ملخص قوانين الجبر (٣ث)

*** مبدأ العد :-**

اذا كان عدد طرق اجراء عملية ما يساوي (ن) طريقة وعدد طرق اجراء عملية أخرى يساوي (م) طريقة فإن

(١) عدد طرق إجراء العملية الأولى **و** الثانية = م × ن طريقة

(٢) عدد طرق إجراء العملية الأولى **أو** الثانية = م + ن طريقة

ويمكن تعميم هذه القواعد لأكثر من عمليتين

* عند اختيار أشياء عددها (ر) من بين أشياء عددها (ن) فإن عدد الطرق الممكنة اذا كان :-

(١) الاختيار بدون احلال
- مع مراعاة الترتيب = $^{ن}ل_{ر}$
- مع عدم مراعاة الترتيب = $^{ن}ق_{ر}$

(٢) الاختيار مع الإحلال
- مع مراعاة الترتيب = $(ن)^{ر}$
- مع عدم مراعاة الترتيب = $^{ن+ر-١}ق_{ر}$

*** ملاحظة :**

يستخدم القانون $^{ن+ر-١}ق_{ر}$ لايجاد عدد طرق توزيع (ر) من الأشياء **المتماثلة** على (ن) من الأماكن **بدون شرط أو قيد** مثلاً

عدد طرق وضع ٤ كرات متماثلة في ٥ سلال = $^{٥+٤-١}ق_{٤}$ = ٧٠ طريقة

عدد طرق توزيع ثلاث كتب على اربعة ارفف = $^{٤+٣-١}ق_{٣}$ = ٢٠ طريقة

* الترتيب في صف واحد :-

(١) عدد طرق ترتيب (ن) من الأشياء في (ن) من الأماكن في صف واحد = $\underline{|ن}$ طريقة

مثلا عدد طرق جلوس ٥ أشخاص على ٥ مقاعد في صف واحد = $\underline{|٥}$

(٢) عدد طرق ترتيب (ر) من الأشياء في (ن) من الأماكن في صف واحد = $^{ن}ل_{ر}$ طريقة حيث ن ≥ ر (دون شرط)

(٣) عدد طرق ترتيب (ر) من الأشياء في (ن) من الأماكن **بحيث تكون متجاورة** في صف واحد = (ن - ر + ١) $\underline{|ر}$ طريقة

مثلاً عدد طرق وقوف ٤ سيارات في ساحة انتظار بها ١٠ أماكن بحيث تكون متجاورة = (١٠ - ٤ + ١) $\underline{|٤}$ = ١٦٨ طريقة

* الترتيب في دائرة واحدة :-

(١) عدد طرق ترتيب (ن) من الأشياء في (ن) من الأماكن في دائرة واحدة = $\underline{|ن-١}$ طريقة

مثلاً عدد طرق جلوس ٥ أشخاص على ٥ مقاعد في شكل دائرة = $\underline{|٥-١}$ = $\underline{|٤}$ = ٢٤ طريقة

(٢) عدد طرق ترتيب (ر) من الأشياء في (ن) من الأماكن في دائرة واحدة = $^{ن-١}ل_{ر-١}$ طريقة (دون شرط)

(٣) عدد طرق ترتيب (ر) من الأشياء في (ن) من الأماكن في دائرة واحدة **بحيث تكون متجاورة** = ن $\underline{|ر}$ (مشروط)

مثلا عدد طرق وقوف ٤ سيارات في ١٠ أماكن على هيئة دائرة بحيث تكون متجاورة = ١٠ $\underline{|٤}$ = ٢٤٠ طريقة

* **تطبيق هندسي على مبدأ العد :-**

إذا كان لدينا مضلع عدد أضلاعه (ن) ضلع (عدد رؤوسه ن) أو لدينا (ن) من النقط التي ليست على استقامة واحدة فإن

(١) عدد جميع القطع المستقيمة التي تصل بين رأسين من رؤوس المضلع = $^{ن}ق_{٢}$

(٢) عدد أقطار هذا المضلع = $^{ن}ق_{٢} - ن$

(٣) عدد المثلثات التي رؤوسها ثلاث رؤوس من رؤوس هذا المضلع = $^{ن}ق_{٣}$ وقس على ذلك

التباديل ($^{n}P_{r}$)

* التبديل هو ترتيب لعدة أشياء مختلفة بأخذها كلها أو بعض منها في كل مرة وهو عدد صحيح موجب

* $^{ن}ل_{ر}$: هو عدد الترتيبات التي يمكن تكوينها باختيار (ر) من الأشياء المختلفة من بين (ن) من الأشياء

قوانين التباديل :-

(١) $^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢) ------- \times (ن-ر+١)$

حيث $ر \in ص^{+}$ ، $ن \in ص^{+}$ ، $ن \geq ر$

* نتيجة :-

① $^{ن}ل_{ن} = لـ\underline{ن} = ن(ن-١)(ن-٢) ------- \times ٣ \times ٢ \times ١$

② $لـ\underline{ن} = ن \, لـ\underline{ن-١} = ن(ن-١) \, لـ\underline{ن-٢}$ (التبسيط)

(٢) $^{ن}ل_{ر} = \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ن-ر}}$ حيث ر ∈ ط ، ن ∈ ص$^{+}$ ، ن ≥ ر

(٣) $^{ن}ل_{ن} = ١$ ، $^{ن}ل_{١} = ن$

(٤) العامل الاوسط فى مفكوك $^{ن}ل_{ر} = \frac{٢ن - ر + ١}{٢}$

* **ملاحظات هامة :-**

(١) $|\underline{٠} = ١$ ، $|\underline{١} = ١$

(٢) $|\underline{ن} = {}^{ن}ل_{ن} = {}^{ن}ل_{ن-١}$ مثلاً $|\underline{٥} = {}^{٥}ل_{٥} = {}^{٥}ل_{٤}$

(٣) اذا كان $^{ن}ل_{ن} = {}^{ن}ل_{ر}$ فان اما ن = ر أو ر = ن-١

أى أنه اذا كان $^{ن}ل_{ر} = |\underline{ن}$ فان ر = ن أو ر = ن-١

(٤) اذا كان $^{ن}ل_{ر} = ١$ فان ر = ٠ عندما ن > ١
ر = ١ عندما ن = ١

(٥) اذا كان $^{ن}ل_{ر} \geq ١$ فإن ر ≥ ٠ ، ن ≥ ر
علماً أن يتحقق الشرطان معاً

(٦) فى اى تبديل يكون ٠ ≤ الدليل ≤ العلم

(٧) اذا كان $^{ن}ل_{ر} = {}^{ك}ل_{ر}$ فان ٠ ≤ ر ≤ ن ، ن ≠ ٠

مثال :-
اوجد قيمة ن اذا كان $^{٧}ل_{ن-٣}$ له قيمة ① $^{٨}ل_{ن-٣} = {}^{٨}ل_{ن-٣}$

(1) ∵ ${}^{ن}ل_{٣}$ له قيمة ⟸ ∴ ٠ ≤ ن − ٣ ≤ ٧

٣ ≤ ن ≤ ١٠ ، ن ∈ $ص^{+}$

∴ ن ∈ {٣ ، ٤ ، ٥ ، ...... ، ٩ ، ١٠}

(2) ∵ ${}^{٨}ل_{ن-٣}$ = ${}^{٨}ل_{ن-٣}$ ⟵ ∴ ٠ ≤ ن − ٣ ≤ ٨

∴ ٣ ≤ ن ≤ ١١

∴ ن ∈ {٣ ، ٤ ، ٥ ، ..... ، ١٠ ، ١١}

التوافيق (nCr)

* التوافيق هو كل مجموعة يمكن تكوينها من مجموعة من الاشياء بأخذها كلها أو بأخذ بعض منها بغض النظر عن ترتيبها
* ${}^{ن}ق_{ر}$: هو عدد المجموعات الممكنة والتي يمكن تكوينها بأخذ (ر عدد الأشياء معدودين (ن اعدد الأشياء

* قوانين التوافيق :-

(1) ${}^{ن}ق_{ر} = \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{ر!}$ لكل ر ∈ $ص^{+}$ ، ن ≥ ر

(2) ${}^{ن}ل_{ر} = ر! \; {}^{ن}ق_{ر}$ يستخدم اذا وجدت ${}^{ن}ل_{ر}$ ، ${}^{ن}ق_{ر}$ في طرفي المعادلة

مثلا اذا كانت ${}^{ن}ل_{ر} = ٧٢٠$ ، ${}^{ن}ق_{ر} = ١٢٠$ اوجد قيمة ن ، ر

الحل

∵ ${}^{ن}ل_{ر} = ر! \; {}^{ن}ق_{ر}$ ∴ ٧٢٠ = ١٢٠ ر! ∴ ر! = ٦ ⟵ ر = ٣

∴ ${}^{ن}ل_{٣}$ = ٧٢٠ = ١٠ × ٩ × ٨ ⟵ ∴ ن = ١٠

(٣) $^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!}$ حيث ر ∈ ط ، ن ∈ ط ، ن ≥ ر

(٤) $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$ (قانون التبسيط) ويستخدم

في حالة ر > $\frac{ن}{٢}$ أو في حالة العام والدليل بهما نفس الرموز

مثلاً : إذا كانت $^{ن}ق_{ن-٢} = ٥٥$ أوجد قيمة ن

الحل

∵ $^{ن}ق_{ن-٢} = {}^{ن}ق_{٢}$ ∴ $^{ن}ق_{٢} = ٥٥$ ∴ $\frac{^{ن}ل_{٢}}{٢!} = ٥٥$

∴ $^{ن}ل_{٢} = ١١٠ = ١١ \times ١٠$ ← ∴ ن = ؟

(٥) إذا كان $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{هـ}$ فإن ر = هـ ، ن = ر + هـ

(٦) $^{ن}ق_{٠} = ١$ ، $^{ن}ق_{ن} = ١$ ، $^{ن}ق_{١} = ن$

أي أنه إذا كانت $^{ن}ق_{ر} = ١$ فإن ر = ٠ أو ر = ن

(٧) $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر} = \frac{\text{العام} + ١ - \text{الدليل الأكبر}}{\text{الدليل الأكبر}}$

أي أن النسبة بين توفيقتين متتاليتين لنفس العام = $\frac{\text{العام} + ١ - \text{الدليل الأكبر}}{\text{الدليل الأكبر}}$

مثلا إذا كان $^{٧}ق_{ر} : {}^{٧}ق_{ر-١} = ٣ : ٥$ أوجد قيمة ر

∵ $\frac{^{٧}ق_{ر}}{^{٧}ق_{ر-١}} = \frac{٣}{٥}$ ∴ $\frac{٨-ر}{ر} = \frac{٣}{٥}$ ∴ ٤٠ − ٥ر = ٣ر

∴ ر = ٥

(٨) قانون الجمع :- $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-1} = {}^{ن+1}ق_{ر}$

* تذكر هذا جيداً :-

(١) اذا كان $^{ن}ل_{ر}$ أو $^{ن}ق_{ر}$ لهم قيمة فإن

• ٠ ≤ ر ≤ ن اى أن ٠ ≤ الدليل ≤ العلم

(٢) اذا كان $^{ن}ل_{ر} = {}^{ن}ل_{هـ}$ فإن هناك عدة حلول :-

(i) ٠ ≤ ر ≤ ن بوجه عام ، ر = هـ

(ii) ر = ن ، هـ = ن - ١

(iii) ر = ن - ١ ، هـ = ن

مثال :- اذا كان $^{30}ل_{س} = {}^{30}ل_{س+2ص}$ أوجد قيم س ، ص

الحل

∵ $^{30}ل_{س} = {}^{30}ل_{س+2ص}$ ∴ (i) ٠ ≤ س ≤ ٣٠ ، س = س + ٢ص

منها عندما ٠ ≤ س ≤ ٣٠ فإن ص = ٠ ①

(ii) س = ٣٠ ، س + ٢ص = ٢٩ ∴ ص = $\frac{-1}{2}$

منها عندما س = ٣٠ فإن ص = $\frac{-1}{2}$ ②

(iii) س = ٢٩ ، س + ٢ص = ٣٠ منها ص = $\frac{1}{2}$

∴ عند س = ٢٩ فإن ص = $\frac{1}{2}$ ③

من ① ، ② ، ③ ينتج أن

عندما ٠ ≤ س ≤ ٣٠ فإن ص = ٠

س = ٣٠ فإن ص ∈ {٠ ، $-\frac{1}{2}$}

س = ٢٩ فإن ص ∈ {٠ ، $\frac{1}{2}$}

نظرية ذات الحدين

* مفكوك ذات الحدين :-

اذا كان س ، أ $\in$ ح ، ن $\in$ ص$^{+}$ فإن :-

$(س + أ)^{ن} = {}^{ن}ق_{0}\, أ^{0} س^{ن} + {}^{ن}ق_{1}\, أ^{1} س^{ن-1} + {}^{ن}ق_{2}\, أ^{2} س^{ن-2} + \ldots$

$\ldots + {}^{ن}ق_{ن}\, أ^{ن} س^{0}$ (حسب قوى س التنازلية)

$\therefore (س+أ)^{ن} = س^{ن} + {}^{ن}ق_{1}\, أ س^{ن-1} + {}^{ن}ق_{2}\, أ^{2} س^{ن-2} + \ldots + أ^{ن}$

$(س-أ)^{ن} = س^{ن} - {}^{ن}ق_{1}\, أ س^{ن-1} + {}^{ن}ق_{2}\, أ^{2} س^{ن-2} \ldots + (-أ)^{ن}$

* ملاحظات :-

(١) عدد حدود المفكوك يزيد عن الاس بمقدار واحد

(٢) مجموع قوى (س) وقوى (أ) في اى حد = أس المفكوك

(٣) لايجاد مجموع معاملات ذات الحدين نضع المتغير = ١ داخل القوس

مثلاً: مجموع معاملات حدود مفكوك $(٢س-٣)^{١٠٠} = (٢-٣)^{١٠٠} = ١$

" " " $(٥س-٣ص)^{٥} = (٥-٣)^{٥} = ٣٢$

حالات خاصة :-

(١) $(١+س)^{ن} = ١ + {}^{ن}ق_{1}\, س + {}^{ن}ق_{2}\, س^{2} + {}^{ن}ق_{3}\, س^{3} + \ldots + س^{ن}$

(٢) $(١-س)^{ن} = ١ - {}^{ن}ق_{1}\, س + {}^{ن}ق_{2}\, س^{2} - {}^{ن}ق_{3}\, س^{3} + \ldots + (-س)^{ن}$

(٣) ${}^{ن}ق_{0} + {}^{ن}ق_{1} + {}^{ن}ق_{2} + {}^{ن}ق_{3} + \ldots + {}^{ن}ق_{ن} = ٢^{ن}$

الحد العام في مفكوك $(س + أ)^{ن}$:-

$$ح_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر} \, (أ)^{ر} \, (س)^{ن-ر}$$

$$= {}^{ن}ق_{ر} \times (\text{الحد الثاني باشارته})^{ر} \times (\text{الحد الأول باشارته})^{ن-ر}$$

قواعد هامة :-

(١) $ح_{ر}$ من النهاية في مفكوك $(س + أ)^{ن}$ يساوي $ح_{ر}$ من البداية في مفكوك $(أ + س)^{ن}$

(٢) $(س + أ)^{ن} + (س - أ)^{ن} = ٢ [ح_{١} + ح_{٣} + ح_{٥} + \text{-----}]$

يساوي ضعف مجموع الحدود الفردية الرتبة في مفكوك $(س+أ)^{ن}$

(٣) $(س + أ)^{ن} - (س - أ)^{ن} = ٢ [ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦} + \text{-----}]$

يساوي ضعف مجموع الحدود الزوجية الرتبة في مفكوك $(س+أ)^{ن}$

* الحد الأوسط والحدان الأوسطان في مفكوك $(س + أ)^{ن}$:-

(١) إذا كانت ن عدداً زوجياً فإن عدد حدود المفكوك يكون فردياً وعلى ذلك يوجد حد أوسط رتبته $\frac{ن}{٢} + ١$

(٢) إذا كانت ن عدداً فردياً فإن عدد حدود المفكوك يكون زوجياً وبالتالي يوجد حدان أوسطان في هذا المفكوك رتبتهما $\frac{ن+١}{٢}$ والذي يليه $\frac{ن+٣}{٢}$

* الحد المشتمل على $س^{ك}$ في مفكوك ذات الحدين $(س+ا)^{ن}$

لايجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$ في مفكوك ذات الحدين $(س+ا)^{ن}$

(١) نوجد الحد العام لهذا المفكوك وهو $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}\, ا^{ر}\, س^{ن-ر}$

(٢) نساوي أس الس بـ ك لنحصل على (ر) التي تجعل الحد مشتمل على $س^{ك}$

(٣) للحصول على الحد الخالي من س نضع أس الس = صفر ثم نوجد قيمة ر التي تجعل الحد خالي من س

(٤) اذا كانت $ر \notin ط$ فانه المفكوك لايشتمل على $س^{ك}$

* النسبة بين حدين متتاليين في مفكوك $(س+ا)^{ن}$:-

$$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{ا}{س} = \frac{ن+١-\text{رتبة الحد الاصغر}}{\text{رتبة الحد الاصغر}} \times \frac{\text{الحد الثاني}}{\text{الحد الاول}}$$

$$\frac{\text{معامل } ح_{ر+١}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \times \frac{\text{معامل الحد الثاني}}{\text{معامل الحد الاول}}$$

$$= \frac{ن+١-\text{رتبة الحد الاصغر}}{\text{رتبة الحد الاصغر}} \times \frac{\text{معامل الحد الثاني}}{\text{معامل الحد الاول}}$$

مثلاً: في مفكوك $(٢س+٣ص)^{١٠}$ أوجد النسبة معاملي الحد $ح_{٧}$ ، $ح_{٦}$

$$\frac{\text{معامل } ح_{٧}}{\text{معامل } ح_{٦}} = \frac{١١-٦}{٦} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٥}{٦} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٥}{٤}$$

مثلا $\frac{ح_{٧}}{ح_{٨}} = \frac{٧}{١١-٧} \times \frac{٢س}{٣ص} = \frac{٧س}{٦ص}$

*** أكبر معامل في مفكوك ذات الحدين :-**

(١) في مفكوك $(1 \pm س)^{ن}$:-

(i) إذا كانت ن عدد زوجي فإن أكبر معامل في المفكوك يساوي **القيمة المطلقة لمعامل الحد الأوسط**

(ii) إذا كانت ن عدد فردي معاملي الحدين الأوسطين يكونان متساويان وتكون القيمة المطلقة لأي منهما هي أكبر معامل (لأن معاملي الحدين الأوسطين يكونان متساويان عددياً ومختلفين في الإشارة في $(1-س)^{ن}$)

(٢) في مفكوك $(أس \pm ب)^{ن}$:-

أكبر قيمة لأكبر معامل في المفكوك هو معامل $ح_{ر+1}$

وتعيين ر من العلاقة $\frac{ن+1-ر}{ر} \times \left|\frac{ب}{أ}\right| \geq 1$

مثال: أوجد أكبر معامل في مفكوك (١) $(2س+3ص)^{8}$ (٢) $(1-\frac{1}{س})^{9}$

الحل

(١) بوضع $\frac{9-ر}{ر} \times \left|\frac{3}{2}\right| \geq 1$ ∴ $27-3ر \geq 2ر$ ⟸ ∴ $ر \leq 5.4$

∴ ر = ٥

∴ أكبر معامل هو معامل $ح_{6} = {}^{8}ق_{5} (3)^{5} (2)^{3} = 108864$

(٢) بوضع $\frac{10-ر}{ر} \times \left|\frac{-1}{1}\right| \geq 1$ ∴ $\frac{10-ر}{ر} \geq 1$

∴ $ر \leq 5$ ⟸ ر = ٥ ، ر = ٤

يوجد حدان متتاليان لهما نفس القيمة العددية للمعامل

أكبر معامل = معامل $ح_{6}$ = معامل $ح_{5}$ = ${}^{9}ق_{4} (-1)^{4} (1)^{5} = 126$

الاعداد المركبة

الصورة الجبرية للعدد المركب هي $ع = س + ت ص$
حيث $س ، ص \in ح$ ، $ت^2 = -1$

* ملاحظات هامة :-

(1) اذا كان $ع = س + ت ص$ فان مرافق هذا العدد
هو $\bar{ع} = س - ت ص$

(2) $ع + \bar{ع} = 2 س$ (3) $ع \times \bar{ع} = س^2 + ص^2$

(4) $\overline{ع_1 + ع_2} = \bar{ع_1} + \bar{ع_2}$

(5) اذا كان $ع =$ صفر فان $س = 0$ ، $ص = 0$

(6) يكون العدد المركب في ابسط صورة اذا كان
مقامه عدد صحيح موجب

(7) المعادلة التكعيبية لها ثلاث جذور أحدهم
حقيقي والآخران مركبان ومترافقان

مثلاً اذا كان 3 ، $2 - ت$ جذرين من جذور معادلة
تكعيبية فان الجذر الثالث هو $2 + ت$

(8) بالنسبة لمستوى آرجاند :-
اذا كان $ع = س + ت ص$ فان

(i) $\bar{ع} = س - ت ص$ وهو مرافق العدد ع وهو صورة العدد
المركب ع بالانعكاس في محور س وتمثله النقطة $(س ، -ص)$

(ii) $-ع$ هو المعكوس الجمعي للعدد المركب ع وهو انعكاس
للعدد المركب في نقطة الاصل وتمثله النقطة $(-س ، -ص)$

(iii) $|ع| = |\bar{ع}| = |-ع| = |-\bar{ع}|$

(٩) سعة العدد المركب :- هى الزاوية القطبية عند نقطة الاصل والتى يصنعها المتجه الممثل للعدد المركب مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

وهى تأخذ عدداً غير منتهى من القيم أى أن

سعة العدد المركب $= \theta + 2ن\pi$ ، ن $\in$ ص

وهى لا تتغير اذا ضرب العدد المركب فى عدد موجب حقيقى

(١٠) السعة الاساسية للعدد المركب $\in]-\pi ، \pi]$

* الصورة المثلثية للعدد المركب :-

اذا كان ع = س + ت ص فان :

ل $= \sqrt{س^2 + ص^2}$ مقياس العدد المركب

$\theta =$ ظا$^{-1}$ $\left(\frac{ص}{س}\right)$ سعة العدد المركب

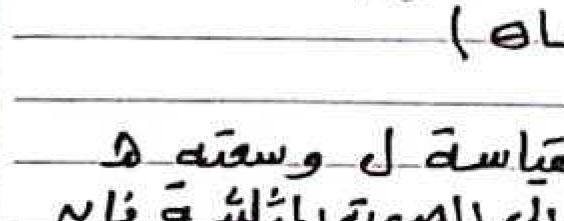
وتكون اساسية عندما $\theta \in]-\pi ، \pi]$

وتكون الصورة المثلثية للعدد المركب هى

ع = ل (جتاθ + ت جاθ)

* اذا كان العدد المركب ع مقياسه ل وسعته هـ ويراد تحويل العدد المركب ع الى الصورة المثلثية فانه

(١) اذا كان ع على الصورة ع = (جتاهـ ، جاهـ) نستخدم الشكل المقابل للحصول على سعة العدد المركب ومنها الحصول على سعته الاساسية



مثلاً ع = -٣ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)

∴ ع = ٣ (جتا ٦٠ - ت جا ٦٠) في الربع الرابع

∴ θ = ٣٦٠ - ٦٠ = ٣٠٠

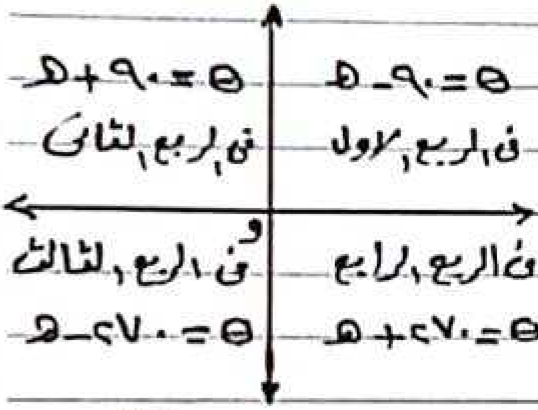
∴ السعة الأساسية = ٣٠٠ - ٣٦٠ = -٦٠°

∴ ع = ٣ (جتا(-٦٠°) + ت جا(-٦٠°)) وقس على ذلك

(٢) إذا كان العدد على الصورة

ع = (جا هـ ± ت جتا هـ)

نستخدم الشكل المقابل



مثلاً ع = ٦ (-جا $\frac{4\pi}{3}$ + ت جتا $\frac{4\pi}{3}$)

∴ ع = ٦ (-جا ٢٤٠° + ت جتا ٢٤٠°) في الربع الثاني

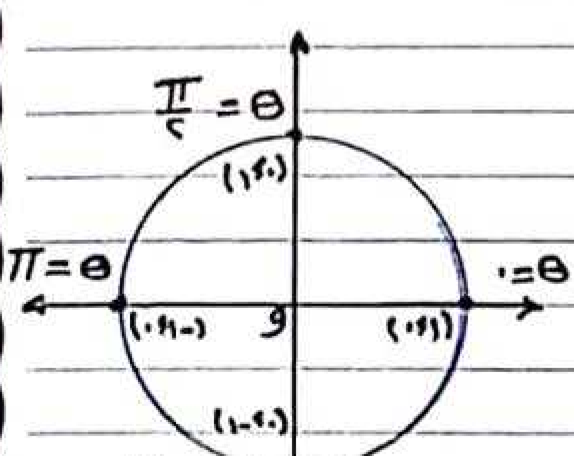
∴ θ = ٩٠ + ٢٤٠ = ٣٣٠

θ = ٣٣٠ - ٣٦٠ = -٣٠°

∴ ع = ٦ (جتا -٣٠° + ت جا -٣٠°) = ٦ (جتا($\frac{-\pi}{6}$) + ت جا($\frac{-\pi}{6}$))

وقس على ذلك

* استخدام دائرة الوحدة



١ = (جتا ٠° + ت جا ٠)

ت = (جتا $\frac{\pi}{2}$ + ت جا $\frac{\pi}{2}$)

-١ = (جتا π + ت جا π)

-ت = (جتا($\frac{-\pi}{2}$) + ت جا($\frac{-\pi}{2}$))

*** العمليات على الأعداد المركبة في الصورة المثلثية :-**

اذا كان $ع_1 = ل_1 (جتا \theta_1 + ت جا \theta_1)$

$ع_2 = ل_2 (جتا \theta_2 + ت جا \theta_2)$ فان :

(1) $ع_1 ع_2 = ل_1 ل_2 (جتا (\theta_1 + \theta_2) + ت جا (\theta_1 + \theta_2))$

(2) $\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ل_1}{ل_2} (جتا (\theta_1 - \theta_2) + ت جا (\theta_1 - \theta_2))$

* ملحوظة :- لاجراء اي عملية على الاعداد المركبة لابد أن تكون هذه الاعداد في الصورة المثلثية الاساسية

(3) نتيجة :-

اذا كان $ع = ل (جتا \theta + ت جا \theta)$ فان

$ع^{ن} = (ل)^{ن} (جتا (ن \theta) + ت جا (ن \theta))$ $ن \in ص^{+}$

*** معلومات اثرائية :-**

مفكوك تايلور لبعض الدوال

$جا س = \sum_{ن=0}^{\infty} \frac{(-1)^{ن}}{\underline{|2ن+1}} س^{2ن+1} = \frac{س}{\underline{|1}} - \frac{س^3}{\underline{|3}} + \frac{س^5}{\underline{|5}} - \cdots$

$جتا س = \sum_{ن=0}^{\infty} \frac{(-1)^{ن}}{\underline{|2ن}} س^{2ن} = 1 - \frac{س^2}{\underline{|2}} + \frac{س^4}{\underline{|4}} - \cdots$

$هـ^{س} = 1 + \frac{س}{\underline{|1}} + \frac{س^2}{\underline{|2}} + \frac{س^3}{\underline{|3}} + \cdots$

* الصورة الاسية للعدد المركب :-

اذا كان $ع = ل\,(\text{جتا}\theta + ت\,\text{جا}\theta)$ فان الصورة الاسية للعدد المركب هي $ع = هـ^{\theta ت}$ حيث θ مقاسة بالتقدير الدائري

* اذا كان $ع_1 = ل_1\,هـ^{\theta_1 ت}$ ، $ع_2 = ل_2\,هـ^{\theta_2 ت}$ فان

(1) $ع_1\,ع_2 = ل_1\,ل_2\,هـ^{(\theta_1+\theta_2)ت}$

(2) $\dfrac{ع_1}{ع_2} = \dfrac{ل_1}{ل_2}\,هـ^{(\theta_1-\theta_2)ت}$

(3) $ع^{ن} = (ل)^{ن}\,هـ^{ن\theta ت}$ حيث $ن \in ص^{+}$

* نظرية ديموافر :-

لأي عدد مركب $ع = ل\,(\text{جتا}\theta + ت\,\text{جا}\theta)$ فانه

(1) $ع^{ن} = (ل)^{ن}\,(\text{جتا}\,ن\theta + ت\,\text{جا}\,ن\theta)$ $ن \in ص^{+}$

(2) اذا كانت $ك \in ص^{+}$ فان :

$$ع^{\frac{1}{ك}} = \sqrt[ك]{ل}\,(\text{جتا}\theta + ت\,\text{جا}\theta)^{\frac{1}{ك}}$$

$$\therefore ع = \sqrt[ك]{ل}\left(\text{جتا}\left(\frac{\theta+2ر\pi}{ك}\right) + ت\,\text{جا}\left(\frac{\theta+2ر\pi}{ك}\right)\right)$$

حيث ر = ٠ ، ١ ، -١ ، ٢ ، -٢ ، .... ، (ك-١)

* ملحوظة هامة :

إذا كان عدد جذور عدد مركب ما يساوي ن جذراً فإن الفرق بين أي سعتي جذرين متتاليين = $\frac{٣٦٠}{ن}$ بمعنى

إذا كانت سعة الجذر الأول = $هـ_1$

فإن سعة الجذر الثاني $هـ_2 = هـ_1 + \frac{٣٦٠}{ن}$

" " الثالث $هـ_3 = هـ_2 + \frac{٣٦٠}{ن}$ وهكذا

مثلاً :

أوجد مجموعة حل المعادلة $ع^4 = ٨(١ - \sqrt{٣}\,ت)$ على الصورة المثلثية

الحل

$\because ع^4 = ١٦\left(\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت\right) \quad \therefore ع^4 = ١٦(جتا\,٣٠٠ + ت\,جا\,٣٠٠)$

$\therefore ع^4 = ١٦\left(جتا(-٦٠) + ت\,جا(-٦٠)\right)$

$\therefore ع = ٢\left(جتا\,\frac{-٦٠ + ٢ر\pi}{٤} + ت\,جا\,\frac{-٦٠ + ٢ر\pi}{٤}\right)$

حيث ر = ٠ ، ١ ، -١ ، ٢

عند ر = ٠ فإن $ع = ٢\left(جتا(-١٥) + ت\,جا(-١٥)\right)$

$\therefore$ عند ر = ٠ فإن $ع = ٢\left(جتا\left(\frac{-\pi}{١٢}\right) + ت\,جا\left(\frac{-\pi}{١٢}\right)\right)$

$\because \frac{٣٦٠}{٤} = ٩٠ = \frac{\pi}{٢}$

$\therefore$ الجذر الثاني $= ٢\left(جتا\left(\frac{٥\pi}{١٢}\right) + ت\,جا\left(\frac{٥\pi}{١٢}\right)\right)$

الجذر الثالث $= ٢\left(جتا\left(\frac{١١\pi}{١٢}\right) + ت\,جا\left(\frac{١١\pi}{١٢}\right)\right)$

الجذر الرابع $= ٢\left(جتا\,\frac{١٧\pi}{١٢} + ت\,جا\left(\frac{١٧\pi}{١٢}\right)\right)$

$= ٢\left(جتا\left(\frac{-٧\pi}{١٢}\right) + ت\,جا\left(\frac{-٧\pi}{١٢}\right)\right)$

* الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :-

* الجذور التكعيبية للواحد الصحيح هي :-

1 ، $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ت ، $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ت

* خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

(١) الجذران المركبان كلاً منهما مرافق للآخر

(٢) مربع احد الجذرين المركبين يساوي الجذر المركب الآخر
لذلك نرمز للجذرين المركبين بالرمزين ω ، ω^2

(٣) $\omega^3 = 1$ ، $\omega^{3n} = 1$ ، $\omega^{3n+1} = \omega$ ، $\omega^{3n+2} = \omega^2$

(٤) $1 + \omega + \omega^2 =$ صفر
ومجموع أي جذرين = سالب الجذر الثالث

(٥) $\omega - \omega^2 = \omega^2 - \omega = \pm\sqrt{3}$ ت

(٦) اذا كان ع $= \omega^n$ فإن $|$ع$| = 1$