الكليه: العلوم الفصل الدراسى : الأول
القسم : الفيزياء عدد الساعات : 2 نظرى + 1 تمارين
الفرقه : الرابعه اسم المقرر : رياضيات للعلوم الفيزيائية
المحاضر : أ. د. إبراهيم ناصر (جامعة الملك فهد للبترول والمعادن).
وقت المحاضرات: الأربعاء 12:20 —2:00 ظهراً (استوديو 9)

توى ا قرر

1- عناصر نظرية الزمر العامة - زمر التحويلات الخطيه – زمر الأشكال الهندسيه المنتظمه – تحويلات لورنتز _ الزمر المتناظره و المتشابهه – زمرة التواحد - زمرة الدوران - زمرة التواحد الأحادى وزمرة لورنتز.
2- تمثيل الزمر: التمثيل بتحويلات خطيه - التمثيل في بعدين لزمرة التواحد – التمثيل في ثلاثة أبعاد لزمرة الدوران
3- الضرب المباشر - إختزال الضرب المباشر - الخواص التعامديه – التمثيل المنتظم للزمره.

ا راجع : لا يوجد مرجع رئيسى للمنهج. سوف تكتب ا اضرات وتوزع بالداخل. وبعض ا راجع ا سوف يستعان با هى:

1- **"Group Theory for Atoms, Molecules and Solids", B. S. Wherrett, 1986, Prentic Hall International.**
2- **"Finite Group and Quantum Mechanics" D. B. Chesnut, 1974, John Wiley.**
3- **"Elements of Group Theory for Physics", A. W. Joshi, 1973.**
4- **"Molecular Symmetry and Group Theory", A. Vincent, 2001, John Wiley.**
5- **"Physical Chemistry" P. W. Atkins, 5th edition, Oxford University, 1994.**
6- **"Chemical Application of Group Theory", F. A. Cotton, third edition , 1998, John Wiley.**
7- **"Group Theory and Its Application to Physical Problems", M. Hamermesh, Dover, 1989.**
8- **"Atoms and Molecules", M. Weissbluth, Academic Press, 1978.**

1- " نظرية الزمر للكيميائيين" تأليف جورج ديفيدسون" ترجمة دز معتصم إبراهيم خليل, جامعة الملك سعود - 1994.
2- "المنهج الدراسى الأول لميكانيكا الكم" تأليف أ. د. إبراهيم ناصر و د. عفاف عبد الهادى-مكتبة النهضة المصرية, 2003. (سنحتاج الأجزاء الخاصه بالمصفوفات من البابين الثالث و الرابع.) بالإمكان إرسالهم بالبريد الإليكترونى لمن يرغب أو الذهاب إلى العنوان التالى حيث سيتم وضع الأبواب الخاصة بالمنهج و متعلقات أخرى به:

http://users.kfupm.edu.sa/PHYS/imnasser/

ترتيب ا اضرات :
1- الأسبوع الأول: (التماثل: أنواعه: الدوران, الإنعكاس, الإنقلاب ....و أهميته لدراسة الزمر.
2- الأسبوع الثانى: (عناصر نظرية الزمر العامة, زمر الأشكال الهندسيه المنتظمه ....)
3- الأسبوع الثالث: التمثيل المصفوفى للزمر, مراجعة عامة للمصفوفات وتطبيقاتها فى ميكانيكا الكم.

مقدمة لا بد منها: التماثل

التماثل هو صفة جمالية تظهر بوضوح فى الكون (في النبات والجماد و الكائنات الحية) لتظهر قدرة و عظمة اللة سبحانه و تعالي. ويظهر هذا جلياً بجسم الإنسان حيث أن الناحية اليمني ما هي إلا صورةً طبق الأصل من الناحية اليسري. و حتى جمال التماثل يرى بأجنحة الفراشات و الأسماك الملونة. وينسب التماثل دائماً إلي محور (أو مستوى أو نقطة) محدد ومنه نستطيع معرفة درجة و كنة التماثل. ولدراسة التماثل (وهو من صميم اختصاص نظرية الزمر أو المجموعات) يجب أن نُعرف *ثلاث عمليات* أساسية و هم:

1- دوران الجسم بزاوية محددة حول محور ثابت (محدد).

2- انعكاس (صورة) الجسم بالنسبة إلي مستوى ثابت (محدد).

3- إزاحة التركيبة الداخلية للجسم لمسافة محددة. وهذة خاصةً بالوسط ذي الأبعاد اللانهائية مثل البلورات). الأجسام ذى الأبعاد المحددة (كالجزيئات) لها تماثل فقط مع الدوران و الانعكاس.

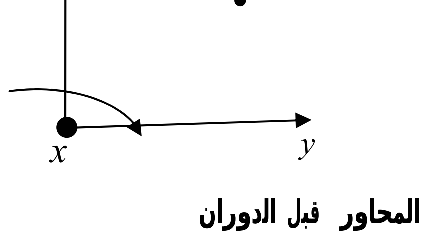
عناصر التماثل تتكون من المحور المحدد أو المستوى المحدد أو النقطة المحددة أو مجموعة منهم. وهناك أنواع أخرى من العمليات و سوف نتعامل معها لاحقاً.

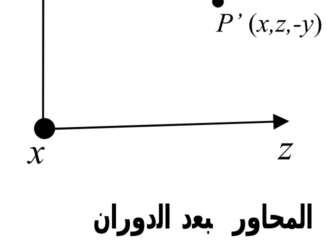
والأن ماهى نظرية المجموعات؟ هي نظرية تختص بدراسة التماثل بطريقة منظمة أو مرتبة. ومعظم نظرية المجموعات مبنى علي بديهيات. ولهذا فإن قوانينها يمكن تطبيقها بطريقة مباشرة و ميكانيكية وفي بعض الأحيان تعطى نتائج غير متوقعة ولكنها صحيحة. في أغلب الأحيان تعطى النظرية طريقة مبسطة و سهلة للحصول على النتائج المفيدة بدون الدخول في حسابات معقدة, و هذا هو المهم.

أ- الدوران (C_n):

هو دوران الجسم بزاويه محددة حول محور محدد وثابت. يعرف الجسم بأن له محور دوران من درجة n إذا لم يتغير شكله (ظل علي حالته الإبتدائيه) عند دورانه حول هذا المحور بدرجة $\frac{2\pi}{n}$.

مثال:عند دراسة دوران المحاور حول المحور x بزاويه 90° و بإتجاة حركة عقارب الساعة بحيث تظل النقطة $P(x,y,z)$ ثابتة مع تغير إحداثياتها, نجد أن هذه العمليه بالإمكان تصورها كالتالي:





وتمثيلها بمصفوفه على الشكل:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{r'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{R} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{r} \quad \Rightarrow \ r' = Rr$$

نلاحظ هنا أن المصفوفة متعامدة وأن المحدد $|R|=1$ و مجموع عناصر القطر = 1. (ملحوظه: يمكن أيضاً الحصول على هذة النتيجة بدوران النقطة مع تثبيت المحاور).

إذا عبرنا عن دوران جسم حول محور بالرمز (C_n) حيث

$$C_n = C(\frac{2\pi}{n}), \qquad \pi = 180^\circ$$

نجد أن $C_n^n = E$ حيث هو العنصر المحايد, وهذا معناه أن الجسم يعود إلي وضعه الإبتدائي.

أمثلة

$$1- \quad C_3 = C(\frac{360^\circ}{3}) = C(120),$$

$$2- \quad C_n^2 = C_n C_n = C_n C(\frac{2\pi}{n}) = C(2\frac{2\pi}{n}) = C(\frac{4\pi}{n}),$$

$$3- \quad C_n^n = C(n\frac{2\pi}{n}) = C(2\pi) = E,$$

معكوس الدوران يعطى من العلاقة

$$\left(C_n^m\right)^{-1} = C(2\pi - \frac{2\pi m}{n}) = C(\frac{2\pi(n-m)}{n}) = C_n^{n-m}$$

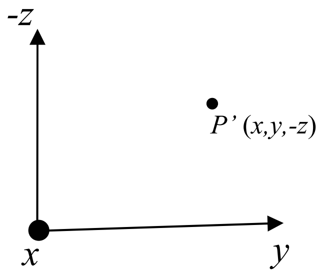
أمثلة

$$1- \quad \left(C_4^3\right)^{-1} = C_4,$$

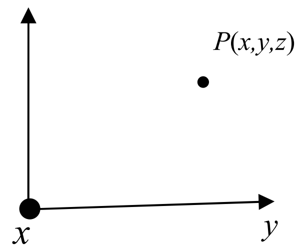
$$2- \quad \left(C_6^5\right)^{-1} = C_6,$$

ب- الإنعكاس (σ_v, σ_h)

مثال:عند دراسة إنعكاس النقطه $P(x,y,z)$ بالنسبة إلى مستوى عمودي, مثال على ذلك المستوى xy العمودي على محور الدوران (z), نجد أن هذه العمليه بالإمكان تصورها كالتالي (هنا عكسنا المحور z مع تثبيت النقطه):



المحور z بعد الإنعكاس



المحور z قبل الإنعكاس

وتمثيلها بمصفوفه على الشكل:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{r'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{r} \quad \Rightarrow \; r' = B r$$

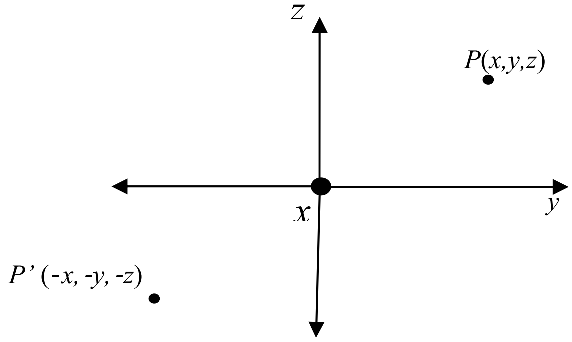
نلاحظ هنا أن المصفوفة متعامدة وأن المحدد $|B|=-1$ $|R|=1$ و مجموع عناصر القطر = 1.
الإنعكاس هنا يسمى $\sigma_h = \sigma_{xy}$

حيث أن الإنعكاس تم بالنسبة للمستوى xy . المستوى يقال عنه أنه مستوى التماثل. ومن البديهى أن الإنعكاس الثنائى لجسم (أو نقطة) بالنسبة لمستوى محدد يعطى تحويلاً محايداً (بمعنى أن الجسم يعود إلي وضعه الإبتدائي) ومنه نجد أن $\sigma^2 = \sigma\sigma = E$. (إذا تم الإنعكاس بالنسبة للمستوى الموازى لمحور الدوران فإن الإنعكاس هنا يسمى σ_v).

ت- الدوران الإنعكاسي $(S_n = \sigma_h C_n)$ أو الإنعكاس الدوراني $(S_n = C_n \sigma_h)$.

(الرسم بالمحاضرة) يعرف الجسم بأن له محور دوران إنعكاسي من درجة n إذا لم يتغير شكله (ظل علي حالته الإبتدائيه) عند دورانه حول هذا المحور بدرجه $\frac{2\pi}{n}$ وتبعه إنعكاس علي مستوى عمودى (أو موازى) لهذا المحور. وليس شرطاً أن $\sigma_h C_n = C_n \sigma_h$ وفى حالة التساوى يقال أن σ_h و C_n أنهما عمليتان متلازمتان (متبادلتان).

الإنقلاب $(I = S_2 = \sigma_h C_2 = C_2 \sigma_h)$ هنا يظهر التماثل مع نقطة المركز.



وتمثيلها بمصفوفه على الشكل:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}}_{r'} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{r} \Rightarrow r' = B\,r$$

نلاحظ هنا أن المصفوفة متعامدة وأن المحدد $|B| = -1$ **و مجموع عناصر القطر =- 3.**

ملاحظات:

1- نجد أن

$$(I\sigma_h = C_2, \qquad IC_2 = \sigma_h)$$

وذلك لأن $C_2^2 = E$ **و** $\sigma_h^2 = E$

2- من 1 نستنتج أن محور الدوران من الدرجة الثانيه C_2 **و مستوى تماثل عمودى عليه** σ_h **و مركز التماثل عند نقطة تقاطعهما مرتبطين ببعضهما البعض. وهذا يعنى أنة إذا تواجد عمليتان متتاليتان فإن الثالثه سوف تتواجد.**

ملاحظات عابره: (الرسم بالمحاضرة)

1- تتابع دورانان حول محورين يتقاطعان عند نقطة بينهما زاوية φ **ما هو إلا دوران بزاوية** 2φ **حول محور عمودى على مستوى المحورين و يمر بنفس النقطة.**

$$\underbrace{U_2'}_{\text{second rotation}} \quad \underbrace{U_2}_{\text{first rotation}} = C(2\varphi)$$

2- تتابع إنعكاسان من سطحين يتقاطعان على محور " C **" و بينهما زاوية** φ **يكافئ الدوران حول محور التقاطع بزاوية مقدارها** 2φ **.**

$$\underbrace{\sigma_v'}_{\text{second reflection}} \quad \underbrace{\sigma_v}_{\text{first reflection}} = C(2\varphi)$$

$$\underbrace{\sigma_v}_{\text{second reflection}} \quad \underbrace{\sigma_v'}_{\text{first reflection}} = C(-2\varphi)$$

$$\sigma_v'\sigma_v'\sigma_v = \sigma_v' C(2\varphi) \quad \Rightarrow \quad \sigma_v = \sigma_v' C(2\varphi)$$

و هذا يعنى أن الدوران الذى يتبعة إنعكاس على مستوى يمر بمحور التقاطع يكافئ إنعكاس على مستوى أخر يتقاطع مع المستوى الأول و يعمل معه زاوية هى نصف زاوية الدوران.

يقال على العمليات الثلاث أنها مترابطة بمعنى أنة إذا كانت هناك عمليتان قد تمتا فإن الثالثة يجب أن تتواجد.

ملخص

عمليات التماثل	عناصر التماثل	
	الوصف	الرمز
لاتغيير	الزانية	E
دوران حول محور بمقدار $(\frac{2\pi}{n})$	محور التماثل	C_n
إنعكاس على مستوى	مستوى التماثل	σ
العكس فى نقطة	مركز التماثل	i
دوران حول محور بمقدار $(\frac{2\pi}{n})$ و يتبعه إنعكاس على مستوى عمودى على المحور	دوران-إنعكاس	S_n

واجب منزلي

إبحثى عناصر التماثل فى الأشكال التالية: (الأشكال سوف ترسل منفصلة)

أمثلة للتماثل: ١- جزئ قطبي (H_2 ، Cl_2)

٢- جزئ قطبي (HCl)

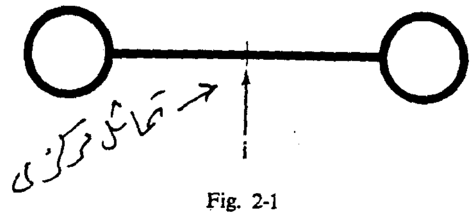


Fig. 2-1

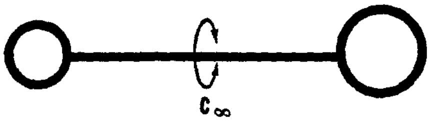


Fig. 2-6

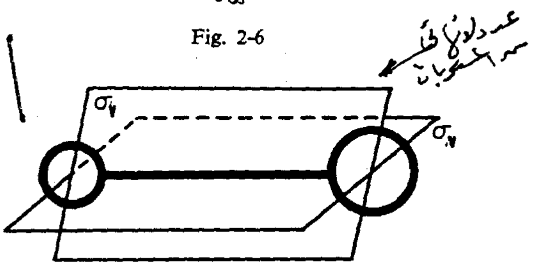


Fig. 2-7

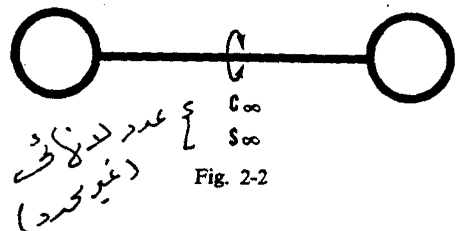


Fig. 2-2

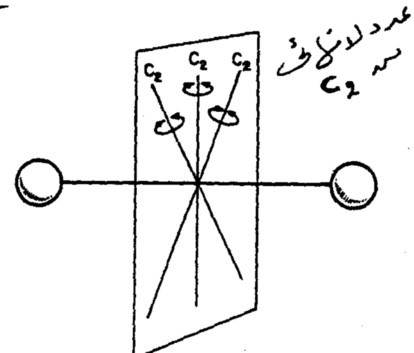


Fig. 2-3

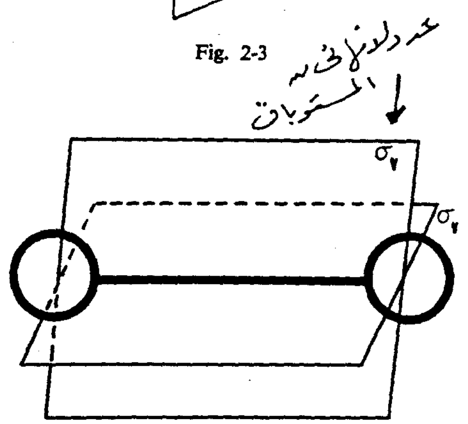


Fig. 2-4

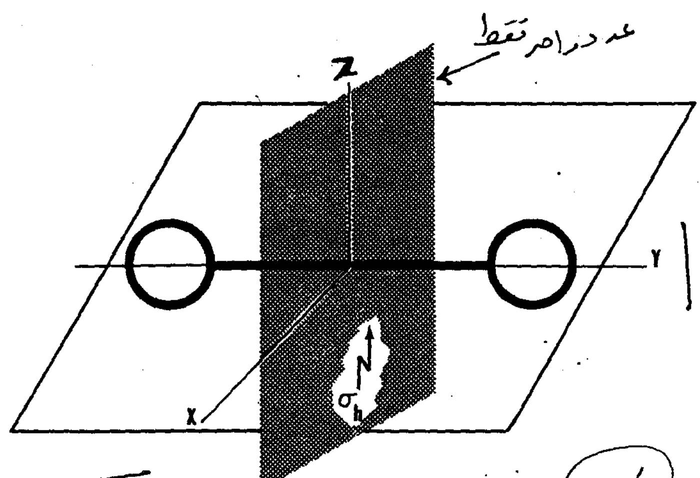


Fig. 2-5

A6

٣- جزئ مستوى على الصورة AB_3 (BF_3)

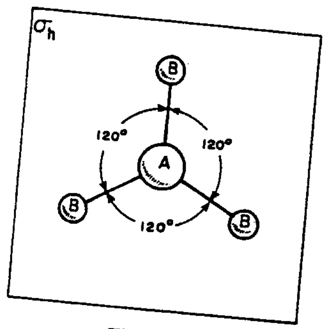


Fig. 2-12

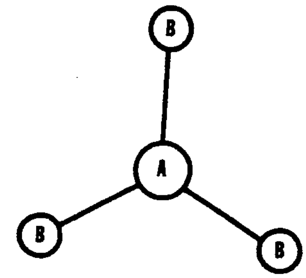


Fig. 2-8

$3C_2$

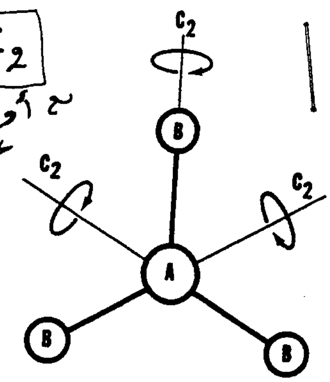


Fig. 2-9

$1C_3$

$1S_3$

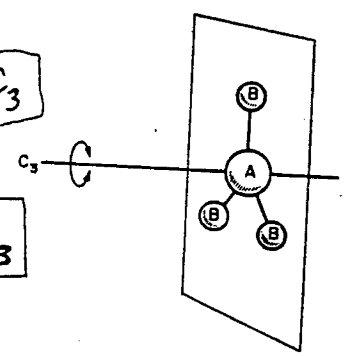
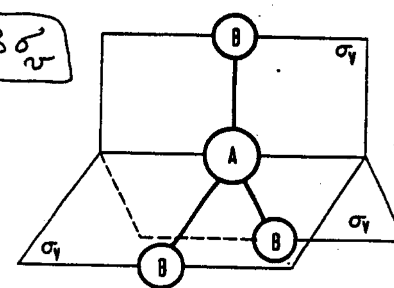


Fig. 2-10

II

$3\sigma_v$



٤- جزئ يحتوى على الصورة AB_2 (H_2O)

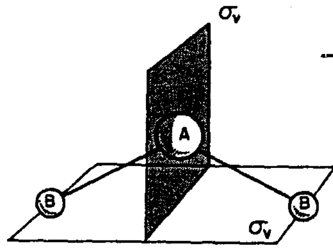


Fig. 2-14

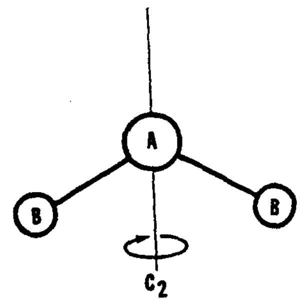


Fig. 2-13

$1 C_2$

$2 \sigma_v$?

٥- جزئ هرمى على الصورة AB_3 (NH_3)

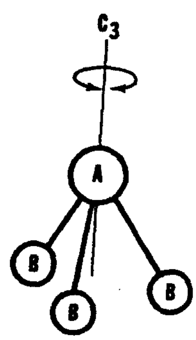


Fig. 2-15

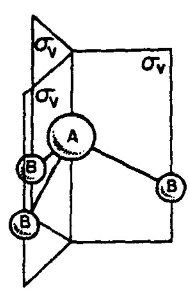


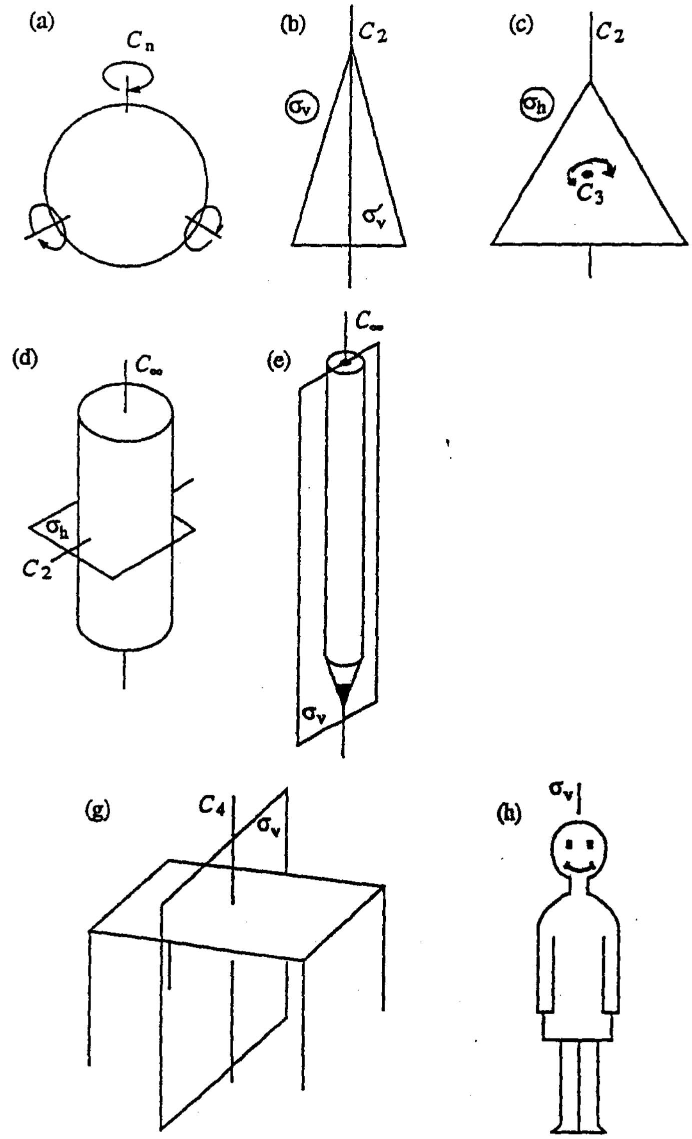
Fig. 2-16

$1 C_3$

$3 \sigma_v$

III

(٦) جزئ مستو...



IV

كرة

(a) Sphere: an infinite number of symmetry axes; therefore $\boxed{R_3}$.

مثلث متساوي الساقين

(b) Isosceles triangle: E, C_2, σ_v, and σ_v'; therefore $\boxed{C_{2v}}$.

(c) Equilateral triangle: E, C_3, C_2, σ_h

مثلث متساوي الأضلاع

D_3

$\boxed{D_{3h}}$

الإسطوانة

(d) Cylinder: $E, C_\infty, C_2, \sigma_h$; therefore $\boxed{D_{\infty h}}$.

قلم رصاص مبري

(e) Sharpened pencil: E, C_∞, σ_v; therefore $\boxed{C_{\infty v}}$.

- ~~Propeller: $E, C_3, 3C_2$; therefore D_3~~.

طاولة مربعة   طاولة مستطيلة

(g) Square table: $E, C_4, 4\sigma_v$; therefore $\boxed{C_{4v}}$; Rectangular table: $E, C_2, 2C_v$; therefore C_{2v}.

شخص

(h) Person: E, σ_v (approximately); therefore $\boxed{C_s}$.

A10

المحاضرة الثانية

تعريفات :

المجموعة **هي فئة من العناصر (مثال لذلك عمليات التماثل $G=\{I,E,C_n,S_n,\cdots\}$) التى تربطها بعض القوانين. رياضياً ممكن القول أنه إذا كانت G مجموعة غير خالية فيقال عن $(G,\circ)$ أنها زمرة اذا كانت تحقق بعض الشروط التالية:**

أ- $\circ$ عملية ثنائية على G أي أن $a\circ b\in G$ لكل $a,b\in G$.

ب- $\circ$ عملية تجميعية (دامجة) أي أن $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$ لكل $a,b,c\in G$.

ج- يوجد عنصر $E\in G$ يسمى العنصر المحايد بحيث أن $E\circ a=a\circ E$ لكل $a\in G$.

د- لكل عنصر $a\in G$ يوجد معكوس $a^{-1}\in G$ بحيث أن $a^{-1}\circ a=a\circ a^{-1}=E$ لكل $a\in G$.

يقال عن زمرة أنها إبدالية (مرتبطة) إذا كان $a\circ b=b\circ a$ لكل $a,b\in G$.

مثال: أبسط أنواع المجموعات هى:

$$G=\{E,S_2=I\}$$

$$G=\{E,\sigma_h\}$$

ولها جدول الضرب كالتالى:

x	E	I		x	E	σ_h
E	E	I		E	E	σ_h
I	I	E		σ_h	σ_h	E

رتبة المجموعة: **هو عدد العناصر بالمجموعة. و تنقسم المجموعات إلى: مجموعة محدودة وتحتوى على عدد محدود من العناصر, و مجموعة غير محدودة (لانهائية) وعدد عناصرها غير محدد (أى لانهائى). و نحن هنا سوف نتعامل مع المجموعات المحدودة فقط.**

المجموعة الفرعية (الجزئية) **H : هو جزء من المجموعة G . و يقال عنها أنها مجموعة لأنها تحقق شروط المجموعة الكلية. إذا كانت رتبة H هى h ورتبة G هى g فإن $h<g$. وليس من الضرورى أن تحتوى المجموعة على مجموعة جزئية.**

المجموعة الدائرية: **هى مجموعة تتكون من عناصر تتولد (تنتج) من عنصر واحد فقط.**

التحويلات المتشابهة: **يقال أن العنصران A و B بالمجموعة أنهما متشابهان إذا وجد عنصر أخر بالمجموعة مثل M بحيث يعطىالعلاقة:**

$$B=M^{-1}AM\ \Rightarrow\ MB=AM\ \Rightarrow\ A=MBM^{-1}$$

و هناك خواص للعناصر المتشابهة و هى:

أ- كل عنصر متشابة مع نفسه, أى أن $A = M^{-1}AM$.

ب- إذا كان العنصر A متشابه مع B فإن العنصر B متشابه مع A. أى أن إذا كان $B = M^{-1}AM$ فلا بد أن يكون في المجموعة عنصر ما N بحيث يكون: $A = N^{-1}BN$.

ج- إذا كان العنصر A متشابه مع كل من B و C فلا بد أن يكون B و C متشابهان.

التجمعات: هى فئة العناصر المتشابهة مع بعضها بالمجموعة. و رتبة التجمع هى عدد العناصر في هذا التجمع. ومجموع رتب جميع التجمعات يجب أن تساوى رتبة المجموعة الأصلية. و لتحديد تجمعات مجموعة معينة يمكننا أن نبدأ بعنصر ونوجد جميع تحويلاتة المشابهة بإستخدام جميع عناصر المجموعة بما فيها العنصر المنتخب. ثم نكرر الخطوات السابقة مع عنصر أخر غير متشابة مع التجمع الأول و نوجد جميع تحويلاتة المشابهة. وهكذا إلى أن يتم وضع جميع عناصر المجموعة في تجمع أو أخر. و الجدير بالذكر هنا أن العنصر هو تجمع بمفردة.

واجب منزلى: للجدول التالى

∘	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

تحققى من التجمعات $\{E\},\{D,F\},\{A,B,C\}$

إتبعى الأتى: إختارى العنصر A و إجرى علية العمليات التالية:

$E^{-1}AE = A;$

$A^{-1}AA = A;$

$B^{-1}AB = BAB = BD = C;$

$C^{-1}AC = CAC = DC = B;$

$D^{-1}AD = FAD = FB = C;$

$\vdots$

واجب منزلى:

إذا كانت $G=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\}$ **حيث** $f_1=x$ **,** $f_2=\frac{1}{x}$ **,** $f_3=1-x$ $f_4=\frac{x-1}{x}$ $f_5=\frac{x}{x-1}$ $f_6=\frac{1}{1-x}$ $x\neq 1,0$ **. إثبت أن** $(G,\circ)$ **زمرة ليست إبدالية حيث** $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ **لكل** $f,g\in G$ **.**

الحل: أولاً نكون جدول الضرب للعملية الثنائية و هى بإتباع الطريقه:

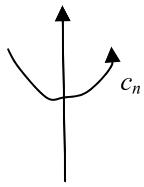
$$(f_2\circ f_4)(x)=f_2(f_4(x))=f_2(\frac{x-1}{x})=\frac{x}{x-1}$$

$$(f_4\circ f_2)(x)=f_4(f_2(x))=f_4(\frac{1}{x})=\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}=1-x$$

يصبح الجدول كالتالى (برجاء التأكد من ثلاث أو أربع عمليات فقط):

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_6	f_5	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2	f_6	f_5
f_4	f_4	f_3	f_5	f_6	f_2	f_1
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2
f_6	f_6	f_5	f_2	f_1	f_3	f_4

بعض من أهم المجموعات



1- المجموعة $\mathbb{C}_n$: هى من أبسط أنواع المجموعات وتحتوى على محور تماثل دورانى "c_n" من الدرجة n. ولإيجاد عناصر هذة المجموعة نتبع الخطوات التالية: أولاً نعلم أن c_n هى عنصر من عناصر المجموعة ويسمى بمولد المجموعة ثانياً نستخدم شروط المجموعة و هى أن $c_n c_n = c_n^2$ يجب أن يكون عنصراً بالمجموعة. و بتكرار هذه العملية نصل إلى العنصر الأخير $c_n c_n^{n-1} = c_n^n = E$ وهو العنصر المحايد. وتصبح المجموعة بالصورة

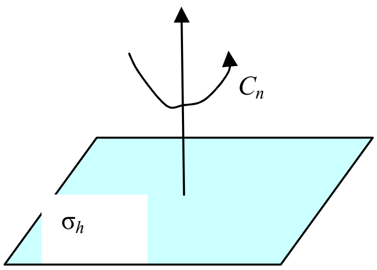
$$\mathbb{C}_n = \left\{E, c_n, c_n^2, \cdots, c_n^{n-1}\right\}$$

وتتميز هذة المجموعة بأنها دائرية و تحتوى على عدد n من التجمعات (بمعنى أن عدد التجمعات هى رتبة المجموعة الكلية).

أمثلة:

$1- \quad \mathbb{C}_3 = \left\{E, c_3, c_3^2\right\}$

$2- \quad \mathbb{C}_4 = \left\{E, c_4, c_4^2, c_4^3\right\}$



2- المجموعة $\mathbb{C}_{nh}$: وتحتوى المجموعة على محور تماثل دورانى "c_n" من الدرجة n ومستوى تماثل عمودى "σ_h" علي محور التماثل. حيث أن هذه المجموعة تحتوى على c_n و σ_h كعناصر من المجموعة فبإتباع الطريقة السابقة مع الأخذ فى الإعتبار أن $c_n c_n^{n-1} = c_n^n = E$ و $\sigma_h \sigma_h = \sigma_h^2 = E$ تأخذ المجموعة الشكل:

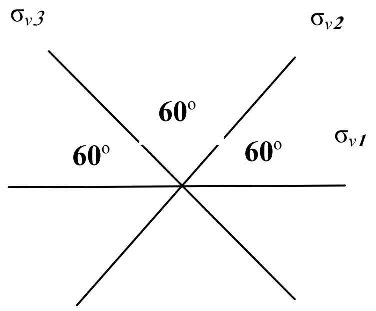
$$\mathbb{C}_{nh} = \left\{E, c_n, c_n^2, \cdots, c_n^{n-1}, \sigma_h, c_n\sigma_h, \cdots, c_n^{n-1}\sigma_h\right\}$$

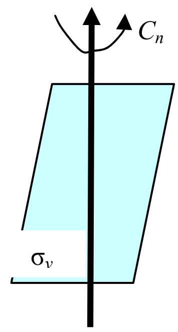
وتتميز هذة المجموعة بأن عناصرها متبادلة وعدد التجمعات هو رتبة المجموعة الكلية.

أمثلة:

$1- \quad \mathbb{C}_{1h} = \left\{E, \sigma_h\right\}$

$2- \quad \mathbb{C}_{2h} = \left\{E, c_2, \sigma_h, c_2\sigma_h = I\right\}$





3- المجموعة $\mathbb{C}_{nv}$: وتحتوى المجموعة على محور تماثل دورانى "c_n" من الدرجة n ومستوى تماثل "σ_v" يمر بمحور التماثل. هذة المجموعة تحتوى على c_n و σ_v ولا يوجد هناك علاقة لتأثير عنصر على الأخر ولكن عدد المستويات عامةً هى درجة محور الدوران. تصبح المجموعة بالصورة:

$$\mathbb{C}_{nv}=\left\{E,c_n,c_n^2,\cdots,c_n^{n-1},\sigma_{v1},\sigma_{v2},\cdots,\sigma_{vn}\right\}$$

أمثلة:

$$1-\quad \mathbb{C}_{3v}=\left\{E,c_3,c_3^2,\sigma_{v1},\sigma_{v2},\sigma_{v3}\right\}$$

و المجموعة تتكون من ثلاث تجمعات وهى:

$$\left\{E\right\},\left\{c_3,c_3^2=c_3^{-1}\right\},\left\{\sigma_{v1},\sigma_{v2},\sigma_{v3}\right\}$$

$$2-\quad \mathbb{C}_{4v}=\left\{E,c_4,c_4^2,c_4^3,\sigma_{v1},\sigma_{v2},\sigma_{v3},\sigma_{v4}\right\}$$

و المجموعة تتكون من خمس تجمعات وهى:

$$\left\{E\right\},\left\{c_4,c_4^3\right\},\left\{c_4^2\right\},\left\{\sigma_{v1},\sigma_{v2}\right\},\left\{\sigma_{v3},\sigma_{v4}\right\}$$

المجموعة $\mathbb{S}_n$: إذا أخذت n أرقام فردية $n = 1,3,5,\cdots$ فهى تعتبر كمجموعة خاصة من المجموعة $\mathbb{C}_{nh}$. وتحتوى المجموعة على العنصر $s_n = c_n \sigma_h$ ودرجاته المختلفه.

أمثلة:

$$1- \quad \mathbb{S}_3 = \left\{ E, c_3, c_3^2, \sigma_h, s_3 = \sigma_h c_3, \sigma_h c_3^2 \right\}$$

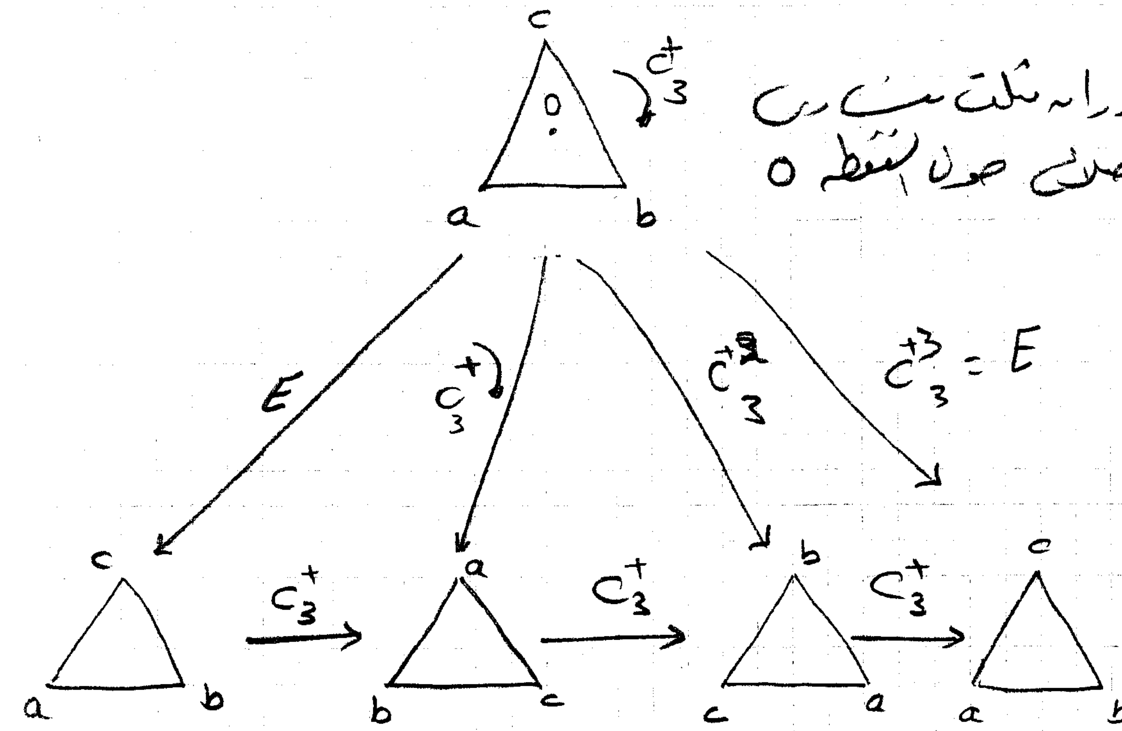
إذا أخذت n أرقام زوجية $n = 2,4,6,\cdots$

أمثلة:

$$1- \quad \mathbb{S}_2 = \left\{ E, s_2 = \sigma_h c_2 = I \right\}$$

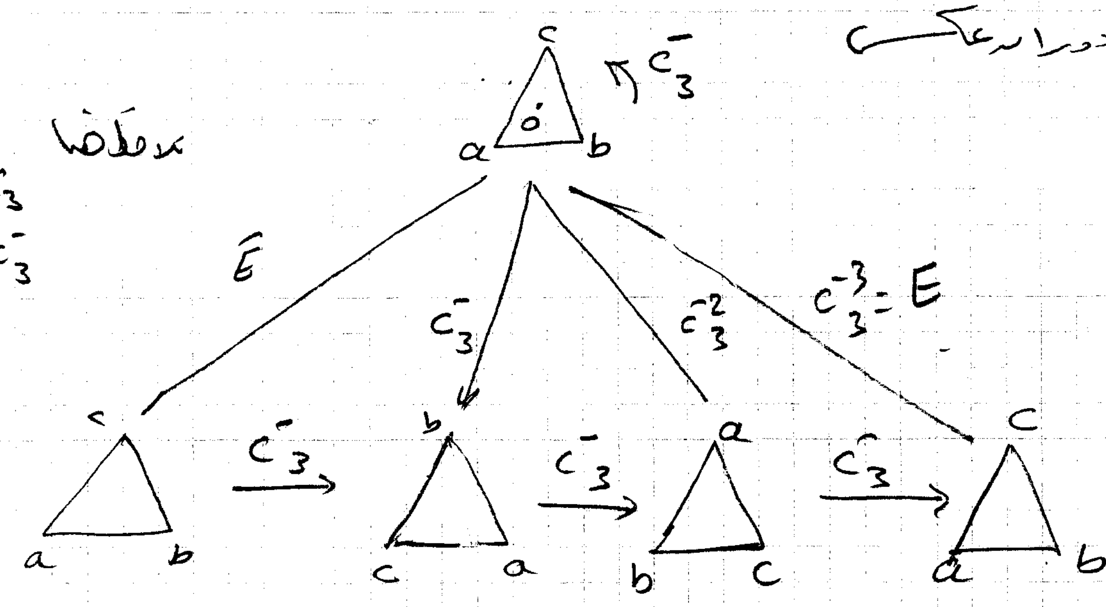
$$2- \quad \mathbb{S}_4 = \left\{ E, c_2 = c_4^2, s_4 = \sigma_h c_4, s_4^3 = \sigma_h c_4^3 \right\}$$

هناك مجموعات أخرى مثل $D_n; D_{nh}; D_{nd}; T_d; O_h$ سوف نترك لمرحلة قادمة.



دوران مثلث متساوی الاضلاع حول نقطه O

دوران عکس

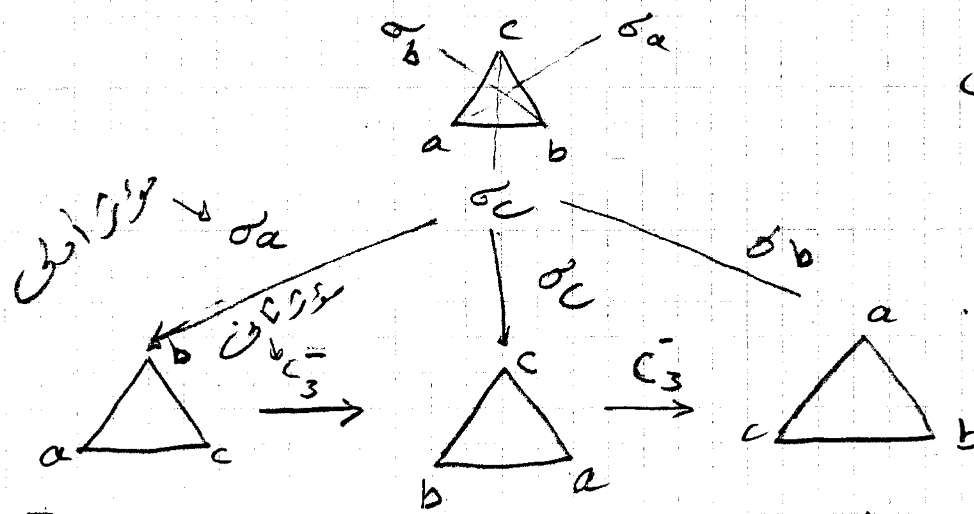


بعد فضا

$C_3^{-2} = C_3$

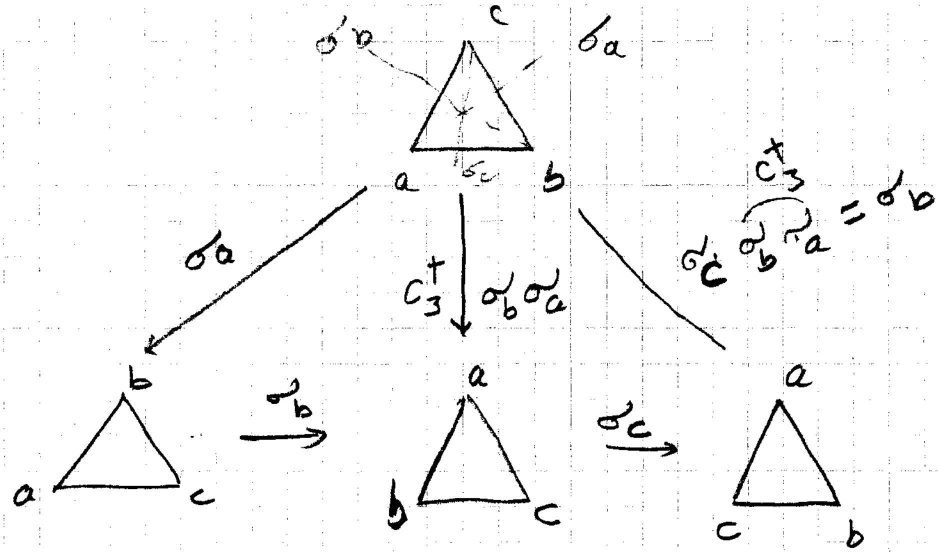
$C_3^{2} = C_3^-$

انعکاس



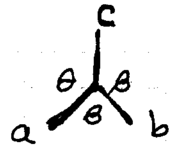
(A)

$\therefore \quad C_3^- \sigma_a = \sigma_c$ $\qquad C_3^- \sigma_c = \sigma_b$


c
a
b
σ_a
σ_b
σ_c
$C_3^\dagger$
$\sigma_b \sigma_a$
$\sigma_c \sigma_b \sigma_a = \sigma_b$

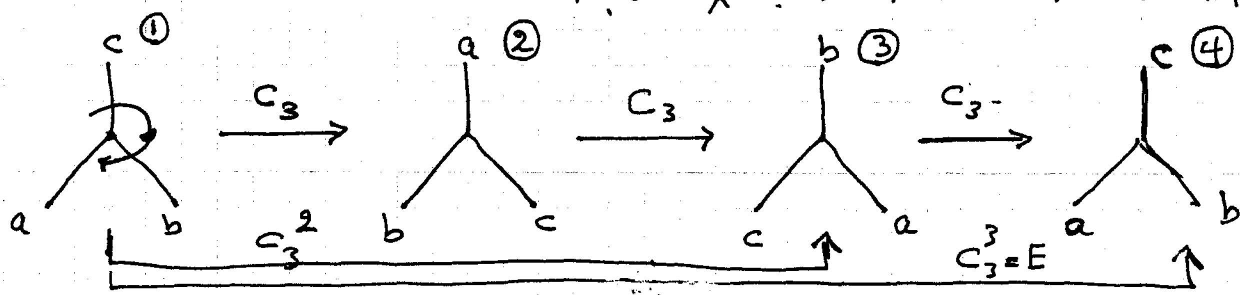
B

ادرس تأثير الدوران على تماثل الشكل

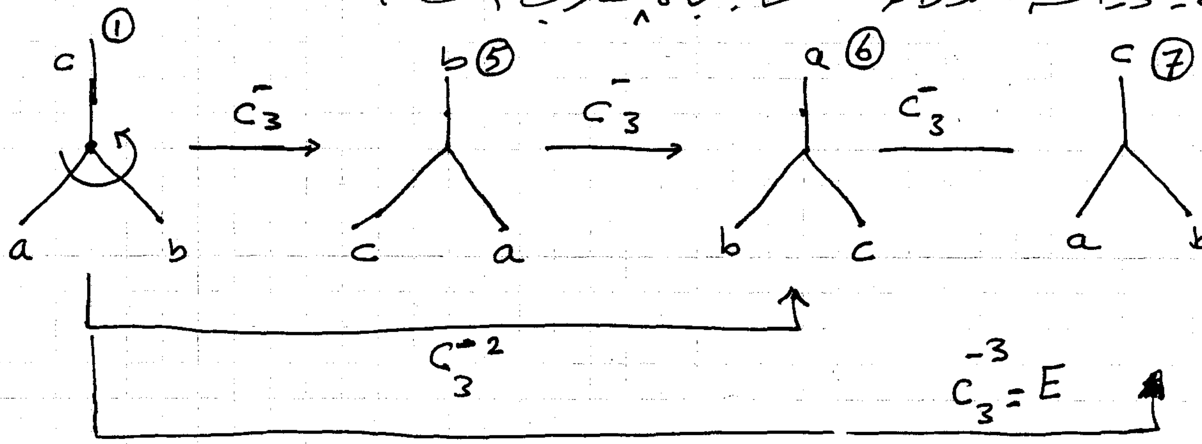


$\theta = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$

أ- دراسة الدوران في اتجاه عقارب الساعة



ب- دراسة الدوران عكس اتجاه عقارب الساعة



نلاحظ هنا أن تأثير

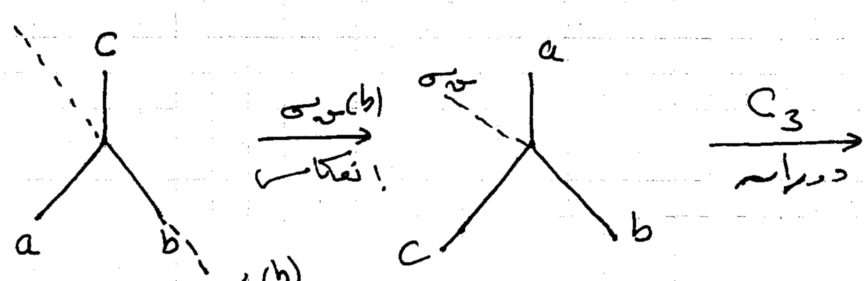
$C_3^{-2} = C_3$ — الشكلين ⑥ و ②

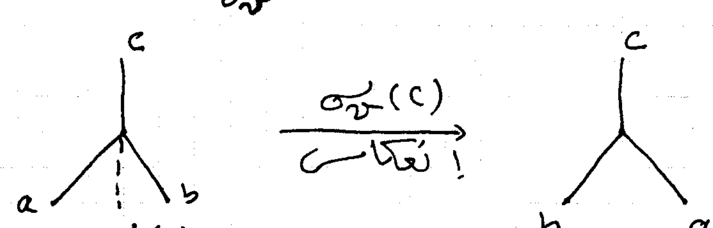
$C_3^{-} = C_3^2$ — الشكلين ⑤ و ③

$C_3^{-3} = C_3^3 = E$ — الشكلين ⑦ و ④

(C)

ادرس تأثير الدوران والانعكاس على مستوى

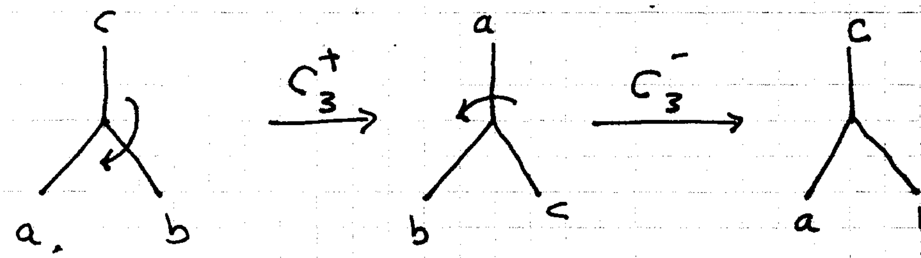




نلاحظ ترتيب الضرب (التأثير)

$\Rightarrow$ $C_3 \sigma_v(b) = \sigma_v(c)$

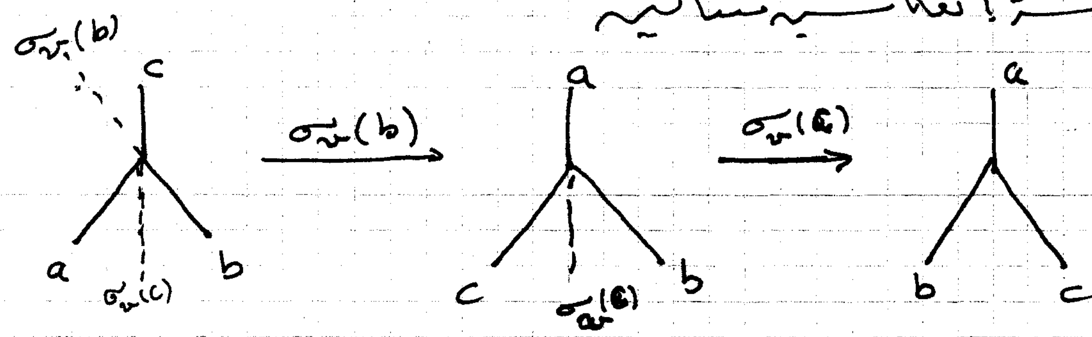
C_3 ، $\sigma_v(b)$ ، $\sigma_v(c)$ مرتبطين

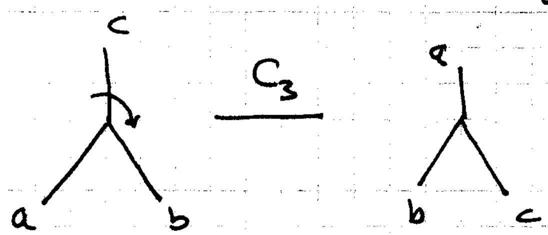


$\Rightarrow C_3^+ C_3^- = E$

$$C_3^+ C_3^- = C_3^- C_3^+ = E$$

دراسة انعكاسية متتالية

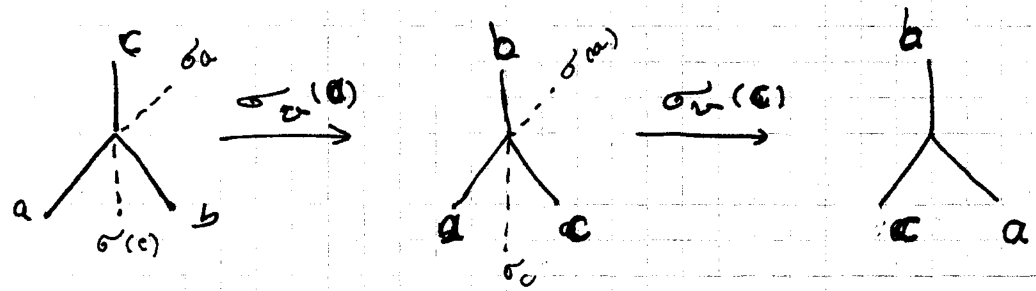




ثاني مؤثر   أول مؤثر

$\Rightarrow \sigma_v(c)\,\sigma_v(b) = C_3$

D



$$\sigma_v(c)\,\sigma_v(a) = C_3^2$$

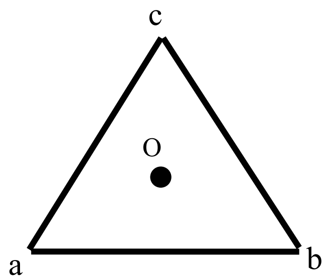
من الرسومات السابقة

تكون جدول الضرب للمجموعة C_{3v}

$$C_{3v} = \{E, C_3, C_3^2, \sigma_a, \sigma_b, \sigma_c\}$$

ملاحظة هامة جداً: مستوى الانعكاس يظل لا يتغير في الفراغ (لا يتغير مع الانعكاس)

واجب منزلى: إستعرض خواص المجموعة للمثلث المتساوى الأضلاع.



1- العناصر :

E **العملية المحايدة**

c_3 **دوران مضاد لدوران عقارب الساعة حول المركز** o **بزاوية** 120° **عمودى على مستوى المثلث.**

$c_3^- = c_3^2$ **دوران مع دوران عقارب الساعة حول المركز** o **بزاوية** 120° **عمودى على مستوى المثلث.**

σ_a **إنعكاس على مستوى مار بالخط** ao **وعمودى على مستوى المثلث.**

σ_b **إنعكاس على مستوى مار بالخط** bo **وعمودى على مستوى المثلث.**

σ_c **إنعكاس على مستوى مار بالخط** co **وعمودى على مستوى المثلث.**

$$\mathrm{G} = \mathbb{C}_{3v} = \left\{E, c_3, c_3^2, \sigma_a, \sigma_b, \sigma_c\right\}$$

2- جدول الضرب: تأكدى من ناتج العمليات بجدول الضرب بإستخدام الرسم مع ملاحظة أن حاصل الضرب, مثلاً $c_3\sigma_a$ **يعنى حدوث الإنعكاس** σ_a **أولاً ثم يتبعة الدوران** c_3 **.**

$\mathbb{C}_{3v}$	E	c_3	c_3^2	σ_a	σ_b	σ_c
E	E	c_3	c_3^2	σ_a	σ_b	σ_c
c_3	c_3	c_3^2	E	σ_c	σ_a	σ_b
c_3^2	c_3^2	E	c_3	σ_b	σ_c	σ_a
σ_a	σ_a	σ_b	σ_c	E	c_3	c_3^2
σ_b	σ_b	σ_c	σ_a	c_3^2	E	c_3
σ_c	σ_c	σ_a	σ_b	c_3	c_3^2	E

3- تجمعات: تحققى من الجدول التالى:

M	E	c_3	c_3^2	σ_a	σ_b	σ_c
M^{-1}	E	c_3^2	c_3	σ_a	σ_b	σ_c
$M^{-1}EM$	E	E	E	E	E	E
$M^{-1}c_3M$	c_3	c_3	c_3	c_3^2	c_3^2	c_3^2
$M^{-1}\sigma_aM$	σ_a	σ_c	σ_b	σ_a	σ_c	σ_b

$$\left(E\right);\left(c_3,c_3^2=c_3^{-1}\right);\left(\sigma_a,\sigma_b,\sigma_c\right)$$

4- المجموعات الجزئية

$$\{E\};\{E,c_3,c_3^2=c_3^{-1}\};\{E,\sigma_a\};\{E,\sigma_b\};\{E,\sigma_c\}$$

مجموعة التباديل: مجموعة مهمة فى ميكانيكا الكم وخصوصاً عند دراسة الأجسام المتطابقة (Identical particels). وذلك إذا إعتبرنا وجود عدد n من الإجسام المتطابقة وبدلنا إثنين أو أكثر فلن نستطيع التمييز بين التشكيلة الإبتدائية والنهائية. المجموعة التى تتكون من n من الإجسام المتطابقة لها الرتبة (عدد العناصر) $n!$ و يرمز لها بالرمز S_n.

عامةً توضع التبديله المحايدة لعدد n بالصورة:

$$E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n\end{pmatrix};$$

و أى عنصر أخر يعرف كالتالى:

$$P_i=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & 3 & \cdots & i_n\end{pmatrix};$$

مثال: لثلاثة أجسام متطابقة $n=3$ و بالتالى سنحصل على ست تباديل $n!=3\times 2=6$ يرمز لهم بالرموز:

$$p_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix};\quad p_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix};\quad p_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix};\quad p_4=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix};$$

$$p_5=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix};\quad p_6=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix};$$

1- ترتيب اللأعمدة غير مهم, بمعنى أن:

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

2- مجموعة التباديل غير متلازمه:

$$p_3p_6=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}=p_5$$

$$p_6p_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=p_4$$

و حيث أن $p_i p_j \neq p_j p_i$ فإن مجموعة التباديل غير متلازمه (متبادلة).

لإجراء عملية الضرب إتبعى الأتى: لنتيجة الضرب $p_6 p_5$ إبدئى بالعمود الأول بالمصفوفة اليمني p_5 تجدى أن $\underset{3}{\overset{1}{\downarrow}}$ و بالمصفوفة اليسري p_6 نجد أن $\underset{3}{\overset{3}{\downarrow}}$ ليصبح العمود الأول لحاصل اضرب هو الناتج $\underset{3}{\overset{1}{\downarrow}}$.

3- المعكوس P_i^{-1} لعنصر P_i هو:

$$P_i^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & 3 & \cdots & i_n \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix};$$

مثال: إذا كان $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ فإن

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

وهناك طريقة أخرى لإيجاد المعكوس لعنصر مثل $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ وهى: نفترض أن المعكوس هو $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ ونحسب

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ z & x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad z = 1, \quad x = 2, \quad y = 3.$$

إذاً المعكوس هو $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4- التباديل الكبيرة بالإمكان تقسيمها إلى تباديل صغيرة:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} = (123)(45)(6)(78)(9)$$

الرمز الذى لا يبدل بالإمكان حذفة:

$$B = (123)(45)(78)$$

وهنا يجب أن نعرف عدد الرموز n (مثال هنا: $n = 1 \to 9$)

5- بالإمكان تعريف التباديل كمصفوفات:

مثال: :

$$D(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D(p_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad D(p_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$D(p_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad D(p_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad D(p_6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

مثال: كونى جدول الضرب لمجموعة التباديل:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3);$$
$$p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(23);$$
$$p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)(3);$$
$$p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123);$$
$$p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132);$$
$$p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13)(2);$$

تحققى من الجدول الأتى:

$\circ$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_2	p_2	p_1	p_5	p_6	p_3	p_4
p_3	p_3	p_4	p_1	p_2	p_6	p_5
p_4	p_4	p_3	p_6	p_5	p_1	p_3
p_5	p_5	p_6	p_2	p_1	p_4	p_3
p_6	p_6	p_5	p_4	p_3	p_2	p_1

س1- إثبتى أن: $(abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1}$

ج1- نفترض أن $d = abc$ **ونضرب كلا الطرفين من اليمين بالمتغير** c^{-1} **فنحصل على**

$$dc^{-1} = abcc^{-1} \quad \Rightarrow \quad dc^{-1} = ab$$

ونضرب كلا الطرفين بالمعادلة الأخيرة من اليمين بالمتغير b^{-1} **فنحصل على**

$$dc^{-1}b^{-1} = abb^{-1} \quad \Rightarrow \quad dc^{-1}b^{-1} = a$$

أخيراً نضرب كلا الطرفين بالمعادلة الأخيرة من اليمين بالمتغير a^{-1} **فنحصل على**

$$dc^{-1}b^{-1}a^{-1} = aa^{-1} \quad \Rightarrow \quad d\left(c^{-1}b^{-1}a^{-1}\right) = E$$

المعدلة الأخيرة تدلنا على أن $d^{-1} = (abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1}$

س2- تحقق من نتائج التباديل التالية:

$$1- \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1245)(3) = (1245)$$

$$2- \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (143)(2)(57)(6) = (143)(57)$$

$$3- \quad \left[(14)(2)(3)\right]^{-1} = (41)(2)(3) = (14)(2)(3)$$

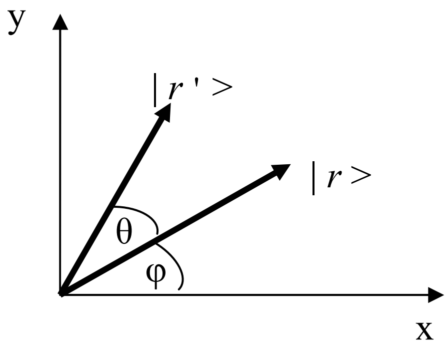
$$4- \quad \left[(1437)(528)\right]^{-1} = (7341)(825)$$

$$5- \quad (12345) = (145)(13)(12)$$

$$6- \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (134)(265)$$

إستخدام المصفوفات لتمثيل المجموعات

تستخدم المصفوفات لتمثيل عناصر التماثل بالمجموعة. ويشترط أن تكون المصفوفة مربعة وغير شاذة (بمعنى أن محددها لا يساوى صفراً) و تحقق الشروط الأساسية للمجموعة. أولاً سوف ندرس الدوران حيث أنة يلعب دوراً هاماً لعلاقتة المرتبطة بعزم الدوران الزاوى و بالتالى علاقتة بالدالة الكروية $Y_{lm}(\theta,\varphi)$.
أولاً سندرس تأثير الدوران بزاوية مقدارها θ ، باتجاه مضاد لدوران عقارب الساعة، على المتجه $|r>$ حول المحور z ويعرف الدوران بأنة التحويل الخطى الذى لايغير الضرب القياسى لمتجهين ويكون محددهما هو 1. ولهذا سنفترض أن المتجه $|r>$ ذى الإحداثيات (x,y) إنتقل إلى الموضع $|r'>$ ذى الإحداثيات (x',y') مع ثبوت المحاور و ثبوت مقدار المتجة, بمعنى أن $|r|=|r'|$.



شكل A دوران المتجة $|r>$.

ولهذا نجد أن

$$x' = r\cos(\theta+\varphi) = r(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\cos\varphi) = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = r\sin(\theta+\varphi) = r(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi) = x\sin\theta + y\cos\theta$$

وذلك بإستخدام العلاقات $x = r\cos\varphi;\quad y = r\sin\varphi$. كمصفوفة نجد أن

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |r'> = R(\theta)\,|r>$$

واجب منزلى:

1- فى حالة الدوران مع إتجاة دوران عقارب الساعة ($\theta \to -\theta$) اثبتى أن:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |r'> = R(-\theta)\,|r>$$

2- إحسبى القيم و المتجهات المميزة للمصفوفة $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,أثبتى انها يمكن تحويلها إلى مصفوفة قطرية بالشكل:

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

إذا عرفنا c_z بأنة دوران مع إتجاة دوران عقارب الساعة حول المحور z بزاوية θ فإن:

$$c_z = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

هنا يجب أن نعلم بعض خواص مصفوفة الدوران (وهى ستصبح خواص عامة للمصفوفات التى تمثل عناصر التماثل و يجب التأكد من هذة الخواص)

1- كل صف من صفوف المصفوفة يجب أن تكون معيرة مثال لذلك $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1$.

2- الصفوف المختلفة للمصفوفة يجب أن تكون متعامدة بمعنى أن $a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + +a_{13}a_{23} = 0$.

هناك خواص خاصة لمصفوفة الدوران وهم:

1- الدوران جمع بين الإحداثيان x و y فقط و ظل الإحداثى z منفرداً.

2- محدد المصفوفة $\det(c_z) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 1$.

3- مجموع عناصر القطر $\text{trace}(c_z) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

يجب أن نوضح هنا أننا يمكننا الحصول على هذة النتيجة بدوران المحور, وسوف نترك هذا كواجب منزلى.

بالإمكان أيضاً التعامل مع المتجه $|r>$ كدالة كما بميكانيكا الكم بحيث أن معيار (مقدار الدالة لا يتغير بدوران المحاور). لتوضيح هذة النقطة دعونا نعرف الدالة $f(x,y) = a(x^2 - y^2)$ حيث a هو قيمة ثابتة. إذا تم دوران المحور بزاوية $\theta = 45^o$ فإن الإحداثيات الجديدة تعرف بالعلاقة:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ & 0 \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

وبالتالى الدالة الجديدة تعرف بالعلاقة $g(x',y') = -2\,a\,x'\,y'$. وهى بالطبع مختلفة فى الشكل عن $f(x,y)$. لكن دعونا نحسب قيم الدالتين عند قيم معينة مثل $x = 3, y = 2$ نجد أن $f(3,2) = 5a$. بالإحداثيات الأخرى نجد أن $x' = 5/\sqrt{2}, y' = -1/\sqrt{2}$ و $g(5/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = 5$ كما نتوقع. بعض الدوال لا تتغير شكلها العام بتغير الإحداثيات ومثال على ذلك الدالة $f(x,y) = (x^2 + y^2)$ تتحول إلى $g(x',y') = (x'^2 + y'^2)$ ويقال على هذة الدوال دوال غير متغيرة بتغير الإحداثيات.

مثال: للعنصر $c_2 = C\left(\frac{2\pi}{2}\right) = C(\theta = \pi)$ وبالتالى

$$c_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

إذا عرفنا $\sigma(xy)$ بأنة إنعكاس على المستوى xy والعمودى على المحور z لذا:

$$\sigma(xy) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

إذا عرفنا i بأنة إنقلاب بالنسبة لنقطة الأصل لذا:

$$i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

إذا عرفنا s_z بأنة دوران c_z مع إتجاة دوران عقارب الساعة حول المحور z بزاوية θ يتبعة إنعكاس على المستوى xy والعمودى على المحور z لذا:

$$s_z = \sigma(xy)\; c_z = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

إذا عرفنا E بأنة العنصر المحايد لذا:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

واجب منزلى: إكملى الجدول التالى بإستخدام المصفوفات:

$\mathbb{C}_{2h}$	E	c_2	i	σ_h
E	E	c_2	i	σ_h
c_2	c_2	E	σ_h	i
i	i	σ_h	E	c_2
σ_h	σ_h	i	c_2	E

واجب منزلى: إعتبرى العناصر $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\sigma_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $B=\sigma_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&1\end{pmatrix}$, $C=\sigma_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}$, $D=c_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}$, $F=c_3^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}$.

1- تحققى جدول الضرب:

$\circ$	*E*	*A*	*B*	*C*	*D*	*F*
E	*E*	*A*	*B*	*C*	*D*	*F*
A	*A*	*E*	*D*	*F*	*B*	*C*
B	*B*	*F*	*E*	*D*	*C*	*A*
C	*C*	*D*	*F*	*E*	*A*	*B*
D	*D*	*C*	*A*	*B*	*F*	*E*
F	*F*	*B*	*C*	*A*	*E*	*D*

2- تحققى من التجمعات $(E);(A,B,C);(D,F)$ وهى التجمعات المتوقعة تبعاً لتساوى تجميع عناصر الأقطار.

واجب منزلى:إستخدمى المصفوفات التى تمثل المجموعة $\mathbb{C}_{2v}$ لإكمال الجدول التالى:

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \sigma(xz)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \sigma(yz)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\mathbb{C}_{2v}$	*E*	c_2	$\sigma(xz)$	$\sigma(yz)$
E	*E*	c_2	$\sigma(xz)$	$\sigma(yz)$
c_2	c_2	*E*	$\sigma(yz)$	$\sigma(xz)$
$\sigma(xz)$	$\sigma(xz)$	$\sigma(yz)$	*E*	c_2
$\sigma(yz)$	$\sigma(yz)$	$\sigma(xz)$	c_2	*E*

مع ملاحظة أن

$$\text{Trace}E=3,\quad \text{Trace}c_2=-1,\quad \text{Trace}\sigma(yz)=1,\quad \text{Trace}\sigma(xz)=1.$$

و بالتالى فإن $(E);(c_2);(\sigma(xz),\sigma(yz))$ هى التجمعات المتوقعة تبعاً لتساوى تجميع عناصر الأقطار.

مثال: إثبتى أن:

$$\sigma(xz)C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma(yz)$$

ملحق أ

المصفوفة القطرية

المصفوفة القطرية هى المصفوفة التى جميع عناصرها أصفاراً ماعدا عناصرها القطرية. و تلعب المصفوفة القطرية دوراً هاماً في التمثيل النظرى للمجموعات وذلك لسهولة التعامل معها رياضياً.

مثال 1 :أوجد القيم والمتجهات المميزة للمصفوفة الثنائية:

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ومنها أوجد المصفوفة القطرية.

الحل:

1- إيجاد القيم المميزة, وذلك بحل المعادلة للمحدد:

$$|\mathrm{R} - \lambda \mathrm{I}| = \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = e^{i\theta}, \quad \lambda_2 = e^{-i\theta}$$

وهى قيم منفصلة.

2- إيجاد المتجهات المميزة لكل قيمة من القيم المميزة. مثلاً: $\lambda_1 = e^{i\theta}$ تتطلب

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - e^{i\theta} & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad i x_1 + x_2 = 0$$

وحيث أن قيم x_1, x_2 ماهى إلا قيم إختيارية فإمكاننا فرض أن $x_1 = 1$ و بالتالى فإن $x_2 = -i$ ونحصل على المتجه الغير معير $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ و المعير $X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

و للقيمة المميزة $\lambda_2 = e^{-i\theta}$ نحصل على المتجه المعير $X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

ولإيجاد المصفوفة القطرية, نستخدم

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

بحيث نجد أن:

$$X^{-1} \mathrm{R} X = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

واجب منزلى: أوجدى القيم و المتجهات المميزة للمصفوفة:

$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ومنها أوجدى المصفوفة القطرية.

مثال 2 :أوجد القيم والمتجهات المميزة للمصفوفة الثنائية:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

ومنها أوجد المصفوفة القطرية.

الحل:

3- **إيجاد القيم المميزة, وذلك بحل المعادلة للمحدد:**

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}5-\lambda & 4\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda^2-7\lambda+6=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=1,\quad \lambda_2=6$$

وهى قيم منفصلة.

4- **إيجاد المتجهات المميزة لكل قيمة من القيم المميزة. مثلاً:** $\lambda_1=1$ **تتطلب**

$$\begin{pmatrix}5-1 & 4\\ 1 & 2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad x_1+x_2=0$$

وحيث أن قيم x_1, x_2 **ماهى إلا قيم إختيارية فإمكاننا فرض أن** $x_1=1$ **و بالتالى فإن** $x_2=-1$ **ونحصل على المتجه الغير معير** $X_1=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ **و المعير** $X_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$**.**

و للقيمة المميزة $\lambda_2=6$ **نحصل على المتجه المعير** $X_2=\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$**.**

ولإيجاد المصفوفة القطرية, نستخدم المصفوفة الغير معيرة $X_2=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ **وبالتالى**

$$X^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

بحيث نجد أن:

$$X^{-1}AX=X^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -4\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

ومنها نقول أن المصفوفة A **أصبحت قطرية بواسطة المصفوفة** X **.**

ملحق ب

مجموعات الدوران البسيطة

1- المجموعة الخطية في بعدين $GL(2)$

العلاقات الخطية

$$x' = a_1 x + a_2 y ;$$
$$y' = a_3 x + a_4 y ,$$

بالإمكان وضعها بصورة المصفوفة:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

حيث عنصر الوحدة هو:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

المجموعة الخطية في بعدين تتكون من 4 بارامتيرات اساسية وعناصرها غير متلازمة.

2- المجموعة الخطية الخاصة في بعدين $SL(2)$

هى مجموعة خاصة من المجموعة $GL(2)$ بحيث $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 1$. هذا الشرط يجعل المجموعة تعتمد على 3 متغيرات اساسية.

3- المجموعة المتعامدة في بعدين $O(2)$

هى مجموعة خاصة من المجموعة $GL(2)$ بحيث أن ثابت $= x^2 + y^2$ وهذا يعنى أن:

$$x'^2 + y'^2 = \left(a_1 x + a_2 y\right)^2 + \left(a_3 x + a_4 y\right)^2 = x^2 + y^2 ;$$

وهذا لا يتأتى إلا إذا كان: $a_1^2 + a_3^2 = 1; \quad a_2^2 + a_4^2 = 1; \quad a_1 a_2 + a_3 a_4 = 0;$

وهذه الشروط تجعل المجموعة تعتمد على بارامتير اساسى واحد. مثال لهذا:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

حيث θ هى زاوية الدوران حول المحور z . هذة المجموعة عناصرها متلازمة وزاوية الدوران الكلية هى مجموع الزوايا لكل دوران على حدة.

4- المجموعة المتعامدة في ثلاثة أبعاد $O(3)$

هى مجموعة تشترط أن ثابت $= x^2 + y^2 + z^2$ وهذا الشرط يجعل المجموعة تعتمد على 3 بارامتيرات اساسية بدلاً من تسعة.

ملحق ج

الجمع و الضرب المباشر

يعرف الجمع المباشر للمصفوفات بالصورة $A \oplus B$ والضرب المباشر بالصورة $A \otimes B$,

مثال 1: عرف الجمع المباشر للمصفوفتين:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{22} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{22} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

ولة خاصية مهمة وهى:

$$\text{Trace}(A \oplus B) = \text{Trace}(A) + \text{Trace}(B)$$

مثال 2: عرف الضرب المباشر للمصفوفتين:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{22} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} & a_{12}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ a_{22}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} & a_{22}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

ولة خاصية مهمة وهى:

$$\text{Trace}(A \otimes B) = \text{Trace}(A)\text{Trace}(B)$$

مثال 3 : عرف الجمع والضرب المباشر للمصفوفتين:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{Trace}(A \oplus B) = 3$

$\text{Trace}(A) + \text{Trace}(B) = 1 + 2 = 3$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{22} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Trace}(A \otimes B) = 2$

$\text{Trace}(A)\text{Trace}(B) = 1 \times 2 = 2$

أمثلة وواجبات منوعة

مثال: إعتبرى العناصر $E = X^6$, $F = X^5$, $D = X^4$, $C = X^3$, $B = X^2$, $A = X$

1- أكملى من جدول الضرب التالى:

$\circ$	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	B	C	D	F	E
B	B					
C	C					
D	D					
F	F					

2- تحققى من التجمعات $(E);(A,B,C);(D,F)$

واجب منزلى: إعتبرى العناصر $a = C_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$, $b = C_3^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$,

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f = \sigma_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ $d = \sigma_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$, $c = \sigma_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1- كونى جدول الضرب

2- تحققى من التجمعات $(E);(a,b);(c,d,f)$

واجب منزلى: كونى جدول الضرب لمجموعة التباديل: $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

$p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; , $p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

$\circ$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_2	p_2					
p_3	p_3					
p_4	p_4					
p_5	p_5					
p_6	p_6					

واجب منزلى: كونى جدول الضرب لمصفوفات باولى: $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ، $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ، $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ، $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. هل هذه العناصر تكون مجموعة؟

	I	σ_x	σ_y	σ_z
I	I	σ_x	σ_y	σ_z
σ_x	σ_x	I	$i\sigma_z$	$-i\sigma_y$
σ_y	σ_y	$-i\sigma_z$	I	$i\sigma_x$
σ_z	σ_z	$i\sigma_y$	$-i\sigma_x$	I

هذه المصفوفات لا تكون مجموعه! لماذا؟

واجب منزلى: إثبتى أن معكوس المصفوفة $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ هو $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ حيث $\Delta = ad - bc \neq 0$ و إثبتى أن $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

واجب منزلى: إحسب جدول الضرب للمجموعة $\mathbb{C}_4$

$\mathbb{C}_4$	E	c_4	c_4^2	c_4^3
E	E	c_4	c_4^2	c_4^3
c_4	c_4	c_4^2	c_4^3	E
c_4^2	c_4^2	c_4^3	E	c_4
c_4^3	c_4^3	E	c_4	c_4^2

أمثلة: إحسب جدول الضرب للمجموعة $\mathbb{C}_{2h}$

$\mathbb{C}_{2h}$	E	c_2	i	σ_h
E	E	c_2	i	σ_h
c_2	c_2	E	σ_h	i
i	i	σ_h	E	c_2
σ_h	σ_h	i	c_2	E