بسم الله الرحمن الرحيم

«كُتِبَ على الذين يقاتلون بأنهم ظُلموا وأن الله على نصرهم لقدير»

«سيصيب الذين أجرموا صغار عند الله وعذاب شديد بما كانوا يمكرون»

«قل اللهم مالك الملك تؤتي الملك من تشاء وتنزع الملك ممن تشاء

وتعزّ من تشاء وتذلّ من تشاء بيدك الخير إنك على كل شيء قدير»

«ربنا لا تزغ قلوبنا بعد إذ هديتنا وهب لنا من لدنك رحمة إنك أنت الوهاب»

صدق الله العظيم

المحاضرة الأولى — الإثنين 8/10/2012

مجموعة الأعداد العقدية والمستوي العقدي المركب:

الشكل الجبري:

نرمز لمجموعة الأعداد العقدية بالرمز $\mathbb{C}$.

ونرمز للعدد العقدي بالرمز z وهو عبارة عن ثنائية (x, y)

ونكتبها بالشكل:

$$z = (x,0) + (y,0)$$

ويمكن أن يكتب بالشكل:

$$z = (x,0) + (0,1)(y,0)$$

أو بالشكل:

$$z = x + iy \quad ; \quad i = \sqrt{-1} \quad ; \quad i^2 = -1$$

نسمي x القسم الحقيقي بينما نسمي y القسم التخيلي.

يكون العدد حقيقي حكماً عندما: $y = 0 \Leftarrow z = x$

يكون العدد عقدي حكماً عندما: $x = 0 \Leftarrow z = iy$

القوى:

$$i = \sqrt{-1} \quad , \quad i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = +1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = +i$$

$$i^6 = i^2 \cdot i^4 = (-1) \cdot (+1) = -1$$

$$i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$$

$$i^{2n+1} = i^{2n} \cdot i = (-1)^n \cdot i$$

مرافق العدد العقدي:

تسمى « $x - iy$ » مرافق العدد العقدي z ونرمز له بالرمز « $\bar{z}$ ».

(1) $$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x$$

وهذا يعني أن القسم الحقيقي لـ z:

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2}$$

(2) $$z - \bar{z} = x + iy - x + iy = 2iy$$

وهذا يعني أن القسم التخيلي لـ z:

$$y = \frac{z+\bar{z}}{2i}$$

العمليات على الأعداد العقدية:

جمع عددين عقديين:

$$z_1 = x_1 + iy_1$$
$$z_2 = x_2 + iy_2$$
$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2$$
$$= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

إذاً ناتج جمع عددين عقديين هو عدد عقدي قسمه الحقيقي مجموع القسمين الحقيقيين للعددين وقسمه التخيلي مجموع القسمين التخيليين للعددين.

فرق عددين عقديين:

$$z_1 = x_1 + iy_1$$
$$z_2 = x_2 + iy_2$$
$$z_1 - z_2 = x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

إذاً فرق عددين عقديين هو عدد عقدي قسمه الحقيقي هو فرق القسمين الحقيقيين للعددين وقسمه التخيلي هو ناتج فرق القسمين التخيليين للعددين.

جداء عددين عقديين :

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)$$
$$= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2$$
$$= x_1 x_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) - y_1 y_2$$
$$\Rightarrow z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

قسمة عددين عقديين :

نضرب بمرافق المقام

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 - i^2 y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

تمارين :

اكتب الأعداد العقدية التالية بشكلها الجبري.

1. $z = (1 - i)^5$

$$z = (1 - i)^5 = (1 - i)^2 . (1 - i)^2 . (1 - i)$$
$$= (1 - 2i - 1)(1 - 2i - 1) . (1 - i)$$
$$= (-2i)(-2i)(1 - i)$$
$$= (4i^2)(1 - i) = -4(1 - i)$$
$$\boxed{z = -4 + 4i}$$

2- $z = \frac{4}{i}$

نضرب بمرافق المقام :

$$z = \frac{4(-i)}{-i^2} = \frac{-4i}{-(-1)} = \frac{-4i}{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = -4i}$$

3- $z = \frac{-15+7i}{2+i}$

نضرب بمرافق المقام :

$$z = \frac{(-15+7i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$

$$z = \frac{(-15)(2)+(7)(1)}{4+1} + i\,\frac{(7)(2)-(-15)(1)}{4+1}$$

$$z = \frac{-30+7}{5} + i\,\frac{14+15}{5}$$

$$z = -\frac{23}{5} + i\,\frac{29}{5} \Longrightarrow \boxed{z = -\frac{23}{5} + \frac{29}{5}i}$$

طويلة عدد عقدي

تعريف :

طويلة عدد عقدي هي ناتج الجذر التربيعي لمجموع مربعي قسميه الحقيقي والتخيلي . يرمز للطويلة بالرمز : $|\ |$

$$|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

خواص الطويلة :

1) $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

2) $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

3) $|z| = 0 \iff z = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

4) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

أمثلة:

أوجد طويلة كل من الأعداد العقدية التالية:

* $z_1 = \sqrt{3} + i\sqrt{2}$

$x_1 = \sqrt{3}$, $y_1 = \sqrt{2}$

$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3+2}$

$|z_1| = \sqrt{5}$

* $z_2 = \frac{7}{(2-i)^2}$

$z_2 = \frac{7}{(2-i)^2} = \frac{7}{4-4i-1} = \frac{7}{3-4i}$

$|z_2| = \left|\frac{7}{3-4i}\right| = \frac{|7|}{|3-4i|}$

$|z_2| = \frac{7}{\sqrt{9+16}} = \frac{7}{\sqrt{25}} \Rightarrow |z_2| = \frac{7}{5}$

* $z_3 = (3+2i)^5$

$|z_3| = |(3+2i)^5| = |3+2i|^5$

$|3+2i| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$|z_3| = (\sqrt{13})^5 = (\sqrt{13})^4 \cdot \sqrt{13}$

$|z_3| = (13)^2 \cdot \sqrt{13}$

$\Rightarrow |z_3| = 169\sqrt{13}$

/ /

حل المعادلات التالية:

$$2z + i = 3 - iz$$

نعوض: $z = x + iy$

$$2(x+iy) + i = 3 - i(x+iy)$$

$$2x + 2iy + i = 3 - ix - i^2 y$$

$$2x + 2iy + i = 3 - ix + y$$

$$(2x) + i(2y+1) = (3+y) - ix$$

بالمطابقة بين الطرفين نحصل على المعادلتين:

$$2x = 3 + y \quad (1)$$

$$2y + 1 = -x \quad (2)$$

من (1) $y = 2x - 3$ نعوض في (2)

$$2(2x-3) + 1 = -x$$

$$4x - 6 + 1 = -x$$

$$4x + x = 5 \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$y = 2(1) - 3 = 2 - 3 \Rightarrow \boxed{y = -1}$$

وبالتالي حل المعادلة:

$$\boxed{z = 1 - i}$$

$$2z + |z| = 11 - 8i$$

نعوض: $z = x + iy$ ، $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$$2(x+iy) + \sqrt{x^2+y^2} = 11 - 8i$$

$$2x + 2iy + \sqrt{x^2+y^2} = 11 - 8i$$

$$(2x + \sqrt{x^2+y^2}) + i(2y) = 11 + i(-8)$$

بالمطابقة بين الطرفين نحصل على المعادلتين:

$$2y = -8 \quad (1)$$

/ /

$$2x + \sqrt{x^2+y^2} = 11 \quad (2)$$

من (1) نجد: $\boxed{y = -4}$ نعوض في (2) فنجد:

$$2x + \sqrt{x^2+16} = 11$$

$$\Leftarrow \sqrt{x^2+16} = 11 - 2x$$

مجموعة التعريف:
$11 - 2x \geq 0$
$x \leq \frac{11}{2}$

بتربيع الطرفين: $x^2 + 16 = 121 - 44x + 4x^2$

$$3x^2 - 44x + 105 = 0$$

وبحل معادلة الدرجة الثانية نحصل على:

مقبول $\boxed{x_2 = 3}$ و $x_1 = \frac{35}{3}$ مرفوض لاينتمي لمجموعة التعريف

إذاً الحل للمعادلة المعطاة هو:

$$\boxed{z = 3 - 4i}$$

★ $z^2 = \frac{1+7i}{1-i}$

نعوض: $z = x + iy$

$$(x+iy)^2 = \frac{1+7i}{1-i}$$

$$x^2 + 2ixy + i^2y^2 = \frac{(1+7i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$(x^2-y^2) + i(2xy) = \frac{1+i+7i+7i^2}{2}$$

$$(x^2-y^2) + i(2xy) = \frac{1+8i-7}{2}$$

$$(x^2-y^2) + i(2xy) = \frac{-6+8i}{2}$$

$$(x^2-y^2) + i(2xy) = -3 + 4i$$

بالمطابقة بين الطرفين نحصل على:

(1) $2xy = 4$

(2) $x^2 - y^2 = -3$

من (1) $y = \frac{2}{x}$ نعوض في (2) فنجد:

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = -3$$

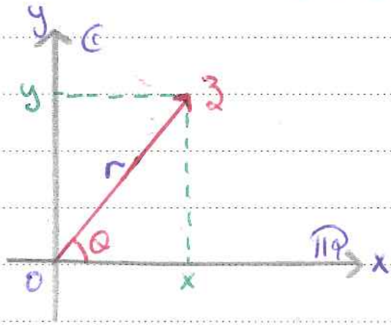
$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2+4)(x^2-1) = 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \mp 1$$

$$\boxed{x_1 = +1} \implies y_1 = \frac{2}{1} \implies \boxed{y_1 = 2}$$
$$\boxed{x_2 = -1} \implies y_2 = \frac{2}{-1} \implies \boxed{y_2 = -2}$$

وبالتالي يكون للمعادلة المعطاة حلان :

$$\boxed{z_1 = 1 + 2i} \quad , \quad \boxed{z_2 = -1 - 2i}$$



التمثيل الهندسي للعدد العقدي :

نرمز بـ ox المحور الحقيقي، و oy المحور التخيلي .

oy يمثل الأعداد العقدية الصرفة .

ox يمثل الأعداد الحقيقية الصرفة .

z : يمثل نقطة أو متجه مبدؤه (o)

ويمكن القول بأن كل عدد عقدي يتم تمثيله بنقطة واحدة فقط في المستوي العقدي وبالمقابل كل نقطة من المستوي العقدي تمثل عدداً عقدياً وحيداً .

أي عدد عقدي $z = x + iy$ يمكن تمثيله هندسياً بشعاع $\overrightarrow{oz}$

حيث : $\overrightarrow{oz} = \overrightarrow{r}$

وبتطبيق فيثاغورث في المثلث القائم نجد أن :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

كما أن $\overrightarrow{oz}$ يصنع مع المحور ox زاوية θ اذاً :

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \implies \boxed{x = r \cdot \cos\theta}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} \implies \boxed{y = r \cdot \sin\theta}$$

وبهذا نصل إلى كتابة العدد العقدي بالشكل :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

وهو ما ندعوه : الشكل المثلثي أو القطبي للعدد العقدي .

/ /

ملاحظات :

★ ليكن لدينا العدد العقدي المعطى بالشكل القطبي :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

- الزاوية θ نطلق عليها : سعة العدد العقدي ونرمز لها بالرمز : $\arg z = \theta$
- في حالة خاصة عندما $\theta \in [-\pi, +\pi]$ فإننا نسمي θ عندئذ الزاوية الرئيسية أو الرئيسية للسعة ورمزها $\operatorname{Arg} z$
- تحسب الزاوية الرئيسية $\operatorname{Arg} z$ تبعاً لموقع النقطة z في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ وذلك من خلال العلاقات :

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

حيث نقول بشكل عام أن :

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2\pi k$$

- إذا كانت z تقع في الربع الأول أو الرابع من المستوي العقدي فإننا نستخدم العلاقة (1).

أما إذا كانت z تقع في الربع الثالث فإننا نستخدم الثالثة (3)

وإذا كانت z في الربع الثاني نستخدم العلاقة الثانية (2)

- يكون $\operatorname{Arg} z > 0$ في الربعين الأول والثاني.

ويكون $\operatorname{Arg} z < 0$ في الربعين الثالث والرابع.

- نستخدم العلاقات الثلاث السابقة عندما يتعذر علينا إيجاد الزاوية الرئيسية $\operatorname{Arg} z$ هندسياً.

/ /

تمارين:

أكتب كلاً من الأعداد العقدية التالية بالشكل المثلثي:

① $z = i$

$z = 0 + i \cdot 1$

$x = 0 \ , \ y = 1 \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1} = 1$

$\left.\begin{array}{l} \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1 \\ \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

إذاً الشكل المثلثي هو:

$$\boxed{z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}}$$

② $z = -1 - i$

$x = -1 \ , \ y = -1$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l} \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\}$ θ تقع في الربع الثالث لأن كلاً من sin ، cos سالبان

$\sin\theta = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{5\pi}{4}$

$\cos\theta = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{4}$

إذاً الشكل المثلثي هو:

$$\boxed{z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)}$$

③ $z = 2\sqrt{3} - 2i$

$x = 2\sqrt{3} \ , \ y = -2$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$

$\left.\begin{array}{l} \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \\ \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}$ θ تقع في الربع الرابع لأن sin سالب و cos موجب

$$\left.\begin{array}{l}\sin\theta = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \\ \cos\theta = -\cos\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6}\end{array}\right\} \theta = -\frac{\pi}{6}$$

إذاً الشكل المثلثي :

$$z = 4(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 4(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6})}$$

المحاضرة الثانية — الأربعاء 10/10/2012

مقلوب عدد عقدي :

ليكن لدينا العدد العقدي المعطى بالشكل المثلثي :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ونريد إيجاد مقلوب z.

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{r}\cdot\frac{(\cos\theta - i\sin\theta)}{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)}$$

نلاحظ أن : $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)$

$$= \cos^2\theta - \cancel{i\sin\theta\cos\theta} + \cancel{i\sin\theta\cos\theta} - i^2\sin^2\theta$$

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

وبالتعويض في z^{-1} نجد :

$$z^{-1} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{z^{-1} = \frac{1}{r}\cdot(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))}$$

/ /

مبرهنة:

بفرض z_1 ، z_2 عددان عقديان بحيث شكلهما المثلثي:

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

عندئذٍ يكون:

① $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

② $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

البرهان:

① $z_1 \cdot z_2 = (r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)) \cdot (r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2))$

$= (r_1 \cdot r_2) \cdot [(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)]$

$= (r_1 \cdot r_2) \cdot [\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2]$

$\Longrightarrow z_1 z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot [\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)]$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]}$$

② $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$

$= \dfrac{r_1}{r_2} \cdot \dfrac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2}$

$= \dfrac{r_1}{r_2} \cdot (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot \dfrac{1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2}$

وبالاستفادة من حساب z^{-1} نجد أن:

$\dfrac{1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} = [\cos(-\theta) + \sin(-\theta)]$

/ /

نعوض في $\frac{z_1}{z_2}$ فنجد :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos Q_1 + i \sin Q_1) \cdot (\cos(-Q_2) + i \sin(-Q_2))$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos Q_1 + i \sin Q_1) \cdot (\cos Q_2 - i \sin Q_2)$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos Q_1 \cos Q_2 - i \cos Q_1 \sin Q_2 + i \sin Q_1 \cos Q_2 - i^2 \sin Q_1 \sin Q_2]$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos Q_1 \cos Q_2 + \sin Q_1 \sin Q_2 + i(\sin Q_1 \cos Q_2 - \sin Q_2 \cos Q_1)]$$

فيكون بالنهاية :

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(Q_1 - Q_2) + i \sin(Q_1 - Q_2)]}$$

نتائج :

1) $$|z_1 \cdot z_2| = |r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(Q_1+Q_2) + i \sin(Q_1+Q_2)]|$$

$$= |r_1 \cdot r_2| \cdot |\underbrace{\cos(Q_1+Q_2) + i \sin(Q_1+Q_2)}_{\text{طويلته = ناتج ضرب مرافقه وتساوي 1}}|$$

$$\Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |r_1 \cdot r_2| \cdot (1)$$

$$\boxed{|z_1 \cdot z_2| = |r_1 \cdot r_2|}$$

2) $$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 = Q_1 + Q_2$$

أي أن سعة جداء عددين عقديين تساوي ناتج جمع سعتي هذين العددين.

/ /

③ $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{r_1}{r_2}$$

④ $$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 = \theta_1 - \theta_2$$

سعة قسمة عددين عقديين تساوي ناتج طرح السعتين.

تعميم البرهنة السابقة:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = (r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n)\cdot[\cos(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)]$$

في حال كانت:

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$$

عندئذ نجد وفق القانون السابق أن:

$$z^n = r^n\cdot[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)] \quad A$$

ولكن نعلم أن: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ وبالرفع إلى القوة n:

$$z^n = r^n\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)^n \quad B$$

فإذا ما قارنا بين A و B سنجد أن:

$$\boxed{[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)] = [\cos\theta + i\sin\theta]^n}$$

وهو ما ندعوه بـ: **علاقة دوموافر**

مثال:

استخدم علاقة دوموافر في حساب:

$$z = (-1+\sqrt{3}\,i)^{10}$$

الحل:

بفرض: $z_1 = -1 + \sqrt{3}\,i$

$$z_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

اذاً Q تقع في الربع الثاني:

$$\cos Q = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin Q = +\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

اذاً: $Q = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$$\Longrightarrow z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

بالعودة إلى z نجد:

$$z = z_1^{10} = \left(2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{10}$$

$$= 2^{10}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{10}$$

وحسب علاقة دوموافر:

$$z = 2^{10}\cdot\left(\cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20\pi}{3}\right)$$

$$= 2^{10}\cdot\left(\cos\left(\frac{18\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{18\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$6\pi = 2\pi(3)$ $\qquad$ $6\pi = 2\pi(3)$

$$\Longrightarrow z = 2^{10}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 2^{10}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= 2^{9}\left(-1 + \sqrt{3}\,i\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{z = -2^{9} + i\sqrt{3}\cdot 2^{9}} \qquad 2^{9} = 512$$

جذور الأعداد العقدية

هدفنا إيجاد الجذر النوني للعدد العقدي z أي $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$

حيث $n \in \mathbb{N}^*$

ليكن: $z = r(\cos Q + i\sin Q)$

نرفع العدد للقوة $\frac{1}{n}$:

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\cdot(\cos Q + i\sin Q)^{\frac{1}{n}}$$

نفرض: $r^{\frac{1}{n}} = R$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{n}} = \cos\phi + i\sin\phi$$

$$r^{\frac{1}{n}} \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{n}} = R(\cos\phi + i\sin\phi)$$

نرفع الطرفين للقوة n:

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = R^n \underbrace{[\cos\phi + i\sin\phi]^n}_{\text{حسب علاقة دوموافر}}$$

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = R^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$$

نعلم أنه إذا تساوى عددان عقديان فإن طويلتيهما تكونان متساويتين وسعتيهما متساويتان أو تختلفان عن بعضهما بمضاعفات 2π.

إذاً بالمطابقة بين الطرفين نجد

$$\left.\begin{array}{l} r = R^n \\ n\phi = \theta + 2\pi K \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} R = r^{\frac{1}{n}} \\ \phi = \dfrac{\theta + 2\pi K}{n} \end{array}\right.$$

حيث K تأخذ القيم من 0 إلى $(n-1)$

$$K = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

أي للعدد K قيم تقابل قيم ϕ الناتجة وهي n قيمة مختلفة وبالتالي نعطي n جذراً.

وكل جذر يحدد بالعلاقة:

$$\boxed{z_K = r^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\cos\frac{\theta + 2\pi K}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi K}{n}\right)}$$

التمثيل الهندسي لجذور عدد عقدي:

ليكن: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عدداً عقدياً له الجذور التالية:

$$z_K = r^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\cos\frac{\theta + 2\pi K}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi K}{n}\right) \quad ; \quad K = 0, 1, \ldots, n-1$$

إن الجذور السابقة تقع على محيط دائرة نصف قطرها: $R = r^{\frac{1}{n}}$

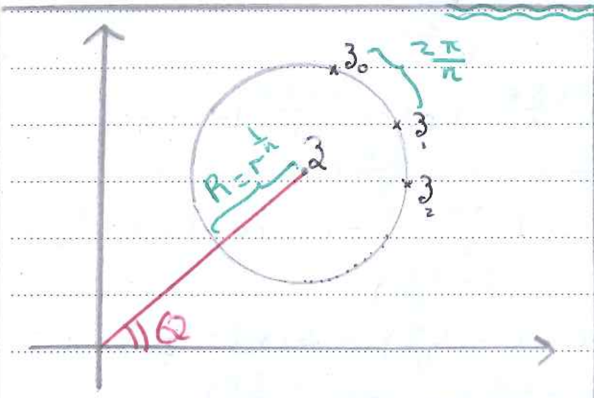
ومركزها هو نقطة الأصل

وهذه الجذور تشكل رؤوس مضلع نظامي له n ضلعاً.

والملاحظ هنا أنه بتقسيم محيط الدائرة إلى n قوساً متساوياً

فإن طول كل قوس منها سيكون مساوياً $\frac{2\pi}{n}$

وبالتالي فإن معرفة أحد الجذور قد يقودنا إلى استنتاج الجذور الأخرى



مثال:

أوجد الجذور الخمسة الأولى

للعدد: $z = 1$

الحل:

$z = 1 + 0$

$z = \cos 0 + i \sin 0$

$r = 1 \quad , \quad Q = 0$

نبحث عن الجذور الخمسة الأولى إذاً: $n = 5$

فيكون:

$$z_k = r^{\frac{1}{5}} \cdot \left[\cos \frac{Q + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{Q + 2\pi k}{5}\right] ; k = 0, 1, \dots, 4$$

$$z_0 = (1)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(\cos \frac{0 + 2\pi(0)}{5} + i \sin \frac{0 + 2\pi(0)}{5}\right)$$

$$z_0 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$$

$$\Rightarrow z_0 = 1$$

$$z_1 = (1)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(\cos \frac{0 + 2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$z_1 = 1 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\Rightarrow z_1 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$$

$$z_2 = (1)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(\cos \frac{0 + 4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}\right)$$

$$\Rightarrow z_2 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}$$

★ $z_3 = (1)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(\cos \frac{0+6\pi}{5} + i \sin \frac{0+6\pi}{5}\right)$

$z_3 = 1 \cdot \left(\cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5}\right)$

$\cos \frac{6\pi}{5} = \cos\left(\frac{5\pi}{5} + \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right)$

$= -\cos \frac{\pi}{5}$

$\sin \frac{6\pi}{5} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin \frac{\pi}{5}$

$\boxed{z_3 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5}}$

★ $z_4 = (1)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(\cos \frac{0+8\pi}{5} + i \sin \frac{0+8\pi}{5}\right)$

$z_4 = 1 \cdot \left(\cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}\right)$

$\cos \frac{8\pi}{5} = \cos\left(\frac{10\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right)$

$= \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$

$\sin \frac{8\pi}{5} = \sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$

$\Rightarrow \boxed{z_4 = \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)}$

مثال (2):

أوجد الجذر التربيعي للعدد العقدي:

$z = 4i$

الحل:

$z = 4(0 + 1.i)$

$z = 4\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$

إذاً: $r = 4$ ، $\theta = \frac{\pi}{n}$ ونبحث عن الجذر التربيعي أي $n = 2$

$K = 0, 1$; $z_k = r^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\cos \frac{\theta + 2\pi K}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\pi K}{n}\right)$

$z_0 = (4)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{2}\right)$

$z_0 = \sqrt{4} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

$z_0 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}}$

/ /

$$z_1 = (4)^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}\right)$$

$$z_1 = \sqrt{4} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$$

$$\sin \frac{5\pi}{4} = \sin\left(\frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

بالتعويض نجد:

$$z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\boxed{z_1 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$$

مثال (3):

أوجد جميع جذور المعادلة:

$$z^7 - z^4 + z^3 - 1 = 0$$

الحل:

المعادلة من الدرجة السابعة إذاً نبحث عن 7 جذور مختلفة

$$z^7 - z^4 + z^3 - 1 = 0$$

$$z^4(z^3 - 1) + (z^3 - 1) = 0$$

$$(z^3 - 1)(z^4 + 1) = 0$$

إما:

$$z^3 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^3 = 1 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{1}$$

نبحث عن الجذر من الدرجة الثالثة لـ z إذا لدينا $n=3$

$z^{\frac{1}{n}}$ حيث $n=3$

$$z = \sqrt[3]{1}$$

$$z^{\frac{1}{3}} = 1 = 1 + 0i$$

$$z^{\frac{1}{3}} = \cos 0 + i \sin 0$$

$r = 1$, $\theta = 0$,

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right]$$

حيث $n=3$ ، $k=0,1,2$

$$z_0 = (1)^{\frac{1}{3}} . \left[\cos\frac{0+0}{3} + i\sin\frac{0}{3}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{z_0 = 1} \quad 1$$

$$z_1 = (1)^{\frac{1}{3}} . \left[\cos\frac{0+2\pi}{3} + i\sin\frac{0+2\pi}{3}\right]$$

$$z_1 = 1 . \left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad 2$$

$$z_2 = (1)^{\frac{1}{3}} . \left[\cos\frac{0+4\pi}{3} + i\sin\frac{0+4\pi}{3}\right]$$

$$z_2 = 1 . \left[\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right]$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad 3$$

وبالعودة إلى ★

أو: $z^4 + 1 = 0$

$$\Rightarrow z^4 = -1 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-1}$$

نبحث عن الجذور الرتبة الرابعة للعدد -1

$$z = \sqrt[4]{-1+0i} = \sqrt[4]{\cos\pi + i\sin\pi}$$

$n=4$, $\theta=\pi$, $r=1$

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} . \left[\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right], k=0,1,2,3$$

$$z_0 = (1)^{\frac{1}{4}} . \left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_0 = \sqrt[4]{1} . \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i . \frac{1}{\sqrt{2}}} \quad 4$$

/ /

$$z_1 = (1)^{\frac{1}{4}} \cdot \left[\cos \frac{\pi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{4}\right]$$

$$z_1 = 1 \cdot \left[\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right]$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}} \quad 5$$

$$z_2 = (1)^{\frac{1}{4}} \cdot \left[\cos \frac{\pi + 4\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{4}\right]$$

$$z_2 = 1 \cdot \left[\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right] \quad ; \quad \frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow \boxed{z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}} \quad 6$$

$$z_3 = (1)^{\frac{1}{4}} \cdot \left[\cos \frac{\pi + 6\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 6\pi}{4}\right]$$

$$z_3 = 1 \cdot \left[\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right] \quad ; \quad \frac{7\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow \boxed{z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}} \quad 7$$

نلاحظ أن كلاً من الجذور السبعة السابقة لها نفس الطويلة حيث طويلة كل جذر منها تساوي الواحد. إذاً تلك الجذور تقع على محيط دائرة نصف قطرها: $r = 1$ ومركزها

الشكل الأسي للعدد العقدي:

تذكرة: نعلم أن:

$$e^{z} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$\sin z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$\cos z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

وباستبدال z بـ θ في العبارات السابقة وبحساب القيمة:

$$z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$$

نحصل بعد الإصلاح على العلاقة:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

وهي ما ندعوه: علاقة أولر

وبهذا يكون الشكل الأسي للعدد العقدي هو: $\boxed{z = r.e^{i\theta}}$

مثال:

أثبت صحة العلاقة التالية:

$$(-1+i)^7 = -8(1+i)$$

الحل:

نفرض أن: $\ell_1 = z = -1+i = re^{i\theta}$

نوجد كلاً من r ، θ:

$$z = -1+i = \sqrt{2}.\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

إذاً: $r = \sqrt{2}$ ، $\theta = \frac{3\pi}{4}$ فيكون: $z = \sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i}$

ولكن نحن لدينا: z^7 إذاً:

$$(-1+i)^7 = z^7 = (\sqrt{2})^7.e^{\frac{21\pi}{4}i}$$

$$z^7 = (\sqrt{2})^6.\sqrt{2}.e^{\frac{21\pi}{4}i} = 8\sqrt{2}.e^{\frac{21\pi}{4}i}$$

ولكن:

$$\frac{21\pi}{4} = \frac{24\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}$$

إذاً يكون: $\frac{21\pi}{4} = 6\pi - \frac{3\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$

$$z^7 = 8\sqrt{2}.e^{-\frac{3\pi}{4}i}$$

وهو ما يكافئ عدداً عقدياً فيه: $r = 8\sqrt{2}$ ، $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ ولنكتبه بالشكل:

$$z^7 = 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{-3\pi}{4} + i\sin\frac{-3\pi}{4}\right)$$

$$z^7 = 8\cancel{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} - \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}i\right) = -8(1+i) = \ell_2$$

المحاضرة الثالثة: الإثنين 22/10/2012

تمارين:

1- حل جملة المعادلتين العقديتين التاليتين:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z-12}{z-8i}\right| = \dfrac{5}{3} & \dots (1) \\ \left|\dfrac{z-4}{z-8}\right| = 1 & \dots (2) \end{cases}$$

الحل:

نعوض: $z = x + iy$ في المعادلة (1)

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3} \iff \frac{|x+iy-12|}{|x+iy-8i|} = \frac{5}{3}$$

$$\iff \frac{|(x-12)+iy|}{|x+i(y-8)|} = \frac{5}{3}$$

نستفيد من قانون طويلة عدد عقدي:

$$\frac{\sqrt{(x-12)^2+y^2}}{\sqrt{x^2+(y-8)^2}} = \frac{5}{3}$$

وبتربيع الطرفين نحصل على:

$$\frac{(x-12)^2+y^2}{x^2+(y-8)^2} = \frac{25}{9}$$

$$9x^2 - 216x + 1296 + 9y^2 = 25x^2 + 25y^2 - 400y + 1600$$

$$16x^2 + 216x + 16y^2 - 400y + 304 = 0$$

بالإتمام إلى مربع كامل: $2\left(x+\frac{27}{4}\right)^2 + 2\left(y-\frac{25}{2}\right)^2 = \frac{3077}{16}$

$$\left(x+\frac{27}{4}\right)^2 + \left(y-\frac{25}{2}\right)^2 = \frac{3077}{32}$$

/ /

2- أوجد $z^{\frac{1}{4}}$ إذا علمت أن: $z=-2+i2\sqrt{3}$

ثم أثبت أن جميع هذه الجذور تقع على محيط دائرة مركزها المبدأ ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

الحل:

$$z=-2+2\sqrt{3}\,i=4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$z=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

فيكون: $r=4$ ، $\theta=\frac{2\pi}{3}$

ولنبحث عن الجذر من الدرجة الرابعة للعدد z أي: $n=4$

إذن: $z_k=r^{\frac{1}{n}}.\left[\cos\frac{\theta+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right]$

حيث: $k=0,1,2,3$

$$z_0=(4)^{\frac{1}{4}}.\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}}{4}\right)$$

$$z_0=\sqrt{2}.\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{z_0=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}\ 1$$

$$z_1=(4)^{\frac{1}{4}}.\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}\right)$$

$$z_1=\sqrt{2}.\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{z_1=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}\ 2$$

$$z_2=(4)^{\frac{1}{4}}.\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}\right)$$

$$z_2=\sqrt{2}.\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{z_2=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}\ 3$$

$$z_3=(4)^{\frac{1}{4}}.\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}\right)$$

$$z_3=\sqrt{2}.\left(\cos-\frac{\pi}{3}+i\sin-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{z_3=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}\ 4$$

/ /

نلاحظ أن كلاً من الجذور الأربعة السابقة لها نفس الطويلة والمساوية للواحد إذاً فهي تتوزع على محيط دائرة نصف قطرها $r=\sqrt{2}$ ومركزها المبدأ.

3 - أوجد الجذور التكعيبية الثلاث للعدد: $z=i$

الحل:

$$z = 0 + i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

فتكون: $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $r = 1$ ونبحث عن الجذر من الدرجة الثالثة

أي أن: $n=3$

$$z_K = r^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\cos\frac{\theta+2K\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2K\pi}{n}\right) \quad ; K=0,1,2$$

$$z_0 = (1)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right)$$

$$z_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} \quad 1$$

$$z_1 = (1)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right)$$

$$z_1 = 1 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$

$$\Longrightarrow \boxed{z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} \quad 2$$

$$z_2 = (1)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right)$$

$$z_2 = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow z_2 = 0 + i \Longrightarrow \boxed{z_2 = i} \quad 3$$

نلاحظ أن الجذور الثلاث السابقة لها نفس الطويلة: $|z_0|=|z_1|=|z_2|=1$

إذاً فهي تتوزع على محيط دائرة نصف قطرها: $r=1$ ومركزها هو المبدأ.

المنحنيات والمجسمات في المستوي العقدي

تعاريف:

1- بما أن $|a - z|$ تعني البعد بين النقطتين z ، a في المستوي العقدي عندئذ يمكن أن نعرف المجموعة D على الشكل:

$$D = \{ z \in \mathbb{C} \;;\; |z - a| = r \}$$

وندعوها: **دائرة** مركزها a ونصف قطرها r.

2- في حال كانت $a = 0$ ، $r = 1$ عندئذ تكون المجموعة:

$$D_0 = \{ z \in \mathbb{C} \;;\; |z| = 1 \}$$

وندعوها: **دائرة الوحدة**.

3- إن المتباينة $|z - a| < r$ تمثل مجموعة النقاط الواقعة داخل الدائرة D وتسمى هذه المجموعة: **قرص دائري مفتوح**.

4- إن المتباينة $|z - a| \leq r$ تمثل مجموعة النقاط الواقعة داخل الدائرة D بالإضافة إلى نقاط المنحني الدائري نفسه وتسمى هذه المجموعة: **قرص دائري مغلق**.

5- نقول عن مجموعة نقاط S في المستوي العقدي أنها **مجموعة مفتوحة** إذا وجد لكل نقطة من S جوار تنتمي كل نقاطه إلى S.

6- نقول عن مجموعة النقاط S أنها **مترابطة** إذا وجد من أجل أي نقطتين من S خط مضلعي مؤلف من عدد منتهي من القطع المستقيمة يصل بين هاتين النقطتين ويقع بأكمله داخل S.

/ /

7- نقول عن مجموعة النقاط D أنها **منطقة مفتوحة** اذا كانت هذه المجموعة مفتوحة ومترابطة.

مثال: إن المجموعة: $S = \{z \; ; \; |z| < 6\}$ هي مجموعة مفتوحة ومترابطة وبالتالي فإنها تشكل منطقة مفتوحة.

8- نقول عن مجموعة النقاط D أنها **منطقة مغلقة** إذا كانت متممتها في المستوي العقدي هي منطقة مفتوحة.

تمارين:

عيّن في المستوي العقدي المجموعات النقطية التالية:

① $z = \bar{z}$

$$x + iy = x - iy$$

$$2iy = 0 \iff y = 0$$

وهي مجموعة نقاط المحور الحقيقي ox

② $|z - 1 - 2i| = 5$

$$|x + iy - 1 - 2i| = 5$$

$$|(x-1) + i(y-2)| = 5$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$$

وهي الدائرة التي مركزها $(1,2)$ ونصف قطرها 5

③ $\left|\frac{z}{z-1}\right| = 2$

$$\left|\frac{x+iy}{(x-1)+iy}\right| = 2 \iff \frac{|x+iy|}{|(x-1)+iy|} = 2$$

$$\iff \frac{x^2+y^2}{(x-1)^2+y^2} = 4$$

$$x^2+y^2=4(x-1)^2+4y^2$$
$$x^2+y^2=4x^2-8x+4+4y^2$$
$$3x^2-8x+4+3y^2=0$$
$$3\left(x^2-\frac{8}{3}x\right)+4+3y^2=0$$
$$3\left(x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}\right)-3\left(\frac{16}{9}\right)+4+3y^2=0$$
$$3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{16}{3}+\frac{12}{3}+3y^2=0$$
$$3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+3y^2=\frac{4}{3}$$
$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}$$
وهي الدائرة التي مركزها $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ ونصف قطرها $\frac{2}{3}$.

★ أوجد في المستوي المركب المحل الهندسي لكل مما يلي:

① $|z+1-i|<\pi$

إن المحل الهندسي الذي يحقق العلاقة السابقة هو القرص المفتوح الذي مركزه $(-1, i)$ ونصف قطره π

② $|z+i|^2=I_m(z+2i)$

لدينا: $z+2i=x+iy+2i$
$$=x+i(y+2)$$
وبهذا يكون: $I_m(z+2i)=y+2$ بالتعويض:
$$|z+i|^2=y+2$$
$$|x+yi+i|^2=y+2$$
$$|x+i(y+1)|^2=y+2$$
$$x^2+(y+1)^2=y+2$$
$$x^2+y^2+2y+1-y-2=0$$
$$x^2+y^2+y-1=0$$

$$x^2+y^2+y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-1=0$$
$$x^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}$$
وهي الدائرة التي مركزها $(0,-\frac{1}{2})$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{2}$

③ $(z+\bar{z})^2+(z-\bar{z})^2=4$

نعلم أن: $z+\bar{z}=2x$ "من المحاضرة الأولى"

$z-\bar{z}=2iy$ بالتعويض نجد:

$$(2x)^2+(2iy)^2=4$$
$$4x^2-4y^2=4$$
$$x^2-y^2=1$$
وهي القطع الزائد المتساوي الساقين الذي مركزه $(0,0)$

④ $|z-1-i|=|z-5-3i|$

$$|x+iy-1-i|=|x+iy-5-3i|$$
$$|(x-1)+i(y-1)|=|(x-5)+i(y-3)|$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2=(x-5)^2+(y-3)^2$$
$$x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2-10x+25+y^2-6y+9$$
$$6y-2y=-10x+2x+34-2$$
$$8y=-8x+32$$
$$y=-x+4$$
وهي نقاط مستقيم غير مار بالمبدأ ميله يساوي (-1)

★ ليكن العدد العقدي z حيث: $z^2=c$، $\mathbb{R}_e$ ناقش الحالات الهندسية للعدد z.

نناقش الحالات عندما $c=0$ ، $c>0$ ، $c<0$

$c=0$ (1

$$\mathcal{R}_e\, z^2 = c$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2-y^2=c=0$$

$$\Leftrightarrow\quad y=\mp x$$

المحل الهندسي هو مستقيم إما منصف الربع الأول : $y=x$

أو منصف الربع الثاني : $y=-x$

$c<0$ (2

$$\mathcal{R}_e\, z^2 = c$$

$$x^2-y^2=c$$

ونفرض $a=-c$ حيث a عدد حقيقي موجب عندئذٍ :

$$x^2-y^2=-a$$

$$\Leftrightarrow\quad y^2-x^2=a$$

المحل الهندسي هو حزمة قطوع زائدة محورها المحرقي $\overrightarrow{Oy}$

$c>0$ (3

$$\mathcal{R}_e\, z^2 = c$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2-y^2=c$$

المحل الهندسي هو حزمة قطوع زائدة محورها المحرقي $\overrightarrow{Ox}$

تعريف :

التوابع العقدية :

- لتكن A ، B مجموعتين جزئيتين من المستوي العقدي ، إذا قابلنا كل عنصر z في A بعنصر واحد فقط w في B عندئذٍ نقول أننا عرفنا تابعاً عقدياً ونكتب :

$$f : A \longrightarrow B$$
$$z \longmapsto f(z)=w$$

/ /

• إذاً f تحويل «تطبيق» ينقل عناصر A إلى B حيث A مجموعة تعريف التابع: $f(z)=w$ ، و B هي مجموعة القيم.

• وإذا افترضنا أن: $z = x+iy$

عندئذٍ يكون:

$$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+i\,v(x,y)$$

حيث كل من u ، v دالة بمتحولين ونسمي:

القسم الحقيقي: $u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(z)$

القسم التخيلي: $v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(z)$

إذاً نستطيع القول أن:

كل تابع مركب في المستوي العقدي يقابله تابعين حقيقيين كل منهما بمتحولين حقيقيين.

تمرين:

أوجد مجموعة تعريف التابع. $f(z)=z^3$

الحل:

نكتب f على شكل مجموع دالتين حقيقيتين:

$$w=f(z)=z^3=(x+iy)^3$$

$$(x+y)^3 = x^3 - 3xy^2 + 3x^2yi - y^3 i$$

$$x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$$

نهاية تابع عقدي:

تجدر الإشارة إلى أن العمليات على النهايات في $\mathbb{C}$ تتشابه تماماً العمليات على النهايات في $\mathbb{R}$.

تعريف:

نفرض $w = f(z)$ تابع عقدي معرف في جوار النقطة z_0 «عدا z_0 ذاتها»
نقول أن التابع: $w = f(z)$ يتقارب من العدد العقدي w_0
عندما z يتقارب من z_0 إذا أوجد لكل عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي موجب δ تابع للعدد ε بحيث أنه إذا كان $|z - z_0| < \delta$ فإن: $|w - w_0| < \varepsilon$
ونكتب:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ ; \ |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

مثال:

أوجد نهايات التوابع العقدية التالية:

① $f(z) = i\bar{z} - 3 \qquad z \to i$

$$i\bar{z} - 3 = i(x - iy) - 3$$
$$= ix - i^2 y - 3$$
$$f(z) = (y - 3) + ix$$
$$u(x, y) = y - 3$$
$$v(x, y) = x$$

عندما $z \to i$ فإن $(x, y) \to (0, 1)$

$$\lim_{z \to i} f(x) = \lim_{z \to i} (i\bar{z} - 3) = \lim_{(x,y) \to (0,1)} [(y - 3) + ix] = -3$$

$$② \quad f(x) = \frac{z^2}{|z|^2} \; ; \; z \longrightarrow 0$$

$$f(x) = \frac{z^2}{|z|^2} = \frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2+2ixy}{x^2+y^2}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i\,\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$u(x,y) = \frac{x^2-y^2}{z^2+y^2}$$

$$v(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$z=(x+iy) \longrightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad (x,y) \longrightarrow 0$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{z^2}{|z|^2} = \lim_{(\cancel{x},y) \to (0,0)} \frac{(x^2-y^2)+2ixy}{x^2+y^2} = \lim_{iy \to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

نظرية:

بفرض: $w = f(z) = u + iv$ تابعاً عقدياً حيث w معرّف بجوار النقطة $z_0 = x_0 + iy_0$ ماعدا z_0 ذاتها.

ولكن لدينا: $w_0 = u_0 + iv_0$ حيث: $v_0(x_0,y_0)$ ، $u_0(x_0,y_0)$

عندئذ:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \\[2ex] \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

مثال (1)

أوجد نهاية التابع: $f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{2x^2-yx}{y^2+1}$

عندما $z \longrightarrow 1+i$

الحل:

نلاحظ أن: $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

$$v(x,y) = \frac{2x^2-yx}{y^2+1}$$

إن: $z_0 = 1+i \iff \left.\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{array}\right\}$

ولنوجد نهايات u ، v عندما $(x,y) \longrightarrow (1,1)$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2x^2-yx}{y^2+1} = \frac{1}{2}$$

إذاً: $u_0 = \frac{1}{2}$ ، $v_0 = \frac{1}{2}$ ويكون حسب النظرية:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 = u_0 + i\,v_0$$

$$\iff \lim_{z\to 1+i} f(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

مثال (2)

أوجد نهاية التابع: $f(z) = \frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4}$

عندما $z \longrightarrow -2i$

/ /

الحل :

$$f(z) = \frac{(2z+3)(z-2)}{z^2-2z+4}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{(2z+3)(z-2)}{(z-2)^2}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{2z+3}{z-2}$$

$z = x+iy$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{2x+2iy+3}{x+iy-2}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{(2x+3)+2iy}{(x-2)+iy}$$

نضرب بالمرافق ونصلح نحصل على :

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x-2)+2y^2-7iy}{(x-2)^2+y^2}$$

وبهذا يكون :

$$u(x,y) = \frac{(2x+3)(x-2)+2y^2}{(x-2)^2+y^2}$$

$$v(x,y) = \frac{-7y}{(x-2)^2+y^2}$$

لدينا :

$$z \longrightarrow z_0 = -2i \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,-2)} u(x,y) = \frac{1}{4} = u_0 \, , \quad \lim_{(x,y)\to(0,-2)} v(x,y) = \frac{7}{4} = v_0$$

إذاً :

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 = u_0 + i v_0$$

$$w_0 = \frac{1}{4} + \frac{7}{4} i$$

ملاحظة هامة :

ليكن لدينا الدالة : $w = f(z)$ ونريد حساب $\lim\limits_{z \to \infty} f(z)$

عندئذ نستبدل كل z بـ $\frac{1}{z}$ فنحصل على دالة جديدة

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

وبهذا عندما تكون : $z \to \infty$ فإن : $\frac{1}{z} \to 0$

وندعو g الدالة الموافقة للدالة f .

مثال :

ليكن لدينا : $f(z) = \frac{2z}{z-1}$

أوجد : $\lim\limits_{z \to \infty} f(z)$.

الحل :

$$f(z) = \frac{2z}{z-1}$$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{2}{z}}{\frac{1}{z}-1} = \frac{\frac{2}{z}}{\frac{1-z}{z}} = \frac{2}{z} \cdot \frac{z}{1-z}$$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2}{1-z} = g(z)$$

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{z \to 0} g(z) = 2$$

المحاضرة الرابعة الأربعاء 24/10/2012

استمرار تابع عقدي

تعريف:

ليكن f تابعاً معرفاً في المنطقة D التي تحوي z_0

نقول أن التابع f مستمر في z_0 إذا كان: $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

وبلغة (δ , ε) نقول عن f أنه مستمر في z_0 إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall z \in D \quad \exists \delta > 0 \;;\; |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

نظرية:

إذا كان f_1 , f_2 تابعين مستمرين في النقطة z_0 فإن:

* التابع $(\alpha f_1 + \beta f_2)$ يكون مستمراً في النقطة z_0.
* التابع $(f_1 . f_2)$ يكون مستمراً في النقطة z_0 $\left((f_1 . f_2)(z) = f_1(z) . f_2(z)\right)$
* التابع f_1 / f_2 يكون مستمراً في z_0.
  $\left(\frac{f_1}{f_2}(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} \;;\; f_2(z) \neq 0\right)$
* التابع $\bar{f_1}$ مستمر في z_0.

نظرية:

نقول عن تابع $f(z)$ أنه مستمر في النقطة: $z_0 = x_0 + i y_0$ إذا وفقط إذا كان: $v(x,y)$ ، $u(x,y)$ مستمرين عند (x_0 , y_0)

تعريف:

(1) إذا كانت الدالة $f(z)$ مستمرة في المنطقة D المغلقة والمحدودة عندئذ تكون هذه الدالة محدودة في هذه المنطقة.

/ /

② نقول إن التابع f مستمر بانتظام في المنطقة D إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0 \; ; \forall z_1, z_2 \in D : |z_1 - z_2| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$$

والملاحظ أن التابع المستمر بانتظام في مجموعة ما هو تابع مستمر في تلك المجموعة ولكن العكس بشكل عام غير صحيح.

ملاحظة: إن التابع المستمر في مجموعة مغلقة ومحدودة يكون مستمراً بانتظام في تلك المجموعة.

تمارين:

① ادرس استمرار الدالة:

$$f(z) = \begin{cases} z+1 & if \quad z \neq i \\ i+1 & if \quad z = i \end{cases}$$

عند النقطة $z_0 = i$

الحل:

نلاحظ أن $f(z)$ دالة معرفة عند $z_0 = i$

لكي تكون الدالة مستمرة يجب أن يتحقق أن: $\lim\limits_{z \to i} f(z) = f(i)$

$$l_1 = \lim_{z \to i} f(z) = \lim_{z \to i} (z+1) = i+1$$

$$l_2 = f(i) = i+1 = l_1$$

إذاً الدالة f مستمرة عند $z_0 = i$.

② ادرس استمرار الدالة:

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & if \quad z \neq i \\ 0 & if \quad z = i \end{cases}$$

عند النقطة $z_0 = i$

/ /

الحل:

إن $f(z)$ معرف عند $z_0 = i$

$$l_1 = \lim_{z \to i} f(z) = \lim_{z \to i} z^2 = (i)^2 = -1$$

$$l_2 = f(i) = 0 \neq l_1$$

إذا $f(z)$ ليست مستمرة عند $z_0 = i$

$\boxed{3}$ أثبت أن الدالة: $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ غير مستمرة عندما $z \to 0$

الحل:

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{x-iy}{x+iy} \frac{(x-iy)}{(x-iy)} = \frac{x^2-y^2-2ixy}{x^2+y^2}$$

$$f(z) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - i\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

عندما: $z \to 0$ فإن:

$$x+iy \to 0 \iff \begin{cases} x \to 0 \\ y \to 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن النهاية على المسار $x=0$ تكون -1

و النهاية على المسار $y=0$ هي $+1$

إذاً النهاية غير موجودة "لعدم تساوي النهايتين" وبالتالي الدالة f غير مستمرة عندما $z \to 0$

اشتقاق تابع عقدي:

ليكن f تابعاً معرفاً في جوار النقطة z_0 من المستوي العقدي $\mathbb{C}$.
نقول عن التابع $f(z)$ أنه قابل للاشتقاق في النقطة z_0 إذا وجدت النهاية:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

نسمي نهاية التابع بمشتق التابع f في النقطة z_0

ونرمز لهذا المشتق بالرمز: $f'(z_0)$ أو $\left(\frac{df}{dz}\right)_{z=z_0}$

ونلاحظ أن مشتق التابع العقدي

له نفس تعريف مشتق التابع الحقيقي.

وخواص مشتقات التوابع العقدية هي نفس خواص مشتقات

التوابع الحقيقية.

نظرية:

إذا كان لدينا تابع $f(z)$ قابل للاشتقاق في النقطة z_0 فهو مستمر

في هذه النقطة ولكن العكس ليس صحيحاً بالضرورة.

مثال:

أثبت أن التابع: $f(z)=\bar{z}$ مستمر في $z_0=0$ ولكنه غير قابل

للاشتقاق عند $z_0=0$.

الحل:

حتى يكون $f(z)$ مستمراً عند $z_0=0$ يجب أن يكون:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = f(0)$$

$$l_1=\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x+iy) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x-iy)$$

$$= \lim_{x\to 0} x - i\lim_{y\to 0} y = 0$$

$$l_2 = f(0) = 0 = l_1$$

إذاً f مستمر عند $z_0=0$

ولندرس قابلية الاشتقاق: سندرس تحقق المساواة:

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$\ell_1 = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{(0+\Delta z)}-\bar{0}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

ونميز حالتين:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \Longleftarrow \Delta x = \Delta z ,\ \Delta y = 0$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y}{\Delta y} = -1 \Longleftarrow \Delta y = \Delta z ,\ \Delta x = 0$$

حصلنا على قيمتين مختلفتين فالنهاية غير موجودة

أي أن التابع f غير قابل للاشتقاق في $z_0 = 0$

ملاحظة:

توجد الكثير من التوابع العقدية البسيطة التي لا تملك مشتقاً على الرغم من استمرارها وكمثال على ذلك:

$f(z) = \bar{z}$ المذكور في المثال السابق

و $f(z) = Re\, z$ كلاهما مستمران وغير قابلين للاشتقاق ويوجد غيرهما الكثير

التوابع التحليلية

تعريف:

* نقول عن التابع f بحيث: $w = f(z)$ أنه تحليلي في المنطقة D من المستوي العقدي $\mathbb{C}$ إذا كان قابلاً للاشتقاق في كل نقطة من D.
* ونقول عن f أنه تحليلي في النقطة z_0 إذا كان تحليلياً في جوار ما للنقطة z_0
* إن مجموع وفرق وجداء وقسمة تابعين تحليليين هو تابع تحليلي

/ /

مبرهنة:

إذا كان f تابعاً بحيث:

$$w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

معرف في المنطقة $D \subseteq \mathbb{C}$ عندئذ فإن:

الشرط اللازم والكافي لكي يكون f تحليلياً في D هو أن تكون المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى لكلا التابعين $u(x,y)$ ، $v(x,y)$ موجودة ومستمرة في كل نقطة من D و تحقق شرطي كوشي وريمان:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

مبرهنة:

ليكن لدينا الدالة: $w = f(z) = u + iv$ وكان u ، v يمتلكان مشتقات جزئية مستمرة وتحقق شرطي كوشي وريمان «أي أن الدالة f تحليلية» عندئذ فإن المشتق للدالة f هو:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

أمثلة وتمارين:

$\boxed{1}$ اختبر فيما إذا كان التابع f تحليلياً فيما يلي:

① $f(z) = \bar{z}$

$$f(z) = \bar{z} = x - iy$$

$$u(x,y) = x$$

$$v(x,y) = -y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

نلاحظ أن: $\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}$ إن الدالة f غير تحليلية

/ /

② $f(z)=z^3$

$$f(z)=z^3=(x+iy)^3=x^3+3x^2iy+3xi^2y^2+i^3y^3$$

$$\Rightarrow f(z)=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$$

$$u(x,y)=x^3-3xy^2$$

$$v(x,y)=3x^2y-y^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-6xy$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=6xy \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2$$

ان المشتقات الجزئية مستمرة ونلاحظ أن :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-6xy=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

اذاً المشتقات الجزئية تحقق شرطي كوشي وريمان فالدالة f تحليلية.

③ $f(z)=z^2$

$$f(z)=z^2=(x+iy)^2=x^2+2ixy+i^2y^2$$

$$\Rightarrow f(z)=x^2-y^2+i(2xy)$$

$$u(x,y)=x^2-y^2$$

$$v(x,y)=2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=2x$$

إن المشتقات الجزئية مستمرة ونلاحظ أن :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

اذاً المشتقات الجزئية تحقق شرطي كوشي وريمان فالدالة f تحليلية.

2 أوجد مشتق التوابع التحليلية من التمرين السابق:

$$f(z) = z^3$$

وجدنا أن
$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2$$
$$v(x,y) = 3x^2y - y^3$$

وبما أن التابع تحليلي اذاً مشتقه يعطى بالعلاقة:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$= 3x^2 - 3y^2 + i(6xy)$$
$$\Rightarrow \boxed{f'(z) = 3[(x^2-y^2) + 2ixy] = 3z^2}$$

$$f(z) = z^2$$

وجدنا أن:
$$u(x,y) = x^2 - y^2$$
$$v(x,y) = 2xy$$

وبما أن التابع تحليلي إذاً مشتقه هو:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$= 2x + i(2y$$
$$= 2(x+iy)$$
$$\Rightarrow \boxed{f'(z) = 2z}$$

قاعدة أوبيتال:

إذا كان التابعان f_1 ، f_2 تحليليان عند النقطة z_0 من المنطقة D

وكانت النهاية:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

تعطي عدم تعيين عندئذ:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f_1'(z)}{f_2'(z)} \quad ; \quad f_2'(z) \neq 0$$

/ /

مثال:

احسب النهاية: $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1-\cos z}{\sin z^2}$

نلاحظ أن:

$\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1-\cos z}{\sin z^2} = \dfrac{0}{0}$ عدم تعيين

$f_1(z) = 1-\cos z$ و $f_2(z) = \sin z^2$

هما تابعان تحليليان إذاً:

$$\lim_{z \to 0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \lim_{z \to 0} \frac{f_1'(z)}{f_2'(z)} = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{2z\cos z^2}$$

$$= \lim_{z \to 0} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{1}{\cos z^2} \right) = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

التوابع التوافقية:

نقول عن التابع u أنه توافقي في المنطقة D من المستوي العقدي إذا كان قابلاً للاشتقاق في D ومشتقاته الجزئية حتى المرتبة الثانية مستمرة في D ويحقق معادلة لابلاس التالية:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

مثال:

اختبر فيما إذا كان التابع التالي توافقي:

$$u = u(x,y) = e^{-x}(x\sin y - y\cos y)$$

الحل:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x}(x\sin y - y\cos y) + e^{-x}\sin y = -e^{-x}(x\sin y - \sin y - y\cos y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-x}(x\sin y - \sin y - y\cos y) - e^{-x}\sin y$$
$$= e^{-x}(x\sin y - \sin y - y\cos y - \sin y)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-x}(x\sin y - 2\sin y - y\cos y)$$

ولنوجد الآن المشتق بالنسبة لـ y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^{-x}x\sin y - e^{-x}y\cos y) = e^{-x}x\cos y - e^{-x}\cos y + e^{-x}y\sin y$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x}(x\cos y + y\sin y - \cos y)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{-x}x\sin y + e^{-x}\sin y + e^{-x}\sin y + e^{-x}y\cos y$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{-x}(x\sin y - 2\sin y - y\cos y)$$

ونلاحظ بالتعويض في معادلة لابلاس أن :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

إذاً الدالة u توافقية .

تعريف :

إذا كانت الدالتان u, v دالتان توافقيتان في المنطقة D بحيث تكون الدالة : $w = f(z) = u + iv$ تحليلية في D عندئذ نسمي الدالة $v(x,y)$ بالمرافق التوافقي للدالة $u(x,y)$ وبالعكس أي أن الدالة $u(x,y)$ هي مرافق توافقي للدالة $v(x,y)$

مثال :

أثبت أن الدالة : $u(x,y) = e^{x}\cos y$ هي دالة توافقية في المستوي العقدي ثم عيّن المرافق التوافقي لها واكتب $f(z)$ بالشكل النهائي

الحل :

$$u(x,y) = e^{x}\cos y$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x}\cos y \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{x}\cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^{x}\sin y \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^{x}\cos y$$

نلاحظ أن: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

أي أن الدالة f تحليلية لتحقق معادلة لابلاس التفاضلية.

ونريد الحصول على الدالة v المرافقة لها.

إن u ، v تحققان شرطي كوشي وريمان:

$$① \ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad ② \ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

من ①:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x}\cos y$$

بالمكاملة بالنسبة لـ y نجد أن:

$$v(x,y)=e^{x}\sin y+\phi(x)$$

لتعيين الدالة $\phi(x)$ نشتق $v(x,y)$ بالنسبة لـ x:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x}\sin y+\phi'(x)$$

وبالتعويض من ② نجد:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x}\sin y+\phi'(x)=e^{x}\sin y$$

بالمطابقة يكون: $\phi'(x)=0$

$$\Rightarrow \phi(x)=c \quad \text{ثابت}$$

إذاً الدالة المرافقة هي:

$$v(x,y)=e^{x}\sin y+c$$

وبالتالي الدالة f تكتب على الشكل:

$$\begin{aligned} f(z)&=u(x,y)+i\,v(x,y)\\ &=e^{x}\cos y+i\,(e^{x}\sin y+c)\\ &=e^{x}\cos y+i\,e^{x}\sin y+ic\\ &=e^{x}(\cos y+i\sin y)+ic \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f(z)=e^{x}\cdot e^{iy}+ic=e^{x+iy}+ic$$

$$\Rightarrow \boxed{f(z)=e^{z}+ic}$$

2012/10/31 الأربعاء

المحاضرة الخامسة

تمارين:

أثبت أن الدالة: $u = u(x,y) = e^{y}\cos x$ دالة توافقية ثم أوجد الدالة المرافقة لها $v(x,y)$ ثم عبّر عن التابع $f(z)$ بدلالة z ثم احسب مشتقه.

الحل:

تكون الدالة توافقية اذا حققت:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{y}\sin x \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^{y}\cos x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{y}\cos x \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{y}\cos x$$

نلاحظ أن: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{y}\cos x + e^{y}\cos x$

$$= 0$$

اذاً الدالة توافقية.

لنبحث عن الدالة المرافقة من شرطي كوشي وريمان:

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$(2) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{y}\sin x = \frac{\partial v}{\partial y}$$

نكامل بالنسبة لـ y فنجد:

$$v(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}\, dy = \int -e^{y}\sin x \, dy$$

$$\Rightarrow v(x,y) = -e^{y}\sin x + \phi(x)$$

نوجد $\frac{\partial v}{\partial x}$ فنجد:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -e^{y}\cos x + \phi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$-e^{y}\cos x + \phi'(x) = -e^{y}\cos x$$

بالمطابقة نجد: $\phi'(x) = 0 \Longrightarrow \phi(x) = c$

/ /

إذاً : $v(x,y) = -e^{y}\sin x + c$

وبهذا يكون التابع :

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$
$$= e^{y}\cos x + i(-e^{y}\sin x + c)$$
$$= e^{y}\cos x - ie^{y}\sin x + ic$$
$$= e^{y}(\cos x - i\sin x) + ic$$
$$= e^{y}\cdot e^{-ix} + ic = e^{y-ix} + c = e^{-i(x+iy)} + c$$

$$\Longrightarrow \boxed{f(z) = e^{-iz} + c}$$

ولإيجاد المشتق نطبق :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$= -e^{y}\sin x + i(-e^{y}\cos x)$$
$$= -e^{y}\sin x - ie^{y}\cos x$$
$$= -i(e^{y}\cos x + \frac{1}{i}e^{y}\sin x)$$
$$= -ie^{y}(\cos x - i\sin x)$$
$$= -ie^{y}\cdot e^{-ix}$$

$$\Longrightarrow f'(z) = -ie^{y-ix} = -ie^{-i(x+iy)} \Longrightarrow \boxed{f'(z) = -ie^{-iz}}$$

B- عيّن α ، β لتكون الدالة التالية توافقية :

$$u = u(x,y) = \alpha x^2 y + \beta y^2 - 3y^3 + 2x^2$$

ثم عيّن v الدالة المرافقة لها ثم اكتب $f(z)$ بدلالة z و احسب مشتقه .

الحل :

بما أن الدالة توافقية فهي تحقق الشرط :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\alpha yx + 4x \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\alpha y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha x^2 + 2\beta y - 9y^2 \,,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\beta - 18y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$2\alpha y + 4 + 2\beta - 18y = 0$$

$$(2\alpha - 18)y + 4 + 2\beta = 0$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد:

$$\beta = -2 \Longleftarrow 4 + 2\beta = 0$$

$$\alpha = 9 \Longleftarrow 2\alpha - 18 = 0$$

وبهذا تكون الدالة هي:

$$u = u(x,y) = 9x^2y - 2y^2 - 3y^3 + 2x^2$$

إيجاد الدالة المرافقة: v

من شرطي كوشي وريمان:

$$(1)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$(2)\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 18yx + 4x$$

بالمكاملة بالنسبة للمتحول y نجد:

$$v(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}\, dy = 9xy^2 + 4xy + \varphi(x)$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ x

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 9y^2 + 4y + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}$$ من (2)

$$\Longrightarrow 9y^2 + 4y + \varphi'(x) = -9x^2 + 4y + 9y^2$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد:

$$\varphi'(x) = -9x^2 \Longrightarrow \varphi(x) = -3x^3 + C$$

وبهذا تكون الدالة المرافقة: $v(x,y)$:

$$v = v(x,y) = 9xy^2 + 4yx - 3x^3 + C$$

أما التابع $f(z)$ فهو: $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$$f(z) = 9x^2y - 2y^2 - 3y^3 + 2x^2 + i\,(9xy^2 + 4xy - 3x^3 + C)$$

$$f(z) = 9x^2y - 2y^2 - 3y^3 + 2x^2 + 9ixy^2 - 4ixy - 3ix^3 + iC$$

$$f(z) = 2(x^2 - y^2 + 2ixy) - 3ix^3 + 3i^2y^3 - 9i^2x^2y + 9ixy^2 + iC$$

$$f(z) = 2(x+iy)^2 - 3i(x^3 - iy^3 + 3ix^2y - 3xy^2) + ic$$

$$\Rightarrow f(z) = 2(x+iy)^2 - 3i(x+iy)^3 + ic$$

$$\boxed{f(z) = 2z^2 - 3iz^3 + ic}$$

لإيجاد المشتق:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= 18xy + 4x + i(9y^2 + 4y - 9x^2)$$

$$= 18xy + 4x + 9iy^2 + 4iy - 9ix^2$$

$$= 4(x+iy) + 9iy^2 - 9ix^2 - 18i^2xy$$

$$= 4(x+iy) - 9i(x^2 - y^2 + 2ixy)$$

$$= 4(x+iy) - 9i(x+iy)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(z) = 4z - 9iz^2}$$

بعض التوابع الشهيرة في الساحة العقدية:

أ- الحدودية من الدرجة n:

ليكن التابع:

$$w = f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

حيث: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ هي ثوابت عقدية.

n: عدد صحيح موجب يسمى «درجة الحدودية».

والتابع الصحيح $f(z)$ من الدرجة n يعد من أبسط التوابع العقدية وهو تابع تحليلي «مستمر وقابل للاشتقاق» في جميع نقاط المستوي العقدي.

ومشتقه في كل نقطة يعطى على الشكل:

$$w' = f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots + n a_n z^{n-1}$$

2- التابع الكسري:

$$w = f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} \quad ; \quad f_2(z) \neq 0$$

حيث $f_1(z)$ ، $f_2(z)$ هما تابعان صحيحان «حدوديتان»
والتابع الكسري هو تابع تحليلي (مستمر وقابل للاشتقاق) في المستوي العقدي باستثناء النقاط التي تجعل: $f_2(z)=0$ المقابلة لقيم z وعدد هذه النقاط مساوٍ لدرجة حدودية المقام.
وندعو هذه النقاط: «النقاط الشاذة».

3- التابع الأسي:

$$w=f(z)=e^{z}$$

حيث $z=x+iy$ ويعرّف بالعلاقة:

$$e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}\cdot e^{iy}$$
$$=e^{x}(\cos y+i\sin y)$$
$$\Rightarrow e^{z}=e^{x}\cos y+ie^{x}\sin y$$
$$e^{z}=u(x,y)+i\,v(x,y)$$

حيث:

$$u=u(x,y)=e^{x}\cos y$$
$$v=v(x,y)=e^{x}\sin y$$

ويتمتع التابع الأسي بالخواص التالية:

1) إذا كان: $z=x$ «$\mathrm{Im}\,z=0$»
عندئذ $z\in\mathbb{R}$ وبهذا يكون:

$$w=f(z)=e^{z}=e^{x}$$

وتكون:

$$\left.\begin{aligned}u&=u(x,y)=e^{x}\\ v&=v(x,y)=0\end{aligned}\right\}$$

2) إذا كان: $z=iy$ «$\mathrm{Re}\,z=0$»
وبهذا يكون:

$$w=f(z)=e^{z}=e^{iy}$$
$$\Rightarrow w=\cos y+i\sin y$$

/ /

عندئذ : $\left.\begin{aligned} u &= u(x,y) = \cos y \\ v &= v(x,y) = \sin y \end{aligned}\right\}$

③ التابع الأسـي $w = f(z) = e^z$ هو تابع تحليلي في جميع نقاط المستوي العقدي وبتطبيق كوشي ريمان:

$$w = f(z) = e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

$$u = e^x \cos y \quad , \quad v = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

نجد أن شرطي كوشي ريمان محققان.

④ مشتق التابع الأسي هو:

$$w' = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$= e^x \cos y + i e^x \sin y$$
$$= e^x (\cos y + i \sin y)$$
$$= e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy}$$

$$\Rightarrow \quad f'(z) = e^z$$

⑤ بفرض z_1, z_2 عددان عقديان عندئذ:

- $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
- $(e^{z_1})^n = e^{nz_1}$
- $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$

⑥ بفرض: $z = x+iy$ عندئذ:

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| \cdot |e^{iy}|$$
$$= |e^x| \cdot |\cos y + i \sin y|$$
$$= |e^x| \cdot (1)$$
$$= |e^x| = e^x$$

⑦ التابع الأســي e^{z} هو تابع دوري ودوره من مضاعفات $((2\pi i))$

أي أن:

$$e^{z+2\pi k i} = e^{z}\cdot e^{2\pi k i} = e^{z}(\cos 2\pi K + i\sin 2\pi K)$$
$$= e^{z}(1+0)$$
$$= e^{z}$$

4 - التوابع المثلثية:

لدينا:

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z \quad ①$$
$$e^{-iz} = \cos z - i\sin z \quad ②$$

بالجمع نجد:

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2\cos z \Rightarrow \boxed{\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}$$

وبطرح 2 من 1 نجد:

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i\sin z$$
$$\Longrightarrow \boxed{\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}$$

وبقسمة ★ على ★ نحصل على:

$$tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{\cancel{2}i} \times \frac{\cancel{2}}{e^{iz}+e^{-iz}}$$

$$\Rightarrow \boxed{tg\, z = \frac{1}{i}\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}\right)}$$

ويكون

$$\boxed{ctg\, z = i\cdot\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}\right)}$$

وتتمتع التوابع المثلثية بالخواص التالية:

① التابعان: $\sin z$ ، $\cos z$ تابعان دوريان دور كل منهما «2π» لأن:

$$\sin(z+2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{iz}\cdot e^{2\pi i} - e^{-iz}\cdot e^{-2\pi i}}{2i}$$

$$= \frac{e^{iz}\cdot(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) - e^{-iz}\cdot(\cos 2\pi - i\sin 2\pi)}{2i}$$

$$= \frac{e^{iz}(1+0) - e^{-iz}(1-0)}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$$

وكذلك بالنسبة للتابع:

$$\cos(z+2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz}\cdot e^{2\pi i} + e^{-iz}\cdot e^{-2\pi i}}{2}$$

$$= \frac{e^{iz}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) + e^{-iz}(\cos 2\pi - i\sin 2\pi)}{2}$$

$$= \frac{e^{iz}(1+0) + e^{-iz}(1-0)}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

② التابعان $tg\, z$ ، $ctg\, z$ هما تابعان دوريان ودور كل منهما π

$$tg(z+\pi) = \frac{e^{i(z+\pi)} - e^{-i(z+\pi)}}{i\left(e^{i(z+\pi)} + e^{-i(z+\pi)}\right)}$$

$$= \frac{e^{iz}\cdot e^{\pi i} - e^{-iz}\cdot e^{-i\pi}}{i\left(e^{iz}\cdot e^{i\pi} + e^{-iz}\cdot e^{-i\pi}\right)}$$

$$= \frac{e^{iz}(\cos\pi + i\sin\pi) - e^{-iz}(\cos\pi - i\sin\pi)}{i\left(e^{iz}\cdot(\cos\pi + i\sin\pi) + e^{-iz}(\cos\pi - i\sin\pi)\right)}$$

$$= \frac{e^{iz}(-1+0) - e^{-iz}(-1+0)}{i\left(e^{iz}\cdot(-1+0) + e^{-iz}(-1+0)\right)}$$

$$= \frac{\cancel{(-1)}(e^{iz} - e^{-iz})}{\cancel{(-1)}\, i(e^{iz} + e^{-iz})} = tg\, z$$

وكذلك نبين أن:

$$ctg(z+\pi) = ctg\, z$$

③ التابعان: $\sin z$ ، $\cos z$ تحليليان من أجل جميع قيم z في المستوي العقدي ومشتقاهما يعطيان بالعلاقة:

$$\frac{\partial \sin z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)$$

$$= \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{\cancel{i}(e^{iz} + e^{-iz})}{2\cancel{i}} = \cos z$$

/ /

$$\frac{\partial \cos z}{\partial z} = -\sin z$$ وبشكل مماثل نجد أن:

④ التابعان $tg\, z$ ، $ctg\, z$ تابعان تحليليان من أجل جميع قيم z في المستوي العقدي ماعدا قيم z الموافقة لـ: $\begin{cases} \sin z = 0 \\ \cos z = 0 \end{cases}$

أما مشتقاها فمعطيان على الشكل التالي:

$$\frac{d}{dz}(tg\, z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}\right) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i e^{iz} + i e^{-iz}}$$

$$= \frac{(ie^{iz} + ie^{-iz})^2 - (i^2 e^{iz} - i^2 e^{-iz})(e^{iz} - e^{-iz})}{(i^2)(e^{iz} + e^{-iz})^2}$$

$$= \frac{-\cancel{e^{2iz}} - \cancel{e^{-2iz}} - 2 + \cancel{e^{2iz}} + \cancel{e^{-2iz}} - 2}{(-1)(e^{iz} + e^{-iz})^2}$$

$$= \frac{4}{(e^{iz} + e^{-iz})^2} = \frac{1}{\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\cos^2 z}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{f(z) = tg\, z \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{\cos^2 z}}$$

وبشكل مماثل نجد أن:

$$\boxed{f(z) = ctg\, z \Rightarrow f'(z) = -\frac{1}{\sin^2 z}}$$

5- التوابع الزائدية القطعية:

تعرّف التوابع الزائدية في المستوي العقدي من أجل أي عدد عقدي z بالعلاقات التالية:

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = sh\, z$$

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = ch\, z$$

$$\tanh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}} = \frac{sh\, z}{ch\, z} \quad , \quad \coth z = \frac{1}{\tanh z}$$

وتتمتع التوابع الزائدية بالخواص التالية :

① إن تابعي $sh z$ ، $ch z$ تابعان دوريان ودورهما يساوي « $2\pi i$ »

حيث أن :

$$sh(z+2\pi i) = \frac{e^{z+2\pi i} - e^{-(z+2\pi i)}}{2}$$
$$= \frac{e^{z} \cdot e^{2\pi i} - e^{-z} \cdot e^{-2\pi i}}{2}$$
$$= \frac{e^{z}(\cos 2\pi i + i \sin 2\pi i) - e^{-z} \cdot e^{-2\pi i}}{2}$$
$$= \frac{e^{z}(1+0) - e^{-z}(1-0)}{2}$$
$$= \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = sh z$$

وكذلك الأمر بالنسبة لـ $ch z$ إذ نجد أن :

$$ch(z+2\pi i) = ch z$$

② إن $sh z$ ، $ch z$ هما تابعان تحليليان في جميع نقاط المستوي العقدي . ويعطى مشتقاهما بالعلاقة :

$$w = f(z) = sh z$$
$$\Longrightarrow w' = f'(z) = \frac{\partial sh z}{\partial z}$$
$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}e^{z} - \frac{1}{2}e^{-z}\right) = \frac{1}{2}e^{z} + \frac{1}{2}e^{-z}$$
$$= \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = ch z$$

إذاً :

$$f(z) = sh z \Longrightarrow f'(z) = ch z$$

أما بالنسبة لـ $ch z$:

$$w = f(z) = ch z$$
$$\Longrightarrow w' = f'(z) = \frac{\partial ch z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}e^{z} + \frac{1}{2}e^{-z}\right)$$
$$= \frac{1}{2}e^{z} - \frac{1}{2}e^{-z}$$
$$= \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = sh z$$

إذاً :

$$f(z) = ch z \Longrightarrow f'(z) = sh z$$

/ /

6- التابع اللوغاريتمي:

يُعرف التابع اللوغاريتمي بأنه معكوس التابع الأسي.

فإذا كان: $z = e^{w}$ عندئذٍ،

$$w = \ln z$$

حيث: $\left.\begin{array}{l} z = x + iy \\ w = u + iv \end{array}\right\}$

وبما أن:

$$z = e^{w} = e^{u+iv} = e^{u} \cdot e^{iv}$$

$$= e^{u} \cdot (\cos v + i \sin v)$$

بفرض: $|z| = e^{u}$ عندئذٍ:

$$z = |z| \cdot (\cos v + i \sin v) = r (\cos v + i \sin v)$$

حيث: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

وبما أن: $e^{u} = |z| \Longrightarrow u = \ln |z|$

ولدينا: $v = \theta + 2\pi K$; $K = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$

وبهذا نجد: $\ln z = w = u + iv$

$$\Longrightarrow \boxed{\ln z = \ln |z| + i(\theta + 2\pi K)}$$

وهذا يعني أن التابع اللوغاريتمي هو تابع متعدد القيم ولكل عدد عقدي عدد غير منتهٍ من اللوغاريتمات. وفي حالة: $K = 0$ نحصل على:

$$w = \ln |z| + i\theta$$

وهي ما يسمى: القيمة الرئيسية للوغاريتم

7- التابع العقدي:

$$w = f(z) = z^{a}$$

حيث: $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$

ونعرف التابع العقدي $w = z^{a}$ على الشكل التالي:

$$w = z^a = e^{a \ln z} = e^{a[\ln|z| + i(\theta + 2\pi k)]}$$

حيث: $k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$

وبهذا نجد أن التابع العقدي: $w = z^a$ هو تابع متعدد القيم و القيمة الرئيسية له تقابل: $k = 0$ وتحصل على:

$$w = e^{a[\ln|z| + i\theta]}$$

8- التوابع العقدية العكسية:

وهي معكوسات التوابع المثلثية العقدية.

1- $z = \cos z \Rightarrow w = f(z) = \cos^{-1} z = \arccos z$

2- $z = \sin z \Rightarrow w = f(z) = \sin^{-1} z = \arcsin z$

3- $z = tg\, z \Rightarrow w = f(z) = tg^{-1} z = arctg\, z$

4- $z = ctg\, z \Rightarrow w = f(z) = ctg^{-1} z = arccotg\, z$

وبشكل مشابه فإن معكوسات التوابع الزائدية العقدية هي:

1- $z = sh\, z \Rightarrow w = f(z) = sh^{-1} z = arcsh\, z$

2- $z = ch\, z \Rightarrow w = f(z) = ch^{-1} z = arcch\, z$

3- $z = \tanh z \Rightarrow w = f(z) = \tanh^{-1} z = arctanh\, z$

4- $z = \coth z \Rightarrow w = f(z) = \coth^{-1} z = arccoth\, z$

ملاحظة: "التابع المتعدد القيم":

إذا كانت: $w = f(z)$ علاقة تربط كل عنصر z من مجموعة التعريف A من المستوي العقدي $\mathbb{C}$ بأكثر من عنصر فإن هذه العلاقة ليست تابعاً وحيد التعيين وإنما تعرف: تابعاً كثير التعيين أو تابعاً متعدد القيم لأنها تشكل عدة توابع ضمنية.

مثال:

$$f(z) = z^{\frac{1}{3}}$$

إن هذا التابع متعدد القيم إذ أن له ثلاث قيم تحددها العلاقة:

$$z_k = r^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\theta + 2\pi k}{3} \right)$$

حيث: $K = 0, 1, 2$

بينما التابع: $f(z) = z^4$

هو تابع وحيد التعيين لأنه من أجل كل قيمة لـ z نحصل على قيمة واحدة للتابع.

وكأمثلة أخرى على التوابع المتعددة القيم نذكر:

«التوابع المثلثية العكسية - التوابع العكسية للتوابع القطعية - التابع العقدي $w = z^a$ - التوابع اللوغاريتمية العقدية».

2012 / 11 / 5 الإثنين

المحاضرة السادسة

تمارين ومسائل متنوعة

1 حل المعادلة التالية في $\mathbb{C}$:

$$2 - \cos z = 0$$

الحل:

$$\cos z = 2 \iff \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$$

$$e^{iz} + e^{-iz} = 4$$

$$e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0$$ نضرب بـ e^{iz}

نفرض $e^{iz} = m$ بغوض:

$$m^2 - 4m + 1 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 = 12 \implies \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$$

$$m_1 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} \implies e^{iz} = 2 + \sqrt{3}$$

$$iz = \ln(2 + \sqrt{3}) \iff \boxed{z = \frac{1}{i} \ln(2 + \sqrt{3})}$$

$$m_2 = 2 - \sqrt{3} \implies e^{iz} = 2 - \sqrt{3} \iff \boxed{z = \frac{1}{i} \ln(2 - \sqrt{3})}$$

2 برهن صحة العلاقة التالية:

$$\sin iz = i\,sh\,z$$

الحل:

$$\ell_1 = \sin iz = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{i^2 z} - e^{-i^2 z}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i}$$

$$= \frac{-i^2 e^{-z} + i^2 e^{z}}{2i} = \frac{\cancel{i}(e^{z} - e^{-z})}{2\cancel{i}}$$

$$= i\left(\frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\right) = i\,sh\,z = \ell_2$$

3 برهن صحة العلاقة التالية:

$$\cos iz = ch\,z$$

الحل:

$$\ell_1 = \cos iz = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{i^2 z} + e^{-i^2 z}}{2}$$

$$= \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = ch\,z = \ell_2$$

4 برهن صحة العلاقة التالية:

$$\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$$

الحل:

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$$

$\left.\begin{array}{l} \cos iy = ch\,y \\ \sin iy = i\,sh\,y \end{array}\right\}$ ولكن وجدنا في 2 و 3 أن

$$\Rightarrow \sin z = \sin x\, ch\,y + i \cos x\, sh\,y$$

وبهذا نجد أن :

$$\operatorname{Re} \sin z = \sin x \operatorname{ch} y$$
$$\operatorname{Im} \sin z = \cos x \operatorname{sh} y$$

أي أن : $\ell_1 = \overline{\sin z} = \sin x \operatorname{ch} y - i \cos x \operatorname{sh} y$

أما الطرف الثاني :

$$\ell_2 = \sin \bar{z} = \sin(x - iy)$$
$$= \sin x \cos iy - \cos x \sin iy$$

وبما أن $\left.\begin{array}{l} \cos iy = \operatorname{ch} y \\ \sin iy = i \operatorname{sh} y \end{array}\right\}$ نعوض :

$$\ell_2 = \sin \bar{z} = \sin x \operatorname{ch} y - i \cos x \operatorname{sh} y = \ell_1$$

5 أوجد القسم الحقيقي والتخيلي للتابع $\operatorname{sh} z$

الحل :

$$i \operatorname{sh} z = \sin iz$$
$$\Longrightarrow \operatorname{sh} z = \frac{1}{i} \sin iz = \frac{1}{i} \sin(ix - y)$$
$$= \frac{1}{i}(\sin ix \cos y - \cos ix \sin y$$

ولكن : $\left.\begin{array}{l} \sin ix = i \operatorname{sh} x \\ \cos ix = \operatorname{ch} x \end{array}\right\}$ نعوض :

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{i}(i \operatorname{sh} x \cos y - \operatorname{ch} x \sin y)$$
$$= \frac{1}{i}(i \operatorname{sh} x \cos y + i^2 \operatorname{ch} x \sin y)$$
$$\Longrightarrow \operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$$

وبهذا نجد :

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{Re} \operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y \\ \operatorname{Im} \operatorname{sh} z = \operatorname{ch} x \sin y \end{array}}$$

/ /

6- أوجد قيمة الطويلة للتابع:

$$w = \sin z$$

عند النقطة: $z = \pi + i\ \ln(2+\sqrt{5})$

الحل:

وجدنا في التمرين $\boxed{4}$ أن:

$$Re\ \sin z = \sin x\, ch\, y$$

$$Im\ \sin z = \cos x\, sh\, y$$

أي أن:

$$|w| = |\sin z| = \sqrt{\sin^2 x\, ch^2 y + \cos^2 x\, sh^2 y}$$

وبما أن: $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ نعوض:

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x\, ch^2 y + (1-\sin^2 x) sh^2 y}$$

$$= \sqrt{\sin^2 x\, ch^2 y + sh^2 y - \sin^2 x\, sh^2 y}$$

$$= \sqrt{\sin^2 x\,(ch^2 y - sh^2 y) + sh^2 y}$$

ولكن: $\boxed{ch^2 y - sh^2 y = 1}$.

$$\Rightarrow |\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + sh^2 y}$$

بما أن: $z = \pi + i\ \ln(2+\sqrt{5}) \Rightarrow \begin{cases} x = \pi \\ y = \ln(2+\sqrt{5}) \end{cases}$

نعوض نجد:

$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 \pi + sh^2(\ln(2+\sqrt{5}))}$$

إن: $\sin^2 \pi = 0$ ولدينا

$$sh(\ln(2+\sqrt{5})) = \frac{e^{\ln(2+\sqrt{5})} - e^{-\ln(2+\sqrt{5})}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(2+\sqrt{5}) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{2+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2(2+\sqrt{5})}$$

بتوحيد المقامات ثم الضرب بالمرافق نجد: $sh(\ln(2+\sqrt{5})) = 2$

$$\Rightarrow |\sin z| = \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2$$

7 برهن أن الحل العام للمعادلة:

$$z = \cos w$$

والذي يرمز له بالرمز: $w = \arccos z$

يعطى بالشكل:

$$w = \frac{1}{i}\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$$

الحل:

$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = \frac{1}{2}e^{iw} + \frac{1}{2}e^{-iw}$$

بفرض $t = e^{iw}$ إذاً:

$$z = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2t}$$

$$\iff 2tz = t^2 + 1$$

$$\iff t^2 - 2tz + 1 = 0$$

$$\Delta = 4z^2 - 4 = 4(z^2-1)$$

$$\sqrt{\Delta} = \mp 2\sqrt{z^2-1}$$

$$t_1 = \frac{2z + 2\sqrt{z^2-1}}{2} = z + \sqrt{z^2-1}$$

$$t_2 = z - \sqrt{z^2-1}$$

$$t = e^{iw} = z \mp \sqrt{z^2-1}$$

نلاحظ أن جذري المعادلة مختلفان عن الصفر وجداؤهما يساوي الواحد

وبالتالي فإن جذور المعادلة: $t = e^{iw}$ موجودة بالنسبة للمجهول w

$$e^{iw} = z \mp \sqrt{z^2-1}$$

$$iw = \ln\left(z \mp \sqrt{z^2-1}\right)$$

وبما أن اللوغاريتم لا يأخذ القيم السالبة إذاً:

$$iw = \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\Rightarrow w = \frac{1}{i}\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) = \arccos z$$

8 برهن أن الحل العام للمعادلة:

$$z = \sin w$$

والذي يرمز له بالرمز:

$$w = \arcsin z$$

يعطى بالشكل:

$$w = \frac{1}{i}\ln[i(z+\sqrt{z^2-1})]$$

الحل:

$$z = \sin w = \frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$$

$$z = \frac{1}{2i}e^{iw} - \frac{1}{2i}e^{-iw} \Leftrightarrow 2iz = e^{iw} - e^{-iw}$$

$$\Rightarrow e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

نفرض $t = e^{iw}$ نجد:

$$t^2 - 2izt - 1 = 0$$

$$\Delta = 4i^2z^2 + 4 = 4i^2z^2 - 4i^2 = 4i^2(z^2-1)$$

$$\sqrt{\Delta} = \mp 2i\sqrt{z^2-1}$$

$$t_1 = \frac{2iz + 2i\sqrt{z^2-1}}{2} = i(z+\sqrt{z^2-1})$$

$$t_2 = i(z - \sqrt{z^2-1})$$

إن t_1، t_2 مختلفان عن الصفر وجداؤهما يساوي الواحد وبالتالي جذور المعادلة $t = e^{iw}$ موجودة بالنسبة للمجهول w.

$$e^{iw} = i(z \mp \sqrt{z^2-1})$$

$$iw = \ln(i(z\mp\sqrt{z^2-1}))$$

وبما أن اللوغاريتم لا يأخذ القيم السالبة إذاً:

$$w = \frac{1}{i}\ln(i(z+\sqrt{z^2-1})) = \arcsin z$$

ويمكن القول بأن:

$$w = \frac{1}{i}\ln(i) + \frac{1}{i}\ln(z+\sqrt{z^2-1})$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{1}{i}\ln i + \arccos z = \arcsin z$$

9 أوجد القيمة الرئيسية للمقادير التالية:

$w_1 = i^{i}$ و $w_2 = (2+i)^{1-i}$

الحل:

تذكرة: وجدنا أنه من أجل: $w = z^{a}$; $a = \alpha + i\beta$

يمكن القول أن:

$$w = e^{a[\ln|z| + i(\theta + 2\pi K)]}$$

ومن أجل $K=0$ نحصل على القيمة الرئيسية:

$$w = e^{a[\ln|z| + i\theta]}$$

إذاً ومن أجل:

$$w_1 = i^{i} = z^{a}$$

حيث: $a = 0 + i$ ، $z = 0 + i$

نلاحظ أن: $|z| = 1$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$

إذاً القيمة الرئيسية لـ w_1:

$$w_1 = e^{i[\ln|1| + i\frac{\pi}{2}]}$$

$$\Longrightarrow w_1 = e^{i[0 + i\frac{\pi}{2}]} = e^{i^2 \frac{\pi}{2}}$$

$$\Longrightarrow w_1 = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$w_2 = (2+i)^{1-i} = z^{a}$$

$$z = 2+i \quad , \quad a = 1-i$$

$\Leftarrow$ $|z| = \sqrt{5}$ إذاً القيمة الرئيسية لـ w_2 هي:

$$w_2 = e^{(1-i)[\ln\sqrt{5} + i\theta]}$$

ولنعين قيمة θ من أجل تعيين القيمة الرئيسية:

إن: $r = |z| = \sqrt{5}$ ، $X = 2$ ، $y = 1$

$$\cos\theta = \frac{X}{r} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{2}e^{i\theta} + \frac{1}{2}e^{-i\theta} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{5}\,e^{i\theta} + \sqrt{5}\,e^{-i\theta} = 4$$

/ /

$$\sqrt{5}\, e^{2iQ} - 4e^{iQ} + \sqrt{5} = 0$$

$$\Delta = 16 - 20 = -4 = 4i^2$$

$$\sqrt{\Delta} = \mp 2i$$

$$e_1^{iQ} = \frac{4+2i}{2\sqrt{5}} = \frac{2+i}{\sqrt{5}} \quad , \quad e_1^{iQ} = \frac{2-i}{\sqrt{5}}$$

إذاً نجد:

$$e^{iQ} = \frac{2\mp i}{\sqrt{5}}$$

$$iQ = \ln\left(\frac{2\mp i}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow Q = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{2\mp i}{\sqrt{5}}\right)$$

ولدينا:

$$\sin Q = \frac{1}{2i}e^{iQ} - \frac{1}{2i}e^{-iQ}$$

بالتعويض نجد وبأخذ القيمة الموجبة

$$\sin Q = \frac{2+i}{2i\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{2i(2+i)}$$

بتوحيد المقامات نجد:

$$\sin Q = \frac{(2+i)^2 - 5}{2i\sqrt{5}(2+i)} = \frac{4-1+4i-5}{4i\sqrt{5} - 2\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \sin Q = \frac{4i-2}{\sqrt{5}(4i-2)} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

وبالعودة إلى:

$$z = 2+i \quad \begin{cases} r = \sqrt{5} \\ x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\sin Q = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

إذاً القيمة للزاوية Q والمقابلة للقيمة: $e^{iQ} = \frac{2+i}{\sqrt{5}}$ هي مقبولة

أي أن:

$$Q = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)$$

بالتعويض في القيمة الرئيسية لـ w_2 نجد:

$$w_2 = e^{(1-i)\left[\ln\sqrt{5} + i\left(\frac{1}{i}\ln\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)\right]} = e^{(1-i)\left[\cancel{\ln\sqrt{5}} + \ln(2+i) - \cancel{\ln\sqrt{5}}\right]}$$

بالإصلاح نحصل على القيمة الرئيسية:

$$\boxed{w_2 = e^{(1-i)\ln(2+i)}}$$

$\boxed{10}$ بفرض أن: $z = 3 - 4i$

أوجد القيمة الرئيسية للمقادير التالية:

$w_1 = \ln z$, $w_2 = \sin z$, $w_3 = e^{iz}$

$w_4 = e^{-iz}$

الحل:

$\boxed{1}$ $w_1 = \ln z$

$$\ln z = \ln|z| + i(\theta + 2\pi K)$$

$z = 3 - 4i$ $\begin{cases} r = 5 = |z| \\ x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$

القيمة الرئيسية للمقدار w_1 هي:

$$w_1 = \ln|z| + i\theta = \ln 5 + i\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{5}$$

حل المعادلة: $\cos\theta = \frac{3}{5}$

$$\frac{1}{2}e^{i\theta} + \frac{1}{2}e^{-i\theta} = \frac{3}{5}$$

$$5e^{i\theta} + 5e^{-i\theta} = 6$$

$$5e^{2i\theta} - 6e^{i\theta} + 5 = 0$$

$$\Delta = 36 - 100 = -64 = 64i^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 8i$$

$$e^{i\theta} = \frac{6 \mp 8i}{10} \Longleftrightarrow \boxed{e^{i\theta} = \frac{3 \mp 4i}{5}}$$

$$iQ = \ln \frac{3 \mp 4i}{5} \Rightarrow Q = \frac{1}{i} \ln\left(\frac{3 \mp 4i}{5}\right)$$

ولدينا :

$$\sin Q = \frac{1}{2i} e^{iQ} - \frac{1}{2i} e^{-iQ}$$

بالتعويض عن القيمة الموجبة نجد :

$$\sin Q = \frac{3+4i}{10i} - \frac{5}{2i(3+4i)}$$

نوحد المقامات :

$$\sin Q = \frac{(3+4i)^2 - 25}{10i(3+4i)} = \frac{9+24i-16-25}{10i(3+4i)}$$

$$\sin Q = \frac{24i-32}{30i-40} = \frac{8(3i-4)}{10(3i-4)} = \frac{8}{10}$$

اذا : $\sin Q = \frac{4}{5}$ الموافق للقيمة الموجبة وهذا

يناقض ★ حيث : $\sin Q = \frac{y}{r} = \frac{-4}{5}$

اذاً القيمة المقبولة للزاوية Q هي :

$$Q = \frac{1}{i} \ln\left(\frac{3-4i}{5}\right)$$

وبهذا تكون القيمة الرئيسية للمقدار w_1 هي :

$$w_1 = \ln 5 + i\left(\frac{1}{i} \ln\left(\frac{3-4i}{5}\right)\right)$$

$$= \ln 5 + \ln(3-4i) - \ln 5$$

$$\Rightarrow \boxed{w_1 = \ln(3-4i)}$$

$\boxed{2}$ $w_2 = \sin z$

ان $\sin z$ هو تابع وحيد التعيين أي أن له قيمة وحيدة :

$$w_2 = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$z = 3-4i$$

$$\Rightarrow w_2 = \frac{e^{i(3-4i)} - e^{-i(3-4i)}}{2i} = \frac{e^{4+3i} - e^{-4-3i}}{2i}$$

$$\Rightarrow \boxed{w_2 = \frac{i}{2}\left[e^{4+3i} - e^{-4-3i}\right]}$$

$\boxed{3}$ $w_3 = e^{iz}$

التابع الأسي تابع وحيد التعيين قيمة :

$w_3 = e^{iz} = e^{i(3-4i)}$; $z = 3-4i$

$\Longrightarrow \boxed{w_3 = e^{4-3i}}$

$\boxed{4}$ $w_4 = e^{-iz}$

تابع وحيد التعيين له قيمة واحدة هي :

$w_4 = e^{-i(3-4i)}$; $z = 3-4i$

$\Longrightarrow w_4 = e^{-3i+4i^2}$

$\Longrightarrow \boxed{w_4 = e^{-4-3i}}$

$\boxed{11}$ ماهي قيمة العدد العقدي z التي تجعل :

$\sin z = 10$

الحل :

$\sin z = 10$

$\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 10 \Longrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 20i$

$e^{2iz} - 20i\,e^{iz} - 1 = 0$

$\Delta = -400 + 4 = -396 = 396 i^2$

$\sqrt{\Delta} = \mp 6i\sqrt{11}$

$e_1^{iz} = \dfrac{20i + 6i\sqrt{11}}{2} = 10i + 3i\sqrt{11}$, $e_2^{iz} = 10i - 3i\sqrt{11}$

$e^{iz} = 10i \mp 3i\sqrt{11}$

$iz = \ln(10i \mp 3i\sqrt{11})$

$z = \frac{1}{i} \ln(10i \mp 3i\sqrt{11})$

/ /

12 برهن صحة العلاقة التالية:

$$tg\, iz = i\, thz$$

الحل:

$$\ell_1 = tg\, iz = \frac{1}{i}\left[\frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}\right]$$

$$= \frac{1}{i}\left[\frac{e^{-z} - e^{z}}{e^{-z} + e^{z}}\right] = \frac{1}{i}\left[\frac{i^2(e^{z} - e^{-z})}{e^{z} + e^{-z}}\right]$$

$$\Rightarrow \ell_1 = i\left[\frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}}\right] = i\, thz = \ell_2$$

طريقة ثانية:

وجدنا أن
$$\sin iz = i\, shz$$
$$\cos iz = chz$$

$$\ell_1 = tg\, iz = \frac{\sin iz}{\cos iz} = \frac{i\, shz}{chz} = i\, thz = \ell_2$$

13 برهن صحة العلاقة التالية:

$$\cot iz = -i\, cthz$$

الحل:

$$\ell_1 = \cot iz = i\left[\frac{e^{i^2 z} + e^{-i^2 z}}{e^{i^2 z} - e^{-i^2 z}}\right] = i\left[\frac{e^{-z} + e^{z}}{e^{-z} - e^{z}}\right]$$

$$= \frac{i\,[e^{z} + e^{-z}]}{(-1)[e^{z} - e^{-z}]} = -i\left[\frac{e^{z} + e^{-z}}{e^{z} - e^{-z}}\right]$$

$$= -i\, cthz = \ell_2$$

طريقة ثانية: وجدنا أن
$$\left.\begin{aligned}\sin iz &= i\, shz\\ \cos iz &= chz\end{aligned}\right\}$$

$$\ell_1 = \cot iz = \frac{\cos iz}{\sin iz} = \frac{chz}{i\, shz} = \frac{i}{i^2}\left(\frac{chz}{shz}\right) = -i\, cthz = \ell_2$$

/ /

$\boxed{14}$ هل: $\ln i^3 \overset{?}{=} 3\ln i$

الحل:

بفرض $z = i^3 \Rightarrow z = -i$

$l_1 = \ln i^3 = \ln(-i) = \ln|-i| + i(\theta + 2\pi k)$

$z = -i \Rightarrow |z| = |-i| = 1 = r$

ولنوجد الزاوية θ

$z = 0 - i \quad \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{2}$

$l_1 = \ln i^3 = \ln(-i) = 0 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$

$\boxed{l_1 = -\frac{\pi i}{2} + 2\pi k i}$

$l_2 = 3\ln i$

$z = i \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |z| = |i| = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$

$l_2 = 3\ln i = 3\left[\ln|i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right]$

$= 3i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$

$\boxed{l_2 = \frac{3\pi i}{2} + 6\pi k i}$

نلاحظ أن: $l_1 \neq l_2$

إذاً:

$\ln i^3 \neq 3\ln i$

$\boxed{15}$ هل: $\ln(-1)^3 \overset{?}{=} 3\ln(-1)$

الحل:

$l_1 = \ln(-1)^3 \quad : \quad z = (-1)^3 = -1 = -1 + 0i$

$x = -1 \,,\; y = 0 \,,\; r = 1 = |z|$

/ /

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1\\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \pi$$

$$\begin{aligned}\ell_1 = \ln z = \ln(-1)^3 &= \ln|z| + i(\theta + 2\pi k)\\ &= 0 + i(\pi + 2\pi k)\\ &= i\pi + 2\pi k i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ell_2 = 3\ln(-1) &= 3\left[\ln|-1| + i(\theta + 2\pi k)\right]\\ &= 3\left[0 + i(\pi + 2\pi k)\right]\\ &= 3\pi i + 6\pi k i\end{aligned}$$

نلاحظ أن:

$$\ell_1 \neq \ell_2$$

إذاً: $\ln(-1)^3 \neq 3\ln(-1)$

16 هل: $\ln(1)^3 \overset{?}{=} 3\ln(1)$

الحل:

$$\ell_1 = \ln(1)^3$$

$$z = (1)^3 = 1 = 1 + i0$$

$$x = 1,\ y = 0,\ r = |z| = 1$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= 1\\ \sin\theta &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = 0$$

$$\begin{aligned}\ell_1 = \ln(1)^3 &= \ln|z| + i(\theta + 2\pi k)\\ &= 0 + i(0 + 2\pi k)\\ &= 2\pi k i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ell_2 = 3\ln(1) &= 3\left[\ln|1| + i(\theta + 2\pi k)\right]\\ &= 3\left[0 + i(0 + 2\pi k)\right] = 6\pi k i = \ell_1\end{aligned}$$

إذاً: $\ln(1)^3 = 3\ln(1)$

/ /

المحاضرة السابعة — الأربعاء 7/11/2012

تتمة المسائل والتمارين:

17 أثبت صحة العلاقة التالية:

$$w = \arctan z = \tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

الحل:

$$w = \arctan z$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \tan w = \frac{\sin w}{\cos w}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} \times \frac{e^{iw}}{e^{iw}}$$

$$z = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1}$$

$$iz = \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1} \Leftrightarrow iz(e^{2iw} + 1) = e^{2iw} - 1$$

بفرض $m = e^{2iw}$

$$iz(m+1) = m - 1$$

$$izm + iz - m = -1$$

$$izm - m = -1 - iz$$

$$m(iz - 1) = -1 - iz$$

$$m = \frac{-1 - iz}{iz - 1} = \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

إذاً بالتعويض نجد:

$$e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

$$\Rightarrow 2iw = \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{w = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)}$$

/ /

18 برهن صحة مايلي:

$$w = \operatorname{arc\,sh} z = \ln(z+\sqrt{z^2+1})$$

الإثبات:

$$w = \operatorname{arc\,sh} z = sh^{-1} z$$

$$\Longleftrightarrow \quad z = sh\,w$$

$$z = \frac{e^{w} - e^{-w}}{2}$$

$$2z = e^{w} - e^{-w}$$

$$2z e^{w} = e^{2w} - 1 \qquad \times e^{w}$$

$$e^{2w} - 2z e^{w} - 1 = 0$$

$$\underbrace{e^{2w} - 2z e^{w} + z^2}_{} - z^2 - 1 = 0$$

$$(e^{w} - z)^2 = z^2 + 1$$

$$e^{w} - z = \sqrt{z^2+1}$$

$$e^{w} = z + \sqrt{z^2+1}$$

$$\boxed{w = \ln(z+\sqrt{z^2+1})}$$

19 برهن صحة مايلي:

$$w = \operatorname{arc\,ch} z = \ln(z+\sqrt{z^2-1})$$

الحل:

$$w = \operatorname{arc\,ch} z$$

$$z = ch\,w = \frac{e^{w} + e^{-w}}{2}$$

$$2z = e^{w} + e^{-w}$$

$$e^{2w} - 2z e^{w} + 1 = 0$$

$$e^{2w} - 2z e^{w} + z^2 - z^2 + 1 = 0$$

$$(e^{w} - z)^2 = z^2 - 1 \Longleftrightarrow e^{w} - z = \sqrt{z^2-1}$$

$$e^{w} = z + \sqrt{z^2-1} \Longleftrightarrow \boxed{w = \ln(z+\sqrt{z^2-1})}$$

20 أثبت صحة ما يلي:

$$w = \operatorname{arc\,th} z = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

الحل:

$$w = \operatorname{arc\,th} z$$

$$z = \operatorname{th} w = \frac{e^{w} - e^{-w}}{e^{w} + e^{-w}} = \frac{e^{2w} - 1}{e^{2w} + 1}$$

$$z e^{2w} + z = e^{2w} - 1$$

$$z e^{2w} - e^{2w} = -1 - z$$

$$e^{2w}(z-1) = -1 - z$$

$$e^{2w}(1-z) = 1 + z \Longleftrightarrow e^{2w} = \frac{1+z}{1-z}$$

$$2w = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{w = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

21 أوجد جميع قيم المقدار:

$$\arctan(1+i)$$

الحل:

نفرض: $z = 1+i$

وجدنا في المثال 17 أن:

$$\arctan z = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

بالتعويض:

$$\arctan(1+i) = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+i(1+i)}{1-i(1+i)}\right)$$

$$= \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+i-1}{1-i+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{i}{2-i}\right)$$

بإصلاح: $\frac{i}{2-i}$ نجد:

$$\frac{i}{2-i} \cdot \frac{(2+i)}{(2+i)} = \frac{2i+i^2}{4-i^2} = \frac{2i-1}{4+1} = \frac{2i-1}{5}$$

$$\arctan(1+i) = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{2i-1}{5}\right)$$

/ /

اذا: $\ln z = \ln|z| + i(\theta + 2\pi K)$

$\arg z = \theta + 2\pi K$ «سعة العدد العقدي z»

$\boxed{\arctan(1+i) = \frac{1}{2i}\ln\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right| + \frac{1}{2}\arg z} \Leftarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \left|\frac{2}{5}i - \frac{1}{5}\right| = |z|$

شرط كوشي وريمان في الإحداثيات القطبية:

لتكن لدينا الدالة f المعرفة بالشكل التالي:

$$w = f(z) = u + iv$$

وبما أن:

$$u = u(x, y)$$
$$v = v(x, y)$$

حيث: $\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\}$ $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$, $\quad 0 \le r < \infty$

اذا: $x = x(r, \theta)$ ، $y = y(r, \theta)$

وبهذا يكون:

$$u = u[x(r,\theta), y(r,\theta)]$$
$$v = v[x(r,\theta), y(r,\theta)]$$

ولنحسب المشتقات الجزئية لكلا الدالتين:

A) $\frac{\partial u}{\partial r}$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

ولكن: $\left.\begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \end{array}\right\}$ نعوض فنجد:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial r} = \cos\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial y}} \quad (1)$$

B) $\frac{\partial u}{\partial \theta}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

ولكن: $\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$ ، $\frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$ نعوض فنجد:

$$\frac{\partial u}{\partial Q} = -r\sin Q \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + r\cos Q \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

نضرب بـ $-\frac{1}{r}$:

$$\boxed{-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial Q} = \sin Q \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \cos Q \frac{\partial u}{\partial y}} \quad (1)$$

C) $\frac{\partial v}{\partial r}$:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

ولكن : $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos Q$ ، $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin Q$

بالتعويض نحصل على :

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial r} = \cos Q \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \sin Q \cdot \frac{\partial v}{\partial y}} \quad (2)$$

D) $\frac{\partial v}{\partial Q}$:

$$\frac{\partial v}{\partial Q} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial Q} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial Q}$$

ولكن : $\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial Q} &= -r\sin Q \\ \frac{\partial y}{\partial Q} &= r\cos Q \end{aligned}\right\}$ نعوض :

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial Q} = -r\sin Q \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + r\cos Q \cdot \frac{\partial v}{\partial y}} \quad (\bar{2})$$

نضرب بـ $+\frac{1}{r}$:

$$\boxed{+\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial Q} = -\sin Q \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \cos Q \cdot \frac{\partial v}{\partial y}} \quad (\bar{\bar{2}})$$

بالعودة إلى (1) وبالاستفادة من شرطي كوشي وريمان

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right.$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos Q \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \sin Q \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = (\bar{\bar{2}})$$

إذاً :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial Q}} \star$$

وبالعودة إلى (1) وبالاستفادة من شرطي كوشي وريمان نجد :

$$-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial Q} = \sin Q \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \cos Q \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = (2)$$

إذاً: $\boxed{\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}}$ ★

إن كلاً من ★ و ★ يمثلان شرطي كوشي وريمان في الأحداث القطبية.

ملاحظة: الفقرة السابقة سؤال امتحاني يأتي بالصيغة التالية، «استنتج شرطي كوشي وريمان في الأحداث القطبية»

المشتق في الأحداث القطبية:

لدينا من (1)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

نضرب الطرفين بـ «$\cos\theta$»

$$3 \quad \boxed{\cos\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \cos^2\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\cos\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial y}}$$

ولدينا من (2):

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial v}{\partial x} + \sin\theta \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$= \sin\theta \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \cos\theta \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

نضرب الطرفين بـ «$\sin\theta$»

$$4 \quad \boxed{\sin\theta \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = \sin^2\theta \frac{\partial v}{\partial y} + \sin\theta\cos\theta \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}$$

بجمع (3) و (4) نحصل على:

$$\sin\theta \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \cos\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \sin^2\theta \frac{\partial v}{\partial y} + \cos^2\theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\cos\theta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

نستفيد من شرطي كوشي وريمان لتحويل جميع المشتقات الجزئية لتصبح بالنسبة لـ x

$$\sin\theta \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \cos\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \sin^2\theta \frac{\partial u}{\partial x} + \cos^2\theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\cos\theta \left(\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}\right)$$

/ /

$$\sin\theta \frac{\partial v}{\partial r} + \cos\theta . \frac{\partial u}{\partial r} = (\sin^2\theta + \cos^2\theta) . \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\theta . \frac{\partial u}{\partial r} + \sin\theta . \frac{\partial v}{\partial r}} \quad (5)$$

ولدينا: من (1)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos\theta . \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta . \frac{\partial u}{\partial y}$$

بضرب الطرفين بـ $\sin\theta$:

$$\boxed{\sin\theta . \frac{\partial u}{\partial r} = \sin\theta\cos\theta . \frac{\partial u}{\partial x} + \sin^2\theta . \frac{\partial u}{\partial y}}$$

ولدينا من (2)

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \cos\theta . \frac{\partial v}{\partial x} + \sin\theta . \frac{\partial v}{\partial y}$$

بضرب الطرفين بـ $\cos\theta$:

$$\boxed{\cos\theta . \frac{\partial v}{\partial r} = \cos^2\theta . \frac{\partial v}{\partial x} + \sin\theta . \cos\theta . \frac{\partial v}{\partial y}}$$

$$= \sin\theta . \cos\theta . \frac{\partial v}{\partial y} + \cos^2\theta . \frac{\partial v}{\partial x}$$

بالطرح نجد:

$$\cos\theta . \frac{\partial v}{\partial r} - \sin\theta . \frac{\partial u}{\partial r} = \sin\theta\cos\theta \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \cos^2\theta . \frac{\partial v}{\partial x} - \sin^2\theta . \frac{\partial u}{\partial y}$$

نستفيد من شرطي كوشي وريمان لتحويل جميع المشتقات الجزئية لتصبح بالنسبة لـ x :

$$\cos\theta . \frac{\partial v}{\partial r} - \sin\theta . \frac{\partial u}{\partial r} = \sin\theta\cos\theta \left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}\right) + \cos^2\theta \frac{\partial v}{\partial x} + \sin^2\theta . \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\cos\theta . \frac{\partial v}{\partial r} - \sin\theta . \frac{\partial u}{\partial r} = (\cos^2\theta + \sin^2\theta) . \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin\theta . \frac{\partial u}{\partial r} + \cos\theta . \frac{\partial v}{\partial r}} \quad (6)$$

ونعلم أنه اذا كان: $w = f(z) = u + iv$

فإن: $w' = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$

نعوض من (5) و (6)

$$f'(z) = \cos\theta . \frac{\partial u}{\partial r} + \sin\theta . \frac{\partial v}{\partial r} + i\left[-\sin\theta . \frac{\partial u}{\partial r} + \cos\theta . \frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

$$f'(z) = \cos\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \sin\theta \cdot \frac{\partial v}{\partial r} - i\sin\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + i\cos\theta \cdot \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$\Rightarrow f'(z) = (\cos\theta - i\sin\theta)\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + (\sin\theta + i\cos\theta)\cdot\frac{\partial v}{\partial r}$$

$$= (\cos\theta - i\sin\theta)\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + i\left(\frac{1}{i}\sin\theta + \cos\theta\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial r}$$

أخرجنا i عامل مشترك ثم نعوض $\frac{1}{i} = \frac{-i^2}{i} = -i$

$$\Rightarrow f'(z) = (\cos\theta - i\sin\theta)\frac{\partial u}{\partial r} + i(\cos\theta - i\sin\theta)\cdot\frac{\partial v}{\partial r}$$

نخرج $(\cos\theta - i\sin\theta)$ عامل مشترك:

$$f'(z) = (\cos\theta - i\sin\theta)\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\cdot\frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

$$= e^{-i\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\cdot\frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

$$= \frac{1}{e^{i\theta}}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\cdot\frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

نضرب ونقسم على r:

$$f'(z) = \frac{r}{r\cdot e^{i\theta}}\cdot\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\cdot\frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

ولكن $z = r\cdot e^{i\theta}$ بالتعويض نجد:

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\cdot\frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

وبالاستفادة من شرط كوشي وريمان في الإحداثيات القطبية:

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta} + i\left(-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(z) = \frac{1}{z}\left[\frac{\partial v}{\partial \theta} - i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right]}$$

وتكون هذه هي علاقة المشتق في الإحداثيات القطبية

ملاحظة: الفقرة السابقة عبارة عن سؤال امتحاني يأتي بالصيغة التالية:

« استنتج علاقة المشتق في الإحداثيات القطبية »

تعريف التابع الخطي الكسري:

نسمي التابع f المعرف بالشكل:

$$f: C_\infty \longrightarrow C_\infty \ ;$$

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

حيث:

- C_∞ : المستوي العقدي الموسع.
- $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ ثوابت عقدية.
- d ، c لاينعدمان معاً.

نسميه «التابع الخطي الكسري» أو ندعوه: «تحويل موبيوس»

وفي الحالة التي يكون فيها: $c=0$ ، $d \neq 0$ فإننا نحصل على التابع الخطي التالي:

$$w = f(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d} = Az + B$$

وهو كثير حدود من الدرجة الأولى.

أما إذا كان: $c \neq 0$ فإننا نقبل بدون برهان أن كل تابع خطي كسري يمكن كتابته بالشكل:

$$w = -\frac{ad-bc}{c} \cdot \frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c}$$

ومن الشكل السابق نستنتج أن w يساوي مقداراً ثابتاً هو $\frac{a}{c}$ إذا كان: $ad-bc=0$.

والجدير بالذكر أن لكل تابع خطي كسري تابعاً معاكساً يعطى على الشكل:

/ /

2012/11/12 الإثنين المحاضرة الثامنة

مسائل:

1 أثبت أن التابع: $f(z)=z^m$

قابل للمفاضلة في جميع أنحاء المستوي المركب حيث $m \geq 1$

مستخدماً الشكل القطبي ثم احسب مشتقه.

الحل:

نقول عن التابع: $f(z)=z^m$ أنه قابل للمفاضلة إذا حقق شرطي كوشي وريمان.

شرطا كوشي وريمان في الإحداثيات القطبية:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}$$

ولنحدد الآن كلاً من u ، v.

لدينا: $f(z)=z^m=(re^{i\theta})^m$

$$= r^m \cdot e^{im\theta}$$

$$= r^m \cdot [\cos m\theta + i \sin m\theta]$$

$$\Rightarrow f(z) = r^m \cos m\theta + i\, r^m \sin m\theta$$

$$u = r^m \cos m\theta \quad , \quad v = r^m \sin m\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = m r^{m-1} \cdot \cos m\theta \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial r} = m \cdot r^{m-1} \cdot \sin m\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -m r^m \sin m\theta \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = m \cdot r^m \cos m\theta$$

نأخذ $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}$ فنجد:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{\cancel{r}} \cdot (m \cdot r^{\cancel{m}} \cdot \cos m\theta) = m \cdot r^{m-1} \cdot \cos m\theta = \frac{\partial u}{\partial r}$$

ونأخذ $-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}$ فنجد:

$$-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} = \cancel{-}\frac{1}{\cancel{r}}(\cancel{-} m r^{\cancel{m}} \sin m\theta) = m \cdot r^{m-1} \sin m\theta = \frac{\partial v}{\partial r}$$

تحقق شرط كوشي وريمان في الإحداثيات القطبية إذا التابع $f(z)=z^m$ قابل للمفاضلة.

حساب المشتق:

نعلم أن:

$$f'(z)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}-i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

بالتعويض نجد:

$$f'(z)=\frac{1}{z}\left(m.r^m\cos m\theta-i(-mr^m\sin m\theta)\right)$$

$$=\frac{1}{z}\left(m.r^m\cos m\theta+i\,mr^m\sin m\theta\right)$$

$$=\frac{m.r^m}{z}\left(\cos m\theta+i\sin m\theta\right)$$

ولكن:

$$z^m=r^m(\cos m\theta+i\sin m\theta)$$ نعوض:

$$f'(z)=\frac{m}{z}\cdot z^m \Rightarrow \boxed{f'(z)=m.z^{m-1}}$$

---

2 لتكن لدينا: $D=\mathbb{C}\setminus[0,\infty]$ ولتكن:

$$0<\theta<2\pi$$

وليكن: $z=re^{i\theta}$

أثبت أن التابع: $f(z)=\sqrt{z}$ قابل للمفاضلة في كل نقطة من نقاط D مستخدماً الشكل القطبي ثم احسب مشتقه.

الحل:

$$f(z)=\sqrt{z}=z^{\frac{1}{2}}=(re^{i\theta})^{\frac{1}{2}}$$

$$=r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}i\theta}$$

$$=r^{\frac{1}{2}}\left[\cos\tfrac{1}{2}\theta+i\sin\tfrac{1}{2}\theta\right]$$

$$f(z)=r^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}\theta+i\,r^{\frac{1}{2}}\sin\tfrac{1}{2}\theta$$

$$u=r^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}\theta$$

$$v=r^{\frac{1}{2}}\sin\tfrac{1}{2}\theta$$

/ /

شرط كوشي وريمان في الاحداثيات القطبية:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}$$

ولنوجد المشتقات الجزئية:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}\theta , \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2}\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2}\theta , \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}\theta$$

نلاحظ أن:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}\theta\right) = \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}\theta = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2}\theta\right) = \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2}\theta = \frac{\partial v}{\partial r}$$

تحقق شرطا كوشي وريمان إذاً التابع f تحليلي وقابل للمفاضلة.

إيجاد المشتق:

وجدنا أن: $f'(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - i \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$

$$= \frac{1}{z}\left(\frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2}\theta + i \cdot \frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2}\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2z} \cdot r^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left[\cos \frac{1}{2}\theta + i \sin \frac{1}{2}\theta\right]}_{\text{حسب دوموافر يكون}}$$

$$= \frac{1}{2z} \cdot r^{\frac{1}{2}} \left[\cos \theta + i \sin \theta\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2z} \cdot \left(r(\cos \theta + i \sin \theta)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2z} \cdot e^{\frac{1}{2} i\theta} = \frac{1}{2z} \cdot z^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(z) = \frac{\sqrt{z}}{2z} = \frac{1}{2\sqrt{z}}}$$

المتتاليات العقدية وتقاربها:

ليكن لدينا:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C} \quad ;$$
$$n \longmapsto f(n) = z_n$$

حيث $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية أو أي مجموعة غير منتهية جزئية منها.
نسمي f متتالية عقدية نرمز لها بالرمز (z_n) أو $\{z_n\}$ وهي مجموعة غير منتهية من الأعداد العقدية:

$$z_1 , z_2 , z_3 , \dots , z_n , \dots$$

كل عدد من هذه المتتالية نسميه حداً لها ونسمي z_n الحد العام للمتتالية أو الحد النوني.

تعريف:

نقول عن المتتالية العقدية $\{z_n\}$ أنها متقاربة من العدد $a \in \mathbb{C}$ والذي ندعوه «نهاية المتتالية» إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad ; \quad n \geq n_0 \quad : |z_n - a| < \varepsilon$$

ونكتب عندئذ: $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$

وإذا لم تكن المتتالية متقاربة فإننا نقول أنها متباعدة.
وبشكل خاص نقول أن المتتالية $\{z_n\}$ متباعدة إلى اللانهاية إذا كان:

$$\lim_{n \to \infty} z_n = \infty$$

مثال (1):

لتكن المتتالية $\{z_n\}$ على الشكل:

$$z_n = z^n \quad \text{حيث} \quad |z| > 1$$

عندئذ: $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \infty$ والمتتالية متباعدة.

/ /

مثال (2):

لتكن المتتالية $\{z_n\}$ على الشكل:

$z_n = z^n$ حيث $|z| < 1$

إن: $\lim_{n \to \infty} z_n = 0$ والمتتالية متقاربة ونهايتها هي الصفر.

خواص المتتاليات العقدية:

سنتعامل مع المتتاليات العقدية كما تعاملنا مع المتتاليات الحقيقية.

① كل متتالية متقاربة تكون محدودة.

② إذا كانت المتتالية العقدية متقاربة فإن نهايتها وحيدة.

③ تتقارب المتتالية العقدية $\{z_n\}$ من العدد العقدي a إذا احتوى كل جوار للعدد a جميع حدود المتتالية عدا عدد منتهي منها.

④ بفرض $\{a_n\}$ ، $\{b_n\}$ متتاليتان عقديتان بحيث:

$\lim_{n \to \infty} a_n = a$, $\lim_{n \to \infty} b_n = b$

عندئذ:

1- $\lim_{n \to \infty} (a_n \mp b_n) = a \mp b$

2- $\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

3- $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$ $\left\{ \begin{array}{c} b_n \neq 0 \\ b \neq 0 \end{array} \right\}$

⑤ الشرط اللازم والكافي لتقارب متتالية عقدية $\{z_n\}$ هو أن تكون متتالية كوشي، أي يجب تحقق الشرط:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ ; n, m \geq n_0 \ : \ |z_m - z_n| < \varepsilon$

⑥ إذا كانت المتتالية العقدية $\{a_n\}$ متقاربة من الصفر وكانت $\{b_n\}$ متتالية محدودة عندئذ: $\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$

/ /

7) بفرض أن $\{C_n\}$ متتالية عقدية بحيث:

$$C_n = a_n + i b_n$$

وليكن لدينا العدد العقدي: $c = a + ib$.

عندئذ الشرط اللازم والكافي لكي تكون $\{C_n\}$ متقاربة من C هو:

$$a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a \quad \wedge \quad b_n \xrightarrow[n \to \infty]{} b$$

أمثلة:

1- ادرس تقارب المتتالية التالية:

$$\{z_n\} = \frac{(1-2i)^n}{n}$$

الحل:

$$z_n = \frac{(1-2i)^n}{n} \quad , \quad |z_n| = \left|\frac{(1-2i)^n}{n}\right|$$

$$|(1-2i)^n| = (\sqrt{1+4})^n = (\sqrt{5})^n$$

$$\Rightarrow |z_n| = \frac{(\sqrt{5})^n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

المتتالية متباعدة.

2- أوجد نقطة تقارب المتتالية التالية:

$$\{z_n\} = \frac{n^2 + i n^3}{n^3 - 1}$$

الحل:

$$z_n = \frac{n^2 + i n^3}{n^3 - 1} = \frac{n^2}{n^3 - 1} + i \frac{n^3}{n^3 - 1}$$

$$a_n = \frac{n^2}{n^3 - 1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 = a$$

$$b_n = \frac{n^3}{n^3 - 1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 = b$$

عندئذ:

$$z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} c = a + ib$$

$$\Rightarrow z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} i$$

نتيجة:

إذا كانت لدينا المتتالية $\{z_n\}$ حيث:

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z$$

عندئذ تكون:

$$\lim_{n \to \infty} |z_n| = |z|$$

والعكس غير صحيح بالضرورة.

مثال:

لتكن لدينا المتتالية:

$$\{z_n\} = \{(-1)^n\}$$

نلاحظ أن:

$$|z_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

بينما $\{z_n\}$ ليست متقاربة.

تعريف:

نقول عن المتتالية العقدية $\{z_n\}$ أنها تنتهي إلى اللانهاية عندما ينتهي مقلوبها إلى الصفر:

أي: $\lim_{n \to \infty} z_n = \infty$ عندما $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{z_n} = 0$

نتيجة:

إذا كانت $\{z_n\}$ متتالية عقدية تنتهي إلى اللانهاية عندئذ فإن طويلتها تنتهي إلى اللانهاية:

$$z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty \implies |z_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

I can feel the winds of change...

مثال:

أدرس تقارب المتتالية العقدية التالية:

$$\{z_n\} = \{a^n\}$$

والمطلوب: ناقش حالات التقارب حسب قيم a.

الحل:

1) $|a| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

المتتالية متقاربة ونهايتها تساوي الصفر.

2) $|a| = 1$

عندئذ: $a = e^{i\theta}$

$$a^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

نميز حالتين:

- $\theta = 0$

$$a_n = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a^n = 1$$

تكون المتتالية متقاربة ونهايتها تساوي الواحد.

- $\theta \neq 0$ عندئذ لا توجد نهاية وتكون a_n متباعدة.

3) $|a| > 1$

عندئذ: $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$

والمتتالية في هذه الحالة متباعدة.

المتسلسلات العقدية:

ليكن $\{z_n\}$ متتالية عقدية عندئذ نسمي المجموع:

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$$

بمتسلسلة عقدية لانهائية ونرمز لها بالرمز: $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$

ونقول أن المتسلسلة العقدية متقاربة ومجموعها يساوي a

إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية لها $\{S_n\}$ متقاربة من a ونكتب

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a \iff S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

أما إذا كانت $\{S_n\}$ متباعدة فإننا نقول عندئذ أن المتسلسلة العقدية متباعدة.

تمرين:

ادرس تقارب المتسلسلة الهندسية

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

الحل:

نأخذ متتالية المجاميع الجزئية.

$$S_n = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots\ldots + z^{n-1}$$

نضرب الحدود بـ z فنجد:

$$z \cdot S_n = z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots\ldots + z^{n-1} + z^n$$

فإذا طرحنا:

$$S_n - z \cdot S_n = 1 - z^n \Rightarrow S_n(1-z) = 1 - z^n$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{z^n}{1-z}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-z} - \lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{1-z}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-z} - 0 = \frac{1}{1-z}$$ عندما $|z|<1$:

إذاً المتسلسلة المعروضة متقاربة ومجموعها:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$; $|z|<1$

خواص المتسلسلات العقدية:

1- نقول عن متسلسلة عقدية أنها متقاربة إذا كان حدها العام يسعى

إلى الصفر:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ متقاربة}$$

2- إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ متقاربة ومجموعها يساوي a عندئذ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a z_n$ تكون متقاربة.

3- لتكن لدينا المتسلسلتان المتقاربتان:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \quad \wedge \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$$

عندئذ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \mp b_n) = a \mp b$$

4- لتكن لدينا المتتالية العقدية $\{z_n\}$، حيث:

$$z_n = a_n + i b_n$$

عندئذ فإن الشرط اللازم والكافي لكي تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ هو أن تتقارب المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

ونقول:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a_n + i b_n \text{ متقاربة} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ متقاربة} \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ متقاربة} \end{cases}$$

تعريف:

تسمى المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ بمتسلسلة القيمة المطلقة للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ونقول بأن $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ متقاربة إطلاقاً أو متقاربة بالإطلاق إذا تقاربت متسلسلة قيمها المطلقة $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$

نتائج:

* إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة متقاربة إطلاقاً عندئذ تكون متقاربة ولكن العكس غير صحيح بالضرورة.
* إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة وكانت متسلسلة قيمها المطلقة متباعدة أو غير متقاربة مطلقاً فإننا عندئذ نسمي تقارب $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقارباً شرطياً.

تنويه:

إن دراسة تقارب المتسلسلات العقدية يؤول إلى دراسة تقارب المتسلسلات الحقيقية وهذا يدعونا إلى دراسة اختبارات تقارب المتسلسلات.

اختبارات التقارب:

① اختبار النسبة "دالامبير":

نوجد النهاية:

$$P = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

حيث $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، ونميز الحالات:

* $P < 1$ تكون المتسلسلة متقاربة.
* $P > 1$ تكون المتسلسلة متباعدة.
* $P = 1$ فشل معيار.

② اختبار كوشي الجذر النوني:

من أجل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ حيث $a_n \geq 0$

نوجد النهاية:

$$q = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

ونميز الحالات التالية:

* $q < 1$ المتسلسلة متقاربة.
* $q > 1$ المتسلسلة متباعدة.
* $q = 1$ منشل معيار.

(3) اختبار المقارنة:

لتكن لدينا المتسلسلات: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ذوات الحدود غير السالبة

ونقول:

* إذا كانت: $a_n \geq b_n$ من أجل جميع قيم n ابتداء من قيمة معينة N عندئذ إذا كانت المتسلسلة $\sum b_n$ متباعدة فإن $\sum a_n$ متباعدة.
* وإذا كانت: $c_n \geq a_n$ من أجل جميع قيم n ابتداء من قيمة معينة N عندئذ إذا كانت $\sum c_n$ متقاربة فإن $\sum a_n$ تكون متقاربة.
* وإذا أوجدنا النهاية:

$$P = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0$$

عندئذ $\sum a_n$ ، $\sum b_n$ هما من نوع واحد أي أنهما متقاربتان معاً أو متباعدتان معاً.

(4) اختبار راب:

لتكن لدينا المتسلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ حيث $a_n \geq 0$

نوجد النهاية: $\mathcal{R} = \lim_{n \to \infty} \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right]$ ونميز الحالات التالية:

* $\mathcal{R} > 1$ المتسلسلة متقاربة.
* $\mathcal{R} < 1$ المتسلسلة متباعدة.
* $\mathcal{R} = 1$ منشل معيار

/ /

تمارين:

ادرس تقارب المتسلسلات العقدية التالية ،

① $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3-4i}{4}\right]^n$

الحل:

نجري اختبار الجذر النوني:

$$C = \lim_{n \to \infty} \left|\sqrt[n]{a_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\sqrt[n]{\left(\frac{3-4i}{4}\right)^n}\right| = \left|\frac{3-4i}{4}\right| = \frac{5}{4} > 1$$

المتسلسلة متباعدة.

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+2i)^n}{n+3}$

الحل:

نجري اختبار دالامبير:

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{(3+2i)\cancel{(3+2i)^n}}{n+4} \cdot \frac{n+3}{\cancel{(3+2i)^n}}\right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{n+3}{n+4} \cdot |3+2i|\right] = |3+2i| = \sqrt{13} > 1$$

المتسلسلة متباعدة.

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,(e-i)^n}$

الحل:

نجري اختبار دالامبير:

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\cancel{(n!)}\cancel{(e-i)^n}(e-i)} \cdot \frac{\cancel{n!}\,\cancel{(e-i)^n}}{n^n}\right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left|\frac{\cancel{(n+1)}\,(n+1)^n}{\cancel{(n+1)}(n)^n \cdot (e-i)}\right| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left|\frac{1}{e-i}\right| = \frac{e}{|e-i|}$$

$\ell = \frac{e}{\sqrt{e^2+1}} < 1 \Leftarrow$ المتسلسلة متقاربة

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)\, i^n}{n^3}$

الحل:

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + i\sqrt{n}}{n+1}$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + i\sqrt{n}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+1} + i\, \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right)$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}}_{X_n} + i \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}}_{Y_n}$$

نلاحظ أن: $X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ هي متسلسلة متناوبة

وحدها العام: $\frac{(-1)^n}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ كما نلاحظ أن الحد العام متناقص

بالقيمة المطلقة إذاً حسب معيار لايبنتز هي متقاربة

أما بالنسبة للمتسلسلة: $Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ نقارنها مع $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]$$

/ /

فنجد :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

إذاً المتسلسلتان من نوع واحد.

وبما أن $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة إذاً y_n متباعدة وبهذا تكون المتسلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{n+1}=x_n+i\,y_n$$

متباعدة أيضاً.

متتاليات ومتسلسلات التوابع العقدية :

إذا كانت حدود متسلسلة عقدية ماهي توابع عقدية فإننا نسمي هذه المتسلسلة : « المتسلسلة العقدية التابعية »

ونكتب :

$$f_1(z)+f_2(z)+f_3(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$$

وإذا رمزنا لمتتالية المجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة بالرمز $S_n(z)$ عندئذ الحد العام هو :

$$S_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)$$

التقارب المنتظم

تعريف :

تكون المتسلسلة التابعية متقاربة بانتظام في المنطقة D من التابع $S(z)$ إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية لها $S_n(z)$ متقاربة في D وهذا يعني :

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N_{(\varepsilon)}\in\mathbb{N}\ ;\ |S_n(z)-S(z)|<\varepsilon\quad\forall z\in D$$

وذلك من أجل : $n>N_{(\varepsilon)}$.

/ /

اختبار فايرشتراس في التقارب المنتظم:

نقول أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ متقاربة مطلقاً وبانتظام على ساحة تعريفها D إذا كانت: $|f_n(z)| < M_n$ حيث: $n = 1, 2, \dots$

M_n: هي أعداد حقيقية موجبة ومستقلة عن النقاط $z \in D$ وتحقق أن المتسلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ متقاربة.

خواص متسلسلات التوابع المتقاربة بانتظام:

1- إذا كانت المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ متقاربة بانتظام في المنطقة D وإذا كانت حدود هذه المتسلسلة توابع مستمرة في D. وكان $S(z)$ هو مجموع هذه المتسلسلة وكان C منحنياً ما يقع في D عندئذ:

$$\int_C f(z) \cdot dz = \int_C \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \cdot dz = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_C f_n(z) \cdot dz \right)$$

2- إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ متقاربة بانتظام في المنطقة D وإذا كانت حدود هذه المتسلسلة توابع مستمرة في D. فإن المجموع $S(z)$ لهذه المتسلسلة هو أيضاً تابع مستمر في D.

3- إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ متقاربة في المنطقة D من التابع $f(z)$، وكانت حدود هذه المتسلسلة قابلة للاشتقاق ومستمرة في D، وكانت المتسلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z)$ متقاربة بانتظام من أجل كل: $z \in D$ عندئذ:

$$S'(z) = \frac{d\,S(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z)$$

هذا يعني أنه نستطيع في دائرة تقارب المتسلسلة مكاملتها و اشتقاقها حداً حداً.

تمثيل التوابع التحليلية بمتسلسلات القوى:

متسلسلة القوى هي متسلسلة عقدية غير منتهية من الشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

حيث: C_n والتي ندعوها « أمثال النشر أو معاملات النشر » هي أعداد عقدية.

a: والذي ندعوه « مركز متسلسلة القوى » هو عدد عقدي أيضاً

وتحدد منطقة تقارب متسلسلة القوى بالاعتماد على المعاملات.

ملاحظة:

يوجد لكل متسلسلة قوى عدد حقيقي موجب r بحيث تكون متسلسلة القوى متقاربة من أجل $|z-a|<r$ ومتباعدة من أجل $|z-a|>r$.

أما من أجل: $|z-a|=r$ فقد تكون المتسلسلة عندئذ متقاربة وقد تكون متباعدة.

منطقة التقارب:

- نسمي المنطقة $|z-a|<r$ بمنطقة أو دائرة تقارب متسلسلة القوى.

ونسمي r نصف قطر التقارب.

- إذا كانت متسلسلة القوى متقاربة في كل نقطة من المستوي العقدي فإننا نقول أن نصف قطر التقارب في هذه الحالة هو: $r=\infty$
- إذا كانت متسلسلة القوى متقاربة في النقطة a فقط فإننا نقول أن نصف قطر التقارب في هذه الحالة هو: $r=0$
- يُعطى نصف قطر التقارب بالقانون: $r=\frac{1}{K}$ حيث:

$$K=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| \quad \text{أو} \quad K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{C_n}$$

/ /

تنويه:

إن مجموع متسلسلة القوى هو تابع تحليلي في دائرة التقارب. ونستطيع في دائرة تقارب متسلسلة القوى مكاملتها واشتقاقها حداً حداً.

المحاضرة التاسعة

الأربعاء 14/11/2012

تذكرة بمجموعة من التعاريف:

تعريف (1) [المنطقة]

إذا كانت D مجموعة مفتوحة ومترابطة فإننا عندئذ ندعوها «المنطقة».

تعريف (2) [المجموعة المترابطة]

هي مجموعة يمكن وصل أي نقطتين منها بخط منكسر واقع كلياً داخلها.

وبعبارة أخرى نقول: إن المجموعة المترابطة هي مجموعة لا يمكن تقسيمها إلى مجموعتين D_1، D_2 تحققان:

$$D_1 \neq \phi \,,\; D_2 \neq \phi \,,\; D_1 \cap D_2 = \phi \,,\; D_1 \cup D_2 = D$$

تعريف (3) [المجموعة المفتوحة]

نقول عن مجموعة D أنها مفتوحة إذا كانت كل نقاطها داخلية فيها أي إذا كانت D هي اجتماع لجميع جوارات نقاطها.

تعريف (4) [النقطة الداخلية]

نقول عن النقطة a أنها داخلية في المجموعة D إذا كانت تنتمي إلى المجموعة مع جوار لها.

مبرهنة كوشي أدمار:

يعطى نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$ بإحدى الصيغ التالية:

① $\ell = \lim_{n \to \infty} |\sqrt[n]{c_n}|$, $r = \frac{1}{\ell}$

② $\ell = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$, $r = \frac{1}{\ell}$

③ $\ell = \overline{\lim_{n \to \infty}} |\sqrt[n]{c_n}|$, $r = \frac{1}{\ell}$

④ $\ell = \overline{\lim_{n \to \infty}} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$, $r = \frac{1}{\ell}$

إن الرمز هنا $\overline{\lim}$ نعني منه النهاية العليا.

تمارين (١)

ادرس تقارب كل من المتسلسلات التالية ثم احسب نصف قطر تقاربها:

① $\sum_{n=0}^{\infty} n^n (z-1)^n$

الحل:

هي متسلسلة قوى ساحة تقاربها أقراص دائرية مراكزها هي مراكز تلك المتسلسلات (1،0)

$$C_n = n^n$$

$$\ell = \lim_{n \to \infty} |\sqrt[n]{n^n}| = \lim_{n \to \infty} n = \infty .$$

المتسلسلة متباعدة.

نصف قطر تقاربها: $r = \frac{1}{\infty} = 0$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} (z-1)^n$

الحل:

هي متسلسلة قوى ساحة تقاربها أقراص دائرية مراكزها هي مركز هذه المتسلسلة (1،0).

$$C_n = \frac{1}{n^n}$$

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

المتسلسلة متقاربة في كامل المستوي العقدي.

نصف قطر التقارب: $r = \frac{1}{0} = \infty$

③ $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+i)^n$$

الحل:

$$C_n = (-1)^n$$

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|-1|^n} = |-1| = +1 \Rightarrow r = 1$$

المتسلسلة متقاربة مطلقاً في القرص:

$$|z+i| < 1$$

④ $$\sum_{n=0}^{\infty} [4+(-1)^n]^n (z+2)^n$$

الحل:

$$C_n = [4+(-1)^n]^n$$

نلاحظ أنه عندما: n فردي عندئذٍ:

$$C_n = (4-1)^n = 3^n$$

وعندما n زوجي عندئذٍ:

$$C_n = (4+1)^n = 5^n$$

في حالةٍ كهذه لا يمكن حساب النهاية العادية ولهذا نلجأ إلى حساب النهاية العليا:

$$\ell = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{5^n} = 5 \Rightarrow r = \frac{1}{5}$$

المتسلسلة متقاربة مطلقاً في القرص:

$$|z+2| < \frac{1}{5}$$

/ /

تمارين (2)

ادرس تقارب كل من المتسلسلات التالية:

$\boxed{1}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$

الحل:

نستخدم اختبار المقارنة:

لدينا: $b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متسلسلة متقاربة

ولنوجد:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{\frac{e^{in}}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n^2}{e^{in}} = 1$$

المتسلسلتان من نوع واحد إذاً المفروضة متقاربة.

$\boxed{2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$

الحل:

$$C_n = \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$$

ونلاحظ أن:

$$e^{i\frac{\pi}{n}} = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}}{n} = \underbrace{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}}_{X_n} + i\underbrace{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}}_{y_n}$$

إن المتسلسلة: $X_n = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}$ متباعدة في التحليل الحقيقي

بينما المتسلسلة: $y_n = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}$ متقاربة في التحليل الحقيقي

إذاً المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

هي متسلسلة متباعدة.

/ /

تمارين (3):

ادرس تقارب كل من المتسلسلات التالية ثم أوجد نصف قطر تقاربها.

① $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n!}$$

الحل:

نطبق معيار دالامبير:

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!\,.\,(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{2n!}{n!\,.\,n!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2}\right| = \frac{1}{4} < 1$$

المتسلسلة متقاربة، نصف قطر تقاربها:

$$r = \frac{1}{l} = 4$$

② $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

الحل:

نطبق معيار دالامبير:

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)(-1)^n \cdot 3^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{(-1)^n \cdot 3^{2n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1) \cdot 3^{2n+1} \cdot 3^2}{(2n+3)(2n+2) \cdot 3^{2n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{-3^2}{(2n+3)(2n+2)}\right|$$

$$= (x^2+y^2)(0) = 0 < 1$$

المتسلسلة متقاربة، نصف قطر تقاربها:

$$r = \frac{1}{l} = \infty$$

تمرين (4):

هل المتسلسلة التالية متقاربة إطلاقاً؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3}+i)^n}{5^{\frac{n}{2}}}$$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(\sqrt{3}+i)^n}{5^{\frac{n}{2}}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(\sqrt{3}+i)^n}{(\sqrt{5})^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{5}} \right)^n \right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left| \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{i}{\sqrt{5}} \right| \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^n$$

حيث:

$$\left| \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{i}{\sqrt{5}} \right| = \sqrt{\frac{3}{5} + \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

نلاحظ أن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^n$$

هي متسلسلة هندسية أساسها أصغر من الواحد: $\frac{2}{\sqrt{5}} < 1$

فهي متقاربة. وبالتالي المتسلسلة المفروضة متقاربة

إطلاقاً مجموعها يساوي: $\left(\frac{1}{1-\frac{2}{\sqrt{5}}} \right)$ ويساوي $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$

تمرين (5):

برهن أن تقارب المتسلسلات التالية هو تقارب منتظم:

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n|z|}{n^2} \quad \forall z$$

الحل:

بالاعتماد على اختبار فايرشتراس في التقارب المنتظم نجد أن:

$$\left| \frac{\cos n|z|}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} = M_n$$

حيث $\sum \frac{1}{n^2}$ متسلسلة متقاربة إذاً المتسلسلة

المفروضة متقاربة تقارب منتظم.

/ /

$\boxed{2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot z^n$ ؛ $|z| \leq 4$

الحل :

نستفيد من كون : $|z| \leq 4$ عندئذ :

$$(|z|)^n \leq 4^n$$

$$2^n \cdot |z|^n \leq 2^n \cdot 4^n$$

$$\frac{2^n \cdot |z|^n}{n!} \leq \frac{8^n}{n!} = M_n$$

ندرس تقارب M_n حسب دالامبير :

$$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{M_{n+1}}{M_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{8 \cdot \cancel{8^n}}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{8^n}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{8}{n+1} = 0 < 1$$

إذاً $\sum M_n$ متقاربة وبالتالي حسب اختبار فايرشتراس تكون المتسلسلة المفروضة متقاربة تقارب منتظم.

تمرين (6) :

أوجد نصف قطر تقارب المتسلسلة التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (z+1)^n}{n!}$$

الحل :

نلاحظ أن : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \cdot (z+1)^n$ هي متسلسلة قوى مركزها $(-1,0)$ ساحة تقاربها هي أقراص دائرية مراكزها هي مركز متسلسلة القوى. ولنوجد نصف قطرها :

$$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\cancel{(n+1)}(n+1)^n}{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n} \right|$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)^n}{(n)^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

إذاً نصف قطر التقارب : $r = \frac{1}{e}$

/ /

تمرين (7):

أوجد تمثيلا بمتسلسلة قوى للدالة المذكورة في كل مما يلي:

1. $$f(z)=\frac{1}{1+z^2}$$

الحل:

بالاستفادة من المتسلسلة الهندسية:

نعلم أن $\frac{1}{1-t}=\sum_{n=1}^{\infty} t^n$ حيث $|t|<1$

ولنفرض: $t=-z^2$ عندئذ:

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{1-t}$$

$$\Longrightarrow f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-z^2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot z^{2n}$$

والشرط هو: $|z^2|<1$ لتكون المتسلسلة متقاربة.

2. $$f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$$

الحل:

نلاحظ أن التابع: $f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$ هو مشتق للتابع: $F(z)$

$$F(z)=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$F(z)=1+z+z^2+z^3+\dots+z^n+\dots$$

$$F'(z)=f(z)=0+1+2z+3z^2+\dots+nz^{n-1}+\dots$$

وبالتالي نجد:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} \quad ; \quad |z|<1$$

جداء المتسلسلات:

ليكن لدينا المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ حيث:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+\dots+a_n+\dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=b_0+b_1+b_2+b_3+b_4+\dots+b_n+\dots$$

فإذا أخذنا الجداء: $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$

فإننا نحصل على:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

$$= (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots) \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots)$$

$$= a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_0 b_2 + a_0 b_3 + \dots + a_0 b_n + \dots$$

$$+ a_1 b_0 + a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + \dots + a_1 b_n + \dots$$

$$+ a_2 b_0 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 + \dots + a_2 b_n + \dots$$

$$\vdots$$

$$+ a_n b_0 + a_n b_1 + a_n b_2 + a_n b_3 + \dots + a_n b_n + \dots$$

فنجد أن:

$$P_0 = a_0 b_0 \; , \; P_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \; , \; P_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$$\dots\dots \; P_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

وبهذا نحصل على المتسلسلة:

$$P_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

وهذه المتسلسلة الناتجة ندعوها متسلسلة الجداء أو متسلسلة كوشي.

تمرين:

عين متسلسلة الجداء للمتسلسلتين التاليتين:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} \; , \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$$

الحل:

نشكل متسلسلة كوشي:

$$P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta^k}{k!} \cdot \frac{\alpha^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$P_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \beta^k \alpha^{n-k}$$

نضرب ونقسم على $n!$:

$$P_n = \frac{1}{n!} \sum_{K=1}^{n} \frac{n!}{K!\,(n-K)!} \cdot \beta^K \cdot \alpha^{n-K}$$

ولكن: $\frac{n!}{K!\,(n-K)!}$ ماهي إلا التوافيق: $C(n,K)$ إذاً:

$$P_n = \frac{1}{n!} \sum_{K=1}^{n} C(n,K) \cdot \beta^K \cdot \alpha^{n-K} = \frac{1}{n!} \underbrace{(\alpha+\beta)^n}_{\text{ثنائي الحد الذي نيوتن}}$$

ثنائي الحد الذي نيوتن.

المحاضرة العاشرة — الإثنين 19 / 11 / 2012

مبرهنة:

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة إلى S.

وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة إلى S'.

وكانت متسلسلة الجداء: $P_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ متقاربة إلى σ عندئذٍ:

$$\sigma = S \cdot S'$$

مبرهنة ميرتن:

لتكن لدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة بالإطلاق عندئذٍ تكون متسلسلة الجداء لهما متقاربة ومجموعها يساوي جداء مجموعي المتسلسلتين المفروضتين.

ملاحظة:

إذا أخذنا متسلسلة الجداء لمتسلسلتين متقاربتين فليس من الضروري أن تكون متقاربة.

مثال:

لتكن لدينا المتسلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ نلاحظ أن هذه المتسلسلة: ① متناوبة.

② نهاية حدها العام تساوي الصفر عندما $n \to \infty$

/ /

$$0 \xleftarrow[\infty \leftarrow n]{} \frac{-1}{\sqrt{n+1}} < \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\downarrow$$
$$0$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow |a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \qquad \boxed{3}$$

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \Rightarrow |a_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

نلاحظ أن: $|a_n| > |a_{n+1}|$

إذاً المتسلسلة متناقصة بالقيم المطلقة.

تحققت شروط ليبتز الثلاث فالمتسلسلة متقاربة.

ولنأخذ الجداء: $P_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot a_{n-k}$ وهو جداء متسلسلتين متقاربتين

$$P_n = \sum_{K=1}^{n} a_K \cdot a_{n-K} = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{(-1)^K}{\sqrt{K+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-K}}{\sqrt{n-K+1}}$$

$$P_n = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(K+1)(n-K+1)}}$$

نلاحظ أن:

$$(K+1)(n-K+1) = Kn - K^2 + K + n - K + 1$$
$$= nK - K^2 + n + 1$$
$$= \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \underbrace{\left(\frac{n}{2} - K\right)^2}_{\text{طرحنا مقدار موجب}} \leq \left(\frac{n}{2}+1\right)^2$$

إذاً: $(K+1)(n-K+1) \leq \left(\frac{n}{2}+1\right)^2$ بجذر الطرفين

$\sqrt{(K+1)(n-K+1)} \leq \frac{n}{2} + 1 = \frac{n+2}{2}$ نأخذ المقلوب

$$\frac{1}{\sqrt{(K+1)(n-K+1)}} \geq \frac{2}{n+2}$$

الآن $|P_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(K+1)(n-K+1)}}$ أي نجمع من $0 \to \infty$ إذاً نجمع $(n+1)$ حداً

بأخذ مجموع طرفي المتراجحة لـ $(n+1)$ حداً نجد:

$$|P_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(K+1)(n-K+1)}} \geq (n+1) \cdot \left(\frac{2}{n+2}\right)$$

$$|P_n| \geq \frac{2n+2}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$$

الحد العام لا يسعى إلى الصفر عندما $n \to \infty$ إذاً متسلسلة الجداء متباعدة.

تمرين (1):

ادرس تقارب المتسلسلة التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot (z-i)^n$$

الحل:

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|2^n \cdot (z-i)^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(2\cdot(z-i))|^n} = 2\cdot|z-i|$$

$$= 2\cdot\sqrt{x^2+(y-i)^2}$$

ونميز الحالتين التاليتين:

$\boxed{1}$ المتسلسلة متقاربة عندما: $C<1$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+(y-i)^2}<1$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y-i)^2<\frac{1}{4}$$

$\boxed{2}$ المتسلسلة متباعدة عندما: $C>1$

$$\Leftrightarrow x^2+(y-i)^2>\frac{1}{4}$$

إذاً منطقة التقارب هي داخل الدائرة التي مركزها $(0,i)$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$

تمرين (2):

عيّن منطقة تقارب المتسلسلة التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n}$$

الحل:

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{z^{2n}}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{z^2}{2}\right)^n\right|} = \left|\frac{z^2}{2}\right| = \frac{1}{2}\cdot|z^2|$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

ونميز: $\boxed{1}$ المتسلسلة متباعدة عندما: $\frac{1}{2}(x^2+y^2)>1 \Leftrightarrow x^2+y^2>2$

$\boxed{2}$ المتسلسلة متقاربة عندما: $\frac{1}{2}(x^2+y^2)<1 \Leftrightarrow x^2+y^2<2$

إذاً منطقة التقارب هي داخل الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$

/ /

تمرين (3):

لتكن لدينا:

$$U_n = 1 + P\cos\alpha + P^2\cos 2\alpha + P^3\cos 3\alpha + \dots + P^n\cos n\alpha$$

حيث: $n = 0, 1, 2, \dots$ ، $0 < P < 1$

أحسب: $\lim_{n \to \infty} U_n$

الحل:

لنفرض الدالة التالية:

$$V_n = P\sin\alpha + P^2\sin 2\alpha + P^3\sin 3\alpha + \dots + P^n\sin n\alpha$$

عندئذ يكون لدينا:

$$Z_n = U_n + i V_n$$

$$Z_n = (1 + P\cos\alpha + P^2\cos 2\alpha + \dots + P^n\cos n\alpha) + i(P\sin\alpha + P^2\sin 2\alpha + \dots + P^n\sin n\alpha)$$

$$Z_n = 1 + \underline{P\cos\alpha} + \underline{\underline{P^2\cos 2\alpha}} + \dots + P^n\cos n\alpha + iP\sin\alpha + iP^2\sin 2\alpha + \dots + iP^n\sin n\alpha$$

بالإصلاح نحصل على:

$$Z_n = 1 + P(\cos\alpha + i\sin\alpha) + P^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + \dots + P^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

ونفرض لدينا العدد العقدي t حيث:

$$t = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

عندئذ نجد أن:

$$\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = t^2$$

وذلك حسب قانون دوموافر

وبشكل مماثل: $\cos n\alpha + i\sin n\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = t^n$ بالتعويض نجد:

$$Z_n = 1 + Pt + P^2t^2 + \dots + P^nt^n = 1 + Pt + (Pt)^2 + \dots + (Pt)^n$$

وهي متسلسلة هندسية أساسها Pt يحقق أن: $|Pt| < 1$

وذلك لأن: $0 \leq |\cos\alpha| \leq 1$

$$0 \leq |i\sin\alpha| \leq i$$

$|t| = |\cos\alpha + i\sin\alpha| \leq 1 + i < 1$ وفرضاً $P < 1$

$$z_n = \sum_{n=0}^{\infty} (Pt)^n = \frac{1}{1-Pt}$$ اذاً ,

بالتعويض:

$$z_n = \frac{1}{1-p(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \frac{1}{(1-P\cos\alpha) - i\,P\sin\alpha}$$

ضربنا بالمرافق:

$$z_n = \frac{(1-P\cos\alpha) + iP\sin\alpha}{(1-P\cos\alpha - iP\sin\alpha)(1-P\cos\alpha + iP\sin\alpha)}$$

$$z_n = \frac{1-P\cos\alpha + iP\sin\alpha}{(1-P\cos\alpha)^2 + P^2\sin^2\alpha} = \frac{1-P\cos\alpha + iP\sin\alpha}{1-2P\cos\alpha + \underbrace{P^2\cos^2\alpha + P^2\sin^2\alpha}}$$

$$z_n = \frac{1-P\cos\alpha + iP\sin\alpha}{1-2P\cos\alpha + P^2}$$

$$z_n = \underbrace{\frac{1-P\cos\alpha}{1-2P\cos\alpha + P^2}}_{U_n} + i\underbrace{\frac{P\sin\alpha}{1-2P\cos\alpha + P^2}}_{V_n}$$

وبهذا نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{1-P\cos\alpha}{1-2P\cos\alpha + P^2}$$

تمرين (4):

ادرس تقارب المتسلسلة التالية: $\sum_{n=0}^{\infty} (1-i)^n$

الحل:

فطبق معيار الجذر النوني:

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(1-i)^n|} = |1-i| = \sqrt{2} > 1$$

اذاً المتسلسلة متباعدة.

تمرين (5):

أوجد مجموع المتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$$

/ /

الحل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$$

وهي متسلسلة هندسية أساسها ,

$$\left|\frac{1+i}{2}\right| < 1$$

إذاً هي متقاربة ومجموعها:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1+i}{2}} = \frac{1}{\frac{2-1-i}{2}} = \frac{2}{1-i}$$

نضرب بالمرافق:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i$$

تمرين (6):

أدرس تقارب المتسلسلة, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(1+i)^n}$

الحل:

حسب اختبار دالامبير:

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)\cancel{n!}}{(1+i)\cancel{(1+i)^n}} \cdot \frac{\cancel{(1+i)^n}}{\cancel{n!}}\right| = \infty$$

المتسلسلة متباعدة.

تمرين (7):

أوجد تمثيلاً على شكل متسلسلة قوى للدالة :

تمرين (8):

أوجد منطقة تقارب المتسلسلة التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(z+1)^n}$$

الحل:

حسب اختبار دالامبير:

$$D = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n(z+1)^n}{(n+1)(z+1)(z+1)^n} \right| = \frac{1}{|z+1|} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$D = \frac{1}{|z+1|} = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}$$

تكون المتسلسلة متقاربة عندما $D < 1$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} < 1 \Longleftrightarrow (x+1)^2+y^2 > 1$$

أي أن منطقة تقارب المتسلسلة هي خارج الدائرة التي مركزها $(-1,0)$ ونصف قطرها يساوي (1).

وتتباعد المتسلسلة داخل الدائرة التي مركزها $(-1,0)$ ونصف قطرها يساوي (1).

ونحصل على حالة فشل معيار عندما: $|z+1| = 1 = (x+1)^2+y^2$

أي على محيط الدائرة التي مركزها $(-1,0)$ ونصف قطرها يساوي (1)

ولندرس هذه الحالة: $|z+1| = 1 = |e^{i\theta}|$

$$\Longleftrightarrow z+1 = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$(z+1)^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(z+1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos n\theta - i\sin n\theta}{1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} - i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$$

وهما متسلسلتان حقيقيتان متقاربتان إذاً المفروضة متقاربة عندما: $D = \frac{1}{|z+1|} = 1$.

/ /

تمرين (9):

أوجد منطقة تقارب المتسلسلة التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{(z-3i)^{2n}}$$

الحل:

نطبق اختبار دالامبير:

$$D = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)(2)(2^n)}{(z-3i)^{2n}\cdot(z-3i)^2} \cdot \frac{(z-3i)^{2n}}{n\cdot 2^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2n+2}{n(z-3i)^2}\right| = \frac{2}{|z-3i|^2} = \frac{2}{|x+i(y-3)|^2}$$

تكون المتسلسلة متقاربة عندما $D<1$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x^2+(y-3)^2} < 1 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2 > 2$$

أي ان منطقة تقارب المتسلسلة هي خارج الدائرة التي مركزها $(0,3)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

وتكون المتسلسلة متباعدة داخل محيط الدائرة التي مركزها $(0,3)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$ أي عندما:

$$D>1 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2 < 2$$

أما في حالة $D=1 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=2$ نلجأ الى الدراسة التالية:

$$D=1 \Leftrightarrow \frac{2}{|z-3i|^2}=1$$

$$\Leftrightarrow |z-3i| = \sqrt{2} = \sqrt{2}\cdot e^{i\theta}$$

بالتعويض في المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 2^n}{(z-3i)^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 2^n}{(\sqrt{2}e^{i\theta})^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot \cancel{2^n}}{\cancel{2^n}\cdot e^{i2n\theta}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot e^{-i(2n\theta)} = \sum_{n=1}^{\infty} n\left[\cos(2n\theta) - i\sin(2n\theta)\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\cos(2n\theta) - i\sum_{n=1}^{\infty} \sin(2n\theta)$$

/ /

المحاضرة (11) الأربعاء 21 / 11 / 2012

تتمة مسائل وتمارين:

أوجد منطقة تقارب المتسلسلة التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n \cdot (z-1)^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}$$

ثم أوجد مجموعها.

الحل:

لنأخذ المتسلسلة الأولى:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n \cdot (z-1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2^{n+1} \cdot (z-1)^{n+1}}$$

"ضربنا البسط والمقام بالعدد 2"

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \left(2(z-1)\right)^{-n-1}$$

ونلاحظ أن:

$$\left(\left(2(z-1)\right)^{-n}\right)' = -2n\left(2(z-1)\right)^{-n-1}$$

إذاً:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} (2z-2)^{-n} = -\frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2(z-1))^n}$$

إذاً المتسلسلة الأولى ما هي إلا معكوس مشتق متسلسلة هندسية أساسها $\left[\frac{1}{2(z-1)}\right]$.

وتكون هذه المتسلسلة متقاربة إذا كان: $\left|\frac{1}{2(z-1)}\right| < 1$

$$\frac{1}{|z-1|} < 2 \iff |z-1| > \frac{1}{2}$$

$$\iff \sqrt{(x-1)^2+y^2} > \frac{1}{2} \iff (x-1)^2+y^2 > \frac{1}{4}$$

إذاً منطقة تقارب المتسلسلة الأولى خارج الدائرة التي مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$.

ولنوجد المجموع:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2z-2)^n}$$

$$= -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2z-2}}\right) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\frac{2z-2-1}{2z-2}}\right)$$

/ /

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{d}{dz}\left(\frac{2z-2}{2z-3}\right) = -\left[\frac{2(2z-3)-2(2z-2)}{(2z-3)^2}\right]$$

$$= -\left[\frac{\cancel{4z}-6-\cancel{4z}+4}{(2z-3)^2}\right] = -\left[\frac{-2}{(2z-3)^2}\right]$$

إذاً :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n (z-1)^{n+1}} = \frac{2}{(2z-3)^2}$$

أما بالنسبة للمتسلسلة الثانية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot(z-1)^{n-1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3}\cdot\frac{(z-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3}\cdot\left[\frac{z-1}{3}\right]^{n-1}$$

ونلاحظ أن :

$$\left(\left[\frac{z-1}{3}\right]^n\right)' = \frac{n}{3}\left(\frac{z-1}{3}\right)^{n-1}$$

إذاً :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-1}{3}\right)^n$$

وهي متسلسلة هندسية أساسها $\frac{z-1}{3}$ وتكون متقاربة عندما :

$$\left|\frac{z-1}{3}\right| < 1$$

$$\Leftrightarrow |z-1| < 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2} < 3$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 < 9$$

أي أن منطقة تقارب المتسلسلة الثانية هي داخل محيط الدائرة التي مركزها (1 ، 0) ونصف قطرها 3 .

أما بالنسبة للمجموع :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-1}{3}\right)^n = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-\frac{z-1}{3}}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\frac{3-z+1}{3}}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{d}{dz}\left(\frac{3}{-z+4}\right) = \frac{3}{(4-z)^2}$$

إذاً المتسلسلة المعروضة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n\cdot(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}$$

منطقة تقاربها تقع بين محيطي الدائرتين اللتين مركز كل منهما (1,0)
ونصف قطر الأولى $\frac{1}{2}$ ونصف قطر الثانية 3 أي منطقة التقارب تحقق

$$\frac{1}{2} < |z-1| < 3$$

أما بالنسبة لمجموع المتسلسلة المفروضة فهو:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{2}{(2z-3)^2} + \frac{3}{(4-z)^2}$$

متسلسلات تايلور وماكلوران:

مبرهنة تايلور:

إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً داخل الدائرة C التي مركزها a ونصف قطرها r أي في المنطقة: $|z-a|<r$. عندئذٍ يمكن نشر التابع $f(z)$ في هذه المنطقة بالشكل:

$$\bigstar \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (z-a)^n$$

حيث: $C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

وبالعكس إذا استطعنا كتابة تابع $f(z)$ بالشكل: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (z-a)^n$
عندئذٍ نقول أن التابع $f(z)$ تحليلي في المنطقة $|z-a|<r$
نسمي المتسلسلة $\bigstar$ بمتسلسلة تايلور للتابع $f(z)$ حول النقطة (a).

متسلسلة ماكلوران:

نسمي المتسلسلة $\bigstar$ حول النقطة $a=0$ بمتسلسلة ماكلوران للتابع $f(z)$ ونكتبها:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (z)^n$$

نتيجة: إن كل متسلسلة تكون نصف قطر دائرة تقاربها غير معدوم $(a \neq 0)$ هي متسلسلة تايلور للتابع الممثل بتلك المتسلسلة.

/ /

تمارين:

1 أوجد منشور ماكلوران للتابع:

$$f(z) = e^z$$

الحل:

$$f(z) = e^z \quad , \quad f(0) = 1$$
$$f'(z) = e^z \quad , \quad f'(0) = 1$$
$$f''(z) = e^z \quad , \quad f''(0) = 1$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(z) = e^z \quad , \quad f^{(n)}(0) = 1$$
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^n$$

2 أوجد منشور ماكلوران للتابع:

$$f(z) = \sin z$$

الحل:

$$f(z) = \sin z \quad , \quad f(0) = 0$$
$$f'(z) = \cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad f'(0) = 1$$
$$f''(z) = -\sin z = \sin\left(z + \frac{2\pi}{2}\right) \quad , \quad f''(0) = 0$$
$$f'''(z) = -\cos z = \sin\left(z + \frac{3\pi}{2}\right) \quad , \quad f'''(0) = -1$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(z) = \sin\left(z + \frac{n\pi}{2}\right) \quad , \quad f$$

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \frac{f'''(0)}{3!} z^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^n + \dots$$

الحدود الزوجية معدومة:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

/ /

3 أوجد نشر ماكلوران للتابع:

$$f(z)=\cos z$$

الحل:

$$f(z)=\cos z \quad , \quad f(0)=1$$
$$f'(z)=-\sin z=\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad f'(0)=0$$
$$f''(z)=-\cos z=\cos\left(z+\frac{2\pi}{2}\right) \quad , \quad f''(0)=-1$$
$$f'''(z)=\sin z=\cos\left(z+\frac{3\pi}{2}\right) \quad , \quad f'''(0)=0$$
$$f^{(4)}(z)=\cos z=\cos\left(z+\frac{4\pi}{2}\right) \quad , \quad f^{(4)}(0)=1$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(z)=\cos\left(z+n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(z)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot z+\frac{f''(0)}{2!}\cdot z^2+\frac{f'''(0)}{3!}\cdot z^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot z^n+\cdots$$

نلاحظ أن الحدود الفردية معدومة.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

4 أوجد نشر ماكلوران للتابع:

$$f(z)=\ln(1+z)$$

الحل:

$$f(z)=\ln(1+z) \quad , \quad f(0)=0$$
$$f'(z)=\frac{1}{1+z}=(1+z)^{-1} \quad , \quad f'(0)=1$$
$$f''(z)=(-1)(1+z)^{-2} \quad , \quad f''(0)=-1$$
$$f'''(z)=2(1+z)^{-3} \quad , \quad f'''(0)=2$$
$$f^{(4)}(z)=(-1)(6)(1+z)^{-4} \quad , \quad f^{(4)}(0)=(-1)(6)$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(z)=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+z)^{-n} \quad , \quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cancel{(n-1)!}}{(n)\cancel{(n-1)!}}\cdot z^n$$

$$\Longrightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot z^n$$

$\boxed{5}$ أوجد نشر تايلور عند النقطة $a=1$ للتابع:

$$f(z)=\ln(z)$$

الحل:

$f(z)=\ln(z)$, $f(1)=0$

$f'(z)=\frac{1}{z}=z^{-1}$, $f'(1)=1$

$f''(z)=(-1)\,z^{-2}$, $f''(1)=-1$

$f'''(z)=2\,.\,z^{-3}$, $f'''(1)=2$

$f^{(4)}(z)=(-1)(6)(z)^{-4}$, $f^{(4)}(1)=(-1)(6)$

$\vdots$

$f^{(n)}(z)=(-1)^{n-1}(n-1)!\,(z)^{-n}$, $f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}\cdot(z-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot\cancel{(n-1)!}}{(n)\cancel{(n-1)!}}\cdot(z-1)^n$$

$$\Longrightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot(z-1)^n$$

$\boxed{6}$ أوجد نشر تايلور عند النقطة $a=-i$ للتابع:

$$f(z)=\frac{1}{1-z}$$

الحل:

$f(z)=\frac{1}{1-z}=(1-z)^{-1}$, $f(-i)=\frac{1}{1+i}$

$f'(z)=(+1)(1-z)^{-2}$, $f'(-i)=\frac{1}{(1+i)^2}$

$f''(z)=(-1)(2)(1-z)^{-3}$, $f''(-i)=\frac{(-1)(2)}{(1+i)^3}$

$f^{(3)}(z) = 6(1-z)^{-4}$, $f^{(3)}(-i) = \frac{6}{(1+i)^4}$

$f^{(n)}(z) = (-1)^{n+1}(n!)\cdot(1-z)^{-(n+1)}$, $f^{(n)}(-i) = \frac{(-1)^{n+1}(n!)}{(1+i)^{n+1}}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-i)}{n!}(z+i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot \cancel{n!}}{(1+i)^{n+1}\cdot \cancel{n!}}(z+i)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{1+i}\right)^{n+1}\cdot(z+i)^n$$

$\boxed{7}$ أوجد نشر تايلور للتابع:

$f(z) = \frac{1}{(z+2)^2}$ عند النقطة $a=-1$

الحل:

$f(z) = \frac{1}{(z+2)^2} = (z+2)^{-2}$, $f(-1) = 1$

$f'(z) = (-1)(2)(z+2)^{-3}$, $f'(-1) = (-1)(2)$

$f''(z) = 6(z+2)^{-4}$, $f''(-1) = 6$

$f'''(z) = (-1)(24)(z+2)^{-5}$, $f'''(-1) = (-1)(24)$

$f^{(n)}(z) = (-1)^n(n+1)!\,(z+2)^{-(n+2)}$, $f^{(n)}(-1) = (-1)^n\cdot(n+1)!$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!}\cdot(z+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)(\cancel{n!})}{\cancel{n!}}\cdot(z+1)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(n+1)(z+1)^n$$

$\boxed{8}$ أوجد نشر تايلور حول النقطة $a=2i$ للتابع:

$f(z) = \frac{1}{3-z}$

/ /

الحل :

$$f(z)=\frac{1}{3-z}=(3-z)^{-1} \quad , f(2i)=\frac{1}{3-2i}$$

$$f'(z)=(+1)(3-z)^{-2} \quad , f'(2i)=(3-2i)^{-2}$$

$$f''(z)=(+2)(3-z)^{-3} \quad , f''(2i)=2(3-2i)^{-3}$$

$$f'''(z)=(6)(3-z)^{-4} \quad , f'''(2i)=6(3-2i)^{-4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z)=n!\,(3-z)^{-(n+1)} \quad , f^{(n)}(2i)=\frac{n!}{(3-2i)^{n+1}}$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(2i)}{n!}(z-2i)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\,(3-2i)^{n+1}}\cdot(z-2i)^n$$

$$\Longrightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{(3-2i)^{n+1}}$$

$\boxed{9}$ أوجد منشور تايلور حول النقطة $a=1$ للتابع :

$$f(z)=\frac{z^2+2}{z^2-4}$$

الحل :

نغير شكل التابع بقسمة البسط على المقام

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline z^2-4 & z^2+2 \\ & -(z^2-4) \\ \hline & +6 \end{array}$$

$$f(z)=1+\frac{6}{z^2-4}=1+\frac{6}{(z+2)(z-2)}$$

$$\frac{6}{(z+2)(z-2)}=\frac{A}{z+2}+\frac{B}{z-2}$$

نوجد A ، B

$$\frac{6}{(z+2)(z-2)}=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{z+2}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{z-2}\right)$$

إذاً :

$$f(z)=1+\frac{3}{2}\left[\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+2}\right]$$

النشر بجوار الواحد إذاً نفرض ، $z-1=t$

$$\Rightarrow z=t+1$$

$$f(z) = 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t-1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t+3}$$
$$= 1 - \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{1-t}\right) - \frac{\cancel{3}}{2}\cdot\left(\frac{1}{\cancel{3}(1+\frac{t}{3})}\right)$$
$$= 1 - \frac{3}{2}\left(\underbrace{\frac{1}{1-t}}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(\underbrace{\frac{1}{1-(-\frac{t}{3})}}\right)$$

فلاحظ أن:

★ $\frac{1}{1-t}$ هو مجموع متسلسلة هندسية أساسها t بشرط:
$|t|<1 \iff |z-1|<1$ أي منطقة التقارب هي الدائرة التي مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها (1).

★ $\frac{1}{1-(-\frac{t}{3})}$ هو مجموع متسلسلة هندسية أساسها $-\frac{t}{3}$ بشرط
$\left|-\frac{t}{3}\right|<1 \iff \left|\frac{t}{3}\right|<1 \iff |z-1|<3$ أي منطقة التقارب هي الدائرة التي مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها (3).

وبهذا يكون نشر التابع المطلوب هو:
$$f(z) = z - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z+1}{3}\right)^n$$
ويكون التابع $f(z)$ تحليلياً في الدائرة التي مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها (1)

$\boxed{10}$ أوجد منشور ماكلوران للدالة:
$$f(z) = \sqrt{\cos z}$$

الحل:
$$f(z) = \sqrt{\cos z} = (\cos z)^{\frac{1}{2}} = (1-(1-\cos z))^{\frac{1}{2}}$$
نفرض: $1-\cos z = w$ فنحصل على:
$f(z) = (1-w)^{\frac{1}{2}}$ منشور ثنائي الحدين

$f(0) = 1$

$f'(z) = (-1)(\frac{1}{2})(1-w)^{-\frac{1}{2}}$, $f'(0) = -\frac{1}{2}$

$f''(z) = \frac{1}{4}(1-w)^{-\frac{3}{2}}$, $f''(0) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!}$

$f'''(z) = \frac{3}{8}(1-w)^{-\frac{5}{2}}$, $f'''(0) = \frac{3}{8} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$

$f^{(4)}(z) = \frac{15}{16}(1-w)^{-\frac{7}{2}}$, $f^{(4)}(0) = \frac{15}{16} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot5}{8}$

$$f(z) = 1 - \frac{1}{2}w + \frac{1}{8}w^2 + \frac{3}{8 \cdot 3!} \cdot w^3 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(1-\cos z) + \frac{1}{8}(1-\cos z)^2 + \frac{3}{8 \cdot 3!}(1-\cos z)^3 + \dots$$

$$\Rightarrow f(z) = 1 - \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{2n}\right]$$

المحاضرة (12) : الإثنين 25 / 11 / 2012

التكاملات العقدية

الطرق والمنحنيات:

الطريق هو تابع مركب لمتحول حقيقي $\gamma(t)$ مستمر من أجل كل نقطة وهذا يكافئ بلغة ε :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; ; \; |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \varepsilon$$

وذلك : $\forall t \in [\alpha, \beta]$

- نسمي النقطتين : $a = \gamma(\alpha)$ ، $b = \gamma(\beta)$ بنهايتي أو طرفي الطريق
- إذا كان : $\beta < \alpha$ عندئذ a هي بداية الطريق ، و b هي نهاية الطريق .
- نقول عن الطريق أنه مغلق اذا تحقق :

$$a = \gamma(\alpha) = \gamma(\beta) = b$$

- نقول عن الطريق : $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{C}$

أنه يقع في المجموعة M اذا كان : $\gamma(t) \in M$ وذلك : $\forall t \in [\alpha, \beta]$

/ /

الطريق البسيطة

تعريف:

نقول عن الطريق γ أنها بسيطة إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall\ t_1, t_2 \in [\alpha, \beta] \quad ; \quad t_1 \neq t_2$$
$$\Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$$

وبالإضافة إلى ذلك إذا كانت: $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ تكون γ مغلقة.

هندسياً:

نقول عن الطريق γ أنها بسيطة إذا لم تتقاطع مع نفسها في أي نقطة باستثناء حالة تطابق نقطة البداية مع نقطة النهاية وذلك يكافئ كون γ مغلقة.

الجدير بالذكر أن:

$$\gamma \ : \ z = z(t) = x(t) + i\,y(t) \qquad \forall\ t \in [\alpha, \beta]$$

ندعو هذه المعادلة: المعادلة الوسيطية للطريق γ. وبحذف الوسيط (t) من المعادلتين:

$$\begin{cases} x = x(t) = \mathcal{R}e\, z(t) \\ y = y(t) = \mathrm{Im}\, z(t) \end{cases}$$

نحصل على المعادلة الديكارتية للطريق γ في المستوي $\mathbb{C}$.

مثال:

صف هندسياً المعادلات التالية:

① $$z = z(t) = e^{it} \qquad ; \ t \in [0, \pi]$$

الحل:

نلاحظ أن $z(t)$ هو تابع مستمر على المجال المفروض $[0, \pi]$ وبالتالي هذا التابع يمثل طريقاً في المستوي المركب يمكن كتابته بالشكل:

$$z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$x = x(t) = \cos t \quad , \quad y = y(t) = \sin t$$

حذف الوسيط بالتربيع والجمع نحصل على :

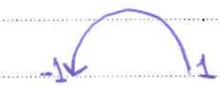
$$x^2 + y^2 = 1 \quad ، \quad t \in [0, \pi]$$

اذاً المعادلة الديكارتية للطريق لا في المستوي تمثل النصف العلوي لدائرة الوحدة موجهة بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة ،

استنتجنا التوجيه من خلال :

$$a = z(\alpha) = z(0) = e^{i0} = 1$$

$$b = z(\beta) = z(\pi) = e^{i\pi} = -1$$



ونلاحظ أن هذه الطريق غير مغلقة وبسيطة ومحدودة .

② $z = z(t) = e^{it} \quad ; \quad t \in [0, 2\pi]$

الحل :

$$z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$x = x(t) = \cos t \quad , \quad y = y(t) = \sin t$$

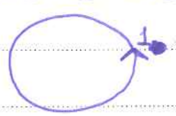
حذف الوسيط بالتربيع والجمع :

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$a = z(\alpha) = z(0) = e^{i0} = 1$$

$$b = z(\beta) = z(2\pi) = e^{i2\pi} = 0$$

المعادلة الديكارتية للطريق لا في المستوي المركب تمثل دائرة الوحدة موجهة بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة .



ونلاحظ أن هذه الطريق مغلقة وبسيطة ومحدودة .

③ $z = z(t) = \cos t \quad ; \quad t \in [2\pi, 3\pi]$

الحل :

$$z = z(t) = \cos t$$

$$x = x(t) = \cos t \quad , \quad y = y(t) = 0$$

$$a = z(\alpha) = z(2\pi) = \cos 2\pi = 1$$

$-1 \longleftarrow 1$ $$b = z(\beta) = z(3\pi) = \cos 3\pi = \cos(2\pi + \pi) = -1$$

ان الطريق هي القطعة المستقيمة الموجهة من $1 \longrightarrow -1$ وهي غير مغلقة وبسيطة ومحدودة.

(4) $z = z(t) = \cos t \quad ; \quad t \in [\pi, 4\pi]$

الحل:

$$z = z(t) = \cos t$$
$$x = x(t) = \cos t$$
$$y = y(t) = 0$$
$$a = z(\alpha) = z(\pi) = \cos \pi = -1$$
$$b = z(\beta) = z(4\pi) = \cos 4\pi = 1$$

ان الطريق γ هي القطعة المستقيمة الموجهة من $-1 \longrightarrow 1$ وهي غير مغلقة ومحدودة ولكنها غير بسيطة لأنها تتقاطع مع نفسها في جميع نقاطها فهي مكررة ثلاث مرات:

$$\gamma_1 = z_1(t) \quad ; \quad t \in [\pi, 2\pi]$$
$$\left.\begin{array}{l} a_1 = z_1(\alpha) = z_1(\pi) = \cos \pi = -1 \\ b_1 = z_1(\beta) = z_1(2\pi) = \cos 2\pi = 1 \end{array}\right\} \gamma_1 : -1 \longrightarrow +1$$

$$\gamma_2 = z_2(t) \quad ; \quad t \in [2\pi, 3\pi]$$
$$\left.\begin{array}{l} a_2 = z_2(\alpha) = z_2(2\pi) = \cos 2\pi = 1 \\ b_2 = z_2(\beta) = z_2(3\pi) = \cos 3\pi = -1 \end{array}\right\} \gamma_2 : -1 \longleftarrow +1$$

$$\gamma_3 = z_3(t) \quad ; \quad t \in [3\pi, 4\pi]$$
$$\left.\begin{array}{l} a_3 = z_3(\alpha) = z_3(3\pi) = \cos 3\pi = -1 \\ b_3 = z_3(\beta) = z_3(4\pi) = \cos 4\pi = 1 \end{array}\right\} \gamma_3 : -1 \longrightarrow +1$$

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

/ /

(5) $z = z(t) = e^{it} \quad ; \quad t \in [0, 3\pi]$

الحل:

$z = z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$

$x = x(t) = \cos t$

$y = y(t) = \sin t$

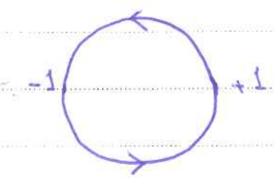
حذف الوسيط بالتربيع والجمع:

$x^2 + y^2 = 1$

$a = z(\alpha) = z(0) = e^{i0} = 1$

$b = z(\beta) = z(3\pi) = e^{i(3\pi)} = -1$

الطريق γ هي دائرة الوحدة موجهة بعكس اتجاه عقارب الساعة وهي مغلقة ومحدودة وغير بسيطة لأنها تتقاطع مع نفسها من النصف العلوي مرتين



$\gamma_1 : z_1(t) = e^{it} \quad ; \quad t \in [0, 2\pi]$

$\gamma_2 : z_2(t) = e^{it} \quad ; \quad t \in [2\pi, 3\pi]$

(6) $z = z(t) = \cos t \quad ; \quad t \in [-\pi, \frac{3\pi}{2}]$

الحل:

$z = z(t) = \cos t$

$x = x(t) = \cos t$

$y = y(t) = 0$

$a = z(\alpha) = \cos(-\pi) = \cos(\pi) = -1$

$b = z(\beta) = \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$

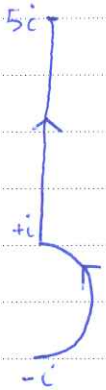
الطريق γ هو القطعة المستقيمة الموجهة من $-1 \rightarrow 0$ وهي غير مغلقة ومحدودة وبسيطة.

$$⑦\quad z = z(t) = \begin{cases} e^{it} & ; t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ (\frac{4t}{\pi} - 1)i & ; t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$$

الحل:

$$z = z(t) = \begin{cases} e^{it} = \cos t + i \sin t & ; t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ (\frac{4t}{\pi} - 1)i & ; t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$$

$$z = z(t) = \begin{cases} x(t) = \cos t \ , y(t) = \sin t \\ (\frac{4t}{\pi} - 1)i \end{cases}$$



$$\begin{cases} ① \ a = z(\alpha) = z(-\frac{\pi}{2}) = e^{i(-\frac{\pi}{2})} = -i \\ \quad b = z(\beta) = z(\frac{\pi}{2}) = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\ ② \ a = z(\alpha) = z(\frac{\pi}{2}) = (\frac{4\frac{\cancel{\pi}}{2}}{\cancel{\pi}} - 1)i = i \\ \quad b = z(\beta) = z(\frac{3\pi}{2}) = (\frac{4(\frac{3\cancel{\pi}}{2})}{\cancel{\pi}} - 1)i = 5i \end{cases}$$

بحذف الوسيط من معادلتي الفرع الأول نحصل على:

$$x^2 + y^2 = 1$$

ان الطريق γ هي النصف الأيمن من دائرة الوحدة موجهة بعكس اتجاه عقارب الساعة و القطعة المستقيمة الموجهة من $i \longrightarrow 5i$

ونلاحظ أن الطريق γ غير مغلقة و بسيطة ومحدودة.

صنف الطرق المتكافئة:

نقول عن الطريقين: $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \longrightarrow \mathbb{C}$

$\gamma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \longrightarrow \mathbb{C}$

أنهما طريقان متكافئان ونكتب: $(\gamma_1 \sim \gamma_2)$ أو $(\gamma_1 \equiv \gamma_2)$، إذا وجد تابع مستمر ومتزايد تماماً:

$$\tau = \tau(t) : [\alpha_1, \beta_1] \longrightarrow [\alpha_2, \beta_2] \quad ①$$

بحيث يكون: $\gamma_1(t) = \gamma_2(\tau(t))$ وذلك: $\forall t \in [\alpha_1, \beta_1]$

كما نقول في هذه الحالة أن الطريق γ_2 ناتج عن الطريق γ_2 بواسطة التحويل ①

وبسهولة يمكن التأكد من أن هذه العلاقة: $\gamma_1 \equiv \gamma_2$ تحقق جميع خواص علاقة التكافؤ (انعكاسية - تناظرية - متعدية).

الجدير بالذكر أن صف الطرق المتكافئة والذي نرمز له بالرمز $\{\gamma_K\}$ هو صف غير منتهي وهذه الطرق المتكافئة تمثل هندسياً بمنحني واحد أو بمجموعة نقطية واحدة، وبناءً على ذلك يمكن أن نعرّف المنحني كما يلي:

تعريف المنحني:

نعرّف المنحني في المنطقة $G \subset \mathbb{C}$ على أنه التابع المستمر:

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

حيث: $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

إذا كان المشتق لهذا التابع: $\gamma'(t)$ موجوداً من أجل جميع قيم $t \in [a,b]$ وكان: $\gamma'(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ مستمراً أيضاً عندئذٍ يكون γ منحنياً أملس.

المنحني الأملس:

المنحني الأملس هو المنحني الذي يكون من أجله التابع $\gamma(t)$ قابلاً للاشتقاق ومشتقه $\gamma'(t)$ مستمراً.

المنحني الأملس تقطيعياً:

نقول عن $\gamma(t)$ أنه منحني أملس تقطيعياً إذا وجدت تجزئة للمجال المغلق $[a,b]$ على الشكل: $[a=t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b]$

بحيث يكون γ قابلاً للاشتقاق باستمرار على كل مجال جزئي $[t_{j-1}, t_j]$

حيث: $1 \leq j \leq n$.

الطريق الجورداني:

نقول عن الطريق $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ أنه جورداني إذا كان لامستمراً ومتبايناً.

الطريق القابل للإصلاح أو القياس:

نقول عن الطريق $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ أنه طريق قابل للإصلاح أو قابل للقياس بشرط لامنحني أملس جزئياً إذا كان $\gamma'(t)$ موجوداً في كل مكان من المجال $[a,b]$ وقابل للمكاملة إطلاقاً بحسب مفهوم ليبغ:

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\,.dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,.dt$$

أي أن التكامل السابق موجود ومحدود وقيمته تساوي طول الطريق γ.
ومن الواضح أن كل طريق أملس جزئياً «تقطيعياً» هو طريق قابل للإصلاح

صف توابع C^1:

نقول عن التابع $\gamma(t)$ أنه ينتمي إلى صف التوابع C^1 إذا كان مستمراً وقابلاً للاشتقاق.

صف توابع C^n:

نقول عن التابع $\gamma(t)$ أنه ينتمي إلى صف التوابع C^n إذا كان مشتقه من المرتبة n مستمراً.

النقطة العادية:

إن النقطة العادية للطريق γ هي النقطة التي تكون فيها الطريق ملساء. أي هي تلك النقطة التي زاوية مماسيها من الجهتين تساوي $(\pi \mp)$.

/ /

النقطة الشاذة ,, الرأسية ,,

النقطة الشاذة أو الرأسية للطريق γ هي كل نقطة ليست عادية، وفي الحالة الخاصة: إذا كانت الزاوية في نقطة من طريق تساوي 0 أو 2π عندئذ ندعو تلك النقطة: النقطة التراجعية.

وعليه فإن النقاط الشاذة لطريق ما تشمل:

الطرفين - نقاط التقاطع - نقاط التماس - النقاط التراجعية.

مثال:

في المثال السابق رقم (4) حيث:

$\gamma : z(t) = \cos t \quad ; \quad t \in [\pi, 4\pi]$

إن كلاً من $t = 2\pi$ ، $t = 3\pi$ نقطتان تراجعيتان.

و γ هنا ليست طريق جورداني لأن:

$z(t) = \cos t \quad ; \quad t \in [\pi, 4\pi]$ ليس متبايناً.

مثال:

في المثال السابق رقم (1) حيث:

$\gamma : z = z(t) = e^{it} \quad ; \quad t \in [0, \pi]$

إن الطريق γ هو طريق جورداني لأنه مستمر ومتباين.

مثال:

$\gamma : z = z(t) = e^{it} \quad ; \quad t \in [0, 2\pi]$

إن الطريق γ هو طريق جورداني لأنه مستمر ومتباين وهو مغلق

مثال:

$\gamma : z = z(t) = \cos t \quad ; \quad t \in [2\pi, 3\pi]$

إن الطريق γ ليس جوردانياً لأنه غير متباين.

/ /

مثال:

$$\gamma : z = z(t) = \begin{cases} e^{it} & ; t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ (\frac{4t}{\pi} - 1)i & ; t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$$

ان الطريق γ هو طريق أملس جزئياً والنقطة $z = i$ هي نقطة شاذة.

مثال:

لتكن لدينا الطرق التالية:

$$\gamma_1(t) = t \quad ; \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma_2(t) = \sin t \quad ; \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\gamma_3(t) = \cos t \quad ; \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\gamma_4(t) = \sin t \quad ; \quad t \in [0, \pi]$$

بالتعويض نجد أن:

الطريق γ_1 هي القطعة المستقيمة الموجهة من $0 \longleftarrow 1$ وهي

الطريق γ_2 هي القطعة المستقيمة الموجهة من $0 \longleftarrow 1$

الطريق γ_3 هي القطعة المستقيمة الموجهة من $1 \longleftarrow 0$

الطريق γ_4 هي القطعة المستقيمة الموجهة ذهاباً من $0 \leftarrow 1$ وإياباً من $1 \leftarrow 0$

نلاحظ أن مجموعة قيم الطرق في الحالات جميعها هي مجموعة واحدة وهي المجال المغلق $[0, 1]$.

ان الطريقان γ_1, γ_2 متكافئان ونكتب $\gamma_1 \equiv \gamma_2$

ان الطرق γ_3, γ_4 غير متكافئة وكذلك (γ_1, γ_3)، (γ_1, γ_4)، (γ_3, γ_2)، (γ_2, γ_4) أيضاً غير متكافئة.

إن الطرق: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ هي طرق جوردانية.

ان الطريق γ_4 ليس طريقاً جوردانياً لأنه غير مستمر. ونلاحظ أن له نقطة تراجع هي النقطة: $\gamma_4(\frac{\pi}{2}) = 0$.

مثال:

$$\gamma(t) = e^{it} + \cos 2t \quad ; \quad t \in [0, \pi]$$

إن الطريق γ هو طريق مغلق حيث:

$$\gamma(t) = e^{it} = \cos t + i\sin t + \cos 2t$$

$$\gamma(t) = \cos t + \cos 2t + i\sin t$$

(1) $$x = x(t) = \cos t + \cos 2t = \cos t + 2\cos^2 t - 1$$

(2) $$y = y(t) = \sin t$$

بتربيع (2) ومضاعفتها وجمعها مع (1) نحصل على:

$$x + 2y^2 = \cos t + \underline{2\cos^2 t} - 1 + \underline{2\sin^2 t}$$

$$x + 2y^2 = \cos t + 1$$

$$\Rightarrow \cos t = x + 2y^2 - 1$$

بالتربيع و الجمع مع مربع (2) نحصل على المعادلة الديكارتية

للطريق γ وهي:

$$y^2 + [(x-1) + 2y^2]^2 = 1$$

إن الطريق γ هو طريق مغلق وأملس إلا أنه ليس جوردانياً.

مثال:

$$\gamma(t) = t^2(t+i) \quad ; \quad t \in [0, 2\pi]$$

إن الطريق γ هو منحني جورداني لأنه مستمر ومتباين. وهو قابل للاشتقاق منه طريق قابل للاصلاح و القياس. وهو أملس جزئياً.

مثال:

$$\gamma(t) = t(1 + i\sin\frac{1}{t}) \quad ; \quad t \in [-\frac{1}{\pi}, +\frac{1}{\pi}]$$

إن الطريق γ هو منحني جورداني لأنه مستمر ومتباين ولكنه غير قابل للاصلاح منه ليس أملس جزئياً. فالتابع يفقد قابليته للاشتقاق عند $t=0$

ملاحظة هامة:
بالنسبة للمنحني الأملس جزئياً يشترط لتوابع التحويل (1) أن تكون مستمرة في كل مكان باستثناء عدد منتهٍ من النقاط، ومشتقاتها موجبة ومستمرة.
أما بالنسبة للمنحني القابل للإصلاح «القابل للقياس» فيشترط لتوابع التحويل (1) أن تكون متزايدة ومستمرة إطلاقاً.

مبرهنة:
إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون الطريق γ قابلاً للإصلاح هو أن يكون: $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ ذو تغيرات محدودة.
أي أن تابعيه: $x(t)$ ، $y(t)$ ذوي تغيرات محدودة وأن يكون التابع المركب: $\gamma[t(\tau)]$ ذو تغيرات محدودة أيضاً حيث $t(\tau)$ مستمر إطلاقاً.

تابع التغير المحدود:
تعريف:
نقول عن تابع: $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ أنه ذو تغير محدود إذا وجد ثابت موجب $m\geq 0$ على نحو تتحقق فيه المتراجحة التالية:

وذلك من أجل كل تجزئة P للمجال المغلق $[a,b]$:
$$P=\{a=t_0<t_1<t_2<\dots<t_n=b\}$$
وبحيث يكون:
$$v(\gamma,P)=\sum_{k=0}^{n}|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})|\leq M$$
تمثل المجموع لتجزئة.

التغير الكلي للطريق:
نعرف التغير الكلي للطريق γ والذي نرمز له بالرمز $V(\gamma)$ على الشكل:

$V(\gamma) = \sup \{ \sigma(\gamma, P) \; ; \; [a,b]$ تجزئة $P \}$

وبشرط: $V(\gamma) \leq M < \infty$

ومن السهل علينا إثبات أنه كي يكون الطريق γ ذو تغير محدود يلزم ويكفي أن يكون كل من القسمين الحقيقي والتخيلي: $x(t), y(t)$ ذو تغير محدود.

كما يسهل علينا كذلك أن نرى أنه إذا كان γ ذو قيم حقيقية وغير تناقصي فإنه ذو تغير محدود دوماً ويكون:

$$V(\gamma) = \gamma(b) - \gamma(a)$$

ومما سبق نستطيع صياغة تعريف المنحني بشكله النهائي مع ملاحظة أنه يوجد أكثر من مفهوم للمنحني في المستوي المركب $\mathbb{C}$ ولكننا سنعتمد التعريف التالي:

المنحني في المستوي المركب $\mathbb{C}$:

هو اتحاد عدد منتهي من الطرق المغلقة وغير المغلقة γ_k حيث $k = 1, 2, \dots, n$ وقد تكون هذه الطرق متقاطعة أو غير متقاطعة وقد تكون محدودة أو غير محدودة.

نتائج:

1. كل طريق هي منحني فيها $k = 1$ ولهذا نستغني عن كلمة طريق ونستبدلها بكلمة منحني.
2. يتحدد اتجاه المنحني γ من اتجاه الطرق γ_k المشكّلة له.
3. يمكن لنقطة واحدة أو أكثر أن تقع على أكثر من طريق واحدة في آن معاً وذلك في حال كانت نقاط تقاطع أو تماس ~~[illegible]~~ لطرق.
4. النقاط المعزولة والقطوع هي من أنواع الطرق γ_k.

/ /

المنحني المقيس:

تعريف:

نقول عن منحني γ أنه منحني مقيس أو اختصاراً طريق إذا كان γ ذو تغير محدود.

إن قولنا عن γ أنه منحني مقيس يعني أن له طولاً محدوداً ونرمز لطوله بالرمز $\wp(\gamma)$

مبرهنة:

إذا كان: $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ طريقاً قابلاً للاشتقاق باستمرار

عندئذ γ منحني مقيس وطوله يعطى بالعلاقة:

$$\wp(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \cdot dt$$

المحاضرة الثالثة عشرة الأربعاء 27/11/2012

التكامل المحدد:

تعريف:

نصادف عملية المكاملة بشكلين مختلفين الأول منهما باعتبارها العملية المعاكسة للتفاضل والثاني باعتبارها نهاية مجموع.

وهذا الشكل الثاني هو الأهم في الفيزياء والرياضيات والهندسة وهو ما يسمى «تعريف ريمان للتكامل»، ونرمز لهذا التكامل بالرمز: $\int_a^b f(z) \cdot dz$

مبرهنة (1):

إذا كان: $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ طريقاً و $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ تابعاً مستمراً عندئذ التابع f قابل للمكاملة على المجال $[a,b]$.

/ /

مبرهنة (2):

إذا كان لدينا γ طريق أملس تقطيعياً «قد-كوي تجزئة للمجال»:

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

وكان لدينا التابع المستمر: $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$

عندئذٍ يكون:

$$\int_a^b f(t)\,.\,d\gamma = \int_a^b f(t)\,.\,\gamma'\,.\,dt$$

تعريف:

إذا كان: $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ طريقاً و $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ تابعاً

وكانت $[a,b] \subseteq E \subseteq \mathbb{C}$ مجموعة متراصة.

عندئذٍ يكون $f \circ \gamma$ مستمراً على المجال $[a,b]$ وفي هذه الحالة

نسمي التكامل: $\int_a^b f(\gamma(t))\,.\,d\gamma(t)$ بالتكامل المحني على

الطريق γ ونكتب:

$$\int_\gamma f(\gamma(t))\,.\,d\gamma(t) = \int_\gamma f(z)\,.\,dz$$

مبرهنة (3):

لتكن G مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$ ولتكن γ طريقاً في G بدايته α ونهايته β، وليكن: $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ تابعاً مستمراً له تابع أصلي،

$F : G \longrightarrow \mathbb{C}$ حيث: $f = F'$ عندئذٍ:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\beta) - F(\alpha)$$

مبرهنة (4): «هامة»:

لتكن G مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$ ولتكن γ طريقاً في G بدايته α ونهايته β.

وليكن: $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ تابعاً مستمراً فإذا كان γ طريقاً منحنياً

مغلقاً عندئذٍ:

$$\int_\gamma f = 0$$

/ /

أو بموضوع المبرهنة السابقة بكلمات أخرى: التكامل لتابع مستمر على طريق منحني مغلق ~~[illegible]~~ هو تكامل معدوم.

مبرهنة (5):

إن المنحني الممثل للطريق $(-\gamma)$ لا يختلف عن المنحني الممثل للطريق (γ) سوى في الجهة. $(-\gamma)(t) = \gamma(-t)$ وذلك من أجل $-b \le t \le -a$

ويكون عندئذ:

$$\int_{-\gamma} f = -\int_{\gamma} f \quad \text{أو} \quad \int_{\gamma} f + \int_{-\gamma} f = 0$$

بعبارة أخرى إذا كاملنا على قطعة طريق ذهاباً وإياباً فإن قيمة التكامل الناتجة معدومة.

مبرهنة (6): «تقدير التكامل»

من أجل كل تابع مستمر f على طريق أملس جزئياً: $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$

عندئذ يكون:

$$\left| \int_{\gamma} f(z)\cdot dz \right| \leqslant \int_{\gamma} |f|\cdot|d\gamma|$$

حيث:

$$|d\gamma| = |\gamma'(t)|\cdot dt$$

مبرهنة (7):

إذا كان γ، γ' طريقان متتاليان: «نهاية الأول هي بداية الثاني». عندئذ يكون:

$$\int_{\gamma} f + \int_{\gamma'} f = \int_{\gamma+\gamma'} f$$

بعبارة أخرى:

«مجموع تكاملي تابع f على طريقين متتاليين أو قطعتين متتاليتين من طريق يساوي قيمة التكامل لهذا التابع على الطريق المكون من اتحاد هذين الطريقين»

Tough times don't last... Tough people do...

مبرهنة (8):

بفرض $\alpha = constant$ ثابت، $\in \mathbb{C}$ عندئذ:

$$\int_{\gamma} \alpha . f = \alpha \int_{\gamma} f$$

ومن أجل f_1, f_2 تابعين:

$$\int_{\gamma}(f_1 + f_2) = \int_{\gamma} f_1 + \int_{\gamma} f_2$$

مبرهنة (9):

إذا كان $f(z)$ تابعاً محدوداً حيث: $|f(z)| \leq M$ عندما تقع z على الطريق γ. وكان طول الطريق γ يساوي L عندئذ:

$$\left|\int_{\gamma} f(z).dz\right| \leq L.M$$

تمارين ومسائل:

مثال (1):

بفرض أن: $f(z) = \frac{1}{z}$ وكان الطريق γ هو الدائرة،

$$z = z(t) = \cos t + i \sin t \quad ; -\pi \leq t \leq +\pi$$

علماً أن الطريق يبدأ من $z = -1$ ويسير في الاتجاه الموجب ليعود إلى النقطة نفسها. المطلوب: احسب $\int_a^b f . d\gamma$

الحل:

$$\int_a^b f.d\gamma = \int_a^b f(t) . \gamma'(t) . dt$$

$$\gamma : z = \cos t + i \sin t$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \ , \ f(t) = \frac{1}{\cos t + i \sin t}$$

$$f(t) = \frac{\cos t - i \sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \cos t - i \sin t$$

$$\gamma'(t) = -\sin t + i \cos t$$

$$\int_a^b f . d\gamma = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) . \gamma'(t) . dt$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} (\cos t - i \sin t)(-\sin t + i \cos t) . dt$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} (-\sin t \cancel{\cos t} + \underbrace{i\cos^2 t + i\sin^2 t}_{} + \cancel{\sin t \cos t}) \cdot dt$$

$$\Longrightarrow \int_a^b f \cdot d\gamma = \int_{-\pi}^{+\pi} i \cdot dt = [it]_{-\pi}^{+\pi} = 2i\pi$$

مثال(2):

ليكن لدينا التابع: $f(z) = \Re e\, z$ ولتكن الطريق γ هي القطعة المستقيمة

من $z = 0 \longrightarrow z = 1+i$

ونعبّر عنها على الشكل:

$$\gamma : z = z(t) = (1+i)t \quad ; \quad 0 \leq t \leq 1$$

أحسب التكامل: $I = \int_\gamma f(z) \cdot dz$

الحل:

$$z = z(t) = (1+i)t = t + it$$

$$d(z) = (1+i) \cdot dt$$

$$f(z) = \Re e\, z = t$$

$$I = \int_\gamma f(z) \cdot dz = \int_0^1 t \cdot (1+i) \cdot dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}(1+i) t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1+i)$$

مثال(3):

احسب التكامل: $I = \int_\gamma (z^2 + z \cdot \bar{z}) \cdot dz$ حيث γ هي قوس

الدائرة: $|z| = 1$ وحيث $0 \leq \arg z \leq \pi$

الحل:

$$\gamma : |z| = 1 \Longleftrightarrow z = e^{i\theta} \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$dz = i e^{i\theta} d\theta, \quad \bar{z} = e^{-i\theta}, \quad z^2 = e^{2i\theta}$$

$$I = \int_\gamma (z^2 + z \cdot \bar{z}) \cdot dz = \int_0^\pi (e^{2i\theta} + e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta}) \cdot i e^{i\theta} \cdot d\theta$$

$$= \int_0^\pi (e^{2i\theta} + 1)\, i \cdot e^{i\theta} \cdot d\theta = \int_0^\pi (e^{3i\theta} + i e^{i\theta}) \cdot d\theta$$

$$= \int_0^\pi i\, e^{3i\theta} \cdot d\theta + \int_0^\pi i\, e^{i\theta} \cdot d\theta$$

$$\Longrightarrow I = \left[\frac{1}{3\cancel{i}} e^{3i\theta}\right]_0^{\pi} + \left[e^{i\theta}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{3\cancel{i}} e^{i(3\pi)} - \frac{1}{3\cancel{i}} e^{0} + e^{i\pi} - e^{0}$$

$$= \frac{1}{3\cancel{i}}\left[\cos 3\pi + i\sin 3\pi\right] - \frac{1}{3\cancel{i}} + \left[\cos\pi + i\sin\pi\right] - 1$$

$$= \frac{1}{3\cancel{i}}[-1] - \frac{1}{3\cancel{i}} + [-1] - 1 = -\frac{1}{3\cancel{i}} - \frac{1}{3\cancel{i}} - 2$$

$$\Longrightarrow I = -\frac{2}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{8}{3}$$

مثال (4):

احسب التكامل: $\int_{\gamma} \frac{\ln^3 z}{z}\, dz$ حيث γ هي قوس الدائرة: $|z|=1$ الواصل بين نقطتين 1، i، وكذلك $\ln z$ هو التعيين الرئيسي للتابع اللوغاريتمي والذي من أجله يكون $\ln 1 = 0$

الحل:

إن التابع مستكمل تحليلياً على الطريق γ حيث النقطة $z=0$ التي تعدم المقام لا تنتمي إلى قوس الدائرة المشكلة للطريق γ.

$$|z| = 1 \Longleftrightarrow z = e^{i\theta}$$

$$dz = i e^{i\theta}\, d\theta$$

الطريق واصل بين:

$$z_1 = \cos 0 + i\sin 0 \Longleftarrow z_1 = 1$$

$$z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \Longleftarrow z_2 = i$$

$$\Longleftrightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_{\gamma} \frac{\ln^3 z}{z}\, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^{i\theta}} \cdot \ln^3 e^{i\theta} \cdot i e^{i\theta} \cdot d\theta$$

$$\ln z = \ln e^{i\theta} = \ln\left|e^{i\theta}\right| + i(\theta + 2\pi K)$$

وبما أن الفرض أن $\ln z$ هو التعيين الرئيسي إذاً $K=0$.

$$\Longrightarrow \ln z = \ln e^{i\theta} = i\theta \Longleftrightarrow \ln^3 z = (i\theta)^3$$

نعوض في التكامل:

$$\Longrightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cancel{e^{-i\theta}} \cdot (i\theta)^3 \cdot i\, \cancel{e^{i\theta}}\, d\theta$$

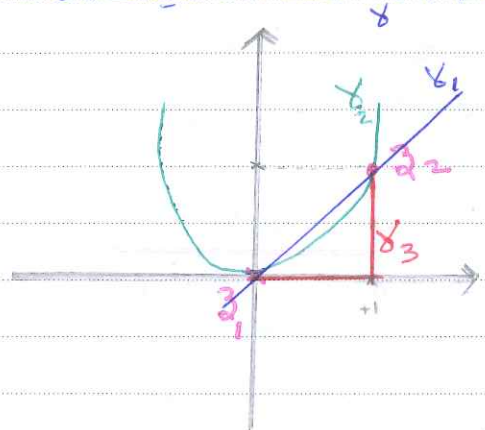
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-i\theta)^3 (i) \, . d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta^3 . d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{4}\theta^4\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 - 0 = \frac{\pi^4}{64}$$

مثال (5):

أحسب التكامل: $\int_\gamma (1+i-2z) . dz$ على طول المنحنيات الواصلة

بين النقطتين $z_1 = 0$ ، $z_2 = 1+i$



الحل:

لاحظ أن هناك 3 أنواع من الطرق

التي قد تمر من النقطتين z_1 ، z_2

المنحنى الأول:

γ_1: المستقيم الواصل بين z_1 ، z_2

إن هذا المستقيم ميله:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

وهو مار من المبدأ إذاً:

$$\gamma_1 : \quad y = x$$

$$z = x + iy = x + ix = x(1+i)$$

$$dz = (1+i) . dx$$

$$\int_{\gamma_1} (1+i-2z) . dz = \int_0^1 (1+i-2x(1+i)) . (1+i) . dx$$

$$= \int_0^1 (1+i-2x-2ix)(1+i) . dx$$

$$= \int_0^1 \cancel{1} + i + i \cancel{-1} \cancel{-2x} - 2ix - 2ix \cancel{+2x} \, . dx$$

$$= \int_0^1 2i - 4ix \, . dx = [2ix - 2ix^2]_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\gamma_1} = 2i}$$

المنحنى الثاني:

γ_2: القطع المكافئ الذي ذروته $z_1(0,0)$ ويمر من $z_2(1,1)$ ومعادلته:

$$y = x^2$$

$$z = x + iy = x + ix^2$$
$$dz = (1 + 2ix)\cdot dx \ , \ \bar{z} = x - ix^2$$
$$\int_{\gamma_2} (1 + i - 2\bar{z})\cdot dz = \int_0^1 (1 + i - 2x + 2ix^2)(1 + 2ix)\cdot dx$$
$$= \int_0^1 (1 + 2ix + i - 2x - 2x - 4ix^2 + 2ix^2 - 4x^3)\cdot dx$$
$$= \int_0^1 (1 + i + 2ix - 4x - 2ix^2 - 4x^3)\cdot dx$$
$$= \left[x + ix + ix^2 - 2x^2 - \frac{2}{3}ix^3 - x^4\right]_0^1$$
$$= 1 + i + i - 2 - \frac{2}{3}i - 1 = 2i - \frac{2}{3}i - 2 = \frac{4}{3}i - 2$$
$$\Rightarrow \boxed{\int_{\gamma_2} = \frac{4}{3}i - 2}$$

المنحنى الثالث :

γ_3: الخط المنكسر $z_1 z_3 z_2$ حيث $z_3(1,0)$

والتكامل على γ_3 هو تكامل على قطعتين مستقيمتين عن طريق ..

القطعة الأولى : $z_1 z_3$ وهي المستقيم الذي معادلته $y=0$

حيث $y_1 = y_3 = 0$
$$\Rightarrow z = x = \bar{z}$$
$$dz = dx$$

والقطعة الثانية : $z_3 z_2$ وهي المستقيم الذي معادلته $x = 1$

حيث $x_3 = x_2 = 1$
$$z = 1 + iy \Rightarrow dz = i\cdot dy$$
$$\bar{z} = 1 - iy$$

وبهذا يكون :
$$\int_{\gamma_3} = \int_0^1 {}_{z_1 z_3}\cdot dz + \int_0^1 {}_{z_3 z_2}\cdot dz$$
$$= \int_0^1 (1 + i - 2x)\cdot dx + \int_0^1 (1 + i - 2 + 2iy)\cdot i\cdot dy$$
$$= \int_0^1 (1 + i - 2x)\cdot dx + \int_0^1 (-i - 1 - 2y)\cdot dy$$
$$= \left[x + ix - x^2\right]_0^1 + \left[-iy - y - y^2\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_3} = \cancel{1}+i-\cancel{1}+[-i-1-1]$$
$$= i-i-2$$
$$\Rightarrow \boxed{\int_{\gamma_3} = -2}$$

تمارين وظيفة:

1 أحسب التكامل، $\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$ حيث γ هو قوس الدائرة: $|z|=1$ الواقع في نصف المستوي العلوي و $\sqrt{z}$ هو الفرع الذي من أجله يكون $\sqrt{1}=-1$.

الحل:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

إن γ هو قوس الدائرة $|z|=1$ أي معادلة الطريق هي،

$$\gamma: z=z(\theta)=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

ولنوجد الآن θ التي تحقق الفرع الذي من أجله: $\sqrt{1}=-1$

$$(1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1}=\sqrt{\cos 0+i\sin 0}$$

$$z_K=(r)^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2\pi K}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi K}{n}\right]$$

حيث $n=2$ ، $K=0,1$ ، $r=1$ ، $\theta=0$

مرفوض $K_0=(1)^{\frac{1}{2}}[\cos 0+i\sin 0]=1$

مقبول $K_1=(1)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{2\pi}{2}+i\sin\frac{2\pi}{2}\right]=-1$

إذا: $0\leq\theta\leq\pi$

$$z=[\cos\theta+i\sin\theta]=e^{i\theta}$$

$$dz=ie^{i\theta}\cdot d\theta$$

$$\sqrt{z}=\sqrt{e^{i\theta}}$$

$$\int_{\gamma}\frac{dz}{\sqrt{z}}=\int_0^{\pi}\frac{i\cdot e^{i\theta}}{\sqrt{e^{i\theta}}}\cdot d\theta=2\int_0^{\pi}\frac{ie^{i\theta}}{2\sqrt{e^{i\theta}}}\cdot d\theta$$

$$=2\left[\sqrt{e^{i\theta}}\right]_0^{\pi}$$

$$=2\left[(e^{i\theta})^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi}=2\left[(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi}$$

/ /

وحسب قانون دو مرفان لدينا ،

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma = 2\left[\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi$$

$$= 2\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] - 2\left[\cos 0 + i\sin 0\right]$$

$$\Rightarrow \int_\gamma = 2i - 2$$

$\boxed{2}$ أحسب التكامل ،

$$\int_0^{1+i} z^2 \, dz$$ في الحالتين التاليتين ،

أ) المستقيم الواصل بين النقطتين : $M_0(0,0)$ ، $M_1(1,1)$

ب) المستقيم الواصل بين النقطتين $M_0(0,0)$ ، $M_2(1,0)$

ج) والمستقيم المحدود بالنقطتين $M_2(1,0)$ ، $M_1(1,1)$

الحل ،

أ) $$\int_0^{1+i} z^2 \, dz$$

نلاحظ أن المستقيم الواصل بين ، $M_0(0,0)$ ، $M_1(1,1)$

هو المستقيم الذي معادلته ، $y = x$

$$z = x + iy = x + ix = (1+i)x$$

$$dz = (1+i) \, dx$$

$$z^2 = 2ix^2$$

حدود التكامل من $x = 0 \longleftarrow x = 1$

$$\int_0^{1+i} z^2 \, dz = \int_0^1 (2ix^2)\cdot(1+i)\, dx$$

$$= \int_0^1 (2ix^2 - 2x^2)\, dx = \left[\frac{2i}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= \frac{2i}{3}(1) - \frac{2}{3}(1) - 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{1+i} z^2 \, dz = \frac{2i}{3} - \frac{2}{3}$$

(ب) $\int_0^{1+i} z^2 \cdot dz$

حيث γ هي الخط المنكسر من $M_0(0,0) \rightarrow M_2(1,0) \rightarrow M_1(1,1)$

$$\Rightarrow \int_\gamma = \int_{M_0M_2} + \int_{M_2M_1}$$

(أ) إن المستقيم الواصل بين النقطتين M_0 ، M_2 هو المستقيم الذي معادلته $y=0$

$$z=x \Longleftrightarrow z^2=x^2$$

$$dz=dx$$

وحدود التكامل من $x=0 \longrightarrow x=1$

(ب) المستقيم الواصل بين النقطتين M_2 ، M_1 هو المستقيم الذي معادلته $x=1$

$$z=1+iy \Rightarrow dz=i\cdot dy$$

$$z^2=1-y^2+2iy$$

وحدود التكامل من $y=0 \longrightarrow y=1$

إذاً:

$$\int_0^{1+i} z^2\cdot dz = \int_0^1 x^2\cdot dx + \int_0^1 (1-y^2+2iy)(i\cdot dy)$$

$$= \int_0^1 x^2\cdot dx + \int_0^1 (i-iy^2-2y)\cdot dy$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[iy-\frac{i}{3}y^3-y^2\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}(1) - 0 + i - \frac{i}{3} - 1 - 0 = \frac{1}{3}+\frac{2i}{3}-1$$

$$\Rightarrow \int_0^{1+i} z^2\cdot dz = \frac{2i}{3}-\frac{2}{3}$$

ملاحظة:

نلاحظ أن ناتج التكامل (P) الذي حسبناه مباشرة من معادلة المستقيم $y=x$ يساوي ناتج التكامل (ب) الذي حسبناه بالتجزئة.

/ /

3) أحسب التكامل: $\int_{\gamma} \bar{z}\,dz$

في الحالات التالية:

أ) γ_1 هو المستقيم $y = \frac{x}{3}$ من النقطة $z=0$ ⟵ $z=3+i$

ب) γ_2 هو المستقيم الواصل بين $z=0$ ⟵ $z=3$

د) γ_3 هو المستقيم الواصل بين $z=3$ ⟵ $z=3+i$

الحل:

أ)

$$\int_{\gamma_1} \bar{z}\,dz$$

$$\gamma_1 : y = \frac{x}{3} = \frac{1}{3}x$$

$$z = x + iy = x + \frac{1}{3}ix = x\left(1+\frac{1}{3}i\right)$$

$$dz = \left(1+\frac{1}{3}i\right).dx$$

$$\bar{z} = x - iy = x - \frac{1}{3}ix$$

وحدود التكامل من $x=0$ ⟵ $x=3$

$$\int_{\gamma_1} \bar{z}\,dz = \int_0^3 \left(x - \frac{1}{3}ix\right).\left(1+\frac{1}{3}i\right).dx$$

$$= \int_0^3 \left(x + \cancel{\frac{1}{3}ix} - \cancel{\frac{1}{3}ix} + \frac{1}{9}x\right).dx$$

$$= \int_0^3 \frac{10}{9}x\,.dx = \left[\frac{5}{9}x^2\right]_0^3$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \bar{z}\,dz = \frac{5}{9}(9) - 0 = 5$$

ب)

$$\int_{\gamma_2} \bar{z}\,dz$$

γ_2 هو المستقيم الواصل بين $z=0$ ⟵ $z=3$ وهو المستقيم الذي معادلته: $y=0$

$$z = x \Leftrightarrow dz = dx$$

$$\bar{z} = x$$

$$\int_{\gamma_2} \bar{z}\,dz = \int_0^3 x\,.dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} \bar{z}\,dz = \frac{1}{2}(9) = \frac{9}{2}$$

/ /

(ح) $\int_{\gamma_3} \bar{z} \cdot dz$

γ_3 هو المستقيم الواصل بين $z=3 \longleftarrow z=3+i$

وهو المستقيم الذي معادلته: $x=3$

$$z = 3+iy$$
$$\bar{z} = 3-iy$$
$$dz = i \cdot dy$$

وحدود التكامل من $y=0 \longrightarrow y=1$

$$\int_{\gamma_3} \bar{z} \cdot dz = \int_0^1 (3-iy)(i) \cdot dy = \int_0^1 (3i+y) \cdot dy$$
$$= \left[3iy + \tfrac{1}{2}y^2\right]_0^1 = 3i + \tfrac{1}{2}$$

المحاضرة الرابعة عشرة — الإثنين 2/2/2012

تمارين:

$\boxed{1}$ أحسب التكامل $\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}}$ حيث γ هو قوس الدائرة $|z|=1$

و $\sqrt{z}$ هو الفرع الذي من أجله يكون $\sqrt{1} = -1$

الحل:

"طريقة ثانية والطريقة المحلولة سابقاً صحيحة أيضاً"

$$z^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right]$$

$$K=0 \Rightarrow \sqrt{z} = (1)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right] = \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}$$

$$K=1 \Rightarrow \sqrt{z} = (1)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right]$$
$$= -\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}$$

~~$z(1)[\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}]$~~

وبما أن المطلوب هو $\sqrt{z} = -1$ إذاً حدود التكامل من $1 \longrightarrow -1$

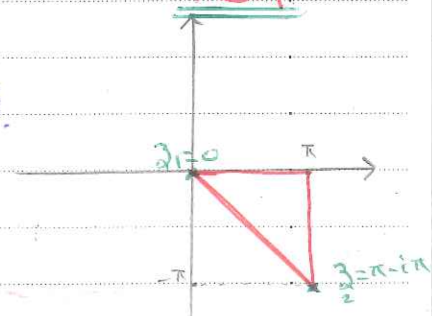
بعكس اتجاه عقارب الساعة

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_{+1}^{-1} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\int_{+1}^{-1} \frac{dz}{2\sqrt{z}} = 2\left[\sqrt{z}\right]_{+1}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\left[\sqrt{-1} - \sqrt{1}\right]$$

2 احسب التكامل: $\int_\gamma e^{\bar z}.dz$ حيث γ هو المستقيم $y=-x$ الواصل بين $z_1=0$ ، $z_2=\pi-i\pi$

الحل:



$$\int_\gamma e^{\bar z}.dz$$

نجري التكامل أولاً على المستقيم γ_1 الواصل بين

$$z_1=0 \quad ، \quad z_3=\pi$$

ثم نجري تكاملاً ثانياً على المستقيم γ_2 الواصل بين

$$z_3=\pi \quad ، \quad z_2=\pi-i\pi$$ ويكون:

$$\int_\gamma e^{\bar z}.dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$$

$$\gamma_1: \quad y=0$$

$$z=x \quad , \quad \bar z = x$$

$$dz = dx$$

وحدود التكامل من $x=0 \longrightarrow x=\pi$

$$\int_{\gamma_1} e^{\bar z}.dz = \int_0^\pi e^x.dx = \left[e^x\right]_0^\pi = e^\pi - 1$$

$$\gamma_2: \quad x=\pi$$

$$z=\pi+iy$$

$$\bar z = \pi - iy$$

$$dz = i.dy$$

وحدود التكامل من $y=0 \longrightarrow y=-\pi$

$$\int_{\gamma_2} e^{\bar z}.dz = \int_0^{-\pi} e^{\pi-iy}.i.dy = -\int -i.e^{\pi-iy}.dy$$

$$= -\left[e^{\pi-iy}\right]_0^{-\pi} = -e^{\pi+i\pi} + e^{\pi}$$

$$= e^\pi\left[1 - e^{i\pi}\right] = e^\pi\left[1 - \cos\pi - i\sin\pi\right]$$

/ /

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} = e^{\pi}[1-(-1)-0] = e^{\pi}[1+1]$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} = 2e^{\pi}$$

وبهذا يكون التكامل المطلوب:

$$\int_{\gamma} e^{z}\cdot dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = e^{\pi} - 1 + 2e^{\pi} = 3e^{\pi} - 1$$

3 أوجد التكامل: $\int_{1-i}^{2+i} (3z^2+2z)\cdot dz$

الحل:

γ: هي الطريق الواصل بين النقطتين $z_1 = 1-i \longrightarrow z_2 = 2+i$

$z_1(1,-1)$ ، $z_2(2,1)$

المستقيم الواصل بين z_1، z_2 ميله:

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{1-(-1)}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

ومعادلته: $y = mx + p$

$$y = 2x + p$$

$$-1 = 2(1) + p \Leftrightarrow \boxed{p = -3}$$

إذاً معادلة γ هي:

$$\gamma : \boxed{y = 2x - 3}$$

$$z = x + iy$$

$$\boxed{z = x + i(2x-3)}$$

$$z^2 = x^2 - (2x-3)^2 + 2ix(2x-3)$$

$$z^2 = x^2 - 4x^2 + 12x - 9 + 4ix^2 - 6ix$$

$$\Rightarrow \boxed{z^2 = -3x^2 + 4ix^2 + 12x - 6ix - 9}$$

$$z = x + 2ix - 3i$$

$$dz = (1+2i)\cdot dx$$

وحدود التكامل من $x = 1 \longrightarrow x = 2$

$$\Leftarrow \cancel{\int_{1-i}^{2+i}(3z^2+2z)\cdot dz = \int_1^2 (-9x^2+12ix^2+36x-18ix-27i}$$

/ /

$$\Rightarrow \int_{1-i}^{2+i}(3z^2+2z)\cdot dz = \int_1^2 (-9x^2+36x-27+12ix^2-18ix + 2x+4ix-6i)\cdot(1+2i)\cdot dx$$

$$= \int_1^2(-33x^2-6ix^2+62ix+66x-15-60i)\cdot dx$$

$$= \left[-11x^3-2ix^3+31ix^2+33x^2-15x-60ix\right]_1^2$$

$$= -12i+14+31i-7$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{1-i}^{2+i}(3z^2+2z)\cdot dz = 19i+7}$$

4 أوجد التكامل على γ حيث: $f(z)=e^{z}$

$$\int_\gamma f(z)\cdot dz$$

والطريق γ هو الخطين المستقيمين من: $z_1=0$ ← $z_2=2+\pi i$

ومن $z_2=2+\pi i$ ← $z_3=2$

الحل:

$$\int_\gamma f(z)\cdot dz = \int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}$$

حيث:

γ_1: المستقيم الواصل بين $z_1=0$ ، $z_2=2+\pi i$

حيث ميله: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\pi}{2}$

ومعادلته: γ_2: $\boxed{y=\frac{\pi}{2}x}$

وحدود التكامل هي من $x=0$ ← $x=2$

$$z=x+iy = x+i\frac{\pi}{2}x = x\left(1+i\frac{\pi}{2}\right)$$

$$dz=\left(1+i\frac{\pi}{2}\right)\cdot dx$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\cdot dz = \int_0^2 e^{(1+i\frac{\pi}{2})x}\cdot\left(1+i\frac{\pi}{2}\right)\cdot dx = \left[e^{(1+i\frac{\pi}{2})x}\right]_0^2$$

γ_2: المستقيم الواصل بين: $z_2=2+\pi i$ ، $z_3=2$

وهو مستقيم معادلته: $x=2$

$$z=2+iy \Rightarrow dz=i\cdot dy$$

وحدود التكامل هي: $y=\pi$ ← $y=0$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\cdot dz = \int_{\pi}^{0} e^{2+iy} \cdot i \cdot dy = \left[e^{2+iy} \right]_{\pi}^{0}$$

وبهذا يكون:

$$\int_{\gamma} f(z)\cdot dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$$
$$= \left[e^{(1+i\frac{\pi}{2})x} \right]_0^{1} + \left[e^{2+iy} \right]_{\pi}^{0}$$
$$= e^{1+i\frac{\pi}{2}} - e^{0} + e^{2} - e^{2+i\pi}$$
$$= e\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] - 1 + e^{2} - e^{2}\left[\cos\pi + i\sin\pi\right]$$
$$= e(0+i) - 1 + e^{2} - e^{2}[-1+0]$$
$$\Rightarrow \int_{\gamma} = ie - 1 + e^{2} + e^{2} = 2e^{2} + ie - 1$$

$\boxed{5}$ أحسب التكامل $\int_{C} f(z)\cdot dz$ حيث: $f(z) = z$ و $C: |z| = 1$ هي دائرة الوحدة.

الحل:

نلاحظ أن $f(z) = z$ هو تابع مستمر والطريق $C: |z| = 1$

هو طريق مغلق إذاً حسب المبرهنة يكون تكامل التابع المستمر على هذا الطريق معدوماً أي:

$$\int_{C} f(z)\cdot dz = 0$$

ويمكن إثبات هذه المبرهنة بحساب التكامل خطوة خطوة كما يلي:

$$C: |z| = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta}$$

$$\frac{dz}{d\theta} = (-\sin\theta + i\cos\theta) \Leftarrow z = \cos\theta + i\sin\theta \quad ; \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\int_{C} f(z)\cdot dz = \int_0^{2\pi} (\cos\theta + i\sin\theta)(-\sin\theta + i\cos\theta)\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (-\sin\theta\cos\theta + i\cos^2\theta - i\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta)\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (i[\cos^2\theta - \sin^2\theta] - 2\sin\theta\cos\theta)\cdot d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (i\cos 2\theta - \sin 2\theta)\cdot d\theta$$
$$= \left[\frac{i}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{2\pi} = 0$$

/ /

5 أحسب التكامل: $\int_C f(z).dz$ حيث $f(z)=\bar{z}$ و $C: |z|=1$ دائرة الوحدة.

الحل:

$$\int_C f(z).dz$$

$$C: |z|=1 \Leftrightarrow z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$\Rightarrow \bar{z}=\cos\theta-i\sin\theta \quad ; 0\leq\theta\leq 2\pi$$

$$dz=(-\sin\theta+i\cos\theta).d\theta$$

$$\int_C f(z).dz=\int_0^{2\pi}(\cos\theta-i\sin\theta)(-\sin\theta+i\cos\theta).d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(-\sin\theta\cos\theta+i\cos^2\theta+i\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} i\,[\cos^2\theta+\sin^2\theta].d\theta=\int_0^{2\pi} i\,.d\theta$$

$$\Rightarrow \int_C f(z).dz=[i\theta]_0^{2\pi}=2i\pi$$

---

7 أثبت أن $\left|\int_C \frac{e^{iz}}{z^2-1}.dz\right|\leq\frac{12\pi}{5}e^{2}$ حيث C هو المنحني: $|z|=\frac{3}{2}$.

الحل:

نود الاعتماد على المبرهنة التي تنص على أنه:

«إذا كان $f(z)$ تابعاً محدوداً بحيث $|f(z)|\leq M$ عندما تقع z على طريق γ وكان طول هذه الطريق يساوي L عندئذ:

$$\left|\int_\gamma f(z).dz\right|\leq L.M$$

الطريق هنا هي المنحني: $C: |z|=\frac{3}{2}$ أي الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $\frac{3}{2}$.

إن طول الطريق C هو محيط الدائرة ويساوي: $2\pi r$

$$\Rightarrow L=2\pi(\tfrac{3}{2}) \Leftrightarrow \boxed{L=3\pi}$$

ولنوجد M،

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2-1}.$$

/ /

من ناحية،

$$|e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = |e^{-y+ix}| = e^{-y}$$

ولكن $-\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$ لأننا نتحول على الدائرة C

$$\Rightarrow +\frac{3}{2} \geqslant -y \geqslant -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{3}{2}} \geqslant e^{-y} \Rightarrow \boxed{e^{-y} \leq e^{2}}$$

ومن ناحية أخرى،

$$|z^2-1| \geqslant |z^2| - |1|$$

$$\geqslant |z|^2 - 1$$

$$|z^2-1| \geqslant \frac{9}{4} - 1$$ حيث $|z| = r = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow |z^2-1| \geqslant \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|z^2-1|} \leq \frac{4}{5}$$

إذاً نجد أن،

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{iz}}{z^2-1}\right| \leq \frac{4}{5} \cdot e^{2}$$

إذاً: $M = \frac{4}{5}e^{2}$ وبهذا يكون حسب المبرهنة

$$\left|\int_C f(z) \cdot dz\right| \leq L \cdot M$$

$$\leq 3\pi \cdot \frac{4}{5}e^{2}$$

$$\Leftarrow \boxed{\left|\int_C f(z) \cdot dz\right| \leq \frac{12\pi}{5}e^{2}}$$

/ /

المحاضرة الخامسة عشرة الأربعاء 4/2/2012

حل تمارين ومسائل:

1 أحسب : $\int_\gamma (z^2-1)^{-1}\cdot dz$ حيث :
$\gamma(t)=1+e^{it} \; ; \; 0\leq t\leq 2\pi$

الحل:

$$\int_\gamma (z^2-1)^{-1}\cdot dz=\int_\gamma \frac{1}{z^2-1}\cdot dz$$

$$f(z)=\frac{1}{z^2-1}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-1}$$

$$f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\cdot dz=\frac{1}{2}\int_\gamma\frac{1}{z-1}\cdot dz-\frac{1}{2}\int_\gamma\frac{1}{z+1}\cdot dz$$

$$\gamma : z(t)=z=1+e^{it}$$

$$dz=i\cdot e^{it}\cdot dt \quad ; \; 0\leq t\leq 2\pi$$

$$\int_\gamma f(z)\cdot dz=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{i\cdot e^{it}}{e^{it}}\cdot dt-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{i\cdot e^{it}}{2+e^{it}}\cdot dt$$

$$(2+e^{it})'=ie^{it} \; , \; (e^{it})'=i\cdot e^{it}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\cdot dz=\frac{1}{2}\left[\ln e^{it}\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\left[\ln(2+e^{it})\right]_0^{2\pi}$$

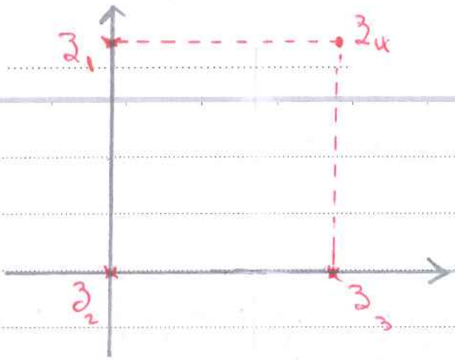
$$=\frac{1}{2}\left[it\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\left[\ln[2+e^{i2\pi}]-\ln[2+e^{0}]\right]$$

$$e^{i(2\pi)}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\cdot dz=i\pi-\frac{1}{2}\{\ln(3)-\ln(3)\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\gamma f(z)\cdot dz=i\pi}$$

2 أحسب التكامل : $\int_\gamma \bar{z}\cdot dz$ حيث γ هو مربع رؤوسه النقاط : $z_1=2i$ ، $z_2=0$ ، $z_3=2$ ، $z_4=2+2i$



الحل:

نلاحظ أن الطريق γ هي عبارة
عن أربع طرق متتالية:
γ_1، γ_2، γ_3، γ_4 لذا وحسب
المبرهنة يكون:

$$\int_{\gamma} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}$$

$\gamma_1 : z_1 z_2$
وهو طريق معادلته: $x=0$

$$z = iy$$
$$dz = i.dy$$
$$\bar{z} = -iy$$

وحدود التكامل من $y=0 \longleftarrow y=2$

$\gamma_2 : z_2 z_3$ وهو طريق معادلته: $y=0$

$$\bar{z} = z = x \Rightarrow dz = dx ,$$

وحدود التكامل من $x=2 \longleftarrow x=0$

$\gamma_3 : z_3 z_4$ وهو طريق معادلته: $x=2$

$$z = 2+iy$$
$$dz = i.dy$$
$$\bar{z} = 2-iy$$

وحدود التكامل من $y=2 \longleftarrow y=0$

$\gamma_4 : z_4 z_1$ وهو طريق معادلته: $y=2$

$$z = x+2i$$
$$\bar{z} = x-2i$$
$$dz = dx$$

وحدود التكامل من $x=0 \longleftarrow x=2$

/ /

وبهذا يكون التكامل المطلوب:

$$\int_\gamma \bar{z}\cdot dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}$$

$$= \int_2^0 -i\cdot y\cdot i\,dy + \int_0^2 x\cdot dx + \int_0^2 (2-iy)\cdot i\cdot dy + \int_2^0 (x-2i)\,dx$$

$$= \int_2^0 y\cdot dy + \int_0^2 x\cdot dx + \int_0^2 (2i+y)\cdot dy + \int_2^0 (x-2i)\cdot dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_2^0 + \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^2 + \left[2iy+\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^2 + \left[\tfrac{1}{2}x^2-2ix\right]_2^0$$

$$= 0-\tfrac{1}{2}(4)+\tfrac{1}{2}(4)-0+4i+\tfrac{1}{2}(4)-0+0-\tfrac{1}{2}(4)+4i$$

$$= \cancel{-2}\cancel{+2}+4i\cancel{+2}\cancel{-2}+4i$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \bar{z}\cdot dz = 4i$$

$\boxed{3}$ أحسب التكامل: $\int_\gamma z\cdot \operatorname{Im} z^2\cdot dz$

حيث $\gamma = \{|z|=1\ ;\ -\pi \le \theta \le 0\}$

أي γ هي الطريق الممثلة لنصف الدائرة الواحدية العلوي باتجاه عقارب الساعة.

الحل:

$$\gamma:\ z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$z^2 = e^{2i\theta} = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$$\operatorname{Im} z^2 = \sin 2\theta$$

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$dz = (-\sin\theta + i\cos\theta)\cdot d\theta\ ;\ -\pi \le \theta \le 0$$

$$\int_\gamma z\cdot \operatorname{Im} z^2\cdot dz = \int_{-\pi}^0 (\cos\theta + i\sin\theta)(\sin 2\theta)\cdot(-\sin\theta + i\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^0 (-\sin\theta\cos\theta + i\cos^2\theta - i\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta)(\sin 2\theta)\cdot d\theta$$

$$\Rightarrow \int_\gamma = \int_{-\pi}^0 (i(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2\sin\theta\cos\theta)(\sin 2\theta)\cdot d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^0 (i\cos 2\theta - \sin 2\theta)(\sin 2\theta)\cdot d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^0 (i\sin 2\theta\cos 2\theta - \sin^2 2\theta)\cdot d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{0} \left(\frac{i}{2}\sin 4\theta - \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\theta\right]\right).d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{0} \left(\frac{i}{2}\sin 4\theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\theta\right).d\theta$$

$$= \frac{i}{2}\int_{-\pi}^{0} \sin 4\theta . d\theta - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0} d\theta + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0} \cos 4\theta . d\theta$$

$$= \frac{i}{8}\int_{-\pi}^{0} 4.\sin 4\theta . d\theta - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0} d\theta + \frac{1}{8}\int_{-\pi}^{0} 4.\cos 4\theta . d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} = \frac{i}{8}\left[-\cos 4\theta\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{2}\left[\theta\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{8}\left[\sin 4\theta\right]_{-\pi}^{0}$$

$$= \frac{i}{8}\left[-\cos 0 + \cos(-4\pi)\right] - \frac{1}{2}\left[0 + \pi\right] + \frac{1}{8}\left[\sin 0 - \sin(-4\pi)\right]$$

$$= \frac{i}{8}\left[-\cancel{1} + \cancel{1}\right] - \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{8}\left[0 - 0\right]$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_{\gamma} z . \operatorname{Im} z^2 . dz = -\frac{\pi}{2}}$$

تعريف النقاط الشاذة لتابع عقدي

نعلم أن التابع $w = f(z)$ التحليلي في المنطقة D هو تابع قابل للاشتقاق في كل نقطة من نقاط المنطقة D ولكن يمكن أن يوجد في المنطقة D عدد محدود من النقاط: $z_1, z_2, \dots, z_n$ يكون فيها التابع غير تحليلياً. نطلق عادة على مثل هذه النقاط اسم: ,, النقاط الشاذة للتابع $f(z)$,, ونقول في هذه الحالة أن التابع $w = f(z)$ تحليلي في المنطقة D باستثناء النقاط الشاذة: $z_1, z_2, \dots, z_n$، وإذا كانت المنطقة D غير محدودة يمكن عندئذ أن يكون عدد النقاط الشاذة غير محدوداً.

إن تعيين النقاط الشاذة لتابع معروض في المنطقة D يتم بتعيين النقاط التي يكون فيها التابع غير معرّف أو غير مستمر أو غير قابل للاشتقاق.

مثال:

نلاحظ أن النقطة: $z = 0$ هي نقطة شاذة بالنسبة للتوابع التالية،

$f(z) = z\cos\frac{2}{z}$ ، $f(z) = e^{\frac{2}{z}}$ ، $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ، $f(z) = \frac{1}{z^4}$

كما أن النقطة: $z = i$ هي نقطة شاذة بالنسبة للتابع: $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$

أما التابع : $f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ فهو يمتلك عدداً غير منتهي من النقاط الشاذة

حيث : $\sin\frac{1}{z}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{z}=2\pi K$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z=\frac{1}{2\pi K}}$$

أنواع النقاط الشاذة :

1- نقاط شاذة معزولة بالنسبة للتابع : $w=f(z)$

2- نقاط شاذة غير معزولة.

النقاط الشاذة المعزولة :

تقسم هذه النقاط إلى ما يلي :

1- نقطة شاذة قابلة للحذف.

2- الأقطاب.

3- نقطة شاذة أساسية.

4- نقاط التفرع.

5- النقاط الشاذة في اللانهاية.

وسنفصل هذا الموضوع في مقرر "تحليل عقدي 2"

/ /

المحاضرة السادسة عشرة الإثنين 10/12/2012

تمرين (1)

قدّر التكامل التالي:

$$\int_\gamma \frac{z^2-1}{z^3-z+1}\cdot dz \quad ; \gamma = 2e^{it}$$

$$0 \le t \le 2\pi$$

الحل:

نعلم أن
$$\boxed{\begin{array}{l} |a-b| \geq |a|-|b| \\ |a+b| \leq |a|+|b| \end{array}}$$

لدينا:

$$f(z) = \frac{z^2-1}{z^3-z+1}$$

$$|z^2-1| \leq |z^2|+|-1|$$

$$\leq |z|^2+1 \qquad z = 2e^{it} \Rightarrow |z| = 2$$

$$\leq 4+1$$

$$\Rightarrow \boxed{|z^2-1| \leq 5} \ (1)$$

$$|z^3-z+1| = |z^3-(z-1)| \geq |z^3|-|z-1|$$

$$\Rightarrow |z^3-z+1| \geq |z|^3-|z|-|1|$$

$$\geq 8-2-1$$

$$\Rightarrow |z^3-z+1| \geq 5 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{|z^3-z+1|} \leq \frac{1}{5}} \ (2)$$

من (1) و (2) نجد أن:

$$|f(z)| = \left|\frac{z^2-1}{z^3-z+1}\right| \leq \frac{5}{5} = 1 = M$$

وحسب المبرهنة: "إذا كان $f(z)$ تابعاً محدوداً بحيث $|f(z)| \leq M$ عندما تقع z على طريق γ طوله L عندئذٍ: $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq L.M$ "

إذاً وبما أن الطريق γ هي الدائرة: $z = 2e^{it}$ التي نصف قطرها 2

إذاً طول الطريق γ هو: $L = 2\pi r = 4\pi$

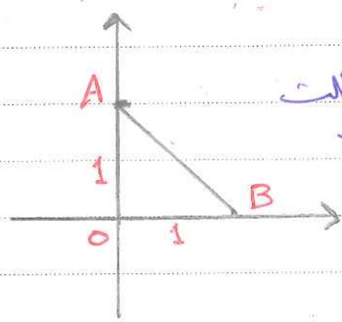
وبهذا يكون :

$$\left|\int_\gamma \frac{z^2-1}{z^3-z+1}\,dz\right| \le 4\pi$$

تمرين (2) :

قيّم ((قدّر)) التكامل التالي : $\int_\gamma \frac{z^2+1}{z^3+1}$

حيث γ هو الطريق من A ــــ B الموضح بالشكل ،



الحل :

نلاحظ أن الطريق γ ما هي إلا وتر المثلث القائم $A\hat{O}B$ إذاً طول الطريق γ حسب فيثاغورث :

$$L=\sqrt{(1)^2+(1)^2} \Longrightarrow \boxed{L=\sqrt{2}}$$

ولدينا :

$$f(z)=\frac{z^2+1}{z^3+1}$$

$$|f(z)|=\left|\frac{z^2+1}{z^3+1}\right|$$

لدينا كسر بسطه أصغر من مقامه حيث $z^2 \le z^3$ لأن z تقع على الطريق γ وبالتالي هي مقدار موجب.

إذاً المقدار هو أصغر من الواحد إذاً :

$$|f(z)|=\left|\frac{z^2+1}{z^3+1}\right| \le 1 = M$$

وبهذا يكون حسب المبرهنة

$$\left|\int_\gamma \frac{z^2+1}{z^3+1}\,dz\right| \le \sqrt{2}$$

تمرين (3) :

أحسب التكامل : $\int_C \frac{dz}{(z-a)^{n+1}}$

حيث C هو محيط دائرة مركزها a ونصف قطرها r وحيث n هو عدد صحيح.

/ /

الحل:

إن معادلة الدائرة التي مركزها a ونصف قطرها r هي ،

$$z-a=re^{i\theta} \Rightarrow z=re^{i\theta}+a$$

بالاشتقاق :

$$dz=ire^{i\theta}\cdot d\theta \quad ; \quad 0\leq\theta\leq 2\pi$$

نعوض في التكامل :

$$\int_c \frac{dz}{(z-a)^{n+1}}=\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\theta}}{(re^{i\theta}+a-a)^{n+1}}d\theta=\int_0^{2\pi} i\cancel{r}\cancel{e^{i\theta}}\cdot\frac{d\theta}{r^{n+\cancel{1}}e^{i(n+1)\theta}}$$

$$=\int_0^{2\pi} i\cdot\frac{d\theta}{r^n\cdot e^{in\theta}}=\int_0^{2\pi}\frac{i}{r^n}\cdot e^{-in\theta}\cdot d\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_c\frac{dz}{(z-a)^{n+1}}=\int_0^{2\pi}\frac{i}{r^n}\cdot e^{-in\theta}\cdot d\theta}$$

ونميز حالتين :

عندما $n=0$ نجد : $1=r^n$

$$\int_c\frac{dz}{(z-a)}=\int_0^{2\pi} i\cdot e^{-i(0)\theta}\cdot d\theta=\int_0^{2\pi} i\cdot d\theta=$$

$$=[i\theta]_0^{2\pi}=2i\pi$$

عندما $n\neq 0$ نجد :

$$\int_c\frac{dz}{(z-a)^{n+1}}=\int_0^{2\pi}\frac{i}{r^n}e^{-in\theta}\cdot d\theta=\frac{-1}{nr^n}\int_0^{2\pi}-in\cdot e^{-in\theta}\cdot d\theta$$

$$=-\frac{1}{nr^n}\left[e^{-in\theta}\right]_0^{2\pi}$$

$$=-\frac{1}{nr^n}\left[e^{-in(2\pi)}-e^{0}\right]$$

$$=-\frac{1}{nr^n}\left[\cos 2n\pi-i\sin 2n\pi\right]+\frac{1}{nr^n}$$

بما أن n عدد صحيح إذاً $2\pi n$ عدد صحيح من الدورات

$$\cos 2\pi n=\cos 0=1$$

$$\sin 2\pi n=\sin 0=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_c\frac{dz}{(z-a)^{n+1}}=-\frac{1}{nr^n}+\frac{1}{nr^n}=0}$$

المنطقة البسيطة الاتصال
والمنطقة متعددة الاتصال

تعريف:

يكون المنحني C الذي معادلته ،

$$z(t) = x(t) + i\,y(t)$$

منحنياً بسيطاً مغلقاً إذا كان كل من: $x(t)$ ، $y(t)$ تابعين للمتحول الحقيقي (t) مستمرين في المجال المغلق $[a, b]$ حيث ،

$$z(a) = z(b)$$

أي إذا كان طرفا المنحني منطبقان .

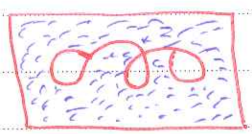
"المنحني البسيط المغلق هو المنحني المغلق الذي لا يتقاطع مع نفسه مثل الدائرة ، المثلث ...."

تعريف:

تكون المنطقة D بسيطة الاتصال إذا كانت تحوي جميع النقاط الواقعة داخل أي منحني بسيط مغلق و جميع نقاط هذا المنحني .

وبهذا نجد أن النقاط الواقعة داخل دائرة أو مربع أو مثلث أو مضلع ما تشكل منطقة بسيطة الاتصال . وحدود الساحة والتي هي نقاط المنحني تشكل مجموعة مغلقة .

وبالعكس فإن كل منطقة غير بسيطة الاتصال تسمى منطقة متعددة الاتصال .



وتحدد المنطقة المتعددة الاتصال بمنحنيين بسيطين أو أكثر .

/ /

أمثلة وتمارين:

1 عيّن المنطقة التي يكون فيها التابع:

$$w = f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-2)}$$

تحليلياً وحدد نوعها ثم مثلها بيانياً.

الحل:

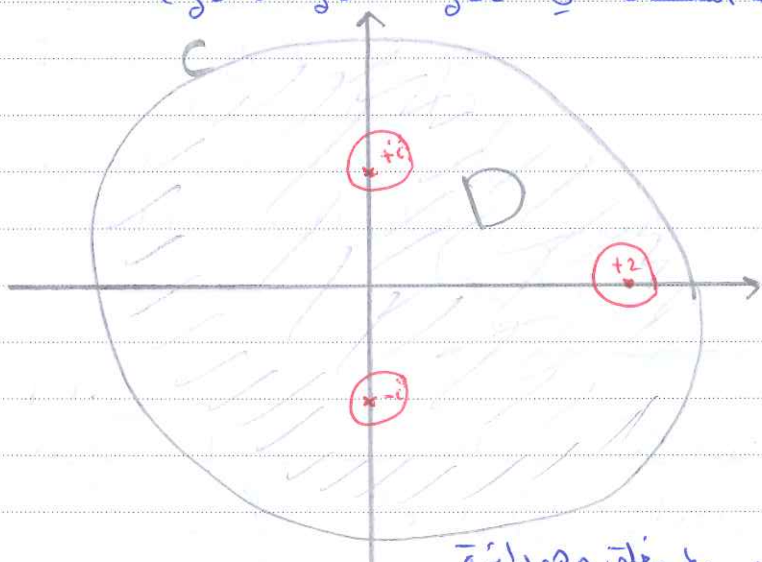
نختار دائرة: $C: |z| = R < \infty$ أي نصف قطرها كبير بما يكفي

نحدد النقاط الشاذة:

$$z - 2 = 0 \Longrightarrow z = 2$$

$$z^2 + 1 = 0 \Longrightarrow (z+i)(z-i) = 0 \Longrightarrow z = \mp i$$

إذاً النقاط الشاذة هي ($z = 2$ ، $z = i$ ، $z = -i$)



نختار C_1 منحني بسيط مغلق وهو دائرة

مركزها $z = 2$ ونصف قطرها صغير بما يكفي.

ونختار C_2 منحني بسيط مغلق وهو دائرة مركزها $z = i$ ونصف قطرها صغير بما يكفي

" C_3 " " " " " " $z = -i$ " " " "

وجميع هذه المنحنيات تقع داخل الدائرة C التي مركزها 0 ونصف قطرها R

بناءً على ذلك يكون التابع w تحليلياً في المنطقة D وهي منطقة متعددة الاتصال

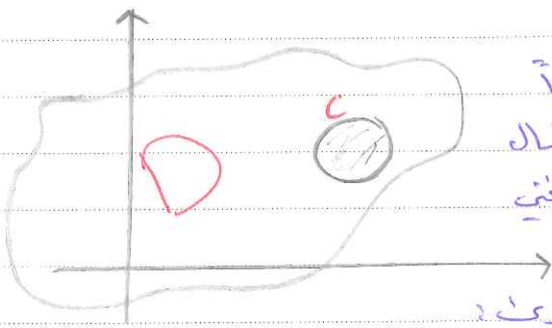
2 ليكن التابع : $w = f(z) = z^2 + 2$

عيّن المنطقة التي يكون فيها w تحليلياً.

الحل:

أن $w = f(z)$ لا يمتلك أي نقاط شاذة لذلك فهو تابع تحليلي في المنطقة D وهي منطقة بسيطة الاتصال وتقع داخل الدائرة: $C : |z| = R < \infty$ التي نصف قطرها كبير بما يكفي.

مبرهنة كوشي



إذا كان $w = f(z)$ تابعاً تحليلياً معرّفاً على منطقة بسيطة الاتصال D عندئذ فإن $\oint_C f(z)dz$ حيث C منحنٍ بسيط مغلق يقع بأكمله داخل D هو تكامل معدوم أي بكلمات أخرى:

" تكامل أي تابع تحليلي على منحنٍ بسيط مغلق هو تكامل معدوم

$$\oint_C f(z).dz = 0$$ "

أمثلة:

بفرض L منحنٍ بسيط مغلق ما و لتكن لدينا التوابع التالية:

$$f_3(z) = ch z , \quad f_2(z) = e^{2z} , \quad f_1(z) = z^{10}$$

عندئذ وبما أن كلاً من التوابع السابقة هي توابع تحليلية على D إذاً وحسب مبرهنة كوشي يكون:

$$\oint_L z^{10}.dz = 0$$

$$\oint_L e^{2z}.dz = 0$$

$$\oint_L ch z = 0$$

نتائج مرهنة كوشي:

1- إذا كان: $w = f(z)$ تابعاً تحليلياً في منطقة بسيطة الاتصال D عندئذ فإن التكامل: $\int_a^b f(z).dz$ لا يتعلق بالطريق المسلوك الذي يصل بين النقطتين a، b في المنطقة D.

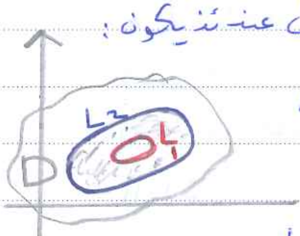
2- إذا كان: $w = f(z)$ تابعاً تحليلياً في منطقة بسيطة الاتصال D وكانت a و $z \in D$ عندئذ يكون:

$$F(z) = \int_a^z f(u).du$$

تابعاً تحليلياً في المنطقة D ويكون: $F'(z) = f(z)$

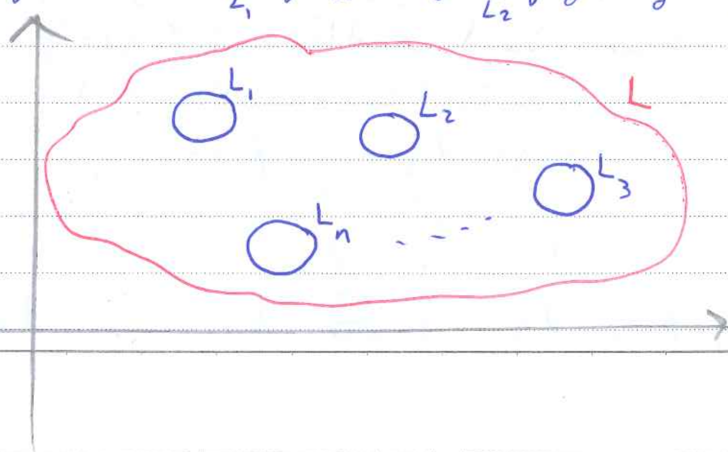
3- ليكن: $w = f(z)$ تابعاً تحليلياً في المنطقة الواقعة بين المنحنيين البسيطين المغلقين L_1، L_2 بحيث يقع أحدهما بأكمله ضمن الآخر. وبحيث يكون التابع $w = f(z)$ تحليلياً في كل نقطة من نقاط هذين المنحنيين عندئذ يكون:

$$\int_{L_1} f(z).dz = \int_{L_2} f(z).dz$$



4- ليكن: $w = f(z)$ تابعاً تحليلياً في المنطقة الواقعة بين المنحنيات: $L_1, L_2, \dots, L_n$ والمنحني L. وبشرط L_i حيث $i = 1, \dots, n$ غير متقاطعة مع بعضها وجميعها منحنيات بسيطة مغلقة. كما أن $w = f(z)$ هو تابع تحليلي على المنحنيات L_i ; $i = 1, \dots, n$ عندئذ يكون:

$$\int_L f(z).dz = \int_{L_1} f(z).dz + \int_{L_2} f(z).dz + \dots + \int_{L_n} f(z).dz$$



/ /

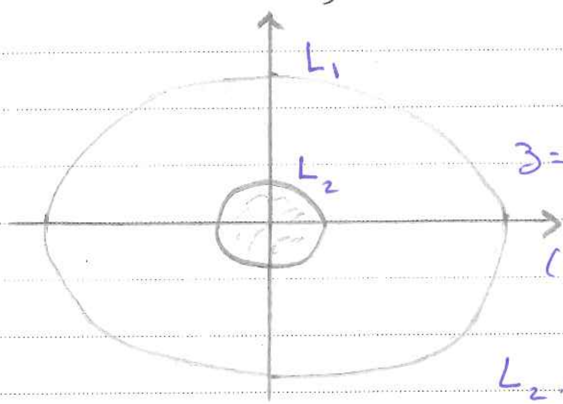
5- إذا كان $w=f(z)$ تابعاً تحليلياً في منطقة بسيطة الاتصال D وكان $F(z)$ هو التابع الأصلي له، عندئذ ومن أجل أي منحني يصل بين نقطتين a, b حيث: $a, b \in D$ يكون:

$$\int_a^b f(z)\,dz = F(z)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

أمثلة وتمارين:

① أحسب التكامل: $\int_{L_1} \frac{dz}{z}$ حيث L_1 هو القطع الناقص الذي معادلته:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$



الحل:

• نلاحظ أن $f(z) = \frac{1}{z}$ له نقطة شاذة وهي $z = 0$ لذا نختار المنحني L_2 وهو الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها (1)

$$L_2: \quad |z| = 1$$

عندئذ نلاحظ مايلي:

ⓐ المنحني L_2 يقع بأكمله داخل القطع الناقص المفروض L_1.

ⓑ التابع: $f(z) = \frac{1}{z}$ هو تابع تحليلي في المنطقة الواقعة بين L_1, L_2

ⓒ التابع: $f(z) = \frac{1}{z}$ هو تابع تحليلي في كل نقطة من نقاط L_1 ونقاط L_2

إذاً وحسب النتيجة الثالثة من نتائج مبرهنة كوشي يكون:

$$\int_{L_1} f(z)\,dz = \int_{L_2} f(z)\,dz$$

$$z = e^{i\theta} \Longleftarrow L_2: |z| = 1$$

$$dz = i\,e^{i\theta}\,d\theta \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\int_{L_2} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{i\,e^{i\theta}}{e^{i\theta}}\,d\theta = \int_0^{2\pi} i\,d\theta = [i\theta]_0^{2\pi}$$

/ /

ومنه يكون:

$$\int_{L_1} f(z).dz = \int_{L_2} \frac{dz}{z} = 2i\pi$$

[2] ليكن لدينا التابع:

$$w = f(z) = z^3 - iz^2 - 5z + 2i$$

وليكن لدينا المنحني: $L: |z| = 1$ والمطلوب: حقق مبرهنة كوشي

الحل:

نلاحظ أن: $w = f(z) = z^3 - iz^2 - 5z + 2i$ هو تابع تحليلي في جميع نقاط المستوي العقدي وبالتالي $w = f(z)$ تحليلي على المنطقة L التي تمثل الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 1. إذاً L هي منطقة بسيطة الاتصال.

ونريد التحقق من أن تكامل $f(z)$ على L معدوم:

$$L: |z| = 1 \iff z = e^{it}$$

$0 \leq t \leq 2\pi$ حيث $dz = i e^{it}.dt$

$$\int_L f(z).dz = \int_0^{2\pi} (e^{3it} - i e^{2it} - 5e^{it} + 2i)(i e^{it}).dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (i e^{4it} + e^{3it} - 5i e^{2it} - 2e^{it}).dt$$

$$= \left[\frac{1}{4} e^{4it} + \frac{1}{3i} e^{3it} - \frac{5}{2} e^{2it} - \frac{2}{i} e^{it}\right]_0^{2\pi}$$

$$\Rightarrow \int_L f(z).dz = \frac{1}{4} e^{8i\pi} + \frac{1}{3i} e^{6i\pi} - \frac{5}{2} e^{4i\pi} - \frac{2}{i} e^{2i\pi}$$
$$- \frac{1}{4} e^{0} - \frac{1}{3i} e^{0} + \frac{5}{2} e^{0} + \frac{2}{i} e^{0}$$

نلاحظ أن:

$$e^{8i\pi} = \cos 8\pi + i\sin 8\pi = 1$$

$$e^{6i\pi} = \cos 6\pi + i\sin 6\pi = 1 = e^{4i\pi} = e^{2i\pi}$$

إذاً: $\int_L f(z).dz = \frac{1}{4} + \frac{1}{3i} - \frac{5}{2} - \frac{2}{i} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3i} + \frac{5}{2} + \frac{2}{i}$

$$\Rightarrow \boxed{\int_L f(z).dz = 0}$$

إذاً تحققت مبرهنة كوشي.

/ /

3 أوجد ناتج التكامل:

$$\int_{i}^{1+i} z^2 \cdot dz$$

الحل:

نلاحظ أن $f(z) = z^2$ هو تابع تحليلي في منطقة بسيطة الاتصال

إذاً وحسب النتيجة الخامسة يكون:

$$\int_a^b f(z) \cdot dz = F(b) - F(a)$$

حيث: $F(z)$ هو التابع الأصلي:

$$F(z) = \frac{1}{3} z^3$$

إذاً:

$$\int_{i}^{1+i} z^2 \cdot dz = \frac{1}{3}(1+i)^3 - \frac{1}{3}(i)^3$$

$$= \frac{1}{3}[1 + 3i + 3i^2 + i^3] - \frac{1}{3} i^3$$

$$= \frac{1}{3} + i - 1 = i - \frac{2}{3}$$

---

4 إذا كان C هو المنحني:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

يصل بين النقطتين: $z_1(1,1)$ ، $z_2(2,3)$ أحسب التكامل:

$$\int_C (12z^2 - 4iz) \cdot dz$$

الحل:

بما أن التابع تحليلي إذاً التكامل لا يتعلق بالطريق المسلوك. إذاً

$$\int_C (12z^2 - 4iz) \cdot dz = \int_{1+i}^{2+3i} (12z^2 - 4iz) \cdot dz$$

$$= \left[4z^3 - 2iz^2\right]_{1+i}^{2+3i} = 4(2+3i)^3 - 2i(2+3i)^2$$

$$- 4(1+i)^3 + 2i(1+i)^2$$

$$\Rightarrow \int_C = 4(8 + 36i + 54i^2 + 27i^3] - 2i[4 + 12i + 9i^2]$$

$$- 4(1 + 3i + 3i^2 + i^3) + 2i(1 + 2i + i^2)$$

$$\int_C = 32 - 216 + 144i - 108i - 8i + 18i + 24 - 4 + 12 - 12i + 4i - 4$$

$$\Longrightarrow \int_C (12z^2-4iz)\cdot dz = 38i - 156$$

ملاحظة: يمكن تعويض $z = x+iy$ من معادلة المنحنى وإيجاد dz بدلالة dx والمكاملة بالنسبة لـ x ولكن هذه الطريقة طويلة وإن كانت صحيحة ولهذا كانت النتائج في هذه المحاضرة لاختصار الحل قدر الإمكان

5 أحسب التكامل:

$$\int_{-1}^{2-i} z\cdot dz$$

الحل:

إن: $f(z) = z$ هو تابع تحليلي في جميع نقاط المستوي العقدي

إذاً تكامله لا يتعلق بالطريق المسلوك.

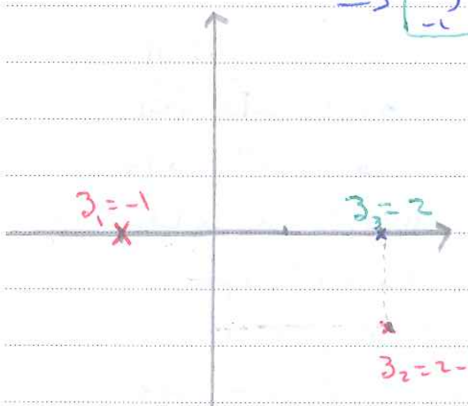
$$\int_{-1}^{2-i} z\cdot dz = F(2-i) - F(-1)$$

حيث $F(z)$ هو التابع الأصلي لـ $f(z)$:

$$F(z) = \frac{1}{2}z^2$$

$$\int_{-1}^{2-i} z\cdot dz = \frac{1}{2}(2-i)^2 - \frac{1}{2}(-1)^2 = \frac{1}{2}(3-4i) - \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_{-1}^{2-i} z\cdot dz = 1-2i}$$



طريقة ثانية:

يمكن أن نجزئ الطريق z_1z_2 إلى الطريقين: γ_1 z_1z_3 و γ_2 z_3z_2

فيصبح:

$$\int_{z_1}^{z_2} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$$

إن γ_1 هي الطريق الذي معادلته $y=0$

$z = x \Longrightarrow dz = dx$ وحدود التكامل من $x=-1$ ← $x=2$

إن γ_2 هي الطريق الذي معادلته: $x=2$:

$z = 2+iy \Longrightarrow dz = i\cdot dy$ وحدود التكامل من $y=0$ ← $y=-1$

ALADIB.net

بالتعويض نجد:

$$\int_{-1}^{2-i} z\,dz = \int_{-1}^{2} x\,dx + \int_{0}^{-1} (2+iy)\,i\,dy$$

$$= \int_{-1}^{2} x\,dx + \int_{0}^{-1} (2i-y)\,dy$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2} + \left[2iy - \frac{1}{2}y^2\right]_{0}^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}(4) - \frac{1}{2}(1) + 2i(-1) - \frac{1}{2}(1) - 0$$

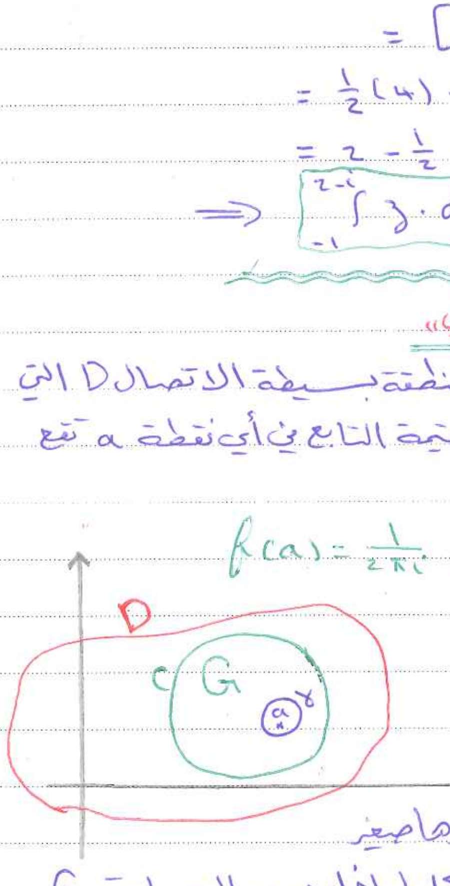
$$= 2 - \frac{1}{2} + 2i - \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_{-1}^{2-i} z\,dz = 1+2i}$$

صيغة كوشي التكاملية «تكامل كوشي»

إذا كان التابع $w = f(z)$ تحليلياً في المنطقة بسيطة الاتصال D التي تحوي المنحني المنتظم المغلق C عندئذٍ فإن قيمة التابع في أي نقطة a تقع داخل المنحني C تعطى بالعلاقة:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(z)}{(z-a)}\,dz$$



الإثبات:

لتكن D ساحة وبسيطة الاتصال.

ولتكن G ساحة محتواة بتراص في D.

ولنأخذ a نقطة من الساحة G.

نرسم دائرة γ مركزها a ونصف قطرها صغير بقدر كافٍ «ρ» بحيث تقع الدائرة γ بأكملها داخل حدود الساحة G وهي المنحني المنتظم C. عندئذٍ نجد:

$f(z)$ تحليلي في ساحة محتواة بتراص ضمن مجموعة أخرى. بعبارة أخرى $f(z)$ تحليلي في جميع النقاط الواقعة داخل C وخارج γ وهو مستمر على كلٍ منهما. أي أنه يمكن تطبيق نتائج مبرهنة كوشي في حال منطقة متعددة

~~ال~~ الاتصال أي أن:

$$\int_c \frac{f(z)}{(z-a)}\cdot dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)}\cdot dz$$

ولكن γ هي دائرة أي أن حدود تكاملها هي $[0, 2\pi]$

$$\Rightarrow \int_c \frac{f(z)}{(z-a)}\cdot dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{(z-a)} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z)-f(a)+f(a)}{(z-a)} dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\cdot dz + \int_0^{2\pi} \frac{f(a)}{z-a}\cdot dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\cdot dz + f(a)\int_0^{2\pi} \frac{dz}{z-a}$$

وجدنا في التمرين (3) في بداية المحاضرة عند حساب: $\int \frac{dz}{(z-a)^{n+1}}$

أنه ومن أجل $n=0$ فإن: $\int_0^{2\pi} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$

ولنحسب الآن $\int_0^{2\pi} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\cdot dz$

نأخذ طويلة هذا التكامل:

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\cdot dz\right| \leq \int_0^{2\pi} \left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right|\cdot dz$$

ولكن لدينا:

$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ محدود حيث ~~ـــ~~ المكاملة

$f(z)$ هي ضمن حدود المساحة R بين C و γ إذاً $|f(z)-f(a)| < \varepsilon$

و $z-a$ أيضاً محدود حيث $|z-a| \leq r$

إذاً

$$\int_0^{2\pi} \left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right|\cdot dz < \frac{\varepsilon}{2\pi r}\cdot \ell$$

حيث ℓ طول الطريق γ أي هو محيط الدائرة ويساوي $2\pi r$ وبالتالي:

$$\int_0^{2\pi} \left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right|\cdot dz < \frac{\varepsilon}{2\pi r}\cdot \cancel{2\pi r} = \varepsilon$$

وبالتالي أصبح لدينا وبما أن التكامل هو الفرق بين قيمتي التابع الأصلي عند حدي التكامل نجد أن هذا الفرق أصغر من عدد حقيقي موجب أي أن القيمتين متساويتين وبالتالي قيمة التكامل معدومة.

« يوجد تمرين في التحليل الدالي »

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\cdot dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{f(z)}{z-a}\cdot dz = 0 + f(a)\cdot 2\pi i$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\cdot dz}$$

وهو المطلوب.

المحاضرة السابعة عشرة   الأربعاء 12/12/2012

مسائل وتمارين:

1 احسب: $\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\cdot dz$ حيث: $C: |z-2|=1$

الحل:

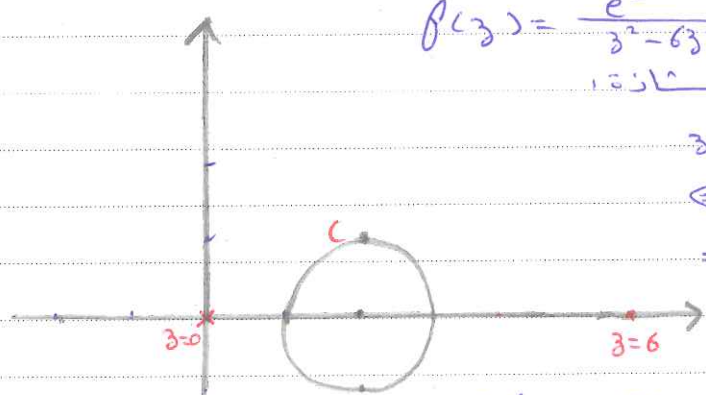
$$f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}$$

أ- نوجد النقاط الشاذة:

$$z^2-6z=0$$

$$\Leftrightarrow z(z-6)=0$$

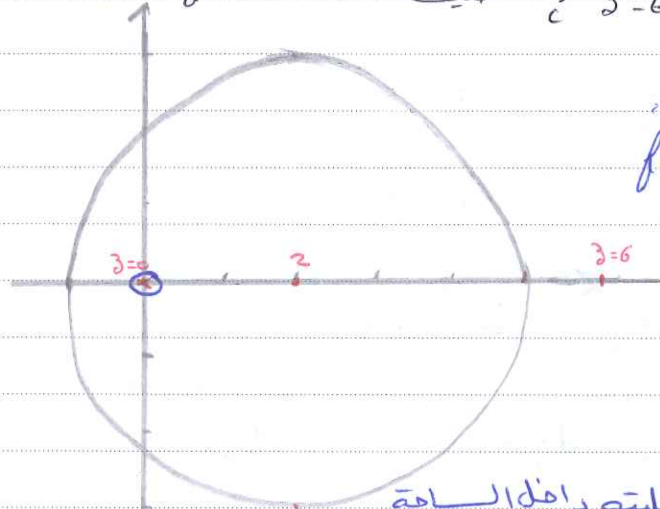
$$\Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ z=6 \end{cases}$$



نلاحظ أن التابع المستكمل $f(z)$ تحليلي في الساحة المغلقة والمحدودة بالدائرة C التي مركزها $z(2,0)$ ونصف قطرها $r=1$ إذاً وحسب مبرهنة كوشي يكون:

$$\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\cdot dz = 0$$

2 أحسب $\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz$ حيث : $C: |z-2|=3$



الحل:

نوجد النقاط الشاذة:

$$f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}$$

$$z^2-6z=0$$

$$z(z-6)=0$$

$$\begin{cases} z=0 \\ z=6 \end{cases}$$

التابع المستكمل يفقد تحليليته داخل الساحة المغلقة والمحدودة بالدائرة: $C: |z-2|=3$ عند النقطة $z=0$

إذاً لدينا نقطة شاذة واحدة:

$$f(z) = \frac{e^{z^2}}{z(z-6)}$$

إن التابع: $g(z) = \frac{e^{z^2}}{z-6}$ هو تابع تحليلي داخل الساحة المغلقة و المحدودة C نطبق صيغة كوشي التكاملية فيكون:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C \frac{g(z)}{z}\,dz = 2\pi i\, g(0)$$

حيث $z=0$ هي النقطة الشاذة للتابع f

$$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{e^0}{0-6}\right) = 2\pi i\left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$\boxed{\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z} = \frac{-\pi i}{3}}$$

3 أحسب $\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz$ حيث : $C: |z-2|=5$

الحل:

إن النقاط الشاذة للتابع هي: $z=0$ ، $z=6$

والتابع المستكمل يفقد تحليليته داخل الساحة المغلقة والمحدودة بالدائرة C عند النقطتين $z=0$ ، $z=6$.

/ /

لايمكن تطبيق صيغة كوشي التكاملية لوجود أكثر من نقطة شاذة واحدة نفرق الكسر:

$$\frac{e^{z^2}}{z^2-6z} = \frac{e^{z^2}}{z(z-6)}$$

$$= e^{z^2}\left[\frac{A}{z} + \frac{B}{z-6}\right]$$

بالحساب نجد: $B = -\frac{1}{6}$ ، $A = \frac{1}{6}$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{6}\cdot\frac{e^{z^2}}{z-6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{e^{z^2}}{z}$$

وبالتالي يكون:

$$\int_C f(z)\cdot dz = \frac{1}{6}\int_C \frac{e^{z^2}}{z-6}\cdot dz - \frac{1}{6}\int_C \frac{e^{z^2}}{z}\cdot dz$$

ان كلاً من التابعين المستكملين ينتفي تحليلته عند نقطة واحدة أي يمكن تطبيق صيغة كوشي التكاملية على كل منهما على حدة.

$$\int_C f(z)\cdot dz = \frac{1}{6}(2\pi i\, e^{36}) - \frac{1}{6}(2\pi i\, e^{0})$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\cdot dz = \frac{\pi i}{3}e^{36} - \frac{\pi i}{3}}$$

طريقة ثانية لحساب التكامل:

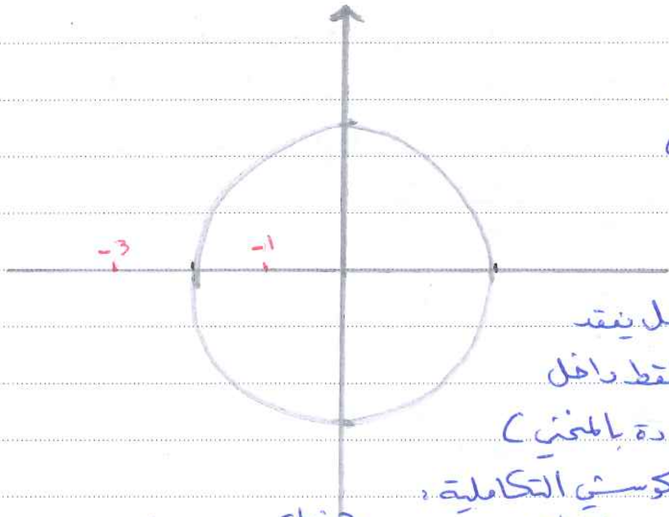
نحيط كلاً من النقطتين الشاذتين: $z=0$ ، $z=6$ بدائرتين الأولى لا مركزها $z=0$ والثانية لا مركزها $z=6$ بحيث نصفي قطري هاتين الدائرتين صغير بما يكفي وبحيث تقع كلاهما داخل c دون أن تتقاطعا معها ودون أن تتقاطعا فيما بينهما عندئذ يمكن تطبيق كوشي من أجل ساحة متعددة الاتصال. وبالتالي يكون:

$$\int_c = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$$

ونصل إلى نفس الناتج السابق.

4 أحسب التكامل: $\int_C \frac{ch\, iz}{z^2+4z+3}\, dz$ حيث: $C: |z|=2$

الحل:



أ- نوجد النقاط الشاذة:

$$z^2+4z+3=0$$

$$(z+3)(z+1)=0$$

$$\begin{cases} z=-3 \\ z=-1 \end{cases}$$

نلاحظ أن التابع المستكمل يفقد تحليليته عند نقطة واحدة فقط داخل الساحة المغلقة والمحدودة بالمنحني C

إذاً يمكن تطبيق صيغة كوشي التكاملية:

$$f(z)=\frac{ch\, iz}{z^2+4z+3}=\frac{ch\, iz}{(z+3)(z+1)}$$

ولدينا: $ch\, iz = \cos z$ إذاً:

$$f(z)=\frac{\cos z}{(z+3)(z+1)}=\frac{\frac{\cos z}{z+3}}{z+1}=\frac{g(z)}{z+1}$$

$$\int_C f(z)\cdot dz = 2\pi i\cdot g(-1) = 2\pi i\left[\frac{\cos(-1)}{-1+3}\right]$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_C \frac{ch\, iz}{z^2+4z+3}\, dz = \pi i \cos 1}$$

5 أحسب التكامل التالي:

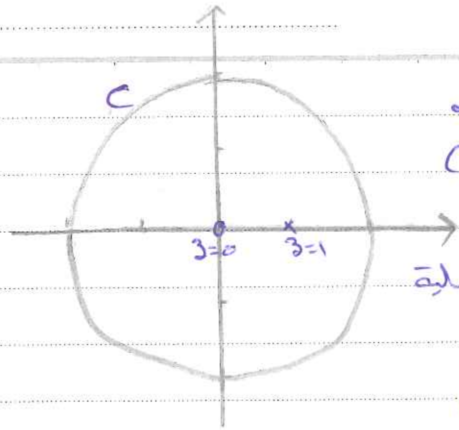
$$\int_C \frac{\sin \pi z}{z(z-1)}\, dz$$

حيث: $C: |z|=2$

الحل:

* النقاط الشاذة للتابع $f(z)=\frac{\sin \pi z}{z(z-1)}$ هي: $z=0$ ، $z=1$

/ /



فالتابع المستكمل يفقد تحليليته
داخل الساحة المغلقة المحدودة بالمنحني C
عند نقطتين : $z=0$ ، $z=1$
لهذا لا يمكن تطبيق صيغة كوشي التكاملية
يمكننا كتابة $f(z)$ بشكل آخر.

$$f(z)=\frac{\sin \pi z}{z(z-1)}$$

$$f(z)=\sin \pi z\left[\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}\right]$$

$$f(z)=-\frac{\sin \pi z}{z}+\frac{\sin \pi z}{z-1}$$

$$\int_C f(z)\cdot dz=-\int_C \frac{\sin \pi z}{z}\cdot dz+\int_C \frac{\sin \pi z}{z-1}\cdot dz$$

فلاحظ أن كلاً من التابعين الجزئيين المستكملين له نقطة شاذة واحدة لهذا يمكننا تطبيق صيغة كوشي التكاملية على كل منهما على حدة

$$\int_C f(z)\cdot dz=-2\pi i\,[\sin \pi z]_{z=0}+2\pi i\,[\sin \pi z]_{z=1}$$
$$=-2\pi i \sin 0+2\pi i \sin \pi=0$$

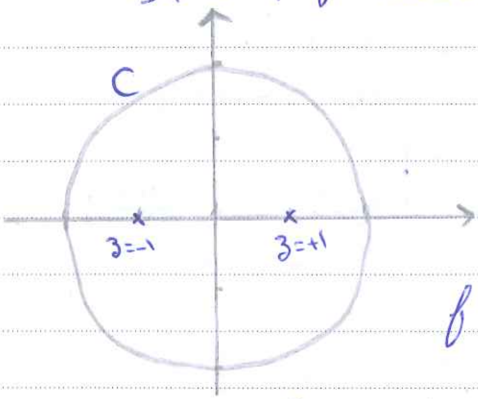
6 أحسب التكامل: $\int_C \frac{\cos z}{z^2-1}\cdot dz$
حيث : $C: |z|=2$

الحل:

النقاط الشاذة للتابع $f(z)=\frac{\cos z}{z^2-1}$ هي: $z=+1$ ، $z=-1$
التابع المستكمل يفقد تحليليته ضمن الساحة المغلقة والمحدودة بالمنحني C عند نقطتين : $z=1$ ، $z=-1$.
نكتب $f(z)$ بشكل آخر أو نطبق نتائج برهنة كوشي على منطقة

High above the mountains far across the sea .. I can hear your voice

متعددة الاتصال ،، الأسهل تفريق الكسر وكتابة f بشكل جديد ،،



$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2-1} = \frac{\cos z}{(z+1)(z-1)}$$

$$f(z) = \cos z\left[\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1}\right]$$

بالحساب نجد أن $A = \frac{1}{2}$ ، $B = -\frac{1}{2}$

إذاً:

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos z}{z-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos z}{z+1}$$

وبحساب التكامل نجد:

$$\int_C f(z)\,dz = \frac{1}{2}\int_C \frac{\cos z}{z-1}\,dz - \frac{1}{2}\int_C \frac{\cos z}{z+1}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi i\cos 1) - \frac{1}{2}(2\pi i\cos -1)$$

$$= \pi i\cos 1 - \pi i\cos 1 = 0$$

حيث: $\boxed{\cos 1 = \cos -1}$

7 أحسب التكامل:

$$\int_C \frac{dz}{z^4+1}$$

حيث: $C: |z - 1 + 2i| = \frac{1}{4}$

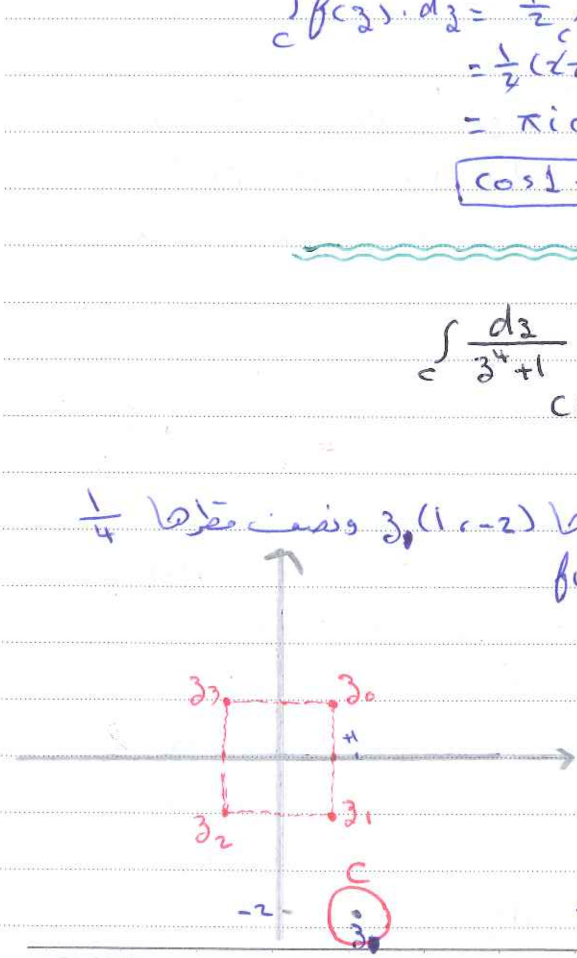
الحل:

إن C هو منحني الدائرة التي مركزها $z_0 (1 ، -2)$ ونصف قطرها $\frac{1}{4}$

ولنوجد النقاط الشاذة للتابع $f(z)$

$$z^4 + 1 = 0 \Leftarrow z^4 = -1$$

ونبحث عن $z^{\frac{1}{4}}$



$$z_K = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta + 2\pi K}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi K}{n}\right]$$

حيث: $K = 0, 1, 2, 3$ ، $n = 4$

$r = 1$ ، $\theta = \pi$

$$z_0 = (1)^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

/ /

$$\boxed{z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$z_1 = (1)^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{\pi+2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{4}\right]$$

$$z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$z_2 = (1)^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{\pi+4\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{4}\right]$$

$$z_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$z_3 = (1)^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{\pi+6\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+6\pi}{4}\right]$$

$$z_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

نلاحظ أن الجذور الأربعة تقع خارج الدائرة C.

إذاً التابع المستكمل تحليلي داخل المساحة المغلقة والمحدودة بمنحني C

وبالتالي حسب مبرهنة كوشي يكون:

$$\int_C \frac{dz}{z^4+1} = 0$$

8 أحسب التكامل:

$$\int_C \frac{z^2+1}{(z-3)^5}\, dz$$

حيث: $C : |z| = 2$

الحل:

أوجد النقاط الشاذة:

$$(z-3)^5 = 0$$

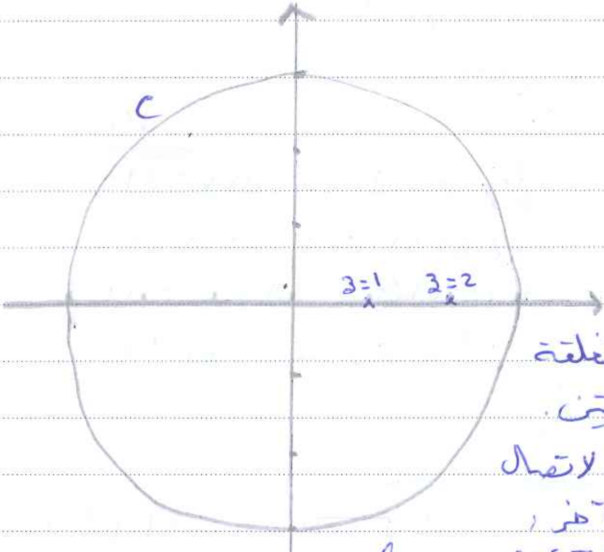
$$z = 3 \Leftarrow z-3 = 0 \Leftarrow$$

ان التابع المستكمل تحليلي داخل المساحة المغلقة والمحدودة بمنحني الدائرة التي مركزها (0) ونصف قطرها (2) اذاً حسب مبرهنة كوشي:

$$\int_C \frac{z^2+1}{(z-3)^5}\, dz = 0$$

9 أحسب التكامل: $\oint_C \frac{\cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} \, dz$

حيث: $C: |z|=3$



الحل:

النقاط الشاذة هي:

$$\begin{cases} z=1 \\ z=2 \end{cases}$$

إن التابع المستكمل يفقد تحليليته ضمن المساحة المغلقة والمحدودة بالمنحني C عند نقطتين.

نكامل على ساحة متعددة الاتصال

أو نكتب $f(z)$ بشكل آخر:

$$f(z) = \frac{\cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} = \cos \pi z^2 \left[\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} \right]$$

بالحساب نجد أن: $A=-1$ ، $B=+1$

$$\Rightarrow f(z) = -\frac{\cos \pi z^2}{z-1} + \frac{\cos \pi z^2}{z-2}$$

وبهذا يكون:

$$\oint_C f(z) \cdot dz = \oint_C \frac{\cos \pi z^2}{z-2} \cdot dz - \oint_C \frac{\cos \pi z^2}{z-1}$$

وحسب صيغة كوشي التكاملية يكون:

$$\oint_C f(z) \cdot dz = 2\pi i \cos \pi (2)^2 - 2\pi i \cos \pi (1)^2$$

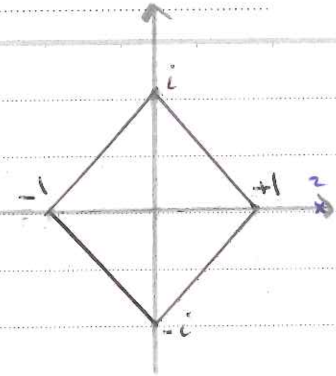
$$= 2\pi i \cos 4\pi - 2\pi i \cos \pi$$

$$= 2\pi i (1) - 2\pi i (-1)$$

$$= 2\pi i + 2\pi i$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_C f(z) \cdot dz = 4\pi i}$$

10 أحسب التكامل :



$$\int_C \frac{e^z \cos z}{(z-2)^2}\, dz$$

حيث C هو المنحني الموضح بالشكل :

الحل :

النقاط الشاذة للتابع $f(z)$:

$$(z-2)^2 = 0 \Longrightarrow z = 2$$

إن التابع مستمر داخل المساحة المغلقة والمحدودة بالمنحني C إذاً حسب مبرهنة كوشي :

$$\boxed{\int_C \frac{e^z \cos z}{(z-2)^2}\, dz = 0}$$

11 أحسب التكامل التالي :

$$\int_C \frac{z e^z}{z^2+4}\, dz$$

وذلك في الحالات التالية :

A) $C_1 : \ |z| = 1$

B) $C_2 : \ |z-2i| = 1$

C) $C_3 : \ |z+2i| = 1$

الحل :

النقاط الشاذة للتابع $f(z)$:

$$z^2 + 4 = 0$$

$$z^2 = -4$$

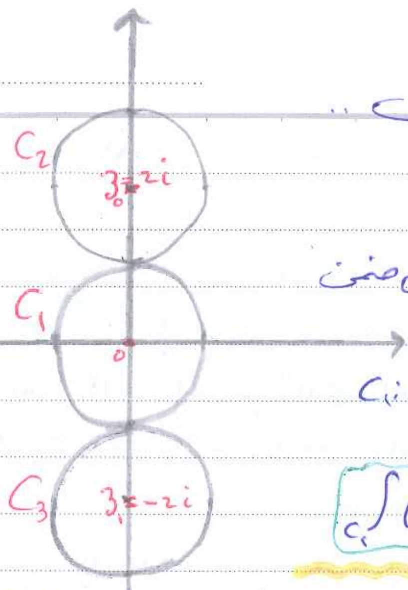
ونبحث عن $z^{\frac{1}{2}}$ ؛ $z_k = (r)^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 2\pi K}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\pi K}{n}\right]$

حيث : $\theta = \pi \ ، \ K = 0, 1 \ ، \ r = 4 \ ، \ n = 2$

$$z_0 = (4)^{\frac{1}{2}} \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right] = 2[0+i]$$

$$\Longrightarrow z_0 = 2i$$

$$z_1 = (4)^{\frac{1}{2}} \left[\cos \frac{\pi + 2\pi}{2} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{2}\right] = 2[0-i]$$



غريبة الناس ..

$\Rightarrow z_1 = -2i$

ونلاحظ في الحالة:

A) التابع المستكمل تحليلي ضمن حدود الساحة المغلقة والمحدودة بالمنحني: $C_1: |z|=1$ اذا حسب مبرهنة كوشي:

$$\boxed{\int_{C_1} f(z)\,dz = 0}$$

B) التابع المستكمل يفقد تحليليته ضمن الساحة المغلقة والمحدودة بالمنحني $C_2: |z-2i|=1$ عند النقطة: $z_0=2i$ اذاً حسب صيغة كوشي التكاملية يكون:

$$\int_{C_2} \frac{z e^z}{z^2+4}\,dz = 2\pi i\,[2i\,e^{2i}]$$
$$= -4\pi e^{2i}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{C_2} \frac{z e^z}{z^2+4} = -4\pi[\cos 2 + i\sin 2]}$$

C) التابع المستكمل يفقد تحليليته ضمن الساحة المغلقة والمحدودة بالمنحني $C_3: |z+2i|=1$ عند النقطة: $z_1=-2i$ اذاً حسب صيغة كوشي التكاملية يكون:

$$\int_{C_3} \frac{z e^z}{z^2+4}\,dz = 2\pi i\,\{(-2i)\,e^{-2i}\}$$
$$= 4\pi e^{-2i}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{C_3} \frac{z e^z}{z^2+4}\,dz = 4\pi[\cos 2 - i\sin 2]}$$

/ /

المحاضرة الثامنة عشرة "الأخيرة" الإثنين 17/12/2012

مبرهنة المشتقات المتتالية لتابع تحليلي في نقطة:

إذا كان $w = f(z)$ تابعاً تحليلياً في منطقة بسيطة الاتصال D و التي تحوي المنحني المنتظم C مع داخله فإن مشتق التابع $f(z)$ من المرتبة n في كل نقطة داخل C يعطى بالعلاقة:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \cdot dz$$

و يمكننا أن نكتب:

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \cdot dz = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(a)$$

مثال (1):

أوجد التكامل: $I = \int_C \frac{z^2+1}{(z-1)^2} \cdot dz$ حيث $C: |z| = 2$

الحل:

حسب مبرهنة المشتقات الجزئية يكون:

$$I = \int_C \frac{z^2+1}{(z-1)^2} \cdot dz = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(a)$$

حيث: $a = 1 \ , \ n = 1$

$$f'(a) = (z^2+1)' = 2(1) = 2$$

$$\Rightarrow I = \int_C \frac{z^2+1}{(z-1)^2} \cdot dz = \frac{2\pi i}{1}(2)$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 4\pi i}$$

مثال (2):

أحسب التكامل: $I = \int_C \frac{\cos z}{z^3} \cdot dz$ حيث $C: |z| = 2$;

الحل:

حسب مبرهنة المشتقات الجزئية $\int_C \frac{f(z) \cdot dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a)$

/ /

$a=0 \ , \ n=2$

$$f''(0) = (\cos z)''\Big|_0 = -\cos 0 = -1$$

$$\Longrightarrow I = \int_C \frac{\cos z}{z^3} \cdot dz = \frac{2\pi i}{2!} \cdot (-1) = -\pi i$$

مثال (3):

أحسب التكامل: $\int_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3} \cdot dz$ ، حيث

$C : |z|=1$

الحل:

حسب برهنة المشتقات الجزئية لدينا: $a=1 \ , \ n=2$

$$\int_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3} \cdot dz = \frac{2\pi i}{2!} (5z^2-3z+2)''\Big|_{z=1}$$

$$= \pi i \, (10) = 10\pi i$$

طريقة ثانية:

نلاحظ أن: $f(z) = 5z^2-3z+2$

$$= 5z^2 - 10z + 5 + 10z - 5 - 3z + 2$$

$$= 5(z^2-2z+1) + 7z - 7 + 7 - 3$$

$$= 5(z-1)^2 + 7(z-1) + 4$$

إذاً يمكننا أن نكتب:

$$\frac{f(z)}{(z-1)^3} = \frac{5(z-1)^2}{(z-1)^3} + \frac{7(z-1)}{(z-1)^3} + \frac{4}{(z-1)^3}$$

وبهذا يكون:

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-1)^3} \cdot dz = 5\int_C \frac{dz}{z-1} + 7\int_C \frac{dz}{(z-1)^2} + 4\int_C \frac{dz}{(z-1)^3}$$

ووجدنا في محاضرة سابقة (محاضرة 16 تمرين 3) أن:

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^{n+1}} = \begin{cases} 0 & ; \ n \neq 0 \\ 2\pi i & ; \ n = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3} \cdot dz = 5(2\pi i) + 7(0) + 4(0) = 10\pi i$$

/ /

مثال (4)

أوجد التكامل: $\int_C \frac{ch z}{(z+1)^3(z-1)} \cdot dz$ حيث:

$C: |z| = 2$

الحل:

نلاحظ أنه لدينا نقطتان شاذتان ينعدم عندهما $\frac{ch z}{(z+1)^3(z-1)}$ تحليليته داخل الساحة المغلقة والمحدودة بالمنحني C. هما $z=-1$ ، $z=1$

نحيط كلاً من النقطتين بدائرة نصف قطرها صغير كفاية بحيث لا تتقاطع الدائرتان مع بعضها ولا تتقاطعا مع المنحني C عندئذ يمكننا أن نكامل على ساحة متعددة الاتصال فيكون:

$$\int_C = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$$

إذاً يمكننا أن نكتب:

$$\int_C \frac{ch z}{(z+1)^3(z-1)} \cdot dz = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{ch z}{(z+1)^3}}{z-1} \cdot dz + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{ch z}{z-1}}{(z+1)^3} \cdot dz$$

حيث:

γ_1 هي الدائرة التي مركزها $z=1$ ، γ_2 هي الدائرة التي مركزها $z=-1$

$$\int_C \frac{ch z}{(z+1)^3(z-1)} \cdot dz = 2\pi i + \frac{2\pi i}{2!} \left(\frac{ch z}{z-1}\right)'' \Big|_{z=-1}$$

$$\left(\frac{ch z}{z-1}\right)'' = \left(\frac{sh z(z-1) - ch z}{(z-1)^2}\right)' = \left(\frac{z sh z - sh z - ch z}{(z-1)^2}\right)'$$

$$= \frac{(z-1)^2(\cancel{sh z} + z ch z - ch z - \cancel{sh z}) - (2z-2)(z sh z - sh z - ch z)}{(z-1)^4}$$

$$= \frac{(z-1)(z ch z - ch z) - 2z sh z + 2 sh z + 2 ch z}{(z-1)^3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{ch z}{z-1}\right)'' = \frac{z^2 ch z - 2z ch z + 3 ch z - 2z sh z + 2 sh z}{(z-1)^3}$$

وبهذا يكون

$$\int_C \frac{ch z}{(z+1)^3(z-1)} \cdot dz = 2\pi i + \pi i\left[\frac{5}{e} + e\right]$$

مثال (5)

أحسب التكامل: $I = \oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^3} \cdot dz$

حيث: $C : |z| = 2$

الحل:

$$I = \oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^3} \cdot dz = \frac{2\pi i}{2!} \left(e^{2z}\right)'' \Big|_{z=-1}$$

$$\left(e^{2z}\right)'' = \left(2e^{2z}\right)' = 4e^{2z}$$

$$\Longrightarrow I = \oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^3} \cdot dz = \pi i \left(4e^{-2}\right) = \frac{4\pi e}{e^2}$$

مثال (6):

أحسب التكامل: $\oint_C \frac{\cos \frac{\pi}{z+1}}{z^3} \cdot dz$ حيث: $C : |z| = \frac{1}{2}$

الحل:

$$I = \oint_C \frac{\cos \frac{\pi}{z+1}}{z^3} \cdot dz = \frac{2\pi i}{2!} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{z+1}\right)'' \Big|_{z=0}$$

$$\left(\cos \frac{\pi}{z+1}\right)'' = \left(\frac{+\pi}{z+1} \sin \frac{\pi}{z+1}\right)' = \left(-\frac{\pi}{z+1} \sin \frac{\pi}{z+1} + \left(\frac{\pi}{z+1}\right)^2 \cos \frac{\pi}{z+1}\right)$$

$$I = \pi i \left(-\frac{\pi}{0+1} \sin \pi + \frac{\pi^2}{0+1} \cos \pi\right)$$

$$I = -\pi^3 i \cos \pi \Longrightarrow I = +\pi^3 i$$

مثال (7):

أوجد ناتج التكامل: $\oint_C \frac{z \cos \pi z}{(z+2)^2 (z-1)} \, dz$ حيث: $C : |z| = 4$

الحل:

النقاط الشاذة للتابع هي: $z = -2$ ، $z = 1$

نكتب $f(z)$ بشكل آخر:

$$f(z) = z \cos \pi z \left(\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{(z+2)^2}\right)$$

بالحساب نجد: $A = \frac{1}{9}$ ، $B = -\frac{1}{9}$ ، $C = -\frac{1}{3}$

$$f(z)=\frac{1}{9}\cdot\frac{z\cos\pi z}{z-1}-\frac{1}{9}\cdot\frac{z\cos\pi z}{z+2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{z\cos\pi z}{(z+2)^2}$$

$$\int_c f(z)\cdot dz=\frac{1}{9}\int_c\frac{z\cos\pi z\,dz}{z-1}-\frac{1}{9}\int_c\frac{z\cos\pi z\,dz}{z+2}-\frac{1}{3}\int_c\frac{z\cos\pi z\,dz}{(z+2)^2}$$

كلاً من التكاملين الأول والثاني نحسبه حسب صيغة كوشي التكاملية والتكامل الثالث حسب مبرهنة المشتقات المتتالية.

$$\int_c f(z)\cdot dz=\frac{1}{9}(2\pi i(1)\cos\pi)-\frac{1}{9}(2\pi i(-2)(\cos-2\pi)-\frac{1}{3}\left(\frac{2\pi i}{1!}(z\cos\pi z)'\right|_{z=-2}$$

$$\Rightarrow\int_c f(z)\cdot dz=\frac{2\pi i}{9}(-1)+\frac{4\pi i}{9}(1)-\frac{2\pi i}{3}(\cos\pi z-\pi z\sin\pi z)|$$

$$=-\frac{2\pi i}{9}+\frac{4\pi i}{9}-\frac{2\pi i}{3}(\cos(-2\pi)+2\pi\sin(-2\pi))$$

$$=\frac{2\pi i}{9}-\frac{2\pi i}{3}(1+0)$$

$$\Rightarrow\boxed{\int_c f(z)\cdot dz=-\frac{4\pi i}{9}}$$

مثال (8):

أحسب التكامل: $\int_c\frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}\cdot dz$ حيث:

$$c:|z-1|=1$$

الحل:

$$f(z)=\frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}=\frac{\sin\pi z}{((z-1)(z+1))^2}=\frac{\sin\pi z}{(z-1)^2(z+1)^2}$$

يمكننا أن نكتب التابع على الشكل:

$$f(z)=\frac{\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}=\frac{g(z)}{(z-1)^2}$$

وبهذا يكون:

$$\int_c f(z)\cdot dz=\frac{2\pi i}{1!}\,g'(z)\Big|_{z=1}$$

$$g'(z)=\frac{\pi\cos\pi z(z+1)^2-2(z+1)\sin\pi z}{(z+1)^4}=\frac{\pi\cos\pi z(z+1)-2\sin\pi z}{(z+1)^3}$$

$$g'(1) = \frac{\pi \cos \pi \,(1+1) - 2\sin\pi}{(1+1)^3} = \frac{\pi(-1)(2) - 2(0)}{(2)^3} = \frac{-2\pi}{8}$$

أي أن :

$$\int_c f(z)\cdot dz = \frac{2\pi i}{1}\left(\frac{-2\pi}{8}\right) = -\frac{\pi^2}{2}$$

مثال (9)

أحسب التكامل :

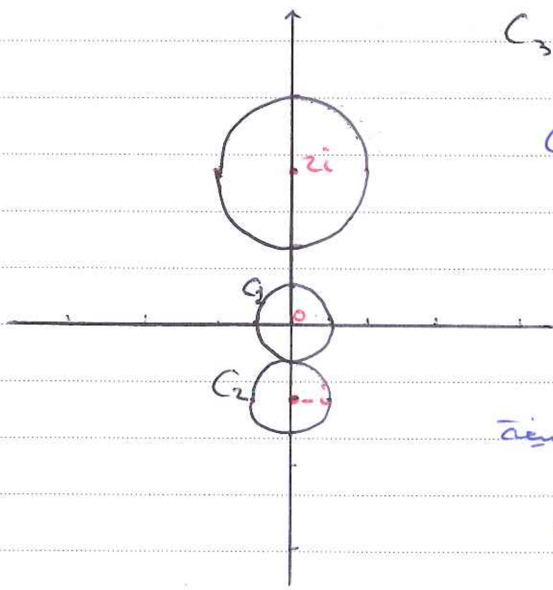
$$I = \int_c \frac{\cos z}{z(z+i)^2}\cdot dz$$

وذلك على المنحنيات التالية .

① $C_1 : |z| = \frac{1}{2}$

② $C_2 : |z+i| = \frac{1}{2}$

③ $C_3 : |z-2i| = 1$



الحل :

① التابع المستكمل على المنحني C_1 له نقطة شاذة واحدة هي $z=0$ لذا يمكن كتابة التكامل على الشكل :

$$I = \int_{C_1} \frac{\frac{\cos z}{(z+i)^2}}{z}\cdot dz$$

أما الحساب فاستناداً إلى صيغة كوشي التكاملية ويكون :

$$I = 2\pi i\left[\frac{\cos z}{(z+i)^2}\right]\Big|_{z=0}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{\cos 0}{-1}\right)$$

$$\Longrightarrow I = -2\pi i$$

② التابع المستكمل على المنحني C_2 له نقطة شاذة واحدة هي $z=-i$ لذا نكتب التكامل على الشكل :

/ /

$$I = \int_{C_2} \frac{\cos z}{z(z+i)^2} \cdot dz = \int_{C_2} \frac{\frac{\cos z}{z}}{(z+i)^2} \cdot dz$$

ومنه استنادا إلى مبرهنة المشتقات التالية ، ويكون ،

$$I = \frac{2\pi i}{1!} \left[\frac{\cos z}{z}\right]' \Big|$$

$$= 2\pi i \left[\frac{-z\sin z - \cos z}{z^2}\right] \Big|_{z=-i}$$

$$= 2\pi i \left[\frac{i\sin(-i) - \cos(-i)}{-1}\right]_{z=-i}$$

$$= 2\pi i \left[i\sin i - \cos i \right] = -2\pi i \left[\cos i - i\sin i \right]$$

$$= -2\pi i\, e^{-i^2} \Longrightarrow I = -2\pi i e$$

③ نلاحظ أن التابع المستكمل تحليلي داخل الساحة المغلقة والمحدودة بالمنحني C_3 لذا وحسب مبرهنة كوشي يكون :

$$I = \int_{C_3} \frac{\cos z}{z(z+i)^2} \cdot dz = 0$$

انتهى المقرر