1

الارتباط و الانحدار

(1) اختر الاجابة الصحيحة مما بين القوسين

الوحدة (1) اولا الارتباط

أ) الارتباط هو علاقة بين .... {متغير وثابت ، متغيرين ، متغيرين أو أكثر}

ب) يكون معامل الارتباط موجبا في حالة الارتباط .... {العكسي ، المنعدم ، الطردي}

جـ) يكون الارتباط عكسيا إذا كان معامل الارتباط .... {موجبا ، صفر ، سالبا}

د) يكون الارتباط طرديا تاما إذا كان ر = ... {٠ ، -١ ، ١}

هـ) يكون الارتباط عكسيا تاما إذا كان ر = ... {٠ ، ١ ، -١}

و) يكون الارتباط منعدما إذا كان ر = ... {١ ، -١ ، ٠}

ح) يستخدم معامل الارتباط الخطي في حساب الارتباط للبيانات .... {الوصفية فقط ، الكمية فقط ، الكمية والوصفية معا}

خ) تستخدم طريقة سبيرمان في حساب الارتباط للبيانات .... {الكمية فقط ، الكمية والوصفية معا ، الوصفية فقط}

ط) معامل الارتباط ر ∈ .... {١ ، -١ ، ٠} ، {-١ ، ١} ، [-١ ، ١]}

---

(2) Egy 001 اوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص وحدد نوعه إذا كان مجـ س = ٢٩ ، مجـ ص = ٥٩ ، مجـ س ص = ٢٨٢

مجـ س² = ٢٩٢ ، مجـ ص² = ٧٠١ ، ن = ٦

الحل

$$ر = \frac{ن\, مجـ\, س\, ص - مجـ\, س \cdot مجـ\, ص}{\sqrt{ن\, مجـ\, س^2 - (مجـ\, س)^2} \times \sqrt{ن\, مجـ\, ص^2 - (مجـ\, ص)^2}} = \frac{٦ \times ٢٨٢ - ٢٩ \times ٥٩}{\sqrt{٦ \times ٢٩٢ - (٢٩)^2} \times \sqrt{٦ \times ٧٠١ - (٥٩)^2}}$$

ر = -٠.٠٠٧ عكسي

---

(3) من بيانات الجدول الآتي احسب معامل الارتباط الخطي لبيرسون بين المتغيرين س ، ص {(٥،٢) ، (٦،٥) ، (٤،٧) ، (٧،٨) ، (٩،١١) ، (٨،٧)}

الحل

س	ص	س²	ص²	س ص
٥	٢	٢٥	٩	١٥
٦	٥	٣٦	٢٥	٣٠
٤	٧	١٦	٤٩	٢٨
٧	٨	٤٩	٦٤	٥٦
٩	١١	٨١	١٢١	٩٩
٨	٧	٦٤	٤٩	٥٦
مجـ ٣٩	٤١	٢٧١	٢١٧	٢٨٤

$$ر = \frac{ن\, مجـ\, س\, ص - مجـ\, س\, مجـ\, ص}{\sqrt{ن\, مجـ\, س^2 - (مجـ\, س)^2} \times \sqrt{ن\, مجـ\, ص^2 - (مجـ\, ص)^2}}$$

ر = ...

ر = ٠.٦٩ نوعه طردي

٤) (Egy 2000) الجدول الآتى يبين درجات ست طلاب فى مادتى الاحصاء والاقتصاد احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان {(ح، م) : (٩، ٧)، (٢٠، ١٥)، (١٨، ٢٠)، (١٦، ١٢)، (١٧، ١٧)، (٩، ٨)}

2

ح	م	رتب ح	رتب م	ف	ف²
٩	٧	١٫٥	١	٠٫٥	٠٫٢٥
٢٠	١٥	٦	٤	٢	٤
١٨	٢٠	٥	٦	-١	١
١٦	١٢	٢	٢	٠	٠
١٧	١٧	٤	٥	-١	١
٩	٨	١٫٥	٢	-٠٫٥	٠٫٢٥
مج				صفر	٦٫٥

الحل

من الجدول مج ف² = ٦٫٥

$$\text{ر} = 1 - \frac{6\,\text{مج ف}^2}{\text{ن}^3 - \text{ن}} = 1 - \frac{6\,\text{مج ف}^2}{\text{ن}(\text{ن}^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{\cancel{6} \times 6.5}{6[6^2 - 1]} = 1 - \frac{6.5}{35}$$

$$\simeq 0.814$$

٥) الجدول الآتى يبين تقديرات سبعة طلاب فى مادتى الفيزياء والرياضيات والمطلوب حساب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

الفيزياء ط	جيد	متوسط	جيد	جيد جداً	ممتاز	متوسط	ممتاز
الرياضيات س	متوسط	جيد	جيد جداً	جيد جداً	ممتاز	جيد	جيد جداً

الحل

ط	س	رتب ط	رتب س	ف	ف²
جيد	متوسط	٣٫٥	١		
متوسط	جيد	١٫٥	٢٫٥		
جيد	جيد جداً	٣٫٥	٥		
جيد جداً	جيد جداً	٥	٥		
ممتاز	ممتاز	٦٫٥	٧		
متوسط	جيد	١٫٥	٢٫٥		
ممتاز	جيد جداً	٦٫٥	٥		
					١٢

من الجدول نجد أنه

مج ف² = ١٢

$$\text{ر} = 1 - \frac{6\,\text{مج ف}^2}{\text{ن}^3 - \text{ن}}$$

$$\text{ر} = 1 - 6 \times$$

$$\text{ر} = 1 - \frac{12}{56} \simeq 0.77$$

تدريب من بيانات الجدول الاتى احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان واحسب ايضا معامل الارتباط الخطى لبيرسون وأيهما افضل فى رأيك للحصول على نتائج أدق ولماذا؟

استنتج معامل الارتباط الخطى بينه س، ص حيث س = ٣ص - ٤، ص = ٦ص - ٦

س	٩	١٥	١٢	١٦	١٢	٧
ص	١٠	١٢	٢٠	١١	١٦	١٨

سبيرمان -٠٫٢٤ عكسى

بيرسون -٠٫٢٢ عكسى

بيرسون أدق

ثانيا الانحدار

(١) اختر الاجابة الصحيحة من بين القوسين

١) الارتباط بين المتغيرين س، ص يكون طرديا إذا كان الخط المستقيم يمر بأكبر عدد من النقاط التي تمثل شكل الانتشار ويكون ميله
{ موجب ، سالبا ، غير معروف ، صفر }

٢) الارتباط يكون عكسيا إذا كان الخط المستقيم يمر بأكبر عدد من النقاط ويكون ميله { سالبا ، صفر ، موجبا ، غير معروف }

٣) لتقدير قيمة ص إذا اعطيت قيمة لـ س تكون معادلة خط الانحدار
{ ص = ٢س + ب ، ص = ٢س + ٩ ، ص = س + ٩ } حيث ٩ معامل انحدار ص على س

مثال) لدراسة العلاقة بين الكميات المطلوبة من سلعة معينة (س) بالطن والسعر الناظر لها (ص) بالآلف جنيه في ستة فترات مختلفة كانت لدينا البيانات التالية

الكمية المطلوبة (س)	٣	٥	٧	٦	٨	١٠
السعر (ص)	٢	٤	٥	٤	٦	٨

١) اوجد معادلة خط انحدار السعر على الكمية المطلوبة
٢) تنبأ بقيمة ص بالجنيه عندما س = ٤
٣) اوجد مقدار الخطأ في السعر إذا علمت أن الكمية المطلوبة ٧ طن

الحل) سؤال لماذا لم تحسب ص² من الجدول

س	ص	س ص	س²	ص²
٢	٢	٦	٩	
٥	٤	[illegible]	٢٥	
٧	٥	٣٥	٤٩	
٦	٤	٢٤	٣٦	
٨	٦	٤٨	٦٤	
١٠	٨	٨٠	١٠٠	
٣٩	٢٩	٢١٢	٢٨٢	$\sum$

من الجدول $\sum$ س = ٣٩ ، $\sum$ ص = ٢٩

$\sum$ س ص = ٢١٢ ، $\sum$ س² = ٢٨٢

معادلة خط انحدار ص على س هي

ص = ٩ س + ب ∴ لابد من إيجاد ٩ ، ب

$$٩ = \frac{ن \sum س ص - \sum س \times \sum ص}{ن \sum س^2 - (\sum س)^2}$$

$$٩ = \frac{٦ \times ٢١٢ - ٣٩ \times ٢٩}{٦ \times ٢٨٢ - (٣٩)^2} = \frac{١٤٧}{١٧٧} = ٠٫٨٢٠٥$$

$$ب = \frac{\sum ص - ٩ \sum س}{ن} = \frac{٢٩ - ٠٫٨٢٠٥ \times ٣٩}{٦}$$

∴ ب = −٠٫٥٦٤٩

للتنبؤ بقيمة ص :

ص = ٩ س + ب = ٠٫٨٢٠٥ س − ٠٫٥٦٤٩

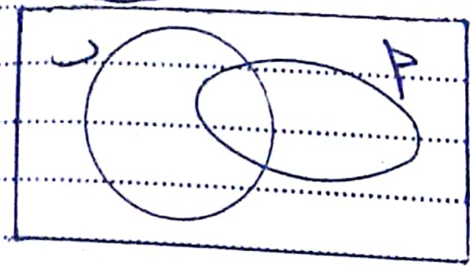
سنعوض عن س بـ ٤ ∴ ص = ٠٫٨٢٠٥ × ٤ − ٠٫٥٦٤٩ = ٢٫٧٥٧١

∴ قيمة ص بالجنيهات = ٢٧٥٧٫١ جنيه

مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية − ص(٧) | = | ٥ − ٥٫٢٤٨٦ | = ٠٫٢٤٨٦

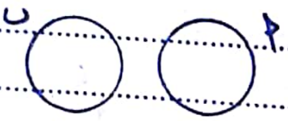
الاحتمال: لأي حدث أ ⊂ ف فإنه احتمال وقوع أ هو ل(أ)
حيث صفر ≤ ل(أ) ≤ 1
واحتمال عدم وقوع أ هو ل(أ̄) حيث ل(أ) + ل(أ̄) = 1

* ومنها: $\boxed{\text{ل(أ̄) = 1 − ل(أ)}}$ ، $\boxed{\text{ل(أ) = 1 − ل(أ̄)}}$

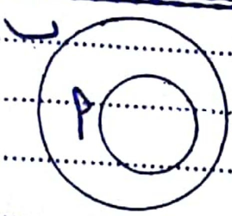


* اذا كان أ، ب حدثان من فضاء
• ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)
• ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)
• ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) وبالمثل ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(ب ∩ أ)

الاحداث المتنافية: أ، ب حدثان متنافيان اذا كان أ ∩ ب = ∅



ويكون ل(أ ∩ ب) = صفر
، ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)
ل(أ − ب) = ل(أ) ، ل(ب − أ) = ل(ب)



* اذا كان أ ⊂ ب فإنه:
ل(أ ∩ ب) = ل(أ) ،
ل(أ ∪ ب) = ل(ب) .

ملحوظة: (و) تعني تقاطع ∩
(أو) تعني اتحاد ∪

ملحوظة: قبل البدء في الحل لازم يكون عندي
ل(أ) ، ل(ب) ، ل(أ ∩ ب) ، ل(أ ∪ ب)

قوانين للتحويل

- ل(أ ∩ بَ) = ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)
- ل(ب ∩ أَ) = ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

- ل(أَ ∩ بَ) = ل(أ ∪ ب)َ = ١ − ل(أ ∪ ب)
- ل(أَ ∪ بَ) = ل(أ ∩ ب)َ = ١ − ل(أ ∩ ب)

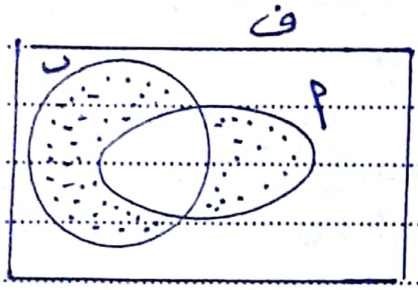
- ل(أ ∪ بَ) = ل(ب − أ)َ = ١ − ل(ب − أ)
- ل(أَ ∪ ب) = ل(أ − ب)َ = ١ − ل(أ − ب)

ملاحظات

- احتمال وقوع احد الحدثين على الأقل هو ل(أ ∪ ب)
- احتمال وقوع احد الحدثين على الأكثر هو ل(أ ∩ ب)َ
  (احتمال عدم وقوعهما معاً)

- احتمال وقوع الحدثين معاً هو ل(أ ∩ ب)
- احتمال وقوع أ فقط هو ل(أ − ب) = ل(أ ∩ بَ)
- احتمال وقوع ب فقط هو ل(ب − أ) = ل(ب ∩ أَ)

- احتمال وقوع أحدها فقط هو:



ل[(أ − ب) ∪ (ب − أ)] = ل(أ − ب) + ل(ب − أ)

= ل(أ) + ل(ب) − ٢ل(أ ∩ ب)

أو = ل(أ ∪ ب) − ل(أ ∩ ب)

الوحدة الثانية

الاحتمال الشرطي

إذا كان ف فضاء العينة لتجربة عشوائية ما وكانت أ، ب حدثين من ف فإن احتمال وقوع الحدث أ بشرط وقوع الحدث ب ويرمز له بالرمز ل(أ | ب)

- $ل(أ | ب) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)}$ حيث ل(ب) ≠ صفر

- ومنها $ل(أ \cap ب) = ل(أ | ب) \times ل(ب)$

وبالمثل $ل(ب | أ) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)}$ ومنها $ل(أ \cap ب) = ل(ب | أ) \times ل(أ)$

ملاحظات

- $ل(أ | ب) \neq ل(ب | أ)$
- $ل(\bar{أ} | ب) = ١ - ل(أ | ب)$
- $ل(\bar{ب} | أ) = ١ - ل(ب | أ)$

الحدثان المستقلان

يقال للحدثين أ، ب أنهما مستقلان إذا كان:

$ل(أ \cap ب) = ل(أ) \times ل(ب)$

أي أن احتمال حدوث ب لم يؤثر على احتمال حدوث أ بمعنى أن الحدث أ لا يعتمد معلوميته أن الحدث ب قد وقع

- الحدثان المتنافيان تكونان مستقلان إذا وإذا فقط كان
$ل(أ) \times ل(ب) = صفر$

- الأحداث غير المستقلة: يكون أ، ب حدثين غير مستقلين إذا كان
$ل(أ \cap ب) \neq ل(أ) \times ل(ب)$

تمرينات

(١) حاول أن تحل رقم (١) ص ٣٤ الكتاب المدرسي

ألقي حجر نرد مرتين متتاليتين. ما احتمال ألا يزيد عدد النقاط في الرمية الأولى عن ٤ إذا علمت أن الفرق المطلق بين العددين الظاهرين يساوي ٢ ؟

الحل

نفرض أن أ هو حدث ألا يزيد عدد النقاط في الرمية الأولى عن ٤

أ = {(١،١)، (١،٢)، (١،٣)، (١،٤)، (١،٥)، (١،٦)،
(٢،١) ، (٢،٢) ، (٢،٤) ، (٢،٦)
(٣،١) ، (٣،٢) ، (٣،٥) ، (٣،٦)
(٤،١) ، (٤،٢) ، (٤،٦)}

نفرض أن ب هو حدث الفرق المطلق بين العددين الظاهرين ٢

ب = {(١،٣)، (٢،٤)، (٣،١)، (٣،٥)، (٤،٢)، (٤،٦)، (٥،٣)، (٦،٤)}

ل(أ ∩ ب) = $\frac{٦}{٣٦}$ ، ل(ب) = $\frac{٨}{٣٦}$

∴ ل(أ | ب) = $\frac{ل(أ ∩ ب)}{ل(ب)}$ = $\frac{٦/٣٦}{٨/٣٦}$ = $\frac{٣}{٤}$

---

(٢) حاول أن تحل رقم (٢) ص ٣٥ الكتاب المدرسي

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ف بحيث ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٢٥ ، ل(أ − ب) = ٠,٤٥ أوجد

(أ) ل(أ | ب) (ب) ل(ب | أ) (جـ) ل(أَ | ب) (د) ل(أ | أَ)

الحل

∵ ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) = ٠,٤٥ ∴ ل(أ ∩ ب) = ٠,٧ − ٠,٤٥ = ٠,٢٥

(أ) ل(أ | ب) = $\frac{ل(أ ∩ ب)}{ل(ب)}$ = $\frac{٠,٢٥}{٠,٢٥}$ = ١

(ب) ل(ب | أ) = $\frac{ل(أ ∩ ب)}{ل(أ)}$ = $\frac{٠,٢٥}{٠,٧}$ = $\frac{٥}{١٤}$

(جـ) $ل(أ | ب) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)} = \frac{ل(ب - أ)}{ل(ب)} = \frac{ل(ب) - ل(أ \cap ب)}{ل(ب)}$

$= \frac{0{,}25 - 0{,}25}{0{,}25} = صفر$

(د) $ل(\bar{أ} | \bar{ب}) = \frac{ل(\bar{أ} \cap \bar{ب})}{ل(\bar{ب})} = \frac{ل(\overline{أ \cup ب})}{1 - ل(ب)} = \frac{1 - ل(أ \cup ب)}{1 - ل(ب)}$

حيث $ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب) = 0{,}7 + 0{,}25 - 0{,}25 = 0{,}7$

$\therefore ل(\bar{أ} | \bar{ب}) = \frac{1 - 0{,}7}{1 - 0{,}25} = \frac{0{,}3}{0{,}75} = \frac{2}{5}$

(3/1) حاول أن تحل رقم (5) ص 37 بالكتاب المدرسي

يصوب لاعبان أ، ب في وقت واحد نحو هدف ما فإذا كان احتمال أن يصيب اللاعب أ الهدف $= \frac{2}{5}$ واحتمال أن يصيب اللاعب ب الهدف $= \frac{1}{4}$ واحتمال أن يصيب اللاعبان الهدف معاً هو $= \frac{1}{6}$ أوجد احتمال

أ) إصابة الهدف

(ب) إصابة الهدف من اللاعب أ إذا تم إصابته من اللاعب ب

جـ) إصابة الهدف من اللاعب ب إذا تم إصابته من اللاعب أ

(حل 1) $ل(أ) = \frac{2}{5}$ ، $ل(ب) = \frac{1}{4}$ ، $ل(أ \cap ب) = \frac{1}{6}$

أ) احتمال إصابة الهدف هو $ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب)$

$= \frac{2}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{29}{60}$

(ب) $ل(أ | ب) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$

(جـ) $ل(ب | أ) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{12}$

(٧) إذا ألقيت قطعة نقود ثم ألقي حجر نرد فما احتمال ظهور صورة والعدد ٣

الحل: الحدثان مستقلان لأن إلقاء قطعة النقود لا يؤثر في نواتج إلقاء حجر النرد

أ حدث ظهور الصورة $\therefore$ ل(أ) $= \frac{1}{2}$

ب حدث ظهور العدد ٣ $\therefore$ ل(ب) $= \frac{1}{6}$

$\therefore$ ل(أ $\cap$ ب) = ل(أ) $\times$ ل(ب) $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

---

(٨) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة وكان ل(ب) = ٠.٣ ، ل(أ $\cup$ ب) = ٠.٥ أوجد قيمة ل(أ) إذا كان أ، ب

أ) حدثين متنافيين   ب) حدثين مستقلين

الحل: (أ) $\because$ أ، ب متنافيين $\therefore$ ل(أ $\cap$ ب) = صفر

$\therefore$ ل(أ $\cup$ ب) = ل(أ) + ل(ب) $\therefore$ ٠.٥ = ل(أ) + ٠.٣

$\therefore$ ل(أ) = $\boxed{٠.٢}$

(ب) أ، ب حدثين مستقلين

$\because$ ل(أ $\cap$ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ $\cup$ ب)

ل(أ $\cap$ ب) = ل(أ) + ٠.٣ − ٠.٥

ل(أ $\cap$ ب) = ل(أ) − ٠.٢ *

ب الحدثين مستقلين $\therefore$ ل(أ $\cap$ ب) = ل(أ) $\times$ ل(ب)

$\therefore$ ل(أ) − ٠.٢ = ل(أ) $\times$ ٠.٣

$\therefore$ ل(أ) − ٠.٣ ل(أ) = ٠.٢

٠.٧ ل(أ) = ٠.٢ $\therefore$ ل(أ) = $\boxed{\frac{2}{7}}$

الوحدة ٣ (المتغير العشوائي) ٢٠٠٧ أولا المتقطع

4

① اختر الاجابة الصحيحة مما بين القوسين

(أ) المتغير العشوائي يحول فضاء العينة الى عدد من ....
{ الاحداث الاولية ، الاحداث المؤكدة ، الاحداث المتنافية }

(ب) المتغير العشوائي المتقطع مداه ....
{ مجموعة غير قابلة للحصر ، مجموعة خالية ، مجموعة محدودة ، جزئية من الاعداد الحقيقية }

(ج) التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع يعبر عنه بـ .... المعدد لبيان الدالة { مجموعة الازواج المرتبة ، مجموعة الاعداد الاولية ، مجال الدالة }

(د) مجموع احتمالات الاحداث المناظرة لقيم المتغير العشوائي تساوي ....
{ ١ ، -١ ، صفر ، [٠،١] }

(هـ) القيمة التي تتمركز حولها قيم المتغير العشوائي تسمى ....
{ التوقع ، التباين ، الانحراف المعياري ، معامل الاختلاف }

(و) يحدد التباين انتشار قيم المتغير العشوائي حول ....
{ متوسطه ، انحرافه المعياري ، معامل اختلافه ، توزيعه الاحتمالي }

② بين أي الدوال الآتية لا يمكن ان تحدد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع س الذي مداه {٠، ١، ٢} مع ذكر السبب

(أ) $د_١(س) = \frac{س^٢+١}{٨}$ ، (ب) $د_٢(س) = \frac{٢س+١}{٣}$ ، (ج) $د_٣(س) = \frac{١}{٢(س+١)}$

الحل

(أ) ∵ $د_١(س) = \frac{١+٠}{٨} + \frac{١+١}{٨} + \frac{١+٤}{٨} = \frac{٨}{٨} = ١$ ∴ تحدد

(ب) ∵ $د_٢(س) = \frac{١+٠}{٣} + \frac{١+٢}{٣} + \frac{١+٤}{٣} = ٣ \neq ١$ ∴ لا تحدد

(ج) ∵ $د_٣(س) = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٦} \neq ١$ ∴ لا تحدد

③ 2006 Egy
إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً وكانت لديك الدالة $د(س) = \frac{١}{١٨}(س^٢+ك)$ حيث س ∈ {-١، ٠، ٢، ٣}
أولا: أوجد قيمة ك التي تجعل د(س) دالة توزيع احتمالي للمتغير س
ثانيا: احسب μ ثالثا: احسب ل(س ≤ ٢)

الحل

∵ مجـ د(س) = ١ ∴ $\frac{١}{١٨}(١+ك+ك+٤+ك+٩+ك) = ١$ ∴ ك = ١

μ = مجـ س . د(س) = $-١\left(\frac{١+١}{١٨}\right) + صفر + ٢\left(\frac{١+٤}{١٨}\right) + ٣\left(\frac{١+٩}{١٨}\right) = \frac{١٩}{٩}$

ل(س ≤ ٢) = ل(س = ٢) + ل(س = ٠) + ل(س = -١) = ١ - ل(س = ٣) = $\frac{٤}{٩}$

٤) إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً مداه $\{-٢، -١، ٠، ١، ٢\}$

وكان $د(س = ر) = \frac{أ + ر}{١٥}$ $\forall$ ر $\in$ مدى س احسب μ ، σ

الحل

$\because$ مجـ د(س) $= ١$ $\therefore$ $\frac{١}{١٥}[-٢ + أ + -١ + أ + ٠ + أ + ١ + أ + ٢ + أ] = ١$

$\therefore ٥أ = ١٥$ $\therefore أ = ٣$ $\therefore$ أ $= ٣$

س	د(س)	س . د	س^٢ . د
-٢	$\frac{١}{١٥}$	-٢/١٥	٤/١٥
-١	$\frac{٢}{١٥}$	-٢/١٥	٢/١٥
صفر	$\frac{٣}{١٥}$	صفر	صفر
١	$\frac{٤}{١٥}$	٤/١٥	٤/١٥
٢	$\frac{٥}{١٥}$	١٠/١٥	٢٠/١٥

$\mu =$ مجـ س . د(س)

$= \frac{١٠}{١٥} = \frac{٢}{٣}$

$\sigma^٢ =$ مجـ س^٢ . د(س) $- \mu^٢$

$= ٢ - \frac{٤}{٩} = \frac{١٤}{٩}$

$\sigma = \sqrt{\frac{١٤}{٩}} = \frac{١}{٣}\sqrt{١٤}$

٥) س متغير عشوائي متقطع مداه $\{١، ٢\}$ فإذا كان الوسط الحسابي يساوي $\frac{٥}{٤}$ احسب معامل الاختلاف

الحل

س	١	٢
د	أ	١ - أ

$\mu =$ مجـ س . د(س) $\therefore \frac{٥}{٤} = أ + ٢(١ - أ)$

$\frac{٥}{٤} = أ + ٢ - ٢أ$ $\therefore أ = ٢ - \frac{٥}{٤} = \frac{٣}{٤}$

$\therefore د(س = ١) = \frac{٣}{٤}$ ، $د(س = ٢) = \frac{١}{٤}$

$\sigma^٢ =$ مجـ س^٢ . د(س) $- \mu^٢ = ١ \times \frac{٣}{٤} + ٤ \times \frac{١}{٤} - (\frac{٥}{٤})^٢ = \frac{٣}{١٦}$ $\therefore \sigma = \frac{\sqrt{٣}}{٤}$

معامل الاختلاف $= \sigma \div \mu \times ١٠٠ \%$ $= \frac{\sqrt{٣}}{٤} \div \frac{٥}{٤} \times ١٠٠\% = \frac{\sqrt{٣}}{٥} \times ١٠٠\%$

$= ٢٠\sqrt{٣} \%$

٦) إذا كان س متغيراً عشوائياً توزيعه الاحتمالي كما هو مبين بالجدول (i) احسب قيمة ك (ii) اكتب التوزيع الاحتمالي ثم احسب μ ، σ

س	-٣	٠	٣	٦
د	ك	ك^٢	٢ك^٢	ك

الحل

$\because$ مجـ د(س) $= ١$ $\therefore$ ك + ك^٢ + ٢ك^٢ + ك $= ١$

$\therefore$ ٣ك^٢ + ٢ك − ١ = صفر $\therefore$ (٣ك − ١)(ك + ١) = صفر

$\therefore$ ك $= \frac{١}{٣}$ أو ك $= -١$ مرفوض

س	د	س . د	س^٢ . د
-٣	١/٣	-١	٣
٠	$\frac{١}{٩}$	٠	٠
٣	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{٦}{٩}$	٢
٦	$\frac{١}{٣}$	$\frac{٦}{٣}$	١٢

$\mu =$ مجـ س . د(س) $= \frac{٥}{٣}$

$\sigma^٢ =$ مجـ س^٢ . د(س) $- \mu^٢ = ١٧ - (\frac{٥}{٣})^٢ = \frac{١٢٨}{٩}$

$\sigma = \sqrt{\sigma^٢} = ٨\sqrt{٢}/٣$

٧) س متغير عشوائي متقطع بحيث

$ل(س = 0) = ل(س = 2) = م$ ، $ل(س = 1) = 1 - 2م$

حيث $0 < م < \frac{1}{2}$

أولا: اثبت ان هذه الاحتمالات تحدد توزيعا احتماليا للمتغير س

ثانيا: احسب المتوسط والتباين للمتغير س

ثالثا: احسب قيمة م التي تجعل تباين المتغير س يساوي $\frac{1}{2}$

الحل

∵ لكل س ل(٠) ، ل(١) ، ل(٢) غير سالبة ← I

كذلك $ل(0) + ل(1) + ل(2) = م + 1 - 2م + م = 1$ ← II

من I ، II ∴ هذه الاحتمالات تحدد توزيعا احتماليا للمتغير س

$\mu = \sum س\, د(س) = 0 \times م + 1 \times (1 - 2م) + 2 \times م = 1$

$\sigma^2 = \sum س^2 . د(س) - \mu^2$

$= صفر \times م + (1)^2 \times (1 - 2م) + (2)^2 \times م - (1)^2 = 2م$

∴ $\mu = 1$ ، $\sigma^2 = 2م$ وعندما $\sigma^2 = \frac{1}{2}$ ∴ $م = \frac{1}{4}$

٨) صندوق به كرات حمراء وبيضاء عددها متساوٍ. سحبت منه كرتان الواحدة بعد الأخرى مع اعادة الكرة المسحوبة أولا قبل السحبة الثانية وعرف المتغير العشوائي س بأنه عدد الكرات الحمراء والمطلوب أولا: صف فضاء نواتج مناسب لهذه التجربة ثانيا: اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ثم احسب μ ، σ

الحل

ف = {(ح،ح) ، (ح،ب) ، (ب،ح) ، (ب،ب)}

س	٢	١	صفر
د	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\mu = \sum س . د(س)$

$= 2 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 0 \times \frac{1}{4} = 1$

$\sigma^2 = \sum س^2 . د(س) - \mu^2 = \left(4 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 0 \times \frac{1}{4}\right) - 1 = \frac{1}{2}$ ∴ $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$

٩) إذا كان س متغيرا عشوائيا متقطعا يعبر عن عدد البنات في أسرة لديها ثلاثة أطفال فاكتب مدى المتغير س وإذا فرضنا ان احتمال انجاب ولد يساوي احتمال انجاب بنت وعدم وجود توائم. اكتب التوزيع الاحتمالي

الجواب: $\{(0, \frac{1}{8}), (1, \frac{3}{8}), (2, \frac{3}{8}), (3, \frac{1}{8})\}$

7

(١٠) Egypt 008 ف مجموعة الأرقام {١، ٢، ٣، ٤، ٥} اكتب المجموعة ف التي تمثل مجموعة الأعداد الزوجية المكونة من رقمين مختلفين وإذا عرف على ف متغيراً عشوائياً س يعبر عن الفرق المطلق بين رقمي العدد الزوجي والمطلوب

أولاً: أوجد كلاً من التوزيع الاحتمالي والتوسط الحسابي للمتغير س

ثانياً: بين أن المتغير العشوائي س يحدث تجزيئاً للمجموعة ف

الحل

ف = {١٢، ٣٢، ٤٢، ٥٢، ١٤، ٢٤، ٣٤، ٥٤}

↓ ١، ١، ٢، ٣، ٣، ٢، ١، ١

مدى المتغير س = {١، ٢، ٣}

س	١	٢	٣	مج
د	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	١

التفسير: العنصر ١ صورة للحدث أ {١٢، ٣٢، ٣٤، ٥٤}

العنصر ٢ صورة للحدث ب {٤٢، ٢٤}

العنصر ٣ صورة للحدث جـ {٥٢، ١٤}

وواضح أن أ، ب، جـ أحداث متنافية

∴ س يحدث تجزيئاً لفضاء النواتج ف

μ = مج س . د(س)

$= 1 \times \frac{4}{8} + 2 \times \frac{2}{8} + 3 \times \frac{2}{8}$

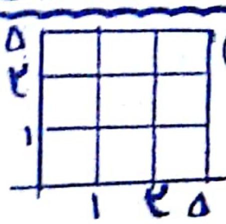
$= \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$

(١١) حجر نرد منتظم وجهان منه يحملان الرقم (١) ووجهان يحملان الرقم (٣) ووجهان يحملان الرقم (٥). ألقي هذا الحجر مرتين متتاليتين ولوحظ الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي للحجر في كل مرة فإذا كان المتغير العشوائي س هو الفرق المطلق بين الرقمين الظاهرين أوجد

(i) التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

(ii) احتمال أن يكون الفرق المطلق أكبر من ٢

الحل



μ = مج س . د(س)

$= \frac{16}{9}$

σ^2 = مج $س^2$. د(س) $- \mu^2 = \frac{48}{9} - \left(\frac{16}{9}\right)^2$

ل(س > ٢) = ل(س = ٤) = $\frac{2}{9}$

س	د	س . د	$س^2$. د
صفر	$\frac{3}{9}$	$0 \times \frac{3}{9}$	$0 \times \frac{3}{9}$
٢	$\frac{4}{9}$	$2 \times \frac{4}{9}$	$4 \times \frac{4}{9}$
٤	$\frac{2}{9}$	$4 \times \frac{2}{9}$	$16 \times \frac{2}{9}$
مج	١	٩/١٦	٩/٤٨

(12) إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً توزيعه الاحتمالي يتحدد بالدالة د(س) = $\frac{ك+٤}{١٦}$ حيث س ∈ {-٢، ٢، ١، ٠، ...}
أوجد (i) ك (ii) μ، σ²، σ، معامل الاختلاف

الحل ∵ مجـ د(س) = ١ ∴ $\frac{1}{16}$ [(٤-٢) + (٤+٢) + (٤+١) + (٤+٠) + ...]

∴ ١٧ + ك = ١٦ ∴ ك = -١

س	د	س . د	س² . د
-٢			
٢			
١			
-١			
مجـ			

μ = مجـ س . د(س)
= $\frac{5}{8}$

σ² = مجـ س² . د(س) − μ²
= $\frac{5}{2} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{135}{64}$

σ = $\frac{\sqrt{135}}{8}$

معامل الاختلاف = $\left(\frac{\sqrt{135}}{8} \times \frac{8}{5}\right) \times 100\%$

(13) إذا كان الوسط الحسابي لمتغير عشوائي ٢٤ وتباينه ٤ احسب معامل الاختلاف

الحل معامل الاختلاف = $\frac{\sigma}{\mu} \times \frac{100}{100}$ = $\frac{2}{24} \times 100\%$ = $8\frac{1}{3}\%$ = 8.33%

(14) متغير عشوائي متقطع معامل الاختلاف له ٤٠٪ وتباينه ١٦ احسب توقعه

الحل σ = ٤ ∴ ٤٠٪ = $\frac{4}{\mu} \times 100\%$ ∴ μ = ١٠

(15) إذا كان التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع س يتعين بالدالة د(س) = $\frac{1}{16}$(س + أ) حيث س ∈ {-٢، -١، ٢، ٤} فأوجد
(i) قيمة أ (ii) ل(س ≥ ٢) (iii) معامل الاختلاف الجواب: ٢ ، $\frac{9}{16}$ ، ...

الحل

ثانيا | الفصل ١ | اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين فيما يلي | 9

(أ) مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى دالة الكثافة وفوق محور السينات من أ ← ب تساوي .... { ل(س ≥ أ) ، ل(س ≤ ب) ، ل(س = أ) ، ل(أ ≤ س ≤ ب) }

(ب) منحنى دالة الكثافة يقع .... محور السينات { على ، تحت ، فوق }

(جـ) مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى دالة الكثافة وفوق محور السينات تساوي .... { صفر أو -١ أو (٠، ١) ، ١ }

(د) إذا كان مدى دالة الكثافة لدالة هو [ء، هـ] فإن ل(س = أ) = ... { ١ ، -١ ، ∈ [٠، ١] ، صفر }

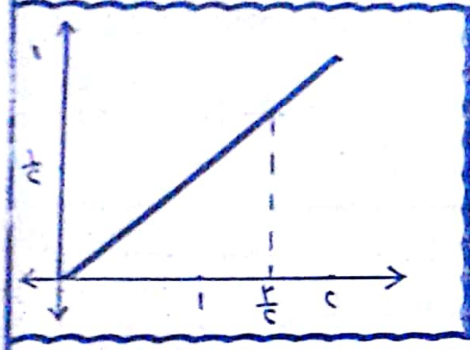
(هـ) إذا كانت دالة الكثافة دالة ثابتة أو من الدرجة الأولى فإنها تمثل ب .... { دائرة ، منحنى دالة تربيعية ، خط مستقيم ، قطعة مستقيمة }

٢) إذا كان س متغير عشوائي متصل مداه [٠، ٢] ودالة كثافة الاحتمال له هي

د(س) = { صفر : س = صفر
½ س : ٠ < س ≤ ٢ }

اوجد (i) ل(٠ ≤ س ≤ ٣/٢) (ii) ل(س > ١)

الحل



(i) ل(٠ ≤ س ≤ ٣/٢)

= ½ [د(٣/٢) + د(٠)] [٣/٢ − ٠]

= ٣/٤ [٣/٤ + صفر] = ٩/(٤×٤) = ٩/١٦

(ii) ل(س > ١) = ل(١ < س < ٢) = ½ [د(٢) + د(١)] × ١

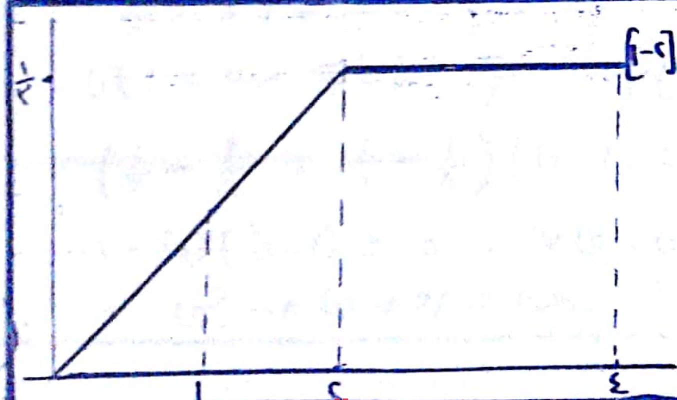
= ½ [١ + ½] [٢ − ١] = ½ × ٣/٢ = ٣/٤

٣) (Egy 2005) إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هي

د(س) = { س/٦ : ٠ ≤ س ≤ ٢
١/٣ : ٢ < س ≤ ٤ }

(i) احسب ل(١ ≤ س ≤ ٢) (ii) اوجد أ التي تجعل ل(٢ < س ≤ أ) = ٠٫٥

الحل



ل(١ ≤ س ≤ ٢) = ½ [د(٢) + د(١)] [٢ − ١]

= ½ [٢/٦ + ١/٦] × ١ = ١/٤

ل(٢ < س ≤ أ) = ½

∴ ½ [د(أ) + د(٢)] [أ − ٢] = ½

∴ (١/٣ + ١/٣)(أ − ٢) = ١ ∴ أ = ٧/٢

(٤) (٢٠٠٦) إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافة الاحتمال له على الصورة د(س) حيث

$$د(س) = \begin{cases} (س-١) & : ١ \le س \le ٢ \\ ١ & : ٢ < س \le م \\ صفر & : خلاف\ ذلك \end{cases}$$

أولاً: احسب قيمة م
ثانياً: ل(س ∈]١ ، $\frac{٣}{٢}$[)
ثالثاً: ل($\frac{٣}{٢}$ < س < ٤)

الحل

∵ د(س) تمثل دالة كثافة احتمال ∴ ل(١ ≤ س ≤ م) = ١

∴ ل(١ ≤ س ≤ ٢) + ل(٢ < س ≤ م) = ١

$\frac{١}{٢}$ [د(٢) + د(١)][٢ − ١] + $\frac{١}{٢}$ [د(م) + د(٢)][م − ٢] = ١

∴ د(٢) + د(١) + [د(م) + د(٢)][م − ٢] = ٢

١ + صفر + (١ + ١)(م − ٢) = ٢ ∴ ٢(م − ٢) = ١

٢م − ٤ = ١ ∴ ٢م = ٥ ∴ م = $\frac{٥}{٢}$

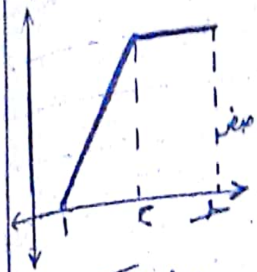
ل(١ < س < $\frac{٣}{٢}$) = $\frac{١}{٢}$ [د($\frac{٣}{٢}$) + د(١)][$\frac{٣}{٢}$ − ١] = $\frac{١}{٢}$ [$\frac{١}{٢}$ + ٠] × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٨}$

ل($\frac{٣}{٢}$ < س < ٤) =

= ل($\frac{٣}{٢}$ < س < ٢) + ل(٢ < س < $\frac{٥}{٢}$) + ل($\frac{٥}{٢}$ ≤ س ≤ ٤)

= $\frac{١}{٢}$ [د(٢) + د($\frac{٣}{٢}$)][٢ − $\frac{٣}{٢}$] + $\frac{١}{٢}$ [د($\frac{٥}{٢}$) + د(٢)][$\frac{٥}{٢}$ − ٢] + صفر

= $\frac{٧}{٨}$



أو ل($\frac{٣}{٢}$ < س < $\frac{٥}{٢}$) =

= ١ − ل(١ < س < $\frac{٣}{٢}$) = ١ − $\frac{١}{٨}$ = $\frac{٧}{٨}$ حل أذكى

(٥) متغير عشوائي متصل دالة كثافة الاحتمال له هي د(س) حيث

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٢} - م\,س & : ٠ \le س \le ٤ \\ صفر & : خلاف\ ذلك \end{cases}$$

(i) احسب قيمة م
(ii) احسب ك حيث ل(١ ≤ س ≤ ك) = $\frac{٥}{١٦}$

الحل

∵ د(س) دالة كثافة احتمال ∴ ل(٠ ≤ س ≤ ٤) = ١

∴ $\frac{١}{٢}$ [د(٤) + د(٠)][٤ − ٠] = ١ ∴ د(٤) + د(٠) = $\frac{١}{٢}$

∴ $\frac{١}{٢}$ − ٤م + $\frac{١}{٢}$ − ٠ = $\frac{١}{٢}$ ∴ م = $\frac{١}{٨}$

∵ ل(١ ≤ س ≤ ك) = $\frac{٥}{١٦}$ ∴ $\frac{١}{٢}$ [د(ك) + د(١)][ك − ١] = $\frac{٥}{١٦}$

∴ (ك − ١)($\frac{١}{٢}$ − $\frac{ك}{٨}$ + $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٨}$) = $\frac{٥}{٨}$ ∴ ($\frac{٧}{٨}$ − $\frac{ك}{٨}$)(ك − ١) = $\frac{٥}{٨}$

(٧ − ك)(ك − ١) = ٥ ∴ ٧ك − ك² + ك − ٧ = ٥

∴ ك² − ٨ك + ١٢ = صفر ∴ (ك − ٢)(ك − ٦) = ٠ ∴ ك = ٢ ، ك = ٦ مرفوض

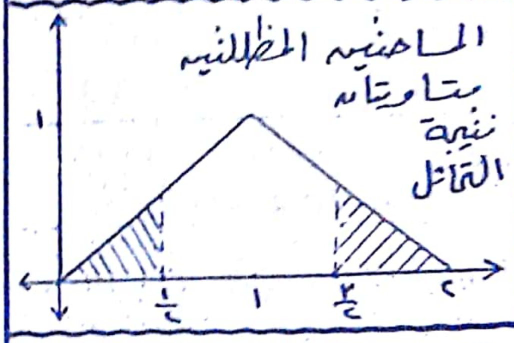
٦) إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هي

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} & : 0 \le \text{س} \le 1 \\ 2 - \text{س} & : 1 \le \text{س} \le 2 \\ \text{صفر} & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

(i) احسب $\text{ل}(\frac{1}{2} < \text{س} < \frac{3}{2})$

(ii) $\text{ل}(\text{س} < \frac{1}{2})$

الحل



المساحتين المظللتين متساويتان نتيجة التماثل

$\text{ل}(\frac{1}{2} < \text{س} < \frac{3}{2})$

$= \text{ل}(\frac{1}{2} < \text{س} < 1) + \text{ل}(1 < \text{س} < \frac{3}{2})$

$= \frac{1}{2}[\text{د}(1) + \text{د}(\frac{1}{2})][1 - \frac{1}{2}] +$

$\frac{1}{2}[\text{د}(\frac{3}{2}) + \text{د}(1)][\frac{3}{2} - 1]$

$= \frac{1}{4}[\text{د}(1) + \text{د}(\frac{1}{2}) + \text{د}(\frac{3}{2}) + \text{د}(1)]$

$= \frac{1}{4}[2\,\text{د}(1) + \text{د}(\frac{1}{2}) + \text{د}(\frac{3}{2})] = \frac{1}{4}[2 \times 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}] = \frac{3}{4}$

$\text{ل}(\text{س} < \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}[1 - \text{ل}(\frac{1}{2} < \text{س} < \frac{3}{2})] = \frac{1}{2}[1 - \frac{3}{4}] = \frac{1}{8}$

حل آخر: $\text{ل}(\text{س} < \frac{1}{2}) = \text{ل}(0 < \text{س} < \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}[\text{د}(\frac{1}{2}) + \text{د}(0)][\frac{1}{2} - 0] = \frac{1}{8}$

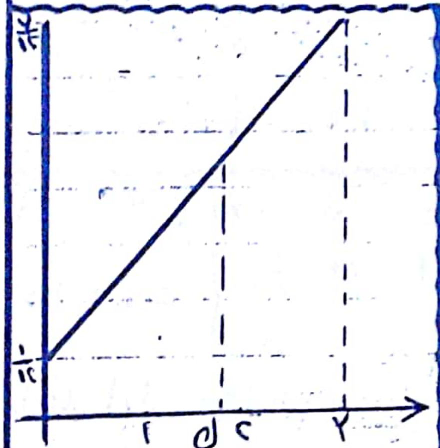
٧) إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً حيث

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{2\text{س}+1}{12} & : 0 \le \text{س} \le 2 \\ \text{صفر} & : \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

(i) اثبت أن د دالة كثافة احتمال للمتغير س

(ii) أوجد قيمة ك التي تجعل $\text{ل}(\text{س} > \text{ك}) = \text{ل}(\text{س} < \text{ك})$

الحل



$\text{ل}(0 \le \text{س} \le 2) = \frac{1}{2}[\text{د}(2) + \text{د}(0)][2 - 0]$

$= \frac{1}{2}[\frac{5}{12} + \frac{1}{12}] \times 2 = \frac{1}{2} \times \frac{6}{12} \times 2 = 1$

∵ المنحنى يقع بأكمله فوق محور السينات

∴ الدالة تمثل دالة كثافة احتمال

∵ $\text{ل}(\text{س} > \text{ك}) = \text{ل}(\text{س} < \text{ك})$

∴ $2\,\text{ل}(\text{س} < \text{ك}) = 1$ ∴ $\text{ل}(\text{س} < \text{ك}) = \frac{1}{2}$

∴ $\frac{1}{2} = \text{ل}(0 < \text{س} < \text{ك})$

∴ $\cancel{\frac{1}{2}} = \cancel{\frac{1}{2}}[\text{د}(\text{ك}) + \text{د}(0)][\text{ك} - 0]$ ∴ $1 = (\frac{2\text{ك}+1}{12} + \frac{1}{12}) \times \text{ك}$

$1 = \frac{\text{ك}+1}{6} \times \text{ك}$ ∴ $\text{ك}^2 + \text{ك} - 6 = 0$ ∴ $(\text{ك} - 2)(\text{ك} + 3) = 0$ ∴ $\text{ك} = 2$

٨) س متغير عشوائي متصل مداه [١، ٩] و دالة كثافة الاحتمال له

د(س) = { ل(٤−س) : س ∈ [١، ٢] ، ل : س ∈]٢، ٩] }

احسب ان امكن كل من (i) ل(س < ٢) (ii) ل(|س−١| ≥ ٢) (iii) ل(|س−١| ≤ ٢) (iv) ل(|س| ≤ ٩)

١٢

الحل

∵ مدى المتغير العشوائي هو [١، ٩] ∴ ل(١ ≤ س ≤ ٩) = ١

∴ ل(١ ≤ س ≤ ٢) + ل(٢ < س ≤ ٩) = ١

∴ ½ [د(٢) + د(١)] [٢ − ١] + ½ [د(٩) + د(٢)] [~~٩ − ٢~~] = ١

د(٢) + د(١) + ٢د(٩) + ٢د(٢) = ١

∴ ل + ٢ل + ٢ل + ٢ل = ١ ∴ ١٠ل = ١ ∴ ل = ١/١٠

د(س) = { (٤−س)/١٠ : س ∈ [١، ٢] ، ١/١٠ : س ∈]٢، ٩] }

لاحظ أنه: ل(|س| > ٩) = ل(ф) = صفر

ل(س < ٢) = ل(١ ≤ س < ٢) = ½ [د(٢) + د(١)] [٢ − ١] = ½ [٢/١٠ + ٣/١٠]

= ½ × ٥/١٠ = ١/٤

ل(|س−١| ≤ ٢) = ل(−١ ≤ س ≤ ٣) = ل(−١ ≤ س ≤ ١) + ل(١ ≤ س ≤ ٣)

= صفر + ١/٤ = ١/٤

ل(|س−١| ≥ ٢) = ل(س ≥ ٣ أو س ≤ −١) = ل(٣ ≤ س ≤ ٩) + صفر = ١ − ١/٤ = ٣/٤

٩) إذا كان س متغير عشوائي متصل و دالة كثافة الاحتمال له هي

د(س) = { |س+٤| : −٥ ≤ س ≤ −٣ ، صفر : فيما عدا ذلك }

احسب ما امكن كل من (i) ل(−٥ < س ≤ −٤) (ii) ل(س > −٦) (iii) ل(س < −٩/٢) (iv) ل(|س| < ٤)

الجواب { ١/٢ ، ١ ، ٣/٨ ، ١/٢ } حاول بنفسك

١٠) إذا كان س متغير عشوائي متصل دالة كثافة الاحتمال له هي

د(س) = { ١/٢٦ س + م : −٢ ≤ س ≤ ٢ ، صفر : فيما عدا ذلك }

(i) احسب قيمة م (ii) احسب ل(س > ١) (iii) ل(|س| ≤ ٢) (iv) ل(|س−٢| ≤ ١)

الجواب { م = ١/٦ ، ٥/٨ ، ١/٢ ، ٤/٩ } حاول بنفسك

٨

لاحظ أنه |س−٢| ≤ ١ ∴ −١ ≤ س−٢ ≤ ١ ∴ ١ ≤ س ≤ ٢

13

الوحدة ٤ التوزيع الطبيعي (الاعتدالي)

(١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس في كل مما يأتي

(١) الصيغة الرياضية لدالة كثافة المتغير العشوائي الطبيعي تعتمد على ثابتيه هما .... { μ ، ن أو س ، ع أو μ ، σ }

(٢) المنحنى الطبيعي له قمة واحدة وطرفاه يمتدان إلى .... { صفر ، الواحد الصحيح ، التباين ، مالانهاية }

(٣) محور تماثل المنحنى الطبيعي هو المستقيم .... { ص = σ ، س = σ ، س = ع ، س = μ }

(٤) مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى الطبيعي وفوق محور السينات تساوي .... { صفر ، -١ ، ∞ ، ١ }

(٥) المنحنى الطبيعي المعياري وسطه الحسابي = ... { ١ ، σ ، ن ، صفر }

(٦) التوزيع الطبيعي يعبر عن أي ظاهرة .... { علمية ، صناعية ، طبيعية }

(٧) يكون المنحنى الممثل للمتغير العشوائي الطبيعي لمعظم الظواهر الطبيعية على شكل .... { خط مستقيم ، قطع ناقص ، قطع مكافئ ، شكل الجرس }

(٨) ل (ص $\geq \mu$) = ... { صفر ، ١ ، -١ ، ٠.٥ } حيث ص متغير عشوائي طبيعي معياري

(٩) ل (ص $\geq$ ٢μ) = ... { ٠ ، ٢ ، -٢ ، ٠.٥ }

(١٠) ل (|ص| $\geq$ ٠) = ... { ∞ ، صفر ، -١ ، ١ }

(١١) إذا كانت قيم المتغير العشوائي س كلها موجبة فإن وسطه الحسابي .... { سالب ، سالب أو موجب ، صفر ، موجب }

(١٢) المتغير الطبيعي س يتحول إلى متغير طبيعي معياري ص باستخدام القاعدة .... { ص = $\frac{\mu}{\sigma}$ أو س = $\frac{ص - \mu}{\sigma}$ ، ص = $\frac{س - \mu}{\sigma}$ }

(١٣) إذا كانت قيم المتغير العشوائي س كلها سالبة فإن انحرافه المعياري .... { سالب ، موجب أو سالب ، صفر ، موجب }

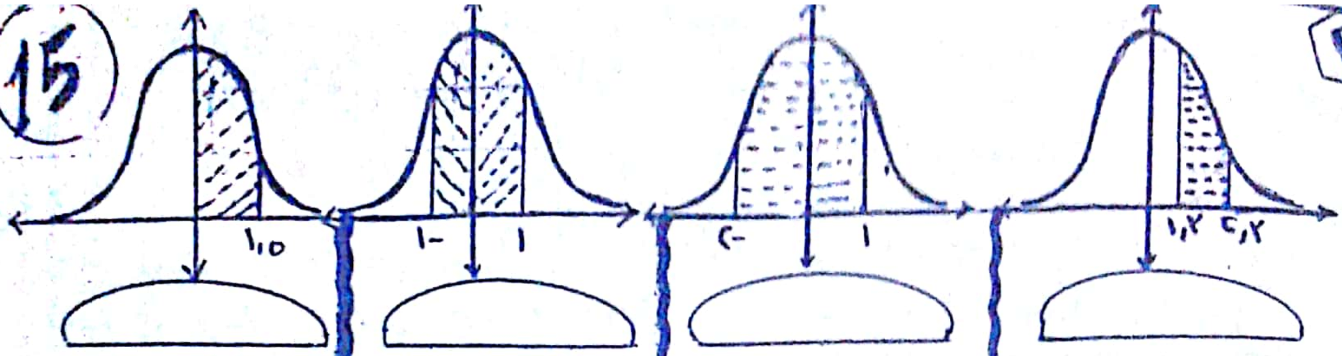
(١٤) إذا كان توقع س يساوي ٥ فإنه من الضروري أن تكون إحدى قيم س .... { صفر ، ٥ ، ∞ ، خلاف ذلك }

(١٥) في المتغير الطبيعي إذا كان المطلوب عدد عناصر حدث ما فإنه العدد المطلوب = احتمال وقوع الحدث × .... { المتوسط ، الانحراف المعياري ، ١٠٠ ، عدد عناصر ف }

جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعي

ى	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٠٠٠٠	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٨٠	٠,٠١٢٠	٠,٠١٦٠	٠,٠١٩٩	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٧٩	٠,٠٣١٩	٠,٠٣٦
٠,١	٠,٠٣٩٨	٠,٠٤٣٨	٠,٠٤٧٨	٠,٠٥١٧	٠,٠٥٥٧	٠,٠٥٩٦	٠,٠٦٣٦	٠,٠٦٧٥	٠,٠٧١٤	٠,٠٧٥٣
٠,٢	٠,٠٧٩٣	٠,٠٨٣٢	٠,٠٨٧١	٠,٠٩١٠	٠,٠٩٤٨	٠,٠٩٨٧	٠,١٠٢٦	٠,١٠٦٤	٠,١١٠٣	٠,١١٤١
٠,٣	٠,١١٧٩	٠,١٢١٧	٠,١٢٥٥	٠,١٢٩٣	٠,١٣٣١	٠,١٣٦٨	٠,١٤٠٦	٠,١٤٤٣	٠,١٤٨٠	٠,١٥١٧
٠,٤	٠,١٥٥٤	٠,١٥٩١	٠,١٦٢٨	٠,١٦٦٤	٠,١٧٠٠	٠,١٧٣٦	٠,١٧٧٢	٠,١٨٠٨	٠,١٨٤٤	٠,١٨٧٩
٠,٥	٠,١٩١٥	٠,١٩٥٠	٠,١٩٨٥	٠,٢٠١٩	٠,٢٠٥٤	٠,٢٠٨٨	٠,٢١٢٣	٠,٢١٥٧	٠,٢١٦٠	٠,٢٢٢٤
٠,٦	٠,٢٢٥٩	٠,٢٢٩١	٠,٢٣٢٤	٠,٢٣٥٧	٠,٢٣٨٩	٠,٢٤٢٢	٠,٢٤٥٤	٠,٢٤٨٦	٠,٢٥١٧	٠,٢٥٤٩
٠,٧	٠,٢٥٨٠	٠,٢٦١١	٠,٢٦٤٢	٠,٢٦٧٣,	٠,٢٧٠٤	٠,٢٧٣٤	٠,٢٧٦٤	٠,٢٧٩٤	٠,٢٨٢٣	٠,٢٨٥٢
٠,٨	٠,٢٨٨١	٠,٢٩١٠	٠,٢٩٣٩	٠,٢٩٦٧	٠,٢٩٩٥	٠,٣٠٢٣	٠,٣٠٥١	٠,٣٠٧٨	٠,٣١٠٦	٠,٣١٣٣
٠,٩	٠,٣١٥٩	٠,٣١٨٦	٠,٣٢١٢	٠,٣٢٣٨	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٨٩	٠,٣٣١٥	٠,٣٣٤٠	٠,٣٣٦٥	٠,٣٣٨٩
١,٠	٠,٣٤١٣	٠,٣٤٣٨	٠,٣٤٦١	٠,٣٤٨٥	٠,٣٥٠٨	٠,٣٥٣١	٠,٣٥٥٤	٠,٣٥٧٧	٠,٣٥٩٩	٠,٣٦٢١
١,١	٠,٣٦٤٣	٠,٣٦٦٥	٠,٣٦٨٦	٠,٣٧٠٨	٠,٣٧٢٩	٠,٣٧٤٩	٠,٣٧٧٠	٠,٣٧٩٠	٠,٣٨١٥	٠,٣٨٣٠
١,٢	٠,٣٨٤٩	٠,٣٨٦٩	٠,٣٨٨٨	٠,٣٩٠٧	٠,٣٩٢٥	٠,٣٩٤٤	٠,٣٩٦٢	٠,٣٩٨٠	٠,٣٩٩٧	٠,٤٠١٥
١,٣	٠,٤٠٣٢	٠,٤٠٤٩	٠,٤٠٦٦	٠,٤٠٨٢	٠,٤٠٩٩	٠,٤١١٥	٠,٤١٣١	٠,٤١٤٧	٠,٤١٦٢	٠,٤١٧٧
١,٤	٠,٤١٩٢	٠,٤٢٠٧	٠,٤٢٢٢	٠,٤٢٣٦	٠,٤٢٥١	٠,٤٢٦٥	٠,٤٢٧٩	٠,٤٢٩٢	٠,٤٣٠٦	٠,٤٣٢
١,٥	٠,٤٣٣٢	٠,٤٣٤٥	٠,٤٣٥٧	٠,٤٣٧٠	٠,٤٣٨٢	٠,٤٣٩٤	٠,٤٤٠٦	٠,٤٤١٨	٠,٤٤٢٩	٠,٤٤٤
١,٦	٠,٤٤٥٢	٠,٤٤٦٣	٠,٤٤٧٤	٠,٤٤٨٤	٠,٤٤٩٥	٠,٤٥٠٥	٠,٤٥١٥	٠,٤٥٢٥	٠,٤٥٣٥	٠,٤٥٤٥
١,٧	٠,٤٥٥٤	٠,٤٥٦٤	٠,٤٥٧٣	٠,٤٥٨٢	٠,٤٥٩١	٠,٤٥٩٩	٠,٤٦٠٨	٠,٤٦١٦	٠,٤٦٢٥	٠,٤٦٣٣
١,٨	٠,٤٦٤١	٠,٤٦٤٩	٠,٤٦٥٦	٠,٤٦٦٤	٠,٤٦٧١	٠,٤٦٧٨	٠,٤٦٨٦	٠,٤٦٩٣	٠,٤٦٩٩	٠,٤٧٠٦
١,٩	٠,٤٧١٣	٠,٤٧١٩	٠,٤٧٢٦	٠,٤٧٣٢	٠,٤٧٣٨	٠,٤٧٤٤	٠,٤٧٥٠	٠,٤٧٥٦	٠,٤٧٦١	٠,٤٧٦٧
٢,٠	٠,٤٧٧٢	٠,٤٧٧٨	٠,٤٧٨٣	٠,٤٧٨٨	٠,٤٧٩٣	٠,٤٧٩٨	٠,٤٨٠٣	٠,٤٨٠٨	٠,٤٨١٢	٠,٤٨١٧
٢,١	٠,٤٨٢١	٠,٤٨٢٦	٠,٤٨٣٠	٠,٤٨٣٤	٠,٤٨٣٨	٠,٤٨٤٢	٠,٤٨٤٦	٠,٤٨٥٠	٠,٤٨٥٤	٠,٤٨٥٧
٢,٢	٠,٤٨٦١	٠,٤٨٦٤	٠,٤٨٦٨	٠,٤٨٧١	٠,٤٨٧٥	٠,٤٨٧٨	٠,٤٨٨١	٠,٤٨٨٤	٠,٤٨٨٧	٠,٤٨٩٠
٢,٣	٠,٤٨٩٣	٠,٤٨٩٦	٠,٤٨٩٨	٠,٤٩٠١	٠,٤٩٠٤	٠,٤٩٠٦	٠,٤٩٠٩	٠,٤٩١١	٠,٤٩١٣	٠,٤٩١٦
٢,٤	٠,٤٩١٨	٠,٤٩٢٠	٠,٤٩٢٢	٠,٤٩٢٥	٠,٤٩٢٧	٠,٤٩٢٩	٠,٤٩٣١	٠,٤٩٣٢	٠,٤٩٣٤	٠,٤٩٣٦
٢,٥	٠,٤٩٣٨	٠,٤٩٤٠	٠,٤٩٤١	٠,٤٩٤٣	٠,٤٩٤٥	٠,٤٩٤٦	٠,٤٩٤٨	٠,٤٩٤٩	٠,٤٩٥١	٠,٤٩٥٢
٢,٦	٠,٤٩٥٣	٠,٤٩٥٥	٠,٤٩٥٦	٠,٤٩٥٧	٠,٤٩٥٩	٠,٤٩٦٠	٠,٤٩٦١	٠,٤٩٦٢	٠,٤٩٦٣	٠,٤٩٦٤
٢,٧	٠,٤٩٦٥	٠,٤٩٦٦	٠,٤٩٦٧	٠,٤٩٦٨	٠,٤٩٦٩	٠,٤٩٧٠	٠,٤٩٧١	٠,٤٩٧٢	٠,٤٩٧٣	٠,٤٩٧٤
٢,٨	٠,٤٩٧٤	٠,٤٩٧٥	٠,٤٩٧٦	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٨	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٨٠	٠,٤٩٨١
٢,٩	٠,٤٩٨١	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٣	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٦	٠,٤٩٨٦
٣,٠	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩٠
٣,١	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩١٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣
٣,٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥
٣,٣	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٧
٣,٤	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٨
٣,٥	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨

٢

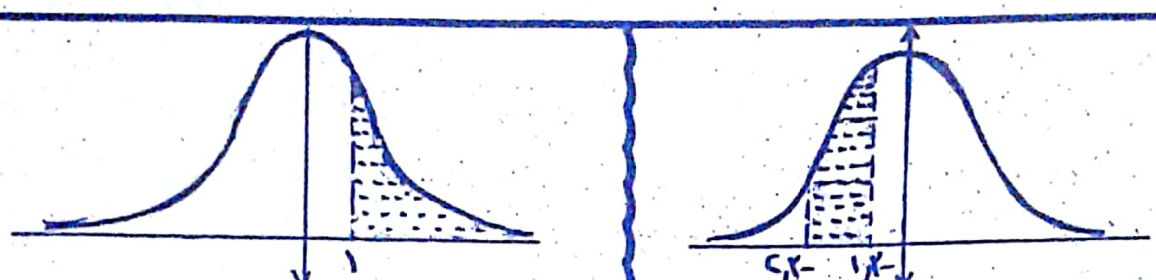


ل(١,٢ ≤ ص ≤ ٢,٢)
= ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,٢) − ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٢)

ل(−٢ ≤ ص ≤ ١)
= ل(−٢ ≤ ص ≤ ٠) + ل(٠ ≤ ص ≤ ١)

ل(−١ ≤ ص ≤ ١)
= ٢ ل(٠ ≤ ص ≤ ١)
= ٢ × ٠,٣٤١٣

ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٥)



ل(−٢,٢ ≤ ص ≤ −١,٢) = ل(١,٢ ≤ ص ≤ ٢,٢)
= ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,٢) − ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٢)
= − =

ل(ص > ١)
= ٠,٥ − ل(٠ ≤ ص ≤ ١)
= ٠,٥ − ٠,٣٤١٣ = ٠,١٥٨٧

(٢) إذا كان ص متغير عشوائي طبيعي معياري فأوجد قيمة ى التي تحقق

(أ) ل(٠ ≤ ص ≤ ى) = ٠,٤٤٠٦ (ب) ل(٠ ≤ ص ≤ ى) = ٠,٤٢٩٦

(ج) ل(٠ ≤ ص ≤ ى) = ٠,٤٤ (د) ل(٠ ≤ ص ≤ ى) = ٠,٤٤٠٤

(هـ) ل(ى ≤ ص ≤ ٠) = ٠,٤٥٢٥ (و) ل(ى ≤ ص ≤ ٢,٢٢) = ٠,٢٢٢٦

(ع) ل(ى ≤ ص ≤ ٢,١٥) = ٠,٦٢٩٦ (خ) ل(−١ ≤ ص ≤ ى) = ٠,٨٢٠٦

(ر) ل(−١ ≤ ص ≤ ى) = ٠,٨١٥٩ (ز) ل(−٠,١٩٢ ≤ ص ≤ ى) = ٠,١٧٥٩

١,٥٦
١,٥٥
١,٥٥
١,٥٦
−١,٦٨
٠,٧٥
−١,٥٧
٢,٢
−٠,٤
٠,٨٢

الحل

16

(٤) إذا كان ص متغير عشوائي طبيعي معياري فأوجد قيمة ك التي تحقق كلاً من العلاقات الآتية.

(أ) ل(ص ≥ ك) = ٠٫٨٥٨٧

(ب) ل(ص ≤ ك) = ٠٫٦٩٤

(جـ) ل(ص ≥ ك) = ٠٫١٢٢

(د) ل(ص ≤ ك) = ٠٫٦٩١٥

(هـ) ل(-ك ≤ ص ≤ ك) = ٠٫٨٦٦٤

(و) احسب ل(|ص| ≤ ١٫٩٦)

الحل حاول بنفسك ١ ، ١٫٤٨ ، ١٫٠١٦ ، ٠٫٥٠- ، ١٫٥ ، ٠٫٩٨٦

تدريب في اختبار إحدى المواد التي يمتحن فيها طلبة إحدى الكليات كانت الدرجات موزعة توزيعاً طبيعياً بمتوسط ٧٥ درجة وتباين ١٠٠ علماً بأن (الدرجة النهائية لمادة ١٠٠) أوجد كلاً من

(i) الدرجات المعيارية لطالبين أ ، ب حصلا على ٦٠ ، ٩٦ درجة على الترتيب

(ii) الدرجات التي حصلا عليها طالبان جـ ، د إذا كانت درجاتهما المعيارية -٠٫٦ ، ١٫٢

الحل

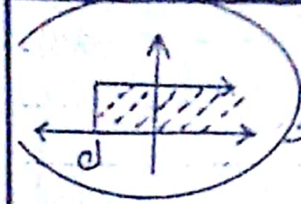
∵ ص = (س − μ) ÷ σ ∴ س = σ ص + μ

الطالب	درجة الامتحان	الدرجة المعيارية	الطالب	الدرجة المعيارية	درجة الامتحان
أ	٦٠	$\frac{٦٠-٧٥}{١٠}$ = -١٫٥	جـ	-٠٫٦	١٠ × -٠٫٦ + ٧٥ = ٦٩
ب	٩٦	= ____	د	١٫٢	

ع

٥) س متغير عشوائي متوسطه = ١٠٠ وانحرافه المعياري = ٤ احسب قيمة أ إذا كان ل(س > أ) = ٠٫٥٦٢٦

الحل



ل(س > أ) = ل(ص > $\frac{أ - ١٠٠}{٤}$) = ٠٫٥٦٢٦

بوضع $\frac{أ - ١٠٠}{٤}$ = ك ∴ ل(ص > ك) = ٠٫٥٦٢٦

٠٫٥ + ل(٠ < ص < −ك) = ٠٫٥٦٢٦

∴ ل(٠ < ص < −ك) = ٠٫٥٦٢٦ − ٠٫٥ = ٠٫٠٦٢٦ ∴ −ك = ٠٫١٦

∴ ك = −٠٫١٦ ∴ $\frac{أ - ١٠٠}{٤}$ = −٠٫١٦ ∴ أ = ١٠٠ − ٠٫٦٤

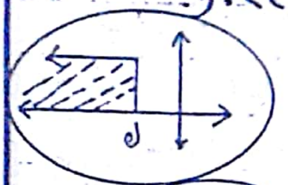
أ = ٩٩٫٢٦

٦) إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً وسطه الحسابي μ وانحرافه المعياري σ = ٥ احسب قيمة μ التي تجعل ل(س ≤ ٢٥) = ٠٫٠٢٢٨

الحل

ل(س < ٢٥) = ٠٫٠٢٢٨ ∴ ل(ص < $\frac{٢٥ - μ}{٥}$) = ٠٫٠٢٢٨

بوضع $\frac{٢٥ - μ}{٥}$ = ك ∴ ل(ص < ك) = ٠٫٠٢٢٨



٠٫٥ − ل(٠ < ص < −ك) = ٠٫٠٢٢٨

ل(٠ < ص < −ك) = ٠٫٥ − ٠٫٠٢٢٨ = ٠٫٤٧٧٢

∴ −ك = ٢ ∴ ك = −٢ ∴ $\frac{٢٥ - μ}{٥}$ = −٢ ∴ μ = ٤٥

٧) إذا كان الدخل الشهري لعدد ١٠٠٠ أسرة هو متغير عشوائي طبيعي وسطه الحسابي μ = ١٧٠ وانحرافه المعياري σ = ٢٠ جنيهاً.
أخذت أسرة عشوائياً من هذه الأسر فأوجد
(i) احتمال أن يكون دخلها ينحصر بين ١٦٠ ، ٢٠٠ جنيهاً
(ii) عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠ جنيهاً

الحل

(i) ل(١٦٠ < س < ٢٠٠) = ل($\frac{١٦٠ - ١٧٠}{٢٠}$ < ص < $\frac{٢٠٠ - ١٧٠}{٢٠}$)

= ل(−٠٫٥ < ص < ١٫٥) = ل(٠ < ص < ٠٫٥) + ل(٠ < ص < ١٫٥)

= ٠٫١٩١٥ + ٠٫٤٣٣٢ = ٠٫٦٢٤٧

(ii) ل(س > ١٥٠) = ل(ص > $\frac{١٥٠ - ١٧٠}{٢٠}$) = ل(ص > −١)

= ٠٫٥ + ل(٠ < ص < ١) = ٠٫٥ + ٠٫٣٤١٣ = ٠٫٨٤١٢ ∴ النسبة المئوية = ٨٤٫١٢٪

∴ عدد الأسر = ١٠٠٠ × ٠٫٨٤١٢ = ٨٤١٫٢ ≃ ٨٤١ أسرة

18

(٨) إذا كان اوزان مجموعة من أشخاص هو متغير عشوائي طبيعي وسطه الحسابي $\mu = 160$ رطل وانحراف معياري $\sigma = 10$ رطل فاوجد احتمال ان يختلف وزن اي شخص عن μ بما لا يزيد عن ٢٠

(الحل) الوزن يختلف عن μ يعني انه قد يكون بالزيادة أو النقص
∴ لابد من استخدام فترة المقياس $|س - \mu|$

∴ الاحتمال المطلوب = ل ($|س - \mu| < 20$) = ل ($-20 < س - \mu < 20$)

= ل ($\frac{-20}{10} <$ ص $< \frac{20}{10}$) = ل ($-2 <$ ص < 2) = ٢ ل ($0 <$ ص < 2)

= ٢ × ٠٫٤٠٨٢ = ٠٫٨١٦٤

(٩) يفرض أن انصاف الاقطار للحلزونات التي تنتجها احد المصانع موزعة توزيعا طبيعيا $\mu = 25$ ، $\sigma = 2$. ويعتبر الحلزون معيبا إذا كان نصف قطره يقل عن ٢٠ أو يزيد عن ٢٨ اوجد احتمال ان يكون الحلزون معيبا .

(الحل) واضح ان الحلزون يكون صالحا إذا كان طول نصف قطره ينحصر بين ٢٠ ، ٢٨ ∴ ل (الحلزون صالحا) = ل ($20 <$ س < 28)

= ل ($\frac{20-25}{2} <$ ص $< \frac{28-25}{2}$) = ل ($-2.5 <$ ص < 1.5)

= ل ($0 \le$ ص ≤ 2.5) + ل ($0 \le$ ص < 1.5) =

= ٠٫٤٩٣٨ + ٠٫٤٣٣٢ = ٠٫٩٢٧

ويكون الحلزون معيبا = ل (صالح) = ١ - ٠٫٩٢٧ = ٠٫٠٧٣

(١٠) ينتج أحد المصانع اسطوانات الحوائط تتبع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي $\mu = 356$ وانحرافه المعياري $\sigma = 2$. تكون الاسطوانة المنتجة مقبولة إذا كان طولها ينحصر بين ٣٥١ ، ٣٦٠ .
أخذت عينة عشوائية من ١٠٠٠٠ اسطوانة. كم حجم المبيعات المتوقع بيعها إذا كان سعر الاسطوانة ١٠ جنيهات

(الحل) ل ($351 <$ س < 360) = ل ($\frac{351-356}{2} <$ ص $< \frac{360-356}{2}$)

= ل ($-2.5 <$ ص < 2) = ل ($0 <$ ص < 2.5) + ل ($0 <$ ص < 2)

= ٠٫٤٩٣٨ + ٠٫٤٧٧٢ = ٠٫٩٧١

∴ عدد الاسطوانات المتوقع بيعها = ١٠٠٠٠ × ٠٫٩٧١ = ٩٧١٠ ∴ حجم المبيعات = ٩٧١٠٠ ج

١١) مسابقة لأطوال نوع معين من النباتات (عند تمام النضج) في حقل ما وجد أن الأطوال تتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط ٦٠ سم وكان طول أحد النباتات ٧٥ سم وطوله المعياري ٢ أوجد الانحراف المعياري فإذا كان الطول المعياري لنبات آخر من نفس النوع في نفس الحقل يساوي ٣ فأوجد طوله الطبيعي.

الحل

$ص = \frac{س - \mu}{\sigma}$ ∴ $٢ = \frac{٧٥ - ٦٠}{\sigma}$ ∴ $\sigma = ٧٫٥$

$٣ = \frac{س - ٦٠}{٧٫٥}$ ∴ $س = ٣ \times ٧٫٥ + ٦٠ = ٨٢٫٥$

١٢) (المنيا) وجد أن الأطوال نوع معين من النباتات تكون موزعة حسب التوزيع الطبيعي بمتوسط ٥٠ سم وانحراف معياري σ إذا علم أن الأطوال ١٠٫٥٦٪ من هذا النبات أقل من ٤٥ سم فأوجد التباين

الحل

ل(س < ٤٥) = ٠٫١٠٥٦ ∴ ل(ص < $\frac{٤٥ - ٥٠}{\sigma}$) = ٠٫١٠٥٦

ل(ص < $\frac{-٥}{\sigma}$) = ٠٫١٠٥٦ ∴ ٠٫٥ − ل(٠ < ص < $\frac{٥}{\sigma}$) = ٠٫١٠٥٦

∴ ل(٠ < ص < $\frac{٥}{\sigma}$) = ٠٫٥ − ٠٫١٠٥٦ = ٠٫٣٩٤٤

∴ $\frac{٥}{\sigma} = ١٫٢٥$ ∴ $\sigma = ٤$ ∴ التباين = $(٤)^2 = ١٦$

١٣) إذا كانت درجات الطلاب في أحد الاختبارات تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه ٧٥ درجة وانحرافه المعياري ٨ درجات فإذا علم أن ١٠٫٥٪ من الطلاب ستحصل على تقدير ممتاز فما هي أدنى درجة يجب أن يحصل عليها الطالب ليحصل على تقدير ممتاز

الحل نفرض أن أقل درجة هي أ ∴ ل(س ≥ أ) = ٠٫١٠٥٠

ل(ص ≥ $\frac{أ - ٧٥}{٨}$) = ٠٫١٠٥ ∴ ٠٫٥ − ل(٠ ≤ ص ≤ $\frac{أ - ٧٥}{٨}$) = ٠٫١٠٥

∴ ل(٠ ≤ ص ≤ $\frac{أ - ٧٥}{٨}$) = ٠٫٣٩٥ ∴ $\frac{أ - ٧٥}{٨} = ١٫٢٥$ ∴ أ = ٨٥ درجة

١٤) إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ وانحرافه المعياري σ فأوجد ل($\mu - \frac{1}{4}\sigma$ ≤ س ≤ $\mu + \frac{1}{2}\sigma$) الجواب 0.2902

الحل

ل($\frac{\mu - \frac{1}{4}\sigma - \mu}{\sigma}$ < ص < $\frac{\mu + \frac{1}{2}\sigma - \mu}{\sigma}$) = ل($-\frac{1}{4}$ < ص < $\frac{1}{2}$) ثم نكمل

اختبار إحصاء

س١ إذا كان أ، ب حدثين مستقلين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل(أ/ب) = ٠٫٦ ، ل(ب) = ٠٫٣ فإن ل(أ ∩ ب) = ...

أ) ٠٫٩ ب) ٠٫٣ ج) ٠٫١٨ د) ٠٫٢

س٢ إذا كان ف = {أ، ب، ج، د} حيث أ، ب، ج، د أحداث متنافية وكان ل(أ ∪ ب) = ٠٫٦ ، أ ⊂ ب فإن ل(ج) = ...

أ) ٠٫٢ ب) ٠٫٣ ج) ٠٫٤ د) ٠٫٦

س٣ إذا كانت معادلة خط انحدار ص على س هي (ص − س = ٩) فإن الارتباط بين قيم س، قيم ص يكون ....

أ) منعدماً ب) طردياً تاماً ج) طردياً د) عكسياً

س٤ إذا كان المتوسط الحسابي لمتغير عشوائي ما يساوي ٤ وكان معامل الاختلاف له يساوي ٧٩٪ فإن الانحراف المعياري له = ...

أ) ١٠ ب) ١٠٠ ج) ٢١٫٦ د) ٣٫١٦

س٥ إذا كان ف هو فضاء العينة لتجربة عشوائية حيث ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}، أ = {٢، ٤، ٦، ١، ٨}، ب = {٢، ٥، ٦، ٧} فإن أ، ب حدثان ....

أ) متنافيان ب) بسيطان ج) مستقلان د) غير مستقلين

س٦ إذا كان ص متغيراً عشوائياً طبيعياً معيارياً وكان ل(ص ≥ ك) = ٠٫١٦٦٦ فإن ك = ...

أ) ١٫٢٧ ب) ٠٫٩٧ ج) ٢٫١٢ د) ٤٫٢

س٧ إذا كانت درجات الطلاب في أحد الامتحانات موزعة توزيعاً طبيعياً بمتوسط قدره ٥٠ وانحراف معياري يساوي ٢ فإذا كانت الدرجة المعيارية لأحد الطلاب تساوي ٢ فإن درجته التي حصل عليها = ...

أ) ١٠٢ ب) ٩٨ ج) ٤٦ د) ٥٤

س٨) فصل دراسي به ٤٠ طالباً فإذا كان ٢٠ طالباً منهم يدرسون اللغة الفرنسية ، ١٥ طالباً يدرسون اللغة الألمانية ، ٥ طلاب يدرسون اللغتين معاً. فإذا اختير طالب عشوائياً من هذا الفصل. أحسب احتمال أن يكون هذا الطالب المختار ممن يدرسون:

أ) اللغة الألمانية إذا كان دارساً اللغة الفرنسية

ب) اللغة الفرنسية إذا كان دارساً اللغة الألمانية

جـ) إحدى اللغتين على الأقل

س٩) إذا كان مجـ س = ٤٨ ، مجـ ص = ٤٠ ، مجـ س ص = ٣٢٠ ، مجـ س² = ٢٥٩ ، مجـ ص² = ٣٠٣ ، ن = ١٠ أوجد

أ) معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين س ، ص وحدد نوعه

ب) معادلة خط انحدار ص على س

س١٠) إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً ودالة كثافة الاحتمال له هي د

حيث د(س) = { $\frac{1}{24}$(س + ك) عندما ١ ≤ س ≤ ٥
صفر فيما عدا ذلك

أولاً: أوجد قيمة ك

ثانياً: أوجد ل(٢ ≤ س ≤ ٤)

س١١) الجدول التالي يبين تقديرات ستة طلاب في مادتي الرياضيات والفيزياء:

تقديرات الفيزياء (س)	مقبول	جيد	جيد جداً	ممتاز	جيد	ضعيف
تقديرات الرياضيات (ص)	مقبول	جيد جداً	جيد	جيد جداً	ضعيف	مقبول

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س ، ص مبيناً نوعه

س١٢) س متغير عشوائي متقطع مداه {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} وكان ل(س = ٠) = $\frac{1}{16}$ ، ل(س = ١) = $\frac{1}{4}$ ،
ل(س = ٣) = $\frac{1}{4}$ ، ل(س = ٤) = $\frac{1}{16}$ أوجد ل(س = ٢) ،
الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمتغير س

س١٣) إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه ٣٢ وتباينه ١٦ أوجد:

أ) ل(س < ٢٥) ب) ل(٢٨ < س < ٣٠)

حل اختبار الإحصاء

(١) ل(أ|ب) = $\frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)}$

∴ ... = $\frac{ل(أ \cap ب)}{٠,٣}$ ∴ ل(أ∩ب) = ٠,١٨

(٢) ∵ الحدثان متنافيان ، أ ∪ ب = Ω
ل(أ) + ل(ب) = ١ ∴ ل(أ ∪ ب) = ١
∴ ل(ب) = ... ∴ ل(أ) = ٠,٤

(٣) ∵ قيمة س = ٩
∴ معامل الارتباط طردياً تاماً

(٤) ∵ معامل الاختلاف = $\frac{ع}{\bar{س}}$ × ١٠٠ ∴ ٧٩٪ = $\frac{ع}{٤}$ × ١٠٠
∴ ع = ٣,١٦

(٥) المتغيران غير مستقلين

(٦) ص = ل : (ص < ك) = ٠,١٦٦ ∴ ل : (ص < ك) = ٠,٤٢٢
∴ ك = ٩٧ هـ

(٧) ∵ ص = $\frac{س - \mu}{\sigma}$ ∴ ٢ = $\frac{س - ٥٠}{٢}$ ∴ س = ٥٤ درجة

(٨) نفرض أن أ حدث أنه يدرس اللغة الفرنسية ∴ ل(أ) = $\frac{٢٠}{٤٠}$
، ب أنه يدرس اللغة الألمانية ل(ب) = $\frac{١٥}{٤٠}$ ، ل(أ∩ب) = $\frac{٥}{٤٠}$

(أ) احتمال أنه يدرس اللغة الألمانية إذا كان يدرس اللغة الفرنسية
= ل(ب|أ) = $\frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)}$ = $\frac{٥}{٢٠}$ = $\frac{١}{٤}$

ب) احتمال أن يكون دارساً للغة الفرنسية إذا كان دارساً للغة الألمانية
ل(أ|ب) = $\frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)}$ = $\frac{٥}{١٥}$ = $\frac{١}{٣}$

جـ) احتمال إحدى اللغتين على الأقل هو ل(أ ∪ ب)

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ∩ب)

= $\frac{٢٠}{٤٠}$ + $\frac{١٥}{٤٠}$ − $\frac{٥}{٤٠}$ = $\frac{٣}{٤}$

④ إذا كان ل(أ') = ٤,٠ ، ل(ب) = ٥,٠ ، ل(أ ∪ ب) = ٨,٠
أوجد ل(أ | ب̄)

الحل

ل(أ) = ١ − ل(أ') = ١ − ٤,٠ = ٦,٠

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

ل(أ ∩ ب) = ٦,٠ + ٥,٠ − ٨,٠ = ٣,٠

$$\text{ل}(\text{أ} \mid \bar{\text{ب}}) = \frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \bar{\text{ب}})}{\text{ل}(\bar{\text{ب}})} = \frac{\text{ل}(\text{أ} - \text{ب})}{1 - \text{ل}(\text{ب})} = \frac{\text{ل}(\text{أ}) - \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{1 - 0.5}$$

$$= \frac{0.6 - 0.3}{0.5} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

---

⑤ ألقي حجر نرد منتظم مرة واحدة احسب احتمال أن يكون العدد الظاهر أولياً بشرط أن يكون العدد الظاهر زوجياً

الحل

نفرض أن أ هو احتمال أن يكون العدد الظاهر أولياً ل(أ) = $\frac{3}{6}$

" " " " " زوجياً ل(ب) = $\frac{3}{6}$

ل(أ ∩ ب) = $\frac{1}{6}$

$$\therefore \text{ل}(\text{أ} \mid \text{ب}) = \frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل}(\text{ب})} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

---

⑥ إذا كان ل(ب | أ) = $\frac{2}{3}$ ، ل(ب | أ') = $\frac{4}{7}$ ، ل(أ) = $\frac{3}{5}$

أوجد أ) ل(أ ∩ ب) ب) ل(أ ∪ ب)

الحل

أ) $\because$ ل(ب | أ) = $\frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل}(\text{أ})} = \frac{2}{3} \Leftarrow \frac{2}{3} = \frac{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{\frac{3}{5}}$

$\therefore$ ل(أ ∩ ب) = $\boxed{\frac{2}{5}}$

ب) ل(ب | أ') = $\frac{4}{7} \Leftarrow \frac{\text{ل}(\text{ب} \cap \text{أ}')}{\text{ل}(\text{أ}')} = \frac{4}{7} \Leftarrow \frac{\text{ل}(\text{ب}) - \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}{1 - \text{ل}(\text{أ})} = \frac{4}{7}$

$\therefore \frac{\text{ل}(\text{ب}) - \frac{2}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{4}{7} \Leftarrow \frac{\text{ل}(\text{ب}) - \frac{2}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{4}{7}$ $\therefore$ ل(ب) = $\frac{22}{35}$

$\therefore$ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب) = $\frac{3}{5} + \frac{22}{35} - \frac{2}{5} = \frac{29}{35}$

٩) أولاً: $ر = \frac{ن \sum س ص - \sum س \sum ص}{\sqrt{ن \sum س^2 - (\sum س)^2} \times \sqrt{ن \sum ص^2 - (\sum ص)^2}}$

$ر = \frac{١٠ \times ٣٢٠ - ٤٨ \times ٤٥}{\sqrt{١٠ \times ٣٠٩ - (٤٨)^2} \times \sqrt{١٠ \times ٣٠٣ - (٤٥)^2}} = ٠{,}٩١$ ارتباط طردي

ثانياً: معادلة خط الانحدار ص على س هي ص = أ + ب س

$ب = \frac{ن \sum س ص - \sum س \sum ص}{ن \sum س^2 - (\sum س)^2} = \frac{١٠ \times ٣٢٠ - ٤٨ \times ٤٥}{١٠ \times ٣٠٩ - (٤٨)^2} = ٠{,}٨٠٨٧$

$أ = \frac{\sum ص - ب \sum س}{ن} = \frac{٤٥ - ٠{,}٨٠٨٧ \times ٤٨}{١٠} = ٠{,}٦١٨٢$

∴ معادلة خط الانحدار ص على س هي ص = ٠,٦١٨٢ + ٠,٨٠٨٧ س

١٠) أولاً: ل (١ ≤ ح ≤ ٥) = ١ ∴ $\frac{1}{2}[د(١) + د(٥)] \times ٤ = ١$

∴ $\frac{1}{2}\left[\frac{١ + ك}{٢٤} + \frac{٥ + ك}{٢٤}\right] \times ٤ = ١$ ∴ ك = ٣

ثانياً: ل (٢ ≤ ح ≤ ٤) = $\frac{1}{2}[د(٢) + د(٤)] \times ٢ = \frac{٥}{٢٤} + \frac{٧}{٢٤} = \frac{1}{2}$

١١)

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف²
مقبول	مقبول	٢	٢,٥	-٠,٥	٠,٢٥
جيد	جيد جداً	٣,٥	٤,٥	-١	١
جيد جداً	ممتاز	٥	٦	-١	١
ممتاز	جيد جداً	٦	٤,٥	١,٥	٢,٢٥
جيد	ضعيف	٣,٥	١	٢,٥	٦,٢٥
ضعيف	مقبول	١	٢,٥	-١,٥	٢,٢٥
المجموع					١٣

ر سبيرمان = $١ - \frac{٦ \sum ف^2}{ن(ن^2 - ١)} = ١ - \frac{٦ \times ١٣}{٦(٣٦ - ١)} = ٠{,}٦٢٩$

نوع الارتباط طردي

(١٢) أولاً: $ل(س = ٢) = ١ - \left(\frac{١}{١٦} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{١٦}\right) = \frac{٣}{٨}$

ثانياً: الوسط الحسابي $= \mu$

$= \sum س \cdot د(س) = ٠ \times \frac{١}{١٦} + ١ \times \frac{١}{٤} + ٢ \times \frac{٣}{٨} + ٣ \times \frac{١}{٤} + ٤ \times \frac{١}{١٦}$

$\therefore \mu = ٢$

ثالثاً: $\sigma^٢ = \sum س^٢ \cdot د(س) - \mu^٢ =$

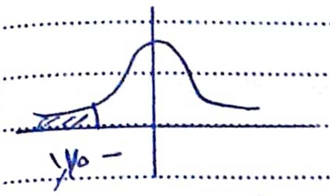
$\sigma^٢ = ٠ \times \frac{١}{١٦} + ١ \times \frac{١}{٤} + ٤ \times \frac{٣}{٨} + ٩ \times \frac{١}{٤} + ١٦ \times \frac{١}{١٦} - (٢)^٢$

$\sigma^٢ = ١ \quad \therefore$ الانحراف المعياري $\sigma = ١$

---

(١٣) أ) $ل(س < ٢٥)$ نحول إلى معياري

$ل\left(ص < \frac{٢٥ - ٣٢}{٤}\right) = ل(ص < -١٫٧٥)$



$= ٠٫٥ - ل(٠ < ص < ١٫٧٥)$

$= ٠٫٥ - ٠٫٤٥٩٩ = ٠٫٠٤٠١$

ب) $ل(٢٨ < س < ٣٠)$ نحول إلى معياري

$ل\left(\frac{٢٨ - ٣٢}{٤} < ص < \frac{٣٠ - ٣٢}{٤}\right) = ل(-١ < ص < ٠٫٧٥)$

$= ل(٠ < ص < ١) + ل(٠ < ص < ٠٫٧٥)$

$= ٠٫٣٤١٣ + ٠٫٢٧٣٤ = ٠٫٦١٤٧$

٨

* التجربة العشوائية: هي التجربة المعروف مقدماً جميع نواتجها دون التأكد أيها سيحدث بالفعل عند إجراء التجربة

* فضاء النواتج: هو مجموعة جميع النواتج الممكنة لتجربة عشوائية ويرمز له بالرمز (ف)

الاحتمال

* الحدث: هو أي مجموعة جزئية من فضاء النواتج.

أنواع الأحداث:

(١) الحدث البسيط: يحتوي على عنصر واحد فقط. [يسمى أحياناً أولي]

(٢) الحدث المؤكد: هو الحدث الذي لابد من وقوعه. [رمزه ف]

(٣) الحدث المستحيل: هو الحدث الذي لا يمكن وقوعه. [رمزه ϕ]

الأحداث المتنافية

يقال لحدثين أ، ب أنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما ينفي وقوع الآخر أو إذا كان $أ \cap ب = \phi$

ويقال لعدة أحداث أنها متنافية إذا كانت متنافية مثنى مثنى [$أ \cap ب = \phi$ ، $ب \cap حـ = \phi$ ...]

مسلمات الاحتمال: إذا كان (ف) فضاء النواتج لتجربة عشوائية ما جميع نواتجها متساوية الإمكانات في الحدوث فإن:

بفرض أن احتمال وقوع أ = ل(أ) يعرف كالآتي

$$ل(أ) = \frac{\text{عدد النواتج التي تؤدي إلى وقوع أ}}{\text{عدد جميع النواتج}} = \frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ف}}$$

ويكون: * $ل(أ) \in [٠ ، ١]$ * $ل(\phi) = $ صفر * $ل(ف) = ١$

---

(١) $ل(أ \cup ب) =$
- $ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب)$ إذا كان أ، ب غير متنافيان
- $ل(أ) + ل(ب)$ إذا كان أ، ب متنافيان

(٢) $ل(\bar{أ}) = ١ - ل(أ)$ كذلك $ل(أ) = ١ - ل(\bar{أ})$

(٣) $ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ \cap ب) = ل(أ \cap \bar{ب})$ كذلك $ل(ب - أ) = ل(ب) - ل(أ \cap ب) = ل(ب \cap \bar{أ})$

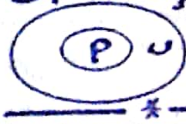
(٤) $ل(\bar{أ} \cup \bar{ب}) = ل(\overline{أ \cap ب}) = ١ - ل(أ \cap ب)$ كذلك: $ل(\bar{أ} \cap \bar{ب}) = ل(\overline{أ \cup ب}) = ١ - ل(أ \cup ب)$

(٥) $ل(أ \cup \bar{ب}) = ل(أ) + ل(\bar{ب}) - ل(أ \cap \bar{ب}) = ل(أ) + ١ - ل(ب) - [ل(أ) - ل(أ \cap ب)]$
$= ل(أ) - ل(أ) + ١ + ل(أ \cap ب) - ل(ب) = ١ + ل(أ \cap ب) - ل(ب)$

ملاحظات * إذا كان $أ \subset ب$ فإن: $أ \cap ب = أ$ ∴ $ل(أ \cap ب) = ل(أ)$

$أ \cup ب = ب$ ∴ $ل(أ \cup ب) = ل(ب)$

$أ - ب = \phi$ ∴ $ل(أ - ب) = ل(\phi) = $ صفر



---

* العدد الزوجي: هو العدد الذي يقبل القسمة على ٢ مثل {٠، ٢، ٤، ٦، ----}

* العدد الفردي: هو العدد الذي لا يقبل القسمة على ٢ مثل {١، ٣، ٥، ٧، ٩، ---}

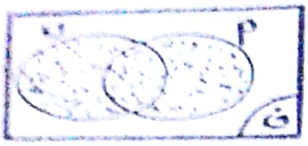
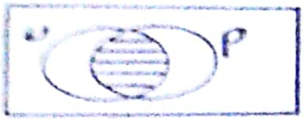
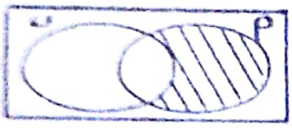
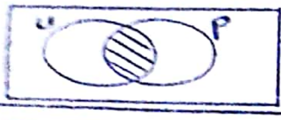
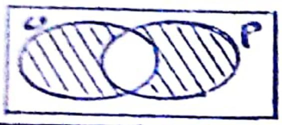
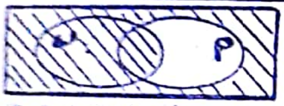
* العدد الأولي: هو العدد الذي يقبل القسمة على عددين مختلفين فقط [نفسه والواحد] مثل {٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ١٣، ١٧، ١٩، ٢٣، ٢٩، ٣١، ٣٧، ----}

* الفرق بين عددين: بفرض أن أ > ب ∴ الفرق بينهما أ − ب وهي كمية موجبة

الفرق المطلق بين عددين: $|أ - ب|$ أو $|ب - أ|$ (٢، ٤) ، (٤، ٢)

تذكر أن $ل(أ \cap \bar{ب}) = ١ - ل(\overline{ب - أ}) = ل(ب - أ)'$

تذكر أنه $ف - أ = أ'$ ، $ب - أ = أ' - ب'$

التعبير اللفظي	التعبير الرمزي	التمثيل بشكل فن
* وقوع أ أو وقوع ب * وقوع احد الحدثين * وقوع احدهما على الأقل	$أ \cup ب$	
* وقوع أ و وقوع ب * وقوع الحدثين معاً * وقوع كلا الحدثين	$أ \cap ب$	
عدم وقوع أ	$أ'$	
* وقوع أ فقط * وقوع أ و عدم وقوع ب	$أ - ب = أ \cap ب'$	
* عدم وقوع أ و عدم وقوع ب * عدم وقوع ايا من الحدثين	$أ' \cap ب' = (أ \cup ب)'$	
* وقوع احدهما على الأكثر * عدم وقوع الحدثين معاً	$أ' \cup ب' = (أ \cap ب)'$	
* وقوع احد الحدثين فقط * وقوع أ فقط أو وقوع ب فقط	$(أ - ب) \cup (ب - أ) = (أ \cup ب) - (أ \cap ب)$	
وقوع ب أو عدم وقوع أ	$أ' \cup ب = (أ - ب)' = 1 - ل(أ - ب)$	

تذكر أنه $ل(أ \cup ب') = 1 - ل(ب - أ)$

الاحتمال الشرطي: $ل(أ|ب) = ل(أ \cap ب) \div ل(ب)$ ، $ل(ب) \neq 0$

احتمال وقوع أ بشرط وقوع ب

ملاحظات: $ل((أ_1 \cup أ_2)|ب) = ل(أ_1|ب) + ل(أ_2|ب)$

بشرط أن $ل(أ_1 \cap أ_2) = \phi$

* $ل(أ'|ب) = 1 - ل(أ|ب)$ ، $ل(أ \cap ب) = ل(أ|ب) . ل(ب) = ل(ب|أ) . ل(أ)$

الاحداث (1) المستقلة: إذا كان $ل(أ \cap ب) = ل(أ) \times ل(ب)$

(2) غير المستقلة إذا كان $ل(أ \cap ب) \neq ل(أ) \times ل(ب)$

(i) أ ، ب مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر في وقوع الآخر

(ii) أ ، ب غير مستقلين " " " " يؤثر " "

عموماً $ل(أ|ب) \neq ل(ب|أ)$

المتغير العشوائي : إذا كان ف فضاء نواتج لتجربة عشوائية ما ، ح مجموعة الأعداد الحقيقية فإن أي دالة س حيث $\text{س} : \text{ف} \longrightarrow \text{ح}$ تسمى متغيراً عشوائياً معرفاً على ف

أنواعه (المتغير العشوائي)

* (المتقطع) هو الذي مداه مجموعة قابلة للعد [قابلة للحصر] .
* المتصل : هو الذي مداه مجموعة غير قابلة للعد [فترة] .

* **التوزيع الاحتمالي:** إذا كان س متغير عشوائي متقطع مداه المجموعة $\{\text{س}_1 ، \text{س}_2 ، \text{---} ، \text{س}_\text{ن}\}$ باحتمالات هي $\{\text{د}(\text{س}_1) ، \text{---} ، \text{د}(\text{س}_\text{ن})\}$

فإن

س	س_1	س_2	----	$\text{س}_\text{ن}$
د	$\text{د}(\text{س}_1)$	$\text{د}(\text{س}_2)$	---	$\text{د}(\text{س}_\text{ن})$

يسمى بالتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س ويلاحظ أن د(س) تحقق ما يأتي

(i) $\text{د}(\text{س}) \geq 0$ (ii) $\sum \text{د}(\text{س}) = 1$

① الوسط الحسابي (التوقع) $= \mu = \sum \text{س} \cdot \text{د}(\text{س})$

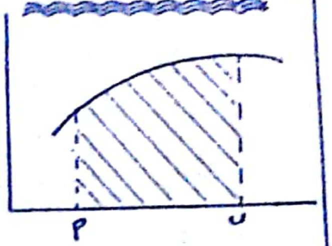
② التباين $= \sigma^2 = \sum \text{س}^2 \cdot \text{د}(\text{س}) - \mu^2$

③ الانحراف المعياري $= \sigma = \sqrt{\sum \text{س}^2 \cdot \text{د}(\text{س}) - \mu^2}$

④ معامل الاختلاف $= \frac{\sigma}{\mu} \times 100$

س	د	س.د	س².د
⋮	⋮	⋮	⋮

* **دالة الكثافة:**



إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً فإن الدالة الحقيقية "د" تسمى بدالة كثافة المتغير العشوائي س إذا كان

$\text{ل}(\text{أ} \leq \text{س} \leq \text{ب})$ = مساحة المنطقة تحت "د" ومحور السينات في الفترة [أ ، ب] لكل أ ، ب $\in$ ح

خواص دالة الكثافة : (1) منحنى "د" يقع بأكمله فوق محور السينات (2) المساحة تحت المنحنى ومحور السينات = الواحد

لحساب $\text{ل}(\text{أ} < \text{س} < \text{ب})$ نتبع الآتي :- ① نحسب د(أ) ثم د(ب) عن طريق التعويض في الدالة المعطاة عن س

② نحسب (ب - أ) ③ $\text{ل}(\text{أ} < \text{س} < \text{ب}) = \frac{1}{2}[\text{د}(\text{ب}) + \text{د}(\text{أ})][\text{ب} - \text{أ}]$

ملاحظات ① إذا كانت الدالة معرفة بأكثر من قاعدة لابد من تقسيم المساحة حسب المطلوب

② إذا كانت قاعدة التعريف تحتوي على مجهول (ك) مثلاً والمطلوب إيجاد قيمة (ك) نحسب المساحة خلال فترة التعريف ونساويها بالواحد..

قوانين بعض المساحات: * $\Delta = \frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع

* المستطيل = الطول × العرض

* شبه المنحرف $= \left(\frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2}\right) \times \text{ع}$

(١١)

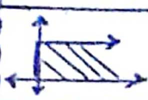
* المتغير الطبيعي المعياري رمزه ص وفيه μ = صفر ، σ = ١
* المتغير غير المعياري رمزه س وفيه μ ، σ خلاف ذلك

التوزيع الطبيعي

$$\text{ص} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$$

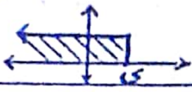
(١) ل(ص ≤ ٠) = ٠.٥

(٢) ل(ص ≥ ٠) = ٠.٥

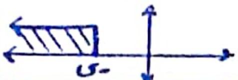


(٣) ل(ص ≥ ك) = ٠.٥ − ل(٠ ≤ ص ≤ ك)

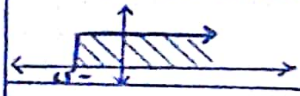
(٤) ل(ص ≤ ك) = ٠.٥ + ل(٠ ≤ ص ≤ ك)



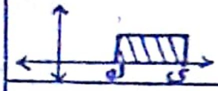
(٥) ل(ص ≤ −ك) = ٠.٥ − ل(٠ ≤ ص ≤ ك)



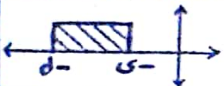
(٦) ل(ص ≥ −ك) = ٠.٥ + ل(٠ ≤ ص ≤ ك)



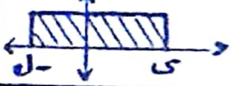
(٧) ل(ل ≤ ص ≤ ك) = ل(٠ ≤ ص ≤ ك) − ل(٠ ≤ ص ≤ ل)



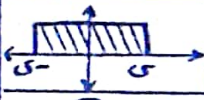
(٨) ل(−ل ≤ ص ≤ −ك) = ل(٠ ≤ ص ≤ ل) − ل(٠ ≤ ص ≤ ك)



(٩) ل(−ل ≤ ص ≤ ك) = ل(٠ ≤ ص ≤ ك) + ل(٠ ≤ ص ≤ ل)



(١٠) ل(|ص| ≤ ك) = ل(−ك ≤ ص ≤ ك) = ٢ ل(٠ ≤ ص ≤ ك)



الارتباط

خواص معامل الارتباط (ر)

(١) ر ∈ [−١ ، ١] ويكون طردى ر ← ⊕ عكسى ر ← ⊖

(٢) * ر = ١ طردى تام * ر = −١ عكسى تام * ر = ٠ منعدم

(٣) قيمة (ر) لا تتغير إذا طرحنا أو جمعنا أي عدد ثابت (اختياري) من أو الى جميع قيم س أو جميع قيم ص ويفضل ان يكون

$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$ = الوسط الحسابي ، $\bar{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}$ = الوسط الحسابي

معامل ارتباط بيرسون

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \cdot \text{مجـ ص}}{\sqrt{\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2} \cdot \sqrt{\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2}}$$

معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

$$\text{ر} = 1 - \frac{6\ \text{مجـ ف}^2}{\text{ن}^3 - \text{ن}}$$

طردى تام ١ ، طردى قوى ، طردى متوسط ، طردى ضعيف ، منعدم ٠ ، عكسى ضعيف ، عكسى متوسط ، عكسى قوى ، عكسى تام −١

الانحدار

* معادلة انحدار ص على س : ص = أ س + ب

حيث أ معامل انحدار ص على س

$$\text{أ} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \cdot \text{مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2}$$

$$\text{ب} = \frac{\text{مجـ ص} - \text{أ} \cdot \text{مجـ س}}{\text{ن}}$$

ملاحظات: تستخدم معادلة خط انحدار ص على س في

(i) التنبؤ بقيمة ص إذا عُلمت قيمة س

(ii) تحديد مقدار الخطأ والذى يتحدد من العلاقة

مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية − القيمة التي تحققها معادلة الانحدار |