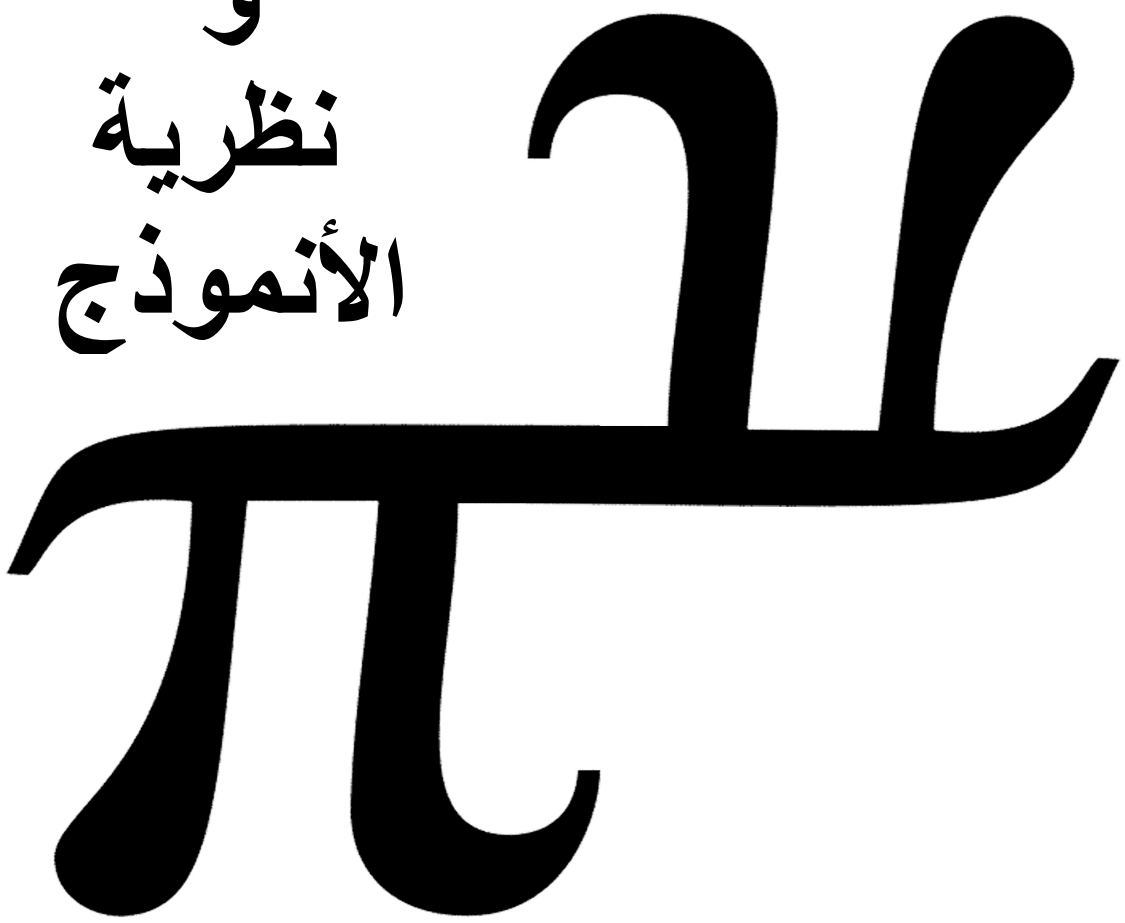
التحليل البُعدي

و

نظرية

الأنموذج



جلال الحاج عبد

بســـم الله الرحـــمن الرحـــيم

المقدمه

يعتبر كتاب التحليل البُعدي و نظرية الأنموذج[1] لمؤلفه لانغهار من الكتب المهمة في التحليل البُعدي و ذلك لبساطته و أحتوائه على أمثلة و نماذج عملية تميزه عن غيره من الكتب التي كتبت حول هذا الموضوع . معظم هذا الكتاب الذي بين أيديكم هو ترجمة من هذا الكتاب . و قد أضفت بعض الأمثلة و الجداول للوحدات و القوانين الفيزيائية التي يُرجع اليها في التحليل البُعدي.

التحليل البُعدي من المواضيع المهمة و الأساسية في الهندسة و بخصوص هندسة الميكانيك في مواضيع الحرارة و المائعات و السوائل . من خلال هذا البحث يمكن أستنتاج روابط تربط الكميات الفيزيائية أرتباطاً منطقياً يتناسب مع خصائص الكميات هذه ، بحيث نتيجة هذا الأرتباط مجموعة من الأعداد اللا بُعدية ، هذه الأعداد هي روابط بين هذه الكميات . تركيب هذه الأعداد اللا بُعدية عبارة عن دالة ، متغيراتها هذه الأعداد اللا بُعدية . هذه الدالة هي القانون الفيزيائي الذي تستنتج منه كمية مجهولة من خلال الكميات المعلومة.

إذن التحليل البُعدي عبارة عن طريقة لأكتشاف و أستنتاج القوانين . كذلك من خلاله يمكن تشخيص كيفية تأثير الكميات الفيزيائية في المسئلة ، هل هو تأثير مباشر أم غير مباشر أو ليس لها أي تأثير؟

يبدأ هذا الكتاب بشرح القوانين الفيزيائية و الميكانيكية و وحداتها و الأنظمه القياسية ، ثم شرح لنظرية باكينجهام و كيفية حل المسائل من خلال التحليل البُعدي ، ثم شرح نظرية الأنموذج و التشابه و أنواعه. هناك عدة تطبيقات للتحليل البُعدي في فروع الميكانيك و الفيزياء . التطبيقات التي بحثناها هي في المجالات التالية : ميكانيك الحرارة ، ميكانيك السوائل ، الجهد و الإنفعال، و في فيزياء الكمّ . يوجد تطبيق للتحليل البُعدي في الكهرباء و المغناطيس لم نستطرق إليه . و مثال لنموذج كوني يربط حركة الكلينكر داخل الأفران الدوارة للأسمنت بحركة الأجرام السماوية في الفضاء ، كذلك يوجد فصل لعدد من الأمثله مع الجواب ، وكّلنا الحلّ التفصيلي للقراء . خاتمة الكتاب معجم لبعض أهم مصطلحات التحليل البُعدي و نظرية الأنموذج .

جلال الحاج عبد
2007

1- Dimensional Analysis and Theory of Models , Henry L. Langhaar , John Wiley & Sons, INC. 1971

ـ تحليل بعدى و نظريه مدل ـ هنرى ل. لانگهار ـ ترجمه د فريدون شكوهى ـ نشر دانشگاهى

الوحدات القياسيه في الأنظمه البُعدية

نبدأ هذا البحث بهذين النظامين للوحدات القياسية :

- نظام SGC ، في هذا النظام الحروف S و G و C بالترتيب هي الزمن الثانيه ، و الكتلة الغرام و الطول السانتي متر .

- نظام SKM ، في هذا النظام الحروف S و K و M بالترتيب الزمن ثانيه و الكتلة الكيلو غرام و الطول متر.

الفيزيائي و الفيلسوف الأسكتلندي ماكسول (Maxwell) أستعمل الحروف التاليه: (F) للقوة و (M) للكتلة و (L) للطول و (T) للزمن و (θ) للحرارة. أطلق تسمية الأبعاد على نتائج ضرب هذه الحروف و هي تحمل الأسس. يعتقد ماكسول بأهمية هذه الأبعاد في وجود تشابه بين فروع الفيزياء المختلفه كالميكانيك و الكهرباء و الحرارة. نالت هذه الأبعاد أهمية فيزيائيه و رياضيه فاقت أهميتها الفلسفيه.

تستنتج وحدة الكميات من التعاريف و الروابط و القوانين الفيزيائيه. على سبيل المثال حسب قانون نيوتن القوة عبارة عن $F = ma$ أي الكتلة في التعجيل و من حاصل ضرب وحدة الكتلة في وحدة التعجيل $[M]\times\left[\frac{L}{T^2}\right]$ نحصل على وحدة القوة $\left[\frac{ML}{T^2}\right]$ كذلك تكتب $\left[MLT^{-2}\right]$

تستقل وحدة الحرارة [θ] عن سائر الوحدات الميكانيكية الأخرى و هي عبارة عن وحدة مستقلة لا يمكن أستنتاجها من الطول و الكتلة و الزمن.

لا يوجد أي دليل يلزم أستعمال نظامين مختلفين للأبعاد كنظام الكتلة [M] و نظام القوة [F].

تجانس الأبعاد

قانون أو معادله أو رابطه في حالة هي متجانسه أو متماثلة بُعدياً إلا إذا كانت وحدات الكميات المستعمله في هذه الروابط و القوانين و المعادلات هي من نفس النظام البُعدي . مثلاً إذا كانت الرابطة أو القانون بهذا الشكل:

$$f = a + b + c + d + \cdots$$

إذا كانت وحدات a و b و c و غيرها في نظام [MTL] فنتيجة الرابطة f هي كذلك في [MTL]. إذا كانت الكميات في نظامين قياسيين او أبعاديين مختلفين يجب توحيد النظامين بنظام واحد من خلال المعامل المخصوصة لكل من الوحدات. مثلاً الكتلة في نظام SKM هي كيلو غرام بينما في SGC هي غرام و كل كيلو غرام هو ألف غرام، ضريب التبديل هنا بين هذين النظامين هو ألف كذلك الحال مع الأنظمه الأخرى كالنظام الأمريكي و الأنجليزي و الأوربي ، في النظام الانجليزي الكتلة حسب الباوند و الكيلو غرام يساوي 2.2046226 بوند.

هذه بعض الجداول لتحويل الوحدات ، و بعض الثوابت الفيزيائية ، و الأعداد اللا بُعدية .

بعض الكميات الميكانيكيه و وحداتها

الكميه	نظام الكتلة	نظام القوة
الطول	$[\ L\ ]$	$[\ L\ ]$
الزمن	$[\ T\ ]$	$[\ T\ ]$
الحراره	$[\ \theta\ ]$	$[\ \theta\ ]$
القوة	$[\ MLT^{-2}\ ]$	$[\ F\ ]$
الكتله	$[\ M\ ]$	$[\ FL^{-1}T^{2}\ ]$
الكثافه المخصوصه	$[\ ML^{-2}T^{-2}\ ]$	$[\ FL^{-3}\ ]$
الكثافه	$[\ LM^{-3}\ ]$	$[\ FL^{-4}T^{2}\ ]$
الزاويه	$[\ 1\ ]$	$[\ 1\ ]$
الضغط	$[\ ML^{-1}T^{-2}\ ]$	$[\ FL^{-2}\ ]$
السرعه	$[L\ T^{-1}]$	$[L\ T^{-1}]$
التعجيل	$[L\ T^{-2}\ ]$	$[L\ T^{-1}]$
سرعه الزاويه	$[\ T^{-1}\ ]$	$[\ T^{-1}\ ]$
تعجيل الزاويه	$[\ T^{-2}\ ]$	$[\ T^{-2}\ ]$
الشغل	$[\ ML^{2}T^{-2}\ ]$	$[\ FL\ ]$
الجهد	$[\ ML\ T^{-2}\ ]$	$[\ FT\ ]$
الطاقه	$[\ ML^{2}T^{-3}\ ]$	$[\ FLT^{-1}\ ]$
العزم	$[\ ML^{2}T^{-2}\ ]$	$[\ FL\ ]$
اللزوجه الديناميكيه	$[\ ML^{-1}T^{-1}\ ]$	$[\ FL^{-1}T\ ]$
اللزوجه الكينماتيه	$[\ L^{2}T^{-1}\ ]$	$[\ L^{2}T^{-1}\ ]$
عزم العطاله للسطح	$[\ L^{4}\ ]$	$[\ L^{4}\ ]$
عزم العطاله للكتله	$[\ ML^{2}\ ]$	$[\ FLT^{2}\ ]$
التوتّر السطحي	$[\ MT^{-2}\ ]$	$[\ FL^{-1}\ ]$
معامل المرونة	$[\ ML^{-1}T^{-2}\ ]$	$[\ FL^{-2}\ ]$

وحدة الكميات الكهربائية و المغناطيسية

الكمية	النظام LTIΦ	النظام LT I Q	الوحدة
الشحنه الكهربائيه	Q	T I	كولمب
سعة الحثّ الكهربائي ε	$M^{-1} L^{-3} T^{2} Q^{2}$	$L^{-1} T I \Phi^{-1}$	فاراد / متر
سعة الحث المغناطيسي μ	$M L Q^{-2}$	$L^{-1} T I^{-1} \Phi$	أهم ثانيه / متر
كثافة التيار الكهربائي J	$L^{-2} T^{-1} Q$	$L^{-2} I$	آمبر / متر تربيع
التيار الكهربائي	$T^{-1} Q$	I	آمبر
شدة الحقل الكهربائي E	$M L T^{-2} Q^{-1}$	$L^{-1} \Phi$	فولت / متر
الجهد الكهربائي	$M L^{2} T^{-2} Q^{-1}$	Φ	فولت
السعه الكهربائيه	$M^{-1} L^{-2} T^{2} Q^{2}$	$T I \Phi^{-1}$	فاراد
المقاومه الكهربائيه	$M L^{2} T^{-1} Q^{-2}$	$I^{-1} \Phi$	أهم
شدة الحقل المغناطيسي H	$L^{-1} T^{-1} Q$	$L^{-1} I$	آمبر / متر
الحثّ المغناطيسي	$M T^{-1} Q^{-1}$	$L^{-2} T \Phi$	آمبر / متر تربيع
سريان الحقل المغناطيسي	$M L^{2} T^{-1} Q^{-1}$	$T \Phi$	وبر
معامل الحثّ	$M L^{2} Q^{-2}$	$T I^{-1} \Phi$	هنري
الطاقة الكهربائيه	$M L^{2} T^{-2}$	$T I \Phi$	جول
القدرة الكهربائيه	$M L^{2} T^{-3}$	$I \Phi$	واط
الكتلة	M	$L^{-2} T^{3} I \Phi$	كيلو غرام

M الكتلة L الطول T الزمن Q الشحنه الكهربائيه

L الطول T الزمن I التيار الكهربائي Φ الجهد الكهربائي

بعض الروابط و القوانين

v السرعة، x المسافة، t الزمان	$v = \frac{x}{t}$
F القوة ، m الكتلة ، a التعجيل	$F = ma$
ρ الكثافة، m الكتلة ، Vالحجم	$\rho = \frac{m}{V}$
P الضغط ، F القوة ،A المساحة	$P = \frac{F}{A}$
W الشغل (العزم)، F القوة ، d الفاصلة (الطول)	$W = F \cdot d$
Q تدفق الكتلة، ρ الكثافة ، v السرعة، A المساحة	$Q = \rho \cdot v \cdot A$
E الطاقة، W الشغل، t الزمان	$E = \frac{W}{t}$
P كمية الحركة، m الكتلة، v السرعة	$P = m \cdot v$
Q الحرارة المعطاة أو المأخوذة، m الكتلة، C السعة الحرارية، ΔT تغيرات الحرارة	$Q = m \cdot C \cdot \Delta T$
الدفع: F القوة، Δt الفتره الزمنيه، Δ(mv) تغيرات الكتلة في السرعة	$F \cdot \Delta t = \Delta(mv)$
P الضغط تحت الماء، ρ الكثافة، g ثابت جاذبية الأرض، h الأرتفاع	$P = \rho g h$

بعض الثوابت الفيزيائيه

الثابت الفيزيائي	علامته	قيمته	وحدته
ثابت الجاذبيه العام لنيوتن	G	6.67428×10^{-11}	$L^3M^{-1}T^{-2}$
ثابت جاذبية الارض	g	9.806 65	LT^{-2}
ثابت الجاذبية العام لأنشتاين *	k	$2.0766412200 \times 10^{-43}$	$M^{-1}L^{-1}T^2$
سرعة الضوء	c	299 792 458	LT^{-1}
ثابت بلانك	h	$6.626\ 068\ 96 \times 10^{-34}$	ML^2T^{-1}
ثابت المغناطيسيه	μ_o	$1.256\ 637\ 061 \times 10^{-6}$	$M\,LT^{-2}I^{-2}$
شحنة الالكترون	e	$1.602\ 176\ 487 \times 10^{-19}$	C
ثابت الغازات	R	8.314 472	$M\,L^{-1}T^{-2}\,\theta^{-1}$
ثابت ستيفان بولتزمان	σ	$5.670\ 400(40) \times 10^{-8}$	$M\ T^{-3}\,\theta^{-4}$
ثابت بولتزمان	k	$1.380\ 6505 \times 10^{-23}$	$M\,L^2\,T^{-2}\,\theta^{-1}$
كتلة البروتون	m_p	$1.672\ 621\ 637 \times 10^{-27}$	M
كتلة الالكترون	m_e	$9.109\ 382\ 15 \times 10^{-31}$	M
نصف القطر الكلاسيكي للالكترون	r_e	$2.817940\ 2894 \times 10^{-15}$	L
ثابت كولومب	k	$8.987551\ 787\ 4 \times 10^{9}$	$M\,L^3\,T^{-2}\,C^{-2}$
ثابت فاراداي	F	96 485.3383	$C\,L^{-3}$
ثابت الشحنه الكهربائيه	ε_o	$8.854\ 187\ 817 \times 10^{-12}$	C كولمب
عدد أفوغادرو	N	$6.022\ 1415 \times 10^{23}$	

θ درجة الحرارة

$$* k = \frac{8\pi G}{c^4}$$

الوحدات العيارية

الوحدة	العلامة	نسبة التبديل
الزمن		
الساعة	hr	60 min
الدقيقة	min	60 s الثانيه s
الهرتز	Hz	$\frac{1}{s}$
الطول		
الفوت	ft	0.3048 m متر
الأنج	in	1.0/12.0 ft
الميل	mile	5280.0 ft
البارسك	pc	3.085678×10^{16} m
اليارد	yd	3 ft
أنكستروم	Ang	1×10^{-10} m
الحرارة		
سليسيوس	C	1 K -273.15
رانكين	R	5.0/9.0 K
الفارنهايت	F	1 R -459.67(9/5 * °Celsius + 32 = °Fahrenheit)
كلوين	K	Celsius + 273.15 = Kelvins
الكتلة		
الغرام	g	0.001 kg كيلو غرام kg
الباوند (الكتلة)	lbm	0.45359237 kg
الأونس	الأوز oz	28.34952 g

القوة أو الوزن		
نيوتن	N	1 kg m/s^2
الدين	dyn	1×10^{-5} N
باوند (قوة)	lbf	1 pound force = 4.44822162 Newtons
الطاقة		
الجول	J	1 N m
الوحدة الحرارية الأنجليزيه	BTU	1055.056 J
كالري	Cal	4.1868 J
إلكترون فولت	ev	1.602177×10^{-19} J
طنTNT	TNT	4.184×10^{9} J
القدرة		
وات	W	1 J/s
قوة حصان	hp	745.699872 watts
الضغط		
البار	bar	1×10^{5} N/m^2
باسكال	Pa	1 N/m^2
أتمسفر	atm	1.01325×10^{5} N/m^2
أنج زئبق	inHg	3.387 kPa
مليمتر زئبق	mmHg	0.1333 kPa
الكهرومغناطيس		
كولمب	C	1 A s A آمبر
فولت	V	1 W/A
أهم	Ohm	1 V/A
فارادي	faraday	96485.31 C
فاراد	farad	C/V
وبر	Wb	V s
تسلا	Tesla	Wb/m^2
هنري	H	Wb/A

بعض أشهر الأعداد اللا بعدية

$R_e = \frac{VD\rho}{\mu}$	**عدد رينولدز** Reynolds number V سرعة المائع أو السائل ، D قطر الأنبوب ، ρ الكثافة ، μ اللزوجه
$P = \frac{F}{\rho V^2 L^2}$	**معامل الضغط** Pressure coefficient F القوة ، ρ الكثافة ، V سرعة المائع أو السائل ، L مميزة الطول مثلاً القطر
$Fr = \frac{V^2}{Lg}$	**عدد فراود** Froude number V سرعة المائع أو السائل ، L مميزة الطول مثلاً القطر ، g تابت جاذبية الأرض
$M = \frac{V}{c}$	**عدد ماخ** Mach number V سرعة المائع أو السائل ، c سرعة الصوت
$W = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$	**عدد وبر** Weber number ρ الكثافة ، V سرعة المائع أو السائل ، L مميزة الطول ، σ الشدّ السطحي وحدته كوحدت اللزوجة (surface tension)
$Nu = \frac{hL}{k}$	**عدد نسلت** Nusselt number h معامل الحمل الحراري (انتقال الحرارة الحملي) ، k الموصّلية الحرارية للمائع ، L مميزة الطول
$\Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ $\boxed{\Pr = \frac{C_p \mu}{k}}$	**عدد برانتل** Prandtl number υ اللزوجه الكنماتيكيه ، α الأنتشار الحراري ،
$Gr = \frac{\beta\theta g L^3 \rho^2}{\mu^2}$	**عدد غراشوف** Grashof number μ اللزوجه ، ρ الكثافة ، L مميزة الطول ، g تابت جاذبية الأرض ، θ الحرارة β معامل التمدد الحراري الحجمي

النظريه الجبريه للتحليل البُعدي

من الصعب التفكيك بين نظرية التحليل البُعدي رياضياً وفيزيائاً ، و ذلك لوجود أرتباط وثيق بين القضايا الرياضية لنظرية التحليل البُعدي و المفاهيم الفيزيائية . نتائج مطالعة نظرية التحليل البُعدي بعيداً عن النظريات الفيزيائيه هي عبارة عن مجموعة من القضايا الجبريه لمعادلات فيها نوع من التجانس . تنتهي هذه القضايا الجبريه بقضية بكنجهام (Buckingham).

لشرح الموضوع و بسطه نستعمل هذه الأبعاد الثلاثة فقط [M] و [L] و [T] .

- أذا كانت قيمة كمية x في نظام و حداته [M] و [L] و [T]، و قيمة هذه الكمية $\bar{x}$ في نظام آخر وحداته هي كذلك [M] و [L] و [T]. الرابطة بين هذه الكميتين في هذين النظامين هي:

$$\bar{x} = x[M]^a [L]^b [T]^c$$

مثال: التعجيل في نظام (الباوند bl ، الفوت tf ، الدقيقه nim) يساوي $900\frac{ft}{\min^2}$ ما هي قيمة هذا التعجيل في نظام اخر وحداته (الباوند bl ، الانج ni ، الثانيه ces)؟ بما ان $1ft = 12in$ و $1\min = 60\sec$ لذلك:

$$\bar{x} = 900\frac{ft}{\min^2} \times [M]^0 [12]^1 \frac{in}{ft}\left[\frac{1}{60}\right]^{-2} \frac{\min^2}{\sec^2} = 3\frac{in}{\sec^2}$$

يجب أن يكون مجموع كميتين أو مجموعتين أبعاديتين (أو أكثر) كمية ذات نفس الأبعاد و الوحدات ، على سبيل المثال لا يمكن جمع الطول و الكتلة. في هذه الرابطة $y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ يجب أن تكون أبعاد الطرف الأيمن مساوية لأبعاد الطرف الأيسر.

في هذه الدالة $y = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ كذلك يجب تساوي أبعاد الطرف الأيمن و الأيسر لذلك:

$$y = [M]^a [L]^b [T]^c$$

$$x_1 = [M]^{a_1 k_1} [L]^{b_1 k_1} [T]^{c_1 k_1}$$

$$x_2 = [M]^{a_2 k_2} [L]^{b_2 k_2} [T]^{c_2 k_2}$$

•

•

•

$$x_n = [M]^{a_n k_n} [L]^{b_n k_n} [T]^{c_n k_n}$$

كي يصبح تجانس بين أبعاد طرفين هذه الرابطة، يجب:

$$a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n = a$$
$$b_1 k_1 + b_2 k_2 + \cdots + b_n k_n = b$$
$$c_1 k_1 + c_2 k_2 + \cdots + c_n k_n = c$$

نظرية بكنجهام : عدد المجموعات اللا بُعدية في أي منظومة يساوي عدد الكميات المؤثرة على تلك المنظومة ناقص عدد الأبعاد أو الوحدات الأساسية في هذه الكميات. كذلك تعرف هذه النظريه، بنظرية π .

مراحل حل المسائل من خلال التحليل البُعدي

- تعين الكميات المؤثره على الشرائط الفيزيائيه للمسئله و عددها n كميه .

- انتخاب نظام أبعادي وحداته مثلا الطول (L) و الكتله (M) و الزمن (T). أو نظام آخر وحداته الطول (L) و القوة (F) و الزمن (T). عدد الوحدات في كل من هذين النظامين هي ثلاثة وحدات ، و يرمز لعدد الوحدات في كل نظام أبعادي بالحرف r .

- عدد الكميات المتكرره في كل مجموعه لا بُعديه هو r ، هذه ليست نتيجه ثابته و للأطمأنان من هذه النتيجه علينا بالخطوة القادمه.

- نعين وحدات كل من الكميات في كلا النظامين أي في TML و TFL إذا كانت النتيجه مساويه في هذه الحاله m = r ، و إلا فعلينا كتابة جدول الوحدات في النظام TML ، و أكبر مرتبة لمصفوفة (لهذا الجدول) محددتها مخالفة للصفر هي r .

- الكميات المهمة و المطلوب تعينها الأفضل أن تكون من بين الكميات المتكرره، و أحياناً للحصول على جواب مقنع نجبر على تغير الكميات المتكرره، فمثلاً إذا كان المطلوب تعين القوة ، الأفضل أن لا تكون القوة من بين الكميات المتكرره ، و ترتب الكميات حسب أهميتها في المسئلة.

- عدد المجموعات الفاقدة للأبعاد هو (n - r) ، اي عدد الكميات المؤثره على المسئله ناقص عدد وحدات الكميات. يرمز لكل مجموعه لا بُعدية بالحرف اليوناني π و π_1 و π_2 و π_3 و π_4 و غيرها .

- اختبار المجموعات الفاقده للأبعاد من خلال تساويها في رابطه أو روابط مثل:

$$\pi = f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \ldots)$$

من خلال هذا المثال سنشرح هذه المراحل

مثال: أوجد القوة المؤثره على كره قطرها D، في مائع سرعته v و كثافته ρ و لزجته μ ؟

الحل:

دالة القوه بهذه الصورة :

$$F = f(V, D, \rho, \mu)$$

عدد الكميات المؤثره في هذه المسئله هي n =5 و هي: القوة F و السرعه v و القطر D و الكثافه ρ و اللزوجة μ.

نرسم هذا الجدول:

	F	v	D	ρ	μ
M	1	0	1	1	1
L	1	1	0	-3	-1
T	-2	-1	0	0	-1

عدد الوحدات المؤثره على كميات المسئله ثلاثة هي: L و M و L أي r =3.

عدد الكميات المتكرره في كل مجموعه m = r = 3 للأطمأنان من هذه النتيجه نقوم بالخطوه التاليه:

في هذا الجدول مرتبة أكبر مصفوفة، محددتها مخالفه للصفر هي:

(مثلاً ننتخب هذه المصفوفة)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

هذه المحددة مخالفة للصفر.

إذن مرتبة هذه المصفوفة هي 3×3 لذلك $m = 3$

من هنا نلاحظ في هذه المسئله إن $r = m$ (أحياناً في بعض المسائل $m \neq r$)

عدد الكميات المتكرره في كل مجموعه لا بُعدية هي 3 و ننتخب هذه الكميات ρ و v و D .

عدد المجموعات الفاقده للأبعاد في هذه المسئله هي: $n-r=5-3=2$ هذه المجموعات هي:

$$\pi_1 = \rho^a V^b D^c F$$

$$\pi_2 = \rho^d V^e D^f \mu$$

$$\pi_1 = \rho^a V^b D^c F$$

M:

L:

T:

$$\begin{cases} a+1=0 \\ -3a+b+c+1=0 \\ -b+(-2)=0 \end{cases}$$

$$\pi_2 = \rho^d V^e D^f \mu$$

M:

L:

T:

$$\begin{cases} d+1=0 \\ -3d+e+f+1=0 \\ -e+(-1)=0 \end{cases}$$

من حل هذه المعادلات نحصل على:

$a=-1$ و $b=-2$ و $c=-2$ و $d=-1$ و $e=-1$ و $f=-1$

إذن هذه المجموعات اللا بُعديه هي:

$$\pi_1 = \rho^{-1}V^{-2}D^{-2}F$$

$$\pi_2 = \rho^{-1}V^{-1}D^{-1}\mu$$

إذن:

$$\pi_1 = f(\pi_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{\rho V^2 D^2} = f(\frac{\mu}{\rho VD})$$

كذلك يمكن كتابة الدالة بهذا الشكل $\pi_1 = f(\pi_2^n)$ و الأس n ليس له أي تأثير على أبعاد الرابطة ، إذن:

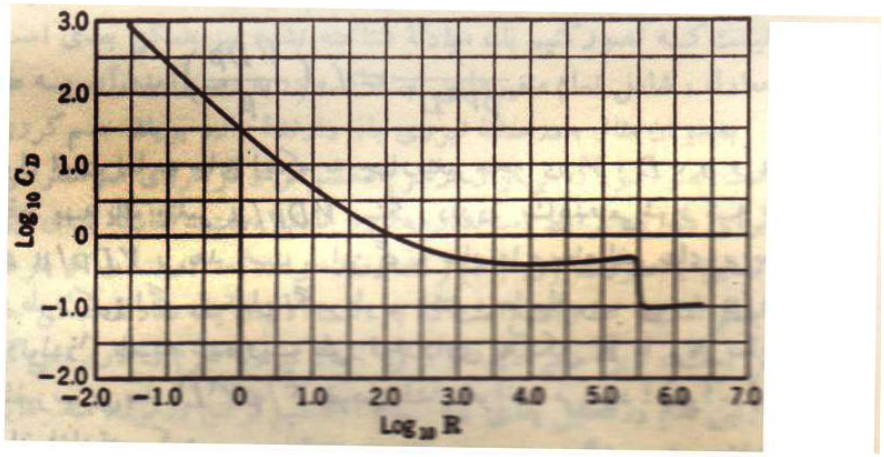
$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f(\frac{\rho VD}{\mu}) \Rightarrow F = \rho V^2 D^2 f(R_e)$$

و هذا بمعنى أن القوه المؤثره على الكره في هذا المائع هي تابع من $\frac{\rho VD}{\mu}$ ، تعرف هذه الكمية اللا بُعدية بعدد رينولدز ، و عوضاً من التعامل مع دالة ذات عدة متغيرات ، أصبحت لدينا دالة ذات متغير واحد هو عدد رينولدز R_e . في المختبر من خلال عدة تجارب يمكن الوصول الى رابطه نهائيه يمكن من خلالها تعين القوه المؤثره على الكره.

في الشكل رقم 1 : القوة المؤثرة على كرة ذات سطح غير خشن، لأي كثافة و لزوجة و سرعة لمائع لا أنضغاطي . كل نقطة على هذا الشكل هي بمثابة تجربة على الأنموذج الأصلي، فعلى سبيل المثال قطر كرة (ذات سطح غير خشن) 10 فوت في جهة ريح سرعته 50 فوت في الثانية في درجة حرارة 60 درجة فارنهايت ، القوة المؤثرة عليها تساوي القوة المؤثرة على كرة (ذات سطح غير خشن) قطرها 1 فوت في أتجاه ريح سرعته 38 فوت في الثانية ، لأن عدد رينولدز لكلا هذين الأنموذجين مساوي . نستنتج من هذا المثال:

1- المعلومات التي نحصل عليها من المخطط اللا بُعدي ، أكثر من معلومات المخطط البُعدي.

2- النقاط على المخطط اللا بُعدي يمكن تعينها من خلال نموذج مصغر من الأنموذج الأصلي.



الشكل رقم 1 : القوة المؤثرة على كرة ذات سطح غير خشن في مائع

Refrence: Das Widerstandsproblem, F. Eisner, Proc. 3d Intern Congr. Applied Mechanics, Stockholm, 1931

أي مجموعه لا بُعدية، أس أي عدد تبقى لا بُعدية. مثلاً لتبسيط هذه المجموعتين اللا بُعديتين:

للتخلص من الأسس الكسرية في هذه المجموعتيين اللا بُعديتين نعمل كالآتي:

$$\left.\begin{aligned}\pi_1 &= PR^{-\frac{1}{3}}S^{-\frac{1}{4}}\\ \pi_2 &= QR^{2}S^{-\frac{7}{4}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}\pi_1 &= P^{12}R^{-4}S^{-3}\\ \pi_2 &= Q^{4}R^{8}S^{-7}\end{aligned}\right.$$

التشابه و التجربة على الأنموذج المصغر

من الأفضل و الأنسب قبل البدأ و تنفيذ أي مشروع أو أطروحة ضخمة و مكلفة العمل و المطالعة على نموذج مصغر(model) من الأنموذج الأصلي (prototype). التحقيقات على الأنموذج المصغر هذا هي بهدف تقليص حجم الخسائر المادية و جمع أكبر كمية ممكنة من المعلومات حول الأنموذج الأصلي. ليس من السهل الأجابة على كل ما يتعلق بالأنموذج الأصلي من خلال الأنموذج المصغر، و أي خطأ في الأنموذج المصغر أو أن الأنموذج المصغر لا يغطي كل تفاصيل الأنموذج الأصلي، فالنتائج ستكون مغايرة، و تهدر التكاليف المادية التي نفقت على تهيئة و تجربة الأنموذج المصغر. الحصول على النتائج نظرياً، يختصر فكرة الأنموذج المصغر و التجربة عليه، لأن تحضير الأنموذج و التجربة عليه يستطلب و قت و نفقات أحياناً تصل الى آلآف الدولارات.

رغم المحدوديات التي تحيط بالتجربة على الأنموذج المصغر لكن تبقى التجربة عليه ذات أهمية بالغة، و في الآونة الأخيرة كثرت الأستفادة من الأنموذج المصغر في الهندسة . هذه بعض النماذج العملية من إستعمال الأنموذج المصغر في الهندسة :

- **المشاريع الهيدروليكيه** : بناء نموذج مصغر للكثير من السدود المائية بمقياس يتراوح بين $\frac{1}{20}$ الى $\frac{1}{60}$ من الأنموذج الأصلي.
- **المكائن المائية** : التوربينات و المضخات و الضاغطات و المبدلات الحراريه
- **الطائرات** : التجربة على نموذج مصغر من الطائرة في نفق الهواء تعتبر من التجارب المهمة في صناعة الطائرات . من خلال هذا الأنموذج المصغر داخل نفق الهواء تحسب جميع القوى الآيروديناميكية و التغيرات التي تحدث لجسم الطائرة كالحركات الأرتعاشية و ألتواء الأجنحة خصوصاً في السرعات العالية.
- **السفن** : القوى المؤثرة و المقاومة على السفن
- **الأبنية**
- **الموانئ**

التشابه

نفرض منظومتين أحداهما الأنموذج الأصلي و الأخرى الأنموذج المصغر، و الأحداثي (x,y,z) و الأحداثي (x',y',z') هما لكلا هاتين المنظومتين و يرتبطان بهذه المعادلات:

$$x' = K_x x \quad \text{و} \quad y' = K_y y \quad \text{و} \quad z' = K_z z \quad \text{و} \quad t' = K_t t$$

العوامل K_x و K_y و K_z هي عوامل المقياس في جهة x و y و z إذا كانت هاتين المنظومتين متشابهتين هندسياً في هذه الحالة: $K_x = K_y = K_z = K_L$. العامل K_t عامل مقياس الزمن تظهر أهميته في المنظومات المتناوبه.

التشابه الهندسي

التشابه الهندسي هو في حالة وجود تشابه بين شكل الأنموذج المصغر و شكل الأنموذج الأصلي. يَصغر طول و عرض الأنموذج المصغر بالنسبة للأنموذج الأصلي بنسب متفاوته، و أحياناً تبقى نسبة التصغير (أو المقياس) نسبة ثابته للأنموذج المصغر كله.

هناك تناظر نقطة الى نقطة بين الأنموذج الأصلي و الأنموذج المصغر. توزيع الكتلة في الأنموذج المصغر مشابهة لنظائره في الأنموذج الأصلي، مثلاً نسبة المادة المستخدمه في جزء من جنائح طائره مساوية لنظيره من الأنموذج المصغر.

التشابه الكامل

نتيجة التجربة على الأنموذج المصغر هي مجموعات لا بُعدية $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_p$ إذا كانت القيمة العدديه لهذه المجموعات للأنموذج المصغر مساوية للأنموذج الأصلي فالتشابه بين الأنموذج المصغر و الأصلي هو عبارة عن تشابه كامل.

$$\pi_{\text{model}} = \pi_{prototype}$$

التشابه الكينماتي

التشابه الكينماتي (الكينماتيكي) هو عبارة عن تشابه الحركة بين أجزاء نظامين ، لتعريف التشابه الكينماتي لابد من وجود تناظر واحد الى واحد بين نقاط و أجزاء الأنموذج الأصلي و الأنموذج المصغر. لذلك التشابه الكينماتي هو: إذا كانت الأجزاء المتناظره من النظامين في أزمنة متناظرة في مواقع متناظرة فالحركة بين هذين النظامين متشابهه.

في حالة وجود تشابه كينماتي متجهة السرعة و التعجيل متشابه في الجهات المتناظره.

إذا كانت متجهة السرعة في الأحداثي (x,y,z) في جهة المحور x هي u و في الأحداثي (x',y',z') هي u' كذلك في جهة y هي v و v' و في جهة z هي w و w' إذن:

$$u' = (\frac{K_x}{K_t})u \quad \text{و} \quad v' = (\frac{K_y}{K_t})v \quad \text{و} \quad w' = (\frac{K_z}{K_t})w$$

معامل المقياس لسرعة u و v و w بالترتيب هي:

$$\frac{K_x}{K_t} \quad \text{و} \quad \frac{K_y}{K_t} \quad \text{و} \quad \frac{K_z}{K_t}$$

كذلك معامل المقياس للتعجيل هي:

$$\frac{K_x}{K_t^2} \quad \text{و} \quad \frac{K_y}{K_t^2} \quad \text{و} \quad \frac{K_z}{K_t^2}$$

إذا كان هذان النظامان متشابهان هندسياً في هذه الحالة $K_x = K_y = K_z = K_L$ إذن:

معامل مقياس السرعة $K_v = \frac{K_L}{K_t}$

معامل مقياس التعجيل $K_a = \frac{K_L}{K_t^2}$

التشابه الديناميكي

نظامان متشابهان ديناميكياً ، في حال مجموع القوى على الأجزاء المتناظرة من هذين النظامين متشابهة . أي إذا كانت الكتلة في كل جزء من نظام مشابهة للجزء المتناظر من النظام الآخر في هذه الحالة : $m' = K_m m$ في هذه الرابطة m و m' الكتلة المتناظرة في كل من النظامين، و K_m ثابت.

أستناداً على قانون نيوتن:

$$F'_x = m'a'_x \quad \text{و} \quad F'_y = m'a'_y \quad \text{و} \quad F'_z = m'a'_z$$

كذلك:

$$F_x = ma_x \quad \text{و} \quad F_y = ma_y \quad \text{و} \quad F_z = ma_z$$

إذا كان التشابه كذلك كينماتي بين هذين النظامين إذن:

$$\frac{F'_x}{F_x} = \frac{K_m K_x}{K_t^2} \quad \text{و} \quad \frac{F'_y}{F_y} = \frac{K_m K_y}{K_t^2} \quad \text{و} \quad \frac{F'_z}{F_z} = \frac{K_m K_z}{K_t^2}$$

هذه الروابط هي عبارة عن معامل المقياس بين القوى المؤثرة على الأجزاء المتناظرة بين منظومتين.

إذا كانت هاتين المنظومتين متشابهتين هندسياً أي $K_x = K_y = K_z = K_L$ إذن:

$$K_F = \frac{K_m K_L}{K_t^2}$$

تطبيق التحليل البُعدي في مسائل ميكانيك الموائع (السوائل)

- **توزيع سرعة سريان مضطرب لمائع قرب سطح صلب**

نفرض سريان مضطرب بحيث متوسط خطوط السريان هي خطوط موازية ، هبوب رياح على سطح واسع أو سريان مائع في أنبوب مستقيم وطويل نماذج من هذا النوع من السريان . سرعة هذا السريان في الفاصله y من هذا السطح تساوي u ، خشونة السطح e ، مميزة الطول L (مثلاً قطر الأنبوب أو طول الصفحة الصلبة التي يتدفق المائع عليها) ، اللزوجة الكينماتية ν ، كثافة المائع ρ ، τ قيمة جهد المائع على هذا السطح . الرابطة بين هذه الكميات هي:

$$f(u,y,e,L,\nu,\rho,\tau)=0$$

من المعلوم أن كل من النسبتين $\frac{y}{e}$ و $\frac{y}{L}$ هي عدد لابُعدي ، للسهولة نحذف كل من L و e من المصفوفة البُعدية ، تصبح المصفوفة البُعدية بهذا الشكل:

عدد الكميات المؤثره في هذه المصفوفة هي n =5 و هي : السرعة u و الأرتفاع أو سماكة المائع y و اللزوجة الكينماتية ν و الكثافه ρ و الجهد τ.

نرسم هذا الجدول:

	u	y	ν	ρ	τ
M	0	0	0	1	1
L	1	1	2	-3	-1
T	-1	0	-1	0	-2

عدد الوحدات المؤثره على كميات المسئله ثلاثة هي : L و M و L أي r=3 .

عدد الكميات المتكرره في كل مجموعه m = r = 3 و بما أن $n-r=5-3=2$ إذن نستنتج من هذه المصفوفة عددين لا بُعديين هما:

$$u\sqrt{\frac{\rho}{\tau}} \quad \text{و} \quad \frac{y}{\nu}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

تعرف هذه النسبة $\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ ببُعد السرعة ، و تسمى في ميكانيك الموائع بالسرعة الأحتكاكية و يرمز لها V^* ، لذلك المجموعات اللا بُعدية المؤثرة في هذه المسئلة هي:

$$\frac{yV^*}{\nu} \quad \text{و} \quad \frac{u}{V^*} \quad \text{و} \quad \frac{y}{e} \quad \text{و} \quad \frac{y}{L}$$

ظاهراً العدد $\frac{yV^*}{\nu}$ هو عدد رينولدز ، و يمثل متغير الأحتكاك في الفاصلة التي تقاس بها y . نستنتج من قضية بكنجهام :

$$\frac{u}{V^*}=f(\frac{yV^*}{\nu},\frac{y}{e},\frac{y}{L})$$

إذا كان سريان المائع على صفحة واسعة بحيث لا يمكن تحديد طولها أي لا وجود الى L ، في هذه الحالة تحذف $\frac{y}{L}$ ، و تصبح المعادلة السابقة بهذا الشكل:

$$\frac{u}{V^*}=f(\frac{yV^*}{\nu},\frac{y}{e})$$

من خلال هذه المعادلة يمكن تعين توزيع السرعة لمائع في أنبوب . في فاصلة صغيرة جداً من الطبقة الجدارية ، جهد المائع على السطح ناتج عن لزوجة المائع .

إذا كان سطح الصفحة أو الأنبوب ناعم أو غير خشن تحذف العبارة $\frac{y}{e}$ من المعادلة و تصبح المعادلة بهذا الشكل:

$$\frac{u}{V^*} = f(\frac{yV^*}{\nu})$$

يستنتج من هذه المعادلة ، رابطة يمكن من خلالها تعين توزيع سرعة المائع في فاصلة صغيرة من الطبقة الجدارية بشرط $\frac{yV^*}{\nu} > 50$ ، هذه الرابطة هي:

$$\frac{u}{V^*} = 5.75 \times \log_{10}(\frac{yV^*}{\nu}) + 5.5$$

- **ضاغطة الطرد المركزي**

ضاغطة تقوم بضغط غاز معين . ضغط هذا الغاز عند دخوله هذه الضاغطة P_o و ضغطه عند الخروج منها P ، كثافة هذا الغاز ρ ، و سرعة الضاغطة n دورة في الثانية ، قطر الجزء المتحرك من الضاغطة الذي يقوم بضغط الغاز D و m كتلة الغاز الذي يخرج من الضاغطة كل ثانية . الحالة المبسطة لهذه المسئلة هي نفرض أن الأنموذج الأصلى يُبرّد بالماء ، كذلك أثر الجاذبية على الغازات ضئيل جداً و يمكن غضّ النظر عنه . إذن الرابطة بين هذه الكميات هي:

$$P = f(P_o, \rho, m, n, D)$$

من نظرية التحليل البُعدي و قضية بكنجهام نصل لهذه الرابطة:

$$P = P_o f(\frac{m}{nD^3\rho}, \frac{P_o}{n^2D^2\rho})$$

$Q = \frac{m}{\rho}$ هو حجم الهواء الخارج من الضاغطة في كل ثانية ، و سرعة الصوت هي $c = \sqrt{1.4\frac{P_o}{\rho}}$ هذه الرابطتين هما بالنسبة لخصائص الغاز الذي يدخل الضاغطة . تصبح الرابطة لهذه المسئلة بهذا الشكل:

$$\frac{P}{P_o} = f_1(\frac{Q}{nD^3}, \frac{c}{nD})$$

لتعين الكفاءة η في هذا النوع من الضاغطات يمكن الأستفادة من هذه الرابطة:

$$\eta = f_2(\frac{Q}{nD^3}, \frac{c}{nD})$$

- **مضخة الطرد المركزي**

الكميات المؤثرة في هذه المسئلة هي : قطر الجزء المتحرك من هذه المضخة الذي يقوم بضخّ المائع هو D ، كثافة المائع ρ ، سرعة محورالمضخة n دورة في الثانية ، حجم المائع الذي يخرج من المضخة في الثانية Q ، الضغط قبل و بعد الضخّ P_1 و P_2 ، و الأرتفاع الهايدروليكي لهذه المضخة يحسب من هذه الرابطة: $P = (P_2 + \rho g h_2) - (P_1 + \rho g h_1)$ ، أثر اللزوجة ضئيل ، من التحليل البُعدي نحصل على هذه الكميات اللا بُعدية في هذه الرابطة :

$$\frac{D^3 n}{Q} = f_1(n\sqrt[4]{\frac{Q^2\rho^3}{P^3}})$$

تعرف هذه الكمية اللا بُعدية $\sqrt[4]{\frac{Q^2\rho^3}{P^3}}$ بالسرعة الخاصة.

لتعين الكفاءة η في هذا النوع من المضخات يمكن الأستفادة من هذه الرابطة:

$$\eta = f_2(n\sqrt[4]{\frac{Q^2\rho^3}{P^3}})$$

تطبيق التحليل البُعدي في نظرية أنتقال الحرارة

- **التكثيف على أنبوب قائم**

بخار مُشبع في درجة حرارة θ ينساب في أنبوب قائم درجة حرارتة $\theta - \Delta\theta$ ، المائع المتكثف على السطح الخارجي للأنبوب يشكل ضخامة عائقة على هذا الأنبوب k معامل الموصلية الحرارية للمائع وحدته ($\frac{ML}{T^3\theta}$) في هذه المسئلة تضاف وحدة جديدة الحرارة θ الى وحدات الكتلة و الطول و الزمن.

يرتبط تكثيف المائع بمعامل الحمل الحراري h ، وحدته ($\frac{M}{T^3\theta}$).

سريان المائع المتكثف على الأنبوب يرتبط بلزوجة المائع μ و بوزن المايع ρg (ρ كثافة المائع و g تعجيل جاذبية الأرض)

أهمية حجم المائع في هذه المسئلة أكثر من كتلة المائع ، لذلك حرارة التبخير في وحدة الحجم هي $\lambda\rho$ (ρ كثافة المائع وλ معامل حرارة التبخير)

ليس لقطر الأنبوب أي أهمية في هذه المسئلة و ذلك لأن سُمك المائع المتكثف على الأنبوب بالنسبة الى قطر الأنبوب D لا شئ.

سُمك المائع المتكثف على طول الأنبوب L متغير، لذك طول الأنبوب كمية مؤثرة على شرائط المسئلة.

تؤثر سرعة البخار داخل الأنبوب على سُمك المائع المتكثف على السطح الخارجي للأنبوب ، لذلك إذا كانت سرعة البخار داخل الأنبوب قليلة تصبح سماكة المائع المتكثف قليلة. إذا غضّينا النظر عن التأثير المتقابل بين البخار و المائع داخل الأنبوب في هذه الحالة لن تؤثر كثافة المائع داخل الأنبوب على المسئلة. الكثافة التي تؤثر هي كثافة المائع المتكثف على الأنبوب ρ.
إذن ، نظراً لهذا التحليل لشرائط المسئلة الرابطة بين كميات المسئلة هي:

$$f(h,\Delta\theta,L,\rho\lambda,k,\rho g,\mu)=0$$

المصفوفة الناتجة من كميات هذه المسئلة بالنسبة للوحدات هي :

k_n :	1	2	3	4	5	6	7
	h	$\Delta\theta$	L	$\rho\lambda$	k	ρg	μ
M	1	0	0	1	1	1	1
L	0	0	1	−1	1	−2	−1
T	−3	0	0	−2	−3	−2	−1
θ	−1	1	0	0	−1	0	0

رتبة أكبر مصفوفة محددتها مخالفة للصفر تساوي أربعة (4 هي عدد الوحدات المؤثرة أو رتبة المصفوفة التي محددتها مخالفة للصفر) ، إذن إستناداً على قضية بكنجهام عدد الكميات المؤثرة في هذه المسئلة 7 ناقص 4 الحاصل ثلاثة ، أي عدد المجموعات الضربية أو للا بُعدية في هذه المسئلة هي 3 .

معامل الكتلة و الطول و الزمن و الحرارة لهذه المجموعات اللا بُعدية هي :

M: $k_1 + k_4 + k_5 + k_6 + k_7 = 0$

L: $k_3 - k_4 + k_5 - 2k_6 - k_7 = 0$

T: $-3k_1 - 2k_4 - 3k_5 - 2k_6 + k_7 = 0$

θ: $-k_1 + k_2 - k_5 = 0$

جواب هذه المعامل هو :

	1	2	3	4	5	6	7
	h	$\Delta\theta$	L	$\rho\lambda$	k	ρg	μ
π_1	1	0	0	1	–1	–1	0
π_2	0	1	0	–4	1	2	1
π_3	0	0	1	–1	0	1	0

هذه المجموعات اللا بُعدية هي :

$$\pi_1 = \frac{h\lambda}{kg}$$

$$\pi_2 = \frac{k\mu g^2 \Delta\theta}{\rho^2 \lambda^4}$$

$$\pi_3 = \frac{gL}{\lambda}$$

المعادلة النهائية لهذه الأعداد اللا بُعدية لكميات هذه المسئلة إستناداً على قضية بكنجهام هي :

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3) \quad \text{أو} \quad f(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$$

لذا:

$$\frac{h\lambda}{kg} = f\left(\frac{k\mu g^2 \Delta\theta}{\rho^2 \lambda^4}, \frac{gL}{\lambda}\right)$$

من خلال هذه المعادلة يمكن رسم بياني بحيث المحور العمودي فيه هو $\frac{gL}{\lambda}$ ، و المحور الأفقي هو $\frac{k\mu g^2\Delta\theta}{\rho^2\lambda^4}$ ، و المعامل $\frac{h\lambda}{kg}$ في هذا البياني هو بشكل منحنيات تكون عليها هذه القيمة ($\frac{h\lambda}{kg}$) ثابتة.

توصل ناسلت (W. Nusselt) من خلال فرض سريان المائع على السطح الخارجي للأنبوب هو سريان سلس و هادئ ، الى هذا القانون :

$$h = 0.943\sqrt[4]{\frac{g\rho^2\lambda k^3}{L\mu\Delta\theta}}$$

حسب الأعداد اللا بُعدية التي توصلنا اليها يصبح هذا القانون بهذا الشكل :

$$\pi_1 = \frac{0.943}{\sqrt[4]{\pi_2\pi_3}}$$

أحياناً لا تتشكل طبقة من المائع المتكثف على السطح الخارجي للأنبوب ، بل تتشكل قطرات من المائع المتكثف في هذه الحالة يؤثر الجهد السطحي للمائع و خشونت السطح على نتائج المحاسبات و يجب إدخال هذه الكميات في المعادلة الأساسية للتحليل البُعدي ، تصبح المعادلة هكذا $f(h,\Delta\theta,L,\rho\lambda,k,\rho g,\mu)=0$ يجب إعادة الحل من جديد مع وجود هاتين الكميتين.

تطبيق التحليل البُعدي في مسائل الجهد و الإنفعال

- <u>الأنحرافات القصوى في الأنظمه المرنه</u>

في الأنظمة المرنه إذا كانت الرابطة بين القوة و الإنحراف رابطة غير خطية في هذه الحالة قيمة الإنحراف عالية ، على سبيل المثال في الرابطة بين القوة و الإنحرافات التي تحدث على سطح غشاء هي رابطة غير خطية .

نفرض نظاماً مرناً ذو شكل خاص تحت تأثير قوة معينة ، في هذه الحالة هناك قوة مؤثرة F على جزء من طول L هذا النظام ، و كمية الحركة M يمكن من خلالهن تعين معامل الجهد σ على أي نقطة من هذا النظام ، هذه المعادلة هي بهذا الشكل :

$$\sigma = f(F, M, L, E.\nu)$$

في هذه المعادلة E معامل يونغ (نسبة الجهد الى الأنفعال $E = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}}$) و ν نسبة بواسون (نسبة الأنفعال الجانبي الى الأنفعال المحوري $\nu = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}}$) . نتيجة التحليل البُعدي لهذه الكميات هذه الأعداد اللا بُعدية في هذه الرابطة :

$$\sigma = \frac{F}{L^2} f_1\left(\frac{F}{EL^2}, \frac{M}{FL}, \nu\right)$$

تطبيق التحليل البُعدي في مسائل فيزياء الكمّ

- **قانون إشعاع بلانك[1]**

ترتبط الكثافة الطيفية u بأنبعاث الأشعاع الكهرومغناطيسية في توتر $\nu = \frac{c}{\lambda}$ لجسم أسود بدرجة حرارة T . هذه الأشعاعات هي نتيجة تذبذب ذو طاقة $k_B T$ يُحمل على فوتونات تسير بسرعة الضوء c في رزم من الطاقة h ν ، إذا كانت الكثافة الطيفية تابع من هذه الكميات ما هي نتيجة التحليل البُعدي لهذه المسئلة ؟

$$f(u, \lambda, h, c, k_B, T) = 0$$

k_B ثابت بولتزمان و h ثابت بلانك و λ طول الموج

وحدات هذه الكميات هي:

$$[u] = M^1 L^{-2} T^{-2} \theta^0 = ML^{-2}T^{-2}$$

$$[\lambda] = M^0 L^1 T^0 \theta^0 = L$$

$$[h] = M^1 L^2 T^{-1} \theta^0 = MLT^{-1}$$

$$[c] = M^0 L^1 T^{-1} \theta^0 = LT^{-1}$$

$$[k_B] = M^1 L^2 T^{-2} \theta^{-1}$$

$$[T] = M^0 L^0 T^0 \theta^1 = \theta$$

---

1) 100 Years of dimensional analysis: new steps toward empirical law deduction, Mtaylor, A I Diaz, Jodar-Sanchez and R J Villanneva-Mico

المصفوفه لهذه الكميات و الأبعاد هي :

	u	λ	h	c	k_B	T
M	1	0	1	0	1	0
L	−2	1	2	1	2	0
T	−2	0	−1	−1	−2	0
θ	0	0	0	0	−1	1

درجة أكبر مصفوفة محددتها مخالفه للصفر في هذه المصفوفة هي أربعة .

الكميات المؤثرة في هذه المسئلة هي 6 كميات و الوحدات الأساسية هي أربعة وحدات (الكتلة ، الطول، الزمن و الحرارة) إذن أستناداً على قضية بكنجهام عدد الأعداد اللا بُعدية في هذه المسئلة هي أثنان ، و هما:

$$\pi_1 = u^1 \lambda^0 h^4 c^4 k_B^{-5} T^{-5} = \frac{u h^4 c^4}{k_B^{-5} T^{-5}}$$

$$\pi_2 = u^0 \lambda^1 h^{-1} c^{-1} k_B^1 T^1 = \frac{\lambda k_B T}{hc}$$

الرابطة بين هذه الأعداد اللا بُعدية هي :

$$u = \frac{k_B^5 T^5}{h^4 c^4} F_1(\pi_2) = \frac{hc}{\lambda^5} \frac{F_1(\pi_2)}{\pi_2^5} \equiv \frac{hc}{\lambda^5} F\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)$$

$$u \equiv \frac{hc}{\lambda^5} F(\frac{hc}{\lambda k_B T})$$

قانون بلانك للكثافة الطيفية المنبعثة من الأشعاع الكهرومغناطيسي هو :

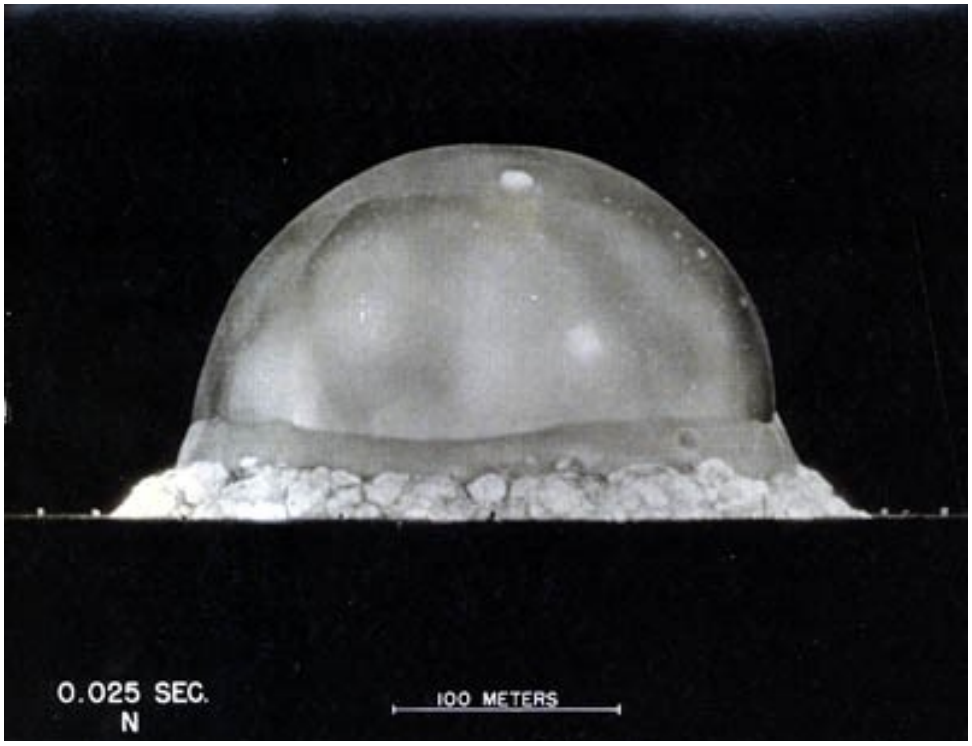
$$u = 8\pi \frac{hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

e عدد نابير

من مقايسة هذا القانون مع النتيجه الحاصله من التحليل البُعدي نستنتج مدى أهمية هذه النظريه في حصر القانون بالكميات المؤثرة عليه فقط . إجراء عدة تجارب مختبريه على الكميات المؤثرة على المسئلة و كذلك وجود الرابطة $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \pi_4, \cdots)$ يساعدنا في إستخراج أو إكتشاف القانون النهائي .

تخمين الطاقة المتحررة من إنفجار أول قنبلة ذرية[1]

بعد أول تجربة لإنفجار القنبلة الذرية عام 1945 إنتشرت مجموعة من الصور الفوتوغرافية بمقايس و أزمنة معينة لهذا الإنفجار . إستناداً على هذه الصور الفوتوغرافية ، خمن الفيزيائي و المتخصص في ميكانيك السوائل البريطاني جي . أي . تايلور (G. I. Taylor) الطاقة الناتجة من هذا الإنفجار.



الفرضيات

1. الطاقة الناتجة في حيز صغير من الفضاء
2. صدمة الموج على شكل كرة

نصف قطر هذه الكرة (R) و تابع من الزمن (t)

الطاقة (E)

الزمن (t)

كثافة المحيط (ρ) الكثافة الأولية هي كثافة الهواء

1- مصدر هذه المسئلة : http://www.math.utah.edu/~zajac/BlastRadius.pdf

نستعين بالتحليل البُعدي

$$[R]=L$$

$$[E]=\frac{ML^2}{T^2}$$

$$[t]=T$$

$$[\rho]=\frac{M}{L^3}$$

$$[R]=L=[E]^x[\rho]^y[t]^z$$

$$[R]=L=M^{(x+y)}L^{(2x-3y)}T^{(-2x+z)}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-3y=1 \\ -2x+z=0 \end{cases}$$

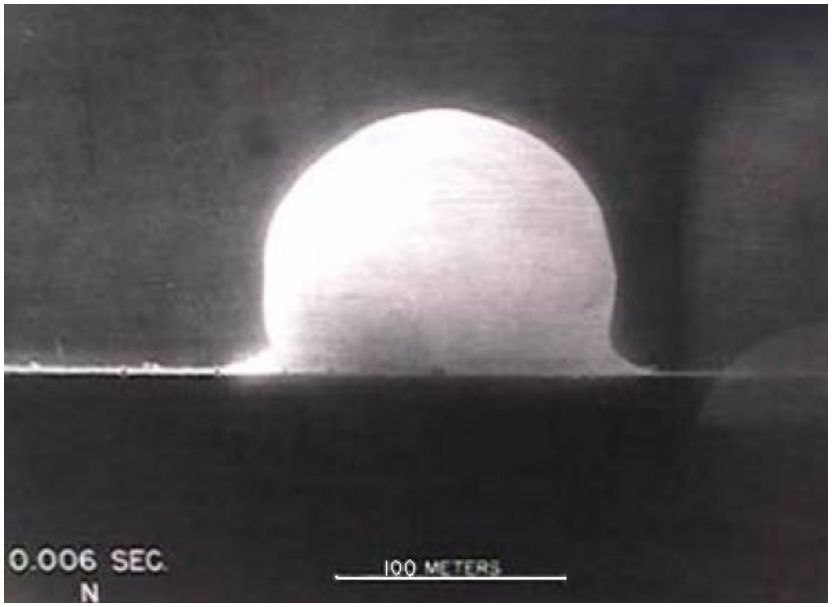
$$x=\frac{1}{5} \quad ، \quad y=-\frac{1}{5} \quad ، \quad z=\frac{2}{5}$$

$$R=E^{\frac{1}{5}}\rho^{-\frac{1}{5}}t^{\frac{2}{5}}$$

أي معمل أو عدد لا بُعدي آخر نفرضه واحد إذن :

$$E=\frac{\rho R^5}{t^2}$$

في أحد الصور شكل موج الإنفجار كان قريب الى شكل كرة هذه الصورة كانت في اللحظة $(t = 0.006)$ و فيها نصف قطر صدمة الموج 80 متر $(R = 80)$ كثافة الهواء $\rho = 1.2 \frac{kg}{m^3}$ ، نضع هذه المقادير في معادلة الطاقة المتحررة نحصل على :



$$E = \frac{(80^5) \times 1.2}{(0.006)^2} = 1 \times 10^{14} \frac{kg \times m^2}{s^2}$$

هذه الطاقة تعادل

$$E = \frac{(80^5) \times 1.2}{(0.006)^2} = 1 \times 10^{14} \frac{kg \times m^2}{s^2} = 1 \times 10^{21} ergs$$

واحد غرام تي أن تي يساوي $1 \times 10^{21} ergs$ 1 gram TNT $= 1 \times 10^{21}$ ergs

إذن :

الطاقة المتحررة (E) تعادل 25 طن من مادة TNT

1 erg = 10^{-7} J

النموذج الكوني

ألقت أول مشاهدة لي للمواد المذآبة داخل الفرن الدوار و خروج الكلينكر على شكل كرات صغيرة مختلفة الأقطار ، فكرة كيفية تشكيل الأجرام السماوية و علة إختلاف أقطار الأجرام السماوية في الفضاء .

تبحث نظرية الإنفجار العظيم فكرة تشكيل الكون من إنفجار عظيم للمواد الأولية التي تشكل الكون ، و يرتكز هذا البحث على اللحظات الأولى للإنفجار العظيم في جزء جداً ضئيل من الثانية و حرارة جداً عالية . لا تلقي هذه النظرية الضوء على الزمن الذي يتلي الإنفجار و لا تعطي علة تناثر الكرات في الفضاء ولا علة إختلاف أقطار الأجرام السماوية حتى ساقتني مشاهدتي للمواد المذآبة في الفرن الدوار، الى فرض حركة المواد في زوبعات التسخين البدئي و الفرن الدوار بنموذج كوني ، يقوم هذا النموذج بتشبيه الإنفجار العظيم و تشكيل الأجرام السماوية بفرن دوار و تشكيل الكلينكر فيه .

هناك عوامل عديدة تؤثر على قطر و شكل الكلينكر الخارج من الفرن هذه العوامل هي قطر الفرن و طوله ، الحركة الدورانية للفرن ، إنحدار الفرن الدوار عن الأفق (يرتبط بجاذبية الأرض) ، لزوجة المواد في منطقة الشي ، زمن حركة المواد داخل الفرن و بالأخص في منطقة الشي ، كتلة المواد أو نسبة أمتلاء الفرن بالمواد ، درجة حرارة الفرن

هذه الحرارة متغيرة في أمتداد الفرن لكن متوسط الحرارة في منطقة الشي لها الأثر الأساسي على شكل الكلينكر ، معامل الموصلية الحرارية للمواد . هذه بنظري أهم العوامل الفيزيائية و الميكانيكية التي تؤثر على قطر الكلينكر الخارج من الفرن . يعتمد النموذج الذي أفترضته على العوامل و المتغيرات و الكميات هذه ، و هناك عوامل أخرى يمكن إحتسابها كمقاومة الريح داخل الفرن ، و الموانع الأخرى و عوامل كيميائية تدخل في تركيبة المواد ، و نوع الطابوق العازل و غيرها .

ثبات العوامل التي أفترضتها يعطي شكل كروي للكلينكر ، لكن بعض التغيرات و الصدمات الحرارية تجعل تماسك الكلينكر على شكل كتل و هذا يستطلب تفتيته في الكسارة المطرقيه المعبئة في إنتهاء مبرد الكلينكر . درجة حرارة مركز الكلينكر الخارج من الفرن و من المبرد أكثر من سطحة و هذا كذلك يوحي الى علة إنصهار المواد داخل الأجرام السماوية و الإختلاف الشديد بين درجة حرارة مركز الأجرام السماوية و سطحها كما هو على كوكب الأرض ، و كإنما هذه الأجرام قد خرجت من الفرن و الآن هي في فترة التبريد . الحالة المثالية للعوامل و الكميات و المتغيرات هي المعيار للنموذج الكوني الذي أفترضته .

من الصعب الإستعانة بمعادلة حفاظ الكتلة في الفرن الدوار و ذلك لأن الكتلة التي تدخل الفرن لا تساوي الكتلة الخارجة منه و ذلك لوجود الرطوبة في المواد و كذلك وجود ماء التبلور في كريستال المواد الذي تفقده المواد نتيجة الحرارة العالية و يصعب تعين مقداره .

توحي كروية الأجرام السماوية على إنها مرّت في مرحلة من مراحل تشكيلها بمرحلة الإنصهار و الذوبان و وجود حركة دورانية أعطى الشكل الكروي لهذا المذآب . لو إن

الفضاء خالي من العوائق و جميع المعامل الفيزيائية و الميكانيكية و الخصائص الكميائية و تغيرات درجة الحرارة ثابتة في كلّ الفضاء لكان شكل الأجرام السماوية كرة كاملة و جميعها متساوية الأقطار ، بينما الأجرام في الفضاء ليست كذلك .

في كلّ منطقة من المسخن البدئي و الفرن الدوار و مبرد الكلينكر تحدث إنفعالات كيميائية و فيزيائية مختلفة على المواد ، حتى تأخذ المواد الشكل الكروي النهائي . في الوقت الذي كانت فيه هذه المواد في المسخن البدئي بشكل غبار من الأتربة في حركة زوبعية ، تدخل الفرن و في كل منطقة من مناطق الفرن تحدث إنفعالات خاصة حتى تصل منطقة الشي فيصبح هذا الغبار كتلة مذآبة و نتيجة الحركة الدورانية للفرن يصعد هذا المذآب الى إرتفاع خاص ثم يهوي الى الأسفل تكرار هذه الحالة و تقدم المواد في الفرن الى الأمام نتيجة إنحدار الفرن يؤدي الى إبتعاد المواد عن منطقة الشي و هبوط درجة الحرارة فتتصلب المواد مشكلة كرات تعرف بالكلينكر ، هذا النموذج يوحي بتشابه بين هذه الكرات الكلينكرية الصغيرة و الأجرام السماوية .

إستعنت في هذا النموذج بنظرية باكينجهام في التحليل البُعدي و نظرية الأنموذج . يمكن مراجعة كتاب الأسمنت الذي أعددته للتعرف على عملية تحضير الأسمنت و المكائن التي تستخدم في معمل الاسمنت هذا الكتاب موجود على الموقع على الرابط :

http://www.jalalalhajabed.com/cement_universe_model.pdf

العوامل المؤثرة على شكل و قطر الكلينكر الخارج من الفرن الدوار هي :

العلامه	الكمية	الوحدات المؤثرة
d	قطر الكلينكر الخارج من الفرن الدوار ؟	L
l	طول الفرن الدوار	L
D	قطر الفرن الدوار (القطر الداخلي)	L
m	كتلة المواد في الفرن الدوار	M
τ	الزمن الذي أستغرق في حركة المواد داخل الفرن	T
ω	عدد دوران الفرن في وحدة الزمن	T^{-1}
θ	درجة حرارة الفرن (متوسط درجة حرارة الشي)	Θ
k	معامل الموصلية الحرارية للمواد	$MLT^{-3}\Theta^{-1}$
μ	معامل اللزوجه الديناميكيه	$ML^{-1}T^{-1}$
α	إنحدار الفرن عن الأفق	الدرجة ، لا وحدة لها

الوحدات الأساسيه لهذه الكميات هي :

الطول L متر ، **الكتلة** M كيلوغرام ، **الزمن** T ثانيه ، **الحرارة** Θ سانتيغراد

نكتب هذه الكميات و وحداتها بصيغة جدول كما هو في شكل الصفحة القادمة :

	l	d	D	m	τ	ω	μ	k	θ	α
M	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
L	1	1	1	0	0	0	-1	1	0	0
T	0	0	0	0	1	-1	-1	-3	0	0
Θ	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0

α هذه الكمية لا بعد لها لذلك يمكن فرضها عدد لابُعدي

عدد المتغيرات المؤثرة في هذه المسئلة $n=9$

عدد الوحدات المؤثرة $r=4$

عدد الكميات المتكررة في كل عدد لا بُعدي هو $m=r=4$ ، و هذا كذلك يساوي رتبة أكبرمصفوفة محددتها مخالفة للصفر كما هو في هذا الشكل :

	l	d	D	m	τ	ω	μ	k	θ
M	0	0	0	1	0	0	1	1	0
L	1	1	1	0	0	0	-1	1	0
T	0	0	0	0	1	-1	-1	-3	0
Θ	0	0	0	0	0	0	0	-1	1

عدد المجموعات اللا بُعدية (الأعداد اللا بُعدية) هي : $n-r=9-4=5$

الأعداد اللا بُعدية في هذه المسئلة هي :

$$\pi_1 = dD^{a_1} k^{a_2} \mu^{a_3} \omega^{a_4}$$

$$\pi_2 = lD^{a_5} k^{a_6} \mu^{a_7} \omega^{a_8}$$

$$\pi_3 = mD^{a_9} k^{a_{10}} \mu^{a_{11}} \omega^{a_{12}}$$

$$\pi_4 = \tau D^{a_{13}} k^{a_{14}} \mu^{a_{15}} \omega^{a_{16}}$$

$$\pi_5 = \theta D^{a_{17}} k^{a_{18}} \mu^{a_{19}} \omega^{a_{20}}$$

لتعيّن المعامل a_1 و a_2 و a_3 و a_4 بحيث يصبح π_1 لا بُعد له ، نعمل بهذه الصورة :

$$\begin{cases} \mathbf{L}: & 1+1\times a_1+1\times a_2-1\times a_3+0\times a_4=0 \\ \mathbf{M}: & 0+0\times a_1+1\times a_2+1\times a_3+0\times a_4=0 \\ \mathbf{T}: & 0+0\times a_1-3\times a_2-1\times a_3-1\times a_4=0 \\ \boldsymbol{\theta}: & 0+0\times a_1-1\times a_2+0\times a_3+0\times a_4=0 \end{cases}$$

من حل هذه المجموعة من المعادلات نحصل على :

$$\begin{cases} a_1=-1 \\ a_2=0 \\ a_3=0 \\ a_4=0 \end{cases}$$

العدد اللا بُعدي π_1 يصبح : $\pi_1 = \frac{d}{D}$ نعمل بهذه الصورة لتعيّن سائر المعامل الأخرى:

$$\pi_1 = \frac{d}{D}$$

$$\pi_2 = \frac{l}{D}$$

$$\pi_3 = \frac{m\omega}{\mu D}$$

$$\pi_4 = \tau\omega$$

$$\pi_5 = \frac{\theta k \omega^2}{D^2 \mu}$$

$$\pi_6 = \alpha$$

نضيف العدد اللا بُعدي هذا الى هذه الأعداد

الدالة التي تربط هذه الأعداد اللا بُعدية هي :

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6)$$

$$\frac{d}{D} = f(\frac{l}{D}, \frac{m\omega}{\mu D}, \tau\omega, \frac{\theta k \omega^2}{D^2 \mu}, \alpha)$$

إذن قطر الكلينكرة الواحدة الخارجة من الفرن الدوار تستنتج من هذه الرابطة :

$$d = D \times f(\frac{l}{D}, \frac{m\omega}{\mu D}, \tau\omega, \frac{\theta k \omega^2}{D^2 \mu}, \alpha)$$

تبين هذه الرابطة وجه التشابه بين الكرات السماوية و الكرات الكلينكريه من ناحية العوامل و المعامل التي تؤثر على قطر كل منهما . يمكن فرض فكرة تشكيل الكرات السماوية بفرن دوار . بحيث يشمل هذا التشابه كل من التشابه الهندسي ، و السينماتيكي و الديناميكي ، فالتشابه الهندسي بين الكرات الكلينكرية و السماوية هو وجود تناظر نقطة الى نقطة بين الكرة الكلينكرية و السماوية . كذلك من الناحية السينماتيكية لا يمكن الحكم على حركة الأجرام السماوية بالحركة الدورانية لها حول الشمس أو حركتها في أفلاك مختلفه ، لكن ما هو نحن في صدده حول التشابه السينماتيكي هو، حركة الأجرام السماوية قبل أستقرارها في أفلاكها و مداراتها ، و هذه الحركة يمكن فرضها كحركة المواد و الكلينكر داخل الفرن الدوار و مبرد الكلينكر . أما من الناحية الديناميكية نتيجة وجود نسبة بين الكتلة الموجودة في الكرة الكلينكرية و الكرة السماوية ، يمكن فرض تناظر بالقوي بين الكرات هذه .

يبحث هذا النموذج مفهوم التشابه في اللحظات التي عقبت الإنفجار العظيم ، أي حين كانت المواد المشكلة للأجرام السماوية عبارة عن غبار منصهر و تصلب شيئاً فشيئاً .

من الصعب أجراء تجربة على الكون كله ، لكن أعطى نموذج الفرن الدوار أمكانية هذه التجربة من خلال التشابه بين هذين النموذجين و الوصول الى متغيرات تربط هذين

النموذجين ببعضهما و كيفية تأثر كل من هذه المتغيرات على المواد داخل الفرن الدوار و المواد المشكلة للأجرام السماوية .

المتغيرات في الدالة : $f(\frac{l}{D},\frac{m\omega}{\mu D},\tau\omega,\frac{\theta k\omega^2}{D^2\mu},\alpha)$

$\frac{l}{D}$ تعتبر هذه النسبة اللا بُعدية من النسب المهمة في محاسبات الفرن الدوار ، و كونياً تبين هذه الرابطة وجود مسافة قطعتها المواد ، و عدم خلو الفضاء من الأبعاد الهندسية .

$\frac{m\omega}{\mu D}$ وجود الكتلة في هذا العدد اللا بُعدي يقابله لزوجة المواد ، و هذا التقابل يبين فعل و إنفعال المواد فيما بينها و هو دليل على إختلاف الطبقات الصخرية في طبقات الأجرام السماوية ، عدم وجود اللزوجة فيما بين المواد يتنافى مع مفهوم تماسك المادة سواء في الكلينكر أو في مواد الأجرام السماوية .

$\tau\omega$ يبين هذا العدد اللا بُعدي مفهوم الزمن في كلا النموذجين

$\frac{\theta k\omega^2}{D^2\mu}$ وجود الموصليه الحراريه في هذا العدد اللا بُعدي و الذي يقابله درجة الحرارة دليل على ثرموديناميكية الفضاء ، فكما أن الفضاء داخل الفرن الدوار علاوة على أنه فضاء ديناميكي و هندسي فهو كذلك فضاء ثرموديناميكي ، و كذلك الفضاء أثناء الإنفجار العظيم و بعده و الى الآن هو ثرموديناميكي .

α إنحدار الفرن الدوار عن الأفق هو بمعنى تأثير الجاذبيه الأرضيه على المواد داخل الفرن . يسوقنا تأثير الجاذبية هذا الى وجود حقل جاذبية سواء في المكان أو الزمكان أثر على المواد و شكلها في النموذج الكوني .

تعتبر الدالة : $d = D \times f(\frac{l}{D}, \frac{m\omega}{\mu D}, \tau\omega, \frac{\theta k \omega^2}{D^2 \mu}, \alpha)$ بمثابة قانون يمكن من خلاله تعين قطر كل كرة من الكلينكر التي خرجت من الفرن الدوار ، و للوصول الى هذه الدالة يجب أجراء عدة تجارب و قياسات على أنواع الأفران و المواد و الشرائط الفيزائية للوصول الى هذه الدالة ، ربما تكون دالة خطية أو غير خطية ، و هذا ما ستقرره التجارب المتعددة. عند الوصول الى هذه الدالة ، بعدها يجب تعين الكميات التي أثرت في تشكيل الأجرام السماوية و وجه التشابه و التناظر بين الكميات الكونية و الكميات داخل الفرن و النسب التي تربط كل منها بالأخرى .

إذا فرضنا العدد اللا بُعدي للنموذج الأصلي (هنا الكون) $\pi_{prototype}$ و العدد اللا بُعدي للنموذج المصغر (هنا الفرن الدوار) $\pi_{\mathrm{mod}el}$ للحصول على تشابه كامل بين هذين النموذجين يجب :

$$\pi_{prototype} = \pi_{\mathrm{mod}el}$$

بعض الأسئلة و أجوبتها في نظرية التحليل البُعدي

هذه الأمثلة هي بمثابة تمارين في التحليل البُعدي و نظرية الأنموذج . للحصول على مهارة و تجربة كافية في تجزئة و تحليل المسائل الميكانيكية و الفيزيائية و أثر الكميات الفيزيائية على بعضها و كيفية إدخالها في التحليل البُعدي و الحصول على القانون النهائي أطلب من الطلاب و قرآء هذا الكتاب أن يقوموا بحلّ هذه الأسئلة حلاً تفصيلاً و ذلك بكتابة مصفوفة الأبعاد و محددتها و الوصول الى الأعداد اللا بُعدية من ثم الحصول على النتيجة النهائية .

السؤال 1

أرتفاع الجزر و المدّ h الناتج عن هبوب رياح على بحيرة يرتبط بهذه العوامل: عمق البحيرة D ، طول البحيرة L ، الكثافة الوزنية للماء w ، جهد قصّ الهواء على الماء τ . ما هي نتيجة التحليل البُعدي لهذه المسئلة التي يمكن من خلاله تعين أرتفاع الجزر و المدّ ؟

الجواب:

$$h = Df(\frac{L}{D}, \frac{\tau}{wD})$$

السؤال 2

مائع يتدفق من منفث في الجوّ نحو الأعلى ، ماهي الكميات المؤثرة على وصول هذا المائع الى أقصى أرتفاع ؟ و ماهي نتيجة التحليل البُعدي لهذه المسئلة ؟

الجواب:

h الأرتفاع الذي يصل اليه المائع

D قطر المنفث

V سرعة المائع

ρ_a كثافة الهواء

ρ كثافة المائع

μ_a لزوجة الهواء

σ التوتر السطحي للمائع (على سبيل المثال التوتر السطحي للماء في درجة حرارة 20^o C يساوي $(0.072 \frac{N}{m}$

$$h = Df(\frac{VD\rho_a}{\mu_a}, \frac{V^2}{gD}, \frac{\rho V^2 D}{\sigma}, \frac{\rho_a}{\rho})$$

السؤال 3

أذكر الكميات المؤثره على السرعة الحدّية لقطرة مطرعند سقوطها ؟ ما هي نتيجة التحليل البُعدي لهذه المسئلة ؟

الجواب:

w الكثافة الوزنية لقطرة المطر أي ρg

σ التوتر السطحي للمائع (على سبيل المثال التوتر السطحي للماء في درجة حرارة $20^{o}\ C$ يساوي $(0.072\frac{N}{m})$

ρ كثافة الهواء

μ لزوجة الهواء

V السرعة الحدّية لقطرة مطرعند سقوطها

$$V=\sqrt{\frac{\sigma}{D\rho}}f(\frac{wD^2}{\sigma},\frac{D\sigma\rho}{\mu^2})$$

السؤال 4

قطرة من مائع تسقط في حوض ، عمود من المائع أرتفاعه h يتدفق الى الأعلى و خارج سطح الماء نتيجة سقوط هذه القطرة عليه ، أذكر الكميات المؤثرة على هذا الأرتفاع ؟ و ما هي نتيجة التحليل البُعدي لهذا الأرتفاع ؟

الجواب:

m كتلة قطرة الماء ، و سرعتها V

σ التوتر السطحي للمائع

ρ كتلة المائع ، μ لزوجة المائع

g تعجيل جاذبية الأرض

$$h=\sqrt[3]{\frac{\mu^2}{g\rho^2}}f(\frac{m\rho g}{\mu^2},\frac{\rho V^3}{\mu g},\frac{\rho\sigma^3}{g\mu^4})$$

السؤال 5

ما هي الكميات المؤثرة على ، الوزن بالنسبة لسطح (الأرض) لرمال متناثرة في الجوّ نتيجة هبوب رياح (منتظمة) في صحراء ؟ نفرض قطر حبات الرمال مساوية ، ما هي نتيجة التحليل البُعدي لهذه المسئلة ؟

الجواب:

V سرعة الرياح

D قطر حبة الرمل

w الكثافة الوزنية للرمل (بالنسبة للحجم)

ρ كثافة الهواء

μ لزوجة الهواء

w_{sand} وزن الرمال المتناثرة بالنسبة لسطح (الأرض في تلك الناحية من الفضاء)

$$w_{sand} = \rho V^2 f(\frac{VD\rho}{\mu}, \frac{wD}{\rho V^2})$$

السؤال 6

طائرة تحلق في جوّ ممطر ، نفرض أن قطر قطرات المطر مساوية و شكل مقدمة الطائرة معلوم ، ما هي الكميات المؤثرة التي يمكن من خلالها تعين عدد قطرات المطر المرتطمة بمقدمة الطائرة في الثانية ؟ و ما هو نتيجة التحليل البُعدي لهذه المسئلة ؟

الجواب:

L مميزة الطول في الطائرة

D قطر قطرة المطر

N عدد قطرات المطر في وحدة الحجم

ρ كثافة الماء

σ التوتر السطحي للمائع

ρ_a كثافة الهواء

μ_a لزوجة الهواء

V سرعة الطائرة

g تعجيل جاذبية الأرض

n عدد قطرات المطر المرتطمة بمقدمة الطائرة

$$n = VNL^2 f\left(\frac{L}{D}, \frac{\rho_a}{\rho}, \frac{VL\rho_a}{\mu_a}, NL^3, \frac{V^2}{gD}, \frac{\sigma}{\rho V^2 D}\right)$$

هذه بعض الأسئلة تخص الأنموذج و الإرتباط بين الأنموذج المصغر و الأنموذج الأصلي

السؤال 7

جسمان كرويان متساويان الوزن مختلفان الأقطار و النسبة بين قطريهما هي $\frac{1}{3}$ ، يرميان بدون سرعة أولية من بالون ما هي السرعة الحدّية لهما ؟ (السرعة الحدّية هي السرعة التي فيها تصبح قوة مقاومة الرياح على الجسم مساوية لوزن الجسم) . هل سريان الرياح على هذين الجسمين مساوي ؟ لماذا ؟

الجواب:

$\frac{1}{3}$ ، سريان الرياح على كلا الجسمين مساوي .

السؤال 8

أنموذج مصغر من سفينه فضائية شبيه للأنموذج الأصلي ، نسبة التصغير أو المقياس $\frac{1}{10}$ ، يرتفع الأنموذج المصغر عن الأرض عندما تصل سرعته $30\frac{mil}{hr}$ ميل في الساعة . ما هي السرعة التي يرتفع بها الأنموذج الأصلي عن الأرض ؟ مع غضّ النظر عن لزوجة الرياح .

الجواب:

$94.9\frac{mil}{hr}$

السؤال 9

لأختبار أنموذج مصغر مقياسه $\frac{1}{2}$ من الأنموذج الأصلي في نفق الرياح ، بحيث عدد ماخ و عدد رينولدز لكلا الأنموذجان مساوي ، يعمل الأنموذج الأصلي في الشرائط العيارية للهواء ، و الهواء في نفق الرياح في درجة حرارة عيارية ، ما هي كثافة الهواء في نفق الريح ؟ اللزوجة الديناميكية و عدد ماخ يرتبطان فقط بدرجة الحرارة .

الجواب:

$0.00476\frac{slug}{ft^3}$ وحدة الكتلة في النظام الأنجليزي slug ، و نسبة التبديل $1\frac{\text{slug}}{\text{ft}^3}=515.378818\frac{kg}{m^3}$

السؤال 10

أنموذج مصغر مقياسه $\frac{1}{8}$ من الأنموذج الأصلي لسفينة . إذا كان وزن السفينة 100000 باوند ، و قدرة السفينة 8000 حصان بخار ، إذا غضّينا النظر عن اللزوجة ، أحسب هذه الكميات ؟

- مقياس السطح ج. $\frac{1}{64}$
- مقياس الحجم ج. $\frac{1}{512}$
- مقياس الوزن ج. $\frac{1}{512}$
- مقياس القوة ج. $\frac{1}{512}$
- مقياس السرعة ج. $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- مقياس التعجيل ج. 1
- السرعة الدورانية للمروحة ج. $2\sqrt{2}$
- وزن الأنموذج المصغر ج. $195lb$
- قدرة الأنموذج المصغر ج. $5,54hp$

السؤال 11

ما هو نتيجة التحليل البُعدي لهذه المعادلة:

$$H = f(m, \mu, \varepsilon, c, R, I)$$

H شدة الحقل المغناطيسي

m الكتلة

μ سعة الحثّ المغناطيسي

ε سعة الحثّ الكهربائي

c سرعة الضوء

R المقاومه الكهربائيه

I التيار الكهربائي

الجواب:

$$\frac{Hmc^3}{I^3 R} = f(\frac{\mu c}{R}, \varepsilon c R)$$

معجم بعض مصطلاحات نظرية التحليل البُعدي

(عربي - إنجليزي)

dilation	أتساع
amplitude	أتساع - نطاق
stress	إجهاد - جهد
shear stress	إجهاد القصّ
friction	أحتكاك
coordinate	إحداثي
test	أختبار
linearly dependent	أرتباط أو عدم أستقلال خطيّ
application	أستعمال – تطبيق
stability	أستقرار
linearly independent	أستقلال خطيّ
turbulence	إضطراب دوامي
arbitrary	أعتباطي
bending	ألتواء
torsion	إلتواء
matter	أمر – مادة
pipe	أنبوب
tube	أنبوب
diffusivity (thermal)	إنتشارية (حرارية)
convection of heat	انتقال الحرارة بالحمل
deflection	أنحراف
curvature	إنحناء – تقوّس
compression	أنضغاط
strain	إنفعال
prototype	أنموذج أصلي
conductivity	إيصالية
vapor	بخار
saturated vapour	بخار مُشبع
dimention	بُعد
dimentional	بُعدي
Buckingham	بكنجهام
pendulum	بندول
gate	بوابة
ambient	بيئة

trivial	تافه
evaporation	تبخير
estimate	تثمين – تخمين
homogeneous	تجانس أو تماثل
empirical	تجريبي
buckling	تحدب
transformation	تحويل
free stream	تدفق الحرّ
superposition	تراكب
clearance	ترخيص – فسحة فارغة
concentration	تركز
linear combination	تركيبة خطية
similarity	تشابه
geometrically similarity	تشابه هندسي
distortion	تشوّه
disturbance	تشويش
perturbation	تشويش
collision	تصادم
damping	تضاؤل
acceleration	تعجيل أو التسارع
approximate	تقريبي
constraint	تقييد
condensation	تكثيف
cavitation	تكهف – تكوّن تجاويف مملوءة بالبخار
thermal expansion	تمدد حراري
Equilibrium	توازن
surface tension	توتّر السطحي
current	تيار
constant	ثابت
elastic constant	ثابت المرونة
load	ثقل
root	جذر
airflow	جريان الهواء
body	جسم
fuselage	جسم طائرة
wing	جناح
electric potential	جهد كهربائي

boundary	حدّ
heat	حرارة
critical	حرجة
continuity	حفاظ – المتصلية - الإستمراريه
field	حقل
field	حقل
convection	حمل حراري
property	خاصية
error	خطأ
circuit	دائرة (كهربائية)
accuracy	دقة
vortex	دوامة
cycle	دورة
chart	رسم بياني
laminar	رقيق
angle	زاويه
spring	زنبرك
stationary	ساكن
velocity	سرعة
flow	سريان – التدفق
capacity	سعة
heat capacity	سعة حرارية
smooth	سلس أو هادئ أو ناعم
charge	شحنه
tension	شدّ
intensity	شدّة
boundary conditions	شروط حدّية
shape	شكل
array	صفيفة
pressure	ضغط
class	طبقة – صنف
boundary layer	طبقة جدارية
centrifugal	طرد مركزي
float	طفو
phase	طَور
phenomenon	ظاهرة
beam	عارضة حديدية

factor	عامل: المضروب أو المضروب فيه
numerical	عددي
moment	عزم
symble	علامة
component	عنصر أو جزء أساسي
nonlinear	غير خطيّة
orifice	فوهة
flux	فيض
compressible	قابل للأنضغاط
basic	قاعدة
lemma	قضية إضافية مفروض صحتها
drop	قطرة – هبوط
diagonal	قطرية
peak	قمة
canal	قناة
force	قوة
mass	كتلة
density	كثافة
efficiency	كفاءة
momentum	كمية الحركة
dimensionless	لا بعدي
vnviscous	لا لزج
viscosity	لزوجة
kinematics’ viscosity	لزوجة كينماتية
liquid	مائع
fluid	مائع في الحالة السائلة و الغازية
material	مادي
variable	متغير
equivalent	متكافئ
average	متوسط
optimal	مُثلى – قصوى
inductance	مُحاثّة
determinate	محدّد - مقرّر
determinant	محددة
axis	محور
outlet	مخرج – منفذ
order	مرتبة

elastic	مرونة
angular	مزوي
trajectory	مسار
stable	مستقر
independent	مستقل
convertor	مسخن بالحمل الحراري
cofactor	مصاحب
matrix	مصفوفة
pump	مضخة
turbulent	مضطرب
coefficient	معامل
coefficient	معامل
elastic modulus	معامل المرونة
youngs Modulus	معامل يونغ
strength	مقاومة
yield strength	مقاومة الخضوع
nozzel	منفث
thermal conductivity	موصّلية الحرارية
characteristic	ميزة
ratio	نسبة
flow rate	نسبة التدفق
poisson's Ratio	نسبة بواسون
theory	نظريه
wind tunnel	نفق الريح
yield point	نقطة الخضوع
model	نموذج
ultimate	نهائي
conductor	هادي
form	هيئة
immerse	يغطس
twist	يفتل
excite	يهيّج

معجم بعض مصطلاحات نظرية التحليل البُعدي

(إنجليزي - عربي)

acceleration	التعجيل أو التسارع
accuracy	الدقة
airflow	جريان الهواء
ambient	البيئة
amplitude	أتساع - نطاق
angle	زاويه
angular	مزوي
application	أستعمال – تطبيق
approximate	تقريبي
arbitrary	أعتباطي
array	صفيفة
average	متوسط
axis	محور
basic	قاعدة
beam	عارضة حديدية
bending	الألتواء
body	جسم
boundary	حدّ
boundary conditions	الشروط الحدّية
boundary layer	الطبقة الجدارية
Buckingham	بكنجهام
buckling	تحدب
canal	القناة
capacity	السعة
cavitation	تكهف – تكوّن تجاويف مملوءة بالبخار
centrifugal	طرد مركزي
characteristic	ميزة
charge	شحنه
chart	رسم بياني
circuit	دائرة (كهربائية)
class	طبقة – صنف -
clearance	الترخيص – فسحة فارغة
coefficient	المعامل
coefficient	معامل

cofactor	مصاحب
collision	تصادم
component	عنصر أو جزء أساسي
compressible	قابل للأنضغاط
compression	الأنضغاط
concentration	تركز
condensation	تكثيف
conductivity	الإيصالية
conductor	الهادي
constant	ثابت
constraint	تقييد
continuity	الحفاظ – المتصلية
convection	الحمل الحراري
convection of heat	انتقال الحرارة بالحمل
convertor	المسخن بالحمل الحراري
coordinate	إحداثي
critical	الحرجة
current	تيار
current	تيار
curvature	إنحناء – تقوّس
cycle	دورة
damping	تضاؤل
deflection	الأنحراف
density	الكثافة
determinant	محددة
determinate	محدّد - مقرّر
diagonal	قطرية
diffusivity (thermal)	إنتثارية (حرارية)
dimensionless	لا بعدي
dimention	بعد
dimentional	بعدي
distortion	تشوّه
disturbance	تشويش
drop	قطرة – هبوط
efficiency	الكفاءة
elastic	المرونة
elastic constant	ثابت المرونة

elastic modulus	معامل المرونة
electric potential	جهد كهربائي
empirical	تجريبي
Equilibrium	توازن
equivalent	متكافئ
error	خطأ
estimate	تثمين – تخمين
evaporation	تبخير
excite	يهيّج
factor	العامل: المضروب أو المضروب فيه
field	الحقل
field	حقل
float	طفو
flow	السريان – التدفق
flow rate	نسبة التدفق
fluid	مائع في الحالة السائلة و الغازية
flux	الفيض
force	القوة
form	الهيئة
free stream	التدفق الحرّ
friction	الأحتكاك
fuselage	جسم طائرة
gate	بوابة
geometrically similarity	تشابه هندسي
heat	الحرارة
heat capacity	السعة الحرارية
immerse	يغطس
independent	مستقل
inductance	مُحاثّة
intensity	شدّة
kinematics' viscosity	لزوجة كينماتية
laminar	رقيق
lemma	قضية إضافية مفروض صحتها
linear combination	تركيبة خطية
linearly dependent	أرتباط أو عدم أستقلال خطيّ
linearly independent	أستقلال خطيّ
liquid	مائع

load	ثقل
mass	كتلة
material	مادي
matrix	مصفوفة
matter	أمر – مادة
model	نموذج
moment	العزم
momentum	كمية الحركة
nonlinear	غير خطيّة
nozzel	منفث
numerical	عددي
optimal	مُثلى – قصوى
order	مرتبة
orifice	فوهة
outlet	مخرج – منفذ
peak	قمة
pendulum	بندول
perturbation	تشويش
phase	طَور
phenomenon	الظاهرة
pipe	أنبوب
poisson's Ratio	نسبة بواسون
pressure	الضغط
property	خاصية
prototype	الأنموذج الأصلي
pump	مضخة
ratio	النسبة
root	جذر
saturated vapour	بخار مُشبع
shape	شكل
shear stress	إجهاد القصّ
similarity	تشابه
smooth	سلس أو هادئ أو ناعم
spring	زنبرك
stability	أستقرار
stable	مستقر
stationary	ساكن

strain	إنفعال
strength	مقاومة
stress	إجهاد - جهد
superposition	تراكب
surface tension	التوتّر السطحي
symble	علامة
tension	الشدّ
test	أختبار
theory	نظريه
thermal conductivity	الموصّلية الحرارية
thermal expansion	تمدد حراري
torsion	إلتواء
trajectory	مسار
transformation	تحويل
trivial	تافه
tube	أنبوب
turbulence	إضطراب دوامي
turbulent	مضطرب
twist	يفتل
ultimate	نهائي
vapor	بخار
variable	متغير
velocity	السرعة
wind tunnel	نفق الريح
wing	جناح
viscosity	لزوجة
vnviscous	لا لزج
vortex	الدوامة
yield point	نقطة الخضوع
yield strength	مقاومة الخضوع
youngs Modulus	معامل يونغ

المصادر

هذا الكتاب هو ترجمة من هذا الكتاب :

- Dimensional Analysis and Theory of Models , Henry L. Langhaar , John Wiley & Sons, INC. 1971

المصادر الأخرى :

- 100 Years of dimensional analysis: new steps toward empirical law deduction, Mtaylor, A I Diaz, Jodar-Sanchez and R J Villanneva-Mico

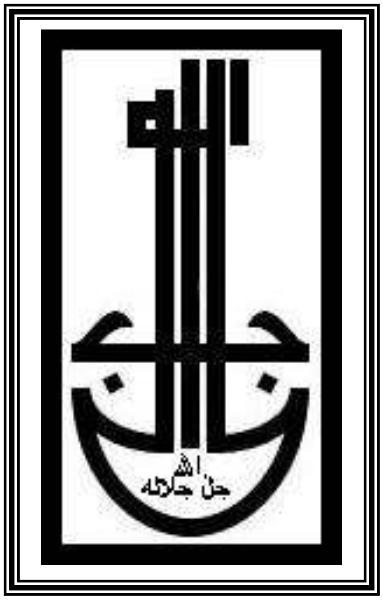
- http://en.wikipedia.org/wiki/Physical_constant

- معجم الرياضيات (أنكليزي- فرنسي- عربي) ، د. علي مصطفى بن الأشهر، أكاديما.
- معجم الفيزياء (أنكليزي- فرنسي- عربي) ، د. أبراهيم حموده، أكاديما.
- المورد ، قاموس إنجليزي – عربي ، منير البعلبكي – دار العلم للملايين.

الفهرس

المقدمه ---------- 3
الوحدات القياسيه في الأنظمه البُعدية ---------- 5
تجانس الأبعاد ---------- 6
بعض الكميات الميكانيكيه و وحداتها ----------7
وحدة الكميات الكهربائية و المغناطيسية ---------- 8
بعض الروابط و القوانين ---------- 9
بعض الثوابت الفيزيائيه ---------- 10
الوحدات العيارية ---------- 11
بعض أشهر الأعداد اللا بُعدية ---------- 13
النظريه الجبريه للتحليل البُعدي ---------- 15
مراحل حل المسائل من خلال التحليل البُعدي ---------- 17
التشابه و التجربة على الأنموذج المصغر ---------- 23
- التشابه ---------- 24
- التشابه الهندسي ---------- 24
- التشابه الكامل ---------- 24
- التشابه الكينماتي ---------- 25
- التشابه الديناميكي ---------- 26
تطبيق التحليل البُعدي في مسائل ميكانيك الموائع ----------27
- ضاغطة الطرد المركزي ---------- 30
- مضخة الطرد المركزي ---------- 31
تطبيق التحليل البُعدي في نظرية إنتقال الحرارة ---------- 32
- التكثيف على أنبوب قائم ---------- 32
تطبيق التحليل البُعدي في مسائل الجهد و الإنفعال ---------- 36
- الأنحرافات القصوى في الأنظمه المرنه ---------- 36

تطبيق التحليل البُعدي في مسائل فيزياء الكمّ ---------- 37
تخمين الطاقة المتحررة من إنفجار أول قنبلة ذرية ---------- 40
النموذج الكوني ---------- 43
بعض الأسئلة و أجوبتها في نظرية التحليل البُعدي ---------- 53
معجم بعض مصطلاحات نظرية التحليل البُعدي (عربي – إنجليزي) ---------- 61
معجم بعض مصطلاحات نظرية التحليل البُعدي (إنجليزي – عربي) ---------- 67
المصادر ---------- 73



موقع جلال الحاج عبد

www.jalalalhajabed.com

البريد الألكتروني :

jalal.alhajabed@hotmail.com

jalal.alhajabed@yahoo.com