Chapter Three

Free Particle الجسيم الحر

سيكون الجسيم الحر التطبيق الاول لاسس الميكانيك الكمي التي عرضت في الفصل الثاني وسنبحث في هذا الفصل الصفات الكمية للجسيم الحر في بعد واحد وفي ثلاث ابعاد.

الجسيم الحر: هو الجسيم الذي لايتعرض الى اي قوة اي ان الجسيم يتحرك بحرية اي طاقته الكامنه مساوية الى صفر $V(x)=0$

نفرض ان جسيم كتلته m يتحرك ببعد واحد على امتداد المحور السيني في مجال جهد يساوي صفر اي ان الطاقة الكامنة $V(x)=0$ تساوي صفر

معادلة شرودنكر الغيرمعتمدة على الزمن في بعد واحد

$$\left\{\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right\}\psi(x)=E\psi(x)$$

$$V(x)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=E\psi(x)$$

نضرب في $\frac{-2m}{\hbar^2}$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)=0$$

$$\because \quad E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{p^2}{2m}=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$$

$$\therefore \quad k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+k^2\psi(x)=0 \qquad (1)$$

الحل العام للمعادلة (1) تكون بالشكل التالي

$$\psi(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$$

حيث A ، B ثابتين اختياريين

ويمكن اعتبار الدالة e^{ikx} تمثل حركة جسيم يمتلك زخم $\hbar k$ وطاقة $(\frac{\hbar^2 k^2}{2m})$ ويتحرك بالاتجاه الموجب على المحور السيني (x) ، بينما الدالة e^{-ikx} تمثل حركة جسيم بالاتجاه السالب على المحور السيني ويفترض ان هذا الجسيم يمتلك نفس الزخم ونفس الطاقة

والان نطبق الحل على بعض الحالات الخاصه للجسيم الحر

1. الحالة الاولى:

اذا كان الجسيم يتحرك بالاتجاه الموجب على المحور السيني فان الدالة التي تصف حركة هذا الجسيم هي

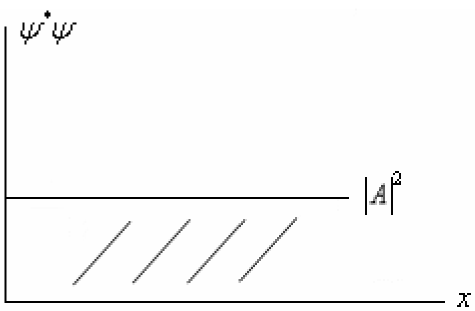
$$\psi(x) = Ae^{ikx}$$

وكثافة الاحتمالية لوجود هذا الجسيم

$$|\psi(x)|^2 = \psi^*(x)\psi(x) = A^* e^{-ikx} A e^{ikx}$$

$$= A^* A = |A|^2$$

وعند رسم $|\psi(x)|^2$ مع x نحصل على الرسم البياني المبين



وهذا يعني ان كثافة الاحتمالية عند اي نقطة تساوي مقدار ثابت

2. الحالة الثانية:

ولما كان الجسيم يتحرك بالاتجاه السالب على المحور السيني فان الدالة التي تصف حركة هذا الجسيم هي

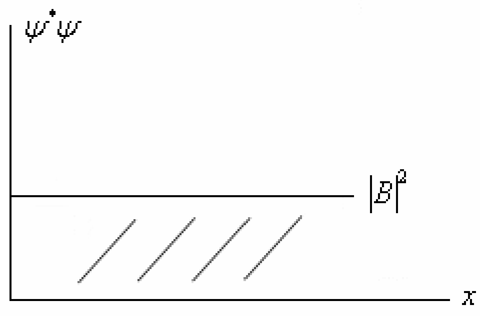
$$\psi(x) = Be^{-ikx}$$

فكثافة الاحتمالية لوجود هذا الجسيم

$$|\psi(x)|^2 = \psi^*(x)\psi(x) = B^* e^{ikx} B e^{-ikx}$$

$$= B^* B = |B|^2$$

وعند رسم الرسم البياني بين $|\psi(x)|^2$ ، x نحصل على



وهذا يعني ان كثافة الاحتمالية عند اي نقطة تساوي مقدار ثابت

3. الحالة الثالثة

اذا اخذنا حركة الجسيم في كلا الاتجاهين

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

فكثافة الاحتمالية لوجود هذا الجسيم

$$|\psi(x)|^2 = \psi^*(x)\psi(x) = (A^*e^{-ikx} + B^*e^{ikx})(Ae^{ikx} + Be^{-ikx})$$

$$= A^*A + B^*B + A^*Be^{-2ikx} + B^*Ae^{2ikx}$$

فاذا جعلنا $A = B$ اي ان عدد الجسيمات متساويه في كلا الاتجاهين

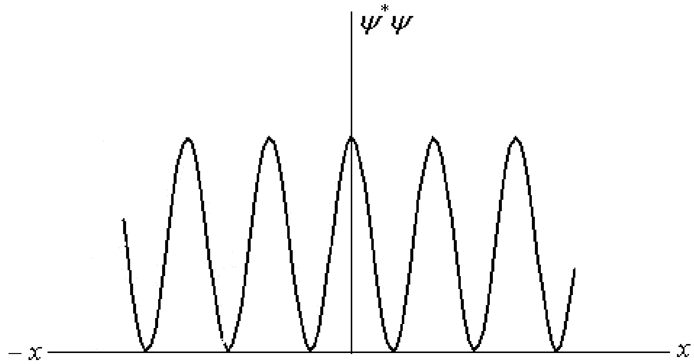
$$|\psi(x)|^2 = 2A^*A + A^*A\,(e^{2ikx} + e^{-2ikx})$$

$$= 2A^*A(1 + \tfrac{1}{2}(e^{2ikx} + e^{-2ikx})$$

$$= 2A^*A(1 + \cos 2kx)$$

$$= 4A^*A\cos^2 kx$$

وعند رسم $|\psi(x)|^2$ مع x نحصل على الشكل وهذا يشير الى ان الاحتمالية تتغير مع الموقع x



وبما ان الثابت k يمكن ان ياخذ اي قيمة وكذلك الطاقة E لان لاتوجد شروط حدودودية في حل معادلة الجسيم الحر وبذلك نحصل على طيف متصل من الطاقة. ولذلك نستطيع القول ان طاقة الجسيم الحر تكون غير مكممه.

ان مسألة الجسيم الحر تدلنا على احد التطبيقات لمبدأ اللاتحديد لها يزنبرك ، ولما كانت الدالة e^{+ikx} تصف حالة الجسيم الذي زخمه $\hbar k$ وهذا مقدار ثابت فاننا نعرف زخمه بدقة كاملة (اي اللاتحديد في زخمه $\Delta p = 0$) وهذا يعني وفق مبدأ اللاتحديد $\Delta p \Delta x \geq \hbar$ عدم معرفة موقع الجسيم بصورة كاملة اي $\Delta x = \infty$

Q) Using the uncertainty Principle show that the variance in defining the position of a free particle is infinite.

<u>Solution</u>:

$$\Delta p \, \Delta x \geq \hbar$$

$$\because \; p_x = \hbar k \quad \text{For free particle}$$

$$\therefore \; \Delta p_x = 0$$

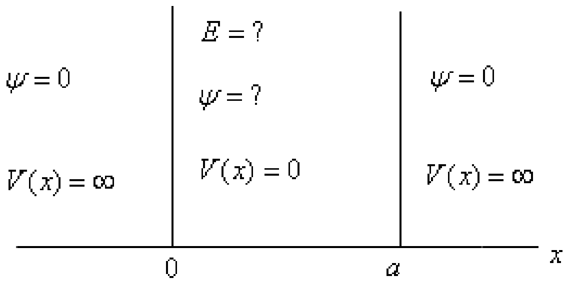
$$\therefore \; \Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{\hbar}{\text{zero}} = \infty$$

$$\therefore \; \Delta x = \infty$$

Particle in Potential Box

جسيم في صندوق

نفرض ان جسيما كتلته (m) مقيد الحركة داخل صندوق في المنطقة بين ($x=0$ ، $x=a$) وطاقته الكلية E وطاقته الكامنة تتخذ على النحو الاتي وكما مبين في الشكل



$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le a \\ \infty & 0 \ge x \ge a \end{cases}$$

ولما كانت حركة الجسيم في المنطقة المحصورة بين $x=0$ ، $x=a$ ونظرا لوجود جدران صلبة عند نهايتي الصندوق اي ان ($V(x)=\infty$) فان الجسيم لايستطيع ان يخترق الجدران وينفذ الى الخارج عند اصطدامه بها وعليه فان حركته تكون مقيدة بين جدران الصندوق.

وتتصرف الالكترونات الحرة في المعادن بطريقة مشابهة فعند اهمال تصادم الالكترونات مع الايونات الموجبة يكون ارتفاع الجهد اكبر بكثير من طاقة الالكترونات الحركية وبمقدور الالكترونات ان تتحرك بحرية في المعدن ولكن لايمكن الافلات منه

وترجع اهمية هذه المسالة الى كونها تسلط اضواء على حركة الجسيم في حيز محدد وتكمم طاقة الجسيم.

ولدراسة حركة هذا الجسيم نستخدم معادلة شرودنكر الغيرمعتمدة على الزمن وسندرس بعض الحالات .

1. **الحالة الاولى** : في المنطقة $(0 \ge x \ge a)$ فان الحل المحتمل الوحيد لمعادلة شرودنكر هو ان $\psi(x) = 0$ طالما ان $V(x) = \infty$ وبدوره فان كثافة الاحتمالية $|\psi(x)|^2 = 0$ وبالتالي فان احتمالية ايجاد الجسيم خارج الصندوق تساوي صفر.

2. **الحالة الثانية** : عندما يكون الجسيم داخل الصندوق حيث) $V(x) = 0$ (في $(0 \le x \le a)$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\,\psi(x) = 0$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\,\psi(x) = 0 \qquad ، \qquad V(x) = 0$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0 \qquad ، \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \qquad ، \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

حل هذه المعادلة يكون

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

ولايجاد المقدارين الثابتين A ، B نستخدم الشرطين الحدوديين الاتيين

دالة الموجة تتلاشى وتصبح قيمتها صفر عندما $x = 0$ وعند $\mathrm{x = a}$

1. $\psi(x = 0) = 0$
2. $\psi(x = a) = 0$

اولا عند $x = 0$

$$A + B = 0 \longrightarrow A = -B$$

$$\psi(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx})$$

وباستخدام طريقة اويلر $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$

$$\therefore \psi(x) = A(\cos kx + i\sin kx - \cos kx + i\sin kx)$$

$$\therefore \psi(x) = 2iA\sin kx$$

$$\psi(x) = C\sin kx$$

حيث $C = 2iA$

ثانيا عند $\mathrm{x = a}$

$$\psi(x = a) = C\sin ka = 0$$

الثابت C لايمكن ان يساوي صفر

$$\therefore \; ka = n\pi \longrightarrow \sin ka = 0$$

$$\therefore \quad k = \frac{n\pi}{a}$$

حيث n يمثل عدد صحيح موجب $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$

وعند التعويض عن قيمة k نحصل على دالة الموجة وكذلك قيم طاقة الجسيم

$$\psi_n(x) = C\sin(n\pi x / a)$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \longrightarrow E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ma^2}$$

(قيم الطاقة الذاتية لجسيم يتحرك في صندوق)

نستطيع ان نستنتج جملة من النقاط المهمة

1. طاقة الجسيم داخل الصندوق تكون مكممة اي لايمكن ان تكون اختيارية بل تاخذ قيم محددة (مكممة) فهذه القيم تشكل مستويات الطاقة

(Zero Point Energy) $E_1 = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ $\quad n=1$

الحالة الارضية

$E_2 = 4E_1 \quad n=2$

$E_3 = 9E_1 \quad n=3$

$E_4 = 16E_1 \quad n=4$

فيطلق على اوطأ مستوى طاقة المميز بـ $n=1$ بالحالة الارضية اما الحالات المستويات الاخرى يمكن تحديدها بالاعداد الكمية 4,3,2.......... فيطلق عليها بالحالات المتهيجة

$n=4$ ———————— $E_4 = 16E_1$

$n=3$ ———————— $E_3 = 9E_1$

$n=2$ ———————— $E_2 = 4E_1$

$n=1$ ———————— $E_1 = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$

2. لايمكن العدد الكمي n يساوي صفر وهذا يعني عدم وجود موجة او جسيم

3. ان الطاقة تتناسب مع a^{-2} فزيادته عرض الصندوق (a) فانها ستؤدي الى قيم طاقة اكثر تقاربا وعندما تقترب (a) من المالانهاية فان مستويات الطاقة تقترب مع بعضها وتصبح متصلة وهذه الحالة مشابهة للاطياف الذريه المستمره.

لايجاد الثابت C للمعادله $\psi_n(x) = C\sin(n\pi x/a)$ نستخدم الشرط العياري للدالات الموجية اي ان

$$\int \psi_n^*(x)\psi_n(x)\ dx = 1$$

$$\int C^* \sin(n\pi x/a)\ C\ \sin(n\pi x/a)\ dx = 1$$

$$C^2\int_0^a \sin^2(n\pi x/a)\ dx = 1$$

وباستخدام $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

$$\frac{1}{2}C^2\left\{\int_0^a dx - \int_0^a \cos(2n\pi x/a)\ dx\right\} = 1$$

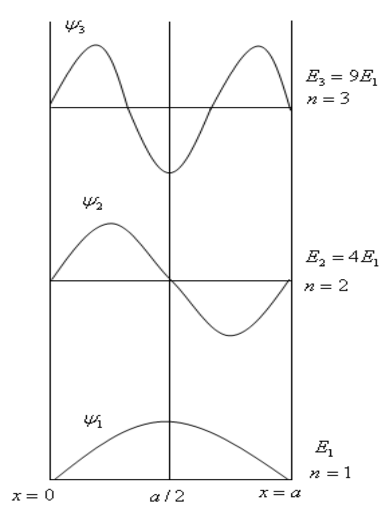
$$\tfrac{1}{2}C^2\left\{x\Big|_0^a - (\frac{a}{2n\pi})\sin(2n\pi x/a)\Big|_0^a\right\} = 1$$

$$\tfrac{1}{2}C^2\{(a-0)-(a/2n\pi)(0-0)\} = 1$$

$$\tfrac{1}{2}C^2 a = 1 \longrightarrow \qquad C = \sqrt{\tfrac{2}{a}}$$

$$\therefore \quad \psi_n(x) = \sqrt{\tfrac{2}{a}}\sin(n\pi x/a)$$

والشكل يوضح الدالات الموجية الثلاثة الاولى ψ_1 ، ψ_2 ، ψ_3



Q1) What is the energy for the particle described by the wave function $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(n\pi\, x/a)$ and move along the interval $0 \le x \le a$.

Solution:

$$\hat{A}\psi_n = a_n\psi_n$$
$$\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$$
$$= \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot\sqrt{\tfrac{2}{a}}\sin(n\pi\, x/a)$$
$$= \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\{\sqrt{\tfrac{2}{a}}\cdot\frac{n\pi}{a}\cdot\cos(n\pi\, x/a)\}$$
$$= \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\cdot\sqrt{\tfrac{2}{a}}\sin(n\pi\, x/a)$$
$$= \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\psi_n$$
$$\therefore \quad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

Q2) What is the momentum square for the particle described by the wave function $\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(n\pi x/a)$ and move along the interval $0 \le x \le a$.

Solution:

$$\hat{A}\psi_n = a_n\,\psi_n$$
$$\hat{p}^2\psi_n = p_n^2\,\psi_n$$
$$= -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sqrt{\tfrac{2}{a}}\,\sin(n\pi x/a)$$
$$= -\hbar^2\frac{\partial}{\partial x}\{\sqrt{\tfrac{2}{a}}\,\frac{n\pi}{a}\cos(n\pi x/a)\}$$
$$= \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^2}\sqrt{\tfrac{2}{a}}\,\sin(n\pi x/a)$$
$$= \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^2}\,\psi_n$$
$$\therefore \quad p_n^2 = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^2}$$

Q3) Show that the wave function that described particle move in a potential box are orthogonal

<u>Solution</u>:

$$\int_0^a \psi_n^* \psi_m \, dx = 0 \qquad \text{Orthogonal} \quad (\text{متعامدة})$$

$$\int_0^a \psi_n^* \psi_m \, dx = \int_0^a \sqrt{\tfrac{2}{a}} \sin(n\pi\, x/a) \cdot \sqrt{\tfrac{2}{a}} \sin(m\pi\, x/a)\, dx$$

$$= \tfrac{2}{a} \int_0^a \sin(n\pi\, x/a) \cdot \sin(m\pi\, x/a)\, dx$$

$$\sin\alpha\, x \sin\beta\, x = \tfrac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)\, x - \cos(\alpha+\beta)\, x\}$$ وباستخدام العلاقة

$$\tfrac{1}{a}\int_0^a \{\cos(n-m)\pi x/a - \cos(n+m)\pi x/a\}\, dx$$

$$\frac{1}{a}\{\frac{a}{(n-m)\pi}\sin(n-m)\pi\, x/a - \frac{a}{(n+m)\pi}\sin(n+m)\pi\, x/a\}\Big|_0^a$$

$$\frac{1}{a}\{\frac{a}{(n-m)\pi}\sin(n-m)\pi - \frac{a}{(n+m)\pi}\sin(n+m)\pi\}$$

$\because \quad (n-m)$ and $\quad (n+m)$ are integer

$$\therefore \quad \int_0^a \psi_n^* \psi_m dx = 0$$

Q4) Show that the wave function that described particle move in a potential box are normalized

Solution:

$$\int_0^a \psi_n^* \psi_n \, dx = 1 \qquad \text{normalized} \quad (\text{عيارية})$$

$$\int_0^a \psi_n^* \psi_n \, dx = \int_0^a \sqrt{\tfrac{2}{a}} \sin(n\pi x/a) \cdot \sqrt{\tfrac{2}{a}} \sin(n\pi x/a) \; dx$$

$$= \frac{2}{a} \int_0^a \sin^2(n\pi x/a) \; dx$$

وباستخدام العلاقة $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

$$\therefore \quad = \frac{2}{a} \int_0^a \{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2n\pi x/a)\} \; dx$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^a dx - \frac{1}{a} \int_0^a \cos(2n\pi x/a) \; dx$$

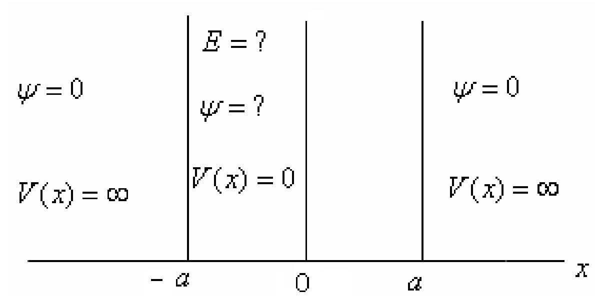
$$\frac{1}{a}(x)\Big|_0^a - \frac{1}{a} \frac{a}{2n\pi} \sin(\frac{2n\pi x}{a})\Big|_0^a$$

$$\frac{1}{a}(a-0) - \frac{1}{2n\pi} \sin(2n\pi)$$

$$\because \; n \text{ is integer} \quad \Rightarrow \quad \sin 2n\pi = 0$$

$$\therefore \; \int_0^a \psi_n^* \psi_n dx = 1$$

مثال :ادرس حركة جسيم في مجال جهد متماثل كما بالشكل ويوصف بالتالي:



$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| < a \\ \infty, & |x| > a \end{cases}$$

وأثبت أن

$$\psi_n(x) = \begin{cases} A\sin(n\pi x/2a) & n \text{ is even} \\ B\cos(n\pi x/2a) & n \text{ is odd} \end{cases}$$

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2ma^2}, \; A = B = \sqrt{\tfrac{1}{a}}$$

Solution :

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0 \quad ، \quad V(x) = 0$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0 \quad ، \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad ، \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx$$

ولايجاد المقدارين الثابتين A ، B نستخدم الشرطين الحدوديين الاتيين

دالة الموجة تتلاشى وتصبح قيمتها صفر عندما $x = -a$ وعند $\mathrm{x = a}$

عند $\mathrm{x = a}$

$$A\sin ka + B\cos ka = 0$$

عند $\mathrm{x = -a}$

$$-A\sin ka + B\cos ka = 0$$

وهاتان المعادلتان تعطينا

$$-A\sin ka = B\cos ka = 0$$

وحيث A ، B كلاهما لايمكن ان يساوي صفر لان ذلك يعني ان ψ في كل مكان وكذلك فان $\cos ka$, $\sin ka$ لايمكن ان كلاهما صفر في وقت واحد لهذا السبب فان الحلين المحتملين الوحيدين للمعادلة هما :

اما $A=0$ و $\cos ka=0$ a

او $B=0$ و $\sin ka=0$ b

وهاتان النتيجتان تتضمنا المعنى التالي

$$ka=\frac{n\pi}{2}$$

حيث n عدد فردي للحالة a وعدد زوجي للحالة b وهكذا يكون الحلان المحتملان كما هو ات

وعند التعويض عن قيمة k نحصل على دالة الموجة وكذلك قيم طاقة الجسيم

$$\psi_n(x)=B\sin(n\pi x/2a) \qquad n \text{ عدد فردي}$$

$$\psi_n(x)=A\cos(n\pi x/2a) \qquad n \text{ عدد زوجي}$$

$$E=\frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{8ma^2}$$

لايجاد الثابت B للمعادله $\psi_n(x)=B\sin(n\pi x/2a)$ نستخدم الشرط العياري للدالات الموجية اي ان

$$\int \psi_n^*(x)\psi_n(x)\ dx=1$$

$$\int B^*\sin(n\pi x/2a)\ B\sin(n\pi x/2a)\ dx=1$$

$$B^2\int_{-a}^{a}\sin^2(n\pi x/2a)\ dx=1$$

وباستخدام $\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

$$\frac{1}{2}B^2\left\{\int_{-a}^{a}dx-\int_{-a}^{a}\cos(n\pi x/a)\ dx\right\}=1$$

$$\tfrac{1}{2}B^2\left\{x\Big|_{-a}^{a}-\left(\frac{a}{n\pi}\right)\sin(n\pi x/a)\Big|_{-a}^{a}\right\}=1$$

$$\tfrac{1}{2}B^2\{(2a-0)-(a/n\pi)(0-0)\}=1$$

$$\tfrac{1}{2}B^2\,2a=1 \longrightarrow \qquad C=\sqrt{\tfrac{1}{a}}$$

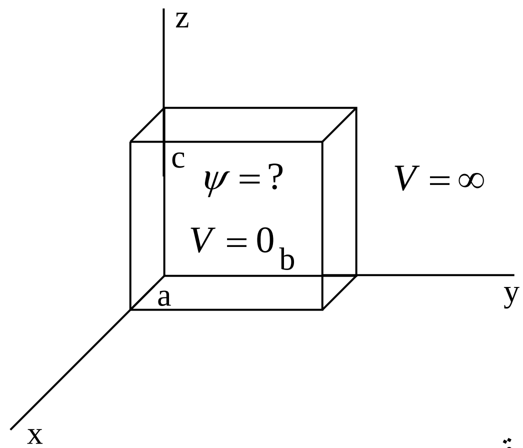
$$\therefore \quad \psi_n(x)=\sqrt{\tfrac{1}{a}}\sin(n\pi x/a)$$

وبنفس الطريقة يمكن ايجاد الثابت A

Particle in Potential Box in three dimensions

سنبحث الان حالة الجسيم الحر في داخل صندوق الذي ابعاده a ، b ، c على التوالي ولنفرض ان اضلاع الصندوق مطابقة للمحاور الكارتيزية (x ، y ، z) ونقطة الاصل 0 تقع في احد زواياه كما في الشكل.

داخل الصندوق يكون الجهد $V=0$ اما خارج الصندوق فان $V=\infty$



معادلة شرودنكر الغيرمعتمدة على الزمن داخل الصندوق

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,y,z)=E\psi(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial y^2}\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial z^2}+k^2\psi(x,y,z)=0 \quad \ldots\ldots\ldots *$$

حيث ان $k^2=\dfrac{2mE}{\hbar^2}$

ولحل المعادلة * نستخدم طريقة فصل المتغيرات باعتبار ان الدالة $\psi(x,y,z)$ تساوي حاصل ضرب ثلاث دوال بالشكل

$$\psi(x,y,z)=\psi(x)\cdot\psi(y)\cdot\psi(z)$$

$$\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial x^2}=\psi(y)\cdot\psi(z)\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}$$

$$\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial y^2}=\psi(x)\cdot\psi(z)\frac{d^2\psi(y)}{dy^2}$$

$$\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial z^2}=\psi(x)\cdot\psi(y)\frac{d^2\psi(z)}{dz^2}$$

وبتعويض هذه الكميات والقسمة على $\psi(x,y,z)$ نحصل على

$$\frac{1}{\psi(x)}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{1}{\psi(y)}\frac{d^2\psi(y)}{dy^2}+\frac{1}{\psi(z)}\frac{d^2\psi(z)}{dz^2}+k^2=0$$

وواضح فان كل حد من المعادلة اعلاه يجب ان يساوي ثابتا ولتكن هذه الثوابت $-k_{(x)}^2$ ، $-k_{(y)}^2$ ، $-k_{(z)}^2$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+k_{(x)}^2\psi(x)=0\\ \frac{d^2\psi(y)}{dy^2}+k_{(y)}^2\psi(y)=0\\ \frac{d^2\psi(z)}{dz^2}+k_{(z)}^2\psi(z)=0\end{aligned}\right\}\qquad **$$

$$k=k_{(x)}^2+k_{(y)}^2+k_{(z)}^2$$

والحل العام لكل من المعادلات الثلاثة ** اعلاه على التوالي

$$\psi(x)=A_x e^{ik_{(x)}x}+B_x e^{-ik_{(x)}x}$$

$$\psi(y)=A_y e^{ik_{(y)}y}+B_y e^{-ik_{(y)}y}$$

$$\psi(z)=A_z e^{ik_{(z)}z}+B_z e^{-ik_{(z)}z}$$

Using the same procedure we can get

$$\psi(x)=c_x\sin k_{(x)}x$$

$$\psi(y)=c_y\sin k_{(y)}y$$

$$\psi(z)=c_z\sin k_{(z)}z$$

$$\psi(x,y,z)=c_x\sin(k_{(x)}x)\cdot c_y\sin(k_{(y)}y)\cdot c_z\sin(k_{(z)}z)$$

$$\psi(x,y,z)=C\sin(\frac{n_x\pi}{a}x)\cdot\sin(\frac{n_y\pi}{b}y)\cdot\sin(\frac{n_z\pi}{c}z)$$

<u>H.W</u> **Show that** $C=\sqrt{\frac{8}{abc}}$

$$E=\frac{p^2}{2m}=\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\frac{\hbar^2}{2m}(k_{(x)}^2+k_{(y)}^2+k_{(z)}^2)$$

$$=\frac{\hbar^2\pi}{2m}(\frac{n_x^2}{a}+\frac{n_y^2}{b}+\frac{n_z^2}{c})$$

If $a=b=c=a$

$$\therefore \quad =\frac{\hbar^2\pi}{2ma^2}(n_x^2+n_y^2+n_z^2)$$

نفرض ان $E_1=\frac{\hbar^2\pi}{2ma^2}$ حيث ان E_1 مقدار ثابت

$$\therefore \quad E=E_1(n_x^2+n_y^2+n_z^2)$$

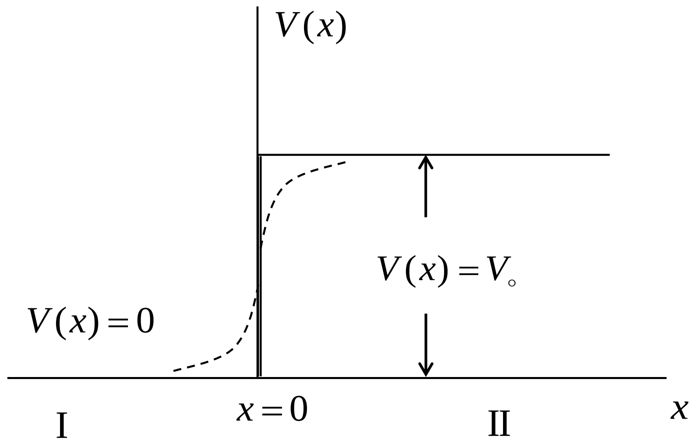
وطبيعي فان مستويات الطاقة تعتمد على $(n_x^2+n_y^2+n_z^2)$ وفي جميع الحالات التي تكون فيها الاعداد الكمية مرتبة بحيث يعطي نفس القيمة للعبارة $(n_x^2+n_y^2+n_z^2)$ تكون طاقاتها متساوية وبطبيعة الحال يمكن تبديل n_z,n_y,n_x بدون ان يتغير المقدار العبارة $(n_x^2+n_y^2+n_z^2)$ وهذا يعني ان دوال الموجة تتغير بينما يبقى مستوى الطاقة كما هو، اي انه منحل حسب تعريف الانحلال ودرجة الانحلال هنا تساوي عدد الترتيبات الممكنة للاعداد الكمية n_z,n_y,n_x وفيما يلي جدولا يبين عدد الترتيبات n_z,n_y,n_x لست حالات مختلفة

Energy	**Combination of** n_z,n_y,n_x	**degeneracy**
$3E_1$	(1,1,1)	1
$6E_1$	(1,1,2) (1,2,1) (2,1,1)	3
$9E_1$	(1,2,2) (2,1,2) (2,2,1)	3
$11E_1$	(3,1,1) (1,3,1) (1,1,3)	3
$12E_1$	(2,2,2)	1
$14E_1$	(1,2,3) (3,2,1) (2,3,1) (1,3,2) (2,1,3) (3,1,2)	6

حاجز الجهد **Potential Step**

سنحاول في هذا المقطع دراسة حركة جسيم في توزيع جهد كالمبين في الشكل التالي والذي يبين مدرج الجهد.

$$V(x)\begin{cases}0 & x<0 \qquad \mathrm{I}\\ V_\circ & x>0 \qquad \mathrm{II}\end{cases}$$



قيمة الطاقة الكامنة $V(x)$ تساوي صفر عندما $x<0$ وقيمتها ثابتة وتساوي $V_\circ$ عندما $x>0$. وبالحقيقة لايتغير هنا الجهد الفيزياوي بصورة فجائية وانما بصورة مستمرة وكما موضح بالمنحني المنقط في الشكل. فالالكترونات الحرة في المعدن تعاني تغيرا منتظما في الجهد بالقرب من سطح المعدن وسبب معالجتنا للموضوع على اساس التغيير الفجائي هو لتجنب التعقيدات الرياضية.

ولسهولة الحل نجزيء الفراغ الى منطقتين هما (I ، II) وكما مبين في الشكل فالمنطقة I تمثل الجسيمات في الوسط تكون فيه $V(x)=0$ بينما المنطقة II تمثل الجسيمات في الوسط الذي تكون فيه $V(x)=V_\circ$.

والان ندرس الحالتين عندما تكون طاقة الجسيم اصغر من ارتفاع الجهد $V_\circ$ (اي ان $E<V_\circ$) وعندما تكون طاقة الجسيم اكبر من ارتفاع الجهد $V_\circ$ (اي ان $E>V_\circ$)

اولا اذا كانت $E<V_\circ$

كلاسيكيا : لايمكن ان يتواجد الجسيم في المنطقة II اذن الوسط $x>0$ محضور او ممنوع كلاسيكيا اذا كانت $E<V_\circ$.

كميا : (اي من وجهة نظر الميكانيك الكمي)

نكتب معادلة شرودنكر الغيرمعتمدة على الزمن بصورة منفصلة لكلا المنطقتين (I ، II)

اولا في المنطقة **I**

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+V(x)\,\psi_1=E\,\psi_1$$

بما ان $V(x)=0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_1}{dx^2}=E\psi_1$$

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1=0$$

$$\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2}+k^2\psi_1(x)=0$$

حيث ان $k^2=\dfrac{2mE}{\hbar^2}$

والحل العام للمعادلة اعلاه

$$\psi_1(x)=\underbrace{Ae^{ikx}}_{\text{Incident}}+\underbrace{Be^{-ikx}}_{\text{Reflected}} \qquad (1)$$

حيث Ae^{ikx} دالة الموجة الساقطة، Be^{-ikx} دالة الموجة المنعكسة

المنطقة **II**

تكون معادلة شرودنكر بالشكل التالي

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2}-\frac{2m}{\hbar^2}(V_\circ-E)\ \psi_2=0$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2}-\alpha^2\psi_2=0$$

حيث ان $\alpha^2=\dfrac{2m}{\hbar^2}(V_\circ-E)$

والحل العام لهذه المعادلة هو

$$\psi_2(x)=Ce^{-\alpha x}+De^{+\alpha x}$$

الدالة الموجية ψ ذات قيمة محددة Bounded ويجب ان تتلاشى في اللانهاية اي ان $\psi=0$ عندما $x\to\infty$

لذلك يهمل الحد $De^{\alpha x}$

$$\psi_2(x)=\underbrace{Ce^{-\alpha x}}_{\text{Transmitted}} \qquad (2)$$

دالة الموجة النافذة

وحقيقة كون ψ_2 لاتساوي صفر تعني ان هنالك احتمالية لتواجد الجسيم في المنطقة II المحضورة كلاسيكيا وان هذه الاحتمالية تقل مع زيادة x

لايجاد الثوابت A ، B ، C نطبق شرطي استمرارية دالة الموجة عند $x = 0$

1. $\psi_1(x=0) = \psi_2(x=0)$
2. $\left.\dfrac{d\psi_1}{dx}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{d\psi_2}{dx}\right|_{x=0}$

$$A + B = C$$

$$ik(A - B) = -\alpha\ C$$

H.W

$$\therefore\quad C = \left(\frac{2ik}{ik-\alpha}\right)A \quad , \quad B = \left(\frac{ik+\alpha}{ik-\alpha}\right)A$$

وبالتعويض عن الثوابت B ، C بالمعادلة 1 ، 2 ينتج

$$\psi_1(x) = \frac{A}{ik-\alpha}\left\{(ik-\alpha)\ e^{ikx} + (ik+\alpha)\ e^{-ikx}\right\}$$

$$\psi_2(x) = \frac{2ikA}{ik-\alpha}\ e^{-\alpha x}$$

واذا اعتبرنا ان $|A|^2$ تمثل شدة المجال الساقط و شدة المجال المنعكس هو $|B|^2$

$$|B|^2 = B^* \cdot B = \left(\frac{-ik+\alpha}{-ik-\alpha}\right)\cdot\left(\frac{ik+\alpha}{ik-\alpha}\right)\cdot A^* \cdot A$$

$$|B|^2 = B^* \cdot B = \left(\frac{-ik+\alpha}{-ik-\alpha}\right)\cdot\left(\frac{-(-ik-\alpha)}{-(-ik+\alpha)}\right)\cdot A^* \cdot A$$

$$|B|^2 = |A|^2$$

اذن، شدة المجال الساقط تساوي شدة المجال المنعكس. وقد تفسر هذه النتيجة بقولنا ان جميع الجسيمات التي تصل حاجز الجهد (مدرج الجهد) عندما $E < V_\circ$ ستنعكس وبضمنها التي تتغلغل في المنطقة II

ولما كانت

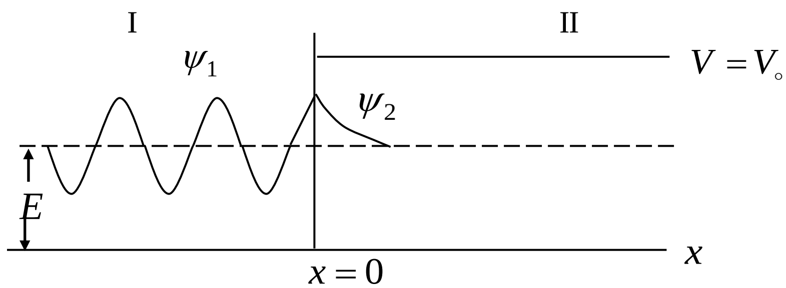
$$\psi_1(x) = \frac{A}{ik-\alpha}\left\{(ik-\alpha)\ e^{ikx} + (ik+\alpha)\ e^{-ikx}\right\}$$

وباستخدام $e^{\pm ikx} = \cos kx \pm i \sin kx$

$$\psi_1(x) = \frac{2ikA}{ik-\alpha}(\cos kx - \frac{\alpha}{k}\sin kx)$$

$$\psi_2(x) = \frac{2ikA}{ik-\alpha}\ e^{-\alpha x}$$

وباهمال الثابت $\frac{2ik}{ik-\alpha}$ يمكن رسم ψ_1 ، ψ_2 بالشكل التالي



كلما كبرت الطاقة الكامنة $V_\circ$ كبرت قيمة α ووفقا لذلك تسارعت الدالة ψ_2 بالتناقص لقيم $x > 0$ ان كثافة احتمالية وجود الجسيم في المنطقة II (في المنطقة الممنوعة كلاسيكيا تكون)

$$|\psi_2(x)|^2 = \psi_2^*(x)\psi_2(x)$$

$$= \frac{4k^2A^2}{k^2+\alpha^2}\ e^{-\alpha x}$$

وهذه الاحتمالية تتناقص كلما توغلنا اكثر عمق المنطقة II اي تتناقص بزيادة x

ثانيا اذا كانت $E > V_\circ$

اولا في المنطقة **I**

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1 = 0$$

$$\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} + k^2\psi_1(x) = 0$$

حيث ان $k^2 = \dfrac{2mE}{\hbar^2}$

$$\therefore \quad \psi_1(x) = Ae^{ikx} \quad + \quad Be^{-ikx}$$

ان وجود B بجذ ذاته في هذه المعادلة يشير الى ان هنالك احتمالية في ان ترتد وتنعكس بعض الجسيمات اثناء سقوطها على الحاجز.

في المنطقة **II**

تكون معادلة شرودنكر بالشكل التالي

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_\circ)\ \psi_2 = 0$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + k'^2\psi_2 = 0 \qquad , \quad k'^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_\circ)$$

حيث ان $\alpha^2 = \dfrac{2m}{\hbar^2}(V_\circ - E)$

حل هذه المعادلة هو

$$\psi_2(x) = Ce^{ik'x} \quad + De^{-ik'x}$$

يهمل الحد الثاني لعدم وجود موجات منعكسة في الوسط الثاني

$$\therefore \quad \psi_2(x) = Ce^{ik'x}$$

لايجاد الثوابت A ، B ، C نطبق شرطي استمرارية دالة الموجة عند $x = 0$

1. $\psi_1(x=0) = \psi_2(x=0)$
2. $\left.\dfrac{d\psi_1}{dx}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{d\psi_2}{dx}\right|_{x=0}$

$$A + B = C$$

$$k(A - B) = k'C$$

H.W $\therefore \quad C = \left(\dfrac{2k}{k'+k}\right)A \quad , \quad B = \left(\dfrac{k'-k}{k'+k}\right)A$

س / احسب معامل الانعكاس والنفاذ لحاجز الجهد عندما $E > V_\circ$

الجواب

يعرف معامل الانعكاس (R) بانه نسبة الجسيمات الساقطة التي تعاني انعكاسا من حاجز الجهد ورياضيا يعطى

$$R = \left| \frac{J_R}{J_i} \right|$$

حيث

J_i هو تيار الاحتمالية للموجة الساقطة

J_R هو تيار الاحتمالية للموجة المنعكسة

ولو اردنا حساب تيار الاحتمالية للموجة الساقطة من المعادلة العامة لتيار الاحتمالية (راجع الفصل الثاني)

$$j = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

$$= \frac{\hbar}{2mi}(\psi^* \frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d\psi^*}{dx})$$

$$\therefore \quad j_i = \frac{\hbar}{2mi}(A^* e^{-ikx} \cdot \frac{d}{dx} A e^{ikx} - A e^{ikx} \cdot \frac{d}{dx} A^* e^{-ikx})$$

$$j_i = \frac{\hbar k}{m} |A|^2$$

وبنفس الاسلوب نجد تيار الاحتمالية للموجة المنعكسة

$$j_R = \frac{\hbar}{2mi}(B^* e^{ikx} \cdot \frac{d}{dx} B e^{-ikx} - B e^{-ikx} \cdot \frac{d}{dx} B^* e^{ikx})$$

$$= \frac{\hbar k}{m} |B|^2$$

وبالتعويض عن A ، B نجد

$$\therefore \quad R = \left| \frac{J_R}{J_i} \right| = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{k - k'}{k + k'} \right)$$

وكما يعرف معامل الانفاذ T بانه نسبة من الجسيمات الساقطة التي تعاني نفاذا من خلال حاجز الجهد ورياضيا يعطى

$$T = \left| \frac{J_T}{J_i} \right|$$

حيث ان

J_T هو تيار الاحتمالية للموجة النافذة

J_i هو تيار الاحتمالية للموجة الساقطة

وبنفس الاسلوب نجد تيار الاحتمالية للموجة النافذة

$$j_T = \frac{\hbar k'}{m}|C|^2$$

وتيار الاحتمالية للموجة الساقطة J_i هو

$$j_i = \frac{\hbar k}{m}|A|^2$$

$$\therefore \; T = \left|\frac{J_T}{J_i}\right| = \left|(\frac{\hbar k'}{m}|C|^2)/(\frac{\hbar k}{m}|A|^2)\right|$$

وبالتعويض عن قيمة C

اذن

$$T = \frac{4kk'}{(k+k')^2}$$

ولكي يكون عدد الجسيمات محفوظا

$$R+T = (\frac{k-k'}{k+k'})^2 + \frac{4kk'}{(k+k')^2} = 1$$

Potential Barrier Penetration اختراق حاجز الجهد

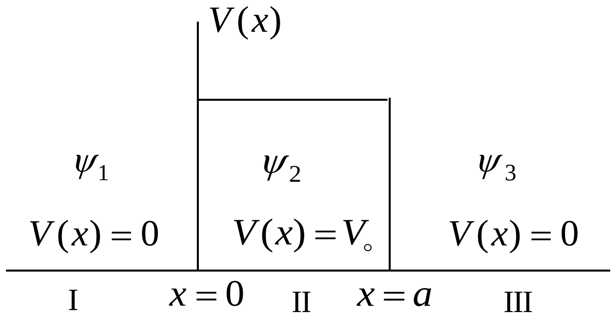
في هذه المسالة سنقوم بدراسة حزمة من الجسيمات قادمة من $x=-\infty$ تسقط على حاجز ذي ارتفاع مقداره $V_{\circ}$ وعرضه يساوي a وكما مبين في الشكل التالي

هنا نجزئ الفراغ الى ثلاث مناطق I ، II ، III

المناطقة I $V(x)=0$ عندما $x<0$ $\psi=\psi_1$

المناطقة II $V(x)=V_{\circ}$ عندما $0\le x\le a$ $\psi=\psi_2$

المناطقة III $V(x)=0$ عندما $x>a$ $\psi=\psi_3$



استنادا الى الميكانيك الكلاسيكي اذا كانت طاقة الجسيم E اكبر من $V_{\circ}$ فانها ستجتاز الحاجز حتما، وتنعكس عنه اذا كانت طاقاتها اقل من $V_{\circ}$. هنا ندرس الحالة من وجهة نظر الميكانيك الكمي وناخذ الحالتين $E<V_{\circ}$ ، $E>V_{\circ}$ على انفراد

اولا عندما $E<V_{\circ}$

المنطقة **I**

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1=0$$

$$\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2}+k^2\psi_1(x)=0$$

حيث ان $k^2=\dfrac{2mE}{\hbar^2}$

حل هذه للمعادلة هو

$$\psi_1(x)=Ae^{ikx}\quad+\quad Be^{-ikx} \qquad (1)$$

المنطقة **II**

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2}-\frac{2m}{\hbar^2}(V_\circ-E)\ \psi_2=0$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2}-\alpha^2\psi_2=0$$

حيث ان $\alpha^2=\frac{2m}{\hbar^2}(V_\circ-E)$

حل هذه للمعادلة هو

$$\psi_2(x)=Ce^{-\alpha x}\ +De^{+\alpha x} \qquad (2)$$

المنطقة **III**

$$\frac{d^2\psi_3}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_3=0$$

$$\frac{d^2\psi_3(x)}{dx^2}+k^2\psi_3(x)=0$$

حيث ان $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$

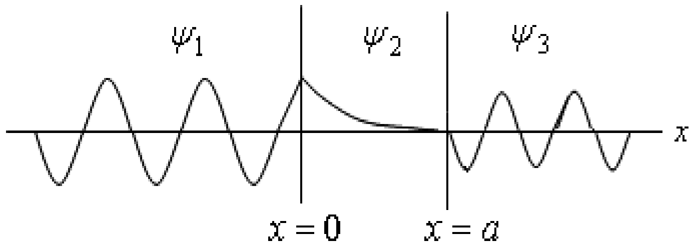
حل هذه للمعادلة هو

$$\psi_3(x)=A'e^{ikx}\ +\ B'e^{-ikx}$$

يهمل الحد الثاني من المعادلة الاخيرة لعدم وجود موجة منعكسة في المنطقة **III**

$$\therefore\quad \psi_3(x)=A'e^{ikx} \qquad (3)$$

ويمكن الان ان نفسر تصرف دالة الموجة وكما في الشكل ادناه وكلسابق تحتوي دالة الموجة ψ_1 (المعادلة (1)) على الجسيمات الساقطة والمنعكسة اما ψ_2 (المعادلة (2)) فتضمحل اسيا وتمتد الى $x=a$ ولما كانت دالة الموجة ψ_2 لاتساوي صفر عند $x=a$ لذلك تستمر دالة الموجة في الوسط **III** وبشكل تذبذبي هو ψ_3 (المعادلة (3)) وهي تمثل الجسيمات النافذة والتي لها نفس طاقة الجسيمات الساقطة ولكن بسعة A' تختلف عن A (سعة اقل لان السعة تعني شدة الحزمة اي الكثافة العددية للجسيمات وبما ان جزءا من هذه الجسيمات انعكس وارتد الى الخلف في كل من $x=0$ ، $x=a$ لذلك تكون الشدة اقل اي السعة اقل في هذه المنطقة) . ولما كانت ψ_3 لاتساوي صفر فهنالك احتمالية تواجد الجسيم في الوسط **III** وبعبارة اخرى بامكان الجسيم اختراق حاجز الجهد حتى لو كانت طاقته الحركية اقل من ارتفاع حاجز الجهد.



ثانيا اذا كانت $E > V_\circ$

ان نتائج الميكانيك الكلاسيكي لهذه الحالة تشير الى ان جميع الجسيمات الساقطة على حاجز الجهد تمر عبر الحاجز الى المنطقة الثالثة في حين سنجد عن طريق المعالجة الكمية ان هناك احتمالية لبعض الجسيمات ستنعكس عند النقطتين $x = 0$ ، $x = a$ وترتد الى الخلف.

ان دوال الموجة لهذه المناطق الثلاثة في هذه الحالة هي على التوالي

المنطقة **I**

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\,\psi_1 = 0$$

$$\frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} + k^2\psi_1(x) = 0 \quad ، \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\therefore \psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

المنطقة **II**

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_\circ)\,\psi_2 = 0$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + k'^2\psi_2 = 0 \quad ، \quad k'^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_\circ)$$

$$\therefore \quad \psi_2(x) = Ce^{ik'x} + De^{-ik'x}$$

المنطقة **III**

$$\frac{d^2\psi_3}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\,\psi_3 = 0$$

حيث ان $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ ، $\frac{d^2\psi_3(x)}{dx^2} + k^2\psi_3(x) = 0$

$$\psi_3(x) = A'e^{ikx} + B'e^{-ikx}$$

يهمل الحد الثاني من المعادلة الاخيرة لعدم وجود موجة منعكسة في المنطقة **III** وبذلك يكون

$$\therefore\ \psi_3(x) = A'e^{ikx}$$

س) جسيم يتحرك في صندوق الجهد الذي يوصف بدالة الموجة $\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(n\pi x/a)$ اوجد $\langle p_x\rangle$ ، $\langle p_x^2\rangle$ ، $\langle x\rangle$ ، $\langle x^2\rangle$ ، $\Delta p\,\Delta x$.

Solution:

$$\langle p_x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(x)\,\hat{p}_x\,\psi_n(x)\,dx$$

$$=\int_0^a\sqrt{\tfrac{2}{a}}\sin(n\pi x/a)(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})\sqrt{\tfrac{2}{a}}\sin(n\pi x/a)\,dx$$

$$=\frac{-2i\hbar}{a}\int_0^a\sin(n\pi x/a)\cdot\frac{n\pi}{a}\cdot\cos(n\pi x/a)\,dx$$

$$=\frac{-2i\hbar\,n\pi}{a^2}\int_0^a\sin(n\pi x/a)\cos(n\pi x/a)\,dx$$

$$=\frac{-i\hbar}{a}\sin^2(n\pi x/a)\Big|_0^a$$

$$=0$$

ولما كان الزخم كمية متجهة فمعدله يساوي صفر وتفسير ذلك بان احتمالية كون الجسيم يتحرك نحو اليسار تساوي احتمالية حركته نحو اليمين ولاتدل على ان الجسيم تعوزه الحركة

والان نجد $\langle p_x^2\rangle$

$$\langle p_x^2\rangle=\int_0^a\sqrt{\tfrac{2}{a}}\sin(n\pi x/a)(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2})\sqrt{\tfrac{2}{a}}\sin(n\pi x/a)\,dx$$

$$=\frac{-2\hbar^2}{a}\int_0^a\sin(n\pi x/a)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\sin(n\pi x/a)\,dx$$

$$=\frac{-2\hbar^2}{a}\int_0^a\sin(n\pi x/a)\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{n\pi}{a}\cos(n\pi x/a)\,dx$$

$$=\frac{-2n\pi\hbar^2}{a^2}\int_0^a\sin(n\pi x/a)\,\frac{\partial}{\partial x}\,\cos(n\pi x/a)\,dx$$

$$= \frac{-2n^2\pi^2\hbar^2}{a^3}\int_0^a \sin(n\pi x/a)\ \sin(n\pi x/a)\ dx$$

ويمكن كتابة المعادلة الاخيرة بالشكل التالي

$$\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^2} = \int_0^a \sqrt{\tfrac{2}{a}}\sin(n\pi x/a)\ \sqrt{\tfrac{2}{a}}\sin(n\pi x/a)\ dx$$

وبما ان دوال الموجة لجسيم يتحرك في صندوق الجهد هي عيارية اي ان

$$\int_0^a \sqrt{\tfrac{2}{a}}\sin(n\pi x/a)\ \sqrt{\tfrac{2}{a}}\sin(n\pi x/a)\ dx = 1$$

$$\therefore \quad \langle p^2\rangle = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^2}$$

$$\because \quad (\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^2}$$

$$= \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^2}$$

$$\therefore \quad (\Delta p) = \frac{n\pi\hbar}{a}$$

والان نجد $\langle x\rangle$

$$\langle x\rangle = \int_0^a \psi_n(x)\ x\psi_n(x)\ dx$$

$$= \int_0^a \sqrt{\tfrac{2}{a}}\sin(n\pi x/a)\ \ x\ \ \sqrt{\tfrac{2}{a}}\sin(n\pi x/a)\ dx$$

$$= \int_0^a x\ \sin^2(n\pi x/a)\ \ dx$$

ان هذا التكامل بسيط جدا وقيمته

$$\langle x\rangle = \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad \langle x\rangle^2 = \frac{a^2}{4}$$

وهي تشير الى تواجد الجسيم في نصف الصندوق الايسر او الايمن بنفس الاحتمالية

والان نجد $\langle x^2\rangle$

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^a \psi_n(x)\ x^2\, \psi_n(x)\ dx$$

$$= \int_0^a \sqrt{\tfrac{2}{a}}\sin(n\pi x/a)\ \ x^2 \sqrt{\tfrac{2}{a}}\sin(n\pi x/a)\ dx$$

$$= \frac{2}{a}\int_0^a x^2 \sin^2(n\pi x/a)\ \ dx$$

ان هذا التكامل بسيط وقيمته هي

$$\langle x^2 \rangle = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2n^2\pi^2}$$

$$\because \quad (\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$= \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2n^2\pi^2} - \frac{a^2}{4}$$

$$= a^2\left[\frac{1}{12} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\right]$$

$$\therefore \quad \Delta x = a\ \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\right]$$

$$\Delta p\ \Delta x = \frac{n\pi\hbar}{a} - a\ \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\right]$$

$$\Delta p\ \Delta x = \hbar\ \left[\frac{n^2\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\right]$$

ان اقل قيمة لحاصل الضرب ينتمي الى الحالة الارضية $n = 1$

$$\Delta p\ \Delta x = 0.567\ \hbar$$

وهذه النتيجة تتفق مع $\Delta p\ \Delta x \geq \hbar$