إختر الإجابة الصحيحة:

(١) إذا كانت جـ = (−١ , ٦ , −٥) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(ك−٢ , −١ , م+٣) ، ب(٢ , ن−٧ , −٢) فإن ك+م + ن = ...

أ) ٢ ب) ٧ جـ) −٤ د) ٥

---

(٢) إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = ($\frac{-1}{2}$, $\frac{3}{4}$, ك) متجه وحدة فإن ك = ...

أ) $\pm\frac{3}{4}$ ب) $\pm\frac{\sqrt{3}}{4}$ جـ) $\frac{3}{4}$ د) $\frac{1}{5}$

---

(٣) إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (−١ , ٤ , ك) ، $\overleftarrow{ب}$ = ٢$\overleftarrow{س}$+٢$\overleftarrow{ص}$ + $\overleftarrow{ع}$ وكان طول $\overline{أب}$= $\sqrt{٧٧}$ فإن إحدى قيم ك هى .....

أ) ٢ ب) ٤ جـ) ٦ د) ٩

---

(٤) معادلة الكرة التى مركزها (٢ , −٣ , ١) و طول نصف قطرها ٢ $\sqrt{٥}$ هى ....

أ) (س−٢)^{٢}+(ص+٣)^{٢}+(ع− ١)^{٢}=٢$\sqrt{٥}$ ب) (س+٢)^{٢}+(ص−٣)^{٢}+ (ع + ١)^{٢}=٢٠

جـ) (س−٢)^{٢}+(ص+٣)^{٢}+(ع− ١)^{٢}=٢٠ د) (س−٢)^{٢}+(ص+٣)^{٢}+(ع− ١)^{٢}= ٥

---

(٥) الصورة القياسية لمعادلة الكرة التى مركزها (٢ , −٣ , ٤) و تمس المستوى سص هى ....

أ) (س−٢)^{٢}+(ص+٣)^{٢}+(ع −٤)^{٢}=٤ ب) (س−٢)^{٢}+(ص+٣)^{٢}+(ع− ٤)^{٢}=٩

جـ) (س−٢)^{٢}+(ص+٣)^{٢}+(ع− ٤)^{٢}=١٦ د) (س+٢)^{٢}+(ص−٣)^{٢}+(ع + ٤)^{٢}=١٦

---

(٦) إذا كانت ٣س^{٢} + ٣ص^{٢} + ٣ع^{٢} +١٨س − ١٢ص + ٣٠ع− ٢٤ = ٠ فإن مركزها يساوى ....

أ) (٣ ، −٢ ، ٥) ب) (−٣ ، ٢ ، −٥) جـ) (٩ ، −٦ ، ١٥) د) (−٩ ، −٦ ، −١٥)

---

(٧) إذا كانت س^{٢} + ص^{٢}+ ع^{٢}− ٤ك س + ٤ ص −٨ع+ ٢ك = ٠ معادلة كرة طول قطرها ٤ $\sqrt{٥}$ حيث ك ∋ ح$^{+}$ فإن ك =....

أ) ٢ ب) $\frac{1}{2}$ جـ) $\frac{3}{2}$ د) $\frac{2}{3}$

---

(٨) إذا كانت النقطة (−٢ ، ٤ ، م) تقع على الكرة (س +٢)^{٢} + (ص − ١)^{٢} +(ع− ٣)^{٢} = ٢٥ فإن م = ...

أ) ٦ ب) ٧ جـ) ٨ د) ٩

(٩) إذا قطع محور السينات الكرة التى مركزها (٣ ، –٤ ، ١٢) و طول نصف قطرها ١٣ وحدة طول فى النقطتين أ ، ب فإن طول $\overline{أب}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ١٢ (ج) ٨ (د) ٦

---

(١٠) إذا كان أ ب جـ مثلث فيه أ (١ ، ٢ ، ٣) ، ب (٠ ، ١ ، ٢) ، جـ (٢ ، ١ ، ٠) فإن طول المتوسط المرسوم من الرأس أ يساوى ....

(أ) $\sqrt{٥}$ (ب) $٢\sqrt{٥}$ (ج) ٥ (د) ١٠

---

(١١) إذا كان $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة $(س-٥)^٢ + (ص+٢)^٢ + (ع-١)^٢ = ٢٥$ حيث أ (٨ ، –١ ، ٢) فإن ب هى .....

(أ) (٢ ، –٣ ، ١) (ب) (١٠ ، –٤ ، ٥) (ج) (٢ ، –٣ ، ٠) (د) (١٠ ، ٣ ، ٦)

---

(١٢) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (–١ , ٤ , ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = ٢$\overrightarrow{س}$ + ٢$\overrightarrow{ص}$ + $\overrightarrow{ع}$ فإن مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى إتجاه $\overrightarrow{ب}$ = ...

(أ) $\frac{٨}{٣}$ (ب) $\frac{٧}{٣}$ (ج) $\frac{١}{٣}$ (د) ٨

---

(١٣) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (١ , –١ , ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٠ , ٢ , –٣) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (–٢ , ١ , ٠) فإن ‖ ٣ $\overrightarrow{أ}$ – $\overrightarrow{ب}$ + $\overrightarrow{جـ}$ ‖=....

(أ) $٨\sqrt{٣}$ (ب) ١١ (ج) ١٢ (د) $٧\sqrt{٢}$

---

(١٤) طول العمود المرسوم من النقطة (–٢ , –٣ , ١)على محور السينات يساوى ....

(أ) ٢ (ب) $\sqrt{١٣}$ (ج) $\sqrt{١٠}$ (د) ٥

---

(١٥) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (–٧ , ٣ , ١٠) ، $\overrightarrow{ب}$ = (–٤ , –١ , –٢)فإن متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أب}$ = ...

(أ) $(\frac{٣}{١٣} , \frac{٤}{١٣} , \frac{١٢}{١٣})$ (ب) $(\frac{٣}{١٣} , \frac{-٤}{١٣} , \frac{-١٢}{١٣})$ (ج) $(\frac{-٣}{١٣} , \frac{٤}{١٣} , \frac{١٢}{١٣})$ (د) $(\frac{-٣}{١٣} , \frac{-٤}{١٣} , \frac{-١٢}{١٣})$

---

(١٦) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (١ , ٢ , –٤) ، $\overrightarrow{ب}$ = (١ , ١ , ك–١) وكان ‖ $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ ‖= ٧ وحدة طول حيث ك ∈ $ص^+$ فإن ك = ...

(أ) ١٠ (ب) ٨ (ج) ١١ (د) ١٢

---

(١٧) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = ٢$\overrightarrow{س}$ + ٣$\overrightarrow{ص}$ + ك$\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = –٦$\overrightarrow{س}$ – ٤$\overrightarrow{ص}$ + ٤$\overrightarrow{ع}$ وكان $\overrightarrow{أ}$ ⊥ $\overrightarrow{ب}$ فإن ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (ج) ٨ (د) ١٠

(١٨) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٢جتاهـ , لـو$_{٥}$ س , جاهـ) ، $\overrightarrow{ب}$ = (جتاهـ , لـو$_{٣}$ ٢٧ , ٢جاهـ) وكان $\overrightarrow{أ}$ • $\overrightarrow{ب}$ = ١١

فإن س = ...

(أ) ٢٥ (ب) ١٢٥ (ج) ٦٢٥ (د) ٥

---

(١٩) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٤ , ك , ٦) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ , ٢ , م) وكان $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ فإن ك + م = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) −١ (د) ٧

---

(٢٠) إذا كانت θ هى قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ = (−٢ , −٦ , ١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ , ٦ , −١) فإن θ = ...

(أ) صفر (ب) ٦٠° (ج) ١٢٠° (د) ١٨٠°

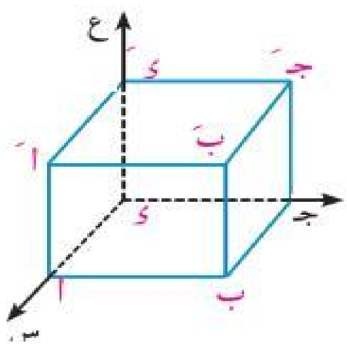
---

(٢١) إذا كان أ ب ج مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٨سم فإن $\overrightarrow{ب أ}$ • $\overrightarrow{ج ب}$ = ...

(أ) −٣٢$\sqrt{٣}$ (ب) −٣٢ (ج) ٣٢$\sqrt{٣}$ (د) ٣٢

---

(٢٢) فى الشكل المقابل : إذا كان أ ب ج د أَ بَ جَ دَ مكعب طول ضلعه ٢ وحدة طول فإن $\overrightarrow{أبَ}$ • $\overrightarrow{بدَ}$ = ...



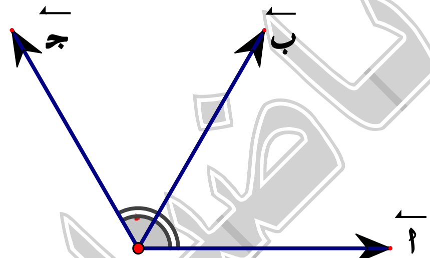
(أ) ١ (ب) −١
(ج) −٤ (د) $-\frac{١}{٢}$

---

(٢٣) فى الشكل المجاور إذا كان $\overrightarrow{ب}$ ينصف الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ج}$ حيث

$\overrightarrow{أ}$ = (١ , ٢ , −١)، $\overrightarrow{ب}$ = (٦ , ك , ٠)، $\overrightarrow{ج}$ = (٤ , ٠ , ٢$\sqrt{٢}$)

فإن ك = ...



(أ) ٣ (ب) ٦ (ج) ٤ (د) ٩

---

(٢٤) إذا كان ل$_{١}$: $\overrightarrow{ر}$ = (٢ , ٣ , −٤)+ك(٢ , ٣ , أ) يوازى ل$_{٢}$: $\frac{س - ٥}{ب} = \frac{ص + ٤}{٦} = \frac{ع - ٤}{٢}$ فإن أ+ب = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (ج) ٨ (د) ٥

---

(٢٥) جيوب تمام الإتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ = (−٢ , ١ , ٢) هى ......

(أ) (−٢ , ١ , ٢) (ب) ($\frac{-٢}{٣}$, $\frac{١}{٣}$, $\frac{٢}{٣}$) (ج) ($\frac{-٥}{٣}$, ٥ , $\frac{٥}{٣}$) (د) (−١ , ١ , ١)

(٢٦) إذا كان قياس الزاوية بين مستقيم ، المحور ص يساوى قياس الزاوية بين المستقيم و المحور ع و قياس كل منهم ٦٠° فإن قياس الزاوية بين المستقيم و المحور س يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (ج) ٦٠° (د) ٧٥°

---

(٢٧) إذا كان $\overrightarrow{\text{أب}} = -٣\overrightarrow{\text{س}} + ٣\overrightarrow{\text{ص}} + ٧\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{بجـ}} = \overrightarrow{\text{ص}} + ٥\overrightarrow{\text{ع}}$ فإن $\|\overrightarrow{\text{أجـ}}\|$ = ...

(أ) ٩ (ب) ١٠ (ج) ١٣ (د) ١٤

---

(٢٨) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (١ , -١ , ٢)، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣ , -٢ , ٠) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٠ , ٢ , ٤) فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}}$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (ج) ١٤ (د) ١٦

---

(٢٩) إذا كان $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ = ٤ ، $\|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ = ٣ ، $\|\overrightarrow{\text{جـ}}\|$ = ١٢ حيث $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ثلاث متجهات متعامدة مثنى

فإن $\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}}\|$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ١١ (ج) ١٢ (د) ١٣

---

(٣٠) إذا كان أ ب جـ د متوازى أضلاع و كان $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = (٢ , ٢ , -١) ، $\overrightarrow{\text{بد}}$ = (-١ , ٢ , -٣) فإن مساحة متوازى الأضلاع تساوى ......

(أ) ٦ (ب) $٧\sqrt{٦}$ (ج) $\sqrt{١٠١}$ (د) $\frac{١}{٢}\sqrt{١٠١}$

---

(٣١) إذا كان المستقيم $ل_١$: $\frac{\text{س} + ٢}{-١} = \frac{\text{ص} + ٣}{٣} = \frac{\text{ع} + ٥}{٢}$ عمودى على المستقيم $ل_٢$: $\frac{\text{س}}{٢} = \frac{\text{ص} - ٥}{\text{ك}} = \frac{\text{ع} - ٦}{\text{م}}$

فإن ٣ك + ٢م = ...

(أ) -١ (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

---

(٣٢) قياس الزاوية بين المستقيمين $ل_١$: ٢س = ٣ص = -ع ، $ل_٢$: ٦س = -ص = -٤ع يساوى ......

(أ) ٤٥° (ب) ٠° (ج) ٩٠° (د) ١٨٠°

---

(٣٣) معادلة المستوى المار بالنقطة (١ , ٢ , ٣) و يوازى كل من المحورين س، ص هى ....

(أ) س + ص = ٣ (ب) ع = ٣ (ج) س = ١ (د) ص = ٢

---

(٣٤) إذا كانت المتجهات أ = (١ , −٢ , ١) ، ب = (ك , −٥ , ٣) ، جـ = (٥ , −٩ , ٤) مستويه " تقع فى مستوى واحد" فإن ك = ...

(أ) ٢   (ب) −٢   (ج) ٣   (د) −٣

----

(٣٥) قياس الزاوية بين المستقيم ل١: (س − ١)/٢ = (ص − ٢)/١ = (ع + ٣)/−٢ ، المستوى س + ص + ٤ = ٠ يساوى ......

(أ) ٠°   (ب) ٤٥°   (ج) ٣٠°   (د) ٩٠°

----

(٣٦) إذا كان المستوى ٣س − ص + ٢ع + ٣ = ٠ ، المستوى كس − ٤ص + ع − ٥ = ٠ متعامدان فإن ك = ...

(أ) ٢   (ب) −٢   (ج) ٣   (د) −٣

----

(٣٧) إذا كان المستقيم س = ٣ص = أع يوازى المستوى س + ٣ص + ٢ع + ٤ = ٠ فإن أ = ...

(أ) ٣   (ب) ٢   (ج) ١   (د) −١

----

(٣٨) قياس الزاوية المحصورة بين المستويين س − ع + ١ = ٠ ، ٢س −٢ص − ع = ٠ يساوى ....

(أ) ٣٠°   (ب) ٤٥°   (ج) ٩٠°   (د) ٦٠°

----

(٣٩) طول العمود المرسوم من النقطة أ = (٣ , ٠ , −٥) على المستوى ٢س + √٥ص + ٤ع − ٦ = ٠ يساوى ....

(أ) ٤   (ب) ٥   (ج) ٦   (د) ٧

----

(٤٠) إذا كان المستوى س + ٥ص − ٦ع = ٣٠ يقطع من محاور الإحداثيات سَ ، صَ ، ع الأجزاء أ ، ب، ج على الترتيب فإن أ + ب + ج = ...

(أ) صفر   (ب) ٣٠   (ج) ٣١   (د) ٤١

----

(٤١) معادلة المستوى المار بالنقطة (١ , -٢ , ٥) و عمودى على المتجه (٢ , ١ , ٣) هى ....

(أ) ٢س + ص + ٣ع = ١   (ب) ٢س + ص + ٣ع = ١٥

(ج) س − ٢ص + ٥ع = ١٥   (د) س + ص + ع = ٤

----

(٤٢) إذا كان أ ⊥ ب ، أ ⊥ جـ وكان ب = (٢ , ٣ , ٢) ، جـ = (١ , ٢ , ١) وكان ||أ|| = ٤√٢

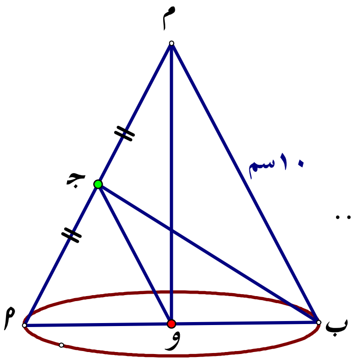
فإن أ = ...

Ⓐ (٢ , ٣ , ١) Ⓑ (−٤ , ٠ , ٤) Ⓒ (٤ , ٤ , ٠) Ⓓ (٠ , −٤ , ٤)

---

(٤٣) حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة رؤوس ليست فى وجه واحد هى أ(٢ , ١ , ٣) ، ب(−١ , ٣ , ٢) ، جـ(١ , ١ , −٢) يساوى ....

Ⓐ ٣٠ Ⓑ ٢٨ Ⓒ ١٤ Ⓓ ٥٦



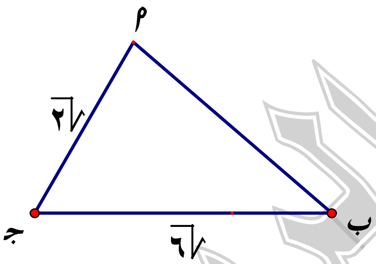
(٤٤) فى الشكل المقابل:

إذا كان محيط قاعدة المخروط الدائرى القائم هـ ١٢π سم و طول

راسمه ١٠ سم وكانت نقطة جـ هى منتصف مَ م فإن ب جـ • جـ و = ...

Ⓐ ٩ Ⓑ ٣٦

Ⓒ −٤٣ Ⓓ ٥٤



(٤٥) فى الشكل المقابل إذا كان ||ب جـ|| = √٦ ، ||أ جـ|| = √٢

، ب أ = (−١ , ٠ , ١) فإن ب أ • ب جـ = ...

Ⓐ ١ Ⓑ ٢

Ⓒ ٣ Ⓓ ٤

---

(٤٦) النقطة التى تنتمى للمستقيم ر = (٢ ، −١ ، ٣) + ك (١ ، ٢ ، −١) هى ....

Ⓐ (١ ، ١ ، ١) Ⓑ (٠ ، ٢ ، −٢) Ⓒ (٣ ، ١ ، ٢) Ⓓ (٤ ، −٣ ، ٠)

---

(٤٧) النقطة التى تنتمى للمستوى ر = (−١ , ٠ , ٢) + ك(٠ , ٠ , ١) + م(١ , ٠ , −١) هى ......

Ⓐ (٠ , ١ , ٢) Ⓑ (٢ , ١ , ٣) Ⓒ (٣ , ١ , ٢) Ⓓ (١ , ٠ , ١)

---

(٤٨) معادلة المحور سَ فى الفراغ هى ....

Ⓐ س = ٠ ، ص = ٠ Ⓑ س = ٠ ، ع = ٠ Ⓒ س = ٠ Ⓓ ع = ٠ ، ص = ٠

أسئلة إنتاج الإجابة

(١) إذا كانت : أ(٤ , ٨ , ١٢) ، ب(٢ , ٤ , ٦) ، جـ(٣ , ٥ , ٤) ، د(٥ , ٨ , ٥) فإثبت أن النقاط أ ، ب ، جـ ، د تقع فى مستوى واحد.

----

(٢) إوجد قيمة ك التى تجعل المتجهات $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = ٣\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}} + ٢\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}} = \overrightarrow{\text{س}} + \text{ك}\overrightarrow{\text{ص}} - ٣\overrightarrow{\text{ع}}$ فى مستوى واحد.

----

(٣) إوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة أ(٢ , −١ , ٣) و الموازى للمتجه $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = (−٣ , ٤ , ١) ثم عين نقطة تقاطعه مع المستوى الإحداثى س ص

----

(٤) أوجد المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقطتين أ(٢ , ٢ , −٣) ، ب(١ , −١ , ٠) ثم أذكر هل النقطة جـ(١ , ٣ , ٢) ∋ لهذا المستقيم أم لا.

----

(٥) إوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ , ٢ , ٥) و يصنع مع الإتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات زوايا متساوية.

----

(٦) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل و يقطع المستقيم $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٣,١,٤) + ك(٢,١,٣) على التعامد.

----

(٧) ليكن ل١: $\begin{cases} \text{س} = ٢ + \text{ك} \\ \text{ص} = ٢ + ٢\text{ك} \\ \text{ع} = -٤ - \text{ك} \end{cases}$ ، ل٢: $\frac{\text{س} - ١}{٢} = \frac{\text{ص} + ٥}{٤} = \frac{\text{ع}}{-٢}$ أثبت أن المستقيمان مستويان.

----

(٨) أثبت أن المستقيمان $\overrightarrow{\text{ر}_١}$ = (٣,−٣,٥) + ك١ (٠,−٥,٥) ، $\overrightarrow{\text{ر}_٢}$ = (−٢,٣,١) + ك٢ (٥,−١,−١) متعامدان و متقاطعان و أوجد نقطة تقاطعهما.

----

(٩) أثبت أن المستقيمان $\overrightarrow{\text{ر}_١}$ = (٣,−١,٢) + ك١ (٤,١,٣) ، $\overrightarrow{\text{ر}_٢}$ = (٠,٤,−١) + ك٢ (١,−١,٢) متخالفان.

----

(١٠) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢ , ١ , −٤) على المستقيم $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (١,−١,٢) + ك(٢,٣,−٢).

----

(١١) إوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة أ(١ , −٢ , ٤) و العمودى على المستقيم $\overleftrightarrow{جـ ب}$ حيث ب(٣ , ٠ , −٣) ، جـ(−١ , −٣ , ٢) .

---

(١٢) إوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة أ(−٢ , ٣ , ٤) و الذى يوازى كل من المتجهين $\overrightarrow{هـ_١}$ = (١ , −٢ , ١) ، $\overrightarrow{هـ_٢}$ = (٣ , ٢ , ٤).

---

(١٣) إوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة أ(١ , −١ , ١) و الذى يكون عمودياً عل كل من المستويين سـ : س −ص +ع −١ = ٠ ، صـ : ٢س + ص +ع +١ = ٠.

---

(١٤) إوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقاط أ(٣ , ١ , ٠) ، ب(٠ , ٧ , ٢) ، جـ(٤ , ١ , ٥).

---

(١٥) إذا قطع المستوى ٣س +٢ص +٤ع = ١٢ محاور الإحداثيات سـ، صـ ، ع فى النقط أ ، ب، جـ على الترتيب فإوجد مساحة $\triangle$ أ ب جـ .

---

(١٦) إوجد معادلة المستوى الذى يحوى المستقيم ل$_١$: $\frac{س + ١}{٢}$ = ص = $\frac{ع − ٤}{−٣}$ و يمر بنقطة الأصل.

---

(١٧) إثبت أن المستقيمين ل$_١$: ٢س = ٣ص = ٤ع ، ل$_٢$: ٣س = ٢ص = ٥ع متقاطعان ثم إوجد معادلة المستوى الذى يحتويهما.

---

(١٨) إثبت أن المستقيمان ل$_١$: $\left\{\begin{matrix} س = ٤−٢ك \\ ص = ٣+ك \\ ع = ١+٣ك \end{matrix}\right.$ ، ل$_٢$: $\left\{\begin{matrix} س = ٥+٢ك \\ ص = ١−ك \\ ع = ١ − ٣ك \end{matrix}\right.$ متوازيان و إوجد معادلة المستوى الذى يحويهما.

---

(١٩) إذا كان المستوى سـ: ٢س − ص + ٧ = ٠ ، صـ: س − ٥ص + ٣ع = ٠ ، المستقيم ل: $\frac{س − ١}{٢} = \frac{ص + ٣}{−١} = \frac{ع}{٥}$ فإوجد

① قياس الزاوية بين المستويين سـ ، صـ ② قياس الزاوية بين المستوى سـ ، المستقيم ل .

---

(٢٠) إثبت أن المستويين سـ: ٣س + ٦ص + ٦ع = ٤ ، صـ: س + ٢ص + ٢ع = ١ متوازيان و أوجد البعد بينهما.

---

(٢١) أوجد مسقط النقطة أ(٠ , ٩ , ٦) على المستقيم المار بالنقطتين ب(١ , ٢ , ٣)، جـ(٧ , −٢ , ٥).

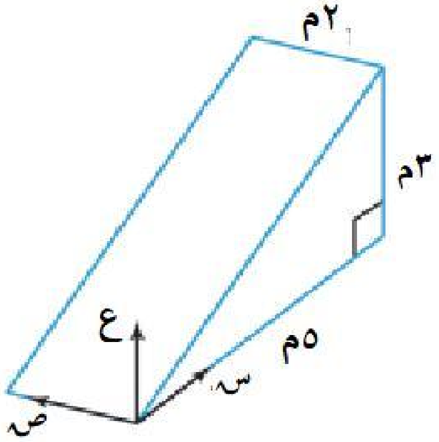
(٢٢) إوجد نقطة تقاطع المستقيم س = ٢ + ٣ ك ، ص = −٤ك ، ع = ٥+ك مع المستوى ٤ س + ٥ ص − ٢ ع = ١٨ ثم إوجد قياس الزاوية بينهما.

---

(٢٣) إوجد معادلة المستوى الذى يحتوى المستقيم $\overrightarrow{ر}_١$ = (١, ٢, ٤) + ك$_١$ (٤, ١, ١١)، عمودى على المستقيم $\overrightarrow{ر}_٢$ = (٤, ١٥, ٨) + ك$_٢$ (٢, ٣, −١).

---

(٢٤) بالإستعانة بالشكل المجاور إوجد معادلة المستوى المائل.
و كذلك معادلة خط أكبر ميل الذى يمر بنقطة الأصل.



---

(٢٥) إوجد الصور المختلفة لمعادلة خط تقاطع المستويين س + ص + ع = ١ ، س + ع = ٠

---

(٢٦) إثبت أن المستقيمان ل$_١$: { س = ٤ − ٢ك ، ص = ٣ + ك ، ع = ١ + ٣ك } ، ل$_٢$: { س = ٥ + ٢ك ، ص = ١ − ك ، ع = ١ − ٣ك } متوازيان و إوجد معادلة المستوى الذى يحويهما.

---

(٢٧) إوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٤ ، ١) و عمودى على المستوى ٣س − ص + ٥ع = ٧٧

---

(٢٨) إوجد نقطة ٢ تقع على المستوى ٢س + ص − ٢ع = ١ بحيث يكون بعدها عن النقطة ب (١ ، ٠ ، −١) أقل ما يمكن.

---

(٢٩) إوجد معادلة الكرة التى مركزها النقطة (−٢ ، ١ ، −١) و المستقيم ٢س + ٢ص + ع = ٣ مماساً لها.

---

(٣٠) إوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة ٢(١ , −١ , ١) و الذى يكون عمودياً عل كل من المستويين سہ : س − ص + ع − ١ = ٠ ، صہ : ٢س + ص + ع + ١ = ٠.

الإجابات

(١)	ب	(٢)	ب	(٣)	د	(٤)	ج	(٥)	ج	(٦)	ب
(٧)	ب	(٨)	ب	(٩)	د	(١٠)	أ	(١١)	ج	(١٢)	أ
(١٣)	د	(١٤)	ج	(١٥)	ب	(١٦)	ج	(١٧)	ب	(١٨)	ب
(١٩)	د	(٢٠)	د	(٢١)	ب	(٢٢)	ج	(٢٣)	أ	(٢٤)	د
(٢٥)	ب	(٢٦)	ب	(٢٧)	ج	(٢٨)	د	(٢٩)	د	(٣٠)	د
(٣١)	ج	(٣٢)	ج	(٣٣)	ب	(٣٤)	أ	(٣٥)	ب	(٣٦)	ب
(٣٧)	د	(٣٨)	ب	(٣٩)	أ	(٤٠)	ج	(٤١)	ب	(٤٢)	ب
(٤٣)	ب	(٤٤)	ج	(٤٥)	ج	(٤٦)	ج	(٤٧)	د	(٤٨)	د

حلول أسئلة إنتاج الإجابة

(١) ∵ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (-٢ , -٤ , -٦)$ ، $\overrightarrow{أج} = \overrightarrow{ج} - \overrightarrow{أ} = (-١ , -٣ , -٨)$

∵ $\overrightarrow{أد} = \overrightarrow{د} - \overrightarrow{أ} = (١ , ٠ , -٧)$

∵ $\overrightarrow{أب} \bullet \overrightarrow{أج} \times \overrightarrow{أد} = \begin{vmatrix} -٢ & -٤ & -٦ \\ -١ & -٣ & -٨ \\ ١ & ٠ & -٧ \end{vmatrix} = -٤٢ + ٦٠ - ١٨ = ٠$

∴ النقط أ ، ب، ج ، د تقع فى مستوى واحد

---

(٢) ∵ المتجهات $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ج}$ تقع فى مستوى واحد ⟸ $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ج} = ٠$

∴ $\begin{vmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ١ & ك & -٣ \end{vmatrix} = ٠$ ⟸ $١ \times (-٣-٢ك) + ١ \times (-٩-٢) + ١ \times (٣ك-١) = ٠$

∴ $-٣-٢ك-١١+٣ك-١ = ٠$ ⟸ $\boxed{ك = ١٥}$

---

(٣) الصورة المتجهه لمعادلة المستقيم :

∵ $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{أ} + ك\,\overrightarrow{هـ}$ ⟸ $\overrightarrow{ر} = (٢ , -١ , ٣) + ك(-٣ , ٤ , ١)$

المعادلات البارامترية :

∵ $\left\{\begin{array}{l} س = س_١ + ك أ \\ ص = ص_١ + ك ب \\ ع = ع_١ + ك ج \end{array}\right.$ ⟸ $\left\{\begin{array}{l} س = ٢ - ٣ك \\ ص = -١ + ٤ك \\ ع = ٣ + ك \end{array}\right.$

الصورة الإحداثية :

∵ $\frac{\text{س}-\text{س}_1}{\text{أ}} = \frac{\text{ص}-\text{ص}_1}{\text{ب}} = \frac{\text{ع}-\text{ع}_1}{\text{جـ}}$ ⇐ $\frac{\text{س}-٢}{-٣} = \frac{\text{ص}+١}{٤} = \frac{\text{ع}-٣}{١}$

لإيجاد نقطة التقاطع مع المستوى س ص نضع ع = ٠

∴ $\frac{\text{س}-٢}{-٣} = \frac{\text{ص}+١}{٤} = \frac{٠-٣}{١}$ ⇐ $\frac{\text{س}-٢}{-٣} = \frac{\text{ص}+١}{٤} = -٣$

∴ $\left.\begin{matrix}\text{س} - ٢ = ٩ \\ \text{ص} + ١ = -١٢\end{matrix}\right\}$ ⇐ $\left.\begin{matrix}\text{س} = ١١ \\ \text{ص} = -١٣\end{matrix}\right\}$

∴ النقطة هى (١١ , −١٣ , ٠)

---

(٤) ∵ أ(٢ , ٢ , −٣) ، ب(١ , −١ , ٠) ∈ للمستقيم

∴ متجه الإتجاه $\overrightarrow{\text{هـ}} = \overrightarrow{\text{أب}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{هـ}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = (١ , −١ , ٠) − (٢ , ٢ , −٣) ⇐ $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = (−١ , −٣ , ٣)

الصورة المتجهه لمعادلة المستقيم :

∵ $\overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{أ}} + \text{ك}\,\overrightarrow{\text{هـ}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (١ , −١ , ٠) + ك(−١ , −٣ , ٣)

المعادلات البارامترية :

∵ $\left.\begin{matrix}\text{س} = \text{س}_1 + \text{ك أ} \\ \text{ص} = \text{ص}_1 + \text{ك ب} \\ \text{ع} = \text{ع}_1 + \text{ك جـ}\end{matrix}\right\}$ ⇐ $\left.\begin{matrix}\text{س} = ١ - \text{ك} \\ \text{ص} = -١ - ٣\text{ك} \\ \text{ع} = ٣\text{ك}\end{matrix}\right\}$

النقطة جـ(١ , ٣ , ٢) ∈ للمستقيم إذا و فقط إذا وجدت قيمة وحيدة لـ **ك** تحقق المعادلات البارامترية

أى نبحث عن قيمة وحيدة لـ **ك** بحيث $\left.\begin{matrix}١ = ١ - \text{ك} \\ ٣ = -١ - ٣\text{ك} \\ ٢ = ٣\text{ك}\end{matrix}\right\}$ ⇐ $\left.\begin{matrix}\text{ك} = ٠ \\ \text{ك} = \frac{-٤}{٣} \\ \text{ك} = \frac{٢}{٣}\end{matrix}\right\}$

∵ قيمة ك ليست وحيدة ⇐ جـ(١ , ٣ , ٢) ∉ للمستقيم

حل آخر :

النقطة جـ(١ , ٣ , ٢) ∈ للمستقيم إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{\text{أجـ}} \parallel \overrightarrow{\text{هـ}}$

∵ $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = (١ , ٣ , ٢) − (٢ , ٢ , −٣) ⇐ $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = (−١ , ١ , ٥)

∵ $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = (−١ , ١ , ٥)، $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = (−١ , −٣ , ٣) ⇐ $\frac{-١}{-١} \neq \frac{١}{-٣}$

∴ $\overrightarrow{\text{أجـ}} \nparallel \overrightarrow{\text{هـ}}$ ⇐ جـ(١ , ٣ , ٢) ∉ للمستقيم

---

(٥) نفرض أن $\theta_{\text{س}} = \theta_{\text{ص}} = \theta_{\text{ع}} = \theta$

∵ $\text{جتا}^2\theta_{\text{س}} + \text{جتا}^2\theta_{\text{ص}} + \text{جتا}^2\theta_{\text{ع}} = ١$ ⇐ $\text{جتا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta = ١$

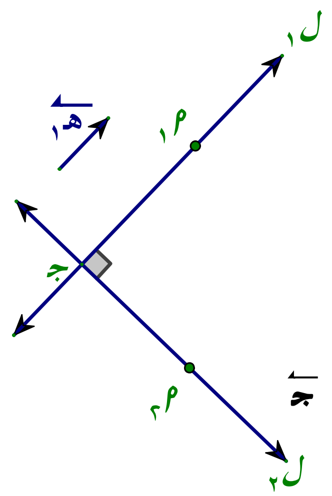
∴ $٣\,\text{جتا}^2\theta = ١$ ⇐ $\text{جتا}\,\theta = \pm\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ متجه إتجاه للمستقيم هو $\overleftarrow{\text{هـ}} = \pm\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}, \frac{١}{\sqrt{٣}}, \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$ أو $\overleftarrow{\text{هـ}} = \pm(\sqrt{٣}, \sqrt{٣}, \sqrt{٣})$

∴ $\overleftarrow{\text{ر}} = (٣ , ٢ , ٥) + \text{ك}(\sqrt{٣}, \sqrt{٣}, \sqrt{٣})$ ⇐ $\overleftarrow{\text{ر}} = (٣ , ٢ , ٥) + \text{ك}(١ , ١ , ١)$

---

(٦) نفرض أن المستقيم المطلوب هو ل_1 ، $\text{أ}_1(٠ , ٠ , ٠)$



، المستقيم المعطى ل_2 حيث $\overleftarrow{\text{ر}_2} = (٣, ١, ٤) + \text{ك}(٢, ١, ٣)$

أى أن $\text{أ}_2(٣, ١, ٤)$ ، $\overleftarrow{\text{هـ}_2} = (٢, ١, ٣)$

لتكن $\text{جـ} = \text{ل}_1 \cap \text{ل}_2$ أى أن $\text{جـ} \in \text{ل}_2$

∴ $\overleftarrow{\text{جـ}} = (٣, ١, ٤) + \text{ك}(٢, ١, ٣)$

∴ $\overleftarrow{\text{جـ}} = (٣ + ٢\text{ك} , ١ + \text{ك} , ٤ + ٣\text{ك})$

∴ متجه إتجاه ل_1 هو $\overleftarrow{\text{هـ}_1} = \overleftarrow{\text{جـأ}_1}$ ⇐ $\overleftarrow{\text{هـ}_1} = \overleftarrow{\text{أ}_1} - \overleftarrow{\text{جـ}}$

∴ $\overleftarrow{\text{هـ}_1} = \text{أ}_1(٠ , ٠ , ٠) - (٣ + ٢\text{ك} , ١ + \text{ك} , ٤ + ٣\text{ك})$

∴ $\overleftarrow{\text{هـ}_1} = (-٣ - ٢\text{ك} , -١ - \text{ك} , -٤ - ٣\text{ك})$

∵ $\text{ل}_1 \perp \text{ل}_2$ ⇐ $\overleftarrow{\text{هـ}_1} \perp \overleftarrow{\text{هـ}_2}$

∴ $\overleftarrow{\text{هـ}_1} \bullet \overleftarrow{\text{هـ}_2} = ٠$

∴ $(-٣ - ٢\text{ك} , -١ - \text{ك} , -٤ - ٣\text{ك}) \bullet (٢, ١, ٣) = ٠$

∴ $-٦ - ٤\text{ك} - ١ - \text{ك} - ١٢ - ٩\text{ك} = ٠$ ⇐ $\boxed{\text{ك} = \frac{-١٩}{١٤}}$

∴ $\overleftarrow{\text{هـ}_1} = \left(-٣ + ٢ \times \frac{١٩}{١٤} , -١ + \frac{١٩}{١٤} , -٤ + ٣ \times \frac{١٩}{١٤}\right)$

∴ $\overleftarrow{\text{هـ}_1} = \left(\frac{-٢}{٧} , \frac{٥}{١٤} , \frac{١}{١٤}\right)$ ⇐ يمكن إعتبار متجه الإتجاه $١٤\overleftarrow{\text{هـ}_1} = (-٤ , ٥ , ١)$

∴ $\overleftarrow{\text{ر}_1} = (٠, ٠, ٠) + \text{ك}(-٤ , ٥ , ١)$ ⇐ $\overleftarrow{\text{ر}_1} = \text{ك}(-٤ , ٥ , ١)$

---

(٧) ∵ $\text{ل}_1: \left\{\begin{array}{l} \text{س} = ٢ + \text{ك} \\ \text{ص} = ٢ + ٢\text{ك} \\ \text{ع} = -٤ - \text{ك} \end{array}\right.$ ⇐ $\overleftarrow{\text{هـ}_1} = (١ , ٢ , -١)$

∵ $\text{ل}_2: \frac{\text{س} - ١}{٢} = \frac{\text{ص} + ٥}{٤} = \frac{\text{ع}}{-٢}$ ⇐ $\overleftarrow{\text{هـ}_2} = (٢ , ٤ , -٢)$

$\because \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٤} = \frac{-١}{-٢}$ $\Leftarrow$ $\overrightarrow{هـ_١} \parallel \overrightarrow{هـ_٢}$ $\Leftarrow$ $ل_١ \parallel ل_٢$ أى أن المستقيمان مستويان

---

(٨) $\because \overrightarrow{هـ_١} = (٠ , -٥ , ٥)$ ، $\overrightarrow{هـ_٢} = (٥ , -١ , -١)$

$\therefore \overrightarrow{هـ_١} \cdot \overrightarrow{هـ_٢} = (٠ , -٥ , ٥) \cdot (٥ , -١ , -١)$

$\therefore \overrightarrow{هـ_١} \cdot \overrightarrow{هـ_٢} = ٠ - ٥ + ٥ = ٠$ $\Leftarrow$ المستقيمان متعامدان.

لإيجاد نقطة التقاطع نبحث عن $ك_١ , ك_٢ \in ح$ حيث $\overrightarrow{ر_١} = \overrightarrow{ر_٢}$

$\therefore (٣ , -٣ , ٥) + ك_١ (٠ , -٥ , ٥) = (-٢ , ٣ , ١) + ك_٢ (٥ , -١ , -١)$

$\therefore \left(٣ , -٣-٥ك_١ , ٥+٥ك_١\right) = \left(-٢+٥ك_٢ , ٣-ك_٢ , ١-ك_٢\right)$

$$\therefore \left\{\begin{array}{l} -٢+٥ك_٢ = ٣ \\ ٣-ك_٢ = -٣-٥ك_١ \\ ١-ك_٢ = ٥+٥ك_١ \end{array}\right. \Leftarrow \left\{\begin{array}{ll} ك_٢ = ١ & \dots (١) \\ ٥ك_١ - ك_٢ = -٦ & \dots (٢) \text{ بحل (١) ، (٢)} \\ ٥ك_١ + ك_٢ = -٤ & \dots (٣) \end{array}\right.$$

$\therefore \boxed{ك_٢ = ١}$ ، من (١) $\boxed{ك_١ = -١}$ و هذه القيم تحقق المعادلة (٣)

$\therefore$ المستقيمان متقاطعان و لإيجاد نقطة التقاطع نعوض عن $ك_١ = -١$ فى معادلة المستقيم الأول

$\therefore$ نقطة التقاطع هى $\overrightarrow{ر_١} = (٣ , -٣ , ٥) - (٠ , -٥ , ٥) = (٣ , ٢ , ٠)$

---

(٩) $\because \overrightarrow{هـ_١} = (٤ , ١ , ٣)$ ، $\overrightarrow{هـ_٢} = (١ , -١ , ٢)$

$\therefore \overrightarrow{هـ_١} \cdot \overrightarrow{هـ_٢} = (٤ , ١ , ٣) \cdot (١ , -١ , ٢)$

$\therefore \overrightarrow{هـ_١} \cdot \overrightarrow{هـ_٢} = ٤ - ١ + ٦ = ٩ \neq ٠$ $\Leftarrow$ المستقيمان متقاطعان أو متخالفان.

نبحث عن $ك_١ , ك_٢ \in ح$ حيث $\overrightarrow{ر_١} = \overrightarrow{ر_٢}$

$\therefore (٣ , -١ , ٢) + ك_١ (٤ , ١ , ٣) = (٠ , ٤ , -١) + ك_٢ (١ , -١ , ٢)$

$\therefore \left(٣+٤ك_١ , -١+ك_١ , ٢+٣ك_١\right) = \left(ك_٢ , ٤-ك_٢ , -١+٢ك_٢\right)$

$$\therefore \left\{\begin{array}{l} ٣+٤ك_١ = ك_٢ \\ -١+ك_١ = ٤-ك_٢ \\ ٢+٣ك_١ = -١+٢ك_٢ \end{array}\right. \Leftarrow \left\{\begin{array}{ll} ٤ك_١ - ك_٢ = -٣ & \dots (١) \\ ك_١ + ك_٢ = ٥ & \dots (٢) \text{ بحل (١) ، (٢)} \\ ٣ك_١ - ٢ك_٢ = -٣ & \dots (٣) \end{array}\right.$$

$\therefore \boxed{ك_٢ = \frac{٢٣}{٥}}$ ، من (١) $\boxed{ك_١ = \frac{٢}{٥}}$ و هذه القيم لا تحقق المعادلة (٣)

$\therefore$ المستقيمان متخالفان.

---

(١٠) لتكن ب(٢ , ١ , −٤) ، أ(١ , −١ , ٢) ∋ للمستقيم ، $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = (٢ , ٣ , −٢)

∴ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٢ , ١ , −٤) − (١ , −١ , ٢) ⇐ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (١ , ٢ , −٦)

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ١ & ٢ & -٦ \\ ٢ & ٣ & -٢ \end{vmatrix}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}}$ = ١٤$\overrightarrow{\text{س}}$ − ١٠$\overrightarrow{\text{ص}}$ − $\overrightarrow{\text{ع}}$

∴ $\|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}}\| = \sqrt{١٩٦+١٠٠+١} = \sqrt{٢٩٧}$

∵ $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = (٢ , ٣ , −٢) ⇐ $\|\overrightarrow{\text{هـ}}\| = \sqrt{٤+٩+٤} = \sqrt{١٧}$

∵ البعد = $\dfrac{\|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}}\|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}}\|}$ ⇐ البعد = $\dfrac{\sqrt{٢٩٧}}{\sqrt{١٧}}$ = ٤,٢

---

(١١) ∵ المستقيم المطلوب ⊥ $\overleftrightarrow{\text{جب}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{ن}} = \overrightarrow{\text{بجـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ن}} = \overrightarrow{\text{جـ}} - \overrightarrow{\text{ب}}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (−١ , −٣ , ٢) − (٣ , ٠ , −٣)

∴ $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (−٤ , −٣ , ٥)، ∵ $\overrightarrow{\text{ن}} \bullet \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \bullet \overrightarrow{\text{أ}}$

∴ (−٤ , −٣ , ٥) • $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (−٤ , −٣ , ٥) • (١ , −٢ , ٤)

∴ (−٤ , −٣ , ٥) • $\overrightarrow{\text{ر}}$ = −٤ + ٦ + ٢٠

∴ $\boxed{(-٤ , -٣ , ٥) \bullet \overrightarrow{\text{ر}} = ٢٢}$ الصورة المتجهه.

∵ أ(س − س$_١$) + ب(ص − ص$_١$) + جـ(ع − ع$_١$) = ٠

∴ $\boxed{-٤(\text{س} - ١) - ٣(\text{ص} + ٢) + ٥(\text{ع} - ٤) = ٠}$ الصورة القياسية.

و بفك الأقواس و تجميع الحدود المتشابهه : −٤س + ٤ −٣ص − ٦ + ٥ع − ٢٠ = ٠

∴ $\boxed{٤\text{س} + ٣\text{ص} - ٥\text{ع} + ٢٢ = ٠}$ الصورة العامة.

---

(١٢) ∵ المستوى // $\overrightarrow{\text{هـ}}_١$ ، $\overrightarrow{\text{هـ}}_٢$ ⇐ $\overrightarrow{\text{ن}} = \overrightarrow{\text{هـ}}_١ \times \overrightarrow{\text{هـ}}_٢$

∴ $\overrightarrow{\text{ن}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ١ & -٢ & ١ \\ ٣ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$ ⇐ $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (−١٠ , −١ , ٨)

∵ $\overrightarrow{\text{ن}} \bullet \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \bullet \overrightarrow{\text{أ}}$ ⇐ (−١٠ , −١ , ٨) • $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (−١٠ , −١ , ٨) • (−٢ , ٣ , ٤)

∴ (−١٠ , −١ , ٨) • ر⃗ = −٢٠ − ٣ + ٣٢

∴ $\boxed{(−١٠ , −١ , ٨) • ر⃗ = ٤٩}$ الصورة المتجهه.

∵ أ(س − س١) + ب(ص − ص١) + جـ(ع − ع١) = ٠

∴ $\boxed{−١٠(س + ٢) − (ص − ٣) + ٨(ع − ٤) = ٠}$ الصورة القياسية.

و بفك الأقواس و تجميع الحدود المتشابهه : −١٠س − ٢٠ − ص + ٣ + ٨ع − ٣٢ = ٠

∴ $\boxed{١٠س + ص − ٨ع + ٤٩ = ٠}$ الصورة العامة.

---

(١٣) ∵ سـ : س − ص + ع − ١ = ٠ ⟸ ن⃗س = (١ , −١ , ١)

∵ صـ : ٢س + ص + ع + ١ = ٠ ⟸ ن⃗ص = (٢ , ١ , ١)

∵ المستوى المطلوب ⊥ سـ ، صـ ⟸ ن⃗ = ن⃗س × ن⃗ص

∴ $ن⃗ = \begin{vmatrix} سَ & صَ & عَ \\ ١ & −١ & ١ \\ ٢ & ١ & ١ \end{vmatrix}$ ⟸ ن⃗ = (−٢ , ١ , ٣)

∴ (−٢ , ١ , ٣) • ر⃗ = (−٢ , ١ , ٣) • (١ , −١ , ١)

∴ $\boxed{(−٢ , ١ , ٣) • ر⃗ = ٠}$ الصورة المتجهه.

∴ $\boxed{−٢(س − ١) + (ص + ١) + ٣(ع − ١) = ٠}$ الصورة القياسية.

∴ $\boxed{٢س − ص − ٣ع = ٠}$ الصورة العامة

---

(١٤) ∵ أب⃗ = ب⃗ − أ⃗ ⟸ أب⃗ = (٠ , ٧ , ٢) − (٣ , ١ , ٠)

∴ أب⃗ = (−٣ , ٦ , ٢)

∵ أجـ⃗ = جـ⃗ − أ⃗ ⟸ أجـ⃗ = (٤ , ١ , ٥) − (٣ , ١ , ٠)

∴ أجـ⃗ = (١ , ٠ , ٥)

∵ أ ، ب ، جـ ∈ للمستوى ⟸ ن⃗ = أب⃗ × أجـ⃗

∴ $ن⃗ = \begin{vmatrix} سَ & صَ & عَ \\ −٣ & ٦ & ٢ \\ ١ & ٠ & ٥ \end{vmatrix}$ ⟸ ن⃗ = (٣٠ , ١٧ , −٦)

∴ $(٣٠ , ١٧ , -٦) \bullet \overrightarrow{\text{ر}} = (٣٠ , ١٧ , -٦) \bullet (٣ , ١ , ٠)$

∴ $\boxed{(٣٠ , ١٧ , -٦) \bullet \overrightarrow{\text{ر}} = ١٠٧}$ الصورة المتجهه.

∴ $\boxed{٣٠(\text{س} - ٣) + ١٧(\text{ص} - ١) - ٦\text{ع} = ٠}$ الصورة القياسية.

∴ $\boxed{٣٠\text{س} + ١٧\text{ص} - ٦\text{ع} - ١٠٧ = ٠}$ الصورة العامة.

---

(١٥) ∵ $٣\text{س} + ٢\text{ص} + ٤\text{ع} = ١٢$ بالقسمة ÷ ١٢

∴ $\frac{\text{س}}{٤} + \frac{\text{ص}}{٦} + \frac{\text{ع}}{٣} = ١$ ⟸ الأجزاء هى ٤ ، ٦ ، ٣

∴ أ$(٤ , ٠ , ٠)$ ، ب$(٠ , ٦ , ٠)$ ، جـ$(٠ , ٠ , ٣)$

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} = (٠ , ٦ , ٠) - (٤ , ٠ , ٠)$ ⟸ $\overrightarrow{\text{أب}} = (-٤ , ٦ , ٠)$

، $\overrightarrow{\text{أجـ}} = (٠ , ٠ , ٣) - (٤ , ٠ , ٠)$ ⟸ $\overrightarrow{\text{أجـ}} = (-٤ , ٠ , ٣)$

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -٤ & ٦ & ٠ \\ -٤ & ٠ & ٣ \end{vmatrix}$ ⟸ $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}} = (١٨ , ١٢ , ٢٤)$

∴ $\| \overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}} \| = \sqrt{(١٨)^٢ + (١٢)^٢ + (٢٤)^٢} = ٦\sqrt{٢٩}$

∵ مساحة △ أ ب جـ = $\frac{١}{٢} \| \overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}} \| = ٣\sqrt{٢٩}$ وحدة طول مربعة.

---

(١٦) ∵ $\text{ل}_١ : \frac{\text{س} + ١}{٢} = \text{ص} = \frac{\text{ع} - ٤}{-٣}$

∴ $\overrightarrow{\text{هـ}}_١ = (٢ , ١ , -٣)$ ، النقطة أ$(-١ , ٠ , ٤) \in \text{ل}_١$

∵ المستوى المطلوب يحتوى $\text{ل}_١$ ، النقطة و$(٠ , ٠ , ٠) \notin \text{ل}_١$

∴ $\overrightarrow{\text{ن}} = \overrightarrow{\text{وأ}} \times \overrightarrow{\text{هـ}}_١$

∴ $\overrightarrow{\text{ن}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -١ & ٠ & ٤ \\ ٢ & ١ & -٣ \end{vmatrix}$ ⟸ $\overrightarrow{\text{ن}} = (-٤ , ٥ , -١)$

∵ $\overrightarrow{\text{ن}} \bullet \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \bullet \overrightarrow{\text{و}}$

∴ $(-٤ , ٥ , -١) \bullet \overrightarrow{\text{ر}} = (-٤ , ٥ , -١) \bullet (٠ , ٠ , ٠)$

∴ $(-٤ , ٥ , -١) \bullet \overrightarrow{\text{ر}} = ٠$

∴ $\boxed{(-٤ , ٥ , -١) \bullet \vec{ر} = ٠}$ الصورة المتجهه.

∴ $\boxed{-٤س+٥ص-ع = ٠}$ الصورة القياسية ، الصورة العامة.

---

(١٧) ∵ $ل_١$: ٢س = ٣ص = ٤ع بالقسمة ÷ ١٢ ⟸ $ل_١ : \frac{س}{٦} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٣}$

∴ $ل_١ : \vec{ر_١} = ك_١(٦ , ٤ , ٣)$ أى أن $\vec{هـ_١} = (٦ , ٤ , ٣)$

∵ $ل_٢$: ٣س = ٢ص = ٥ع بالقسمة ÷ ٣٠ ⟸ $ل_٢ : \frac{س}{١٠} = \frac{ص}{١٥} = \frac{ع}{٦}$

∴ $ل_٢ : \vec{ر_٢} = ك_٢(١٠ , ١٥ , ٦)$ أى أن $\vec{هـ_٢} = (١٠ , ١٥ , ٦)$

نوجد نقطة تقاطع المستقيمين : $\vec{ر_١} = \vec{ر_٢}$ ⟸ $ك_١(٦ , ٤ , ٣) = ك_٢(١٠ , ١٥ , ٦)$

∴ $\left.\begin{array}{l} ٦ك_١ = ١٠ك_٢ \\ ٤ك_١ = ١٥ك_٢ \\ ٣ك_١ = ٦ك_٢ \end{array}\right\}$ ⟸ $\left.\begin{array}{ll} ٣ك_١ = ٥ك_٢ & ... (١) \\ ٤ك_١ = ١٥ك_٢ & ... (٢) \\ ك_١ = ٢ك_٢ & ... (٣) \end{array}\right.$

بحل (١) ، (٣) $\boxed{ك_١ = ٠}$ ، $\boxed{ك_٢ = ٠}$ و هذه القيم تحقق المعادلة (٢)

∴ المستقيمان متقاطعان فى نقطة الأصل " و "

∵ المستوى يحوى المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ ⟸ $\vec{ن} = \vec{هـ_١} \times \vec{هـ_٢} = (-٢١ , -٦ , ٥٠)$

∴ $(-٢١ , -٦ , ٥٠) \bullet \vec{ر} = (-٢١ , -٦ , ٥٠) \bullet (٠ , ٠ , ٠)$

∴ $(-٢١ , -٦ , ٥٠) \bullet \vec{ر} = ٠+٠+٠$

∴ $\boxed{(-٢١ , -٦ , ٥٠) \bullet \vec{ر} = ٠}$ الصورة المتجهه.

∴ $\boxed{-٢١س-٦ص+٥٠ع = ٠}$ الصورة القياسية ، الصورة العامة.

---

(١٨) ∵ $\vec{هـ_١} = (-٢ , ١ , ٣)$ ، $أ_١(٤ , ٣ , ١) \in ل_١$ ، $\vec{هـ_٢} = (٢ , -١ , -٣)$ ، $أ_٢(٥ , ١ , ١) \in ل_٢$

∵ $\frac{-٢}{٢} = \frac{١}{-١} = \frac{٣}{-٣}$ ⟸ $\vec{هـ_١} \parallel \vec{هـ_٢}$ أى أن $ل_١ \parallel ل_٢$

∵ $\vec{أ_١أ_٢} = \vec{أ_٢} - \vec{أ_١}$ ⟸ $\vec{أ_١أ_٢} = (٥ , ١ , ١) - (٤ , ٣ , ١)$

∴ $\vec{أ_١أ_٢} = (١ , -٢ , ٠)$

∴ $\vec{ن} = \vec{هـ_١} \times \vec{أ_١أ_٢}$ ⟸ $\vec{ن} = (٦ , ٣ , ٣)$ و يمكن إعتبار $\vec{ن} = (٢ , ١ , ١)$

∴ $(٢ , ١ , ١) \bullet \vec{ر} = (٢ , ١ , ١) \bullet (٤ , ٣ , ١)$

∴ $(٢ , ١ , ١) \bullet \vec{ر} = ٨+٣+١$ ⟸ $\boxed{(٢ , ١ , ١) \bullet \vec{ر} = ١٢}$ الصورة المتجهه.

∴ $\text{٢}(\text{س} - \text{٤}) + (\text{ص} - \text{٣}) + (\text{ع} - \text{١}) = \text{٠}$ الصورة القياسية

∴ $\boxed{\text{٢س} + \text{ص} + \text{ع} - \text{١٢} = \text{٠}}$ الصورة العامة.

---

(١٩) ① ∵ سـ: $\text{٢س} - \text{ص} + \text{٧} = \text{٠}$ $\Leftarrow$ $\overrightarrow{n_{\text{س}}} = (\text{٢} , -\text{١} , \text{٠})$

∵ صـ: $\text{س} - \text{٥ص} + \text{٣ع} = \text{٠}$ $\Leftarrow$ $\overrightarrow{n_{\text{ص}}} = (\text{١} , -\text{٥} , \text{٣})$

∵ $\text{جتا}\,\theta = \dfrac{|\overrightarrow{n_{\text{س}}} \bullet \overrightarrow{n_{\text{ص}}}|}{\|\overrightarrow{n_{\text{س}}}\|\,\|\overrightarrow{n_{\text{ص}}}\|}$ $\Leftarrow$ $\text{جتا}\,\theta = \dfrac{\sqrt{\text{٧}}}{\text{٥}}$ $\Leftarrow$ $\theta = \text{٥٨,٠٥}^\circ$

②

∵ سـ: $\text{٢س} - \text{ص} + \text{٧} = \text{٠}$ $\Leftarrow$ $\overrightarrow{n_{\text{س}}} = (\text{٢} , -\text{١} , \text{٠})$

∵ ل: $\dfrac{\text{س} - \text{١}}{\text{٢}} = \dfrac{\text{ص} + \text{٣}}{-\text{١}} = \dfrac{\text{ع}}{\text{٥}}$ $\Leftarrow$ $\overrightarrow{\text{هـ}} = (\text{٢} , -\text{١} , \text{٥})$

∵ $\text{جتا}(\text{٩٠} - \theta) = \dfrac{|\overrightarrow{n_{\text{س}}} \bullet \overrightarrow{\text{هـ}}|}{\|\overrightarrow{n_{\text{س}}}\|\,\|\overrightarrow{\text{هـ}}\|}$ $\Leftarrow$ $\text{جا}\,\theta = \dfrac{\text{١}}{\sqrt{\text{٦}}}$ $\Leftarrow$ $\theta = \text{٢٤,٠٩}^\circ$

---

(٢٠) ∵ سـ: $\text{٣س} + \text{٦ص} + \text{٦ع} - \text{٤} = \text{٠}$ $\Leftarrow$ $\overrightarrow{n_1} = (\text{٣} , \text{٦} , \text{٦})$

∵ صـ: $\text{س} + \text{٢ص} + \text{٢ع} - \text{١} = \text{٠}$ $\Leftarrow$ $\overrightarrow{n_2} = (\text{١} , \text{٢} , \text{٢})$

∵ $\dfrac{\text{٣}}{\text{١}} = \dfrac{\text{٦}}{\text{٢}} = \dfrac{\text{٦}}{\text{٢}}$ $\Leftarrow$ سـ // صـ

لإيجاد البعد بين المستويين نوجد نقطة فى آحد المستويين ثم نوجد بعدها عن المستوى الآخر كما يلى

نوجد نقطة على المستوى صـ مثلاً و ذلك بإختيار قيمة لـ ص ، قيمة لـ ع ونحسب قيمة س

بوضع ص = ع = ٠ فى معادلة المستوى صـ $\Leftarrow$ س = ١ $\Leftarrow$ النقطة (١ , ٠ , ٠)

∴ نوجد بعد النقطة (١ , ٠ , ٠) عن المستوى سـ

∵ $\text{ل} = \dfrac{|\text{أس}_1 + \text{بص}_1 + \text{جـع}_1 + \text{د}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2}}$ $\Leftarrow$ $\text{ل} = \dfrac{|\text{٣}\times\text{١} + \text{٦}\times\text{٠} + \text{٦}\times\text{٠} - \text{٤}|}{\sqrt{\text{٣}^2 + \text{٦}^2 + \text{٦}^2}}$

∵ $\text{ل} = \dfrac{|\text{٣} - \text{٤}|}{\sqrt{\text{٩} + \text{٣٦} + \text{٣٦}}}$ $\Leftarrow$ $\text{ل} = \dfrac{\text{١}}{\text{٩}}$

حل آخر :

∵ سـ: $\text{س} + \text{٢ص} + \text{٢ع} - \dfrac{\text{٤}}{\text{٣}} = \text{٠}$ ، صـ: $\text{س} + \text{٢ص} + \text{٢ع} - \text{١} = \text{٠}$

∴ $\text{ل} = \dfrac{\left|-\dfrac{\text{٤}}{\text{٣}} - (-\text{١})\right|}{\sqrt{\text{١} + \text{٤} + \text{٤}}} = \dfrac{\text{١}}{\text{٩}}$

---

(٢١) نوجد المعادلة البارامترية المستقيم $\overleftrightarrow{بجـ}$:

$\overrightarrow{هـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ب} \quad \Leftarrow \quad \overrightarrow{هـ} = (٦ , -٤ , ٢) \quad \Leftarrow \quad \left.\begin{matrix} س = ١+٦ك \\ ص = ٢-٤ك \\ ع = ٣+٢ك \end{matrix}\right\}$

نفرض أن مسقط النقطة ٢ على $\overleftrightarrow{بجـ}$ هو النقطة د(١+٦ك , ٢-٤ك , ٣+٢ك)

∴ $\overrightarrow{اد}$ = (١+٦ك , -٧-٤ك , -٣+٢ك)

∵ $\overrightarrow{اد} \perp \overrightarrow{بجـ} \quad \Leftarrow \quad \overrightarrow{اد} \bullet \overrightarrow{بجـ} = ٠$

∴ (١+٦ك , -٧-٤ك , -٣+٢ك) • (٦ , -٤ , ٢) = ٠ ⟸ ك = $\frac{-١}{٢}$ ⟸ د(-٢ , ٤ , ٢)

---

(٢٢) ∵ $\left.\begin{matrix} س = ٢+٣ك \\ ص = -٤ك \\ ع = ٥+ك \end{matrix}\right\}$ ... (١) ، ٤س + ٥ص − ٢ع = ١٨ ... (٢) بالتعويض من (١) فى (٢)

∴ ٤(٢ + ٣س) + ٥(-٤ك) − ٢(٥ + ك) = ١٨ ⟸ ك = −٢

بالتعويض فى (١) ⟸ س = − ٤ ، ص = ٨ ، ع = ٣ ⟸ النقطة هى (−٤ ، ٨ ، ٣)

∵ $\overrightarrow{هـ}$ = (٣ ، −٤ ، ١) ، $\overrightarrow{ن}$ = (٤ ، ٥ ، −٢) ⟸ جاθ = $\frac{|(٣ , -٤ , ١)\bullet(٤ , ٥ , -٢)|}{\sqrt{٢٦} \times \sqrt{٤٥}}$

∴ جاθ = $\frac{\sqrt{١٣٠}}{٣٩}$ ⟸ $\theta \simeq ١٧^\circ$

---

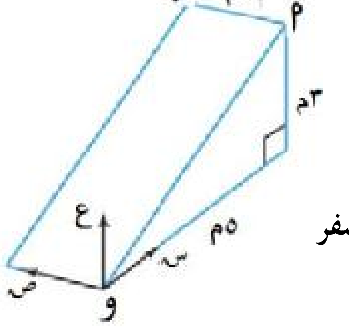
(٢٣) ∵ المستقيم $\overrightarrow{ر_١}$ = (١, ٢, ٤)+ك١ (٤, ١, ١١) محتوى فى المستوى المطلوب

∴ النقطة (١, ٢, ٤) ∋ للمستوى المطلوب.

∵ $\overrightarrow{ر_٢}$ = (٤, ١٥, ٨)+ك٢ (٢, ٣, -١) ⊥ المستوى المطلوب

∴ المتجه العمودى للمستوى المطلوب هو $\overrightarrow{ن}$ = (٢, ٣, -١)

∴ معادلة المستوى هى : (٢, ٣, -١)•$\overrightarrow{ر}$ = (٢, ٣, -١)•(١, ٢, ٤) ⟸ ٢س+٣ص − ع = ٤



(٢٤) من الشكل : و (٠ ، ٠ ، ٠) ، ٢ (٥ ، ٠ ، ٣) ، ب (٥ ، ٢ ، ٣)

$\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{و٢} \times \overrightarrow{وب} \quad \Leftarrow \quad \overrightarrow{ن}$ = (−٦ ، ٠ ، ١٠)

معادلة المستوى المائل: ⟸ (−٦, ٠, ١٠)•$\overrightarrow{ر}$ = (−٦, ٠, ١٠)•(٠, ٠, ٠)

⟸ −٦س + ١٠ع = صفر ⟸ ٣س − ٥ ع = صفر

---

(٢٥)

∵ س + ع = ٠ ⟸ $\boxed{\text{س} = -\text{ع}}$ ...(١)

∵ س + ص + ع = ١ بالتعويض من (١) ⟸ $\boxed{\text{ص} = ١}$ ...(٢)

∴ مجموعة حل المعادلتين = {(− ع , ١ , ع) : ع∈ح} بوضع ع = ك

∴ س = − ك ، ص = ١ ، ع = ك " المعادلة البارامترية لخط تقطع المستويين"

----

(٢٦) ∵ المستوى يحتوي المستقيم ل١ ⟸ النقطة أ(٠ , ٣ , −٥) ∈ المستوى

∵ $\overrightarrow{\text{هـ}_1}$ = (٦ , −٢ , −١) ، $\overrightarrow{\text{هـ}_2}$ = (١ , −٣ , ٣) ⟸ $\overrightarrow{\text{ن}} = \overrightarrow{\text{هـ}_1} \times \overrightarrow{\text{هـ}_2}$ = −٩ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ١٩ $\overrightarrow{\text{ص}}$ − ١٦ $\overrightarrow{\text{ع}}$

∴ (−٩ , −١٩ , −١٦) · $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (−٩ , −١٩ , −١٦) · (٠ , ٣ , −٥)

∴ ٩ س + ١٩ ص + ١٦ ع + ٢٣ = ٠

----

(٢٧) إوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٤ ، ١) و عمودى على المستوى ٣س − ص + ٥ع = ٧٧

∵ المستقيم ⊥ المستوى ⟸ $\overrightarrow{\text{هـ}} = \overrightarrow{\text{ن}}$ = (٣ ، −١١ ، ٥)

∴ معادلة المستقيم : $\frac{\text{س} - ٢}{٣} = \frac{\text{ص} - ٤}{١-} = \frac{\text{ع} - ١}{٥}$

----

(٢٨) أقرب نقطة على المستوى من النقطة ب هى مسقط النقطة ب على المستوى

نوجد المعادلة البارمترية للمستقيم المار بالنقطة ب، عمودى على المستوى أى أن $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = (٢ ، ١ ، −٢)

س = ١ + ٢ك ، ص = ك ، ع = −١ −٢ك بالتعويض فى معادلة المستوى

٢(١ + ٢ك) + ك −٢(−١ −٢ك) = ١ ⟸ ك = $\frac{١-}{٣}$ ⟸ النقطة أ ($\frac{١}{٣}$, $\frac{١-}{٣}$, $\frac{١-}{٣}$)

----

(٢٩) نق = بعد المركز عن المستوى ⟸ نق = $\frac{|٢ \times (٢-) + ٢ \times ١ + (١-) - ٣|}{\sqrt{٤ + ٤ + ١}}$ = ٢

(س + ٢)^{٢} + (ص − ١)^{٢} + (ع + ١)^{٢} = ٤ ⟸ س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٤س − ٢ص + ٢ع + ٢ = ٠

----

(٣٠) ∵ $\overrightarrow{\text{ن}_\text{س}}$ = (١ , −١ , ١) ، $\overrightarrow{\text{ن}_\text{ص}}$ = (٢ , ١ , ١)

∵ المستوى المطلوب ⊥ س~ ، ص~ ⟸ $\overrightarrow{\text{ن}} = \overrightarrow{\text{ن}_\text{س}} \times \overrightarrow{\text{ن}_\text{ص}}$ ⟸ $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (−٢ , ١ , ٣)

∴ (−٢ , ١ , ٣) • $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (−٢ , ١ , ٣) • (١ , −١ , ١) ⟸ $\boxed{(٢- , ١ , ٣) \bullet \overrightarrow{\text{ر}} = ٠}$

∴ $\boxed{-٢(\text{س} - ١) + (\text{ص} + ١) + ٣(\text{ع} - ١) = ٠}$ الصورة القياسية.

∴ $\boxed{٢\text{س} - \text{ص} - ٣\text{ع} = ٠}$ الصورة العامة.