المراجعة النهائية

الجبر والهندسة الفراغية

شريف حسين

المستوى

الأول

* نظرية ذات الحدين

ملاحظات

في مفكوك $(س + أ)^ن$

1) عدد الحدود ن + 1

2) س مرتبة تنازلياً ، أ تصاعدياً

3) مجموع أسس س ، أ في أي حد ن

4) الحد العام

$ح_{ر+1} = {}^{ن}ق_ر \, أ^ر \, س^{ن-ر}$

$= {}^{ن}ق_ر \, (الثاني)^ر \, (الأول)^{ن-ر}$

5) ن زوجي ∴ عدد الحدود فردي

∴ يوجد حد أوسط رتبته $\frac{ن}{2} + 1$

6) ن فردي ∴ عدد الحدود زوجي

∴ يوجد حدان أوسطان

رتبتاهما $\frac{ن+1}{2}$ ، $\frac{ن+3}{2}$

7) $\frac{ح_{ر+1}}{ح_ر} = \frac{ن-ر+1}{ر} \times \frac{أ}{س}$

$= \frac{الدليل - الصغير + 1}{الصغير} \times \frac{الثاني}{الأول}$

* $ح_7 = ح_8$ ∴ $\frac{ح_8}{ح_7} = 1$

* $ح_9 + ح_{10} = 0$ ∴ $\frac{ح_{10}}{ح_9} = -1$

* $\frac{ح_{10}}{ح_8} = \frac{ح_{10}}{ح_9} \times \frac{ح_9}{ح_8}$

8) $(س+أ)^ن + (س-أ)^ن$
$= 2[ح_1 + ح_3 + ح_5 + ...]$

9) $(س+أ)^ن - (س-أ)^ن$
$= 2[ح_2 + ح_4 + ح_6 + ...]$

آخر كلام

* إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك $(3س + 2ص)^{13}$ متساويان أثبت أن $\frac{س}{ص} = \frac{2}{3}$

الحل

رتبة الحدان الأوسطان $\frac{13+1}{2} = 7$ ، 8

$\frac{ح_8}{ح_7} = 1$

$\frac{13-7+1}{7} \times \frac{2ص}{3س} = 1$

$\frac{2ص}{3س} = 1$

∴ $\frac{س}{ص} = \frac{2}{3}$

اختر

1) معامل الحد الخامس في مفكوك $(1 + 2س)^{10}$

(أ) $16 \, {}^{10}ق_5$
(ب) $\frac{1}{16} \, {}^{10}ق_5$
(ج) $16 \, {}^{10}ق_4$
(د) $\frac{1}{16} \, {}^{10}ق_4$

الحل

$ح_5 = {}^{10}ق_4 \, (2س)^4 \times 1^6$

$= {}^{10}ق_4 \, 2^4$

$= 16 \, {}^{10}ق_4$

2) إذا كان رتبتا الحدان الأوسطان في مفكوك $(س+ص)^ن$ هما 7 ، 8 فإن ن = ...

(أ) 13
(ب) 15
(ج) 16
(د) 56

الحل

$\frac{ن+1}{2} = 7$

$ن + 1 = 14$

$ن = 13$

3) في مفكوك ذي الحدين لدينا 7 حدود موجبة ، 6 حدود سالبة فإن المقدار على الصورة

(أ) $(أ - ب)^{12}$
(ب) $(أ - ب)^{13}$
(ج) $(أ + ب)^{12}$
(د) $(أ - ب)^{13}$

* الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

1 ، $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}ت$ ، $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}ت$

1 ، ω ، ω^2

① $\omega^3 = 1$

○ $\omega^4 = \omega$ $\qquad \omega^7 = \omega$

○ $\omega^6 = 1$ $\qquad \omega^{12} = 1$

○ $\omega^8 = \omega^2$ $\qquad \omega^5 = \omega^2$

○ $\frac{1}{\omega} = \frac{\omega^3}{\omega} = \omega^2$

○ $\frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^3}{\omega^2} = \omega$

② $1+\omega+\omega^2 = 0$

○ $1+\omega = -\omega^2$

○ $\omega+\omega^2 = -1$

○ $1+\omega^2 = -\omega$

③ $\left.\begin{matrix}\omega-\omega^2\\ \omega^2-\omega\end{matrix}\right] = \pm\sqrt{3}\,ت$

$ت^2 = -1$ ، $ت^4 = 1$

اختبر

١) مرافق العدد ω يساوي ....

(أ) ω (ب) ω^2 (ج) 1 (د) $-\omega$

٢) $\left(\omega^2+\frac{1}{\omega}\right)\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right)^2 = ...$

(أ) 2

(ب) صفر

(ج) -3

(د) -5

الحل

$(\omega^2+\omega^2)(1+\omega)^2$

$= 2\omega^2 \times (-\omega^2)^2$

$= 2\omega^2 \times \omega$

$= 2\omega^3 = 2$

٣) $(\text{أ}+\text{ب}\omega+\text{أ}\omega^2)(\text{أ}+\text{ب}\omega^2+\text{أ}\omega^4) = ...$

الحل

(أ) 1 $\qquad (-\text{أ}\omega+\text{ب}\omega)(\text{أ}+\text{ب}\omega^4+\text{أ}\omega)$

(ب) أ − ب $\qquad = (-\text{أ}\omega+\text{ب}\omega)(-\text{أ}\omega^2+\text{ب}\omega^2)$

(ج) $(\text{أ}-\text{ب})^2$ $\qquad = \omega(\text{ب}-\text{أ}) \times \omega^2(\text{ب}-\text{أ})$

$= \omega^3(\text{ب}-\text{أ})^2$

(د) $\text{ب}^2-\text{أ}^2$ $\qquad = 1\,(\text{أ}-\text{ب})^2$

آخر كلام

٤) $\left(1+2\omega^5+\frac{1}{\omega^3}\right)\left(1+2\omega+\frac{1}{\omega^4}\right) = ...$

(أ) صفر

الحل

(ب) 1 $\qquad (1+2\omega^2+\omega)(1+2\omega+\omega^2)$

(ج) -1 $\qquad = (-\omega^2+2\omega^2)(-\omega+2\omega)$

$= \omega^2 \times \omega$

(د) 2 $\qquad = 1$

٥) $\frac{\text{أ}-\text{د}\omega}{\text{أ}\omega^2-\text{د}} - \omega^2 = ...$

الحل

(أ) 3ت $\qquad \frac{\text{أ}\omega^3-\text{د}\omega}{\text{أ}\omega^2-\text{د}} - \omega^2$

(ب) $\pm\sqrt{3}\,ت$ $\qquad \frac{\omega(\cancel{\text{أ}\omega^2-\text{د}})}{\cancel{\text{أ}\omega^2-\text{د}}} - \omega^2$

(ج) -3

(د) 3 $\qquad \omega-\omega^2 = \pm\sqrt{3}\,ت$

٦) $\sum_{د=1}^{6} (1+\omega^د) = ...$

الحل

(أ) صفر $\qquad = 1+\omega+1+\omega^2+1+\omega^3$

(ب) 6 $\qquad + 1+\omega^4+1+\omega^5+1+\omega^6$

(ج) 1 $\qquad = 6 + \text{صفر}$

(د) $1+\omega$ $\qquad = 6$

٧) مرافق العدد $1+\omega$ هو ......

(أ) $1-\omega$ (ب) $-\omega^2$

(ج) $1+\omega^2$ (د) $1-\omega^2$

٨) $\left(\frac{5-3\omega^2}{5\omega-3} - \frac{2-7\omega}{2\omega^2-7}\right)^2 = ...$

الحل

(أ) 3 $\qquad \left(\frac{5\omega^3-3\omega^2}{5\omega-3} - \frac{2\omega^3-7\omega}{2\omega^2-7}\right)^2$

(ب) -3 $\qquad = \left[\frac{\omega^2(\cancel{5\omega-3})}{\cancel{5\omega-3}} - \frac{\omega(\cancel{2\omega^2-7})}{\cancel{2\omega^2-7}}\right]^2$

(ج) 3ت $\qquad = [\omega^2-\omega]^2$

(د) -3ت $\qquad = (\pm\sqrt{3}\,ت)^2 = 3ت^2$

$= -3$

آخر كلام

١- س^2 + ص^2 + ع^2 + ٤س − ٦ص + ٨ع + ٤ = ٠ معادلة كرة طول قطرها .... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ١٥ (د) ٢٠

الحل

م = (−٢ ، ٣ ، −٤)

نق = $\sqrt{}$ (−٢)^2 + (٣)^2 + (−٤)^2 − ٤

= ٥

٢- إذا كان أ(٧ ، −١ ، ٨) ، ب(١١ ، ٢ ، −٤) فإن طول $\overline{أب}$ = ... سم

(أ) ١٠ (ب) ١١ (ج) ١٢ (د) ١٣

$\overrightarrow{أب}$ = ب − أ

= (١١ ، ٢ ، −٤) − (٧ ، −١ ، ٨)

= (٤ ، ٣ ، −١٢)

طول $\overline{أب}$ = $\sqrt{}$ (٤)^2 + (٣)^2 + (−١٢)^2 = ١٣

٣- إذا كان أ(−٢ ، ٠ ، ٣) ، ب(٤ ، ٢ ، −٥) فإن ||$\overrightarrow{أب}$|| = ... وحدة طول

(أ) $\sqrt{}$٢٦ (ب) $\sqrt{}$٤٠ (ج) $\sqrt{}$٤٤ (د) $\sqrt{}$١٠٤

الحل

$\overrightarrow{أب}$ = ب − أ

= (٤ ، ٢ ، −٥) − (−٢ ، ٠ ، ٣)

= (٦ ، ٢ ، −٨)

||$\overrightarrow{أب}$|| = $\sqrt{}$ ٣٦ + ٤ + ٦٤ = $\sqrt{}$١٠٤

٤- الصورة القياسية لمعادلة الكرة التي مركزها (٣ ، −٢ ، ١) وطول نصف قطرها يساوي ٥ سم هي

(أ) (س + ٣)^2 + (ص − ٢)^2 + (ع + ١)^2 = ٥

(ب) (س + ٣)^2 + (ص − ٢)^2 + (ع + ١)^2 = ٢٥

(ج) (س − ٣)^2 + (ص + ٢)^2 + (ع − ١)^2 = ٢٥

(د) (س − ٣)^2 + (ص + ٢)^2 + (ع − ١)^2 = $\sqrt{}$٥

٥- إذا كان أ(−٤ ، −٢ ، ٣) ، ب(١ ، ٢ ، ك) وكان طول $\overline{أب}$ = $\sqrt{}$٧٧ فإن إحدى قيم ك هي ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٩

الحل

$\sqrt{}$ (−٤ − ١)^2 + (−٢ − ٢)^2 + (٣ − ك)^2 = $\sqrt{}$٧٧

٢٥ + ١٦ + (٣ − ك)^2 = ٧٧

(٣ − ك)^2 = ٣٦

٣ − ك = ٦ ، ٣ − ك = −٦

− ك = ٣ ، − ك = −٩

ك = −٣ ، ك = ٩

* ملاحظة

متجهات الوحدة الأساسية

$\overrightarrow{س}$ = (١ ، ٠ ، ٠)

$\overrightarrow{ص}$ = (٠ ، ١ ، ٠)

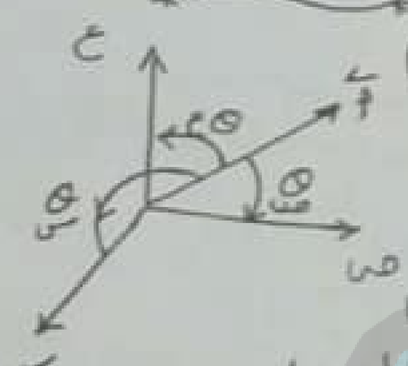
$\overrightarrow{ع}$ = (٠ ، ٠ ، ١)

* $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$

$\overrightarrow{جد}$ = $\overrightarrow{د}$ − $\overrightarrow{جـ}$

* متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{أ}$

$\overrightarrow{ى}_{أ}$ = $\overrightarrow{أ}$ / ||$\overrightarrow{أ}$||



$\overrightarrow{أ}$ = (أس ، أص ، أع)

(θس ، θص ، θع)

الزوايا التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور س ، ص ، ع

"زوايا الاتجاه"

(جتا θس ، جتا θص ، جتا θع)

جيوب تمام زوايا الاتجاه

حيث جتا^{2}θس + جتا^{2}θص + جتا^{2}θع = ١

∴ $\overrightarrow{أ}$ = ||$\overrightarrow{أ}$|| (جتا θس ، جتا θص ، جتا θع)

١- إذا كان ٣٠° ، ٧٠° ، θ هي زوايا الاتجاه لمتجه فإن إحدى قيم θ هي ...

(أ) ١٠٠ (ب) ٨٠ (ج) ٦٢ (د) ٦٨,٦١

الحل

جتا^{2}٣٠ + جتا^{2}٧٠ + جتا^{2}θ = ١

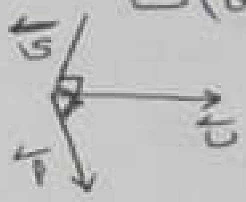
جتا^{2}θ = ١ − جتا^{2}٣٠ − جتا^{2}٧٠

جتا θ = ٠,٣٦٤٧

θ = ٦٨,٦١

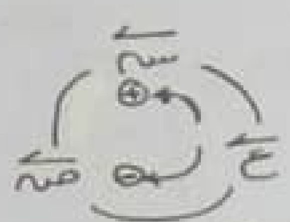
* الضرب الاتجاهي لمتجهين

⊙ $\vec{أ} \times \vec{ب} = (\|\vec{أ}\|\,\|\vec{ب}\|\ \text{جا}\ هـ)\ \vec{ى}$



⊙ $\vec{أ} \times \vec{ب} = -\vec{ب} \times \vec{أ}$

⊙

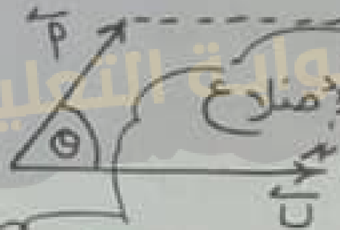


* $\vec{س} \times \vec{ص} = \vec{ع}$
* $\vec{ع} \times \vec{س} = \vec{ص}$
* $\vec{ع} \times \vec{ص} = -\vec{س}$
* $\vec{ص} \times \vec{ع} = \vec{س}$
* $\vec{س} \times \vec{ع} = -\vec{ص}$
* $\vec{ص} \times \vec{س} = -\vec{ع}$

⊙ $\vec{س} \times \vec{س} = \vec{و}$
$\vec{ع} \times \vec{ع} = \vec{و}$
$\vec{ص} \times \vec{ص} = \vec{و}$

⊙ شرط توازي متجهين
$\vec{أ}$ (أس ، أص ، أع)
$\vec{ب}$ (بس ، بص ، بع)
هو $\boxed{\vec{أ} \times \vec{ب} = \vec{و}}$
أو $\boxed{\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}}$

⊙ المعنى الهندسي للضرب الاتجاهي



$\|\vec{أ} \times \vec{ب}\|$
= مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجاورا
= ضعف مساحة المثلث الذي فيه $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجاوران

* الضرب الثلاثي القياسي للمتجهات
$\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{حـ}$

$$\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} أ_س & أ_ص & أ_ع \\ ب_س & ب_ص & ب_ع \\ حـ_س & حـ_ص & حـ_ع \end{vmatrix}$$

حيث $|\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ}|$ = حجم متوازي السطوح

⊙ ملاحظة إذا كان $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{حـ}$ في مستوى واحد فإن $\vec{أ} \cdot (\vec{ب} \times \vec{حـ})$ = صفر

آخر كلام:

* أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أحرف متجاورة يمثلها المتجهات $\vec{أ} = (٢ ، ١ ، ٣)$ ، $\vec{ب} = (-١ ، ٣ ، ٢)$ ، $\vec{حـ} = (١ ، ١ ، -٢)$

الحل

$$\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ -١ & ٣ & ٢ \\ ١ & ١ & -٢ \end{vmatrix}$$

$= ٢(-٨) - ١(٠) + ٣(-٤)$
$= -٢٨$

∴ حجم متوازي السطوح $= |\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{حـ}|$
$= |-٢٨|$
$= ٢٨$ وحدة حجم

* $\vec{س} \times \vec{ص} = ...$

(أ) $\vec{و}$ (ب) .
(جـ) ١ (د) $\vec{ع}$

* إذا كان المتجهان (٢ ، ك ، -٣) ، (٤ ، ٦ ، -٦) متوازيان فإن ك = ...

(أ) ٦
(ب) ٣
(جـ) -٣
(د) ١

الحل

$\frac{ك}{٦} = \frac{٢}{٤}$

$ك = \frac{٦ \times ٢}{٤} = ٣$

* إذا كان $\vec{أ} = (-٣ ، ١ ، ٢)$ ، $\vec{ب} = (٣ ، ٤ ، -١)$ أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ضلعان متجاوران

الحل

$\vec{أ} \times \vec{ب} = (-٣ ، ١ ، ٢) \times (٣ ، ٤ ، -١)$

$$= \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ -٣ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ & -١ \end{vmatrix}$$

$= -٩\vec{س} + ٣\vec{ص} - ١٥\vec{ع}$

$\|\vec{أ} \times \vec{ب}\| = \sqrt{(-٩)^٢ + (٣)^٢ + (-١٥)^٢} = ٣\sqrt{٣٥}$

∴ مساحة متوازي الأضلاع $= ٣\sqrt{٣٥}$ وحدة مساحة

* إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (-٢ ، ٣ ، ١)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (١ ، ٢ ، ٤)$ أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$ ثم استنتج متجه الوحدة العمودي على المستوى الذي يحوي المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

الحل

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$= ١٠ \overrightarrow{\text{س}} + ٩ \overrightarrow{\text{ص}} - ٧ \overrightarrow{\text{ع}}$$

∴ متجه الوحدة العمودي على مستوى $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ $= \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\|}$

$$= \frac{(١٠ ، ٩ ، -٧)}{\sqrt{(١٠)^٢ + (٩)^٢ + (-٧)^٢}}$$

$$= \frac{١٠}{\sqrt{٢٣٠}} \overrightarrow{\text{س}} + \frac{٩}{\sqrt{٢٣٠}} \overrightarrow{\text{ص}} - \frac{٧}{\sqrt{٢٣٠}} \overrightarrow{\text{ع}}$$

١) إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} // \overrightarrow{\text{ب}}$ فإن $\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\| = \dots$

(أ) صفر (ب) ١

(ج) $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ (د) $\|\overrightarrow{\text{ب}}\|$

٢) المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{س س}'}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ع ع}'}$ يكونان مستوى الإحداثيات الذي معادلته

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠

(ج) ع = ٠ (د) ص = ٢

٣) معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٣ ، -١ ، ٢) هي ....

(أ) $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ = ٤$

(ب) $(\text{س} - ٣)^٢ + (\text{ص} + ١)^٢ + (\text{ع} - ٢)^٢ = ١٤$

(ج) $(\text{س} - ٣)^٢ + (\text{ص} + ١)^٢ + (\text{ع} - ٢)^٢ = \sqrt{١٤}$

(د) $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ = ١٤$

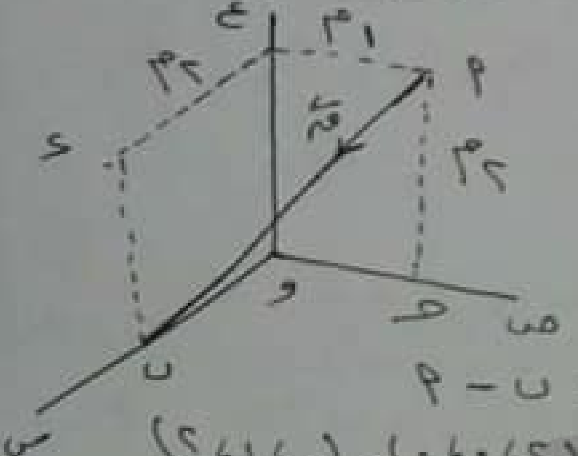
٤) مستويا الإحداثيات س ص ، ص ع يتقاطعان في .....

(أ) نقطة الأصل (ب) محور س

(ج) محور ص (د) محور ع

آخر كلام

* من الشكل المقابل إذا كانت قوة الشد في الخيط تساوي ٢١ نيوتن أوجد المركبات الجبرية للقوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ في اتجاهات محاور الإحداثيات



الحل

$\because \overrightarrow{\text{أب}} = \text{ب} - \text{أ}$

$= (٢ ، ٠ ، ٠) - (٠ ، ١ ، ٢)$

$= (٢ ، -١ ، -٢)$

$\|\overrightarrow{\text{أب}}\| = \sqrt{(٢)^٢ + (-١)^٢ + (-٢)^٢} = ٣$

$\therefore \overrightarrow{\text{ى}}_{\text{أب}} = \dfrac{\overrightarrow{\text{أب}}}{\|\overrightarrow{\text{أب}}\|}$

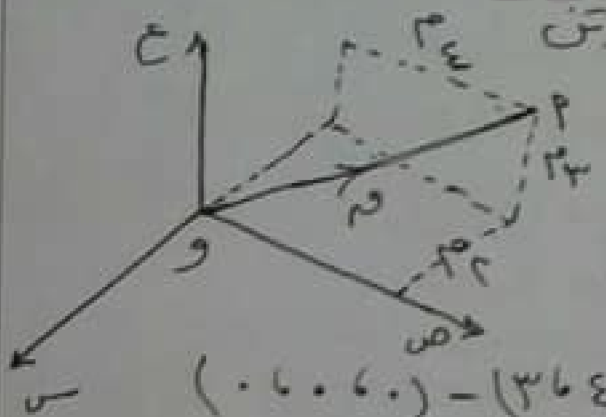
$= \dfrac{(٢ ، -١ ، -٢)}{٣}$

$= \left(\frac{٢}{٣} ، \frac{-١}{٣} ، \frac{-٢}{٣}\right)$

$\therefore \overrightarrow{\text{ق}} = ٢١ \left(\frac{٢}{٣} ، \frac{-١}{٣} ، \frac{-٢}{٣}\right)$

$= (١٤ ، ٧ ، -١٤)$

* أوجد مركبات القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ التي مقدارها $١٢\sqrt{٢٩}$ نيوتن



الحل

$\overrightarrow{\text{وأ}} = \text{أ} - \text{و}$

$= (-٢ ، ٤ ، ٣) - (٠ ، ٠ ، ٠)$

$= (-٢ ، ٤ ، ٣)$

$\|\overrightarrow{\text{وأ}}\| = \sqrt{(-٢)^٢ + (٤)^٢ + (٣)^٢} = \sqrt{٢٩}$

$\overrightarrow{\text{ى}}_{\text{وأ}} = \left(\frac{-٢}{\sqrt{٢٩}} ، \frac{٤}{\sqrt{٢٩}} ، \frac{٣}{\sqrt{٢٩}}\right)$

$\overrightarrow{\text{ق}} = ١٢\sqrt{٢٩} \left(\frac{-٢}{\sqrt{٢٩}} ، \frac{٤}{\sqrt{٢٩}} ، \frac{٣}{\sqrt{٢٩}}\right)$

$= (-٢٤ ، ٤٨ ، ٣٦)$

* مبدأ العد

ك ← الترتيب بدون إحلال
$^{ن}ل_{ر}$

⊙ عدد طرق وقوف ٤ سيارات في ساحة إنتظار بها ١٠ أماكن

$= {}^{١٠}ل_{٤} = ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧$

$= ٥٠٤٠$

ك ← الترتيب مع الإحلال
$ن^{ر}$

⊙ عدد طرق تكوين عدد مكون من رقمين من مجموعة الأرقام {١، ٢، ٣، ٤، ٥}

$= ٥^{٢} = ٢٥$

ك ← بدون ترتيب بدون إحلال
$^{ن}ق_{ر}$

⊙ عدد طرق اختيار فريق من ٥ أشخاص من بين ١٢ شخص

$= {}^{١٢}ق_{٥} = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥}$

$= ٧٩٢$

ك ← بدون ترتيب مع الإحلال
$^{ن+ر-١}ق_{ر}$

⊙ عدد طرق توزيع ٣ كرات متماثلة على ٤ صناديق = ...

$= {}^{٤+٣-١}ق_{٣} = {}^{٦}ق_{٣} = ٢٠$

ك ← و → × تذكر

ك ← أو → +

ث اشترك ١٢ لاعب في مسابقة، كم طريقة يمكن بها ترتيب المركز الأول والثاني والثالث

الحل

(أ) ١٢٣٠

(ب) ١٣٢٠ $\qquad {}^{١٢}ل_{٣} = ١٣٢٠$

(ج) ٢٣١٠

(د) ٣٢١٠

آخر كلام

ث يجيب طالب على ١٠ أسئلة من ١٣ سؤال بشرط أن يجيب على ٤ أسئلة على الأقل من الأسئلة الخمس الأولى كم طريقة يمكن أن يجيب بها الطالب

الحل

(أ) ١٤٠

(ب) ١٩٦ $\qquad {}^{٥}ق_{٤} \times {}^{٨}ق_{٦} + {}^{٥}ق_{٥} \times {}^{٨}ق_{٥}$

(ج) ٢٨٠ $\qquad = ١٩٦$

(د) ٣٤٦

ث عدد طرق اختيار حرفين مختلفين معاً أو ثلاثة أحرف مختلفة معاً من عناصر المجموعة {أ، ب، جـ، د، هـ، و}

(أ) ${}^{٦}ق_{٢} \times {}^{٦}ق_{٣}$ (ب) ${}^{٦}ل_{٢} \times {}^{٦}ل_{٣}$

(ج) ${}^{٦}ق_{٢} + {}^{٦}ق_{٣}$ (د) ${}^{٦}ل_{٢} + {}^{٦}ل_{٣}$

ك ← من مجموعة الأرقام {١، ٢، ٣، ٤، ٥} كم عدد يمكن تكوينه بحيث يكون أقل من ٤٠٠

⊙ أولاً مع الإحلال «التكرار»

الحل

$= ٥ + ٥ \times ٥ + ٣ \times ٥ \times ٥$

$= ١٠٥$ طريقة

⊙ ثانياً بدون إحلال «بدون تكرار»

$= ٥ + ٥ \times ٤ + ٣ \times ٤ \times ٣$

$= ٦١$ طريقة

• أوجد عدد طرق وقوف ٤ سيارات متجاورة في ساحة إنتظار بها ١٠ أماكن

ث إذا كان الوقوف في شكل دائرة

$= ن \times ر! = ١٠ \times ٤! = ٢٤٠$

ث إذا كان الوقوف في شكل صف

$= (ن - ر + ١) ر! = (١٠ - ٤ + ١) ٤!$

$= ١٦٨$

* الأعداد المركبة

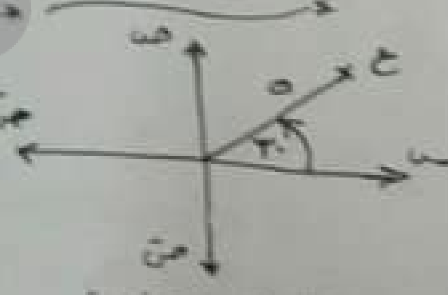
- (٣-٢ت)(٥+ت) = ١٥+٣ت-١٠ت-٢ت²
  = ١٥-٧ت + ٢
  = ١٧ - ٧ت
- (٣-٢ت)(٣+٢ت) = ٩+٤ = ١٣ مترافقان
- (٢-ت)(٢+ت) = ٤+١ = ٥ مترافقان

- ع = س + ت ص صورة جبرية
- مقياس ع = |ع|
  = ل = √(س² + ص²)
- السعة الأساسية θ

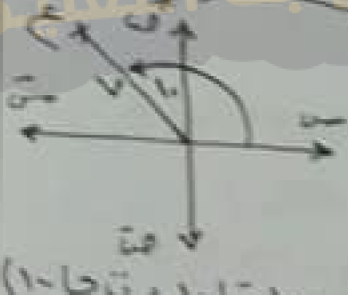
س	ص		
+	+	①	θ = ظا⁻¹(ص/س)
−	+	②	θ = π + ظا⁻¹(ص/س)
−	−	③	θ = −π + ظا⁻¹(ص/س)
+	−	④	θ = ظا⁻¹(ص/س)

- θ ∈]−π ، π]
- يمكن θ = θ ± ٣٦٠°

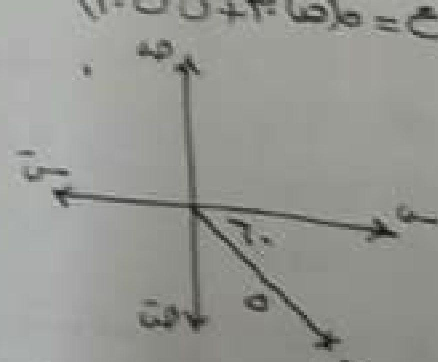
- الصورة المثلثية
  ع = ل (جتا θ + ت جا θ)
- الصورة الأسية
  ع = ل هـ^(θت)



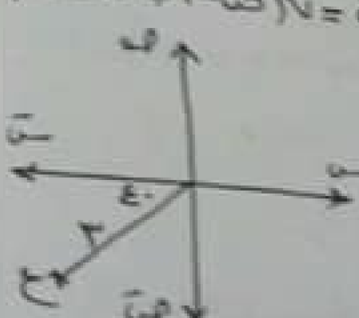
ع = ٥(جتا٣٠ + ت جا٣٠)



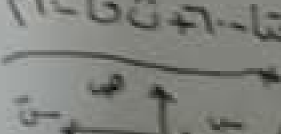
ع = ٧(جتا١٠٠ + ت جا١٠٠)



ع = ٥(جتا−٦٠ + ت جا−٦٠)

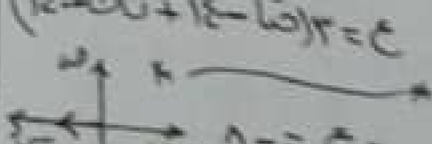


ع = ٣(جتا−١٤٠ + ت جا−١٤٠)



* ع₁ = ٨

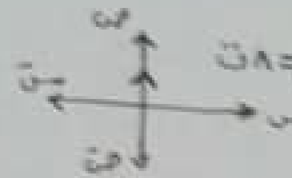
ع₁ = ٨(جتا٠ + ت جا٠)



* ع₂ = −٨

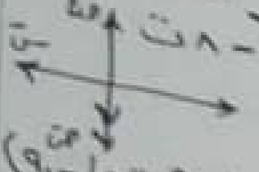
ع₂ = ٨(جتا١٨٠ + ت جا١٨٠)

آخر كلام



* ع₃ = ٨ت

ع₃ = ٨(جتا٩٠ + ت جا٩٠)



* ع₄ = −٨ت

ع₄ = ٨(جتا−٩٠ + ت جا−٩٠)

تعديل الصورة المثلثية

في الإشارة بس

س (جتا θ)	ص (جا θ)		
−	+	②	١٨٠ − θ
−	−	③	١٨٠ + θ
+	−	④	٣٦٠ − θ

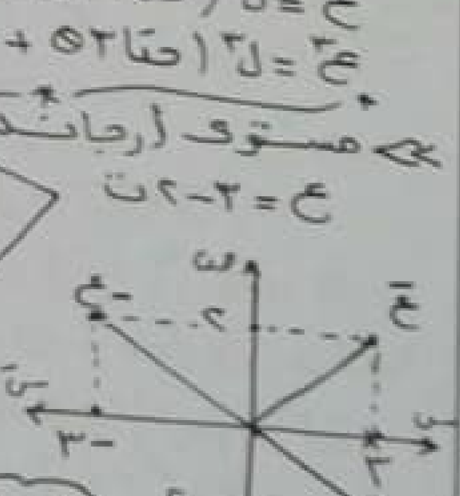
في الإشارة والدالة

س (جا θ)	ص (جتا θ)		
+	+	①	٩٠ − θ
−	+	②	٩٠ + θ
−	−	③	٢٧٠ − θ
+	−	④	٢٧٠ + θ

- إذا كان
  ع₁ = ل₁ (جتا θ₁ + ت جا θ₁)
  ع₂ = ل₂ (جتا θ₂ + ت جا θ₂)
  فإن ع₁ ع₂ = ل₁ ل₂ (جتا(θ₁+θ₂) + ت جا(θ₁+θ₂))
  ع₁/ع₂ = ل₁/ل₂ (جتا(θ₁−θ₂) + ت جا(θ₁−θ₂))

- إذا كان ع = ل(جتا θ + ت جا θ)
  ع⁵ = ل⁵ (جتا ٥θ + ت جا ٥θ)
  ع⁶ = ل⁶ (جتا ٦θ + ت جا ٦θ)
  ع³ = ل³ (جتا ٣θ + ت جا ٣θ)

- مستوى أرجاند
  ع = ٣ − ٢ت
  ع̄ = ٣ + ٢ت
  العدد ومرافقه متماثل حول محور س
  −ع̄ = −٣ + ٢ت
  العدد ومعكوسه الجمعي متماثل حول نقطة الأصل



- ع → θ
- ع̄ → −θ
- 1/ع → −θ
- −ع = −١٨٠ + θ

آخر كلام

* بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^2 \\ 1 & \text{ب} & \text{ب}^2 \\ 1 & \text{جـ} & \text{جـ}^2 \end{vmatrix} = (\text{أ}-\text{ب})(\text{ب}-\text{جـ})(\text{جـ}-\text{أ})$$

الحل

$\text{ص}_1 \times -1 + \text{ص}_2$ ، $\text{ص}_1 \times -1 + \text{ص}_3$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^2 \\ \cdot & \text{ب}-\text{أ} & \text{ب}^2-\text{أ}^2 \\ \cdot & \text{جـ}-\text{أ} & \text{جـ}^2-\text{أ}^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^2 \\ \cdot & \text{ب}-\text{أ} & (\text{ب}-\text{أ})(\text{ب}+\text{أ}) \\ \cdot & \text{جـ}-\text{أ} & (\text{جـ}-\text{أ})(\text{جـ}+\text{أ}) \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ب}-\text{أ})(\text{جـ}-\text{أ}) \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^2 \\ \cdot & 1 & \text{ب}+\text{أ} \\ \cdot & 1 & \text{جـ}+\text{أ} \end{vmatrix}$$

$\text{ص}_2 \times -1 + \text{ص}_3$

$$= (\text{ب}-\text{أ})(\text{جـ}-\text{أ}) \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ}^2 \\ \cdot & 1 & \text{ب}+\text{أ} \\ \cdot & \cdot & \text{جـ}-\text{ب} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ب}-\text{أ})(\text{جـ}-\text{أ})(\text{جـ}-\text{ب})$$

$$= (\text{أ}-\text{ب})(\text{ب}-\text{جـ})(\text{جـ}-\text{أ})$$

————*

① $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{جـ} & \text{جـ} & \text{جـ} \end{vmatrix} = \text{.......}$

● صفر ⓑ أ جـ ⓒ ب جـ ⓓ أ ب جـ

② إذا كان $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = 12$

فإن $\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{و} & \text{د} & \text{هـ} \\ \text{جـ} & \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix} = \text{.......}$

● −12 ⓑ −6 ⓒ 6 ⓓ 12

الحل

$$= -\begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{و} & \text{د} & \text{هـ} \\ \text{ع} & \text{س} & \text{ص} \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{جـ} & \text{ب} \\ \text{د} & \text{و} & \text{هـ} \\ \text{س} & \text{ع} & \text{ص} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = -12$$

* بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{أ}-\text{ب}-\text{جـ} & 2\text{ب} & 2\text{جـ} \\ 2\text{أ} & \text{ب}-\text{جـ}-\text{أ} & 2\text{جـ} \\ 2\text{أ} & 2\text{ب} & \text{جـ}-\text{أ}-\text{ب} \end{vmatrix} = (\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ})^3$$

الحل

بجمع عناصر $\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3$

$$= \begin{vmatrix} \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} & 2\text{ب} & 2\text{جـ} \\ \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} & \text{ب}-\text{جـ}-\text{أ} & 2\text{جـ} \\ \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} & 2\text{ب} & \text{جـ}-\text{أ}-\text{ب} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}) \begin{vmatrix} 1 & 2\text{ب} & 2\text{جـ} \\ 1 & \text{ب}-\text{جـ}-\text{أ} & 2\text{جـ} \\ 1 & 2\text{ب} & \text{جـ}-\text{أ}-\text{ب} \end{vmatrix}$$

$\text{ص}_1 \times -1 + \text{ص}_2$ ، $\text{ص}_1 \times -1 + \text{ص}_3$

$$= (\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}) \begin{vmatrix} 1 & 2\text{ب} & 2\text{جـ} \\ \cdot & -\text{ب}-\text{جـ}-\text{أ} & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\text{جـ}-\text{أ}-\text{ب} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ}) \times (-\text{ب}-\text{جـ}-\text{أ}) \times (-\text{جـ}-\text{أ}-\text{ب})$$

$$= (\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ})(\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ})(\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ})$$

$$= (\text{أ}+\text{ب}+\text{جـ})^3$$

————*

* بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{س} & \text{ص} \\ \text{س} & \text{س}^2+1 & \text{س ص} \\ \text{ص} & \text{س ص} & \text{ص}^2+1 \end{vmatrix} = 1$$

الحل

$\text{ع}_1 \times -\text{س} + \text{ع}_2$ ، $\text{ع}_1 \times -\text{ص} + \text{ع}_3$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \text{س} & 1 & \cdot \\ \text{ص} & \cdot & 1 \end{vmatrix} = 1$$

————*

$$\begin{vmatrix} \text{أب} & \text{أ} & \frac{1}{\text{جـ}} \\ \text{أجـ} & \text{جـ} & \frac{1}{\text{ب}} \\ \text{ب جـ} & \text{ب} & \frac{1}{\text{أ}} \end{vmatrix} = \text{.......}$$

$\times \frac{\text{جـ}}{\text{جـ}}$ ، $\times \frac{\text{ب}}{\text{ب}}$ ، $\times \frac{\text{أ}}{\text{أ}}$

● صفر ⓑ 1 ⓒ 2 ⓓ 5

$$\frac{1}{\text{أبجـ}} \begin{vmatrix} \text{أبجـ} & \text{أجـ} & 1 \\ \text{أبجـ} & \text{ب جـ} & 1 \\ \text{أبجـ} & \text{أب} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\text{أبجـ}}{\text{أبجـ}} \begin{vmatrix} 1 & \text{أجـ} & 1 \\ 1 & \text{ب جـ} & 1 \\ 1 & \text{أب} & 1 \end{vmatrix}$$

$\because \text{ع}_1 = \text{ع}_3$

$= \text{صفر}$

١) إذا كانت $ع = 2\sqrt{3}(جا 30 + ت\ جتا 30)$ فإن السعة الأساسية للعدد ع تساوي ....

ⓐ $30°$ ● $60°$ ⓒ $90°$ ⓓ $120°$

الحل

$ع = 2\sqrt{3}(جتا(90-30) + ت\ جا(90-30))$

$= 2\sqrt{3}(جتا 60 + ت\ جا 60)$

٢) إذا كانت $ع = (1 + \sqrt{3}ت)^ن$ وكان $|ع| = 8$ فإن السعة الأساسية ع تساوي ....

ⓐ $\frac{\pi}{6}$ ⓑ $\frac{\pi}{3}$ ⓒ $\frac{2\pi}{3}$ ● π

الحل

$س = 1$ ، $ص = \sqrt{3}$

$ل = \sqrt{1+3} = 2$

$هـ = ظا^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{1}) = 60°$

$ع = (2(جتا 60 + ت\ جا 60))^ن$

$= 2^ن(جتا 60ن + ت\ جا 60ن)$

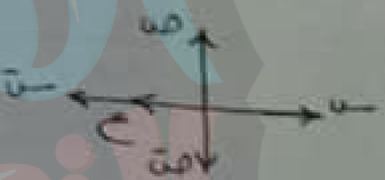
$\because 2^ن = 8$ ، $2^ن = 2^3$ $\therefore ن = 3$

السعة $= 60ن = 60 \times 3$

$= 180°$

٣) سعة العدد المركب $ع = -3$ تساوي ....

ⓐ صفر ⓑ $90°$ ● $180°$ ⓓ $270°$



٤) إذا كان $ع = -1 + 2\sqrt{2}ت$ فإن $|ع| = ...$

ⓐ $-1 - 2\sqrt{2}ت$ ⓑ $\sqrt{3}$ ● 3 ⓓ -3

٥) إذا كان $ع_1 = ل_1(جتا هـ_1 + ت\ جا هـ_1)$ ، $ع_2 = ل_2(جتا هـ_2 + ت\ جا هـ_2)$ وكان $هـ_1 + هـ_2 = \pi$ فإن $ع_1 ع_2 = ...$

ⓐ $ل_1 ل_2$ ● $-ل_1 ل_2$ ⓒ $ل_1 ل_2 ت$ ⓓ $-ل_1 ل_2 ت$

الحل

$ع_1 ع_2 = ل_1 ل_2(جتا 180 + ت\ جا 180)$

$= ل_1 ل_2(-1 + 0)$

$= -ل_1 ل_2$

٦) إذا كان $ع = -1 - ت$ فإن الصورة الأسية للعدد ع هي ....

ⓐ $هـ^{\frac{3\pi}{4}ت}$ ⓑ $هـ^{\frac{5\pi}{4}ت}$ ● $\sqrt{2}\ هـ^{\frac{-3\pi}{4}ت}$ ⓓ $\sqrt{2}\ هـ^{225ت}$

الحل

$س = -1$ ، $ص = -1$

$ل = \sqrt{2}$

$هـ = -\pi + ظا^{-1}(\frac{1}{1})$

$= -135$

آخر كلام

* إذا كان $ع_1 = 2(جتا 10° + ت\ جا 10°)$ ، $ع_2 = 3(جتا 40° + ت\ جا 40°)$ أوجد العدد $ع_1^4 ع_2^2$ على الصورة $س + ت\ ص$

الحل

$ع_1^4 = 2^4(جتا 4\times10 + ت\ جا 4\times10)$

$= 16(جتا 40 + ت\ جا 40)$

$ع_2^2 = 3^2(جتا 40\times2 + ت\ جا 40\times2)$

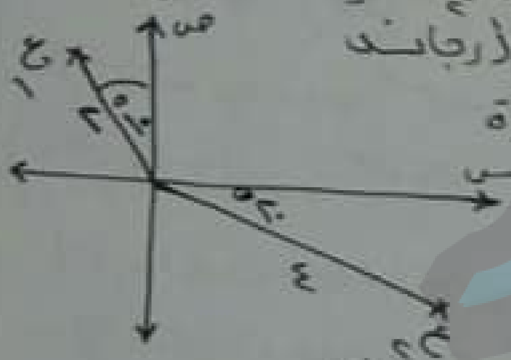
$= 9(جتا 80 + ت\ جا 80)$

$ع_1^4 ع_2^2 = 144(جتا(40+80) + ت\ جا(40+80))$

$= 144(جتا 120 + ت\ جا 120)$

$= -72 + 72\sqrt{3}ت$

* إذا كان $ع_1$ ، $ع_2$ عددين مركبين ممثلين في مستوى أرجاند أوجد في الصورة $س + ص ت$ العدد $\frac{ع_2}{ع_1}$



الحل

$ع_1 = 2(جتا 100 + ت\ جا 100)$

$ع_2 = 4(جتا -20 + ت\ جا -20)$

$\frac{ع_2}{ع_1} = \frac{4}{2}(جتا(-20-100) + ت\ جا(-20-100))$

$= 2(جتا -120 + ت\ جا -120)$

$= -1 - \sqrt{3}ت$

* ضع العدد $1 - ت$ على الصورة المثلثية ثم أوجد $(1-ت)^8$

الحل

$س = 1$ ، $ص = -1$

$ل = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$هـ = ظا^{-1}(\frac{-1}{1}) = -45°$

$1 - ت = \sqrt{2}(جتا -45 + ت\ جا -45)$

$(1-ت)^8 = (\sqrt{2})^8(جتا -45\times8 + ت\ جا -45\times8)$

$= (\sqrt{2})^8(جتا 0 + ت\ جا 0)$

$= 16$

آخر كلام

* بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} س & أ & أ \\ أ & س & أ \\ أ & أ & س \end{vmatrix} = (س+2أ)(س-أ)^2$$

الحل

$ع_1 + ع_2 + ع_3$

$$= \begin{vmatrix} س+2أ & أ & أ \\ س+2أ & س & أ \\ س+2أ & أ & س \end{vmatrix}$$

$$= (س+2أ)\begin{vmatrix} 1 & أ & أ \\ 1 & س & أ \\ 1 & أ & س \end{vmatrix}$$

$ص_2 \times -1 + ص_1$ ، $ص_3 \times -1 + ص_1$

$$= (س+2أ)\begin{vmatrix} 1 & أ & أ \\ 0 & س-أ & 0 \\ 0 & 0 & س-أ \end{vmatrix}$$

$$= (س+2أ)(س-أ)^2$$

* بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} س & -ص & -ع \\ ص & 1 & 0 \\ ع & 0 & 1 \end{vmatrix} = س+ص^2+ع^2$$

الحل

$ع_2 \times -ص + ع_1$

$$= \begin{vmatrix} س+ص^2 & -ص & -ع \\ 0 & 1 & 0 \\ ع & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$ع_3 \times -ع + ع_1$

$$= \begin{vmatrix} س+ص^2+ع^2 & -ص & -ع \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= س+ص^2+ع^2$$

* مجموع معاملات الحدود في مفكوك $(1+س)^5$ ؟

(أ) صفر (ب) 5 (ج) 32 (د) $\underline{|5}$

* إذا كان

$$\begin{vmatrix} أ^3-1 & أ^2 & أ \\ ب^3-1 & ب^2 & ب \\ ج^3-1 & ج^2 & ج \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

حيث $أ \neq ب \neq ج$

أثبت أن $أبج = 1$

الحل

$$= \begin{vmatrix} أ^3 & أ^2 & أ \\ ب^3 & ب^2 & ب \\ ج^3 & ج^2 & ج \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & أ^2 & أ \\ -1 & ب^2 & ب \\ -1 & ج^2 & ج \end{vmatrix}$$

$$= أبج\begin{vmatrix} أ^2 & أ & 1 \\ ب^2 & ب & 1 \\ ج^2 & ج & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} أ^2 & أ & 1 \\ ب^2 & ب & 1 \\ ج^2 & ج & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (أبج-1)\begin{vmatrix} أ^2 & أ & 1 \\ ب^2 & ب & 1 \\ ج^2 & ج & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$ص_3 \times -1 + ص_1$ ، $ص_3 \times -1 + ص_2$

$$= (أبج-1)\begin{vmatrix} أ^2-ج^2 & أ-ج & 0 \\ ب^2-ج^2 & ب-ج & 0 \\ ج^2 & ج & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$= (أبج-1)(أ-ج)(ب-ج)\begin{vmatrix} أ+ج & 1 & 0 \\ ب+ج & 1 & 0 \\ ج^2 & ج & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$ص_2 \times -1 + ص_1$

$$= (أبج-1)(أ-ج)(ب-ج)\begin{vmatrix} أ-ب & 0 & 0 \\ ب+ج & 1 & 0 \\ ج^2 & ج & 1 \end{vmatrix}$$

$$(أبج-1)(أ-ج)(ب-ج)(أ-ب) = 0$$

$\therefore أبج = 1$ ، $أ \neq ج \neq ب$

* في Δ أبج يكون

$$\begin{vmatrix} \bar{أ} & \bar{ب} & \bar{ج} \\ 5 & 7 & 8 \\ جاأ & جاب & جاج \end{vmatrix} = \ldots\ldots$$

(أ) $5\bar{أ}$ (ب) $7\bar{ب}$ (ج) $8\bar{ج}$ (د) صفر

الحل

$\because \dfrac{\bar{أ}}{جاأ} = \dfrac{\bar{ب}}{جاب} = \dfrac{\bar{ج}}{جاج} = ل$

$\therefore \bar{أ} = ل\,جاأ$ ، $\bar{ب} = ل\,جاب$ ، $\bar{ج} = ل\,جاج$

$$\begin{vmatrix} ل\,جاأ & ل\,جاب & ل\,جاج \\ 5 & 7 & 8 \\ جاأ & جاب & جاج \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

* إذا كانت المعادلتين
$2س + ص = 1$ ، $4س + 2ص = ك$
عدد لا نهائي من الحلول فإن ك = ...

(أ) صفر
(ب) 1
● 2
(د) 3

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & ك \end{array}\right)$$

$ر(أ^*) = 1$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & ك \end{vmatrix} = 0$ ∴ $ك = 2$

* إذا كان $^{ن+1}ل_3 : {}^{ن}ق_4 = 2 : 3$
فإن ن = ...

(أ) 2
(ب) 3
(ج) 5
● 11

الحل

$$\frac{\lfloor ن+1}{\lfloor ن-2} \times \frac{\lfloor 4 \lfloor ن-4}{\lfloor ن} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{24(ن+1)}{(ن-2)(ن-3)} = \frac{2}{3}$$

$ن^2 - 5ن + 6 = 6ن + 6$

$ن^2 - 11ن = 0$

$ن(ن - 11) = 0$

$ن = 0$ ، $ن = 11$

* إذا كان $\vec{أ} = (-2، 4، 6)$ ، $\vec{ب} = (0، ك، 3)$ حيث $ك \in ص^+$
وكان $\|\vec{أب}\| = 7$ فإن ك = ...

● 10
(ب) 8
(ج) 6
(د) 4

الحل

$\sqrt{(0+2)^2 + (ك-4)^2 + (3-6)^2} = 7$

$4 + (ك-4)^2 + 9 = 49$

$(ك-4)^2 = 36$

$ك - 4 = 6$ ، $ك - 4 = -6$

$ك = 10$ ، $ك = -2$

* إذا كانت
$س^2 + ص^2 + ع^2 - 4ك س + 4ص - 8ع + 2ك = 0$
معادلة كرة طول نصف قطرها $2\sqrt{5}$
أوجد ك

الحل

$م = (2ك ، -2 ، 4)$

$\sqrt{4ك^2 + 4 + 16 - 2ك} = 2\sqrt{5}$

$4ك^2 - 2ك + 20 = 20$

$4ك^2 - 2ك = 0$

$ك(4ك - 2) = 0$

$ك = 0$ ، $ك = \frac{1}{2}$

* أحسب رتبة المصفوفة
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$
ومن ثم أثبت أن مجموعة حل المعادلات
$2س - ص - 3ع = 2$ ، $س + 2ص + ع = 1$
، $3س - 5ص + 2ع = 13$ لها حل وحيد وأوجد ذلك الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة

الحل

$$\because |أ| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 2 \times 9 + 1 \times -1 - 3 \times -11$

$= 50 \neq$ صفر

∴ $ر(أ) = 3$

$$أ^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 & 13 \end{array}\right)$$

∵ $ر(أ) = ر(أ^*) = 3 =$ عدد المجاهيل

∴ المعادلات لها حل وحيد

$$أ^{-1} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 9 & 17 & 5 \\ 1 & 13 & -5 \\ -11 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 9 & 17 & 5 \\ 1 & 13 & -5 \\ -11 & 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

∴ $س = 2$ ، $ص = -1$ ، $ع = 1$

* طول العمود المرسوم من النقطة أ(3، 0، 5)
على المستوى $2س + \sqrt{5}ص + 4ع - 6 = 0$

● 4
(ب) 5
(ج) 6
(د) 7

الحل

$$ل = \frac{|2 \times 3 + 0 + 4 \times 5 - 6|}{\sqrt{4 + 5 + 16}}$$

$= \frac{20}{5} = 4$

* جيوب تمام الاتجاه للمتجه (2، -4، 4)

(أ) (2، -4، 4)
(ب) (1، -2، 2)
● $(\frac{1}{3} ، \frac{-2}{3} ، \frac{2}{3})$
(د) $(\frac{1}{3} ، \frac{2}{3} ، \frac{2}{3})$

* ملاحظة
المصفوفة المنفردة "الشاذة"
هي المصفوفة التي ليس لها معكوس ضربي
أي Δ = صفر

١- المصفوفة المنفردة من بين الآتي

(أ) $\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ ● $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٦ & -٤ \end{pmatrix}$

(ب) $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -٣ & ٦ \end{pmatrix}$

٢- قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} س & ١ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$ منفردة هي .....

● -٢ (ج) $-\frac{1}{2}$

(ب) $\frac{1}{2}$ (د) ٢

٣- جميع المصفوفات الآتية لها معكوس ضربي ما عدا المصفوفة

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ١ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ٠ & ٤ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$

● $\begin{pmatrix} ٢ & -٣ \\ -٤ & ٦ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

٤- إذا كانت أ مصفوفة غير منفردة فإن $(أب)^{-1}$ تساوي .....

(أ) -أب (ج) $أ^{-1} ب^{-1}$

● $ب^{-1} أ^{-1}$ (د) $(ب أ)^{-1}$

* أوجد رتبة للمصفوفات الآتية

١) أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ٤ \\ ٢ & -٣ & ٦ \end{pmatrix}$

الحل

المصفوفة على النظم ٢×٣

∴ رتبة المصفوفة ٢ أو ١

$\begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -٣ \end{vmatrix} = -٥ \neq$ صفر

∴ ر(أ) = ٢

آخر كلام

٢) ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٤ & ٥ \\ ٣ & ١٢ & ١٥ \end{pmatrix}$

الحل

المصفوفة ب على النظم ٢×٣

∴ رتبة المصفوفة ٢ أو ١

$\begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٣ & ١٢ \end{vmatrix}$ = صفر $\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ١٢ & ١٥ \end{vmatrix}$ = صفر

$\begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & ١٥ \end{vmatrix}$ = صفر

جميع المحددات الصغرى = ٠

∴ ر(أ) = ١

٣) أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ٣ \\ ١ & ٥ & -١ \\ ٢ & ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

الحل

|أ| = $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٣ \\ ١ & ٥ & -١ \\ ٢ & ٣ & ٤ \end{vmatrix}$

= ٢(٢٣) + ٣(-٧) = ٢٥

∴ قيمة المحدد ≠ صفر

∴ ر(أ) = ٣

٤) ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ -١ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$

الحل

|ب| = $\begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ -١ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$

= ٣ × -٧ - ١ × ٧ + ٤ × ٧

= صفر

∴ ر(ب) = ٢

٥- رتبة المصفوفة $\boxed{}$ من النظم ٣×٣

● صفر (ج) ١

(ب) ٢ (د) ٣

آخر كلام

• أ ب حـ د متوازي أضلاع وكان $\overrightarrow{أب} = (٢ ، ٢ ، -١)$ ، $\overrightarrow{أد} = (-١ ، ٢ ، -٣)$

فإن مساحة متوازي الأضلاع = ... سم²

(أ) ٦

(ب) $٣\sqrt{٧}$

(ج) $٣\sqrt{١١}$

(د) $\sqrt{١٠١}$

الحل

$$\begin{vmatrix} \hat{س} & \hat{ص} & \hat{ع} \\ ٢ & ٢ & -١ \\ -١ & ٢ & -٣ \end{vmatrix}$$

$= -٤\hat{س} + ٧\hat{ص} + ٦\hat{ع}$

$\therefore \sqrt{١٦ + ٤٩ + ٣٦}$

• إذا كان $ع_١ = (حا \frac{\pi}{٩} + ت حتا \frac{\pi}{٩})^٩$

• $ع_٢ = (حتا \frac{\pi}{٢} + ت حا \frac{\pi}{٢})^٢$ وكان $ع = \frac{ع_١}{ع_٢}$

أوجد في الصورة الأسية الجذور التربيعية للعدد ع

الحل

$ع_١ = \left(حتا(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٩}) + ت حا(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٩})\right)^٩$

$= \left(حتا \frac{٧\pi}{١٨} + ت حا \frac{٧\pi}{١٨}\right)^٩$

$= حتا \frac{٦٣\pi}{١٨} + ت حا \frac{٦٣\pi}{١٨}$

$ع_١ = حتا \frac{-\pi}{١٨} + ت حا \frac{-\pi}{١٨}$

$ع_٢ = حتا \frac{٤\pi}{٢} + ت حا \frac{٤\pi}{٢}$

$ع_٢ = حتا ٠ + ت حا ٠$

$ع = \frac{ع_١}{ع_٢}$

$= حتا \frac{-\pi}{١٨} + ت حا \frac{-\pi}{١٨}$

$= هـ^{\frac{-\pi}{١٨} ت}$

$\sqrt{ع} = هـ^{\frac{\frac{-\pi}{١٨} + ٣٦٠ ر}{٢} ت}$

ر = ٠ $\sqrt{ع} = هـ^{\frac{-\pi}{٣٦} ت}$

ر = ١ $\sqrt{ع} = هـ^{\frac{٣٥\pi}{٣٦} ت}$

• إذا كان المستقيم س = ٣ص = أع يوازي المستوى س + ٣ص + ٢ع + ٤ = ٠

فإن أ = ...

الحل

$\overrightarrow{هـ} = (١ ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{أ})$

$\overrightarrow{ن} = (١ ، ٣ ، ٢)$

(أ) ٣

(ب) ٢

شرط التعامد

(ج) ١

$١ + ١ + \frac{٢}{أ} = ٠$

(د) −١

$\frac{٢}{أ} = \frac{-٢}{١}$ أ = −١

• أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ١ ، −٣) ويوازي المستقيم

$$\frac{س-١}{٥} = \frac{ص+٣}{٢} = \frac{١-ع}{٣}$$

الحل

$\overrightarrow{هـ} = (٥ ، ٢ ، -٣)$

المعادلة المتجهة

$\overrightarrow{ر} = (٢ ، ١ ، -٣) + ك(٥ ، ٢ ، -٣)$

المعادلات البارامترية

س = ٢ + ٥ك ، ص = ١ + ٢ك

، ع = −٣ − ٣ك

المعادلات الإحداثية

$$\frac{س-٢}{٥} = \frac{ص-١}{٢} = \frac{ع+٣}{-٣}$$

• كرة مركزها (١ ، ٢ ، ١) تمس سطح المستوى س + ص + ع = ١ أوجد معادلة الكرة

الحل

$$نق = \frac{|١ + ٢ + ١ - ١|}{\sqrt{(١)^٢ + (١)^٢ + (١)^٢}}$$

$= \sqrt{٣}$

معادلة الكرة

$(س-١)^٢ + (ص-٢)^٢ + (ع-١)^٢ = ٣$

إذا كان $^{١٠}ق_{ر+١} : {}^{١٠}ق_{ر-١} = ٢١ : ١٠$

فإن ر = ...

(أ) ٣

(ب) ٤

(ج) ٥

(د) ٦

$$\frac{^{١٠}ق_{ر+١}}{^{١٠}ق_{ر}} \div \frac{^{١٠}ق_{ر-١}}{^{١٠}ق_{ر}} = \frac{٢١}{١٠}$$

$$\frac{^{١٠}ق_{ر+١}}{^{١٠}ق_{ر}} \times \frac{^{١٠}ق_{ر}}{^{١٠}ق_{ر-١}} = \frac{٢١}{١٠}$$

$$\frac{١٠ - (ر+١) + ١}{ر+١} \times \frac{١٠ - ر + ١}{ر} = \frac{٢١}{١٠}$$

$$\frac{١٠ - ر}{ر+١} \times \frac{١١ - ر}{ر} = \frac{٢١}{١٠}$$

$$\frac{١١٠ - ١٠ر - ١١ر + ر^٢}{ر^٢ + ر} = \frac{٢١}{١٠}$$

$٢١ر^٢ + ٢١ر = ١١٠٠ - ٢١٠ر + ١٠ر^٢$

$١١ر^٢ + ٢٣١ر - ١١٠٠ = ٠$

ر = ٤   ر = −٢٥

* أوجد المعكوس الضربي للمصفوفة

① $\begin{pmatrix}٤ & ٢\\ ٣ & ١\end{pmatrix} = \text{أ}$

الحل

* محدد المصفوفة $٢ = \begin{vmatrix}٤ & ٢\\ ٣ & ١\end{vmatrix} = \Delta$

$$\begin{pmatrix}٤- & ٣\\ ٢ & ١\end{pmatrix}\frac{١}{٢} = {}^{١-}\text{أ} \therefore$$

لاحظ

نغير إشارة

نبدل

② $\begin{pmatrix}٣ & ١- & ٢\\ ٥ & ٣ & ٤\\ ٠ & ٤ & ١\end{pmatrix} = \text{أ}$

الحل

* محدد المصفوفة

$$\begin{vmatrix}\overset{+}{٣} & \overset{-}{١} & \overset{+}{٢}\\ ٥ & ٣ & ٤\\ ٠ & ٤ & ١\end{vmatrix} = |\text{أ}|$$

$$(١٣)٣ + (٥-)١ + (٢٠-)٢ =$$

$$٦- =$$

* مصفوفة العوامل المترافقة

$$\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}٣ & ٤\\ ٤ & ١\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}٥ & ٤\\ ٠ & ١\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}٥ & ٣\\ ٠ & ٤\end{vmatrix}+\\ \begin{vmatrix}١- & ٢\\ ٤ & ١\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}٣ & ٢\\ ٠ & ١\end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix}٣ & ١-\\ ٠ & ٤\end{vmatrix}-\\ \begin{vmatrix}١- & ٢\\ ٣ & ٤\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}٣ & ٢\\ ٥ & ٤\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}٣ & ١-\\ ٥ & ٣\end{vmatrix}+\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}١٣ & ٥ & ٢٠-\\ ٩- & ٣- & ١٢\\ ١٠ & ٢ & ١٤-\end{pmatrix} =$$

* المصفوفة الملحقة

$$\begin{pmatrix}١٤- & ١٢ & ٢٠-\\ ٢ & ٣- & ٥\\ ١٠ & ٩- & ١٣\end{pmatrix} = {}^{\text{مل}}\text{أ}$$

$${}^{\text{مل}}\text{أ} \times \frac{١}{|\text{أ}|} = {}^{١-}\text{أ}$$

$$\begin{pmatrix}١٤- & ١٢ & ٢٠-\\ ٢ & ٣- & ٥\\ ١٠ & ٩- & ١٣\end{pmatrix}\frac{١}{٦-} =$$

* حل المعادلات الآتية باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة

٤س + ص = ٠ ، س + ٢ع = ١٥ ، ص − ٧ع = ٠

الحل

$$\begin{pmatrix}٠ & ١ & ٤\\ ٢ & ٠ & ١\\ ٧ & ١ & ٠\end{pmatrix} = \text{أ}$$

$$(٧-)\ -(٢-)٤ = \begin{vmatrix}٠ & ١ & ٤\\ ٢ & ٠ & ١\\ ٧ & ١ & ٠\end{vmatrix} = |\text{أ}|$$

$$١- =$$

مصفوفة العوامل المترافقة

$$\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}٠ & ١\\ ١ & ٠\end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix}٢ & ١\\ ٧- & ٠\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}٢ & ٠\\ ٧- & ١\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}١ & ٤\\ ١ & ٠\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}٠ & ٤\\ ٧- & ٠\end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix}٠ & ١\\ ٧- & ١\end{vmatrix} -\\ \begin{vmatrix}١ & ٤\\ ٠ & ١\end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix}٠ & ٤\\ ٢ & ١\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}٠ & ١\\ ٢ & ٠\end{vmatrix}\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}١ & ٧ & ٢-\\ ٤- & ٢٨- & ٧\\ ١- & ٨- & ٢\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}٢ & ٧ & ٢-\\ ٨- & ٢٨- & ٧\\ ١- & ٤- & ١\end{pmatrix} = {}^{\text{مل}}\text{أ}$$

$${}^{\text{مل}}\text{أ} \times \frac{١}{|\text{أ}|} = {}^{١-}\text{أ}$$

$$\begin{pmatrix}٢ & ٧ & ٢-\\ ٨- & ٢٨- & ٧\\ ١- & ٤- & ١\end{pmatrix}\frac{١}{١-} =$$

$$\text{ب}\ {}^{١-}\text{أ} = \text{س} \therefore$$

$$\begin{pmatrix}٠\\ ١٥\\ ٠\end{pmatrix}\begin{pmatrix}٢ & ٧ & ٢-\\ ٨- & ٢٨- & ٧\\ ١- & ٤- & ١\end{pmatrix}\frac{١}{١-} = \begin{pmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\\ \text{ع}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}١٠٥-\\ ٤٨٠\\ ٦٠\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\\ \text{ع}\end{pmatrix}$$

∴ س = −١٠٥ ، ص = ٤٨٠

ع = ٦٠

∴ م.ح = {(−١٠٥ ، ٤٨٠ ، ٦٠)}

* أوجد أكبر حد في مفكوك $(٣ + ٢س)^٦$ عند س = ١

الحل

نفرض أن $ح_{ر+١}$ هو أكبر حد

⊛ ∴ $\frac{ح_{ر+١}}{ح_ر} \geqslant ١$

$\frac{٦ - ر + ١}{ر} \times \frac{٢}{٣} \geqslant ١$

$\frac{٢(٧ - ر)}{٣ر} \geqslant ١$

$١٤ - ٢ر \geqslant ٣ر$

$٥ر \leqslant ١٤$

$ر \leqslant ٢\frac{٤}{٥}$ ⟵ *

∴ ر = ٢ أو ١ أو صفر

∴ $ح_٣ > ح_٢ > ح_١$

⊛ $\frac{ح_{ر+٢}}{ح_{ر+١}} \leqslant ١$

$\frac{٦ - (ر + ١) + ١}{ر + ١} \times \frac{٢}{٣} \leqslant ١$

$\frac{٢(٦ - ر)}{٣(ر + ١)} \leqslant ١$

$١٢ - ٢ر \leqslant ٣ر + ٣$

∴ $٥ر \geqslant ٩$

∴ $ر \geqslant ١\frac{٤}{٥}$

∴ ر = ٢ أو ٣ أو ......

∴ $ح_٣ > ح_٤ > ح_٥ > ......$

∴ أكبر حد هو $ح_٣$

* ~~~~~ * ~~~~~ *

* إذا كان $\overrightarrow{أ} = (١، -١، ٢)$، $\overrightarrow{ب} = (٣، -٢، ٠)$، $\overrightarrow{ج} = (٠، ٢، ٤)$ فإن

$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ج} = ...$

الحل

(أ) ١٠

(ب) ١٢

(ج) ١٤

(د) ١٦

$\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٣ & -٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ١ \times -٨ + ١ \times ١٢ + ٢ \times ٦$

* ~~~~~ * ~~~~~ *

* إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٢، ١، -٢)$ وكان $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ فإن $\overrightarrow{ب} = ...$

(أ) (٢، -١، -٢)

(ب) (٢، ١، -٢)

(ج) (-٢، -١، ٢)

(د) (-٢، -١، ٣)

آخر كلام

* إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة أ(٠، -١، ٢) على المستوى $\sqrt{٢}$س + ص − ع + ل = ٠ يساوي ٢ أوجد قيمة ل

الحل

$\frac{|\sqrt{٢} \times ٠ - ١ - ٢ + ل|}{\sqrt{٢ + ١ + ١}} = ٢$

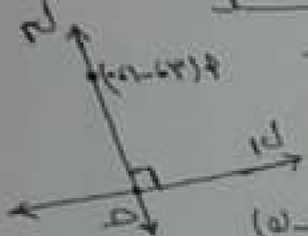
$|-٣ + ل| = ٤$

$-٣ + ل = ٤$ ، $-٣ + ل = -٤$

ل = ٧ ، ل = −١

* ~~~~~ * ~~~~~ *

* أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣، −١، ٠) ويقطع المستقيم $\overrightarrow{ر} = (٢، ١، ١) + ك(١، ٢، −١)$ على التعامد



الحل

$\overrightarrow{ه_١} = (١، ٢، −١)$

ه = (٢ + ك، ١ + ٢ك، ١ − ك)

متجه اتجاه $ل_٢$

$\overrightarrow{ه_٢} = \overrightarrow{أه} = ه - أ$

$= (−١ + ك، ٢ + ٢ك، ١ − ك)$

∴ $\overrightarrow{ه_١} \cdot \overrightarrow{ه_٢} = ٠$

$(١، ٢، −١) \cdot (−١ + ك، ٢ + ٢ك، ١ − ك) = ٠$

$−١ + ٤ + ٤ك − ١ + ك = ٠$

$ك = −\frac{١}{٣}$

∴ $\overrightarrow{ه_٢} = (−\frac{٤}{٣}، \frac{٤}{٣}، \frac{٤}{٣})$

$= (−١، ١، ١)$

∴ معادلة $ل_٢$ هي

$\overrightarrow{ر} = (٣، −١، ٠) + ك(−١، ١، ١)$

* ~~~~~ * ~~~~~ *

* $١ − ٦س + \frac{٦ \times ٥}{١ \times ٢} س^٢ − \frac{٦ \times ٥ \times ٤}{١ \times ٢ \times ٣} س^٣ + ... + س^٦ = ٦٤$

فإن س = ...

(أ) −١

(ب) ٣

(ج) {−١، ٣}

(د) ٢

الحل

$(١ − س)^٦ = ٢^٦$

١ − س = ٢ ، ١ − س = −٢

س = −١ ، س = ٣

* التوافيق

① ن ق ر = $\frac{\text{ن ل ر}}{\text{ل ر}}$

② ن ق ر = $\frac{\text{ل ن}}{\text{ل ر ل(ن − ر)}}$

③ ن ق ر = ن ق ن − ر

④ إذا كان

ن ق س = ن ق ص

س = ص أو س + ص = ن

⑤ $\frac{\text{ن ق ر}}{\text{ن ق ر−١}} = \frac{\text{ن − ر + ١}}{\text{ر}}$

* $\frac{\text{ن ق ر}}{\text{ن ق ر−١}} = \frac{\text{الدليل − الكبير + ١}}{\text{الكبير}}$

⑥ ن ق ر + ن ق ر−١ = ن+١ ق ر

١) قيمة ٥٠ق٤ + $\sum_{ر=١}^{٦}$ ٥٦−ر ق٣ = ...

● ٥٦ق٤

ⓑ ٥٦ق٣

ⓒ ٥٥ق٤

ⓓ ٥٥ق٣

٢) إذا كان ن ق٥ : ن ق٤ = ٣ : ١ فإن ن = ...

الحل

ⓐ ٧

ⓑ ٩

ⓒ ١٧

● ١٩

$\frac{\text{ن − ٥ + ١}}{٥} = \frac{٣}{١}$

ن − ٤ = ١٥

ن = ١٩

٣) إذا كان ن+٢ ق٤ = ن² − ١ فإن ن = ...

الحل

ⓐ ٢

ⓑ ٤

● ٤

ⓓ ١٠

$\frac{\text{ل(ن+٢)}}{\text{ل٤ ل(ن−٢)}}$ = (ن − ١)(ن + ١)

$\frac{\text{(ن+٢)(ن+١)(ن)(ن−١)}\cancel{\text{ل(ن−٢)}}}{\text{ل٤}\cancel{\text{ل(ن−٢)}}}$

= (ن−١)(ن + ١)

ن(ن+٢) = ٢٤

ن(ن+٢) = ٤ × ٦ ، ن = ٤

آخر كلام

٤) إذا كان ٩ق ر > ٩ق ر−١ فإن ......

ⓐ ر > ٤

ⓑ ر < ٤

● ر < ٥

ⓓ ر > ٥

$\frac{\text{٩ق ر}}{\text{٩ق ر−١}}$ > ١

$\frac{\text{٩ − ر + ١}}{\text{ر}}$ > ١

١٠ − ر > ر

٢ر < ١٠ ، ر < ٥

٥) إذا كان ٧ق ر > ١ ، ر ق٥ > ١

فإن ل(٦ − ر) = ...

ⓐ صفر

● ١

ⓒ ٧٢٠

ⓓ ٦

٦) إذا كان ١٤ق ر² = ١٤ق ر+٢ فإن ر = ...

الحل

ⓐ ٢

ⓑ ٤

ⓒ ٣

● ٢ أو ٣

ر² = ر + ٢ ، ر² + ر + ٢ = ١٤

ر² − ر − ٢ = ٠ ، ر² + ر − ١٢ = ٠

(ر − ٢)(ر + ١) = ٠ ، (ر + ٤)(ر − ٣) = ٠

ر = ٢ ، ~~ر = −١~~ ، ~~ر = −٤~~ ، ر = ٣

٧) إذا كان س+ص ق٢ = ٢١٠ ، ص−٣ ق٣ = ٣٥

فإن ل(٢س − ص) = ...

الحل

ⓐ ٥

ⓑ ١٠

ⓒ ٢

● ١

س+ص ل٢ = ١٤ × ١٥

س + ص = ١٥

س + ١٠ = ١٥

س = ٥

$\frac{\text{ص−٣ ل٣}}{\text{ل٣}}$ = ٣٥

ص−٣ ل٣ = ٥ × ٦ × ٧

ص − ٣ = ٧

ص = ١٠

∴ ل(٢س − ص) = ل٠ = ١

٨) إذا كان ٣٠ق ر = ٣٠ق ر+١٠ ، ن ل٧ = ٩٠ × ن−٢ ل٥

فإن ل(ن − ر) = ...

الحل

ⓐ صفر

● ١

ⓒ ١٠

ⓓ ل٢٠

٣٠ق ر = ٣٠ق ر+١٠

ر + ر + ١٠ = ٣٠

ر = ١٠

ن ل٧ = ٩٠ × ن−٢ ل٥

$\frac{\text{ل ن}}{\cancel{\text{ل(ن−٧)}}} = ٩٠ \times \frac{\text{ل(ن−٢)}}{\cancel{\text{ل(ن−٧)}}}$

ن(ن − ١) $\cancel{\text{ل(ن−٢)}}$ = ٩٠ $\cancel{\text{ل(ن−٢)}}$ ∴ ن = ١٠

* أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢، -١، ٥)، (-٣، ١، ٤)

الحل

$\overrightarrow{\text{هـ}} = (٢، -١، ٥) - (-٣، ١، ٤)$

$\overrightarrow{\text{هـ}} = (٥، -٢، ١)$

• الصورة المتجهة

$\overrightarrow{\text{ر}} = (٢، -١، ٥) + \text{ك}(٥، -٢، ١)$

• المعادلات البارامترية

س = ٢ + ٥ك ، ص = -١ - ٢ك ، ع = ٥ - ك

• الصورة الإحداثية

$\frac{\text{س}-٢}{٥} = \frac{\text{ص}+١}{٢} = \frac{\text{ع}-٥}{١}$

* أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم

$\frac{٣\text{س}+١}{٢} = \frac{\text{ص}-١}{٢} = \frac{٥-\text{ع}}{٣}$

الحل

$\frac{٣\text{س}+١}{٢} = \frac{\text{ص}-١}{٢} = \frac{٥-\text{ع}}{٣} = \text{ك}$

٣س = ٢ك - ١ ∴ $\text{س} = \frac{-١}{٣} + \frac{٢}{٣}\text{ك}$

ص = ١ + ٢ك

ع = ٥ - ٣ك

المعادلات البارامترية

* المتجهة

$\overrightarrow{\text{ر}} = (\frac{-١}{٣}، ١، ٥) + \text{ك}(\frac{٢}{٣}، ٢، -٣)$

* أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين

$\overrightarrow{\text{ر}_١} = (٢، -١، ٣) + \text{ك}_١(-٢، ٠، ٢)$

، س = ١ ، $\frac{\text{ص}-٤}{٣} = \frac{\text{ع}+٥}{-٣}$

الحل

∴ $\overrightarrow{\text{هـ}_١} = (-٢، ٠، ٢)$

$\overrightarrow{\text{هـ}_٢} = (٠، ٣، -٣)$

$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\overrightarrow{\text{هـ}_١} \cdot \overrightarrow{\text{هـ}_٢}|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}_١}\| \, \|\overrightarrow{\text{هـ}_٢}\|}$

$= \frac{|(-٢، ٠، ٢)\cdot(٠، ٣، -٣)|}{\sqrt{(-٢)^٢+(٠)^٢+(٢)^٢} \times \sqrt{٠^٢+(٣)^٢+(-٣)^٢}}$

$= \frac{١}{٢}$

∴ $\theta = ٦٠^\circ$

آخر كلام

* أوجد البعد العمودي من النقطة (٣، -١، ٧) والمستقيم المار بالنقطتين (٢، ٢، -١)، (٠، ٣، ٥)

الحل

① متجه اتجاه المستقيم

$\overrightarrow{\text{هـ}} = \overrightarrow{\text{ب حـ}} = \text{حـ} - \text{ب}$

$= (٠، ٣، ٥) - (٢، ٢، -١)$

$= (-٢، ١، ٦)$

② $\overrightarrow{\text{ب أ}} = \text{أ} - \text{ب}$

$= (٣، -١، ٧) - (٢، ٢، -١)$

$= (١، -٣، ٨)$

③ $\text{ب ء} = \frac{|\overrightarrow{\text{ب أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب حـ}}|}{\|\overrightarrow{\text{ب حـ}}\|}$

$= \frac{|(١، -٣، ٨)\cdot(-٢، ١، ٦)|}{\sqrt{(-٢)^٢+(١)^٢+(٦)^٢}}$

$= \frac{٤٣}{\sqrt{٤١}}$

④ $\|\overrightarrow{\text{ب أ}}\| = \sqrt{(١)^٢+(-٣)^٢+(٨)^٢} = \sqrt{٧٤}$

⑤ $\text{أ ء} = \sqrt{(\sqrt{٧٤})^٢ - (\frac{٤٣}{\sqrt{٤١}})^٢} \simeq ٥٫٣$

* إذا كان المستقيمان

$\text{ل}_١ : \frac{\text{س}}{٢} = \frac{\text{ص}-١}{-١} = \frac{\text{ع}-٢}{٣}$

، $\text{ل}_٢ = \frac{\text{س}-١}{\text{م}} = \frac{\text{ص}-٢}{١} = \frac{\text{ع}}{-١}$ متعامدان

فإن قيمة م = ...

الحل

(أ) -١

(ب) ٢

(جـ) ١

(د) -٣

$\overrightarrow{\text{هـ}_١} = (٢، -١، ٣)$

$\overrightarrow{\text{هـ}_٢} = (\text{م}، ١، -١)$

٢م - ١ - ٣ = ٠

م = ١

* المعادلات المتجانسة
على الصورة أ س = $\boxed{}$

← عدد المجاهيل = ر(أ)
∴ يوجد حل صفري «حل وحيد» «حل بديهي»

← ر(أ) < عدد المجاهيل
∴ يوجد عدد لانهائي من الحلول بخلاف الحل الصفري

١ من بين الأنظمة الخطية الآتية مجموعة المعادلات المتجانسة هي
(أ) ٢س + ص = ٣ ، س + ٢ص = ٢
(ب) س − ص = ٠ ، س + ٢ص = ١٢
(ج) ٣س + ص = ١ ، ٢س + ص = ٠
(د) س − ٢ص = ٠ ، ٣س + ص = ٠

٢ مرتبة المصفوفة الوحدة I_3
(أ) ٣ (ب) ٢ (ج) ١ (د) صفر

٣ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ٤ & ٨ & ١٦ \end{pmatrix}$
فإن ر(أ) = ...
(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

ملاحظة
للمصفوفة الموسعة
← عدد المعادلات م
← عدد المجاهيل ن
(أ) المصفوفة الموسعة أ* = (أ | ب)
على النظم م × (ن + ١)

أوجد مرتبة المصفوفة الموسعة للنظام
٢س − ص = ٣ ، ٦س − ٣ص = ٩
الحل
أ* = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & \vdots & ٣ \\ ٦ & -٣ & \vdots & ٩ \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٣

$\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٦ & -٣ \end{vmatrix}$ = صفر ، $\begin{vmatrix} -١ & ٣ \\ -٣ & ٩ \end{vmatrix}$ = صفر

$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٦ & ٩ \end{vmatrix}$ = صفر

∴ ر(أ*) < ٢ ∴ ر(أ*) = ١

آخر كلام

* المعادلات غير المتجانسة
على الصورة أ س = ح
، ح ≠ $\boxed{}$

← عدد المجاهيل = ر(أ) = ر(أ*)
∴ يوجد حل وحيد

← ر(أ) = ر(أ*) < عدد المجاهيل
∴ يوجد عدد لانهائي من الحلول

← ر(أ) ≠ ر(أ*)
∴ لا يوجد حل للمعادلات

١ يوجد للنظام $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ & ٣ \\ ١ & -٢ & -٣ \\ ٤ & -٢ & -٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ = $\boxed{}$
(أ) حل بديهي فقط
(ب) عدد لانهائي من الحلول خلافا الحل الصفري
(ج) عدد لانهائي من الحلول عدا الحل الصفري
(د) لا يوجد حل على الإطلاق

٢ عدد حلول النظام
٢س + ٥ص = ٠ ، ٣س − ع = ٠ ، ٤ص − ٣ع = ٠
هو ....
(أ) الحل الصفري فقط
(ب) صفر
(ج) عدد لانهائي من الحلول عدا الحل الصفري
(د) عدد لانهائي من الحلول بينها الحل الصفري

٣ مرتبة المصفوفة الموسعة للنظام
٢س − ٣ص = ٥ ، ٦س − ٩ص = ١٥
(أ) صفر (ب) ١
(ج) ٢ (د) ٣

٤ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ ك & ٠ & ١ \\ ٣ & ٢ & -١ \end{pmatrix}$
وكان ر(أ) = ٢ فإن ك = ...
(أ) −٢
(ب) صفر
(ج) ٢
(د) ٦

١ × −٢ + ٢ × (−ك − ٣) + ٣ × ٢ك = ٠
−٢ − ٢ك − ٦ + ٦ك = ٠
٤ك = ٨
ك = ٢

المعادلات المتجانسة

على الصورة أ س = $\boxed{}$

- عدد المجاهيل = ر(أ)

∴ يوجد حل صفري «حل وحيد» «حل بديهي»

- ر(أ) < عدد المجاهيل

∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول بخلاف الحل الصفري

١ من بين الأنظمة الخطية الآتية مجموعة المعادلات المتجانسة هي

(أ) ٢س + ص = ٣ ، س + ٢ص = ٢
(ب) س − ص = ٠ ، س + ٢ص = ١٢
(ج) ٣س + ص = ١ ، ٢س + ص = ٠
(د) س − ٢ص = ٠ ، ٣س + ص = ٠

٢ مرتبة المصفوفة الوحدة I_3

(أ) ٣ (ب) ٢ (ج) ١ (د) صفر

٣ إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ٤ & ٨ & ١٦ \end{pmatrix}$ فإن ر(أ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

ملاحظة

المصفوفة الموسعة

← عدد المعادلات م

← عدد المجاهيل ن

∴ المصفوفة الموسعة أ* = (أ | ب) على النظم م × (ن + ١)

أوجد مرتبة المصفوفة الموسعة للنظام

٢س − ص = ٣ ، ٦س − ٣ص = ٩

الحل

أ* = $\left(\begin{array}{cc|c} ٢ & -١ & ٣ \\ ٦ & -٣ & ٩ \end{array}\right)$ على النظم ٢ × ٣

$\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٦ & -٣ \end{vmatrix}$ = صفر ، $\begin{vmatrix} -١ & ٣ \\ -٣ & ٩ \end{vmatrix}$ = صفر

$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٦ & ٩ \end{vmatrix}$ = صفر

∴ ر(أ*) < ٢ ∴ ر(أ*) = ١

آخر كلام

المعادلات غير المتجانسة

على الصورة أ س = جـ

، جـ ≠ $\boxed{}$

- عدد المجاهيل = ر(أ) = ر(أ*)

∴ يوجد حل وحيد

- ر(أ) = ر(أ*) < عدد المجاهيل

∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول

- ر(أ) ≠ ر(أ*)

∴ لا يوجد حل للمعادلات

١ يوجد للنظام $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ & ٣ \\ ١ & -٢ & -٣ \\ ٤ & -٢ & -٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \boxed{}$

(أ) حل بديهي فقط
(ب) عدد لا نهائي من الحلول خلافا الحل الصفري
(ج) عدد لا نهائي من الحلول عدا الحل الصفري
(د) لا يوجد حل على الإطلاق

٢ عدد حلول النظام

٢س + ص = ٠ ، ٣س − ع = ٠ ، ص − ٣ع = ٠

هو ....

(أ) الحل الصفري فقط
(ب) صفر
(ج) عدد لا نهائي من الحلول عدا الحل الصفري
(د) عدد لا نهائي من الحلول بينها الحل الصفري

٣ مرتبة المصفوفة الموسعة للنظام

٢س − ٣ص = ٥ ، ٦س − ٩ص = ١٥

(أ) صفر (ب) ١
(ج) ٢ (د) ٣

٤ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ ك & ٠ & ١ \\ ٣ & ٢ & -١ \end{pmatrix}$

وكان ر(أ) = ٢ فإن ك = ...

(أ) −٢ ١ × −٢ + ٢ × (−ك − ٣) + ٣ × ٢ك = ٠
(ب) صفر −٢ − ٢ك − ٦ + ٦ك = ٠
(ج) ٢ ٤ك = ٨
(د) ٦ ك = ٢

* إذا كان $ع = \frac{\sqrt{2}\,ت}{1+ت}$ أكتب العدد ع بالصورة الأسية

الحل

$ع = \frac{\sqrt{2}\,ت}{1+ت} \times \frac{1-ت}{1-ت}$

$ع = \frac{\sqrt{2}\,ت - \sqrt{2}\,ت^2}{1+1}$

$ع = \frac{\sqrt{2}}{2}ت + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}ت$

$س = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $ص = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$ل = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$

$\theta = ظا^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}} \div \frac{1}{\sqrt{2}}) = 45°$

$\therefore ع = هـ^{45\,ت}$

* أوجد $(\frac{1+ت}{1-ت})^7$ على الصورة الأسية

الحل

$\frac{1+ت}{1-ت} \times \frac{1+ت}{1+ت} = \frac{1+ت+ت+ت^2}{1+1}$

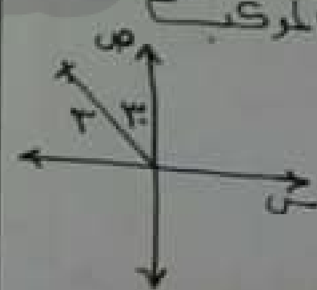
$= \frac{1+2ت-1}{2}$

$= ت$

$ع = هـ^{90\,ت}$

$\therefore (\frac{1+ت}{1-ت})^7 = هـ^{7\times 90\,ت} = هـ^{-\frac{\pi}{2}\,ت}$

١ الشكل المقابل يمثل العدد المركب



(أ) $3(جتا 30 + ت جا 30)$

(ب) $3(جتا 60 + ت جا 60)$

(ج) $3(جتا 120 + ت جا 120)$

(د) $3(جتا 150 + ت جا 150)$

٢ إذا كان ع عدد مركب سعته الأساسية θ فإن سعة $\frac{1}{ع}$ هي .....

(أ) θ (ب) $-\theta$ (ج) $\pi - \theta$ (د) $-\pi + \theta$

٣ إذا كان $ع_1 = 2 + 2\sqrt{3}\,ت$ ، $ع_2 = -3 - 3\sqrt{3}\,ت$ فإن سعة $ع_1 + ع_2 = ...$

(أ) 60 (ب) 240 (ج) 180 (د) 300

$ع_1 + ع_2 = -1 - \sqrt{3}\,ت$

$\theta = -\pi + ظا^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{-1})$

$= -120°$

آخر كلام

* الجذور التربيعية للعدد ع

$ع \rightarrow \sqrt{ع} \rightarrow ع^{\frac{1}{2}}$

$ع = ل(جتا \theta + ت جا \theta)$

$\therefore \sqrt{ع} = \sqrt{ل}\,(جتا \frac{\theta + 360ر}{2} + ت جا \frac{\theta + 360ر}{2})$

حيث ر = 0

ر = 1 ← θ سالبة

ر = −1 ← θ موجبة

(أ) أوجد الجذور التربيعية للعدد $ع = 2 - 2\sqrt{3}\,ت$

الحل

$س = 2$ $ص = -2\sqrt{3}$

$ل = \sqrt{(2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$

$\theta = ظا^{-1}(\frac{-2\sqrt{3}}{2}) = -60°$

$ع = 4(جتا -60° + ت جا -60°)$

$\sqrt{ع} = \sqrt{4}\,(جتا \frac{-60 + 360ر}{2} + ت جا \frac{-60+360ر}{2})$

ر = 0 $\sqrt{ع} = 2(جتا -30 + ت جا -30)$

ر = 1 $\sqrt{ع} = 2(جتا 150 + ت جا 150)$

ملاحظة

⊙ الجذور التكعيبية للواحد الصحيح يمثل على مستوى أرجاند مثلث متساوي الأضلاع

⊙ الجذور الخماسية للعدد المركب يمثل على مستوى أرجاند خماسي منتظم

١ إذا كانت السعة الأساسية للعدد $ع_1$ هي θ_1 ، السعة الأساسية للعدد $ع_2$ هي θ_2 فإن السعة الأساسية للعدد $ع_1 ع_2$ هي ...

(أ) $\theta_1 + \theta_2$ (ب) $\theta_1 \times \theta_2$

(ج) $\theta_1 - \theta_2$ (د) $\theta_1 \div \theta_2$

٢ إذا كانت النقطة $(\sqrt{3} ، -1)$ تمثل العدد المركب ع على مستوى أرجاند فإن مقياس العدد ع وسعته هو

(أ) $(2 ، \frac{\pi}{6})$ (ب) $(2 ، \frac{5\pi}{6})$

(ج) $(2 ، -\frac{5\pi}{6})$ (د) $(2 ، -\frac{\pi}{6})$

* معادلة المستقيم في الفراغ

أ(−٢، ٣، ١) ب(٠، ٤، −٢)

* متجه اتجاه المستقيم

$\overrightarrow{\text{ه}} = \overrightarrow{\text{أب}}$

= ب − أ

= (٠، ٤، −٢) − (−٢، ٣، ١)

= (٢، ١، −٣)

٥ معادلة المستقيم

نقطة أ(س١، ص١، ع١)

متجه اتجاه المستقيم $\overrightarrow{\text{ه}}$ = (أ، ب، جـ)

← الصورة المتجهة

$\overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{أ}} + \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ه}}$

← المعادلات البارامترية

س = س١ + أ ك

ص = ص١ + ب ك

ع = ع١ + جـ ك

← المعادلة الإحداثية

(س − س١) / أ = (ص − ص١) / ب = (ع − ع١) / جـ

ملحوظة

① (س + ٢) / ٥ = (٣ − ص) / ٧ = (٢ع + ١) / ٣

← (س + ٢) / ٥ = (ص − ٣) / (−٧) = (ع + ١/٢) / (٣/٢)

أ(−٢، ٣، −١/٢)

$\overrightarrow{\text{ه}}$(٥، −٧، ٣/٢)

② (س + ٢) / ٥ = (ع − ١) / ٣ ، ص = ٧

أ(−٢، ٧، ١)

$\overrightarrow{\text{ه}}$(٥، ٠، ٣)

③ س = ٢ص = −ع

أ(٠، ٠، ٠)

$\overrightarrow{\text{ه}}$ = (١، ١/٢، −١)

آخر كلام

* الزاوية بين مستقيمين حيث $\overrightarrow{\text{ه}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ه}_2}$ متجهي اتجاه المستقيم

جتا هـ = $\dfrac{|\overrightarrow{\text{ه}_1} \cdot \overrightarrow{\text{ه}_2}|}{\|\overrightarrow{\text{ه}_1}\|\,\|\overrightarrow{\text{ه}_2}\|}$

* إذا كان

$\overrightarrow{\text{ه}_1}$ (أ١، ب١، جـ١)

$\overrightarrow{\text{ه}_2}$ (أ٢، ب٢، جـ٢)

٥ شرط التوازي

$\overrightarrow{\text{ه}_1} \times \overrightarrow{\text{ه}_2} = \overrightarrow{\text{و}}$

أ١ / أ٢ = ب١ / ب٢ = جـ١ / جـ٢

٥ شرط التعامد

$\overrightarrow{\text{ه}_1} \cdot \overrightarrow{\text{ه}_2} = 0$

أ١ أ٢ + ب١ ب٢ + جـ١ جـ٢ = ٠

ملحوظة

إذا كان (ل١، م١، ن١) ، (ل٢، م٢، ن٢) هي جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين

∴ قياس الزاوية بين المستقيمين

جتا هـ = | ل١ ل٢ + م١ م٢ + ن١ ن٢ |

١) معادلة المستقيم المار بالنقطة (−١، ٠، ٢) والمتجه $\overrightarrow{\text{ه}}$ (١، −١، ٣) متجه اتجاه له

ⓐ (س − ١) / ٢ = ص / ١ = (ع − ١) / (−١)

ⓑ (س + ١) / ١ = ص / (−١) = (ع − ٢) / ٣

ⓒ (س − ١) / ٣ = ص / (−١) = ع / ١

ⓓ (س − ١) / ١ = (ص − ١) / (−١) = ع / ٢

٢) البعد بين النقطة (أ، ب، جـ) ومحور السينات يساوي

ⓐ $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{جـ}^2}$

ⓑ $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$

ⓒ $\sqrt{\text{ب}^2 + \text{جـ}^2}$

ⓓ $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2}$

آخر كلام

* التبادل $\boxed{ن \geq ر}$

ن ل ر ← shift + $\boxed{x}$

ن ∈ ص+ ، ر ∈ ط

⊙ ن ل ر = ن(ن − ١)(ن − ٢) .... (ن − ر + ١)

⊙ ن ل ن = |ن

|ن = ن(ن − ١)(ن − ٢) .... × ٣ × ٢ × ١

⊙ ن ل ر = |ن ÷ |ن − ر   ⊙ ن ل ٠ = ١

⊙ |ن = ن |ن − ١
= ن(ن − ١) |ن − ٢

⊙ |٠ = |١ = ١

* أي القيم يمكن أن تساويها ن ل م

الحل

أ) ٢٤ ← ٤ × ٦
ب) ٢٥ ← ٥ × ٥
جـ) ٢٧ ← ٣ × ٩
● ٣٠ ← ٥ × ٦ عددان متتاليان

٢) إذا كان ١٧ ل م+٥ = ٩٢ ل م+٥ فإن م = ...

ب) ٠
● −٥
د) ١٢
أ) ٥

٣) إذا كان ن−٣ ل ٧ = |٨ فإن ن = ...

الحل

أ) ٨
ب) ١٠
● ١١
د) ١٢

١١−٣ ل ٧ = ٨ ل ٧
= ٨ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢
= |٨

٤) إذا كان |س − ٣ × س ل م = ٢٠ |س − ٢ فإن س = ...

أ) صفر
ب) ٢
● ٥
د) ٤

$\cancel{|س-٣}$ × $\frac{|س}{\cancel{|س-٣}}$ = ٢٠ |س − ٢

س(س − ١) $\cancel{|س-٢}$ = ٢٠ $\cancel{|س-٢}$

س(س − ١) = ٤ × ٥

س = ٥

١) إذا كان أ = (−١ ، ٥ ، −٢) ، ب = (١ ، ١ ، ٣) وكان أ + ب + جـ = سَ
فإن جـ = ...

الحل

أ) س + ٦ص − ع
● −س − ٦ص + ع
جـ) س + ٤ص − ٣ع
د) س + ٤ص − ع

(١ ، ٦ ، −١) + جـ = (٠ ، ٠ ، ٠)
جـ = (٠ ، ٠ ، ٠) − (١ ، ٦ ، −١)
= (−١ ، −٦ ، ١)

٢) جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه
أ = (−٢ ، ١ ، ٢) هي ......

الحل

أ) (−٢ ، ١ ، ٢)
● $(\frac{-2}{3} ، \frac{1}{3} ، \frac{2}{3})$
جـ) $(\frac{-5}{2} ، 5 ، \frac{5}{2})$
د) (−١ ، ١ ، ١)

$\frac{أ}{||أ||} = \frac{(-2 ، 1 ، 2)}{\sqrt{4+1+4}}$
= $(\frac{-2}{3} ، \frac{1}{3} ، \frac{2}{3})$

٣) إذا كان أ = (−٢ ، ل ، ١)
وكان ||أ|| = ٣ وحدات فإن ل = ...

الحل

أ) ٤
ب) −٤
● ±٢
د) $\sqrt{14}$

||أ|| = $\sqrt{4 + ل^2 + 1}$ = ٣
٥ + ل² = ٩
ل² = ٤
ل = ±٢

٤) المتجه الذى يمثل متجه وحدة فى المتجهات

الحل

أ) (−٣ ، ٢ ، ٢)
ب) $(\frac{1}{2} ، \frac{1}{3} ، \frac{1}{4})$
● $(\frac{3}{5} ، \frac{-4}{5} ، 0)$ ← $\sqrt{(\frac{3}{5})^2 + (\frac{-4}{5})^2 + 0} = 1$
د) $(\frac{-1}{12} ، \frac{-3}{12} ، \frac{2}{12})$

٥) متجه زوايا الاتجاه له ٤٥° ، ٤٥° ، هـ
فإن هـ = ...

الحل

أ) ٤٥°
● ٩٠°
جـ) ٠°
د) ٦٠°

جتا² ٤٥° + جتا² ٤٥° + جتا² هـ = ١
$(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2$ + جتا² هـ = ١
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ + جتا² هـ = ١
جتا هـ = ٠
هـ = ٩٠°

* الضرب القياسي لمتجهين

① $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = \|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\|$ جتا هـ

② $\vec{أ} \cdot \vec{ب} = \vec{ب} \cdot \vec{أ}$

③ $\vec{س} \cdot \vec{س} = ١$ ، $\vec{ص} \cdot \vec{ص} = ١$ ، $\vec{ع} \cdot \vec{ع} = ١$

④ $\vec{س} \cdot \vec{ص} = ٠$ ، $\vec{س} \cdot \vec{ع} = ٠$ ، $\vec{ص} \cdot \vec{ع} = ٠$

⑤ الزاوية بين متجهين

جتا هـ = $\frac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\|}$

⑥ مركبة المتجه $\vec{أ}$ في اتجاه $\vec{ب}$

م$_{ب}$ = $\|\vec{أ}\|$ جتا هـ

= $\frac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{ب}\|}$

⑦ شرط تعامد متجهين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$

$\boxed{\vec{أ} \cdot \vec{ب} = ٠}$

* إذا كان $\vec{أ} = ٢\vec{س} + ٣\vec{ص} + ٤\vec{ع}$ ، $\vec{ب} = -\vec{س} - ٢\vec{ص} + \vec{ع}$ أوجد $\vec{أ} \cdot \vec{ب}$

الحل

$\vec{أ} \cdot \vec{ب}$ = (٢، ٣، ٤) · (-١، -٢، ١)

= ٢ × -١ + ٣ × -٢ + ٤ × ١

= -٢ - ٦ + ٤ = -٤

أوجد قياس الزاوية بين المتجهين

$\vec{أ} = ٤\vec{س} + ٣\vec{ص} + ٧\vec{ع}$ ، $\vec{ب} = ٢\vec{س} + ٥\vec{ص} + ٤\vec{ع}$

الحل

جتا هـ = $\frac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\|}$

= $\frac{(٤، ٣، ٧) \cdot (٢، ٥، ٤)}{\sqrt{٤^٢ + ٣^٢ + ٧^٢} \times \sqrt{٢^٢ + ٥^٢ + ٤^٢}}$

= $\frac{٥١}{\sqrt{٧٤} \times \sqrt{٤٥}}$

∴ هـ = ٢٧٫٩°

آخر كلام

* أوجد مركبة القوة $\vec{ق} = ٢\vec{س} - ٣\vec{ص} + ٥\vec{ع}$ في اتجاه $\vec{أب}$ حيث

أ(١، ٤، ٠) ، ب(-١، ٢، ٣)

الحل

$\vec{أب} = \vec{ب} - \vec{أ}$

= (-١، ٢، ٣) - (١، ٤، ٠)

= (-٢، -٢، ٣)

مركبة $\vec{ق}$ في اتجاه $\vec{أب}$ = $\frac{\vec{ق} \cdot \vec{أب}}{\|\vec{أب}\|}$

= $\frac{(٢، -٣، ٥) \cdot (-٢، -٢، ٣)}{\sqrt{(-٢)^٢ + (-٢)^٢ + ٣^٢}}$

= $\sqrt{١٧}$

١) قياس الزاوية بين المتجهين (٢، -٢، ٢) ، (١، ١، ٤) يساوي ......

● ٥٧٫٢

ب) ٣٥٫٢٦

ج) ١٣٤٫٣٧°

د) ٠°

الحل

جتا هـ = $\frac{(٢، -٢، ٢) \cdot (١، ١، ٤)}{\sqrt{١٢} \times \sqrt{١٨}}$

= $\frac{٢ - ٢ + ٨}{\sqrt{١٢} \times \sqrt{١٨}}$

هـ = ٥٧٫٢

٢) إذا كان $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجهي وحدة فإن $\vec{أ} \cdot \vec{ب}$ ∈ ......

أ) [٠، ١]

ب)]-١، ١[

● [-١، ١]

د) ح$^+$

٣) إذا كان $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجهي وحدة متعامدين فإن $(\vec{أ} - ٢\vec{ب}) \cdot (٣\vec{أ} + ٥\vec{ب})$ = ...

أ) -٨

● -٧

ج) ٢٤

د) صفر

الحل

= $٣\vec{أ} \cdot \vec{أ} + ٥\vec{أ} \cdot \vec{ب} - ٦\vec{ب} \cdot \vec{أ} - ١٠\vec{ب} \cdot \vec{ب}$

= ٣ + ٠ - ٠ - ١٠ = -٧

٤) إذا كان ل ، هـ ، و هي جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{أ}$ فإن

أ) ل + هـ + و = ١

ب) ل = هـ = و

● ل^٢ + هـ^٢ + و^٢ = ١

د) ل + هـ + و = $\|\vec{أ}\|$

* المستوى الإحداثي س ص هو مستوى يحوي النقط (س، ص، ٠) ومعادلته ع = صفر
* المستوى الإحداثي س ع هو مستوى يحوي النقط (س، ٠، ع) ومعادلته ص = صفر
* المستوى الإحداثي ص ع هو مستوى يحوي النقط (٠، ص، ع) ومعادلته س = صفر

١) بعد النقطة (٣، -١، ٢) عن المستوى الإحداثي س ع يساوي ...... وحدة طول

أ) ٣ ب) -١ ج) ٢ د) ١

٢) بعد النقطة (٤، -٢، ١) عن المستوى الإحداثي ص ع = ... وحدة طول

أ) ٤ ب) -٤ ج) -٢ د) ٢

٣) طول العمود المرسوم من النقطة (-٢، ٣، ٤) على محور س يساوي ...... وحدة طول

الحل

$= \sqrt{\text{ص}^2 + \text{ع}^2}$

$= \sqrt{(٣)^2 + (٤)^2}$

$= ٥$

أ) ٢ ب) ٣ ج) ٥ د) ٤

٤) إحداثي نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي طرفاها (-٣، ٢، ٤)، (٥، ١، ٨) هي ......

الحل

$\left(\frac{-٣+٥}{٢}، \frac{٢+١}{٢}، \frac{٤+٨}{٢}\right)$

$\left(١، \frac{٣}{٢}، ٦\right)$

أ) $\left(١، \frac{٣}{٢}، ٦\right)$ ب) (٢، -١، ٤) ج) (٨، -١، ٤) د) $\left(١، -\frac{٣}{٢}، ٢\right)$

آخر كلام

ملاحظة

معادلة الكرة في الفراغ

مركزها (ل، ك، ن) وطول نصف قطرها نق

$$\boxed{(\text{س}-\text{ل})^2 + (\text{ص}-\text{ك})^2 + (\text{ع}-\text{ن})^2 = \text{نق}^2}$$

الصورة القياسية

المعادلة العامة للكرة

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 + ٢\text{ل}\,\text{س} + ٢\text{ك}\,\text{ص} + ٢\text{ن}\,\text{ع} + \text{د} = ٠$$

حيث م = (-ل، -ك، -ن)

$-\frac{١}{٢}$ معامل س، $-\frac{١}{٢}$ معامل ص، $-\frac{١}{٢}$ معامل ع

$$\text{نق} = \sqrt{\text{ل}^2 + \text{ك}^2 + \text{ن}^2 - \text{د}}$$

١) معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٥ وحدات

أ) $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 = ٥$

ب) $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 = ٠$

ج) $(\text{س}-٥)^2 + (\text{ص}-٥)^2 + (\text{ع}-٥)^2 = ٢٥$

د) $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 = ٢٥$

٢) معادلة الكرة التي مركزها (٢، -٣، ٤) وتمس المستوى الإحداثي س ص هي ...

أ) $(\text{س}-٢)^2 + (\text{ص}+٣)^2 + (\text{ع}-٤)^2 = ٤$

ب) $(\text{س}-٢)^2 + (\text{ص}+٣)^2 + (\text{ع}-٤)^2 = ٩$

ج) $(\text{س}-٢)^2 + (\text{ص}+٣)^2 + (\text{ع}-٤)^2 = ١٦$

د) $(\text{س}+٢)^2 + (\text{ص}-٣)^2 + (\text{ع}+٤)^2 = ١٦$

٣) إذا كان (س، ص، ع) منتصف $\overline{\text{أب}}$ حيث أ(-٤، ٠، ٥)، ب(-٢، ٤، -١٣) فإن س + ص + ع = ...

الحل

(س، ص، ع) = (-٣، ٢، -٤)

س + ص + ع = -٣ + ٢ - ٤

= -٥

أ) -٥ ب) -٦ ج) ٣ د) ٤

* أوجد الحد الخالي من س في مفكوك $(٢س^٢ - \frac{١}{س})^{١٢}$

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_ر \left(-\frac{١}{س}\right)^ر (٢س^٢)^{١٢-ر}$

$= {}^{١٢}ق_ر (-١)^ر س^{-ر} ٢^{١٢-ر} س^{٢٤-٢ر}$

$= {}^{١٢}ق_ر (-١)^ر ٢^{١٢-ر} س^{٢٤-٣ر}$

$\therefore ٢٤ - ٣ر = ٠$

$٣ر = ٢٤ \quad \therefore ر = ٨$

الحد الخالي من س هو $ح_٩$

$ح_٩ = {}^{١٢}ق_٨ (-١)^٨ ٢^{١٢-٨}$

$= ١٦ \times {}^{١٢}ق_٨$

* في مفكوك $(٢ + \frac{س}{٣})^٩$ أوجد قيمة س التي تجعل الحدين الأوسطين متساويين

الحل

رتبة الحدين الأوسطين $= \frac{٩+١}{٢} = ٥ ، ٦$

$\therefore \frac{ح_٦}{ح_٥} = ١$

$\frac{٩-٥+١}{٥} \times \frac{س}{٣} \div ٢ = ١$

$\frac{١}{٢} \times \frac{س}{٣} = ١$

$\frac{س}{٦} = ١ \qquad س = ٦$

ي الحد المشتمل على $س^٤$ في مفكوك $(١+٢س)^{١٠}$ يساوي .....

(أ) ${}^{١٥}ق_٤$

(ب) $\frac{١}{١٦} \; {}^{١٠}ق_٤$

(ج) $١٦ \; {}^{١٠}ق_٤$

(د) $٣٢ \times {}^{١٠}ق_٥$

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_ر (٢س)^ر$

$= {}^{١٠}ق_ر ٢^ر س^ر$

$\therefore ر = ٤$

$ح_٥ = {}^{١٠}ق_٤ \times ٢^٤$

ي في مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{١٠}$ يكون الحد الخالي من س هو ......

(أ) $ح_٤$

(ب) $ح_٥$

(ج) $ح_٦$

(د) لا يوجد حد خالي من س

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_ر \left(\frac{١}{س}\right)^ر س^{١٠-ر}$

$= {}^{١٠}ق_ر س^{-ر} س^{١٠-ر}$

$= {}^{١٠}ق_ر س^{١٠-٢ر}$

$١٠ - ٢ر = ٠$

$ر = ٥$

آخر كلام

* في مفكوك $(أس + \frac{١}{ب س})^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الخالي من س يساوي معامل الحد السابع

إثبت أن $٦ أ ب = ٥$

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_ر \left(\frac{١}{ب س}\right)^ر (أ س)^{١٠-ر}$

$= {}^{١٠}ق_ر \left(\frac{١}{ب}\right)^ر س^{-ر} أ^{١٠-ر} س^{١٠-ر}$

$= {}^{١٠}ق_ر \left(\frac{١}{ب}\right)^ر أ^{١٠-ر} س^{١٠-٢ر}$

$١٠ - ٢ر = ٠$

$ر = ٥$

الحد الخالي من س هو $ح_٦$

$\frac{ح_٧}{ح_٦} = ١$

$\frac{١٠-٦+١}{٦} \times \left(\frac{١}{ب س} \div أ س\right) = ١$

$\frac{٥}{٦} \times \frac{١}{ب} \times \frac{١}{أ} = ١$

$\frac{٥}{٦ أ ب} = ١$

$\therefore ٦ أ ب = ٥$

* في مفكوك $(٢س - ٣)^{١٥}$ حسب قوى س التنازلية أوجد قيم س التي تجعل

$١٣ ح_٣ + ١٠ ح_٤ + ح_٥ = $ صفر

الحل

$١٣ ح_٣ + ١٠ ح_٤ + ح_٥ = ٠ \quad \div ح_٤$

$١٣ \times \frac{ح_٣}{ح_٤} + ١٠ + \frac{ح_٥}{ح_٤} = ٠$

$١٣ \times \frac{٣}{١٥-٣+١} \times \frac{٢س}{-٣} + ١٠ + \frac{١٥-٤+١}{٤} \times \frac{-٣}{٢س} = ٠$

$-٢س + ١٠ + ٣ \times \frac{-٣}{٢س} = ٠ \quad \times ٢س$

$-٤س^٢ + ٢٠س - ٩ = ٠$

$٤س^٢ - ٢٠س + ٩ = ٠$

$(٢س - ١)(٢س - ٩) = ٠$

$س = \frac{١}{٢} \qquad س = \frac{٩}{٢}$

آخر كلام

* أثبت أن المستقيمين

$\vec{\text{ر}}_1 = (3\,\vec{\text{س}} + \vec{\text{ص}} - \vec{\text{ع}}) + \text{ك}_1(\vec{\text{س}} + 2\,\vec{\text{ص}} + 3\,\vec{\text{ع}})$

$\vec{\text{ر}}_2 = (2\,\vec{\text{س}} + 5\,\vec{\text{ص}}) + \text{ك}_2(\vec{\text{س}} - \vec{\text{ص}} + \vec{\text{ع}})$

متقاطعان وأوجد معادلة المستوى الذي يحتويهما.

الحل

$\vec{\text{ر}}_1 = \vec{\text{ر}}_2$

$(3 ، 1 ، -1) + \text{ك}_1(1 ، 2 ، 3) = (2 ، 5 ، 0) + \text{ك}_2(1 ، -1 ، 1)$

$3 + \text{ك}_1 = 2 + \text{ك}_2 \quad \therefore \text{ك}_1 - \text{ك}_2 = -1$ (1)

$1 + 2\text{ك}_1 = 5 - \text{ك}_2 \quad \therefore 2\text{ك}_1 + \text{ك}_2 = 4$ (2)

$-1 + 3\text{ك}_1 = \text{ك}_2 \quad \therefore 3\text{ك}_1 - \text{ك}_2 = 1$ (3)

من المعادلتين 1 ، 2

$\therefore 3\text{ك}_1 = 3 \qquad \text{ك}_1 = 1$ *

بالتعويض في (1) $\quad 1 - \text{ك}_2 = -1$

$\text{ك}_2 = 2$ *

بالتعويض في (3)

$3 \times 1 - 2 = 1$ تحقق المعادلة

$\therefore$ المستقيمان متقاطعان

متجه اتجاه العمودي

$\vec{\text{ن}} = \vec{\text{ه}}_1 \times \vec{\text{ه}}_2$

$$\vec{\text{ن}} = \begin{vmatrix} \vec{\text{س}} & \vec{\text{ص}} & \vec{\text{ع}} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$\vec{\text{ن}} = 5\,\vec{\text{س}} + 2\,\vec{\text{ص}} - 3\,\vec{\text{ع}}$

معادلة المستوى

$\vec{\text{ن}} \cdot \vec{\text{ر}} = \vec{\text{ن}} \cdot \vec{\text{أ}}$

$(5 ، 2 ، -3) \cdot \vec{\text{ر}} = (5 ، 2 ، -3) \cdot (3 ، 1 ، -1)$

$(5 ، 2 ، -3) \cdot \vec{\text{ر}} = 20$

$5\text{س} + 2\text{ص} - 3\text{ع} - 20 = 0$

* أوجد طول العمود المرسوم من النقطة $(1 ، 5 ، -4)$ على المستوى $3\text{س} - \text{ص} + 2\text{ع} = 6$

الحل

$$\text{ل} = \frac{|\text{أ}\,\text{س}_1 + \text{ب}\,\text{ص}_1 + \text{جـ}\,\text{ع}_1 + \text{د}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2}}$$

$$\text{ل} = \frac{|3 \times 1 - 5 + 2 \times -4 - 6|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{16}{\sqrt{14}}$$ وحدة طول

* أثبت أن المستويين

$\text{س} + 3\text{ص} - 4\text{ع} = 3 ، 2\text{س} + 6\text{ص} - 8\text{ع} = 4$

متوازيان وأوجد البعد بينهما

الحل

$\therefore \vec{\text{ن}}_1 = (1 ، 3 ، -4) ، \vec{\text{ن}}_2 = (2 ، 6 ، -8)$

$\therefore \frac{\text{أ}_1}{\text{أ}_2} = \frac{1}{2} ، \frac{\text{ب}_1}{\text{ب}_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$، \frac{\text{جـ}_1}{\text{جـ}_2} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$

$\therefore \frac{\text{أ}_1}{\text{أ}_2} = \frac{\text{ب}_1}{\text{ب}_2} = \frac{\text{جـ}_1}{\text{جـ}_2}$

$\therefore$ المستويان متوازيان

ضع $\text{س} = 0 ، \text{ص} = 0 \quad \therefore \text{ع} = \frac{-3}{4}$

$\therefore$ النقطة $(0 ، 0 ، \frac{-3}{4})$ تقع على المستوى الأول

$\therefore$ البعد بينهما

$$\text{ل} = \frac{|2 \times 0 + 6 \times 0 - 8 \times \frac{-3}{4} - 4|}{\sqrt{2^2 + 6^2 + (-8)^2}}$$

$= \frac{1}{\sqrt{26}}$ وحدة طول

* معادلة المستوى المار بالنقطة $(1 ، -2 ، 5)$ والمتجه $(2 ، 1 ، 3)$ عمودي عليه هي

(أ) $2\text{س} + \text{ص} + 3\text{ع} = 1$

(ب) $2\text{س} + \text{ص} + 3\text{ع} = 15$ ●

(جـ) $\text{س} - 2\text{ص} + 5\text{ع} = 10$

(د) $\text{س} + \text{ص} + \text{ع} = 4$

* معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ$(1 ، -1 ، 2)$ ، ب$(-1 ، 0 ، 1)$ هي

(أ) $\frac{\text{س} - 1}{2} = \frac{\text{ص} + 1}{-1} = \frac{\text{ع} - 2}{1}$ ●

(ب) $\frac{\text{س} + 1}{-2} = \frac{\text{ص}}{1} = \frac{\text{ع} + 1}{-1}$

(جـ) $\frac{\text{س} - 2}{2} = \frac{\text{ص} + 1}{3} = \frac{\text{ع} - 1}{3}$

(د) $\frac{\text{س} - 1}{1} = \frac{\text{ص} + 1}{3} = \frac{\text{ع} - 2}{1}$

* معادلة المستوى في الفراغ

نقطة أ (س١ ، ص١ ، ع١) — متجه اتجاه عمودي على المستوى $\overrightarrow{\text{ن}}$ (أ ، ب ، حـ)

⊙ الصورة المتجهة

$\overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$

⊙ الصورة القياسية

أ(س − س١) + ب(ص − ص١) + حـ(ع − ع١) = ٠

⊙ الصورة العامة

أ س + ب ص + حـ ع + د = ٠

ملحوظة الزاوية بين مستويين

$\text{جتا}\,\theta = \dfrac{|\overrightarrow{\text{ن}_1} \cdot \overrightarrow{\text{ن}_2}|}{\|\overrightarrow{\text{ن}_1}\|\,\|\overrightarrow{\text{ن}_2}\|}$

ملحوظة إذا كان

ن١ (أ١ ، ب١ ، حـ١)

ن٢ (أ٢ ، ب٢ ، حـ٢)

⊙ شرط التوازي

أ١ / أ٢ = ب١ / ب٢ = حـ١ / حـ٢

⊙ شرط التعامد

أ١ أ٢ + ب١ ب٢ + حـ١ حـ٢ = ٠

⊙ طول العمود المرسوم من النقطة (س١ ، ص١ ، ع١) على المستوى

أ س + ب ص + حـ ع + د = ٠

طول = | أ س١ + ب ص١ + حـ ع١ + د | / √(أ² + ب² + حـ²)

⊙ معادلة المستوى الذي يقطع من محاور الإحداثيات أجزاء أ ، ب ، حـ

أي يقطع المحاور في النقط (أ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ب ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، حـ)

هي س/أ + ص/ب + ع/حـ = ١

⊙ معادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، ٢ ، ٣) ويوازي محوري الإحداثيات س ، ص هي

Ⓐ س + ص = ٣ ● ع = ٣

Ⓑ س = ١ Ⓒ ص = ٢

آخر كلام

* أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (٣ ، −٥ ، ٢) والمتجه $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (٢ ، ١ ، ١) عمودي على المستوى

الحل

$\overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$

(٢ ، ١ ، ١) . (س ، ص ، ع)

= (٢ ، ١ ، ١) . (٣ ، −٥ ، ٢)

(٢ ، ١ ، ١) . (س ، ص ، ع) = ٣

٢ س + ص + ع − ٣ = ٠

* أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقط (٣ ، −١ ، ٠) ، (٢ ، ١ ، ٤) ، (٠ ، ٣ ، ٣)

الحل

أ(٣ ، −١ ، ٠) ، ب(٢ ، ١ ، ٤) ، حـ(٠ ، ٣ ، ٣)

$\overrightarrow{\text{أب}}$ = ب − أ = (−١ ، ٢ ، ٤)

$\overrightarrow{\text{أحـ}}$ = حـ − أ = (−٣ ، ٤ ، ٣)

∵ −١/−٣ ≠ ٢/٤ ∴ النقط ليست على استقامة واحدة

متجه اتجاه العمودي

$$\overrightarrow{\text{ن}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

= −١٠ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٩ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٢ $\overrightarrow{\text{ع}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$

(−١٠ ، −٩ ، ٢) . $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (−١٠ ، −٩ ، ٢) . (٣ ، −١ ، ٠)

(−١٠ ، −٩ ، ٢) . $\overrightarrow{\text{ر}}$ = −٢١ المتجهة

−١٠(س − ٣) − ٩(ص + ١) + ٢ع = ٠ القياسية

−١٠ س − ٩ ص + ٢ ع + ٢١ = ٠ العامة

* إذا كانت الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات بواسطة المستوى

س + ٥ ص − ٦ ع = ٣٠ هي أ ، ب ، حـ

فإن أ + ب + حـ = ...

الحل

Ⓐ صفر س/٣٠ + ص/٦ + ع/−٥ = ١

Ⓑ ٣٠

● ٣١ ٣٠ + ٦ + −٥ = ٣١

Ⓓ ٤١

* الجذور التكعيبية للعدد ع

$\sqrt[3]{ع} \longleftarrow ع^{\frac{1}{3}}$

$ع = ل\,(\text{جتا}\, هـ + ت\ \text{جا}\, هـ)$

$\sqrt[3]{ع} = \sqrt[3]{ل}\left(\text{جتا}\,\frac{هـ + 360\,ر}{3} + ت\ \text{جا}\,\frac{هـ + 360\,ر}{3}\right)$

حيث ر = ٠ ، ر = ١ ، ر = −١

* إذا كان $ع = \text{جا}\,\frac{\pi}{9} + ت\ \text{جتا}\,\frac{\pi}{9}$ أوجد $\bar{ع}$ في الصورة المثلثية ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد $(\bar{ع})^9$

الحل

$\bar{ع} = \text{جا}\,\frac{\pi}{9} - ت\ \text{جتا}\,\frac{\pi}{9}$

$= \text{جتا}\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{9}\right) + ت\ \text{جا}\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{9}\right)$

$= \text{جتا}\left(\frac{29}{18}\pi\right) + ت\ \text{جا}\left(\frac{29}{18}\pi\right)$

$\bar{ع} = \text{جتا}\left(\frac{-7}{18}\pi\right) + ت\ \text{جا}\left(\frac{-7}{18}\pi\right)$

$(\bar{ع})^9 = \text{جتا}\left(\frac{-7}{18}\pi \times 9\right) + ت\ \text{جا}\left(\frac{-7}{18}\pi \times 9\right)$

$= \text{جتا}\left(\frac{-7}{2}\pi\right) + ت\ \text{جا}\left(\frac{-7}{2}\pi\right)$

$= \text{جتا}\,\frac{\pi}{2} + ت\ \text{جا}\,\frac{\pi}{2}$

$\sqrt[3]{(\bar{ع})^9} = \text{جتا}\,\frac{\frac{\pi}{2} + 360\,ر}{3} + ت\ \text{جا}\,\frac{\frac{\pi}{2} + 360\,ر}{3}$

ر = ٠ $= \text{جتا}\,30 + ت\ \text{جا}\,30$

ر = ١ $= \text{جتا}\,150 + ت\ \text{جا}\,150$

ر = −١ $= \text{جتا}\,{-90} + ت\ \text{جا}\,{-90}$

* $هـ^{هـ ت} + هـ^{-هـ ت} = \ldots\ldots\ldots$

الحل

(أ) $هـ^{2هـ}$

(ب) $2\,\text{جتا}\, هـ$ ●

(ج) $2\,\text{جا}\, هـ$

(د) $هـ^{-2هـ}$

$\text{جتا}\, هـ + ت\ \text{جا}\, هـ + \text{جتا}\,{-هـ} + ت\ \text{جا}\,{-هـ}$

$= \text{جتا}\, هـ + \cancel{ت\ \text{جا}\, هـ} + \text{جتا}\, هـ - \cancel{ت\ \text{جا}\, هـ}$

$= 2\,\text{جتا}\, هـ$

* الجذور الخماسية للواحد الصحيح تمثل في مستوى أرجاند رؤوس

(أ) مثلث متساوي الأضلاع (ب) مربع

● خماسي منتظم (د) سداسي منتظم

آخر كلام

* إذا كان $ع_1 = \frac{6+4ت}{1+ت}$ ، $ع_2 = \frac{26}{5-ت}$

وكانت $ع = 4(ع_1 - ع_2)$

أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع على الصورة الأسية

الحل

$ع_1 = \frac{6+4ت}{1+ت} \times \frac{1-ت}{1-ت} = \frac{6-6ت+4ت-4ت^2}{1+1}$

$= \frac{6-2ت+4}{2} = \frac{10-2ت}{2}$

$\therefore ع_1 = 5 - ت$

$ع_2 = \frac{26}{5-ت} \times \frac{5+ت}{5+ت} = \frac{26(5+ت)}{25+1}$

$\therefore ع_2 = 5 + ت$

$\therefore ع = 4[5 - ت - (5+ت)]$

$ع = 4[\cancel{5} - ت - \cancel{5} - ت]$

$ع = -8ت$

ل = 8 ، $هـ = -\frac{\pi}{2}$

$ع = 8\, هـ^{-\frac{\pi}{2} ت}$

$\therefore \sqrt[3]{ع} = \sqrt[3]{8}\, هـ^{\frac{-\frac{\pi}{2} + 360\,ر}{3} ت}$

ر = ٠ $= 2\, هـ^{-\frac{\pi}{6} ت}$

ر = ١ $= 2\, هـ^{\frac{\pi}{2} ت}$

ر = −١ $= 2\, هـ^{-\frac{5\pi}{6} ت}$

* أي مما يأتي يمثل الصورة الجبرية للعدد $ع = 2\left(\text{جتا}\,\frac{2\pi}{3} + ت\ \text{جا}\,\frac{2\pi}{3}\right)$

(أ) $-\sqrt{3} + ت$ ● $-1 + \sqrt{3}\, ت$

(ب) $-\sqrt{2} + \sqrt{2}\, ت$ (د) $-\sqrt{3} - \sqrt{3}\, ت$

* الجزء الحقيقي للعدد المركب الذي مقياسه $\sqrt{3}$ وسعته $\frac{7\pi}{6}$ هو ....

(أ) $-\sqrt{3}$

(ب) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

● $-\frac{3}{2}$

(د) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

الحل

$= \sqrt{3}\left(\text{جتا}\,\frac{7\pi}{6} + ت\ \text{جا}\,\frac{7\pi}{6}\right)$

$= \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + ت \times -\frac{1}{2}\right)$

$= -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, ت$