دولة - ليبيا

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

بحث مقدم لاستكمال متطلبات الحصول على درجة البكالوريوس في الرياضيات

بعنـــوان

التكامل باستخدام الطرق العددية

إعداد الطالبتان:

حنان عبدالرحمن علوه　　　　**منى حامد عبدالحق**

تحت إشراف:

الأستاذة . خديجة علي بن يحمد

العام الدراسي:2016–2017

بسم الله الرحمن الرحيم

{ وَأَنزَلَ اللهُ عَلَيكَ الكِتَابَ وَالحِكْمَةَ وَعَلَّمَكَ مَا لَم تَكُن تَعْلَمْ وَكَانَ

فَضْلُ اللَّهِ عَلَيْكَ عَظِيماً }

صدق الله العظيم

سورةالنساء:الآية (113)

الفهرس

المقدمة

هذه الطريقة قد استخدمت لحل المسائل في العلوم الفيزيائية والهندسية .

وفي التحليل العددي،يشكل التكامل العددي عائلة واسعة من الخوارزميات لحساب القيمة العددية لتكامل المحدود.

أسباب اللجوء للتكامل العددي

توجد أسباب عدة للجوء للتكامل العددي .فالكمية المتكاملة يمكن معرفتها فقط عند نقاط معينة ،كتلك المحصل عليها عن طريق الأخذ بالعينة أو تكون حلولا عددية لمسائل أخرى ولهذا السبب قد يعرف المرء الكمية المتكاملة ولكن يكون من الصعب إيجاد الاشتقاق العكسي والذي يفترض أن يكون دالة أساسية حينئذ تصبح أساليب التكامل العددي هي الوسائل الوحيدة لإيجاد قيمة التكامل .

فمثلا توجد قوانين لحل المعادلات التربيعية والتكعيبية والمعالات الجبرية من الدرجة يهتم التحليل العددي بتطوير طرق الحل التقريبي للمسائل العملية ومن المتعارف عليه أن الرابعة ,ولكن لا توجد مثل هذه القوانين للمعادلات الجبرية من درجة تزيد عن الرابعة أو حتى لمعادلة بسيطة مثل :

$$x = \mathrm{c4os}\, x$$

وأيضا يمكننا بالتحديد حساب التكامل

$$\int_a^{\mathrm{b}} \mathrm{e^x\ dx}$$

والذي قيمته $\mathrm{e^b - e^a}$,ولكن لا نستطيع إيجاد الحل المضبوط للتكامل

4وذلك لعدم وجود دالة تفاضلها e^{x^2} . حتى وان أمكن إيجاد الحل التحليلي فقد يكون استخدامه من الناحية النظرية أكثر منه من الناحية العملية . وهناك العديد من الطرق العددية للتكامل , تختلف تعقيداتها وكذالك في مرتبة الخطأ المصاحب لها ,ومن البديهي أن تكون مرتبة الخطأ المصاحب لكل طريقة 4من طرق التكامل العددي معروفة لنا سلفا,حتى يمكننا اختيار الطريقة التي تناسب الدقة المطلوبة لتكامل.

وفي هذا البحث قمنا بدراسة التكامل بإستخدام الطرق العددية ومن ثم قمنا بمقارنة هذه الطرق بإستخدام الماتلاب .

ولاحظنا أن الحل بإستخدام الماتلاب هو أسرع وأدق من الحل اليدوي.

وقد قمنا بتقسيم هذا البحث إلى ثلاثة فصول:

تطرقنا في الفصل الاول إلى الأخطاء الناتجة من إستخدام الطرق العددية وتعرفناعلى أشهر متسلسلات القوى متسلسلة مكلورين وتايلور وحدودية نيوتن للفروق الأمامية.

وفي الفصل الثاني تطرقنا إلى طرق التكامل العددي وهي طريقة المستطيلات وقاعدة شبه المنحرف وقاعدة سيمسون وسيمسون $\frac{3}{8}$ وقواعد نيوتن- كوتس وتكاملات جاوس وتكامل رومبورج والتكاملات الخاصة , وحساب الخطأ المصاحب لكل طريقة .

وفي الفصل الثالث قمنا بمقارنة الطرق التي درسنها في الفصل الثاني بإستخدام الماتلاب.

الفصل الأول

(التمهيد)

1-1حساب الأخطاء :

إن التحليل العددي يهتم بتحليل صفات الطرق العددية والأخطاء المحتملة ، ويتم حساب الخطأ المحتمل وقوعه في حل أي طريقة من الطرق المختلفة التي توصل إلى الحل المطلوب ، وفي ضوء المقارنة يتم اختيار الطريقة التي تحقق الدقة المطلوبة في أقل خطوات ، ولذلك كان من الضروري فهم أنواع الخطاء وطرق تحديدها .

هناك عدة أنواع من الخطأ أهمها :

1- **خطأ المعطيات :**

ينتج عن حل المسائل التي نحصل عليها من التجارب العملية الغير دقيقة بشكل كافي أو التي نأخذها مقربة لقيم حقيقية وذلك للتسهيل مستخدمين .

2- خطأ الطريقة :

ينتج عن الاستعاضة عن علاقة رياضية معقدة مثلا بعلاقة أخرى أبسط منها . ومثال ذلك استخدام طريقة شبه المنحرف مثلا في حساب قيمة التكامل المحدود.

3- **خطأ القطع :**

ينتج عن اعتبار أن المجموع السلسلة غير المنتهية مثلا هو عدد حدودها .

4- **أخطأ التقريب** :

تنتج عن الحاسب نفسه فمثلا لنفرض أن لدينا حاسب بحيث أن كل عدد فيه يحتوي على خمسة أرقام فقط وإننا نريد جمع العددين 9.2654 و 7.1625، إن المجموع هو 16.4279 وهو يحتوي على ستة أرقام عندئذ الحاسب لا يستطيع تخزين هذه الأرقام وبالتالي يقوم بتدوير الأرقام الستة إلى 16.428 .

أخيرا هناك أخطاء مهملة ، مثل الخطأ الشخصي الناتج عن الشخص الذي يقوم بعملية القياس لتجربة ما، مقارنة بشخص أخر يقوم بعملية القياس لذات التجربة.

يمكن أن نعبر عن الأخطاء عادة بالطرق التالية :

الخطأ المطلق :

يعرف بأنه الفرق بين القيمة المحسوبة و القيمة المضبوطة وقد نعبر عنه بالقيمة المطلقة

أي أن :

الخطأ المطلق = القيمة المحسوبة – القيمة المضبوطة

والقيمة المطلقة للخطأ= |المحسوبةالقيمة – المضبوطةالقيمة|

الخطأ النسبي :

يعرف بأنه خارج قسمة الخطأ المطلق والقيمة المضبوطة (أو القيمة المحسوبة باعتبارها قريبة منها) وعادة ما يعبر عنه بالقيم المطلقة أيضا ، أي أن:

الخطأ النسبي $= \frac{\text{المحسوبةالقيمة–المضبوطةالقيمة}}{\text{القيمة المضبوطة}}$

والقيمة المطلقة للخطأ النسبي $= \left|\frac{\text{المحسوبةالقيمة–المضبوطةالقيمة}}{\text{القيمة المضبوطة}}\right|$

الخطأ المئوي:

يعرف بأنه الخطأ النسبي مضروبا في 100. وأحيانا يسمى النسبة المئوية للخطأ ، أي أن :النسبة المئوية للخطأ = الخطأ النسبي ×100

مثال(1-1)

أحسب قيمة الخطأ باعتبارها خمسة ثم تسعة حدود المتتالية التالية التي تمثل التابت e

$$y = e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

حيث ان قيمة e المضبوطة e=2.7183

الحل:

إذاكانت قيمة n تمثل المستعملة في المتتالية فإن قيم y تكون

n	y_n	*N*	y_n
0	1.000	5	2.7167
1	2.000	6	2.7181
2	2.5000	7	2.7183
3	2.6667	8	2.7183

4	2.7084	9	2.7183

فإذا استعملت n=5 حدود فإن خطأ القطع

$$y - y_5 = 2.7183 - 2.7167 = 0.0016$$

فإذا استعملت n=9 حدودها فان خطأ القطع

$$y - y_9 = 2.7183 - 2.7183 = 0.0000$$

أما خطأ التدوير فانه يحصل باستعمال عدد معين من المراتب الكسرية في الحساب**.**

2-1تمثيل الدوال ومتسلسلات القوى:

تعتبر متسلسلات القوى وسيلة مناسبة لتعبير عن العديد من الدوال ,كما سيكون لها فائدة في اشتقاق الكثير من الطرق العددية.

لذالك سوف نقوم بدراسة أشهر متسلسلات القوى .

1-2-1متسلسلة مكلورين :Maclaurin Series

إذا كان لدينا دالة f(x) معرفة عنداx_0 وجميع تفاضلاتها (مشتقاتها) معرفة عند النقطة x_0 ونحتاج إلى حساب قيمة تلك الدالة عندا أي نقطة أخرى مثلx قد تكون قريبة أو بعيدة عن النقطةx_0 ,أن الدالة متصلة (مستمرة) بين النقطتين x_0 و x .

لنفرض أن $x_0 = 0$ وسوف نعمم النتائج لأي قيمة أخرى لاحقا ,الشكل (1_1) يوضح لنا دالة متصلة وقابلة لتفاضل عند عدد لانهائي من المرات f^{n}(x) لنفرض أننا نعرف هذه الدالة عندما $x_0 = 0$

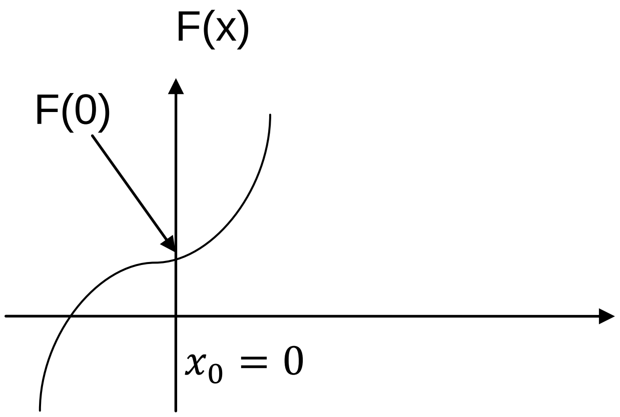
$$f(0), f'(0), f''(0), f^{\mathrm{n}}(0), \ldots$$

ليمكن تقدير قيمة الدالة عند النقطةx_1 باستخدام قيمة الدالة وجميع تفاضلاته عند النقطة x_0حسب المسافة بين النقطتين.

فإذا كانت النقطةx_1 قريبة جدا من x_0 فقد نقدر قيمة الدالة كما يلي :

$$f(x_1) = f(0)$$

وقد ينتج عن ذالك خطأ صغير, ولكن من الواضح أن قيمة الخطأ الناتج عن هذا التقدير لقيمة الدالة سيزداد كلما ابتعدتx_1عن x_0 .



الشكل (1-1) دالة مستمرة وقابلة لتفاضل

ولمحاولة حل هذه المشكلة يمكن استخدام قيمة الدالة المشتقة الأولى عندx_0 لتقدير قيمة الدالة عند نقطة أخرى x_2 أبعد نسبيا عن x_0 من نقطة x_1 .

بما أن المشتقة الأولى للدالة عند أي نقطة هو ميل المماس الدالة عند تلك النقطة , منها يمكن تقدير قيمة الدالة عند النقطة الجديدة x_2 باستخدام معادلة الخط المستقيم الذي يلامس الدالة عندا x_0 .

ومنها يمكن الحصول على اشتقاق معادلة مماس الدالة عندا x_0 والتعويض فيها عند x_2 فنحصل على:

$$f(x_2) = f(0) + f'(0)x_2$$

ومنها يمكن تقدير قيمة الدالة عند أي نقطةx قريبة من x_0 كما يلي :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x$$

وهذه تعتبر عبارة عن كثيرة حدود من الرتبة الأولى فيx وثم الحصول عليها بمطابقة قيمتها وقيمة مشتقتها الأولى عند النقطة$x_0 = 0$ مع قيمة الدالة المعطاة $f(x)$ وقيمة تفاضلها الأول عند نفس النقطة القريبة من النقطة الأصلية.

وبالرغم من أن تقدير قيمة الدالة باستخدام معادلة المماس قد يكون مناسبا بالنسبة لقيم x .

إلا أنه لن يكون مناسبا كلما ابتعدتx عنx_0 لذالك نستخدم علاقة أو منحنى برتبة أكبرللحصول على تقدير أفضل للدالة عند نقاط أبعد من x_2 عند النقطة الأصلية .

وعند اختيار كثيرة الحدود من الرتبة التانية يتم تقدير قيمة الدالة باستخدام العلاقة :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

حيث يتم إيجاد الثوابت a_0, a_1, a_2 بمطابقة قيمة متعددة الحدود وقيمة تفاضلها الأول والثاني مع قيمة الدالة$f(x)$ وتفاضلها الأول والثاني عند النقطة $x_0 = 0$ فنحصل على :

$$a_0 = f(0)$$

$$a_1 = f'(0)$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

ومنها نتحصل على كثيرة الحدود التالية :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2}$$

وتقدير الدالة بكثيرة الحدود من الرتبة الثانية,حتما غير مناسب بالنسبة لقيم x البعيدة عن x_0 ويمكن استخدام كثيرات حدود من رتب أكبر فأكبر للحصول على تقديرات أفضل للدالة وبصفة عامة قد يتطلب الأمر استخدام كثيرات الحدود من رتبة كبيرة قد تصل إلى مالانهاية على النحو التالي:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

يمكن الآن إيجاد المعامل a_n لجميع قيم *n* وذالك عن طريق مطابقة قيمة المتسلسلة وقيم تفاضلاتها عند النقطة x_0 مع قيم الدالة *f(x)* وتفاضلاتها عن نفس النقطة *x* .

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

بإجراء عمليات التفاضل على كثيرة الحدود نتحصل على:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x^1 + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3.2a_3x^1 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots$$

:

:

$$f^{n}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ldots 1a_{n} + \cdots$$
$$= n!\,a_n + \cdots$$

حيث !n هي مضروب n وتعرف كما يلي :

$$n! = n(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)\ldots(3)(2)(1)$$

بالتعويض عن قيمة X في التفاضل n للدالة بقيمة $x_0 = 0$ نحصل على :

$$f^{n}(0) = n!\,a_n$$

ومنها نحصل على علاقة عامة لإيجاد المعامل x_n لأي حد *n* من كثيرة الحدود حيث:

$$a_n = \frac{f^{n}(0)}{n!}$$

بالتعويض عن القيم في كثيرة الحدود نحصل على متسلسلة القوى اللانهائية التالية :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots + f^{n}(0)\frac{x^n}{n!}\ldots \qquad (1\_1)$$

وتسمى هذه المتسلسلة بمتسلسلة مكلورين.

2-2-1متسلسلة تايلور : Taylor series

لاشتقاق الصيغة العامة لمتسلسلة تايلور دعنا نفترض أن لدينا دالة متصلة f(x) جميع تفاضلاتها التي نحتاجها معروفة ، ولنفترض أننا نعرف قيمة الدالة وجميع مشتقاتها عند نقطة ما ، نسميها $x = x_0$ حيث x_0 يمكن أن تكون صفرا (وفي هذه الحالة نحصل على متسلسلة مكلورن) أو أي قيمة أخرى .

نكون متسلسلة قوى (أو أساس للحد) لانهائية للدالة f(x) كما في متسلسلة مكلورن ولكن باستخدام قوى للحد $(x - x_0)$ بدلا من أساس للمتغير x كما يلي :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

وبتفاضل هذه المتسلسلة عدد n من المرات نحصل على :

$$f^{n}(\mathrm{x}) = \mathrm{n}!\,\mathrm{a_n} + (\mathrm{n}+1)!\,\mathrm{a_{n+1}} + \cdots$$

بوضع $x = x_0$ سنلاحظ أن الحدود التي بها $(x - x_0)$ ستختفي ويبقى لدينا :

$$f^{n}(\mathrm{x_0}) = \mathrm{n}!\,\mathrm{a_n}$$

أو

$$\mathrm{a_n} = \frac{f^{n}(\mathrm{x_0})}{\mathrm{n}!}$$

وبذلك تصبح العلاقة العامة لمتسلسلة تايلور كما يلي :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{(x - x_0)^3}{3!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} + \cdots \qquad (2\_1)$$

نلاحظ أنه إذا كانت $x_0 = 0$ فإننا نحصل على متسلسلة مكلورن وبذلك تعتبر متسلسلة مكلورن حالة خاصة من متسلسلة تايلور.

بعض الأمثلة التالية تستخدم متسلسلات القوى لتمثيل بعض الدوال المعروفة وتقدير قيمتها عند نقاط محددة .

مثال(1-2):

مثل الدالة $f(x) = \sin(x)$ بمتسلسلة مكلورن واستخدم 6 حدود من المتسلسلة لتقدير قيمة $\sin(\frac{\pi}{4})$ ، واحسب النسبة المئوية للخطأ.

الحل:

لتمثيل الدالة بمتسلسلة مكلورن فإن $x_0 = 0$ وبذلك نحتاج إلى إيجاد قيمة الدالة وتفاضلاتها عند هذه النقطة

$$f(0) = \sin(0) = 0$$

$$f'(0) = \cos(0) = 1$$

$$f''(0) = -\sin(0) = 0$$

$$f'''(0) = -\cos(0) = -1$$

$$f^{\text{Iv}}(0) = \sin(0) = 0$$

$$f^{\text{v}}(0) = \cos(0) = 1$$

وبالتعويض في المعادلة متسلسلة مكلورن:

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{f(x)} + \mathrm{f}'(0)\mathrm{x} + \mathrm{f}''(0)\frac{\mathrm{x}^2}{2!} + \mathrm{f}'''\frac{\mathrm{x}^3}{3!} + \mathrm{f}^{\text{iv}}\frac{\mathrm{x}^4}{4!} + \mathrm{f}^{\text{v}}(0)\frac{\mathrm{x}^5}{5!}$$

$$\sin(x) \cong 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 +$$

وبالتعويض عن قيمة $\mathrm{x} = \frac{\pi}{4}$ نحصل على:

$$\sin\frac{\pi}{4} \cong \left(\frac{(\pi)}{4}\right) - \frac{(\pi/4)^3}{3!} + \frac{(\pi/4)^5}{5!}$$

= 0.78540 _ 0.08075 + 0.000249 = 0.70714

لحساب الخطأ المصاحب لتلك القيمة العددية للدالة نحتاج إلى القيمة الحقيقية لدالة الجيب عند الزاوية المعطاة والتي يمكن الحصول عليها باستخدام الآلة الحاسبة حيث نجد أن :

$$\sin\frac{\pi}{4} = \sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.70711$$

ومن تعريف النسبة المئوية للخطأ نجد أن:

الخطأ النسبي= $\frac{\text{المحسوبةالقيمة}-\text{المضبوطةالقيمة}}{\text{القيمة المضبوطة}}$

النسبة المئوية للخطأ= $\frac{0.70711-0.70714}{0.70711}$ ×100 =0.000424262

نلاحظ أن الخطأ النسبي باستخدام ستة حدود من متسلسلة صغيرة جدا .

مثال(1-3):

الدالة $f(x) = \cos x$ بمتسلسلة تايلور حول النقطة $x_0 = \frac{\pi}{4}$ ، واستخدام 5 حدود من المتسلسلة لتقدير قيمة $\cos(\frac{\pi}{3})$ وأحسب النسبة المئوية للخطأ.

الحل:

بحساب قيمة الدالة وتفاضلاتها عند النقطة المعطاة والتعويض في الصيغة العامة لمتسلسلة تايلور

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos(\frac{\pi}{4}) = 0.7071$$

$$\mathrm{f}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -0.707111$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos(\frac{\pi}{4}) = -0.70711$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.70711$$

$$f^{I\mathrm{v}}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos(\frac{\pi}{4}) = 0.70711$$

وبالتعويض عن القيم في المعادلة :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{(x - x_0)^3}{3!} + \cdots + f^n(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} + \cdots$$

$$\cos(x) \cong 0.70711 - 0.70711\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 0.70711\frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2!} 0.70711\frac{(x - \frac{\pi}{4})^3}{3!} + 0.70711\frac{(x - \frac{\pi}{4})^4}{4!} +$$

وبالتعويض عن قيم $x = \frac{\pi}{3}$ في هذه المعادلة نحصل على:

$$\cos(\frac{\pi}{3}) \cong 0.70711 - 0.70711\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) - 0.70711\frac{\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + 0.70711\frac{\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + 0.70711\frac{\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cong 0.70711 - 0.18512 - 0.02423 + 0.00211 + 0.00014 \cong 0.50001$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.50000$$

الخطأ النسبي= $\frac{\text{القيمة المضبوطة} - \text{القيمة المحسوبة}}{\text{القيمة المضبوطة}}$

النسب المئوية للخطأ= $\frac{0.50000-0.50001}{0.50000} \times 100 = 0.002\%$

ملاحضة :

حدودية تايلر تستخدم لتقريب دالة معلومة وقابلة للإشتقاق أكثرمن مرة وذالك في نقطة واحدة وهذا النوع من التقريب يعمل في فترة صغيرة عادة ,ولكن ليس هذا الحال دائما فنحن نحتاج إلى حدودية تقرب دالة غير معلومة أحيانا وعلى فترات طويلة.

تعريف(1_1):(حدودية نيوتن _للفروق الأمامية)

نفرض أن لدينا مجموعة بيانات للمتغير بصورة الأزدواج $(x_I, f(x_i))$

وأن, $i = 0,1, \dots, n,$

$$x_i - x_{i-1} = h \ , \quad i = 1 \dots n$$

نعرف مؤثر الفرق الأمامي Δ على الدالة f كما يلي :

$$\Delta f(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i)$$

ولنرمز للمقدار $f(x_i)$ بالرمز f_{i} فيصبح الفرق

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i (*)$$

أما الفرق الثاني فهوى

$$\Delta^2 f_{\mathrm{i}} = \Delta(\Delta f_{\mathrm{i}})$$

$$= \Delta(f_{i+1} - f_i)$$

$$= 1 f_{\mathrm{i+2}} - 2 f_{\mathrm{i+1}} + f_{\mathrm{i}}$$

وبنفس الطريقة نتحصل على الفرق الثالث

$$\Delta^3 \mathrm{f_i} = \mathrm{f_{i+3}} - 3\mathrm{f_{i+2}} + 3\mathrm{f_{i+1}} - \mathrm{f_i}$$

وبصورة عامة:

$$\Delta^{\mathrm{n}} \mathrm{f_i} = \mathrm{f_{i+n}} - \mathrm{n f_{i+n-1}} + \frac{\mathrm{n(n-1)}}{2!} \mathrm{f_{i+n-2}} - \frac{\mathrm{n(n-1)(n-2)}}{3!} \mathrm{f_{i+n-3}} + \cdots (6\_1)$$

لنعد إلى الصيغة $(*)$ وعندا x_0 يكون

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$

أو

$$\mathrm{f_i} = (1 + \Delta) \mathrm{f_0}$$

وهذا ينطبق على Δ^2 أيضا حيث

$$\mathrm{f_2} = (1 + \Delta)^2 \mathrm{f_0}$$

وهكذا فإن

$$\mathrm{f_n} = (1 + \Delta)^{\mathrm{n}} \mathrm{f_0} (**)$$

وبفك القوس في $(**)$ نحصل على

$$\mathrm{f_n} = \mathrm{f_0} + \mathrm{n} \Delta \mathrm{f_0} + \frac{\mathrm{n(n-1)}}{2!} \Delta^2 \mathrm{f_0} + \frac{\mathrm{n(n-1)(n-2)}}{3!} \Delta^3 \mathrm{f_0} + \cdots + \Delta^{\mathrm{n}} \mathrm{f_0} (***)$$

الصيغة(∗∗∗) تبين أننا يمكن أن نجد قيمة الدالة f عند النقطة x_n باستخدام معلومات عن الدالة عند x_0 فقط .

وأن تعميم هذه الصيغة لتشمل جميع النقاط بما فيها الكسور السالبة والموجبة فنقوم بتبديل .... $n = 1,2$ ب s فتصبح الصيغة (∗∗∗) بدلالة s

$$= f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \cdots (3\_1)$$

حيث أن

$$s = \frac{x_n - x_0}{h} \qquad , h = \Delta x$$

نسمى الصيغة (3_1) بحدودية نيوتن للفروق الأمامية ونرمز لها ب $p_n(x)$.

تعريف(2_2):(متعددة حدود لانجرانج)

إذا كانت $x_0, x_1, \dots, x_n$ أعداد مختلفة عددها $(n+1)$ وf دالة قيمتها معطاه عند هذه الأعداد فإن كثيرة حدود لانجرانج تعطى كما يلي:

$$p(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \cdots f(x_n)L_n(x)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x) \ (4\_1)$$

عندما تكون

$$\boldsymbol{L_k}(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x_0})(\mathbf{x}-\mathbf{x_1})\dots(\mathbf{x}-\mathbf{x_{k-1}})(\mathbf{x}-\mathbf{x_{k+1}})\dots(\mathbf{x}-\mathbf{x_n})}{(\mathbf{x_k}-\mathbf{x_0})(\mathbf{x_k}-\mathbf{x_1})\dots(\mathbf{x_k}-\mathbf{x_{k-1}})(\mathbf{x_k}-\mathbf{x_{k+1}})\dots(\mathbf{x_k}-\mathbf{x_n})}$$
$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

لكل $k = 0,1, \dots n$.

الفصل الثاني

(التكامل العددي)

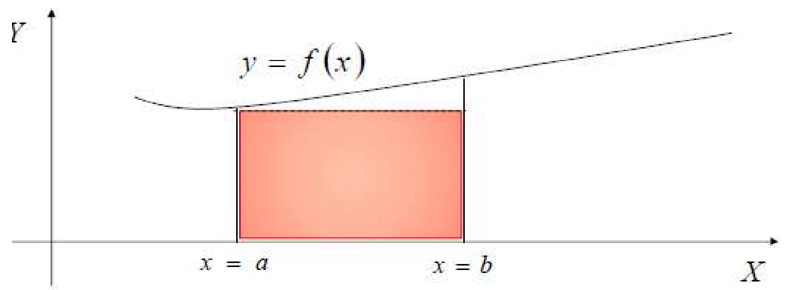
1-2التكامل العددي:

تعتمد الطرق العددية لحساب قيمة تقريبية لتكامل محدد على تجزئة مجال المكاملة إلى أقسام صغيره وحساب المساحات المحددة ثم جمع هذه المساحة الجزئية للحصول على القيمة التقريبية للتكامل الكلي وسندرس أهم هذه الطرق وأكثرها إنتشارا.

1-1-2طريقة المستطيلات :

لتكن لدينا الدالة $y = f(x)$ قابلة لتكامل على المجال [a , b]والمطلوب هو إيجاد قيمة تقريبية لتكامل هذه الدالة على المجال$[a, b]$.

تستخدم هذه الطريقة كقيمة تقريبية لتكامل مساحة المستطيل الذي طوله المجال$[a, b]$ وعرضه f(a) .



الشكل(1-2)

.

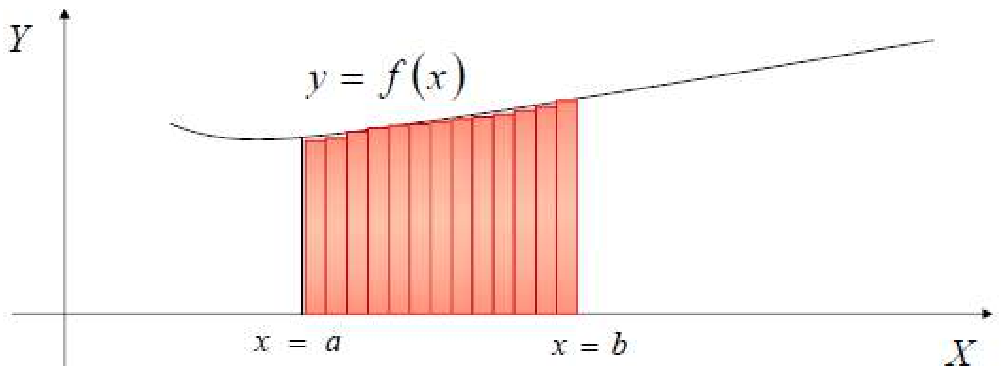
أي أن القيمة التقريبية للتكامل تعطي بالعلاقة :

$$I = \int_a^b f(x).dx \cong (b-a).f(a) \quad (1\_2)$$

نلاحظ أن الخطأ في القيمة التقريبية التي تعطيها هذه العلاقة يكون كبير إذا كان طول المجال *[a , b]* كبير وصغير إذا كان المجال*[a , b]* صغير .

لذالك ,وللحصول على قيمة تقريبية للتكامل ذات دقة أكبر و خطأ مرتكب أقل , فإننا نقوم بتجزئة المجال *[a , b]* إلى *n* مجال جزئي متساوي الطول كل منها هو:

$h = (b-a)/n$.



الشكل(2-2)

عند القيام بذالك فإن القيمة التقريبية للتكامل يمكن أن تعطى بالشكل التالي:

$$I = \int_a^b f(x).dx$$

$$= \frac{(b-a)}{n}[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})]$$

$$= h[f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1}](2\_2)$$

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

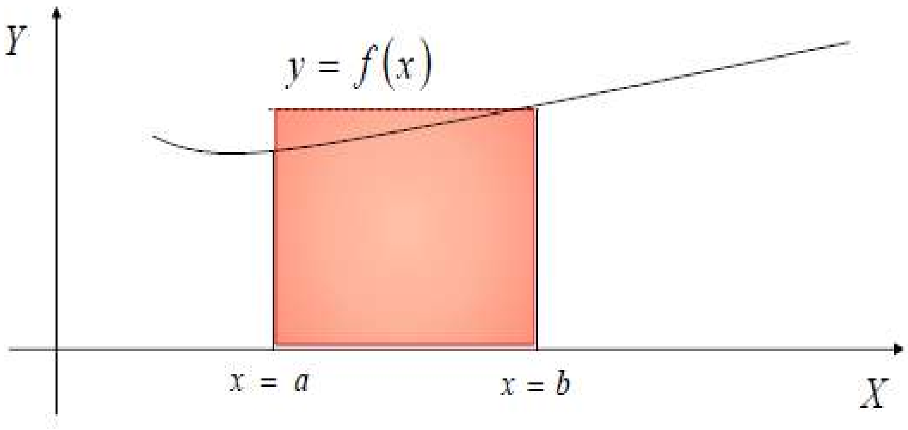
من الواضح أنه عندما $n \to \infty$ فإن القيمة التقريبية للتكامل المحسوبة بهذه الطريقة تساوي مساحة السطح المحدود بمنحنى الدالة $y = f(x)$ والمحور X والمستقيمين $x = a \ , \ x = b$ وهي القيمة الفعلية للتكامل

ملاحظة1:

كان من الممكن حساب قيمة تقريبية لمساحة السطح المحدود بمنحنى الدالة

$y = f(x)$ والمحور X والمستقيمين $x = a \ , \ x = b$ بالشكل التالي:

$$I = \int_a^b f(x).dx \cong (b-a).f(b)$$



الشكل(3-2)

نلاحظ عند ذالك, بتقسيم المجال [a , b] إلى n مجال جزئي متساوي الطول فإن القيمة التقريبية للتكامل تعطي بالشكل :

$$I = \int_a^b f(x).dx = \frac{(b-a)}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]$$
$$= h[f_1 + f_2 + \cdots + f_n] (3\_2)$$
$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

مثال (1_2):

ليكن لدينا $y = f(x)$ المعطاة بالجدول التالي:

X	*1.6*	*1.8*	*2.0*	*2.2*	*2.4*	*2.6*
F(X)	*4.953*	*6.050*	*7.389*	*9.25*	*11.23*	*13.46*

والمطلوب هوا حساب قيمة التكامل :

$$I = \int_{1.6}^{2.6} f(x).dx$$

الحل :

باعتبار $h = 0.2$ عندها يمكن تقسيم المجال إلى خمس مجالات

صغيرة متساوية الطول بالشكل :

$$x_0 = 1.6 < 1.8 < 2.0 < 2.2 < 2.4 < 2.6 = \mathrm{x_n}$$

وبالتالي فإن القيمة التقريبية للتكامل تكون :

$$I \cong h[f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4]$$

$$\cong 0.2[4.953 + 6.050 + 7.389 + 9.025 + 11.023]$$

$$\cong 0.2(38.44) = 7.688$$

2-1-1-1حساب الخطأ المرتكب لطريقة المستطيلات:

نعلم أن الخطأ المرتكب هو الفرق مابين القيمتين الحقيقية و التقريبية للتكامل لذالك يمكننا أن نكتب :

$$R_1 = \int_a^b f(x).dx - (b - a)f(a)$$

باستخدام نشر تايلور يمكن أن نكتب:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)}{2!} + \cdots$$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(\xi_1); \quad \xi_1 \in [a, b]$$

وباعتبار $x_0 = \mathrm{a}$ يكون :

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(\xi_1)$$

وبتكامل الطرفين على المجال $[a, b]$ نجد أن :

$$\int_{a}^{b} \mathrm{f(x)dx} - \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{f(a)dx} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} (\mathrm{x}-\mathrm{a})\mathrm{f'}(\xi_1)dx$$

$$\int_{a}^{b} \mathrm{f(x)dx} - (\mathrm{b}-\mathrm{a})\ \mathrm{f(a)} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} (\mathrm{x}-\mathrm{a})\mathrm{f'}(\xi_1)dx$$

ومنه نستنتج أن الخطأ المرتكب يكتب بالشكل :

$$R_1 = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} (\mathrm{x}-\mathrm{a})\ \mathrm{f'}(\xi_1)dx$$

$$R_1 = \mathrm{f'}(\xi_1) \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} (\mathrm{x}-\mathrm{a})\ \mathrm{dx}$$

$$= \frac{(\mathrm{b}-\mathrm{a})^2}{2}\ \mathrm{f'}(\xi_1) \qquad (4\_2)$$

وباعتبار الصيغة المستخدمة تستخدم مجال واحد فقط من طول $(h = b - a)$ يمكننا أن نكتب :

$$R_1 = \frac{\mathrm{h}^2}{2}\ \mathrm{f'}(\xi_1) \qquad (5\_2)$$

أما في حالة استخدام n من المجالات الجزئية المتساوية فإن :

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n = \frac{h^2}{2} \sum_{i=1}^{n} f'(\ \xi_i)$$

وبالتالي يكون :

$$R = \frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{i=1}^{n} f'(\ \xi_i) \qquad (6\_2)$$

باعتبار أن$f'(x)$ دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ فإنه يمكن إيجاد نقطة في هذا المجال مثل ξ بحيث يكون :

$$f'(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)$$

وبالتالي فإن الخطأ المرتكب عند تقسيم المجال $[a,b]$إلى n من المجالات الجزئية المتساوية يكتب على الشكل التالي :

$$R = \frac{b-a}{2} h f'(\xi)$$

مثال(2_2):

استخدم طريقة المستطيلات لحساب القيمة التقريبية للتكامل التالي:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x+1}$$

حيثh=0.1 ثم احسب الخطأ المرتكب .

الحل:

نقوم بتجزئة المجال [0,1] إلى عشرة أقسام متساوية فنحصل على الجدول التالي الذي يعطي قيم الدالة $f(x) = \frac{1}{1+x}$ عند نقاط التقسيم :

X	F(x)	X	F(x)
0	1	0.6	0.625
0.1	0.909090909	0.7	0.588235294
0.2	0.833333333	0.8	0.555555555
0.3	0.769230769	0.9	0.526315789
0.4	0.714285714	1	0.5
0.5	0.666666666		

باستخدام طريقة المستطيلات لحساب القيمة التقريبية للتكامل نكتب:

$$I \cong h[f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_9]$$

$$\begin{aligned} I \cong 0.1[&1 + 0.909090909 + 0.833333333 + 0.769230769 \\ &+ 0.714285714 + 0.666666666 + 0.625 \\ &+ 0.588235294 + 0.555555555 + 0.526315789] \end{aligned}$$

$$\cong 0.718771402$$

ولحساب الخطأ المرتكب نستخدم العلاقة:

$$R = \frac{b-a}{2} h f'(\xi); \qquad \xi \epsilon [0,1]$$

حيث $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

و $h = 0.1$ فيكون :

$$R_{\max} = |(0.5)(0.1)(-1)| = 0.05$$

$$R_{\min} = |(0.5)(0.1)(-0.25)| = 0.0125$$

2-1-2 قاعدة شبه المنحرف Trapezoidal Rule:

تعتمد هذه الطريقة على تقسيمه منتظمة لنطاق المتغير المستقل كما هو موضح بالشكل(2-4)

ومن الواضح أن عدد التقسيمات panels هو،وأن الاتساع h ويعطى بالعلاقة:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

وقد استخدمنا الموشر i ($0 \le i \le n$) للدلالة على النقاط المختلفة .

دعنا نفترض أنه يمكن تقريب الدالة f(x) خلال كل تقسيمة بخط مستقيم ، وبذلك تكون كل تقسيمة شبه المنحرف شكل (5-2) ، وتكون مساحته عند النقطة i هي :

$$I_{\mathrm{i}} = (\mathrm{f_i} + \mathrm{f_{i+1}})\frac{\mathrm{h}}{2} \qquad (7\_2)$$

وبما أن التكامل المحدود Iهو المساحة تحت منحنى الدالة f(x) على النطاق [a,b] ، إذا نحسبه بجمع مساحات التقسيمات$\mathrm{I_i}$ من *i=0* إلى*(n-1) = i* ، أي أن :

$$\mathrm{I} = \sum_{\mathrm{i}=0}^{n-1} \mathrm{I_i} = \frac{\mathrm{h}}{2}\sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}-1}(\mathrm{f_i} + \mathrm{f_{i+1}})$$

$$= \frac{h}{2}(\mathrm{f_0} + \mathrm{f_n} + 2\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}-1}\mathrm{f_i}) \qquad (8\_2)$$

وتعرف هذه المعادلة بقاعدة شبه المنحرف وقد توصلنا إليها بطريقة هندسية بحثه، تمثلت في حساب مساحات التقسيمات المختلفة ثم جمعها لحساب قيمةI.هذه المعادلة ليست صيغة عددية متكاملة لأنها لا تشمل أي تقدير للخطأ المصاحب لها، وهو الخطأ الناتج عن تقريب الدالة f(x) بخط مستقيم، ولذلك تسمى هذه المعادلة بقاعدة شبه المنحرف غير المصححة أو قاعدة شبه المنحرف بدون تصحيح .

وحتى يمكننا الحصول على تعبير عددي لقاعدة شبه المنحرف نستخدم متسلسلة تايلور المقطوعة .

نعرف أولا التكامل غير المحدود $I(\mathrm{x})$ كالآتي:

$$I(x)=\int_{a}^{x} f(x)dx$$

وبذلك تكون المشتقات$I'(\mathrm{x})$و $I''(\mathrm{x})$ و... كما يلي:

$I'(\mathrm{x}) = f(x), I''(x)=f'(x), ...$

نستخدم الآن متسلسلة تايلور المقطوعة لنعبر$I(x)$عند النقطة $i+1$ وبأخذ أربعة حدود فقط نحصل على :

$$I_{\mathrm{i+1}}=\mathrm{I_i}+\mathrm{h}I'_{\mathrm{i}}+\frac{h^2}{2!}\mathrm{I''_i}+\frac{\mathrm{h}^3}{3!}\mathrm{I'''_i}+0\ (\mathrm{h})^4$$

وبالتعويض بالعلاقات نجد أن :

$$I_{\mathrm{i+1}}=\mathrm{I_i}+\mathrm{h}f_{\mathrm{i}}+\frac{h^2}{2!}\mathrm{f'_i}+\frac{\mathrm{h}^3}{3!}\mathrm{f''_i}+0\ (\mathrm{h})^4$$

والآن، نستطيع التعويض عن f_{i}' بالتعبير العددي الآتي:

$$\mathrm{f_i'}=\frac{1}{\mathrm{h}}(\mathrm{f_{i+1}}-\mathrm{f_i})-\frac{\mathrm{h}}{2}\mathrm{f_i''}+0\ (\mathrm{h})^2$$

وبذلك تصبح المعادلة كالآتي :

$$I_{\mathrm{i+1}}-\mathrm{I_i}=\frac{\mathrm{h}}{2}(\mathrm{f_i}+\mathrm{f_{i+1}})-\frac{\mathrm{h}^3}{12}\mathrm{f_i''}+0\ (h)^4$$

ولكن $(I_{\mathrm{i+1}}-\mathrm{I_i})$ هي مساحة التقسيمة بين *i* و*i+1*، وبما أن التكامل المحدود *1* هو مجموع المساحات من *i=0* إلى *i=n-1* إذن نستطيع التعبير عن قيمة I كما يلي :

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} I_{i+1} - I_i$$

$$= \frac{h}{2}\left[\mathrm{f_0} + \mathrm{f_n} 2 \sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n-1}} \mathrm{f_i}\right] - \frac{h^3}{12} \sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n-1}} \mathrm{f_i''} \qquad (9\_2)$$

أخطاء من مرتبة أعلى **+**

باستخدام نظرية القيمة المتوسطة *mean value theory* يمكن أتبات أن :

$$\frac{h^3}{12} \sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n-1}} f_i'' = \frac{\mathrm{h^3}}{12} \mathrm{nf''}\ (\xi)$$

$$= \frac{h^2}{12} [\mathrm{f'(b)} - \mathrm{f'(a)}]$$

حيثξ هي قيمة وسيطة للمتغير المستقل *x* في النطاق $[a, b]$.

وقد وجد أيضا أن الأخطاء المرتبة الأعلى مبنية في المعادلة هي في الحقيقة أخطاء من المرتبة الرابعة وأعلى وبالتعويض في المعادلة نجد أن:

$$I = \frac{h}{2}\left[f_0 + f_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i\right] - \frac{h^2}{12} [\mathrm{f'(b)} - \mathrm{f'(a)}] - \mathrm{O(h)^4} \quad (10\_2)$$

وهذا هو التعبير العددي لقاعدة شبه المنحرف ويشمل قيمة التكامل كما هو المعطى بقاعدة شبه المنحرف الغير ، و بالإضافة إلى خطأ سائد *dominant error*

يتناسب مع h^2 وخطأ من مرتبة أعلى يتناسب مع h^4 ، ويمكن حساب ذلك الخطأ السائد وإضافته لقيمة التكامل كتصحيح ، ويسمى بتصحيح الطرفي *end correction* لأنه يحسب بدلالة المشتقة الأولى للدالة عند طرفي النطاق *x=a* و*x=b*.

وفي ضوء ما تقدم ، يتضح إن قاعدة شبه منحرف بدون تصحيح هي طريقة عددية من المرتبة الثانية، أي أن الخطأ المصاحب لها يتناسب مع h^2 أو يتناسب مع $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ ، ولكن قاعدة شبه المنحرف المصححة طرفيا هي طريقة عددية من المرتبة الرابعة لان الخطأ المصاحب لها يتناسب مع h^4 أو يتناسب مع $\left(\frac{1}{n}\right)^4$.

من المعتاد ، عند تحليل الأخطاء المصاحبة لطرق التكامل العددية ، أن نعبر مرتبة الخطأ بدلالة $\left(\frac{1}{n}\right)$ ، فعندما تكون الطريقة من المرتبة الثانية -على سبيل المثال- يتناسب الخطأ مع $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ ، أي انه إذا ضاعفنا قيمة n سيقل الخطأ إلى الربع ، أما إذا كانت الطريقة العددية من المرتبة الرابعة ، سوف يقل الخطأ إلى $\frac{1}{16}$ كلما تضاعفت قيمة n وهكذا .

مثال(3_2):

باستخدام قاعدة شبه المنحرف أدرس القيمة التقريبية للتكامل

$$\int_0^2 e^x dx$$

باستخدام 1,2,4,8 من الفترات الجزئية

الحل

$n = 1$:

$$\frac{1}{2}(2)\{f(0) + f(2)\} = 8.3890561$$

$n = 2$:

$$\frac{1}{2}(1)\{f(0) + f(2) + 2f(1)\} = 6.9128099$$

$n = 4$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left\{f(0) + f(2) + 2[f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right)]\right\} = 6.5216101$$

$: n = 8$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\left\{f(0) + f(2) + 2[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) + +f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right)]\right\} = 6.4222978$$

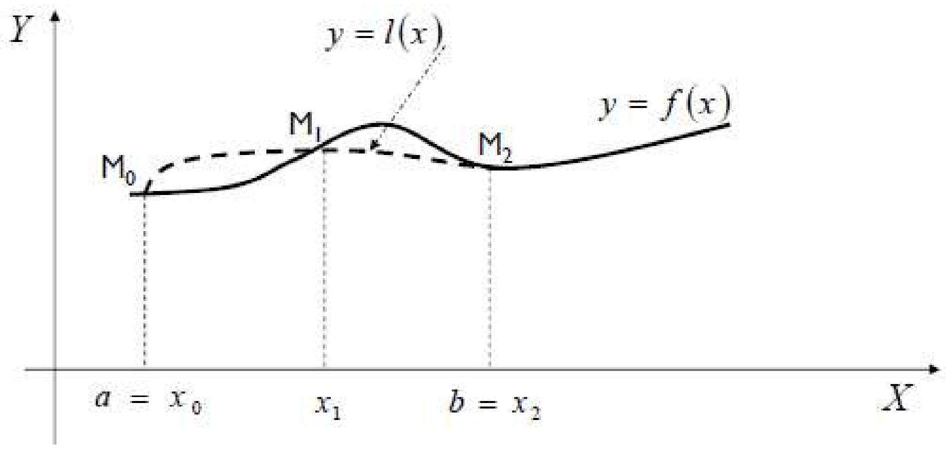
القيمة المضبوطة لهذا التكامل هي *6.3890561* , وبالتالي فإن الأخطاء المناضرة تكون على الترتيب

-2.000000 , -0.5237538 , -0.1325540 , -0.0332417

وهي تتناقص, بمعامل قدره *4* تقريبا عند كل مرحلة .

3-1-2 قاعدة سيمسون Simpsons Rule:

طريقة سيمسون تعتمد على استبدال الدالة المكاملة بحدودية من الدرجة الثانية ولذالك فإننا نحتاج إلى ثلاث نقاط من أجل كل من أجزاء التكامل ومن هنا تسمى هذه الطريقة بطريقة الخطوة المزدوجة أيضا .



الشكل(6-2)

في هذه الحالة نستخدم الواقع تحت الخط البياني للقطع المكافئ $y = I(x)$

والمحصورة بالمحور x والمستقيمين $x = a\ ,\ x = b$ كقيمة تقريبية للتكامل :

$$I = \int_a^b f\ (x)\ dx$$

تقضي طريقة سيمسون بتجزئة مجال المكاملة [a,b] إلى عدد زوجيn من المجالات الجزئية المتساوية الطول كل مجال جزئي :

$$h = \frac{b \; - \; a}{n}$$

والآن نبدأ بحساب التكامل من $x_0 = a$ وحتى x_2 حيث :

$$x_1 = x_0 + h \,, \quad x_2 = x_0 + 2h$$

وذالك بأن نكتب الدالة $y = f(x)$ بدلالة كثيرة حدود نيوتن _ لفروق الأمامية من الدرجة الثانية ولتكن

$$p_2(x) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0$$

وباجراء التكامل على الفترة $[x_0, x_2]$

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} p_2(x)dx = \int_{x_0}^{x_0+2h}\left(f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0\right)dx$$

وبتحويل التكامل في الجهة اليمنى بدلالة s يصبح

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} p_2(x)dx = h\int_{0}^{2}\left(f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0\right)ds$$

وبما أن :

$$s = \frac{(x - x_0)}{h}$$

فإن

$$ds = \frac{dx}{h} \qquad \text{ومنها} \qquad dx = h\,ds$$

$$x = x_0 \rightarrow s = 0$$

$$x = x_0 + 2h \;\rightarrow\; s = 2$$

فنحصل على:

$$= h\left[sf_0 + \frac{s^2}{2}\Delta f_0 + \left(\frac{s^3}{6} - \frac{s^2}{4}\right)\Delta^2 f_0\right]_0^2$$

$$= \mathrm{h}\left[2\mathrm{f}_0 + 2\Delta\mathrm{f}_0 + \frac{1}{3}\Delta^2\mathrm{f}_0\right]$$

$$= \mathrm{h}\left[2\mathrm{f}_0 + 2(\mathrm{f}_1 - \mathrm{f}_0) + \frac{1}{3}(\mathrm{f}_2 - 2\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_0)\right]$$

$$= \frac{h}{3}[\mathrm{f}_0 + 4\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2] \qquad (11\_2\,)$$

وهذه الصيغة تسمى بصيغة سيمسون البسيطة.

و لحساب القيمة الكلية للتكامل على كامل المجال [a , b] والتي تسمى **بالصيغة المركبة** نقوم باستخدام نفس الأسلوب السابق لحساب كل التكاملات الجزئية من x_2 إلى x_4 وهكذا حتى التكامل الأخير من $x_{\mathrm{n}-2}$ إلى x_{n} فنجد:

$$\int_{\mathrm{a}}^{b} \mathrm{f(x)dx} = \int_{\mathrm{x}_0}^{\mathrm{x}_2} \mathrm{f(x)dx} + \int_{\mathrm{x}_2}^{\mathrm{x}_4} \mathrm{f(x)}\, dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

فنحصل على

$$\cong \frac{h}{3}(\mathrm{f}_0 + 4\mathrm{f}_1 + \mathrm{f}_2) + \frac{\mathrm{h}}{3}(\mathrm{f}_2 + 4\mathrm{f}_3 + \mathrm{f}_4) + \cdots + \frac{\mathrm{h}}{3}(\mathrm{f}_{\mathrm{n}-2} + 4\mathrm{f}_{\mathrm{n}-1} + \mathrm{f}_{\mathrm{n}})$$

$$= \frac{h}{3}(\mathrm{f}_0 + 4\mathrm{f}_1 + 2\mathrm{f}_2 + 4\mathrm{f}_3 + \cdots + 2\mathrm{f}_{\mathrm{n}-2} + 4\mathrm{f}_{\mathrm{n}-1} + \mathrm{f}_{\mathrm{n}})$$

وبالتالي فإن طريقة سيمسون تعطى قيمة تقريبية للتكامل المحدد:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

بالعلاقة :

$$\int_{a}^{b} \mathrm{f(x)dx} \cong \frac{\mathrm{b-a}}{3\mathrm{n}}[\mathrm{f}(\mathrm{x}_0)+4\mathrm{f}(x_1)+\ f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1})+\ f(x_n)] \quad (12\_2)$$

1-3-1-2حساب الخطأ المرتكب في طريقة سيمسون :

لحساب الخطأ المرتكب نقوم بحساب الخطأ المرتكب في المجال الجزئي الأول أي في المجال $[x_0\,, x_2]$. بما أننا استبدلنا التابع المكامل بحدودية نيوتن –للفروق الأمامية من الدرجة الثانية فإن الخطأ المرتكب يكون من مرتبة الحد التالي أي:

$$R_1 = h\int_0^2 \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0.ds$$

$$= \frac{h\Delta^3 f_0}{6}\int_0^2 (\mathrm{s}^3 - 3\mathrm{s}^2 + 2\mathrm{s}).\mathrm{ds} = 0$$

ملاحظة2:

وبما أن نتيجة هذا التكامل تساوي الصفر فإن هذه النتيجة تدفعنا إلى الإنتقال إلى الحد الخامس من حدودية نيوتن لأن من غير المعقول أن تكون صيغة سيمسون بدون خطأ .

وعليه فإن:

$$R_1 = h\int_0^2 \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!}ds.\Delta^4 f_0 = -\frac{1}{90}h.\Delta^4 f_0$$

بالاعتماد على العلاقتين التاليتين:

$$(\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1, \ldots\ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) = \frac{\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}(\xi)}{\mathrm{n}!}; \quad \xi \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$$

$$(x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n) = \frac{\Delta^n f(x)}{\mathrm{n}!\,\mathrm{h}^\mathrm{n}}$$

يمكننا أن نكتب:

$$f^{(4)}(\xi) = \frac{\Delta^4 \mathrm{f}_0}{\mathrm{h}^4}; \quad \xi \in (\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_2)$$

وبالتالي فإن صيغة الخطأ تكتب بالشكل التالي:

$$R_1 = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi_1) \qquad (13\_2)$$

تعطي الصيغة السابقة الخطأ عند حساب قيمة تقريبية للتكامل على المجال الجزئي الأول $[x_0, x_2]$, وبالتالي فإن الخطأ الكلي المرتكب يساوي مجموع الأخطاء المرتكبة على كل المجالات الجزئية والتي عددها $n/2$ مجال , أي أن:

$$R = \frac{n}{2}\left[-\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)\right] ;\xi \in [a, b]$$

بما أن:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

فإن عبارة الخطأ الكلي المرتكب:

$$R = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi); \quad \xi \in [a, b] \qquad (14\_2)$$

مثال(4_2):

سنعيد حل المثال السابق باستخدام قاعدة سيمسون

$$\int_0^2 e^x dx$$

باستخدام *2,4,8*من الفترات الجزئية, أي باستخدام $n = 1,2,4$.

الحل

: $n = 1$

$$\frac{1}{3}(1)\{f(0) + f(2) + 4f(1)\} = 6.4207278$$

:$n = 2$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left\{f(0) + f(2) + 4[f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + 2f(1)]\right\} = 6.3912102$$

:$n = 4$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)\left\{f(0) + f(2) + 4[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f(\frac{7}{4}) + 2[f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right)]]\right\} = 6.3891937$$

والأخطاء المناظرة هي على الترتيب :

-0.0316717 , -0.0021541 , -0.0001376

وهي تتناقص بمقدار قدره *16* تقريبا عند كل مرحلة .

نلاحظ أن هده النتائج هي أكثر دقة من تلك التي حصلنا عليها باستخدام قاعدة شبة المنحرف (للعدد نفسه من حسابات قيمة الدالة).

ولاكن العيب الأساسي لقاعدة سيمسون هو أن استخدامها يقتصر فقط على تقسيم الفترة

4-1-2 قاعدة سيمسون $\frac{3}{8}$Simpson's Rule :

عندما نستخدم متعددة الحدود من الدرجة الثالثة بتقريب الدالة$f(x)$على الفترة $[a, b]$ فإننا نحتاج إلى أربعة نقاط لتكوين هذه الحدودية , ففي صيغ نيوتن التقديمية للفرقات المنتهية وعندما $n = 3$ على نقاط موزعة بانتظام يكون

$$p_3(x) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0$$

وبنفس الأسلوب الذي تم اتباعه في سيمسون فإن:

$$\int_{x_0}^{x_3} p_3(x) = h\int_0^3 (f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0)ds$$

وبإجراء عملية التكامل نستنتج الصيغة

$$\int_{x_0}^{x_3} p_3(x) = \frac{3}{8}h(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) \qquad (15\_2)$$

وتسمى بصيغة سيمسون $\frac{3}{8}$ البسيطة .

ولإيجاد **الصيغة المركبة** نقسم الفترة$[a,b]$إلى n من الفترات الجزئية بحيث أن n يقبل القسمة على 3 .

فتكون الصيغة

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_{x_0}^{x_3} p_3(x)dx + \int_{x_3}^{x_6} p_3(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-3}}^{x_n} p_3(x)dx$$

$$= \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) + \frac{3h}{8}(f_3 + 3f_4 + 3f_5 + f_6) + \cdots + \frac{3h}{8}(f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f)$$

نضعها على صيغة مجموع فتصبح

$$= \frac{3h}{8}\left[f_0 + 3\sum_{i=0}^{\frac{n}{3}-1}(f_{3i+1} + f_{3i+2}) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{3}-1}(f_{3i} + f_n)\right] \qquad (16\_2)$$

وهذه الصيغة تسمى بالصيغة المركبة لقاعدة سيمسون $\frac{3}{8}$ ومن المتوقع أن تعطي قيمة مضبوطة للتكامل على متعددات الحدود من الدرجة الرابعة فما دون ذالك.

1-4-1-2حساب الخطأ المرتكب في طريقة سيمسون$\frac{3}{8}$:

لحساب الخطأ المرتكب نقوم بحساب الخطأ المرتكب في المجال الجزئي الأول أي في المجال $[x_0 , x_3]$فإننا نجرى التكامل للحد الخامس من حدودية نيوتن على هذا المجال وبنفس الأسلوب **الذي** تم اتباعه في حساب الخطأ لسيمسوننجد أن:

$$R_1 = \int_{x_0}^{x_3} \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!} \Delta^4 f_0 dx$$

$$= h\int_0^3 \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!}\Delta^4 f_0 ds$$

$$= \frac{-3}{80}\mathrm{h}\Delta^4\mathrm{f}_0$$

ولأن

$$f^{(4)}(\xi) = \frac{\Delta^4\mathrm{f}_0}{\mathrm{h}^4}; \quad \xi \in (\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_3)$$

فإن

$$\mathrm{R}_1 = \frac{-3}{80}\mathrm{h}^5\mathrm{f}^{(\mathrm{Iv})}(\xi); \quad \xi \in (\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_3)(17\_2)$$

أما للصيغة المركبة لسيمسون $\frac{3}{8}$ فإن

$$\mathrm{R}_1 = \frac{-3h^5}{80}\left[f^{(Iv)}(\xi_1) + f^{(\mathrm{Iv})}(\xi_2) + \cdots + f^{(\mathrm{Iv})}\left(\xi_{n/3}\right)\right] \quad (*)$$

حيث كل من ξ_{i} في فترة التكامل الكلية $[a, b]$. فبفرض أن $f^{\mathrm{Iv}}(\mathrm{x})$ متصلة على $(a.b)$ فإنة توجد نقطة x في $(a.b)$, ولتكن $x = \eta$ عندها يكون المجموع بين القوسين في $(*)$ يساوي $\frac{n}{3}f^{(\mathrm{Iv})}(\eta)$.

$$\mathrm{R}_1 = \frac{-3}{80}\mathrm{h}^5\left(\frac{\mathrm{n}}{3}f^{(\mathrm{Iv})}(\eta)\right)$$

ولأن

$$n = \frac{b-a}{h}$$

فتصبح المعادلة على صورة

$$\mathrm{R}_1 = \frac{-(\mathrm{b}-\mathrm{a})}{80}\mathrm{h}^4 f^{(\mathrm{Iv})}(\eta)(18\_2)$$

5-1-2قواعد نيوتن – كوتس Newton-Cotes Rules:

تنقسم صيغ نيوتن – كوتس إلى نوعين مغلقة ومفتوحة:

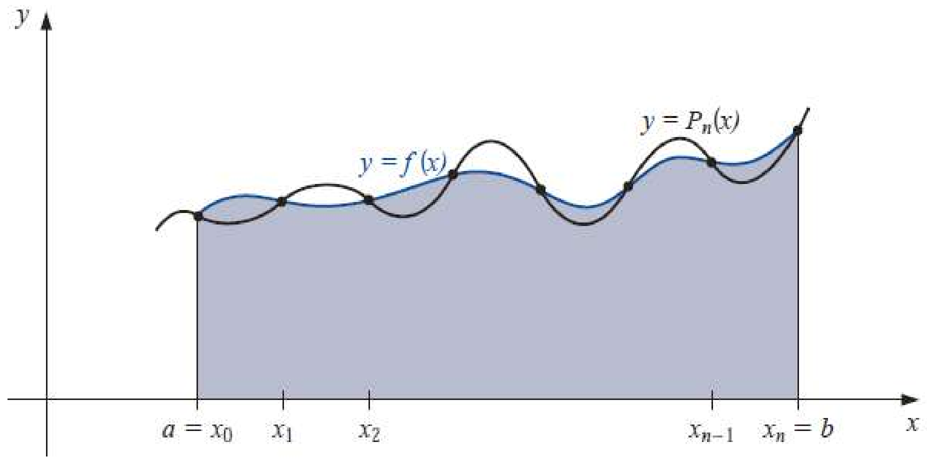
1-5-1-2صيغ نيوتن - كوتس المغلقة :

وهي قاعدة المستطيلات وشبه المنحرف وقاعدة سيمسون وسيمسون $\frac{3}{8}$ التي قمنا بدراستها سابقا بالإضافة إلى الصيغة

: n=4

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{2h}{8}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] - \frac{8h^8}{945}f^{(6)}(\xi) \qquad (19\_2)$$

عندما يكون $x_0 < \xi < x_4$.



الشكل(7-3)

وتسمى الصيغة المغلقة لأن نقطتي نهاية الفترة مشمولة كهذا.

الصيغة نفرض صحة الشكل

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i\, f(x_i)$$

عندما تكون

$$a_i = \int_{x_0}^{x_n} L_k(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} \prod_{\substack{i=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}\ dx$$

مثال(5_2) :

باستخدام صيغة نيوتن-كوتس المغلقة أدرس القيمة التقديرية لهذا التكامل

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x\ dx$$

الحل

قاعدة المستطيل تعطي:

$$\frac{\pi}{4} f(0) = 0.00000$$

قاعدة شبه المنحرف تعطي :

$$\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\left[f(0) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 0.218090$$

قاعدة سيمسون تعطي :

$$\frac{1}{3}\frac{\pi}{8}\left[f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{8}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 0.262662$$

وتعطي قاعدة $\frac{3}{8}$ لسيمسون:

$$\frac{3}{8}\frac{\pi}{12}\left[f(0) + 3f\left(\frac{\pi}{12}\right) + 3f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 0.262553$$

وفي الحقيقة القيمة المضبوطة لهذا التكامل هي 0.262467 لستة أرقام عشرية,وبالتالي تكون الأخطاء المناظرة على الترتيب :

$$0.262467, 0.044377, -0.000195, -0.000086$$

2-5-1-2صيغة نيوتن-كوتس المفتوحة:

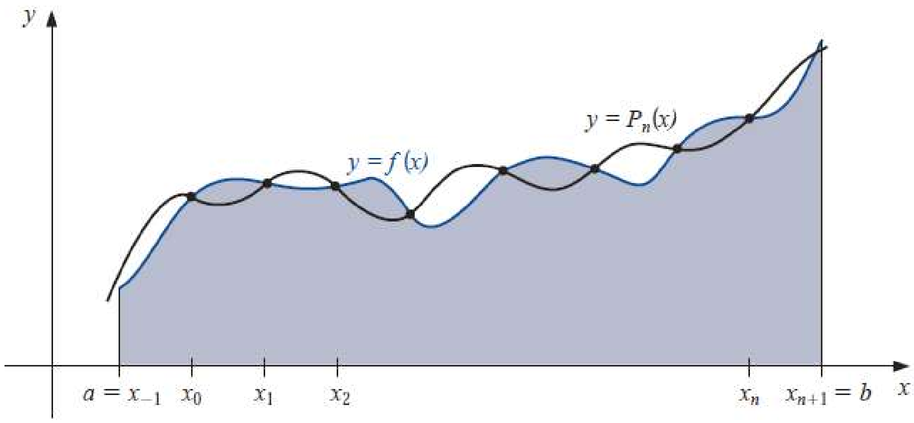
فإن العقد المستخدمة $x_i = x_0 + ih$ حيث $i = 0,1, \dots .n$ وعندما تكون $x_0 = a$ و $x_n = b$ و $h = \frac{b-a}{n+2}$ و $x_0 = a + h$ هذا يؤدي إلى $x_n = b - h$.

لهذا السبب فإذا صنفنا نقطة النهاية $x_{-1} = a$ و $x_{n+1} = b$ فإن الصيغة تصبح

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

عندما يكون

$$a_i = \int_a^b L_i(x)dx$$



الشكل(3-8)

نظرية 1.2 :

إذا كان $\sum_{i-0}^{n} a_i f(x_i)$ يدل على صيغة نيوتن – كوتس ل$n+1$ من النقط

مع$a = x_{-1}$ و$x_{n+1} = b$ و$h = \frac{b-a}{n+2}$, فإن يوجد $\xi \in [a,b]$ بالخاصة

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i-0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_{-1}^{n+1} s^2(s-1)\dots(s-n)ds \quad (20\_2)$$

إذا كانت n عدد زوجي و$f \in c^{n+2}[a,b]$ و

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i-0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_{-1}^{n+1} s^2(s-1)\dots(s-n)dx \qquad (21\_2)$$

إذا كان n عدد فردي $f \in c^{n+1}[a,b]$.

بعض صيغ نيوتن-كوتس المفتوحة وحدود خطأها تعرض كالتالي:

n=0: طريقة منتصف النقطة

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)dx = 2h\,[f(x_0)] - \frac{h^3}{3} f''(\xi) \qquad (22\_2)$$

عندما يكون $x_{-1} < \xi < x_1$

: n=1

$$\int_{x_{x-1}}^{x_2} f(x)dx = \frac{3h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] - \frac{3h^3}{4} f''(\xi) \qquad (23\_2)$$

عندما يكون $x_{x-1} < \xi < x_2$.

: n=2

$$\int_{\mathrm{x}_{\mathrm{x}-1}}^{x_3} \mathrm{f(x)dx} = \frac{4\mathrm{h}}{3}[2f(x_0) + f(x_1) + 2f(x_2)] - \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi) \qquad (24\_2)$$

عندما يكون $x_{-1} < \xi < x_3$.

: n=3

$$\int_{\mathrm{x}_{-1}}^{x_n} \mathrm{f(x)dx} = \frac{5\mathrm{h}}{24}[11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)] - \frac{95}{144} h^5 f^{(4)}(\xi) \qquad (25\_2)$$

عندما يكون $x_{-1} < \xi < x_4$.

مثال(6_2):

سنعيد حل المثال (5_2) باستخدام صيغ نيوتن كوتس المفتوحة

الحل

عندما $n = 0$ تعطي:

$$2\frac{\pi}{8} f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0.284948$$

$n = 1$ تعطي :

$$\frac{3}{2}\frac{\pi}{12}\left[f\left(\frac{\pi}{12}\right) + f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 0.277375$$

$n = 2$ تعطي :

$$\frac{4}{3}\frac{\pi}{16}\left[2f\left(\frac{\pi}{16}\right) - f\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2f\left(\frac{3\pi}{16}\right)\right] = 0.262297$$

$n=3$ تعطي:

$$\frac{5}{24}\frac{\pi}{20}\left[11f\left(\frac{\pi}{20}\right)+f\left(\frac{\pi}{10}\right)+f\left(\frac{3\pi}{20}\right)+11f\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]=0.262349$$

والأخطاء المناظرة هي على الترتيب :

$$-0.022481,-0.014908,-0.000170,0.000118$$

وعندما نقارن هذه النتائج بتلك التي حصلنا عليها في المثال(5_2) نجد أن النتائج التي حصلنا عليها باستخدام الصيغ المفتوحة لقيم $n=1,2$ أكثر دقة من تلك التي حصلنا عليها باستخدام الصيغ المغلقة المناضرة.

6-1-2 تكامل رومبورج Romberg Integration :

عند حساب القيمة العددية للتكامل Iبواسطة قاعدة شبه المنحرف باستخدام عدد n من التقسيمات ، وبحيث كانت n أقل من العدد الذي يسبب خطأ تقريب محسوس ، فإننا نعرف سلفا أن الخطأ الكلي سوف يكون خطأ قطع فقط ، ويتناسب مع $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ بالإضافة إلى أخطاء من مرتبة أعلى ، وقد وجد أن الخطأ المصاحب لهذه القاعدة يعطى بالعلاقة :

$$\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{1}{n}\right)^6+\cdots$$

دعنا نحسب قيمة التكامل Iباستخدام قاعدة شبه المنحرف لعدد من التقسيمات قدرها n, 2n,4n,... وبحيث لا تتعدى أكبر مضاعفات n الحد الأقصى المسموح به ، وسنرمز إلى هذه القيم العددية للتكامل بالرموز:

$I_{4\mathrm{n}}^0,\mathrm{I}_{2\mathrm{n}}^0,\mathrm{I}_{\mathrm{n}}^0$ وهكذا.وبما أننا نعرف أن الخطأ في $I_{2\mathrm{n}}^0$ هو $\frac{1}{4}$ الخطأ في $\mathrm{I}_{\mathrm{n}}^0$، إذن نستطيع الحصول على قيمة محسنة للتكامل $I_{2\mathrm{n}}$ سنرمز لها بالرمز $I_{2\mathrm{n}}^1$ كالآتي:

$$I_{2\mathrm{n}}^0-\mathrm{I}_{2\mathrm{n}}^1=\frac{1}{4}(\mathrm{I}_{\mathrm{n}}^0-\mathrm{I}_{2\mathrm{n}}^1)$$

أي أن:

$$I_{2\mathrm{n}}^1=\frac{4\mathrm{I}_{2\mathrm{n}}^0-\mathrm{I}_{\mathrm{n}}^0}{3}\qquad(26\_2)$$

نلاحظ أن الخطأ المتبقي في $\mathrm{I}_{2\mathrm{n}}^{1}$ هو خطأ من المرتبة الرابعة وأعلى،وهذا هو التكرار الأول ونستطيع حسابه لجميع مضاعفات n.وحتى يمكن التعبير عن ذلك بمعادلة عامة، نستخدم العلاقة: $\mathrm{n} = 2^{r}, r = 1, 2, \ldots, r_{max}$

وبذلك نستطيع كتابة المعادلة العامة للتحسين الأول كالآتي:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{r}}^{1} = \frac{4I_{r}^{0} - \mathrm{I}_{\mathrm{r}-1}^{0}}{3}$$

وبالطبع نستطيع تكملة دورة التحسين ، مع ملاحظة أن مرتبة الخطأ تزداد من تكرار إلى آخر بمقدار اثنين ، أي أن الخطأ في $\mathrm{I}_{\mathrm{r}-1}^{1} = \frac{1}{16}$ من الخطأ في قيمة I_{r}^{1} ، وهكذا ، نستطيع إذن كتابة المعادلة التحسينية الآتية :

$$\mathrm{I}_{\mathrm{r}}^{\ell} = \frac{(4)^{\ell}\mathrm{I}_{\mathrm{r}}^{\ell} - \mathrm{I}_{\mathrm{r}-1}^{\ell}}{(4)^{\ell} - 1} \qquad (27\_2)$$

$$r = \ell, \ell + 1, \ldots r\ max,$$

$$\ell = 1,2, \ldots \mathrm{r}_{\mathrm{max}}, \text{ or convergence}$$

وهذه هي المعادلة التكرارية لتكامل رومبورج .

مثال(6_2):

استخدم طريقة تكامل رومبورج لحساب القيمة العددية للتكامل:

$$\sin(\mathrm{x})\ \mathrm{dx} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}$$

وذلك بمستويات دقة $\varepsilon = 10^{-3}$ و $\varepsilon = 10^{-5}$.

الحل

نبدأ من قيمة $\ell = 1$ ، ونحسب قيم I_{r}^{ℓ} من r=1 إلى r=4 أي أننا أخذنا $r_{\max} = 4$ و $\ell_{\max} = 4$

وهذه الحسابات موضحة بالجدول التالي:

	1	2	3	4
1	0.163268237	-	-	-
2	0.334844085	0.392036034	-	-
3	0.380590604	0.395839443	0.396093003	-
4	0.392182862	0.396046948	0.396060781	0.396060269

وحيث إن قيمة ε هي الفرق بين قيمتي تكاملين متعاقبين ، فإذا كانت قيمة ε المحددة هي 10^{-3} نوقف دورة التكرار بعد $\ell = 2$ ،أما إذا كانت $\varepsilon = 10^{-5}$ فنكمل الدورة حتى $\ell = 4$ ، ونستطيع أيضا زيادة $r_{\max}$ للحصول على دقة أكبر .

7-1-2 تكاملات جاوس Gauss Quadratures :

لا تعتمد تكاملات جاوس العددية على وجود تقسيمة معروفة سلفا كما هو الحال في تكاملات نيوتن-كوتس ، ولكن المعاملات α_{i}تحدد آنيا مع نقاط x_{i} داخل النطاق بحيث تحقق شروطا معينة . وكما سيتضح فيما بعد ، يكون عدد النقاط قليلا ولكن متعددة الحدود التي تستخدم في تقريب الدالة تكون من درجة عالية ، وبذلك نحصل على مستويات عالية من الدقة مقابل جهد قليل في الحسابات ودون ظهور أي أثر سلبي للخطأ التقريبي التراكمي.

وسوف نتناول هنا تكاملات جاوس التي تعتمد على متعددات حدود لآجندر Lagendre Polynomials والتي لها التعامد orthogonality على النطاق$[-1,1]$.وسوف نطلق عليه تكامل جاوس بدلا من تكامل جاوس-لآجندر ،مع العلم بأن هناك تكاملات أخرى لجاوس تعتمد على متعددات حدود أخرى . وسنلخص هنا دون إثبات الأساس الرياضي لتكامل جاوس:

يمكن إثبات أنه يوجد عدد من النقاط m (m ≥ 1) داخل النطاق [-1 ,1] بحيث تتحقق المعادلة الآتية:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{f(x)\ dx} = \sum_{i=1}^{\mathrm{m}} \alpha_{\mathrm{i}}\, \mathrm{f}\,(\mathrm{x_i}) + \frac{1}{(2\mathrm{m})!} \mathrm{f}^{2\mathrm{m}}(\zeta) \qquad (28\_2)$$

نلاحظ أن الخطأ السائد يتناسب مع المشتقة من الدرجة (2m) ، أي أن قيمة التكامل تكون مضبوطة إذا كانت درجة الدالة موضوع التكامل (2m - 1) أو دون ذلك، وبمعنى آخر تكون درجة متعددة الحدود الاستكمالية هي(2m-1)،وهذا ما أشرنا إليه

من قبل حيث تكون m عددا قليلا بينما تكون درجة متعددة الحدود الاستكمالية كبيرة ، ونلاحظ أيضا أن عدد التقسيمات n هو m+1 .

ويمكن إثبات أن القيم x_{i} هي جذور متعددة حدود لآجندر p_{m} (x) أن قيم α_{i} المناظرة تحسب من المعادلة :

$$i=1,2,m,\propto=\frac{-2}{(m+1)p'_m(x_i)p_{m+1}(x_i)}$$

كذلك ، يمكن دائما تحويل نطاق التكامل الأصلي [a , b] إلى النطاق [-1,1] بحيث نحصل على قيمةI كالآتي:

$$I=\frac{b-a}{2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{m}\alpha_{\mathrm{i}}\,f\left[\frac{(b-a)x_i+(a+b)}{2}\right] \qquad (29\_2)$$

وهناك قاعدة بيانات متطورة لهذه الطريقة ، تحتوي على القيم العددية α_{i} وx_{i} لقيم m المختلفة ، وتستخدم هذه القيم المباشرة في المعادلة لحساب قيمة I .

مثال (8_2):

بإتباع نفس المنوال الذي اخترناه عند برمجة قاعدة شبه المنحرف ، نستطيع تصميم طريقة للتكامل العددي بحيث نحصل على المستوى المطلوب من الدقة بأقل عدد من النقاط الداخلية في تكامل جاوس ، وذلك بحساب I_{m} من m=2 إلى أن تتقارب القيم العددية للتكامل ، أي تصبح ΔI (وهي القيمة المطلقة للفرق بين تكاملين متعاقبين) أقل من .

كمثال على ذلك نأخذ التكامل :

$$I=\int_0^{\pi} e^x\cos x\ dx$$

وبالتعويض في المعادلة نجد أن :

$$I_{\mathrm{m}}\frac{\pi}{2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}}\alpha_{\mathrm{i}}$$

m=2,3,…

يبين الجدول الآتي القيم العددية I_m مع القيمة المطلقة للفرق بين تكاملين متعاقبين لقيم m المختلفة.

M	I_m	ΔI
2	-12.33621046	-
3	-12.12742045	2.09 *E-1*
4	-12.07018949	5.07 *E-2*
5	-12.07032854	1.39 *E=4*
6	-12.07034633	1.78 *E-5*

من الجدول نجد أن 5 نقاط داخلية فقط تعطينا مستوى من الدقة في القيمة المحسوبة في حدود ، أي أن قيمة التكامل صحيحة إلى الأربعة أرقام عشرية الأولى (القيمة المضبوطة لهذا التكامل) هي:(12.07034632-) ، بينما نحصل على نتيجة عددية مطابقة مع القيمة المضبوطة في سبع أرقام عشرية إذا أخذنا m=6، وهذا يوضح مستويات الدقة الفائقة التي يمكن الحصول عليها باستخدام تكامل جاوس.

8-1-2التكاملات الخاصة Special Integrals :

في العديد من التطبيقات الفيزيائية والهندسية ، قد نحتاج إلى التعامل مع تكاملات مغايرة لتلك الصورة القياسيةأو تكاملات لا تحقق الشروط المطلوبة للدالة موضوع التكامل(f(x . في هذه الحالة يجب أن نعيد صياغة التكامل لكي يتفق مع الطرق العددية وهو ما يطلق عليه بالتكاملات الخاصة. وسوف نقتصر هنا على مناقشة صورة فقط من صور هذه التكاملات الخاصة :

وهي عندما تكون حدود التكامل (أحدهما أو كلاهما) لا نهائية improper integrals .

مثال(9_2):

يظهر التكامل $I=\int_z^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$ في التوزيعات الإحصائية وهو تكامل خاص لأن الحد العلوي للتكام= ∞. أوجد قيمة هذا التكامل عندما تكون z= 1.5 ، وذلك باستخدام تكامل جاوس مع أخذ m=6.

الحل:

يمكننا في معظم الأحيان تحويل مثل هذه التكاملات الخاصة إلى الصور القياسية ، وذلك باستبدال المتغيرات (change of variables) ولكن هذا الأسلوب التحليلي قد يكون معقدا بعض الشيء، وقد لا يكون ممكنا في بعض الأحيان ، لذلك سنعتمد هنا المعالجة العددية المباشرة للتكامل في صورته المعطاة .

في هذه الحالة ، نجد أن الدالة موضوع التكامل $e^{-\frac{u^2}{2}}$ تقترب من الصفر كلما زادت قيمة u، ومعنى هذا أننا نستطيع أن نستبدل الحد العلوي (اللانهائي) للتكامل بقيمة كبيرة للمتغير u نحددها بحيث تكون عندها الدالة $e^{-\frac{u^2}{2}}$ متناهية في الصغر ، وبأخذ هذا الحد العلوي 7.5 بدلا من ∞ يصبح التكامل على الصورة القياسية :

$$I = \int_{1.5}^{7.5} e^{-\frac{u^2}{2}}\ du$$

وبالتعويض نجد أن :

$$I = 3\sum_{i=1}^{6} \alpha_i e^{-0.5\,(3x_i+4.5)^2}$$

وبالتعويض بقيم α_iوx_i المدونة عند m=6 نحصل على I=0.167366016

وقد يكون من الأفضل تقسيم نطاق التكامل إلى قسمين أو أكثر ، فعلى سبيل المثال ،يمكننا حساب قيمة I كالآتي:

$$I = \int_{1.5}^{4} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du + \int_{4}^{7.5} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

وباستخدام نفس الطريقة العددية للتكامل ، ونفس عدد النقاط في كل حالة نحصل على :

I= 0.167381464+0.000080006

=0.16746147

الفصل الثالث

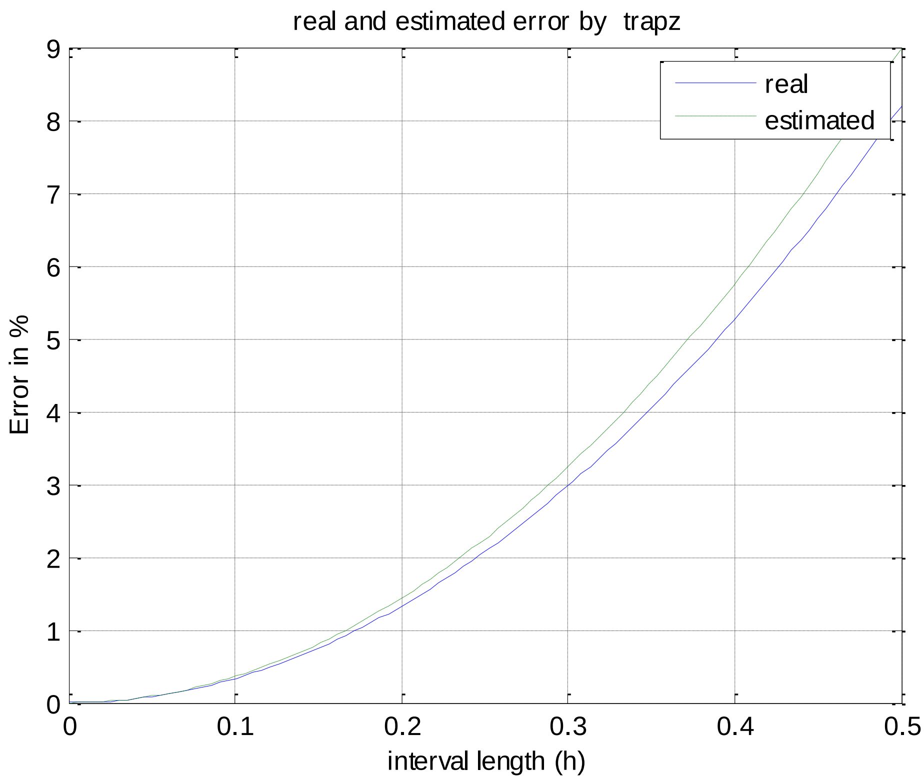
(مقارنة لطرق التكامل)

1-3مقارنة لطرق التكامل العددي:

يعتبر الكمبيوتر من أهم الأدوات التي ساهمت في تطوير التحليل العددي لما له من امكانيات كبيرة في التعامل مع الحسابات المعقدة بكل دقة وسرعة . هناك عدة برامج جاهزة للإستخدام وبرامج أخرى مفتوحة المصدر يمكن استخدامها وتطويرها .

استخدمنا في هذا البحث لغة MATLAB لما لها من مكتبة كبيرة في التحليل العددي ولسهولة التعامل مع هذه اللغة باستعمال المصفوفات وكذالك استعمال أوامر الرسم ونقل البيانات الى الوورد بكل سهولة تم استعمال الماتلاب لايجاد التكامل العددي لدالة e^x على المجال [0.2] بطرق مختلفة وعدد فترات تتراوح بين N=2, N=258وقد تم تخزين البيانات في جداول ورسم المنحنيات للمقارنة.

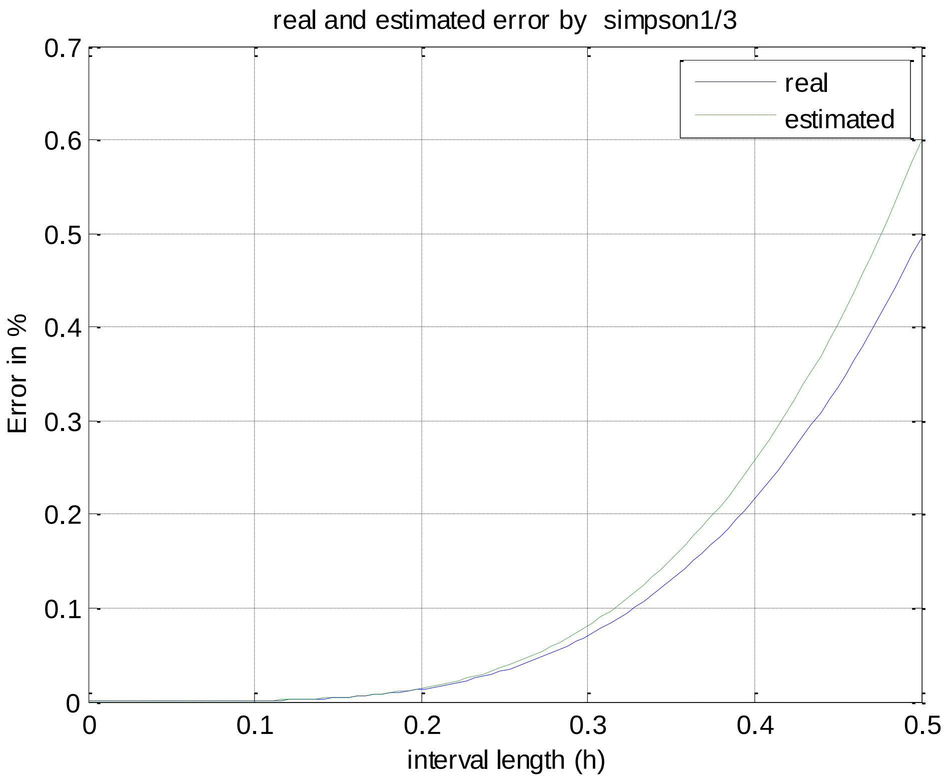
1-1-3جداول ومنحنيات تبين الخطأ الحقيقي والتقديري لطرق التكامل :



الشكل (1-3)

الجدول(1-3) يبين الخطأ لقاعدة شبه المنحرف

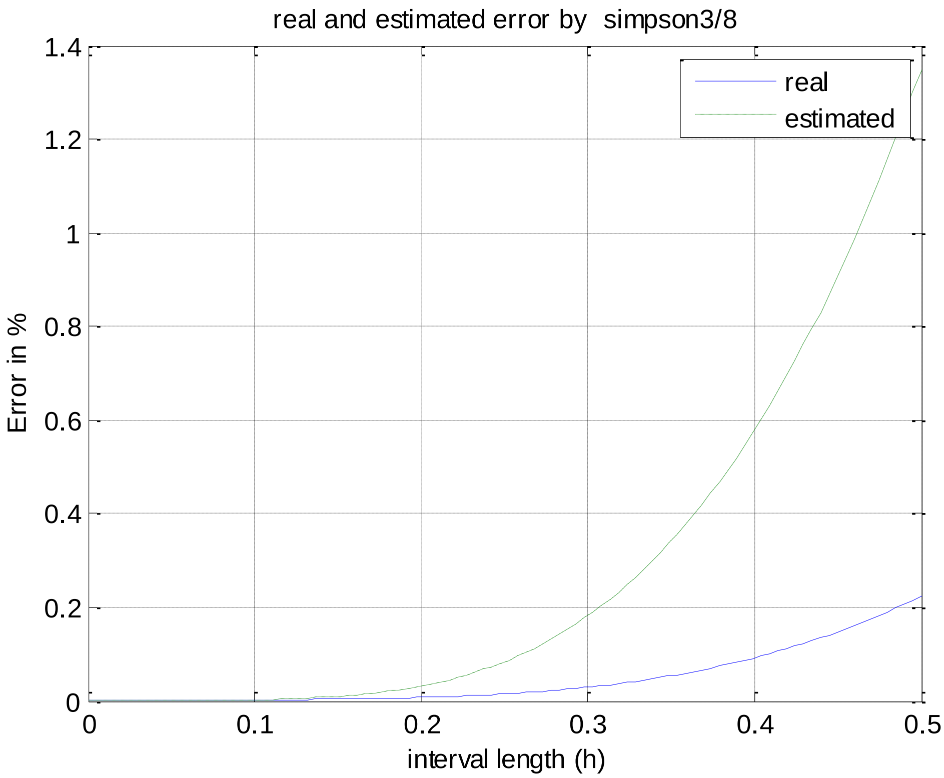
N	الخطأالحقيقي Realerr	الخطأ التقديري Estimatederr
1	2.00000000e-00	2.29836644e-00
2	5.23753779e-01	5.74591609e-01
4	1.32554011e-01	1.43647902e-01
8	3.32417225e-02	3.59119756e-02
16	8.31691784e-03	8.97799389e-03
32	2.07963548e-03	2.24449847e-03
64	5.19934254e-04	5.61124618e-04
128	1.29985150e-04	1.40281155e-04
256	3.24963867e-05	3.50702886e-05



الشكل (2-3)

الجدول (3-2) يبين الخطأ لطريقة سيمسون (3\1)

N	الخطأ الحقيقي *Realerr*	الخطأ التقديري *Estimatederr*
2	*3.16717053e-02*	*3.83061073e-02*
4	*2.15408774e-03*	*2.39413170e-03*
8	*1.37626486e-04*	*1.49633231e-04*
16	*8.64961909e-06*	*9.35207697e-06*
32	*5.41355234e-07*	*5.84504811e-07*
64	*3.38465034e-08*	*3.65315507e-08*
128	*2.11558948e-09*	*2.28322192e-09*
256	*1.32228450e-10*	*1.42701370e-10*



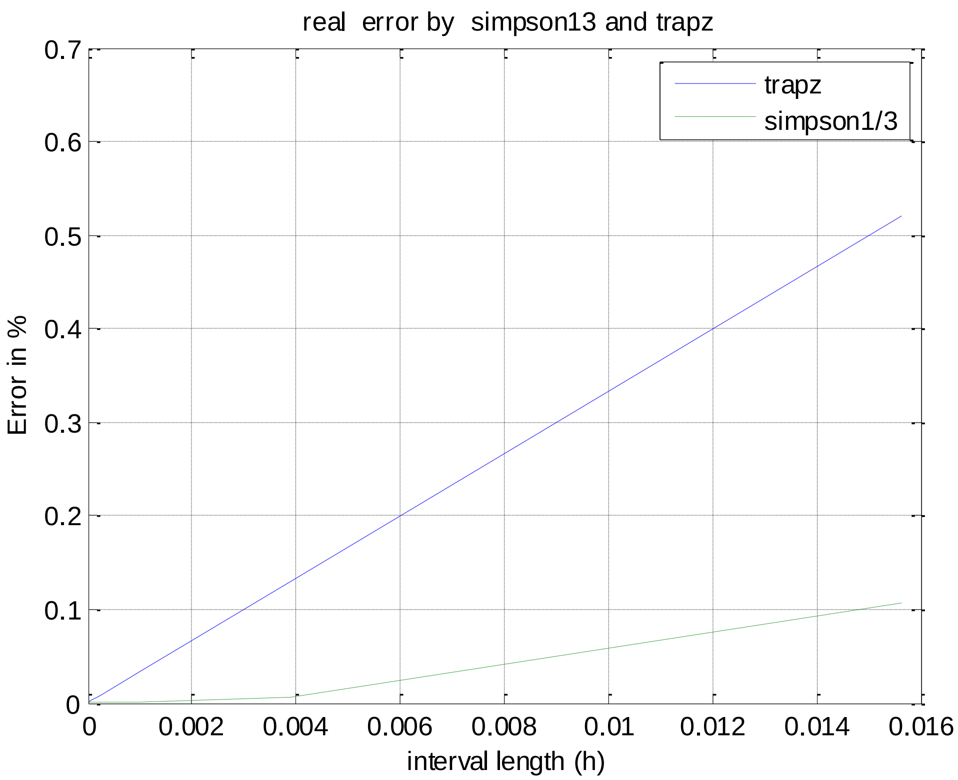
الشكل (3-3)

الجدول رقم (3-3) يبين الخطأ لقاعدة سيمسون(8\3)

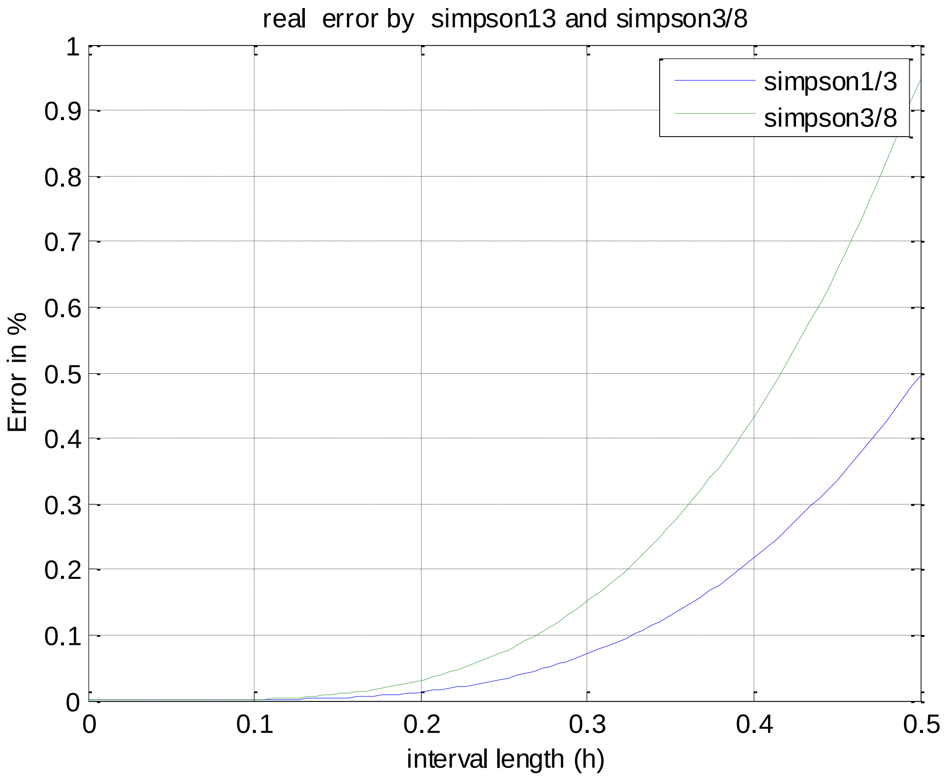
N	الخطأ الحقيقي*Realerr*	الخطأالتقديري *Estimatederr*
3	1.42593776e-02	8.61887413e-02
6	9.60524786e-04	5.38679633e-03
9	1.92494117e-04	3.36674771e-04
18	1.21367330e-05	2.10421732e-05
33	1.07654274e-06	1.31513582e-06
66	6.73280471e-08	8.21959890e-08
129	4.61405580e-09	5.13724931e-09
258	2.88388868e-10	3.21078082e-10

الجدول (3-4) رومبرج

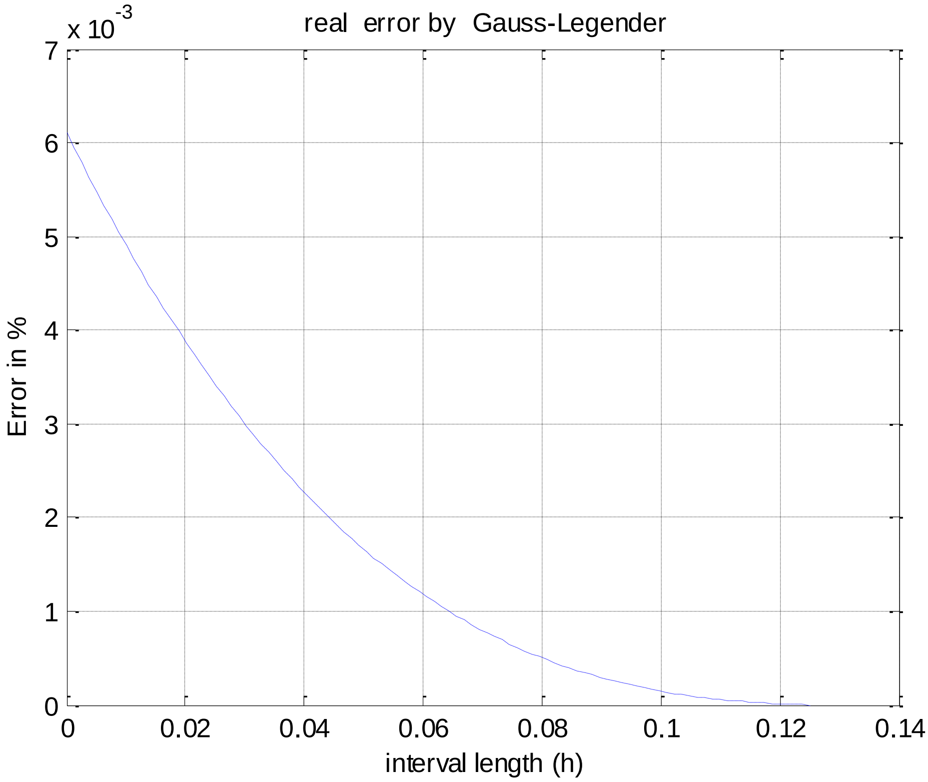
N	I(i,1)	I(i,2)	I(i,3)	I(i,4)	I(i,5)
1	8.3890560	6.4207278	6.38924233	6.38905639	6.389056099
2	6.9128098	6.3912102	6.38905923	6.38905610	
4	6.5216101	6.3891937	6.38905615		
8	6.4222978	6.3890647			
16	6.3973730				



(4-3) الشكل



الشكل(5-3)



الشكل (3-6)

جدول (3-5) يبين الخطأ بطريقة جاوس- لجندر

Integration Guass-Legender

N	القيمة الحقيقية *Real value*	الخطأ الحقيقي *Real error*
2	*6.368108205367115e+00*	*2.094789356353566e-02*
3	*6.388878163987118e+00*	*1.779349435322430e-04*
4	*6.389055296680802e+00*	*8.022498487747498e-07*
5	*6.389056096688674e+00*	*2.241976382322264e-09*
6	*6.389056098926386e+00*	*4.264144592980301e-12*
7	*6.389056098930644e+00*	*6.217248937900877e-15*
8	*6.389056098930650e+00*	*0*

2-1-3تعليقات على النتائج المتحصل عليها باستخدام الماتلاب MATLAB:

الجدول (3-1) يبين استخدام طريقة شبه المنحرف لحل التكامل $\int_0^2 e^x dx$ وتبين من الرسم أنه كلما زادت عدد الفترات (N) كلما قل الخطأ فمثلا عندما N=32 E32=2.08*10^-3,بينما عندما N=64 , E64=5.2*10^-4

$\frac{E64}{E32} = \left(\frac{1}{4}\right) = (\frac{1}{2})^2$ هذا يؤكد أن الأخطاء تتناسب مع $(1/N^2)$ كذالك نلاحظ أن الخطأ التقديري أعلى من الخطأ الحقيقي .

والجدول (3-2) يبين نتيجة التكامل السابق باستخدام طريقة سيمسون $\frac{1}{3}$ نلاحظ أن الخطأ يقل كلما زادت عدد الفترات (N)ومن خلال النتائج المبينة في الجدول نري أن الخطأ عندما N=32 هو E32=5.4*10^-7

وعندما N=64 هوE64=3.38*10^-8, $\frac{E64}{E32} = \left(\frac{1}{16}\right) = (\frac{1}{2})^4$

وهذا يوضح أن الأخطاء تتناسب مع $(1/N^4)$.

الجدول(3-3) يبين نتيجة التكامل السابق باستخدام طريقة سيمسون $\frac{3}{8}$ ونلاحظ أن الخطأ يقل كلما زادت عدد الفترات (N)ومن خلال النتائج المبينة في الجدول نري أن الخطأ عندما N=33 هوE33=1.076*10^-6

وعندما N=66هو E66=6.73*10^-8, $\frac{E66}{E33} = \left(\frac{1}{16}\right) = (\frac{1}{2})^4$وهذا يوضح أن الأخطاء تتناسب مع $(1/N^4)$. كذلك نلاحظ من المنحنى أن هناك فرق كبير بين الخطأ التقديري والخطأ الحقيقي .

الجدول (3-4) يوضح نتائج تكامل رومبورج ونلاحظ أن التكامل يقترب من القيمة الحقيقية وعند التكامل I(4,4) نجد أنه يصل الى دقة أعلى من الدقة التي توصلنا اليها بطريقة شبه المنحرف عندما N=256 وذالك بأقل عدد من العمليات الحسابية لأن هذه الطريقة استخدم فيها طريقة شبه المنحرف بأقصى قيمة (N=16) مع استخدام استكمال ريتشاردسون .

المنحنى (3-4) يوضح الخطأ في شبه المنحرف وطريقة سيمسون $\frac{1}{3}$ حيث أن الخطأ في شبه المنحرف أكبر بكثير منه في سيمسون $\frac{1}{3}$ ويزداد الفرق كلما قلت عددالفترات .

المنحنى(3-5) يوضح الفرق في حساب التكامل بطريقة سيمسون $\frac{1}{3}$ وسمبسون $\frac{3}{8}$
نلاحظ أن الخطأ في طريقة سيمسون $\frac{3}{8}$ أكبر منه في طريقة سيمسون $\frac{1}{3}$ ويزداد الفرق كلما كانت عدد الفترات صغيرة .

المنحنى (3-6) يوضح أن الخطأ في حساب التكامل بطريقة جاوس – لجندر يقل بمعدل سريع كلما زادت عدد النقاط وقد كان الخطأ صفرا عندما كان عدد النقاط 6 وهذا يؤكد أن دقة هذه الطريقة في وقت قصير.

المراجع

1- د.نشاط ابراهيم العبيدي, التحليل العددي , دار المسيرة ,الطبعة الأولى (1432هـ – 2011ف).

2- د.سعد محمد فضيلة , د.النفاتي معمر الرويعي,التحليل العددي للمهندسين, منشورات جامعة الفاتح ,دار الكتاب الجديدة المتحدة ,الطبعة الأول– ف2004) ف2005).

3- J. Douglas Faires , RChardl Burden, التحليل العددي ,ترجمة د.رمضان محمد جهيمة , د.كمال أبو القاسم أبودية, منشورات ELGA(2001)

4- إيان جاكس,كولن جد ,التحليل العددي, ترجمة د.علي محمد ابراهيم,د.محمد ماهر علي النجار,منشورات جامعة الفاتح,الطبعة الأولى(1992م).