2014 – 2015

الزُّمرة وتشاكلاتها

Groups and its Homomorphism

الجمهوريّة العربيّة السّوريّة	Syrian Arab Republic
وزارة التّربيّة	Minister of Education
المركز الوطنيّ للمتميزين	National Centre for Distinguished

حلقة بحث في مادة الرياضيات

الزُّمرة وتشاكلاتها

Groups and its Homomorphism

تقديم الطّالبة : نيروز غانم ديب .

بإشراف الأستاذ : حبيب عيسى .

العام الدراسي 2014 – 2015

الفهرس :

العنوان	رقم الصَّفحة
الغلاف	1
الفهرس	2
المقدمة	3
إشكاليَّة البحث	3
الأهداف	3
مخطط حلقة البحث	4
الباب الأوَّل (العمليات الثُّنائيَّة)	5
الباب الثَّانيّ (تعريف الزُّمرة وأهمُّ خصائصها)	8
الباب الثَّالث (التشاكلات)	17
الخاتمة	23
النَّتائج والتَّوصيات	23
المصادر والمراجع	24

المقدمة :

لطالما كانت الرِّياضيات علماً لا يُعرَف له حدود ، علماً تتعدد فروعه و موضوعاته التي تغني باقي العلوم وتساعدها على التَّطور والتَّقدم ، علماً يمسُّ حياتنا في كلِّ يومٍ وفي كلِّ ساعةٍ ودقيقةٍ ، والزُّمرة فرع من هذه الفروع التي لا يمكننا الاستغناء عنها أو التَّغاضي عن التَّعرف عليها ، وما لا يعلمه كثيرون أن هنالك العديد من الأبحاث والاكتشافات العلميَّة لم تكن لتتمّ لولا الزُّمرة ، و يسمح لنا مبدأ الزمر القائم على تصنيف العناصر وعملياتها الثنائية على أساس طبيعتها ، بالتعامل بمرونة مع الكيانات ذات الأصول الرِّياضية المتنوعة في الجبر المجرد وغيره مع الحفاظ على جوانبها البنيوية الأساسية.لذا في هذا البحث سوف نتعرف على أهمّ المفاهيم المرتبطة بالزُّمرة .

إشكالية الحلقة :

ما هو مفهوم الزمرة ؟

هل يمكن الاستغناء عن التعريف الأساسي للزمرة؟

ما المقصود بتشاكلات الزمر ؟

ما هي نواة التشاكل ؟

متى يصبح التشاكل تماثلاً ؟

أهداف حلقة البحث :

- ✓ إغناء المعارف والمهارات المرتبطة بالزمرة وأهم خصائصها .
- ✓ التعريف بالزمر الجزئية والدورية .
- ✓ تعريف تشاكلات الزمر و أهم المبرهنات التي توضح مفهومه .
- ✓ التعرف على نواة التشاكل والتَّماثل .

مخطط حلقة البحث :

الباب الأول : العمليات الثُّنائية (Binary operation) .

الباب الثَّاني : الزُّمرة (Group) .

الفصل الأوَّل : تعريف الزُّمرة وخصائصها .

الفصل الثَّانيّ : الزُّمر الجزئية .

الباب الثَّالث : تشاكلات الزمرة (Group's Homomorphism)

الفصل الأوَّل : تعريف التشاكل .

الفصل الثَّاني : خصائص التشاكل والتماثل .

الباب الأوّل: العمليات الثُّنائيّة (Binary operation):

لتكن A مجموعة غير خالية. نقول إن $*$ عملية ثنائية (Binary operation) على A إذا كانت $*$ تطبيقاً من $A\times A$ إلى A، أي أنَّ $*(x,y)\in A$ لكلّ $(x,y)\in A$، سنكتب $x*y$ بدلاً من $*(x,y)$' ونقول إنَّ A مجموعة مغلقة بالنسبة للعملية $*$.

مثال(1,1):

نلاحظ أن $+$ عملية ثنائية على N ولكن $-$ ليست عملية ثنائية على N وذلك لأن $3,8\in N$ ولكن $3-8=-5\notin N$، أي أن N ليست مغلقة بالنسبة للعملية $-$.

إذا كانت $*$ عملية ثنائيَّة على المجموعة A فإننا نسمّي الزوج المرتب $(A,*)$ نظاماً جبرياً

.(algebraic system)

تعريف (1,1):

ليكن $(A,*)$ نظاماً جبرياً:

1) نقول إن $*$ تجميعية (Associative) إذا كان $x*(y*z)=(x*y)*z$ لكل $x,y,z\in A$.

2) نقول إن $*$ إبداليَّة (Commutative) إذا كان $x*y=y*x$ لكل $x,y\in A$.

مثال(1,2):

كل من عمليتي الجمع والضرب على R (أو R^+ أو Q أو C أو Z) إبدالية وتجميعية .

مثال(1,3):

لتكن $F(R)$ هو مجموعة التطبيقات من $R\rightarrow R$ ولتكن $\circ$ هي عملية تحصيل التطبيقات. نلاحظ أن $\circ$ عملية تجميعية لأنه لكل $f,g,h\in F(R)$ ولكل $x\in R$ لدينا :

$$[h\circ(g\circ f)](x)=h((g\circ h)(x))=h(g(f(x)))=(h\circ g)(f(x))=[(h\circ g)\circ f](x)$$

إذاً:

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$$

ولكن $\circ$ ليست عملية إبدالية ، على سبيل المثال إذا كانت $g(x)=x-2$ و

$f(x)=x^2$ فإنَّ:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2)=x^2-2$$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x-2)=(x-2)^2\neq x^2-2$$

ولذا فإنَّ : $f\circ g\neq g\circ f$

مثال (1,4):

في النظام الجبري $(M_{mn}(R),+)$ حيث، $M_{mn}(R)$ هي مجموعة المصفوفات من الدرجة $m\times n$ على R وحيث + عملية تجميعية و إبدالية، لأن :

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

$A+B=B+A$ لكل $A,B,C\in M_{mn}(R)$.

مثال (1,5):

في النظام $(Q^+,*)$ حيث $a*b=\dfrac{ab}{2}$ لكل $a,b\in Q^+$. * تجميعية و إبدالية لأنَّه لكل $a,b,c\in Q^+$.:

$$a*(b*c)=a*\frac{bc}{2}=\frac{abc}{4}$$

$$(a*b)*c=\frac{ab}{2}*c=\frac{abc}{4}$$

وبالتالي العملية * تجميعية.

$$a*b=\frac{ab}{2}=\frac{ba}{2}=b*a$$

ومنه العملية *إبدالية.

مثال (1,6):

في النظام $(R^*\times R,*)$ حيث $(a,b)*(c,d)=(ac,b+d)$ تكون * تجميعية وإبدالية لأنَّ :

$$[(a,b)*(c,d)]*(e,f)=(ac,b+d)*(e,f)=(ace,b+d+f)$$

$$(a,b)*[(c,d)*(e,f)]=(a,b)*(ce,d+f)=(ace,b+d+f)$$

كذلك :

$$(a,b)*(c,d)=(ac,b+d)=(ca,d+b)=(c,d)*(a,b)$$

ملحوظة (1,1):

إذا كانت A مجموعة منتهية وتحتوي على عدد قليل من العناصر فإن إحدى الطرق المناسبة لتعريف عملية ثنائية عليها تكون باستخدام جدول يسمَّى جدول كيلي (Cayley's table)، على سبيل المثال :

$A=\{a,b,c,d\}$ فإنَّ الجدول الآتي يعرف لنا عملية ثنائية $*$ على A:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

ولإيجاد العنصر $x*y$ نبحث عن تقاطع الصف x مع العمود y .

ملحوظة (1,2):

إذا كانت $*$ عملية ثنائية على مجموعة معرفة بوساطة جدول كيلي فإنها تكون إبدالية إذا كان الجدول متماثلاً حول القطر الرئيسي.[1]

[1] الدكتور سمحان،معروف ، الدكتور الذكير ،فوزي _**نظرية الزمر**،جامعة الملك سعود

الباب الثاني :الزُّمرة(Group):

الفصل الأوَّل : تعريف الزَّمرة وخصائصها:

تعريف(2,1,1) :

لتكن S مجموعة غير خالية ولتكن $*$ عملية ثنائية عليها نسمي النظام الجبري $(S,*)$ زمرة $(Group)$ إذا تحققت الشروط الآتية :

i. الخاصة التجميعية :
$$\forall a,b,c \in G : (a*(b*c)) = (a*b)*c$$
ii. وجود العنصر المحايد :
$$\exists e \in G : \forall a \in G : a*e = e*a = a$$
iii. وجود نظير للعناصر :
$$\forall a \in G, \exists b \in G\,(a*b = b*a = e)$$

إذا كانت $(G,*)$ زمرة نقول أنها تبادلية أو آبلية $(Commutative\ or\ Abelian\ group)$ إذا تحقق الشرط الآتي :
$$\forall a,b \in G : a*b = b*a$$ [2]

العنصر e في الفقرة (ii) من التعريف (1) وحيد ويسمى العنصر المحايد $(Identity\ element)$.

العنصر b في الفقرة (iii) من التعريف (1) وحيد ويسمى نظير العنصر a $(Inverse\ of\ a)$ويرمز له بالرمز a^{-1}.

مثال (2,1,1): إذا كانت Z مجموعة الأعداد الصحيحة فإنَّ $(Z,+)$ تكون زمرة و هي أيضاً تبادلية .

مثال (2,1,2) : إذا كانت مجموعة R الأعداد الحقيقية فإنَّ $(R,+)$ تكون زمرة .

مثال (2,1,3): إذا كانت S مجموعة المصفوفات ذات الدرجة 2×2 والعناصر مأخوذة من مجموعة الأعداد الصحيحة Z فإن Sتكون زمرة تحت عملية جمع المصفوفات .

مثال (2,1,4):إن مجموعة المصفوفات المربعة ذات الدرجة 3×3 وذات العناصر المأخوذة من مجموعة الأعداد الحقيقية R والتي يكون محدد كل منها لا يساوي الصفر تكون زمرة تبادلية تحت عملية ضرب المصفوفات .

مثال (2,1,5): كل من $(Q,+),(C,+)$ هي زمر إبدالية حيث هو 0 العنصر المحايد و $-a$ هو نظير العنصر a وكذلك كل من $(Q^*,.),(R^*,.),(C^*,.)$ تعد زمر إبدالية حيث أن 1هو العنصر المحايد و $\frac{1}{a}$ هو نظير العنصر a .

---

[2] الدكتور السَّبتي ,جورج _**الجبر الخطّي** ,جامعة البصرة،1988

خواص الزمرة (Properties of group)

إذا كانت G زمرة فإنه لكل $a,b \in G$ لدينا :

- $(a^{-1})^{-1} = a$

البرهان :

بما أنَّ $a^{-1}a = e = aa^{-1}$ وأنَّ a^{-1} وحيد فإننا نجد أنَّ $(a^{-1})^{-1} = a$.

- $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

البرهان :

نلاحظ أنَّه : $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = (abb^{-1})a^{-1} = (ae)a^{-1} = aa^{-1} = e$

كما أنَّ : $(b^{-1}a^{-1})(ab) = (aa^{-1}b^{-1})b = (b^{-1}e)b = b^{-1}b = e$

وباستخدام وحدانية النظير نحصل على : $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

- G إبدالية إذا وفقط إذا كان $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$:

البرهان :

بما أنَّ $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ لكل $a,b \in G$ عندئذ :

$$b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1}$$

$$ab = [(ab)^{-1}]^{-1} = [(ba)^{-1}]^{-1} = ba$$

- يوجد حل وحيد لكل من المعادلتين $ax = b$ و $ya = b$ في الزمرة G:

البرهان :

لدينا أنَّ $x = a^{-1}b$ حل للمعادلة $ax = b$ وكذلك $y = ba^{-1}$ حل للمعادلة $ya = b$ وعلينا أن نبرهن وحدانية هذا الحل ، لذلك نفرض حل آخر c للمعادلة عندئذ يكون :

$$c = ec = (aa^{-1})c = a^{-1}(ac) = a^{-1}b$$

ومنه نجد أن $x = a^{-1}b$ حل وحيد لتلك المعادلة $ax = b$.

وبالمثل نثبت أن $y = ba^{-1}$ حل وحيد للمعادلة $ya = b$ من خلال أيضاً فرض حل c فيكون : .

$$ce = c(a^{-1}a) = (ca)a^{-1} = ba^{-1}$$

لتكن زمرة $(G,.)$ ، إن قانون الاختزال من اليمين ومن اليسار محققين أي أنه :

$\forall(a,x,y) \in G$ فإنه $ax = ay \Rightarrow x = y$ و $xa = ya \Rightarrow x = y$

البرهان :

$$ax = ay$$
$$\Rightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay)$$

وبما أن $(.)$ تجميعي فإنَّ:

$$\Rightarrow (aa^{-1})x = (aa^{-1})y$$
$$\Rightarrow e.x = e.y$$
$$\Rightarrow x = y$$ [3]

زمرة الجداء :

إذا كانت لدينا زمرتان $(G,.)$ و $(H,.)$ عندئذ يمكننا أن نزود مجموعة الجداء الديكارتي $G \times H$ بقانون تشكيل داخلي على النحو التالي :

$$\forall(x,y),(x_1,y_1) \in G \times H; (x,y)T(x_1,y_1) = (xx_1, yy_1)$$

عندئذ $(G \times H, T)$ هي زمرة تسمى بزمرة الجداء الديكارتي أو اختصاراً زمرة الجداء .[4]

مبرهنة(2,1,1):

إذا كانت G زمرة فإنَّ كل عنصر من عناصر G يظهر مرة واحدة فقط في كل صف ومرة واحدة فقط في كل عمود في جدول كيلي.

البرهان :

ليكن $b \in G$ ولنفرض أنَّ b يظهر مرتين في صف يحوي العنصر a. عندئذ يوجد $x, y \in G$ ، بحيث $x \neq y$ يكون: $ax = b$ و $ay = b$. ولذا فإنَّ $ax = ay$.وباستخدام قانون الاختصار نجد أنَّ $x = y$ وهذا تناقض . وبالمثل ، إذا ظهر b مرتين في عمود يحتوي العنصر a .

---

[3] الدكتور سمحان،معروف ، الدكتور الذكير ،فوزي _**نظرية الزمر**،جامعة الملك سعود

[4] Douis.

مبرهنة(2,1,2) :

إذا كانت G زمرة وكان $a,b \in G$ وكان $m,n \in Z^+$ فإنَّ:

$$a^m a^n = a^{m+n}$$
$$(a^n)^{-1} = a^{-n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$

و إذا كانت G زمرة إبدالية فإنَّ : $(ab)^n = a^n b^n$.

مبرهنة (2,1,3):

إذا كان G نظاماً تجميعياً رياضياً يحقق :

- ✓ يوجد عنصر $e \in G$ (يسمى محايد أيسر) بحيث يكون : $ea = a$ لكل $a \in G$.
- ✓ لكل $a \in G$ يوجد $b \in G$ (يسمى نظير الأيسر) بحيث يكون : $ba = e$.

فإنَّ G زمرة .

البرهان :

نلاحظ أولاً أن قانون الاختصار الأيسر محقق تحت شروط المبرهنة .

لنفرض أولاً أنّ $a \in G$ ويوجد $b \in G$ حيث $ba = e$ ولذا فإنَّ :

$$ba = e = ee = (ba)e = b(ae)$$

وباستخدام قانون الاختصار الأيسر نجد أنّ $a = ae$. إذن e محايد أيمن كذلك :

$$be = b = eb = (ba)b = b(ab)$$

ولذا فإنه باستخدام قانون الاختصار الأيسر نجد أن $e = ab$ ولذا فإن b نظير أيمن للعنصر a . وبالتالي فإننا نخلص إلى أن G زمرة .

مبرهنة (2,1,4):

ليكن G نظاماً رياضياً تجميعياً ، إذا كان لكل من المعادلتين $ax = b$ و $ya = b$ حل في G لكل $a,b \in G$ فإنَّ G زمرة .

البرهان :

لنفرض أنَّ $a \in G$. بما أنَّ للمعادلة $ya = a$ حل في G فإنَّه يوجد $e \in G$ يحقق $ea = a$. سنبرهن أنَّ e محايد أيسر . ولذا نفرض أنَّ $b \in G$. بما أنَّ للمعادلة $ax = b$ حل في G فإنَّه يوجد $c \in G$ يحقق $ac = b$ ولذا فإنَّ :

لكل $eb = e(ac) = (ea)c = ac = b$ $b \in G$ ومنه فإنَّ e محايد أيسر .

الآن للمعادلة $ya = e$ حل في G إذن يوجد $d \in G$ يحقق $da = e$ ، ومنه فإنَّ d نظير أيسر للعنصر a .

وبالتالي فإنَّ G زمرة استناداً إلى المبرهنة السابقة .

تعريف (2,1,2):

إذا كانت G زمرة حيث Gمجموعة منتهية فإننا نقول إنَّ Gزمرة منتهية (Finite group) . وإذا كانت G مجموعة غير منتهية فإننا نقول إنَّ Gزمرة غير منتهية (Infinite group) سنرمز لعدد عناصر الزمرة G بالرمز $|G|$ ونسميه رتبة الزمرة G (Order of G).

أما المبرهنة الآتية فتبين لنا إمكانية استبدال مسلمتي العنصر المحايد والنظير بقانون الاختصار للزمر المنتهية ...

مبرهنة (2,1,5):

ليكن G نظاماً رياضياً تجميعياً منتهياً . إذا حققت G قانوني الاختصار فإنَّ G زمرة .

البرهان :

لنفرض أنَّ $G = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ وأنَّ $a \in G$. عندئذٍ :

$$H = \{aa_1, aa_2, ..., aa_n\} \subseteq G$$

إذا كان $aa_i = aa_j$ فإنَّ $a_i = a_j$.إذن جميع عناصر H مختلفة . وبما أنَّ $|G| = |H|$ فإنَّ $H = G$. وبما أنَّ $a \in G$ فإنَّ $a \in H$ ولذا فإنَّ $aa_i = a$. ومنه فإنَّ: $aa = (aa_i)a = a(a_i a)$

وباستخدام قانون الاختصار نجد أنَّ $aa_i = a$. وندعو a_i عنصر محايد أيسر .

وذلك لأنه لو كان $b \in G$ فإنَّ $b = aa_j$. ولذا فإنَّ : $a_i b = a_i(aa_j) = (a_i a)a_j = aa_j = b$

إذاً a_i محايد أيسر .

نبرهن الآن على وجود نظير أيسر لكل عنصر من عناصر G . لنفرض أنَّ $c \in G$عندئذ بطريقة مماثلة لما سبق نجد أنَّ $G = \{a_1c, a_2c, ..., a_nc\}$. الآن بما أنَّ $a_i \in G$ فإنه يوجد j بحيث $a_j c = a_i$ إذن a_j نظير أيسر للعنصر c. وبالتالي فإنَّ G زمرة .

تعريف (2,1,3):

لتكن G زمرة وليكن $a \in G$. إذا وجد عدد صحيح موجب n بحيث يكون $a^n = e$ فإنَّ أصغر عدد موجب يحقق ذلك يسمى رتبة العنصر a (order of a) وإذا استحال وجود مثل هذا العدد n فإننا نقول إنَّ a ذو رتبة غير منتهية (infinite order). نرمز لرتبة العنصر a بالرمز $o(a)$.[5]

أما الآن فسوف نقوم بحل بعض التمارين .

تمارين :

1)بيّن فيما إذا كانت كل من الأنظمة الجبرية الآتية زمرة مع البرهان :

- حيث $x * y = x + y + xy$.
- $(Z ,*)$ حيث $x - y$.
- $(N ,*)$ حيث $x * y = x + y$.

الحل :

1)

- إنَّ النظام الجبري $(Z ,*)$ يعد زمرة لا يعد زمرة بالرغم من أنه يحقق العلاقة تجميعية :

$$\forall x , y , z \in Z$$

$$(x * y) * z = (x + y + xy) * z$$

$$= x + y + xy + z + zx + zy + zyx .$$

$$x * (y * z) = x + (y + z + yz) + x (y + z + yz)$$

$$= x + y + z + yz + xy + xz + xyz .$$

$$\Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)$$

وجود الحيادي ألا وهو العنصر 0:

$$\forall x \in Z \Rightarrow x * 0 = x + 0 + (x .0) = x$$

$$\forall x \in Z \Rightarrow 0 * x = 0 + x + (0.x) = x$$

[5] الدكتور سمحان،معروف ، الدكتور الذكير ،فوزي _**نظرية الزمر**،جامعة الملك سعود

ولكن بالنسبة للنظير فإنَّ :

$$\forall x \in Z \Rightarrow x *(\frac{-x}{x+1})=(\frac{-x}{x+1})*x=0$$

ولكن : $(\frac{-x}{x+1}) \notin Z$ ومنه شرط النظير غير محقق . ومنه نجد أن النظام الجبري $(Z,*)$ ليس زمرة .

- ♣ إن النظام الجبري $(Z,*)$ ليس زمرة لأنَّ الشرط التجميعي غير محقق حيث :

$$\forall x,y,z \in Z$$
$$(x*y)*z=x-y-z$$
$$x*(y*z)=x-y+z$$
$$\Rightarrow x*(y*z)\neq(x*y)*z$$

- ♣ إنَّ النظام الجبري $(N,*)$ ليس زمرة لأنَّ شرط النظير غير محقق حيث :

$$\forall x \in N \Rightarrow x*(-x)=e$$

ولكن $-x \notin N$.

الفصل الثاني :الزمر الجزئية (Subgroup):

تعريف (2,2,1):

لتكن $(H,.)$ زمرة ولتكن $\phi \neq H \subseteq G$. إذا كانت H مغلقة تحت عملية G الثنائية بحيث تكون زمرة فإننا نقول إنَّ H زمرة جزئية (Subgroup) من G .

ملحوظات (2,2,1):

- ♣ إنَّ الزمرتين $(G,.)$ و $(\{e\},.)$ تشكلان زمرتين جزئيتين من G، تسمى الأخيرة منها بالزمرة الجزئية التافهة (Trivial Subgroup) .
- ♣ إذا كان e هو محايد G وكان e_H هو محايد H فإنَّ $e_H e=e_H=e_H e_H$. وباستخدام قانون الاختصار نخلص إلى أنَّ $e_H=e$ أي أنَّ المحايدان متساويان .
- ♣ إذا كان $h \in H$ و h_1 هو نظير h في H وكان هو h^{-1} نظير h في G فإنَّ:

$$h_1=h_1e=h_1(hh^{-1})=(h_1h)h^{-1}=h^{-1}$$

ولذا فإنَّ نظير h في H و نظير h في G متساويان .

ملاحظة(2,2,2) :

- لكي نثبت أنَّ مجموعة ما H هي زمرة بالنسبة لقانون تشكيل ما . يكفي أن نثبت أنَّها زمرة جزئية من زمرة معروفة .
- إذا كانت X مجموعة جزئية من G فيمكننا أن نرمز لها بالشكل : $X \le G$.

مبرهنة (2,2,1):

لتكن $(G,.)$ زمرة و H مجموعة جزئية من G. إنَّ H زمرة جزئية إذا وفقط إذا تحقق الشرطان :

$$e \in H$$
$$\forall (x,y) \in H^2; x.y^{-1} \in H$$

البرهان :

سوف نثبت أنه إذا كان الشرطان محققان فإنَّ H زمرة جزئية من G .

بما أنَّ $(.)$ تجميعي على G عندئذٍ :

$$\forall (x,y) \in H \subset G \Rightarrow x^{-1} \in G$$
$$\Rightarrow x^{-1}(x,y^{-1}) = (x^{-1}.x)y^{-1} = ey^{-1} = y^{-1}$$

ولكن e و y من H عندئذ حسب الشرط الثاني $ey^{-1} \in H$ وبالتالي $y^{-1} \in H$ إذاً نستنتج أنَّ :
$\forall y \in H; y^{-1} \in H$.

وحسب العلاقة السابقة :

$$\forall (x,y) \in H^2; y^{-1} \in H$$
$$\Rightarrow (x,y) \in H^2; y^{-1} \in H$$
$$\Rightarrow x(y^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow xy \in H$$

حيث : $(y^{-1})^{-1} = y$

ومنه $(H,.)$ زمرة جزئية لأنها مغلقة بالنسبة للقانون $(.)$ ولأنَّ $e \in H$ وكذلك $(.)$ تجميعية بالفرض حيث $(G,.)$ هي زمرة .[6]

[6] الدكتور سمحان،معروف ، الدكتور الذكير ،فوزي _**نظرية الزمر**،جامعة الملك سعود

تعريف(2,2,2) :

لتكن $(G,.)$ زمرة ولتكن X مجموعة جزئية من G. إن تقاطع جميع الزمر الجزئية من G والتي تحوي X هو زمرة جزئية من G وهي أصغر زمرة جزئية من G تحوي المجموعة X ونرمز لها بالرمز $\langle X \rangle$ ونسميها المجموعة الجزئية المولَّدة بالمجموعة X ($Subgroup\ generated\ by\ X$).[7]

ملحوظات(2,2,3) :

☑ إذا كانت $G=\langle X \rangle$ فإننا نقول إنَّ المجموعة X تولد G (أو أن G مولدة بالمجموعة X) .

☑ إذا كانت $X=\phi$ أو $X=\{e\}$ كانت $\langle X \rangle=\{e\}$.

☑ إذا كانت G زمرة فإنّ $G=\langle G \rangle$.

☑ إذا كانت $G=\langle X \rangle$ وكانت X منتهية فإننا نقول إنَّ G منتهية التوليد (Finitely generated) .

تعريف(2,2,3) : لتكن G زمرة وليكن $a\in G$. تسمى الزمرة الجزئية من G المولدة بالعنصر a الزمرة الجزئية الدورية ($Cyclic\ subgroup$) ويرمز لها بالرمز $\langle a \rangle$. أي أن $\langle a \rangle=\{a^n : n\in Z\}$. وتكون الزمرة G زمرة دورية إذا وجد $a\in G$ بحيث يكون $G=\langle a \rangle$.[8]

مثال (2,2,1): الزمرة $(Z,+)$ دورية وذلك لأن $Z=\langle 1 \rangle$.

---

[7] Douis.free.fr/matrice

[8] الدكتور سمحان،معروف ، الدكتور الذكير ،فوزي _**نظرية الزمر**،جامعة الملك سعود

الباب الثالث: تشاكلات الزمرة (Homomorphisme of Groups):

الفصل الأول : تعريف التشاكل :

تعريف (3,1,1):

لتكن كل من $(G,*)$ و $(H,\circ)$ زمرة و التطبيق $f:G\to H$. يكون التطبيق f تشاكلاً إذا حقق :

$$\forall a,b\in G\Rightarrow f(a*b)=f(a)\circ f(b)$$

و من أجل أي زمرة G و زمرة H هنالك دائماً تشاكل $\Phi:G\to H$ يدعى التشاكل التافه (Trivial Group) معرَّف ب $\Phi(g)=e_2$ من إجل أي $g\in G$ ، حيث e_2 هو حيادي الزمرة H .[9]

مثال (3,1,1): لتكن $(C^*,.)$ زمرة و $(R^+,.)$ زمرة فإن التطبيق $\phi:C^*\to R^+$ المعرَّف ب $\varphi(x)=|x|$ يعد تشاكلاً لأن $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$.

مثال (3,1,2) : لتكن R تحت عملية الجمع زمرة ولتكن المجموعة U مجموعة الأعداد المركبة z التي $|z|=1$ تحت عملية الضرب وليكن تطبيقاً $\varphi:R\to U$ معرفاً ب $\varphi(x)=e^{i2\pi x}$ وبما أن :

$$\varphi(x+y)=e^{i2\pi(x+y)}=e^{i2\pi x}e^{i2\pi y}=\varphi(x)\varphi(y)$$

منه نجد أن التطبيق φ تشاكل .

مثال (3,1,3) : التطبيق $\varphi:(Z,+)\to(2Z,+)$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x)=2x$ لكل $x\in Z$ ، لأنَّه لكل $x,y\in Z$ لدينا :

$$\varphi(x+y)=2(x+y)=2x+2y=\varphi(x)+\varphi(y)$$

مثال (3,1,4): ليكن التطبيق $f:Z^+\to Z_2^+$ المعرَّف بالقاعدة $f(x)=[0]$ إذا كان x زوجياً و $f(x)=[1]$ إذا كان x فردياً. إنَّ التطبيق f تشاكل لأنَّه إذا كان $x+y$ زوجي فإنه :

$$f(x+y)=[0]=f(x)+f(y)$$

وإذا كان فرديَّاً فإنَّه : $f(x+y)=[1]=f(x)+f(y)$.

[9] People.ds.cam.ac.uk

الفصل الثاني :خصائص التّشاكلات(properties of homomorphism) والتّماثل (isomorphism):

مبرهنة (3,2,1):

ليكن التطبيق $f\ :G\rightarrow H$ تشاكلاً حيث e_1 هو محايد الزمرة G وe_2 هو محايد الزمرة H عندها :

(1 $f\ (e_1)=e_2$

(2 $f\ (x^{-1})=f\ (x)^{-1}$

البرهان :

(1 لدينا :

$$e_1.e_2=e_2\Rightarrow f\ (e_1.e_2)=f\ (e_2)\Rightarrow f\ (e_1).f\ (e_2)=f\ (e_2)$$

نضرب الطرفين ب $[f\ (e_2)]^{-1}$ ، فنحصل :

$$[f\ (e_2)]^{-1}.f\ (e_1).f\ (e_2)=[f\ (e_2)]^{-1}f\ (e_2)\Rightarrow e_2.f\ (e_1)=e_2\Rightarrow f\ (e_1)=e_2$$

(2 لدينا : $x.x^{-1}=e\Rightarrow f\ (x.x^{-1})=f\ (e_1)\Rightarrow f\ (x).f\ (x^{-1})=f\ (e_1)$

بما أنَّ $f\ (e_1)=e_2$ اعتماداً على الخاصة السابقة ، فنحصل $f\ (x^{-1}).f\ (x)=e$ ومنه :

$$f\ (x).f\ (x^{-1})=f\ (x^{-1}).f\ (x)=e_2$$

وهذا يعني : $f\ (x^{-1})=f\ (x)^{-1}$.[10]

تعريف (3,2,1):

ليكن $\varphi:G_1\rightarrow G_2$ تشاكلاً ولتكن $H_1\subseteq G_1$ و$H_2\subseteq G_2$. تسمى المجموعة $\varphi(H_1)=\{\varphi(h):h\in H_1\}$ صورة H_1 (Image of H_1) . وتسمى المجموعة $\varphi^{-1}(H_2)=\{g\in G_1:\varphi(g)\in H_2\}$ الصورة العكسية للمجموعة H_2 (Preimage of H_2) .[11]

تعريف (3,2,2):

لتكن ϕ تشاكل من الزمرة G إلى الزمرة H وليكن e_2 العنصر الحيادي في الزمرة H . المجموعة $\phi^{-1}(e_2)=\{x\in G\ |\phi(x)=e_2\}$ تسمى نواة التشاكل ϕ، ويرمز لها بالرمز $Ker(\phi)$.

---

[10] Cims.nyu.edu

[11] الدكتور سمحان،معروف ، الدكتور الذكير ،فوزي _ **نظرية الزمر**،جامعة الملك سعود

وهي دائماً مجموعة غير خالية لأن العنصر الحيادي e_1 للزمرة G دائماً موجود في $Ker(\phi)$ حسب المبرهنة :
$f(e_1)=e_2$.[12]

مثال (3,2,1): لتكن كل من $(C^*,.)$ و $(R^+,.)$ زمرة وليكن التشاكل $\phi : C^* \to R^+$ المعرف بالقاعدة $\phi(z)=|z|$. نواة التشاكل ϕ مجموعة جزئية U تحوي كل z التي تحقق $|z|=1$.

مبرهنات (3,2,2): ليكن $\varphi : G_1 \to G_2$ تشاكلاً فإنَّ :

☒ إذا كانت $K \le G_2$ فإنَّ $\varphi^{-1}(K) \le G_1$.

البرهان : لنفرض أن $K \le G$ فنلاحظ $e_1 \in \varphi^{-1}(K)$ ولذا فإنَّ $\varphi^{-1}(k) \neq \phi$. نفرض الآن أنَّ $a,b \in \varphi^{-1}(K)$. عندئذ، $\varphi(a),\varphi(b) \in K$ ولذا فإن $\varphi(a)\varphi(b)^{-1} \in K$ وإنَّ : $\varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1} \in K$. إذاً $ab^{-1} \in \varphi^{-1}(K)$ أي أن $\varphi^{-1}(K) \le G_1$.

☒ $\ker \varphi \le G_1$

البرهان : نلاحظ أنَّ $\ker \varphi = \varphi^{-1}(\{e_2\})$ وبما أنَّ $\{e_2\} \le G_2$ فباستخدام المبرهنة السابقة نجد أنَّ $\ker \varphi \le G_1$.

☒ $\ker \varphi = \{e_1\}$ إذا و فقط إذاكان φ أحادياً .

البرهان : لنفرض أولاً أنَّ $\ker \varphi = \{e_1\}$. إذا كان $a,b \in G_1$ فإنَّ :

$$\varphi(a)=\varphi(b) \Rightarrow \varphi(a)\varphi(b)^{-1}=e_2$$
$$\Rightarrow \varphi(ab^{-1})=e_2 \Rightarrow ab^{-1} \in \ker \varphi$$

ولذا فإن $ab^{-1}=e_1$ أي أن $a=b$. وبالتالي فإن φ أحادي .

ولبرهان العكس : نفرض أن φ أحادي . وليكن $a \in \ker \varphi$. ومنه :

$$a \in \ker \varphi \Rightarrow \varphi(a)=e_2=\varphi(e_1) \Rightarrow a=e_1$$

إذاً $\ker \varphi = \{e_1\}$ وهو المطلوب .

[12] www.fatih.edu.tr

تعريف (3,2,3):

ليكن $\varphi : G_1 \to G_2$ تشاكلاً :

☑ نقول إنَّ φ تشاكل غامر أو شامل (Epimorphism) إذا كان φ تطبيقاً غامراً . وفي هذه الحالة نقول إنَّ G_2 صورة تشاكلية (Homomorphic image) للزمرة G_1 .

☑ نقول إنَّ φ تشاكل أحادي (Monomorphism) إذا كان φ تطبيقاً أحادياً .

☑ نقول إنَّ φ تماثل (Isomorphism) إذا كان φ تقابلاً(أي أحادياً وشاملاً).

☑ نقول إنَّ الزمرتين G_1 وG_2 متماثلتان (Isomorphic) ونكتب $G_1 \cong G_2$ إذا وجد تماثل $\varphi : G_1 \to G_2$.[13]

مثال (3,2,2): نلاحظ أنَّ التطبيق $\varphi : (R,+) \to (R^+,.)$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x) = e^x$ تشاكل لأنَّ $\varphi(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = \varphi(x)\varphi(y)$ ، أما الآن ، $\ker\varphi = \{x \in R : \varphi(x) = 1\} = \{x \in R : e^x = 1\} = \{0\}$ ولذا فإنَّ φ أحادي و كما أن ، φ شامل لأنَّه لكل $y \in R^+$ لدينا $\varphi(\ln y) = e^{\ln y} = y$.

إذاً $(R,+) \cong (R^+,.)$.

مثال(3,2,3) : نلاحظ أن التطبيق $\varphi : (R^*,.) \to (R^+,.)$ المعرف بالقاعدة $\varphi(x) = |x|$ تشاكل لأنَّ : $\varphi(x.y) = |x.y| = |x||y| = \varphi(x)\varphi(y)$ ، أما الآن فنلاحظ أن $\ker\varphi = \{x \in R^* : |x| = 1\} = \{-1,1\}$ ومنه فإن φ ليس أحادياً ولكنه غامر .

مبرهنة (3,2,3): لتكن Γ مجموعة جميع الزمر ولتكن $\sim$ علاقة معرفة على Γ كالتالي: $G_1 \sim G_2$ إذا وفقط إذا كان $G_1 \cong G_2$ لكل $G_1, G_2 \in \Gamma$. عندئذ $\sim$ علاقة تكافؤ .

البرهان :

- $\sim$ انعكاسية لأن التطبيق المحايد $I : G \to G$ المعرف بالقاعدة $I(x) = x$ لكل $x \in G$ تماثل ولذا فإن $G \cong G$.

---

[13] الدكتور سمحان،معروف ، الدكتور الذكير ،فوزي _**نظرية الزمر**،جامعة الملك سعود

- لإثبات أن العلاقة تناظرية نفرض أن $\varphi : G_1 \to G_2$ تماثل . بما أن φ تقابل فإن $\varphi^{-1} : G_2 \to G_1$ تقابل أيضاً . كذلك ، إذا كان $a,b \in G_2$ فإنه يوجد $x , y \in G_1$ بحيث يكون $\varphi(x) = a$ و $\varphi(y) = b$. ولذا فإن $ab = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$ ومنه فإن :

$$\varphi^{-1}(ab) = xy = \varphi^{-1}(a)\varphi^{-1}(b)$$

أي أن φ^{-1} تشاكل . وبالتالي فإنه تماثل .

- لإثبات أنها متعدية نفرض أن $\varphi : G_1 \to G_2$ و $\phi : G_2 \to G_3$ تماثلان. إذاً $\phi \circ \varphi : G_1 \to G_3$ تقابل . كذلك إذا كان $a,b \in G_1$ فإن :

$$(\phi \circ \varphi)(ab) = \phi(\varphi(ab))$$
$$= \phi(\varphi(a))\phi(\varphi(b)) = (\phi \circ \varphi)(a)(\phi \circ \varphi)(b)$$

ولذا فإن تشاكل $\phi \circ \varphi$ وبالتالي فهو تماثل .

مبرهنة (3,2,4):

ليكن التطبيق $\varphi : G_1 \to G_2$ تماثلاً . عندئذ :

- ♣ G_1 إبدالية إذا وفقط إذا كانت G_2 إبدالية .

لنفرض أن G_1 إبدالية ولنفرض أن $x , y \in G_2$. بما أن φ شامل فإن يوجد $a,b \in G_1$ بحيث يكون $\varphi(a) = x$ و $\varphi(b) = y$. الآن :

$xy = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) = \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a) = yx$ ولذا فإن G_2 إبدالية .

ولبرهان العكس نفرض أن G_2 إبدالية وأن $a,b \in G_1$ عندئذ :

$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(b)\varphi(a) = \varphi(ba)$ ولذا فإن $ab = ba$. وبالتالي فإن G_1 إبدالية .

- ♣ $o(a) = o(\varphi(a))$ لكل $a \in G_1$.

ليكن $a \in G$ لكل $n \in Z^+$ لدينا : $a^n = e_1 \Leftrightarrow \varphi(a^n) = \varphi(e_1) \Leftrightarrow (\varphi(a))^n = e_2$ إذاً $o(a)$ منته إذا وفقط إذا كان $o(\varphi(a))$ منته . لنفرض الآن $o(a) = m$ وأن $o(\varphi(a)) = n$ بما ان $a^m = e_1$ فإن $(\varphi(a))^m = e_2$. ولذا فإن n يقسم m كذلك بما أن $(\varphi(a))^n = e_2$ فإن $a^n = e_1$ ومنه فإن m يقسم n ومن هذا وذاك نجد أن $m = n$.

- ♣ G_1 دورية إذا وفقط إذا كانت G_2 دورية .

لنفرض أن $G_1=\langle a\rangle$ دورية . بما أن $\varphi(a)\in G_2$ فإن $\langle\varphi(a)\rangle\subseteq G_2$. لنفرض الآن أن $b\in G_2$

. بما أن φ شامل فإنه يوجد $c\in G_1$ بحيث يكون $\varphi(c)=b$. إذاً $c=a^n$ حيث $n\in Z$. ولذا فإن

$b=\varphi(c)=\varphi(a^n)=(\varphi(a))^n\in\langle\varphi(a)\rangle$. إذاً $G_2=\langle\varphi(a)\rangle$

♣ للمعادلة $x^n=a$ حل في الزمرة G_1 إذا وفقط إذا كان للمعادلة $[\varphi(x)]^n=a$ حل في الزمرة G_2 لكل $a\in G_1$.

نلاحظ أنّ $x^n=a\Leftrightarrow\varphi(x^n)=\varphi(a)\Leftrightarrow(\varphi(x))^n=\varphi(a)$

فإن $x^n=a$ لها حل وحيد في G_1 إذا وفقط إذا كان للمعادلة $(\varphi(x))^n=\varphi(a)$ حل في G_2 .[14]

تمرين :

- حدد أيّ التَّطبيقات الآتية يعد تماثلاً :
  - $\varphi:(Q,+)\to(Q^*,.)$:

نلاحظ أن $(Q,+)\not\cong(Q^*,.)$ لأن رتبة أي عنصر ما عدا المحايد من عناصر $(Q,+)$ غير منتهية ولكن $(-1)^2=1$ ولذا فإن رتبة(-1) تساوي 2 في الزمرة $(Q^*,.)$.

  - $\varphi_1:(Q^*,.)\to(R^*,.)$

نلاحظ أن $(Q^*,.)\not\cong(R^*,.)$ لأنَّ $x^2=2$ لها حل في $(R^*,.)$ ولكن ليس لها حل في $(Q^*,.)$.

  - $\varphi_2:(R^*,.)\to(C^*,.)$

نلاحظ أن $(R^*,.)\not\cong(C^*,.)$ لأن $x^2=-1$ لها حل في $(C^*,.)$ وليس لها حل في $(R^*,.)$.

[14] الدكتور سمحان،معروف ، الدكتور الذكير ،فوزي _**نظرية الزمر**،جامعة الملك سعود

الخاتمة :

وبهذا أختم بحثي المتواضع عن الزُّمرة وتشاكلاتها فقد تطرَّقت في الباب الأول للعمليات الثنائية وفي الباب الثاني تحدَّثت عن تعريف الزمرة أما الباب الثالث فكان عن التشاكلات وأهم خصائصه وأنواعه ، وأودُّ أن أشكر الأستاذ حبيب عيسى على إشرافه على حلقتي هذه والكادر الإداري والتدريسي في المركز الوطني للمتميزين على دعمه ، ، وآمل أن أكون ببحثي هذا قد شكَّلت صورة واضحة عن هذا المفهوم الواسع والكثير التَّشعب .

النّتائج :

- التعرُّف على الزمرة وأهم خصائصها .
- حلّ بعض التَّمارين المتعلّقة بتعريف الزُّمرة .
- التعرّف على التَّشاكلات (Homomorphism) .
- التعريف بالتماثل (Isomorphism) .
- امتلاك القدرة على تطبيق هذه المعارف في حل بعض المسائل .

التّوصيات :

- إغناء المعارف المرتبطة بتطبيقات الزُّمرة في حياتنا وفي فروع العلم كافة .
- التَّوسع أكثر فيما يتعلق بالتَّشاكلات في مناهجنا الدّراسيَّة .

المصادر والمراجع :

الكتب الورقيّة :

الدكتور السَّبتي, جورج, **الجبر الخطّيّ**, جامعة البصرة,1988 .

الدكتور سمحان،معروف ، الدكتور الذكير ،فوزي _**نظرية الزمر**،جامعة الملك سعود.

المواقع الإلكترونية :

اسم الموقع الإلكتروني	الوقت	التاريخ
www.fatih.com	4:10 pm	2014/12/15
People.ds.cam.ac.uk	4:30 pm	2014/12/15
Cims.nyu.edu	4:45 pm	2014/12/15
Douis.free.fr/matrice	6:00 pm	2014/11/5