليه اذا كان تردد الشوكة الرنانة معلوماً امكن حساب سرعة الصوت في الهواء في درجة حرارة الغرفـة

ولكن هنا يجب ان نشير اننا في هذه الحسابات افترضنا ان بطن الموجة الواقفة تقع تماماً عند الطرف المفتوح للانبوبة . ولكن هذا الافتراض غير صحيح بالضبط . وفي الحقيقة فان البطن تقع خارج فتحة الانبوبة وعليه يجب ان نجري تصحيحاً مناسباً يأخذ بالاعتبار هذا الخطأ ومثل هذا التصحيح يدعى بالتصحيح الطرفي .

ولقد امكن تحديد مقدار هذا التصحيح بطريقة تجريبية . ووجد أن البطن تقع على بعد من الطرف المفتوح يساوي تقريباً 10 / 3 من قطر الانبوبة . فاذا رمزنا لمقدار التصحيح الطرفي بالرمز e ولقطر انبوبة الرنين D فان

$$e = 0.3\,D$$

وعليه يصبح الطول الفعلي (L') لعمود الهواء المقابل للتردد الاساسي هو

$$L' = L + e = L + 0.3\,D \quad .$$

وفي الواقع يمكن بسهولة التخلص كليا من التصحيح الطرفي في حساباتنا . وذلك بايجاد موقع الرنين الثاني في الانبوبة وهذا يقابل التردد التوافقي الاول . وبذلك نحصل في موقع الرنين الاول على

$$L_1 + e = \frac{\lambda}{4} \qquad \dots (10-50)$$

بينما في موقع الرنين الثاني نحصل على

$$L_2 + e = \frac{3}{4}\lambda \qquad \dots (10-51)$$

وبطرح المعادلة (10 – 50) من (10 – 51) نجد أن

$$L_2 - L_1 = \frac{\lambda}{2} \qquad \dots (10-52)$$

وهكذا نحصل على الطول الموجي للصوت الناتج من الشوكة الرنانة واذا علمنا مقدار ترددها امكن حساب سرعة الصوت في الهواء في درجة حرارة الغرفة

$$C_a = 2(L_2 - L_1)f \qquad (10-53)$$

ومن الواضح انه يمكن الحصول على مواقع عديدة للرنين عندما يكون الطول الفعال لعمود الهواء داخل الانبوبة مساويا لـ $\frac{\lambda}{4}$ ، $\frac{3\lambda}{4}$ ، $\frac{5\lambda}{4}$ . . الخ . وهذه تقابل على الترتيب التردد الاساسي والترددات التوافقية الاخرى .

18 – 10 الخواص الموجبة للصوت

ان الخواص الموجبة للصوت مألوفة ويسهل ملاحظتها في حياتنا اليومية بينما الخواص الموجبة للضوء تحتاج الى تجارب في غاية الدقة لاظهارها. واهم الخواص الموجبة للصوت هي :

1 – الانكسار
2 – الانعكاس
3 – التداخل
4 – الحيود
5 – الاستطارة

وسنستعرض باختصار شديد كل خاصية من هذه الخواص لتعذر تحليلها باسهاب في هذا الكتاب ويمكن لمن يروم التوسع بالاطلاع مراجعة المصادر.

انكسار الصوت

ان الموجات الصوتية تنكسر عندما تنتقل من وسط الى آخر بنفس اسلوب انكسار الموجات الضوئية. وهذا ناتج من اختلاف سرعة الصوت في الوسطين المختلفين. وفي الحقيقة عندما تتحرك موجة صوتية في وسط وتقابل وسط آخر فان جزءاً من الطاقة ينكسر في الوسط الثاني وجزء يمتصه الوسط ويتحول من طاقة صوتية الى طاقة حرارية والجزء الآخر ينعكس عائداً الى نفس الوسط الاول. ومقدار الجزء المنكسر يعتمد على الكثافة النسبية للوسطين وزاوية السقوط.

انعكاس الصوت

عندما تقابل الموجات الصوتية وسطاً ثانياً اكثر كثافة من الوسط الاول الذي كانت تتحرك فيه فإنها تغير اتجاهها وتنعكس الى الوسط الاول وبنفس الوقت فإنها تعاني تغيراً في

الطور. وتخضع الموجات الصوتية المنعكسة على نفس القوانين الاعتيادية للانعكاس في الموجات الضوئية . وشدة الموجة المنعكسة تعتمد على شدة الموجة الساقطة وزاوية السقوط وطبيعة السطح العاكس .

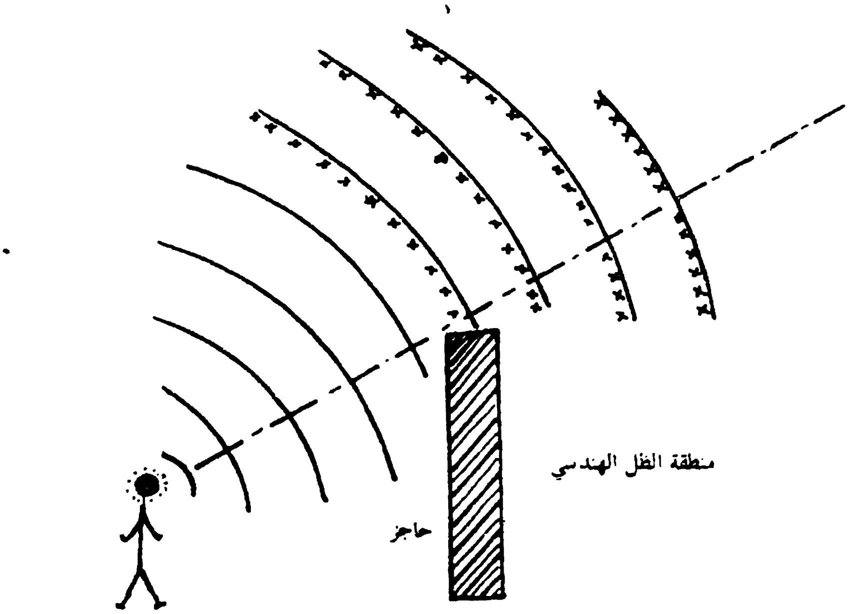
ان خاصية انعكاس الصوت تلعب دوراً هاماً في العديد من الظواهر المألوفة مثل : الصدى والترديد في البنايات ودحرجة الرعد والنغمة الموسيقية المسموعة عند وضع محارة قرب الاذن . وما الموجات الواقفة في أي جسم مهتز الا احدى نتائج الانعكاس .

تداخل الموجات الصوتية

هو التعبير العلمي الذي يشير الى التأثيرات الفيزيائية الناتجة عند تراكب موجتين أو اكثر . وقد تطرقنا للتداخل في فصل سابق وتعرضنا باسهاب للتداخل البناء والتداخل الهدام .

ظاهرة الحيود

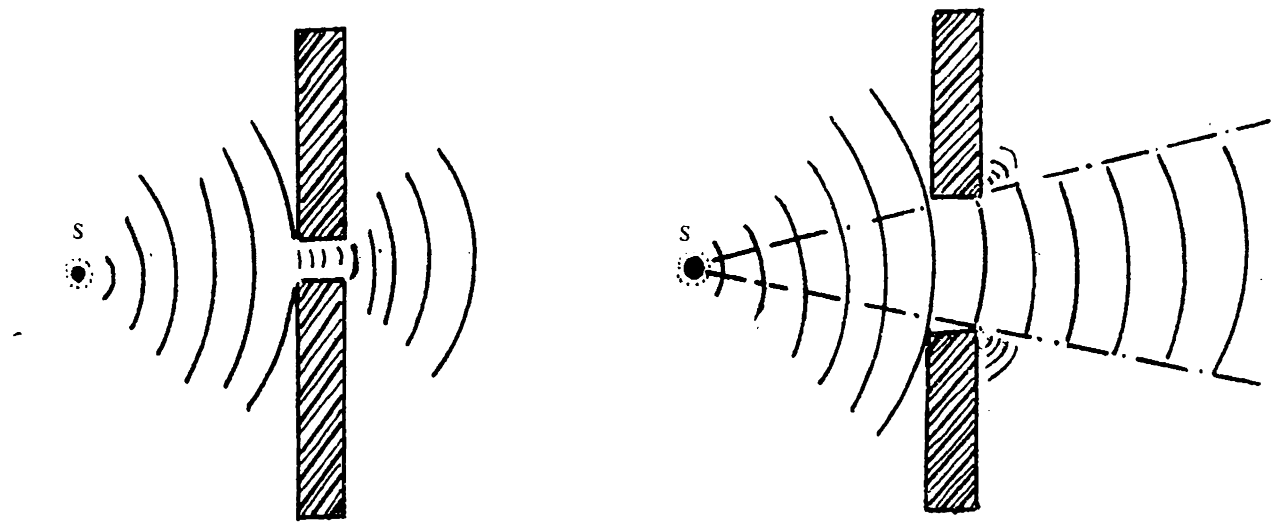
ان ظاهرة الحيود تعني ان الموجات الصوتية تنحني حول العوائق التي تعترضها وتدخل منطقة الظل الهندسي . وخير مثال على ذلك انك تسمع صوت شخص يناديك من وراء حاجز دون ان تراه وهذا يعني ان الموجات الصوتية تحيد عن مسارها عند حافة الحاجز وتدخل منطقة الظل الهندسي كما هو مبين في الشكل (9 - 10) وهكذا يتضح ان الموجات الصوتية تغير اتجاه تقدمها عندما تجابه عوائق في طريقها . وظاهرة الحيود مألوفة وواضحة في الصوت بينما هي ليست كذلك في الضوء بسبب ان طول الموجة الصوتية كبير جداً بالمقارنة مع طول الموجة الضوئية . وان مقدار الحيود (أو الانعطاف) حول العائق يزداد مع ازدياد الطول الموجي وعليه فان الصوت العالي التردد يعطي ظلاً اكثر حدة من الصوت المنخفض التردد وظاهرة الحيود يمكن تفسيرها على اساس قاعدة هويكنز التي تنص على ان اي نقطة في جبهة الموجة يمكن اعتبارها مصدراً جديداً لموجات ثانوية . ويمكن توضيح ذلك بوضع مصدر S امام حاجز فيه فتحة صغيرة ذات ابعاد صغيرة بالمقارنة مع الطول الموجي للصوت الصادر من المصدر . فنلاحظ ان الثقب الصغير يصبح مركز لموجات كروية كما هو مبين في الشكل (10 - 10 أ)أما اذا كانت



الشكل 9 10 يبين ظاهرة الحيود حول حافة حاجز

الفتحة كبيرة كما في الشكل (10 - 10 ب) فان الموجة تمر خلالها دون ان يعاني الجزء الاكبر من جبهة الموجة اي تغيير الا عند الحافات حيث يحيد جزء من الموجة نحو الظل الهندسي بمقدار يتوقف على ابعاد الفتحة والطول الموجي وقد وجد ان تأثير الحيود يقل كلما ازدادت ابعاد الفتحة بالمقارنة مع الطول الموجي .

ان موجات الصوت تحيد عن مسارها ولاتنعكس تماما عندما تسقط على جسم عاكس ابعاده مقاربة للطول الموجي .



(أ) (ب)

الشكل (10 - 10)

ظاهرة الاستطارة

ان الموجات الصوتية تستطير في جميع الاتجاهات عندما تسقط على عوائق ذات ابعاد صغيرة بالمقارنة مع الاطوال الموجية . وسعة الموجات المستطارة على مسافات بعيدة من العائق تتناسب طرديا مع حجم العائق وعكسيا مع مربع الطول الموجي وعلى هذا الاساس فان الموجات القصيرة تكون استطارتها اكبر من الموجات الطويلة .

19 – 10 ظاهرة دوبلر

لقد اكتشف العالم النمساوي كريستيان جون دوبلر (1803 - 1853) في عام 1842 ان لون اي جسم مضيء يجب ان يتغير اذا كانت هناك حركة نسبية بين الجسم والمشاهد . وقد تبين ان تردد الصوت يتغير اذا كانت هناك حركة نسبية بين المصدر والمستمع وتسري هذه الظاهرة ، التي تعرف باسم ظاهرة دوبلر ، على جميع الموجات بصورة عامة . وقبل ان نطبق هذه الظاهرة على الموجات الصوتية دعنا نعطي مثالا صوتيا مألوفا . اذا كنت واقفاً في محطة وكانت هناك قاطرة سريعة قادمة من بعيد نحو المحطة مطلقة صفيراً مستمراً فانك سوف تلاحظ ظاهرة غريبة وهي عدم ثبوت درجة صوت صفارة القاطرة . فتردد الصفارة اثناء اقترابها يبدو اعلى من ترددها عندما تكون قد مرت بك واخذت بالابتعاد . وهكذا يتضح ان درجة الصوت تتغير عندما تكون هنالك حركة نسبية بين المصدر والمستمع . فعندما يقترب المصدر من المستمع او عندما يقترب المستمع من المصدر او عندما يقترب كل منهما من الاخر فان درجة الصوت المسموع تبدو اعلى من درجة الصوت الفعلية التي يولدها المصدر . وبالمثل عندما يبتعد المصدر عن المستمع او عندما يبتعد المستمع عن المصدر ، اوعندما يبتعد كل منهما عن الاخر فان درجة الصوت المسموع تبدو اوطأ من درجة الصوت الفعلية التي يولدها المصدر ان تأثير دوبلر في الصوت غير متماثل . فعندما يقترب المصدر من السامع بسرعة معينة فان درجة الصوت تبدو مختلفة عن الحالة التي يقترب فيها السامع من المصدر بنفس السرعة .. أما في حالة الضوء فان تأثير دوبلر فهو متماثل .

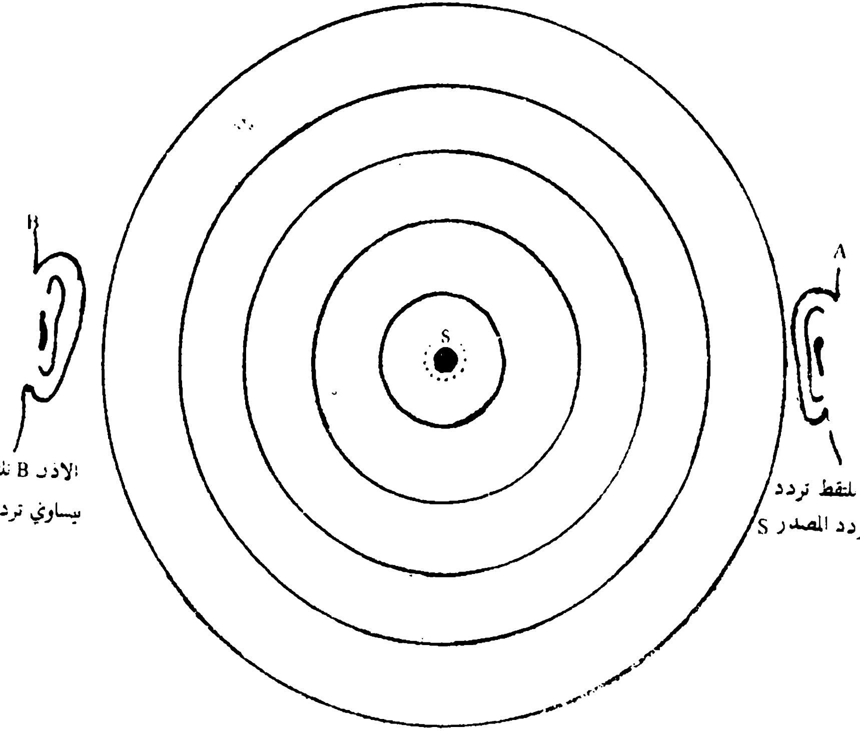
وبصورة عامة فان تأثير (أو ظاهرة) دوبلر في الصوت تحدث عندما يكون هناك حركة نسبية بين كل من :

(أ) مصدر الموجة الصوتية
(ب) الوسط الناقل للموجة
(ج) المستقبل الذي يستلم الموجة (المستمع)

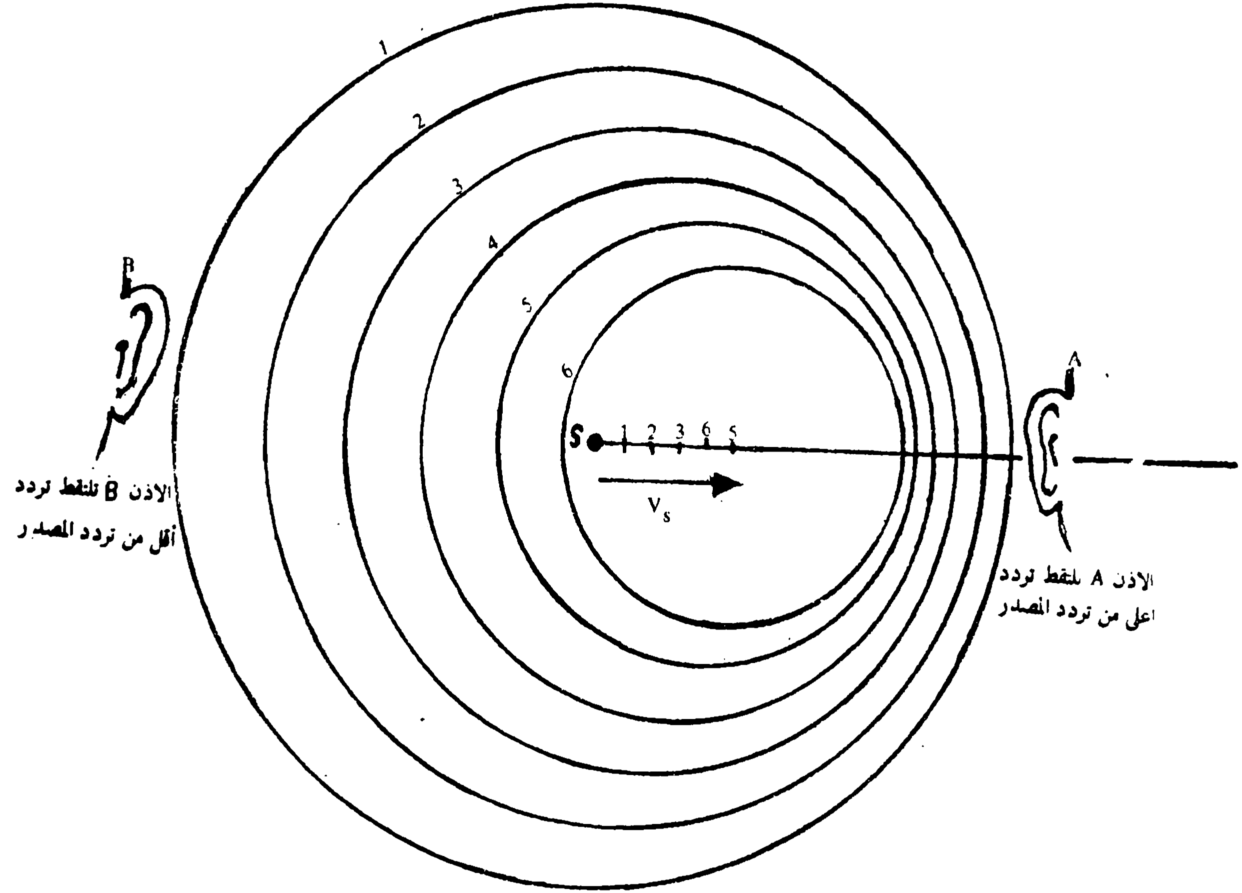
وسنحاول الآن ايجاد الصيغة العامة التي تحدد مقدار هذا التأثير في الصوت . وقبل الولوج في العملية التحليلية للاشتقاق يجدر بنا ان نوضح هذا التأثير وصفياً . لهذا الغرض نأخذ حالتين بسيطتين تماماً . في الحالة الاولى نفرض ان كل من المصدر والوسط والمستقبل في حالة سكون تامة . ونفرض ان المصدر الصوتي صغيراً جداً ويهتز بتردد ثابت ويبعث موجات كروية كما هو مبين في الشكل (11 - 10) .

لما كان الوسط الناقل للموجة الصوتية (الهواء عادة) متجانس وساكن فان الموجات المنبعثة من المصدر تنتقل بسرعة واحدة في جميع الجهات . ففي كل هزة للمصدر تتولد موجة ذات جبهة كروية يطابق مركزها موقع المصدر ذاته . وبتكرار الاهتزاز تتولد موجات كروية متتالية تفصلها مسافات متساوية وذات مركز مشترك . وفي هذه الحالة فان المستقبل A (أي السامع A) يستلم موجات صوتية بتردد يساوي التردد الحقيقي للمصدر S وكذلك المستقبل B (أي السامع B) يستلم موجات صوتية بتردد يساوي التردد الحقيقي للمصدر S . أي باختصار اذ تردد الصوت المسموع يساوي التردد الحقيقي للمصدر وبالتالي لا وجود لتأثير دوبلر في هذه الحالة . وفي الحالة الثانية نفرض ان المصدر (S) فقط متحرك بسرعة منتظمة V_s الى اليمين بينما الوسط والمستقبل في حالة سكون كما هو مبين في الشكل (12 - 10)

ويمكن تفسير هذا الشكل على النحو التالي : عندما يكون المصدر في لحظة ما في الموقع 1 فانه يبث موجة ذات جبهة كروية هي الجبهة 1 ، وفي اللحظة التالية بعد ان يتحرك المصدر الى الموقع الجديد 2 فانه يبث موجة كروية هي الجبهة 2 وهكذا تتولد جبهات كروية متعاقبة . وكل جبهة موجة هي عبارة عن كرة مركزها موقع المصدر الصوتي في لحظة انبثاق الموجة . ولما كان المصدر يتحرك نحو اليمين كذلك تتحرك مراكـــز الجبهات الكروية المتتالية التي يولدها المصدر . وهكذا يظهر ان جبهات الموجة المتحركة نحو اليمين تتقارب من بعضها بينما جبهات الموجة المتقدمة نحو اليسار تتباعد عن بعضها وبذلك فان السامع A الذي يقترب منه المصدر (S) يستلم موجات بتردد أعلى من التردد الحقيقي للمصدر . بينما السامع B الذي يبتعد عنه المصدر (S) يستلم موجات بتردد أقل من التردد الحقيقي للمصدر .



الشكل [illegible] مصدر صوتي S ثابت في وسط ساكن ويبث موجات صوتية بتردد ثابت. الشخصان الثابتان A و B يستلمان الصوت المنبعث من المصدر بنفس التردد



الشكل(2 1 – 10) يبين المصدر (s) يتحرك بسرعة منتظمة V_s نحو اليمين ويلاحظ ان مركز جبهة إي موجة كروية يطابق موقع المصدر في لحظة انبعاث تلك الموجة فالموقع (1) هو مركز الجبهة الكروية (1) والموقع (2) هو مركز الجبهة الكروية (2) وهكذا

ولايجاد العلاقة الكمية لتأثير دوبلر يجب ان نأخذ بالاعتبار جميع الحركات . حركة المصدر وحركة الوسط وحركة المستقبل . ولسهولة الاشتقاق فقط سنفرض ان جميع هذه الحركات منتظمة * وفي اتجاه واحد وتقع على امتداد خط مشترك مواز للمحور السيني كما هو مبين في الشكل (13 10)

نفرض أن :

سرعة مصدر الصوت (S) بالنسبة لمرجع ثابت (وليكن الأرض) = V_s

سرعة الوسط الناقل للموجة (أي سرعة الهواء) بالنسبة للارض = W

سرعة الصوت بالنسبة للهواء = C

سرعة السامع (O) أي سرعة المستقبل للموجة بالنسبة للارض = V_o

والآن سنعتبر فقط اجزاء من جبهات الموجة القريبة من الخط المشترك للحركة .

نفرض أن تردد المصدر (أي التردد الحقيقي للصوت الصادر من المصدر) هو f_s وان الزمن الدوري لاهتزاز المصدر هو T حيث $T = \frac{1}{f_s}$ بعد مرور فترة زمنية T من ارسال جبهة الموجة (1) فان المصدر يرسل جبهة الموجة (2) . وخلال هذه الفترة الزمنية T فان جبهة الموجة 1 تزاح بالنسبة للوسط بازاحة مقدارها CT ولكن الوسط ذاته يتحرك أيضاً بالنسبة للارض بسرعة w لذلك فان هذا يؤدي بنفس الوقت الى ازاحة جبهة الموجة (1) بالنسبة للارض بازاحة اضافية مقدارها WT . وعليه فان جبهة الموجة (1) تزاح بالنسبة للارض بمقدار $(C + W)T$ خلال الفترة الزمنية T وبنفس الوقت فان المصدر يزاح عن موضعه الأول خلال الفترة الزمنية بازاحة مقدارها V_sT الى الموضع الثاني حيث يرسل جبهة الموجة (2) . وعليه فان المسافة الفاصلة بين الجبهتين (1) ، (2) هي

$$(C + W)T - V_sT = (C + W - V_s)T$$

ولكن هذه المسافة تمثل بالضبط الطول الموجي λ أي أن

$$\lambda = (C + W - V_s)T \qquad \dots (10 - 54)$$

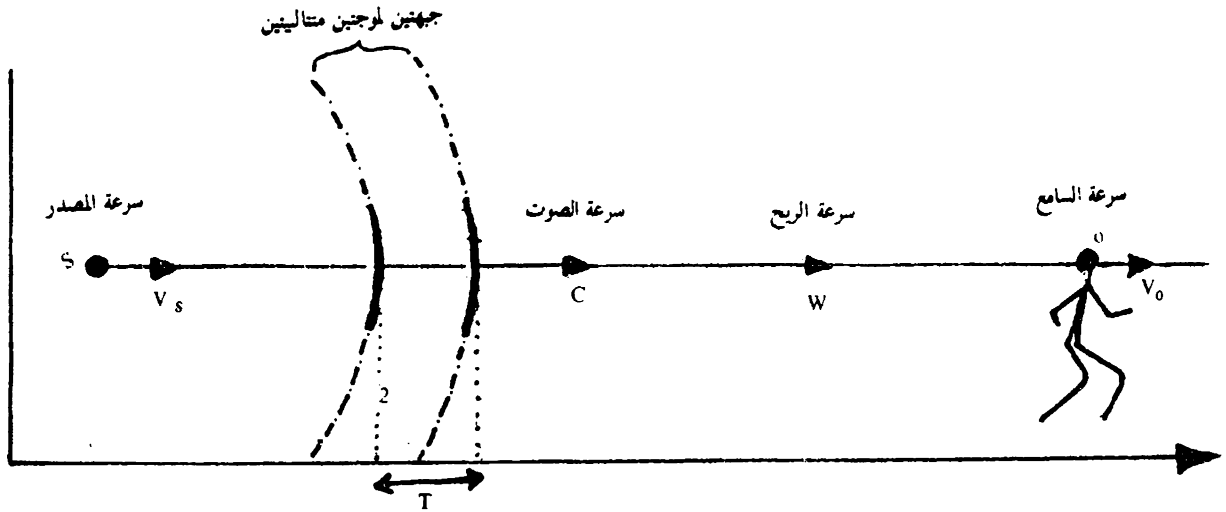
ولكن لدينا

$$T = \frac{1}{f_s} \qquad \dots (10 - 55)$$

لذلك فان

$$\lambda = \frac{(C + W - V_s)}{f_s} \qquad \dots (10 - 56)$$

* ان هذه الحركات يمكن ان تكون مختلفة في المقدار والاتجاه وفي هذه الحالة يكون الاشتقاق معقداً نوعاً ما . الا ان المهم في حالة انتظام مقدار السرعة واختلاف الاتجاه ان نأخذ بالاعتبار مركبات السرعة التي تقع على امتداد خط مستقيم مشترك



الشكل (13 - 10)يبين من وجهة نظر مرجع ثابت على الارض حركات المصدر والوسط والسامع في اتجاه واحد نحو الاتجاه الموجب على المحور السيني ويلاحظ هنا ان الاجزاء المستمرة من جبهات الموجة هي المهمة في حالة اشتقاق العلاقة العامة لتأثير دوبلر

ان اجزاء جبهات الموجة المتحركة في الاتجاه الموجب على امتداد المحور السيني x والمقاسة بالنسبة للارض تتحرك بسرعة(C + W)ولكن سرعة المستقبل (أي السامع O) بالنسبة للارض هي V_0 لذلك فان سرعة جبهات الموجة بالنسبة للسامع هي

$$(C + W) - V_0 = C - (V_0 - W)$$

وينبغي ان نلاحظ هنا أنه يجب ان تكون سرعة الصوت C بالنسبة للوسط (الهواء) أكبر من سرعة السامع بالنسبة للوسط $(V_0 - W)$ وبذلك فان سرعة جبهات الموجة $[C - (V_0 - W)]$ بالنسبة للسامع ستكون موجبة القيمة دائماً . وهذا يعني أن جبهات الموجة ستصل السامع وتتحرك بالنسبة له بقيمة مقدارها $[C-(V_0-W)]$ وبعد ان تصل جبهة الموجة (1) للسامع فان الزمن اللازم لوصول جبهة الموجة (2) للسامع هو T' . وهذا الزمن الفاصل بين وصول جبهتين متتاليتين المسافة بينهما λ . وهذا الزمن يمكن الحصول عليه من تقسيم λ من المعادلة (54 – 10) على السرعة $[C - (V_0 - W)]$ أي أن :

$$T' = \frac{1}{f_s}\left[\frac{C - (V_s - W)}{C - (V_0 - W)}\right] \qquad \dots (10-57)$$

فاذا اعتبرنا التردد الذي يستلمه السامع هو f_0 فان

$$f_0 = \frac{1}{T'} \qquad \dots (10-58)$$

وبذلك فان تردد الموجة الذي يصل اذن السامع هو

$$f_0 = f_s\left[\frac{C - (V_0 - W)}{C - (V_s - W)}\right] \qquad \dots (10-59)$$

وهذه هي العلاقة العامة لتأثير دوبلر في حالة أخذ جميع السرع في اتجاه واحد . ولكي تكون هذه العلاقة صحيحة يجب ان تكون سرعة الصوت C أكبر من سرعة المصدر بالنسبة للوسط $(V_s - W)$. وعندئذ لا يمكن ان يكون المقام صفراً وبذلك فان f_0 لا يمكن ان تكون مالانهاية ، وكذلك لا يمكن ان يكون المقام سالباً وبذلك فان f_0 لا يمكن ان تكون سالبة .

أما اذا كانت سرعة الوسط (أي سرعة الريح W) باتجاه معاكس فان اشارتها تنعكس وبذلك تصبح المعادلة الأخيرة كالآتي : ،

$$f_0 = f_s \left[\frac{C - (V_0 + W)}{C - (V_s + W)} \right] \qquad \ldots (10-60)$$

واذا كان الوسط ساكناً أي أن (W = 0) فان المعادلتين الأخيرتين يصبح شكلهما كالاتي :

$$f_0 = f_s \left[\frac{C - V_0}{C - V_s} \right] \qquad \ldots (10-61)$$

وطبيعي ان هذه المعادلة صحيحة اذا كانت جميع السرع في اتجـاه واحـــد

ان هذه المعادلات المعبرة عن ظاهرة دوبلر تعتبر صحيحة في الصوت ولكنها ليست كذلك في الضوء . ففي الصوت لا تكون الحركة النسبية للمصدر والمستمع هي التي تحدد التغير في التردد . فمن المعلوم أنه عندما تكون الحركة النسبية واحدة ، أي في حالة حركة المصدر فقط أو المستمع فقط بسرعة معينة فاننا نحصل على نتائج وصفية مختلفة تتوقف على ما اذا كان المصدر أو المستمع هو الذي يتحرك . وينتج هذا الفرق من أن V_0 ، V_s قد قيستا بالنسبة الى الوسط الذي تنتشر فيه الموجات الصوتية . كما وأن الوسط يحدد سرعة هذه الموجات في حين لا يحتاج الضوء الى وسط مادي ينتقل فيه ، كما وأن سرعة الضوء بالنسبة الى المصدر أو المشاهد هي دائماً مقدار ثابت ، بغض النظر عن حركة هذه الأجسام بعضها بالنسبة الى بعض . وهذا هو الفرض الأساسي في النظرية النسبية الخاصة . من هذا نجد أنه في حالة الضوء ليس هناك ما يؤدي الى تغيرات فيزياوية سوى السرعة النسبية للمصدر بالنسبة للمشاهد ، اذ أنه ليس هناك وسط مادي يستخدم كمرجع ثابت .

وأخيراً يجب الاشارة ان هناك حالات كثيرة يتحرك فيها المصدر في الوسط بسرعة تزيد عن سرعة طور الموجة في هذا الوسط . في هذه الحالات تتخذ جبهة الموجة شكل مخروط رأسه عند الجسم المتحرك . ومن الأمثلة المالوفة هو موجة المقدمة لقارب سباق في الماء ، والموجة الراجة الناتجة من حركة طائرة أو قذيفة تنطلق في الهواء بسرعة تزيد عن سرعة الصوت في هذا الوسط .

أمثلة محلولـة

مثـال (1 - 10)

وجد أن منسوب الشدة لمصدر صوتي قدرته W واط في نقطة قياس على بعد معين من المصدر هي L ديسيبل فاذا وضع مصدر صوتي آخر له نفس القدرة مجاوراً للمصدر الأول فما هو منسوب الشدة الناتج من المصدرين في نفس نقطة القياس ؟

الحـــل :

نفرض ان شدة الصوت في نقطة القياس الناتجة من تشغيل المصدر الأول = I لذلك فان منسوب الشدة هو

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

حيث I_0 هي شدة الصوت المرجعية .

وفي حالة تشغيل المصدر الثاني المماثل للمصدر الأول فانشدة الصوت في نفس نقطة القياس الناتجة من تشغيل المصدرين معا = 2I واذا فرضنا ان منسوب شدة الصوت في هذه الحالة = L' فعندئذ ينتج

$$L' = 10 \log \frac{2I}{I_0} = 10 \log 2 + 10 \log \frac{I}{I_0} \text{ ديسيبل}$$

ومنها نجد أن

$$L' = L + 3$$

وهذه النتيجة تشير الى أن هناك ارتفاع مقداره 3 ديسيبل في حالة مضاعفة الشدة .

مثـال (2 - 10)

احسب مقدار التغير في منسوب شدة الصوت عندما تزداد شدة الصوت 10^6 مرة بقدر شدته الاصلية ؟

الحـل

نفرض ان الشدة الاصلية للصوت = I_0

وان الشدة النهائية للصوت $= I = 10^6 I_0$ وعليه فان

الزيادة في منسوب الشدة $= 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} = 10 \log_{10} 10^6 = 60$ ديسيبل

مثـــال (3 - 10)

موجتين صوتيتين لهما نفس التردد وشدتيهما 10^{-16} , 10^{-12} واط لكل سم مربع . فما هو الفرق بين منسوبي شدتيهما ؟

الحـــل :

الشدتين المطلقتين للصوتين هما

$I_1 = 10^{-16}$ واط لكل سم مربع

$I_2 = 10^{-12}$ واط لكل سم مربع

منسوب شدة الصوت الاول $= 10 \log_{10} \frac{I_1}{I_0} = 10 \log \frac{10^{-16}}{I_0}$ ديسيبل

منسوب شدة الصوت الثاني $\frac{I_2}{I_0}$ $10 \log_{10}$ $10 \log \frac{10^{-12}}{I_0}$ ديسيبل

الفرق بين المنسوبين $= 10 \log \frac{10^{-16}}{I_0} - 10 \log \frac{10^{-12}}{I_0} = 10 \log \frac{10^{-12}}{10^{-16}}$

$= 10 \log 10^4 = 40$ ديسيبل

مثـــال (4 -- 10)

علل لماذا يستمع المشاهد الى نغمتين بترددين مختلفين ، عند تحريك شوكة رنانة مهتزة ومثبتة في صندوق الرنين بسرعة نحو حائط ثابت ؟

عندما تقع الشوكة الرنانة المهتزة بين المشاهد والحائط وتتحرك بسرعة منتظمة نحو الحائط على امتداد الخط العمودي على الحائط والواصل بين المشاهد والحائط . فان المشاهد يستمع نغمتين . احدى النغمتين تصدر عن الشوكة المبتعدة عن المشاهد ويكون ترددها اقل من التردد الحقيقي للشوكة واما النغمة الثانية فتنتج عن الموجات المنعكسة

من الحائط ويكون ترددها اعلى من التردد الحقيقي للشوكة . ويؤدي تداخل هاتين النغمتين الى تكوين الضربات .

مثـــال (5 - 10)

ماهو تردد الصوت الذي يلتقطه السامع في الحالات التالية :

(أ) اذا كان المصدر فقط يتحرك مرة مقترباً من المستمع ومرة مبتعداً عن المستمع .
(ب) اذا كان المستمع فقط يتحرك مرة مقتربا من المصدر ومرة مبتعدا عن المصدر
(ج) اذا كان كل من المصدر والمستمع يتحركان مرة يقتربان من بعضهما ومرة يبتعدان عن بعضهما .

الجـــواب

من المعادلة (59 10) يمكن استخلاص جميع الحالات المذكورة في هـذا السؤال .

(أ) اذا كان المصدر فقط يتحرك فهذا يعني ان سرعة الريح معدومة ($W=0$) وكذلك سرعة المستمع ($V_o = 0$) وبذلك تختزل المعادلة (59 - 10) الى التشكل التالي :

$$f_0 = f_s \left(\frac{C}{C - V_s} \right)$$

هذا في حالة حركة المصدر مقتربا من السامع الساكن .

اما في حالة حركة المصدر مبتعدا عن السامع الساكن فان التردد المسموع هـــو :

$$f_o = f_s \left(\frac{c}{c + V_s} \right)$$

اذن العلاقة العامة التي تسري في حالــة السامع الساكن بالنسبة الى الوسط والمصدر الـذي يتحرك فيه هي .

$$f_0 = f_s \left(\frac{c}{c \mp V_s} \right)$$

حيث تؤخذ الاشارة السالبة اذا كان المصدر يتحرك نحو السامع والاشارة الموجبة اذا كان المصدر يبتعد عن السامع . ويلاحظ ان سبب هذا التغير يرجع الى ان حركة المصدر في الوسط يقصر او يطيل [illegible] الموجة المنتقلة في الوسط .

(ب) اذا كان السامع فقط يتحرك فهذا يعني ان سرعة الريح معدومة($W = o$)وكذلك سرعة المصدر ($V_s = o$) وبذلك تختزل المعادلة(59 - 10)الى الشكل التالي :

$$f_o = f_s\left(\frac{c \; \bar{} \; V_o}{c}\right)$$

هذا في حالة حركة السامع مبتعدا عن المصدر الساكن .

اما في حالة حركة السامع مقتربا من المصدر فان اشارة V_o تصبح موجبة وبذلك يكون التردد المسموع هو .

$$f_o = f_s\left(\frac{c + V_o}{c}\right)$$

من ذلك يتضح ان العلاقة العامة التي تسري عندما يكون المصدر ساكنا بالنسبة الى الوسط ولكن السامع يتحرك فيه هي

$$f_o = f_s\left(\frac{c \pm V_o}{c}\right)$$

حيث تؤخذ الاشارة الموجبة اذا تمت الحركة نحو المصدر والاشارة السالبة اذا كانت الحركة بعيدا عن المصدر . ويلاحظ ان السبب في هذا التغير ينتج لان السامع يقطع موجات اكثر او اقل في الثانية نتيجة لحركته في الوسط .

(ج) اذا تحرك كل من المصدر والسامع في وسط ساكن فان($W = o$)وبذلك يكون تردد الصوت الذي يلتقطه السامع هو

$$f_o = f_s\left(\frac{c \pm V_o}{c \mp V_s}\right)$$

حيث تؤخذ الاشارتان العلويتان (+ في البسط ، − في المقام) اذا ما كان المصدر والسامع يتحرك احدهما نحو الاخر في الخط المستقيم الواصل بينهما ، والاشارتان السفليتان اذا كان المصدر والسامع يبعدان احدهما عن الاخر في الخط المستقيم الواصل بينهما.

$V_o = 0$
V_s

مثـــال (6 - 10)

شخص واقف ينتظر في موقف سيارات الاجرة لاحظ ان تردد النغمة المنبعثة مـن جهاز تنبيه سيارة متحركة بسرعة يهبط من 286 هيرتز الى 266 هيرتز عندما تمر بالقرب منه ، من هذه الملاحظة تمكن الشخص من حساب سرعة السيارة . علماً ان سرعـــة الصوت في الهواء هي 340 م /ثا . ما هي القيمة التي يحصل عليها الشخص لسرعـــة السيارة ؟

الحـــــل

عندما يكون الهواء ساكن فان (W = o) وعندئذ يكون التردد المسموع من قبل الشخص الواقف هو f_o حيث

$$f_o = f_s\left(\frac{c}{c \pm V_s}\right)$$

الاشارة الموجبة او السالبة تعتمد على ماذا كان المصدر المتحرك (في هذه الحالة السيارة) يبتعد او يقترب من الشخص الواقف .

في حالة اقتراب السيارة من الشخص فان التردد المسموع هو 284 هيرتز وفي هذه الحالة لدنيا .

$$284 = f_s\left(\frac{c}{c \quad V_s}\right) \qquad \ldots(1)$$

وفي حالة ابتعاد السيارة عن الشخص فان التردد المسموع هو 266 هيزتز رفي هذه الحالة لدينا

$$266 = f_s\left(\frac{c}{c + V_s}\right) \qquad \ldots(2)$$

وبتقسيم المعادلة (1) على المعادلة (2) ينتج

$$\frac{284}{266} = \frac{c + V_s}{c - V_s}$$

$$\frac{284}{266} = \frac{340 + V_s}{340 \quad V_s}$$

$$\frac{284}{266} = \frac{340 + V_s}{340 \quad V_s}$$

$$V_s = \frac{18}{550} \times 340$$

ومنها نجد ان سرعة السيارة هي

$V_s = 11.1$ م / ثا = 40 كلم

مثال (7 – 10)

قطاران يتحركان باتجاهين متعاكسين على سكتين متوازيتين. ويقتربان من راصد ساكن ، ويطلق كل منهما صافرته بتردد 350 هيرتز. احد القطارين يتحرك بسرعة 40 م / ثا. فما هي السرعة التي يجب ان يتحرك بها القطار الاخر لكي يسمع الراصد 5 ضربات في الثانية؟ علماً ان سرعة الصوت في الهواء هي 340 م / ثا.

الحل

عندما يتحرك اي مصدر صوتي تردده f_s نحو راصد ساكن فان تردد الصوت الذي يسمعه الراصد هو f_o حيث

$$f_o = f_s \left(\frac{c}{c - V_s}\right)$$

فاذا فرضنا ان احد القطارين يتحرك نحو الراصد بسرعة V_s1 والآخر بسرعة V_s2 فعندئذ يكون التردد المسموع من القطار الاول هو

$$f_{o1} = f_s \left(\frac{c}{c - V_{s1}}\right) \qquad \ldots(1)$$

والتردد المسموع من القطار الثاني هو

$$f_{o2} = f_s \left(\frac{c}{c - V_{s2}}\right) \qquad \ldots(2)$$

نعوض في المعادلة (1) فنجدان

$$f_{o1} = 350 \left(\frac{340}{340 - 40}\right)$$

$$= 350 \left(\frac{350 \times 340}{300}\right)$$

$f_{o1} = 397$ هيرتز

لكن الراصد يسمع 5 ضربات في الثانية الواحدة لذلك فان f_{o2} يجب ان تكون اما 5 هيرتز أعلى او 5 هيرتز أقل من f_{o1} اي ان

$f_{o2} = 392$ هيرتز أو 402 هيرتز

نعوض في المعادلة (2) فنجد ان

$$392 (\quad) 402 = f_s \left(\frac{c}{c - V_{s2}}\right)$$

في حالة

$$392 = f_s \left(\frac{c}{c - V_{s2}}\right)$$

نعوض القيم المعلومة فنجد ان

$$392 = 350 \left(\frac{340}{340 - V_{s2}}\right)$$

ومنها نحصل على

V_{s2} 34.4 م ث

وفي حالة

$$402 = 350 \left(\frac{340}{340 - V_{s2}}\right)$$

ومنها نحصل على

$V_{s2} = 44$ م/ث

وعليه يجب ان تكون سرعة القطار الثاني اما 34.4 م/ثا أو 44 م/ثا لكي يسمع الراصد 5 ضربات في الثانية

مثال (10.8)

التردد الظاهري للصوت الذي يسمعه راصد ثابت هو ضعف التردد الحقيقي للمصدر الصوتي المتحرك نحو الراصد . احسب سرعة المصدر .

الحل :

اذا كان الهواء ساكنا والراصد ثابتاً والمصدر فقط يتحرك مقترباً من الراصد فان العلاقة التي ينبغي استخدامها هي

$$f_o = f_s \left(\frac{c}{c - V_s} \right)$$

حيث

$c = 340$ م / ثا

$f_o = 2f_s$

نعوض فنجد ان

$$2f_s = f_s \left(\frac{340}{340 - V_s} \right)$$

ومنها نحصل على

$V_s = 170$ م / ثا

مثال (10.9)

سيارتان A و B تتحركان بسرعة واحدة مقدارها 100 كلم / ساعة فاذا أطلقت السيارة A جهاز التنبيه بتردد قدره 1000 هيرتز . أحسب التردد الظاهري الذي يسمعه ركاب السيارة B في (أ) حالة اقتراب السيارتين من بعضهما على نفس الخط المستقيم (ب) حالة ابتعاد السيارتين عن بعضهما على نفس الخط المستقيم الواصل بينهما ؟

الحـــل

(أ) عندما تقترب السيارتين من بعضهما نستخدم العلاقة :

$$f_B = f_A \left(\frac{c + V_B}{c - V_A} \right)$$

حيــث

$c = 340$ م / ثا

$V_A = 100$ كلم / ساعة $= 27{\cdot}8$ م / ثا

$V_B = 100$ كلم / ساعة $= 27{\cdot}8$ م / ثا

$f_A = 1000$ هيرتز

نعوض فنجد أن

$$f_B = 1000 \left(\frac{340 + 27{\cdot}8}{340 - 27{\cdot}8} \right)$$

ومنها نحصل على

$f_B = 1178.1$ هيرتز

(ب) عندما تبتعد السيارتين عن بعضهما نستخدم العلاقة :

$$f_B = f_A \left(\frac{c - V_B}{c + V_A} \right)$$

نعوض فنجد ان

$$f_B = 1000 \left(\frac{340 - 27{\cdot}8}{340 - 27{\cdot}8} \right)$$

ومنها نحصل على

$f_B = 848{\cdot}8$ هيرتز

أسئلة

10 - 1 ميز بين التعريف الفسلجي والتعريف الفيزياوي للصوت ؟

10 - 2 ماهو مدى الترددات المسموعة ؟ وهل هذا المدى ثابت لجميع الاشخاص ؟

10 - 3 ماأسم الامواج التي ترددها (أ) أقل من 20 هيرتز (ب) اعلى من 20000 هيرتز ثم بين كيف تحصل على مثل هذه الترددات .

10 - 4 هل يستطيع السامع أن يشخص ويحدد اتجاه اي مصدر صوتي بين مجموعة من المصادر تعمل سوية بالقرب من بعضها ؟

(مفتاح الاجابة : ان للاذن البشرية القدرة على تمييز أي مصدر صوتي وتحديد اتجاه ذلك المصدر بدقة عالية من خلال فرق شدة الصوت في الاذنين الناتج من اختلاف المسافة وظاهرة الحيود وكذلك من فرق الطور للصوت الواصل في زمنين مختلفين للاذنين) .

10 - 5 عرف قانون وبر - فيخنر . ثم بين أهميته العملية ؟

10 - 6 ماالفرق بين الشدة والعلو ؟ وماهي العلاقة بينهما ؟

10 - 7 ماالفرق بين التردد والدرجة ؟ وهل هناك علاقة بينهما ؟

10 - 8 ماالمقصود بنوعية الصوت ؟ وماهي العوامل التي تحدد نوعية الصوت

10 - 9 مامدى شدة الصوت المسموع ؟ وهل يتوقف ذلك على التردد ؟

10 - 10 ماهي الخواص التي تميز بين اصوات المرأة والرجل والطفل ؟

10 - 11 هل الاذن البشرية اكثر حساسية للتغيرات في التردد أم في الشدة ؟ ناقش كيف تتغير حساسية الاذن مع التردد ومع الشدة ضمن المدى المسموع ؟

10 - 12 وضح السبب الفيزياوي الذي يجعل درجة صوت النساء اعلى من درجة صوت الرجال .

10 - 13 هل تعتمد درجة الصوت على (أ) علو الصوت (ب) نوعية الصوت

10 - 14 وضح لماذا تعتبر النغمة الموسيقية المسموعة التي يصاحبها توافقيات متعددة أغنى واعذب من النغمة النقية الاحادية التردد ؟

10 - 15 ماهو تأثير دوبلر ؟ وضح على وجه الدقة هل يعني هذا التأثير تغيير في تردد المصدر المصوت أم تغيير في تردد الصوت المسموع ؟ ثم بين كيف يحدث هذا التغيير في التردد

10 - 16 هل لقاعدة دوبلر تأثير على درجة الصوت المسموع ؟

10 - 17 كيف تميز بين صوتين لهما نفس العلو والدرجة وصادرين من مصدرين مختلفين ؟

10 - 18 ماهي الصفات التي تمكننا من التميز بين النغمات المنبعثة من الالات الموسيقية المختلفة ؟ واذا كانت هذه النغمات لها نفس الشدة والتردد فهل يمكن ان نميز بين هذه النغمات ؟ وضح بالتفصيل

10 19 ناقش تاثيركل من حركة (أ) السامع (ب) المصدر (ج) الوسط في احداث ظاهرة دوبلر

10 - 20 من المعلوم ان الشوكة الرنانة اذا ضربت ضربة خفيفة فانها تولد نغمة اساسية احادية التردد بينما اذا ضربت بشدة فانها تولد توافقيات بالاضافة الى التردد الاساسي . فاذا كان لديك مجموعة من الشوكات الرنانة المتماثلة تماماً فهل بامكانك ان تجعلها تصدر اصواتاً تتميز باختلاف كل من العلو والدرجة والنوعية ؟ وضح ذلك .

10 - 21 بين كيف يمكن أن تحدد قيمة كل مما يأتي :

1 - الشدة

2 - العلو

3 - الدرجة

4 التردد

5 - النوعية

ثم وضح فيما اذا كانت القيمة تحدد بالقياس الفيزياوي أم بالتقدير الذاتي (أي التقدير الشخصي للسامع ذاته) .

10 22 عرف البيل . الديسيبل ؟

10 23 ماهي الاسباب المبررة لاستخدام الديسبيل كوحدة للقياس في الصوتيات ؟

10 - 24 هل الديسيبل وحدة قياس مطلقة ام نسبية ؟ اذكرذلك . ثم بين عند اي تردد تؤخذ القيمة المرجعية لضغط الصوت أوشدة الصوت . ثم وضح لماذا

10 - 25 ماهوالضجيج ؟ هل يمكن اعتبار الصوت الموسيقي ضجيجاً ؟ متى يمكن ذلك

10 27 وضح لماذا يسمع الشخص لضربات عندما يركض بين صافرتين تبثان نغمات لها نفس التردد ؟

10 - 28 قاطرة تنطلق بسرعة اطلق سائقها صافرتها وضح كيف تختلف درجة صوت الصافرة التي تسمعها انت عن الدرجة التي يسمعها السائق في الحالات التالية

(أ) اقتراب القاطرة منك
(ب) ابتعاد القاطرة عنك
(ج) وقوف القاطرة

29 - 10 ماهو التصحيح الطرفي في انبوبة الرنين ؟ وما هي العوامل التي تحدد مقـداره

30 - 10 ماهو التردد الاساسي في عمود الهواء المحصور داخل انبوبة رنين (أ) مفتوحـة الطرفين (ب) مسدودة الطرفين (ج) أحد الطرفين مفتوح والآخر مسـدود .

31 - 10 عدد انواع المصادر الصوتية في الفيزياء

32 - 10 وضح بالتفصيل كيف تميز بين صوتين احدهما ينبعث من البيانو والآخر ينبعث من العود في حالة عزف الآلتين نفس النغم ؟

33 - 10 اصطف طابور طويل من الجنود على خط مستقيم وكانت المسافات الفاصلـة بين الجنود منتظمة وقرع بالقرب من الجندي الاول في الصف طبل بضربات منتظمة بمعدل 30 مرة في الدقيقة :

هل يصل صوت قرع الطبل في وقت واحد لجميع الجنود ؟

ب) اذا طلب من جميع الجنود بالقيام والقعود بالتتابع مع وقع ضربات الطبل فما هو توقعك لشكل المنحنى الناتج من حركة رؤوس الجنود.

(ج) هل يمكن ان يحدث ان جنديان أو اكثر يقومان ويقعدان في نفس اللحظة الزمنية ؟كيف تفسر ذلك

(د) اذا شوهد اثنان من الجنود يقومان ويقعدان سوية والمسافة بينهما 720 متراً، فما هي سرعة الصوت في الهواء ؟

34 - 10 ما هـي العوامل التي تؤثر على سرعة الصوت في الهواء ؟

35 - 10 عدد طرق ايجاد سرعة الصوت في الجوامد والسوائل والغازات ، ثم اشرح هذه الطرق بالتفصيل

36 - 10 هل تتوقف سرعة الصوت في الجوامد على ابعاد الجسم الصلب . وضح ذلك

37 - 10 وضح بالتفصيل مفهوم :

(أ) سرعة الطور
(ب) سرعة المجموعة
(ج) سرعة الجسيم

وماهي العلاقة بين هذه السرع

38 - 10 عرف الوسط المشتت للموجة ؟ وبين اهميته بالنسبة لسرعة المجموعة .

39 - 10 وضح مفهوم كل من ظاهرتي الحيود والاستطارة ؟

40 – 10 (أ) ماهي الموجة الراجة ؟ وضح كيف تحدث

(ب) ماهو وجه الشبه بين الموجة الراجة واشعاع سيرينكوف (مفتاح الاجابة : ان الموجة الراجة تتكون من حركة جسم في مائع بسرعة تزيد عن سرعة الصوت في ذلك المائع بينما اشعاع سيرينكوف يتكون من موجات ضوئية تصدر عن جسيمات مشحونة تتحرك في وسط مادي شفاف بسرعة تزيد عن سرعة طور الضوء في ذلك الوسط).

مسائل

10 – 1 ان اقل تغير في منسوب شدة الصوت يمكن للاذن البشرية ان تكشفه هو واحد ديسيبل. فما هو مقدار التغير في شدة الصوت الذي يقابل هذا المنسوب؟

10 – 2 احسب التغير في منسوب شدة الصوت اذا تغيرت قدرة الصوت في المذاع من 25 ملي واط الى 250 ملي واط.

10 – 3 احسب مقدار التغير في منسوب الشدة عندما تزداد شدة الصوت 50 مرة بقدر الشدة الاصلية.

10 – 4 عندما تتحرك شوكة رنانة مهتزة بسرعة عالية نحو جدار، فان ضربات يمكن سماعها من تداخل الصوت الساقط على الجدار مع الصوت المنعكس منه. احسب تردد هذه الضربات اذا كان تردد الشوكة 512 هيرتز وتقترب نحو الجدار بسرعة 300 م/ثا. اعتبر ان سرعة الصوت في الهواء 330 م/ثا.

(الجواب : 0.3 لكل ثانية)

10 – 5 لاحظ شرطي المرور اثناء الواجب ان سائق احدى السيارات قد تجاوزت سرعة سيارته الحد المسموح به وهو 70 كيلو متر في الساعة، وذلك من خلال اكتشافه ان تغيراً مقداره 20 هيرتز في نغمة جهاز التنبيه الذي تردده الحقيقي 128 هيرتز قد حدث عندما مرت السيارة من امامه؟ فهل كان تقدير الشرطي صحيحاً؟

(الجواب : نعم)

10 – 6 شوكتان رنانتان A و B تهتزن بنفس التردد 1000 هيرتز، والشخص C يتحرك من A الى B. فما هي السرعة التي يجب ان يتحرك بها لكي يسمع 10 ضربات في الثانية.

(الجواب 1.68 م/ثا)

10 – 7 اديرت شوكة رنانة مهتزة مربوطة في طرف خيط طوله 1.8 متر في مسار دائري بمعدل دورتين في الثانية. احسب نسبة اعلى تردد الى اقل تردد يسمعه الشخص الذي يقع في نفس مستوى دوران الشوكة.

(الجواب 1.15)

8–10 احسب التردد الظاهري لصوت صافرة قاطرة تقترب من راصد ساكن بسرعة 10 م/ثا. علماً ان التردد الحقيقي لصوت الصافرة هو 500 هيرتز.

9–10 برهن انه عندما يبتعد مصدر مهتز من راصد ساكن بسرعة تساوي سرعة الصوت فان التردد الظاهري للاهتزاز يصبح نصف التردد الحقيقي.

10 – 10 صاروخ موجه يصفر خلال حركته في الهواء مولداً نغمة ترددها 600 هيرتز. يقترب من هدفه بسرعة 0.85c م/ثا حيث c هي سرعة الصوت احسب التردد الظاهري للصوت الناتج من الصاروخ كما يسمعه الناس قرب الهدف.

(الجواب 4000 هيرتز)

11 – 10 قاطرة تتحرك بسرعة 60 كلم في الساعة تطلق صافرتها صوت تردده 500 هيرتز. ويسمع صوت الصافرة سائق عربة تتحرك بسرعة 40 كلم في الساعة. فما هو التردد الظاهري للصوت المسموع عندما.

(أ) يتحركان في اتجاهين متعاكسين ولكن يقتربان من بعضهما

(ب) يتحركان في اتجاهين متعاكسين ولكن يبتعدان عن بعضهما

(ج) يتحركان في نفس الاتجاه وتكون العربة امام القاطرة

(د) يتحركان في نفس الاتجاه وتكون العربة وراء القاطرة

12 – 10 موجتان تتحركان سوية في نفس الوسط هما

$$y_1 = A \sin(5x - 10t)$$
$$y_2 = A \sin(4x - 9t)$$

حيث x تقاس بالمتر و t بالثانية

(أ) اكتب معادلة واحدة تعبر عن تركيب الموجتين.

(ب) ماهي سرعة المجموعة

(ج) ماهي المسافة بين النقاط التي عندها تكون السعة معدومة في الموجة المركبة

13 – 10 ان حركة المويجات ذات الطول الموجي القصير (أقل من 1 سم) في الماء يتحكم بها الشد السطحي. وسرعة الطور لمثل هذه المويجات تعطى بالعلاقة

$$c = \left(\frac{2\pi T}{\rho \lambda} \right)^{1/2}$$

حيث T يمثل الشد السطحي و ρ كثافة الماء.

برهن ان سرعة المجموعة لاضطراب مؤلف من عدد من الموجات التي اطوالها قريبة من λ تساوي $3c/2$ ثم وضح ماذا تعني هذه النتيجة بالنسبة لمجموعة من المويجات تتحرك سوية على سطح الماء .

14 (10) برهن ان سرعة المجموعة c_g ترتبط مع سرعة الموجة c بالعلاقة

$$C_g = C - \lambda \frac{dc}{d\lambda}$$

ثم وضح ماذا تعني الحالات الآتية

(أ) $C_g = C$ (ب) $C_g > C$ (جـ) $C_g < C$.

المراجع العربية :

1 - ف . بوش
اساسيات الفيزياء
ترجمة : د . سعيد الجزيري و د . محمد امين سليمان
دار ماكجروهيل للنشر 1977

2 - ابراهيم ابراهيم شريف
الفيزياء (1)
منشورات الراتب للابحاث الجامعية – بيروت 1983

داڤيد هاليداي و روبرت رزنك
الفيزياء لطلبة العلوم والهندسة
ترجمة : د . محمد صلاح الدين عبد السلام
د . مراد بطرس عطية
د . عبد العزيز علي محمد
الناشر : المكتب المصري الحديث للطباعة والنشر – القاهرة – ١٩٧٠

المراجع الأجنبية

1 – D.A. Davies
Waves Atoms and Solids
Longman and New York. 1978

2 – C.L. Dym and E.S. Ivey
Principles of Mathematical Modeling
Academic Press 1980

3 – H.J. Pain
The Physics of Vibrations and Waves
John Wiley and sons Ltd.
2nd Edition 1980

4 – R.H.Rat dall
An introduction To Acoustics
Addison – Wesley 1951

5 – R.W.B. Stephens and A. E. Bate
Acoustics and Vibrational Physics
Arnold – London – 1966

6 – W.T. Thomson
Vibration Theory and Applications
George Allen and Unwin – London – 1969

7 – A.P. Frank
Vibrations and Waves
Nelson-London – 1971

8 – J.P.G Richards R.P. Williams
Waves
Penguin-U.K. – 1972

9 – W.W. Seto
Acoustics
Schaum s Outline Series
Mc Graw Hill 1971

10 – R.L. SAIHGAL
A Text Book of Sound
S. CHAND- New Delhi 1973

11 – N. Subrahmanyam and Brij LaL
A Text book of Sourd
Vikas Publishing house – India – 1983

12 – Hugh D. Young, Fundamentals of waves, Optics, and Modern physics, 2nd. Edition, Mc Graw – Hill – 1976.
13 – B.L. Theraja, A Text Book of Engineering physics, 10th. Editions India 1983.
14 – B. J. Kohli ,Mechanics and properties of Matter, Ist edition, Delhi, 1972.
15 – Robert M. Elsberg and Lawrence S. lerner, physics Foundations and Applications, Combined Volnme, McGraw – Hill, 1982.

قائمة المصطلحات العلمية

Glossary

A

Abnormal	شاذ
Abscissa	البعد السيني (على المحور السيني)
Absolute	مطلق
Absolute Zero	الصفر المطلق
Absorption	امتصاص
Acceleration	تعجيل (تسارع)
accurate	مضبوط
Acoustics	صوتيات (علم الصوت) أوسمعيات
Acoustic method	الطريقة الصوتية
Across	عبر
Active	فعال
Acute	حادة
Adhesion	تلاصق
Adiabatic bulk modulus	معامل المرونة الحجمي الكظيم او معامل المرونة الحجمي الاديباتيكي
Adiabatic demagnetization	ازالة المغنطة تحت حرارة ثابتة
Adiabatic Compressibility	الانضغاطية الاديباتيكية
Adiabatic Process	عملية اديباتيكية (اوعملية كظيمة) اوعملية تتم تحت حرارة ثابتة
Air	هواء
Air draughts	تيارات هوائية
Algebra	الجبر
Alternating	متناوب (متبادل)
Alternating Current	تيار متناوب
Alternating Voltage	فولتية متناوبة
Ammeter	أميتر (جهاز لقياس التيار الكهربائي)
Amplification	تضخيم (للموجة)
Amplifier	مضخم

Amplitude	سعة ذبذبة
Amplitude distortion	تشويه السعة
Amplitude modulation	تضمين السعة
Analysis	تحليل (للنتائج والحقائق التجريبية)
Angle	زاوية
Angular	زاوي
Angular frenquency	تردد زاوي
Angstrom (Å)	انكستروم (وحدة قياس = ١٠
Antinode	بطن الموجة
Apparent	ظاهري
Apparatus	جهاز – ادوات – عدة
Application	تطبيق
Applications	تطبيقات
Approach	اقتراب
Arbitrary	اختياري . تحكمي
Area	مساحة
Architecture	هندسة معمارية
Assumption	فرضية
Atom	ذرة
Atmosphere	جو
Attempt (trial)	محاولة
Attraction	تجاذب (جذب)
Attract	يجذب
Attenuation	توهين [illegible]
Attention	انتباه (اهتمام
Audibility threshold	حد السماعية
Audible	مسموع
Audio frequency	تردد سمعي
Average	متوسط (معدل)
Axis	محور

B

Background	خلفية
Band	نطاق – حزمة
Base	قاعدة
Beam	حزمة
Binomial	ذو حدين (كمية جبرية ذات حدين)
Beats	ضربات (دقات)
Blow	يهب
Boltzman Constant	ثابت بولتزمان
Boundary	حد ، حافة
Bulk modulus	معامل المرونة الحجمي
Boyle's Law	قانون بويل

– C –

Carbon	كاربون (فحم)
Cell	خلية – عمود
Celsius Scale	مقياس سيلزيوس (لدرجة الحرارة)
Centigrade Scale	المقياس المئوي
Center	مركز
Characteristics	مميزات
Charle's Law	قانون شارل
Closed	مغلق
Coefficient	معامل
Collision	تصادم
Component	مركبة
Composition	
Compressibility	انضغاطية
Compression	انضغاط
Concept	مفهوم

Condensation	**تكاثف (تكثيف)**
Conservation of energy	**حفظ الطاقة**
Conductivity	**توصيل**
Condition	**شرط**
Conductor	**موصل**
Constant	**ثابت**
Constant – Pressure Specific heat	حرارة نوعية (تحت ضغط ثابت)
Constant – Volume Specific heat	(حرارة نوعية) (تحت حجم ثابت)
Conclusion	استنتاج
Coil	ملف
Copper	نحاس
Cosine function	دالة جيب تمام
Critical	حرج
Critical damping	تضاؤل حرج – مضاءلة حرجة
Coordinates	احداثيات
Crystal	بلورة
Crystaline	متبلور
Continuous	مستمر او متواصل
Current	تيار
Current (electric...)	تيار كهربائي
Current (alternating...)	تيار متناوب
Current (Continuous...)	تيار متواصل
Curve	منحني
Cycle	دورة
Cyclic	دوري
Cylinder	اسطوانة
Carrier	ناقل (حامل)
cavity	تجويف
Centre	مركز
Chamber (room)	حجرة (غرفة)

Complex tone	نغمة معقدة
Components	مركبات
Concave	مقعر
Condenser	مكثف (متسعة)
Cone	مخروط
Constructive	بنائي (بناء)
Control	تحكم – سيطرة
Convergence	تجمع – تقارب
Conversion	تحويل
Convex	محدب
Core	قلب (للشيء)
Cork	فلين
Correction	تصحيح
Cycle per second (c/s)	ذبذبة في الثانية (ذ / ث)
Cannon	مدفع

– D –

Dalton's law	قانون دالتون
Damage	تلف
Damped harmonic motion	حركة توافقية متضاءلة (او مضمحلة)
Damping	تضاءل – مضاءلة – اضمحلال
Damping factor	عامل المضاءلة ، عامل الاضمحلال
Damping ratio	نسبة المضاءلة
Data	معلومات – بيانات – قياسات
Datum	مستوى المرجع
Dead space	الفضاء الميت
Deafiness	صمم
Decay	تحلل – (انحلال)
Decrement	تناقص

Decrement (logarithmic...)	تناقص لوغارتمي
Decibel	ديسيبل (وحدة لقياس التحصيل او الكسب)
Deflect	ينحرف
Deflection	انحراف
Density	كثافة
Diameter	قطر (للدائرة.. الخ).
Differential	تفريقي (تفاضلي)
Diffraction	حيود
Dipper	غطاس
Directional	اتجاهي
Definition	تعريف
Disc	قرص
Discovery	اكتشاف
Dispersion	تشتت
Detector	كاشف
Destructive	هادم (مدمر)
Development	تطور (نمو)
Deviation (deflection)	انحراف
Device	أداة - آلة
Dissipation	تبديد
Distortion	تشويه
Diagram	مخطط
Displacement	إزاحة
Divergence	تفرق (انفراج)
Doppler effect	ظاهرة دوبلر
Drilling	ثقب - حفر
Diffusion	انتشار
Differenial equation	معادلة تفاضلية
Dimension	بعد (من أبعاد)

Discharge	تفريغ
Dissociation	تفكك
Distribution	توزيع
Disturbance	اضطراب
Double	ضعف (مضاعف)
Dry	جاف

— E —

Ear	أذن
Ear drum	طبلة الاذن
Earphone	مسماع
Echo	صدى
Edge	حافة
Elastic	مرن
Electric current	تيار كهربائي
Electrical	كهربائي
Electromagnetic	كهرومغناطيسي
Electromagnetic waves	موجات كهرومغناطيسية
Ellepsoid	بيضاوي (للشكل)
Emission	بث (انبعاث)
End	طرف (نهاية)
End Correction	تصحيح طرفي
Energy	طاقة
Efficiency	كفاءة
Electric circuit	دائرة كهربائية
Electron	الكترون
Ellipse	قطع ناقص
Emitter	باعث
Empirical	تجريبي
Energy band	حزمة طاقة

Energylevel	مستوى طاقة – منسوب طاقة
External	خارجي
Environment	بيئة
Equation	معادلة
Eustation tube	قناة السمع
Excitation	اثارة
Expansion	تمدد
Experiment	تجربة
Effective	موثر (او فعال)
Electric energy	طاقة كهربائية
Emit	يبعث (او ينبعث)
Enclose	يتضمن أو يحتوي
Energy in transit	طاقة عابرة (أو في حالة العبور)
Engine	آلة (ماكنة أو محرك)
Equal	يساوي
Equation	معادلة
Equation of state	معادلة الحالة
Equilibrium	توازن (إتزان)
Equilibrium constants	ثوابت الاتزان
Excess	زائد
Exchange	يتبادل

F

Field	مجال
Filter	مرشح
Force	قوة
Free	حر
Flow	جريان (أو إنسياب) أو سريان
Fluid	مائع (سائل أو غاز)
Fraction	كسر، جزء من الصحيح

Frequency	ذبذبة (اوتردد)
Friction	احتكـــاك
Function	دالــة
Fundamental	اساسي (اوجوهري)
Front	جبهة
Formula	صيغـــة
Fog	ضبـــاب
Focus	بــؤرة
Focusing	تركيــز (تجمع في بورة)

– G –

Gallery	رواق (بهو)
Gas	غـــاز
Gas Constant	ثابت الغاز
Gas mixture	خليط غازي (اومزيج غازي)
Gram	غرام
Graph	منحني بياني
Gravity	جاذبية
Glow	وميض (وهج)
Gradient	انحدار
Gravitional force	قوة الجاذبية الأرضية
Graduated	مدرج
Graduated Capillary tube	انبوبة شعرية مدرجة
Gravitation	الجاذبية (الأرضية)

– H –

Hammer	مطرق (داخل الآذن)
Harmonics	توافقيات
Haze	ضباب خفيف (سديم)
Hearing acuity	حدة سمع

Harmonic motion	حركة توافقية
Harmonic motion (damped ...)	حركة توافقية متضاءلة او مضمحلة
Heat	حرارة
Hertz	هيرتز (وحدة لقياس التردد)
Helmholtz resonator	مرنان هلمهولتز
Homogeneous	متجانس
Heat Capacity	السعة الحرارية
Heat Conduction	التوصيل الحراري
Hot	حار
Humidity	رطوبة
Hysterisis (magnetic)	التخلف المغناطيسي

– I –

Ideal gas	الغاز المثالي (او الغاز النظري)
Impurities	شوائب
Inertia	القصور الذاتي (الاستمرارية)
Inequality	تباين (او عدم تساوي)
Infinity	مالا نهاية (او اللانهاية)
Infinitesimal	متناهي الصغر
Initial	ابتدائي
Input	داخل (دخل)
Instantaneous	آني (لحظي او فوري)
Intensity	شدة
Internal	داخلي
Integration	تكامل
Instantaneous value	القيمة الآنية
Instrument	جهاز
Interval	فترة

infrasoincs	تحت سمعيات
instance (moment)	لحظته
intensity level	منسوب الشدة
interference	تداخل
inverse	عكس (مقلوب)
joule	الجول (وحدة قياس الطاقة)
kilogram	كيلوغرام
kinetic energy	الطاقة الحركية
kinetic theory of gases	النظرية الحركية للغازات
kilo cycle	كيلوسايكل (الف دورة)

— L —

Law	قانون
Length	طول
Line	خط
Linear	خطي
Linear function	دالة خطية
Limited	محدود
Liquid	سائل
Lines of force	خطوط القوة
Lissajous figures	اشكال ليساجو
Logarithmic decrement	تناقص لوغارتمي
Layer	طبقة
Light	ضوء
Listener	مستمع
Longitudinal	طولي
Loudness	علو
Loudspeaker	مكبر صوت

— M —

Matter	مادة
Measurment	قياس

Mechanical	ميكانيكي
Mechanism	ميكانيكية
Medium	وسط
Modulation	تضمين او تعديل (للموجة)
Moment	لحظة (عزم)
Magnet	مغناطيس
Mass	كتلة .
Maximum	النهاية العظمى ، الاقصى
Manometer	مانومتر
Material	مادة
Mean	معدل
Measure	يقيس
Metal	معدن
Mean free path	متوسط المسار الحر (اومعدل المسار الحر)
Mechanics	علم الميكانيك
Mechanical energy	الطاقة الميكانيكية
Microscopic	مجهري
Microscopic point of view	وجهة نظر مجهرية
Minimum	الأدنى ، النهاية الصغرى
Mixture	خليط
Modulus	معامل
Mole	مول
Molecule	جزئي اوجزيئة
Molecular weight	الوزن الجزيئي
M. K. S. system	النظام المتري للوحدات
Momentum	زخم (اوكمية الحركة)
Monoatmoic gas	غاز أحادي الذرة
Motion	حركة

— N —

Natural	طبيعي

Negative	سالب
Newton	النيوتن (وحدة قياس القوة)
Normal	اعتيادي
Nerve	عصب
Node	عقدة
Noise	ضجيج (او ضوضاء)
Normal dispersion	التشتت العادي
Negligible	مهمل

– O –

Open	مفتوح
Oscillator	مذبذب
Output	خرج (الاشارة الخارجة)
Overtone	نغمة توافقية (توافقه)
Ordinate	الاحداث الشاقولي او الرأسي او الصادي
Origin	نقطة الاصل
Oscillation	تذبذب – ذبذبة
Over damping	تضاءل شديد – مضاءلة شديدة

– P –

Parabola	قطع مكافيء
Path	مسار
Percentage error	النسبة المئوية للخطأ
Period	زمن دورة ، زمن ذبذبة
Phase	طور
Phenomenon	ظاهرة طبيعية
Plane	مستو
potential	جهد
Potential energy	طاقة الوضع – الطاقة الكامنة
Power	قدرة
Precise	دقيق
Prism	موشور

Proportion	تناسب
Proportional	تناسبي – متناسب
Pulse	نبضة
Parallel	متوازي – موازٍ
Particles	جسيمات (دقائق)
Photon	وحدة الكم الضوئي
Physics	فيزياء (علم الفيزياء)
Piezo -- electric	كهروضغطي (كهرو اجهادي)
Pitch	درجة أو طبقة الصوت
Primary	إبتدائي
Pressure	ضغط
Principle	قاعدة (مبدأ)
Problem	مشكلة (نقطة دراسة -- موضوع بحث)
Propagat	إنتقال (بالانتشار)

– Q –

Quartz	كوارتز
Quality factor	عامل النوعية – عامل الجودة
Quality	نوعية
Quantity	كمية
Quantum theory	نظرية الكم

– R

Rate of change	معدل تغير
Radiation	الاشعاع
Reference	مرجع
Relative	نسبي
Resistance	مقاومة
Resonance	رنين
Radian	زاوية نصف قطرية

Region	منطقة
Relaxation time	زمن الاسترخاء
response	إستجابة
Ripple	تموج
Root mean square value. (r.m.s.)	القيمة الفعالة
Range	نطاق – مدى
Rarefaction	تخلخل
Rate	معدل
Ray	شعاع
Reciever	مستقبل (مستلم)
Reception	إستقبال (استلام)
Reflection	إنعكاس
Refraction	إنكسار
Relation	علاقة

– S –

Scatte	إستطارة ، يستطير
Secondary	ثانوي
Section	مقطع
Sensitivity	حساسية (اجهزة)
Separation	فصل (انفصال)
Shift	تحول (يزحف)
Shock wave	موجة راجة (صادمة)
Signal	إشارة
Sine	جيب الزاوية
Sinusoidal	جيبي (تذبذب)
Sound	صوت (للاشياء / ، ظاهرة الصوت. علم الصوت)
Source	مصدر
Space	فضاء
Spectrum	طيف
Speed (velocity)	سرعة

Spherical	كروي
Spread	انتشار
Standing	واقف (ساكن ، تذبذب موجة)
Spring	زمبرك (لولب ، نابض)
Stationary	ساكن (واقف ، تذبذب موجة)
Stimulus	حاث (حافز)
Stream	تيار تدفق (مجرى)
Stress	إجهاد
Subject	موضوع
Superposition	تراكب (موجات)
Symmetry	تماثل
System	كيان (نظام)
Simple harmonic motion	حركة توافقية بسيطة
Solar energy	طاقة شمسية
Solid	صلب
Specific heat	الحرارة النوعية
Specific gravity	الوزن النوعي
Specific volume	الحجم النوعي
Speed	(انطلاق ، كمية السرعة)
State	حالة
Standing wave	موجة واقفة
Scale	مقياس
Signal generator	مولد اشارة (كهربائية)
Significant figures	أرقام معنوية
Sine Curve	منحني جيب
Slope	ميل – انحدار
Source	مصدر – منبع
Specific	نوعي
Stop watch	ساعة توقيت
Straight line	خط مستقيم

— T —

Telephone	هاتف ، تلفون
Theoretical	نظري
Thershold of pain	حد الألم
Time	زمن (وقت)
Tone	نغمة
Transmission	إرسال (بث)
Transverse	عرضي (مستعرض)
Trough	قاع موجة
Tuning	تنغيم (ضبط التردد)
Temperature	درجة الحرارة
Torsional oscillation	تذبذب اللي
Rube	صمام– انبوب
Thermal conductivity	التوصيل الحراري
Turbulence	دوامة (أو إضطراب)

— U —

unit	وحدة
unique	منفرد أو أحادي
universal gas constant	الثابت العام للغازات
ultrasonics	فوق سمعيات
universe	كون

— V —

Valid	صحيح. قانوني
vacuum	فراغ
value	قيمة
velocity (speed)	سرعة
vertical	شاقولي (رأسي)
vessel	وعاء (إناء)
vibration	ذبذبة

violent	عنيـف
voice	صوت (للأحياء)
vector	متجه – موجه
verify	يحقق – يثبت
vibrate	يهتـز
vibrator	هزاز – يهـز
vibration	اهتـزاز
viscosity	لزوجـة
viscosity (coefficient of ...)	معامل اللزوجة
visible	مرئي . منظور
viscosity of gas	لزوجة الغاز
vapour	البخـار
velocity of sound	سرعة الصوت
volt	فولت (وحده قياس الجهد أو القوة الدافعة الكهربائية)
volume	الحجـم

- W -

wave	موجـة
weight	الـوزن
work	شغل
watt	واط (وحدة قياس القدرة)
waveform	الشكل الموجي
wavelength	الطول الموجي
wire	سلـك

Y

y – axis	المحور الشاقولي . المحور الصادي
young modulus	معامل يونـك

Z

Zero level	مستوى الصفـر
Zero	صفـر

٥٣٤

ك ٤٣٩ كرجية ، امجد عبد الرزاق

فيزياء الصوت والحركة الموجية / تأليف امجد عبد الرزاق كرجية .- ط٢

منقحة ومزيدة .- الموصل : جامعة الموصل / ٢٠٠٠ .

ص ، ٢٤ سم

١- الصوت أ- العنوان

م . و

٢٤٩/ ٢٠٠٠

المكتبة الوطنية (الفهرسة أثناء النشر)

رقم الايداع في دار الكتب والوثائق ببغداد (٢٤٩) لسنة ٢٠٠٠

دار الكتب للطباعة والنشر

جامعة الموصل

٢٠٠٠

الدكتور أمجد عبد الرزاق أحمد كرجية

ولد في مدينة الموصل عام ١٩٤٤ وحصل على شهادة البكالوريوس في الفيزياء من جامعة لندن عام ١٩٦٨ عين بعدها معيداً في قسم الفيزياء في كلية العلوم بجامعة الموصل.

حصل على شهادة الماجستير من جامعة ساوثهامبتون عام ١٩٧٢ وعلى شهادة الدكتوراه في حساب القدرة الصوتية من جامعة لندن عام ١٩٧٦

عين مدرساً في كلية العلوم ، ثم كلف برئاسة قسم الفيزياء والرياضيات في كلية التربية للفترة ١٩٧٦ ١٩٨٢ ، وبرئاسة قسم الفيزياء في الكلية نفسها للفترة ١٩٨٢ ١٩٨٤

له عدة بحوث تطبيقية في مجال الضجيج.

أشرف على رسالتين للماجستير.

شارك في تأليف عدد من الكتب المنهجية والمساعدة.

- عضو في الجمعية العراقية للفيزياء والرياضيات.