١٠) فى لحظة ما كان طولا ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية هما ٨ سم ، ٦ سم إذا كان الضلع الاول ينقص بمعدل ١ سم/دقيقة ، وكان الضلع الثاني يزداد بمعدل ٢ سم/دقيقة فأوجد معدل التغير فى مساحة المثلث بعد دقيقتين.

الحل

المثلث قائم الزاوية وطول ضلع القائمة الاول = ٨ سم ويتناقص بمعدل ١ سم/دقيقة

وطول ضلع القائمة الثاني = ٦ سم ويتزايد بمعدل ٢ سم/دقيقة

∴ بعد ن دقيقة: يصبح طول الضلع الاول = ٨ − ن و يصبح طول الضلع الثاني = ٦ + ٢ن

∵ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع

∴ م = $\frac{١}{٢}$(٨ − ن)(٦ + ٢ن) = ٢٤ + ٥ن − ن^{٢} بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

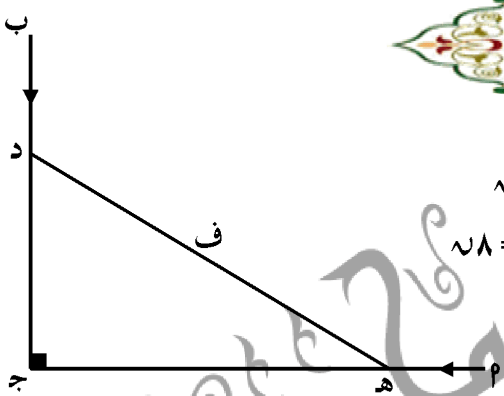
∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٥ − ٢ن بالتعويض عن ن = ٢

∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٥ − ٢ × ٢ = ٥ − ٤ = ١ سم^{٢}/دقيقة

اى أن مساحة المثلث تزداد بمعدل ١ سم٢/دقيقة

١١) $\overleftarrow{\text{أج}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب ج}}$ طريقان متعامدان ، أج = ٩٠ مترا ، ب ج = ٧٠ مترا . يسير رجلان الأول من أ الى ج بسرعة منتظمة ٦ أمتار/ث والثانى من ب الى ج بسرعة منتظمة ٨ امتار/ث إثبت أن البعد ف بين الرجلين بعد مضى ن ثانية من لحظة إنطلاقهما معا يعطى بالعلاقة ف^{٢} = ١٠٠(ن^{٢} − ٢٢ن + ١٣٠) ثم إستنتج معدل تغير ف بالنسبة الى ن عندما ن = ٨ ثوانى.

الحل



أج = ٩٠م ، ب ج = ٧٠م ∴ بعد ن ثانية:

يكون الرجل الأول وصل الى نقطة هـ وقطع مسافة أهـ حيث أهـ = ٦ن

ويكون الرجل الثانى وصل الى نقطة د وقطع مسافة ب د حيث ب د = ٨ن

وتكون المسافة بين الرجلين هى هـ د حيث هـ د = ف

من المثلث د ج هـ نجد أن:

(هد)^{٢} = (هج)^{٢} + (جد)^{٢} وبالتعويض عن هـ ج = ٩٠ − أهـ = ٩٠ − ٦ن ، ج د = ٧٠ − ب د = ٧٠ − ٨ن

∴ ف^{٢} = (٩٠ − ٦ن)^{٢} + (٧٠ − ٨ن)^{٢} وبفك الأقواس

∴ ف^{٢} = ٨١٠٠ − ١٠٨٠ن + ٣٦ن^{٢} + ٤٩٠٠ − ١١٢٠ن + ٦٤ن^{٢}

∴ ف^{٢} = ١٠٠ن^{٢} − ٢٢٠٠ن + ١٣٠٠٠

$\boxed{\text{∴ ف}^{٢} = ١٠٠(\text{ن}^{٢} − ٢٢\text{ن} + ١٣٠) \leftarrow (١)}$ وهو المطلوب إثباته اولا

عندما ن = ٨

$\therefore \text{ف}^{٢} = ١٠٠(٨^{٢} - ٢٢\times ٨ + ١٣٠) = ١٠٠\times ١٨ \Leftarrow \therefore \text{ف} = \sqrt{١٠٠\times ١٨} = ٣٠\sqrt{٢}$

وبتفاضل الطرفين في (١) بالنسبة للزمن

$\therefore ٢\text{ف}\dfrac{\text{دف}}{\text{دن}} = ١٠٠(٢\text{ن} - ٢٢)$ وبالتعويض عن ن = ٨ ، ف = $٣٠\sqrt{٢}$

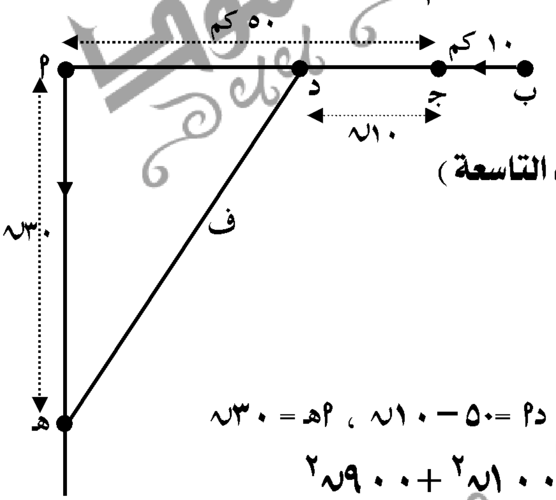
$\therefore ٢\times ٣٠\sqrt{٢}\dfrac{\text{دف}}{\text{دن}} = ١٠٠(٢\times ٨ - ٢٢) \Leftarrow \therefore ٦٠\sqrt{٢}\dfrac{\text{دف}}{\text{دن}} = -٦٠٠$

$\therefore \dfrac{\text{دف}}{\text{دن}} = \dfrac{-٦٠٠}{٦٠\sqrt{٢}} = \dfrac{-١٠}{\sqrt{٢}} = -٥\sqrt{٢}$ اى أن المسافة بين الرجلين تقل بمعدل $٥\sqrt{٢}$ م/ث

١٢) فى الساعة الثامنة صباحا كانت سفينة تقع على بعد ٦٠ كم شرق ميناء معين وتقترب منه بسرعة ١٠ كم/ساعة وفى الساعة التاسعة صباحا خرجت من الميناء سفينة أخري متجهة نحو الجنوب بسرعة ٣٠ كم/ساعة. أوجد معدل تغير البعد بين السفينتين فى الساعة العاشرة صباحا وهل تقترب السفينتان أم تبتعدا حينئذ؟

الحل

نفرض أن الميناء عند نقطة أ وأن السفينة الأولى عند نقطة ب حيث أ ب = ٦٠ كم



∵ السفينة الاولى تحركت لمدة ساعة قبل تحرك السفينة الثانية

∴ السفينة الأولى تكون قد وصلت الى نقطة جـ حيث ب جـ = ١٠ كم

اى أنها تكون على بعد ٥٠ كم من الميناء (أ) ∴ بعد ن ساعة (بعد التاسعة)

تكون السفينة الأولى وصلت الى نقطة د حيث جـ د = ١٠ن

تكون السفينة الثانية وصلت الى نقطة هـ حيث أ هـ = ٣٠ن

ويكون البعد بين السفينتين هو د هـ حيث د هـ = ف

من المثلث ا د ه نجد أن: $(\text{دهـ})^{٢} = (\text{أد})^{٢} + (\text{أهـ})^{٢}$ وبالتعويض عن أد = ٥٠ − ١٠ن ، أهـ = ٣٠ن

$\therefore \text{ف}^{٢} = (٥٠ - ١٠\text{ن})^{٢} + (٣٠\text{ن})^{٢} = ٢٥٠٠ - ١٠٠٠\text{ن} + ١٠٠\text{ن}^{٢} + ٩٠٠\text{ن}^{٢}$

$\boxed{\therefore \text{ف}^{٢} = ١٠٠٠\text{ن}^{٢} - ١٠٠٠\text{ن} + ٢٥٠٠ \leftarrow (١)}$

فى الساعة العاشرة اى عندما ن = ١ ساعة وبالتعويض فى (١)

$\therefore \text{ف}^{٢} = ١٠٠٠\times ١^{٢} - ١٠٠٠\times ١ + ٢٥٠٠ = ٢٥٠٠ \leftarrow \therefore \text{ف} = ٥٠$

وبتفاضل الطرفين في (١) بالنسبة للزمن

$\therefore ٢\text{ف}\dfrac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٢٠٠٠\text{ن} - ١٠٠٠$ وبالتعويض عن ن = ١ ، ف = ٥٠

$\therefore ٢\times ٥٠\dfrac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٢٠٠٠\times ١ - ١٠٠٠ \Leftarrow ١٠٠\dfrac{\text{دف}}{\text{دن}} = ١٠٠٠ \Leftarrow \therefore \dfrac{\text{دف}}{\text{دن}} = ١٠$ كم/ساعة

اى ان السفينتان تبتعدان بمعدل ١٠ كم/ساعة

١) تتحرك نقطة علي المنحني $\text{س}^2 + \text{س ص} + \text{ص}^2 = ٧$ وكان معدل تغير احداثيها السينى بالنسبة للزمن عند النقطة (−١ ، ٣) يساوى ٠,١ أوجد معدل تغير احداثيها الصادى بالنسبة للزمن عند نفس النقطة.

الحل

$\because \text{س}^2 + \text{س ص} + \text{ص}^2 = ٧$ بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

$\therefore ٢\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}\times\text{ص} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}\times\text{س} + ٢\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٠$ بالتعويض عن $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{١}{١٠}$ ، النقطة (−١ ، ٣)

$\therefore ٢\times -١\times\frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠}\times ٣ + \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}\times(-١) + ٢\times ٣\times\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٠$

$\therefore ٦\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} - \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} - \frac{٢}{١٠} + \frac{٣}{١٠} = ٠$ $\therefore ٥\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{-١}{١٠}$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{-١}{٥٠} = -٠,٠٢$ وحدة/ث

٢) تتحرك نقطة علي المنحني $\text{ص} = \text{س}^2 + ٤\text{س} - ٣$ عين موضع النقطة عند اللحظة التى تكون فيها سرعة احداثيها الصادى ضعف سرعة احداثيها السينى.

الحل

$\because \text{ص} = \text{س}^2 + ٤\text{س} - ٣$ بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٢\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + ٤\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ بالتعويض عن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٢\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$\therefore ٢\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٢\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + ٤\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ ← $\therefore \text{س} = -١$ بالتعويض فى معادلة المنحنى

$\therefore \text{ص} = (-١)^2 + ٤(-١) - ٣ = ١ - ٤ - ٣ = -٦$ $\therefore$ النقطة هى (−١ ، −٦)

٣) تتحرك نقطة (س ، ص) علي الدائرة $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + ٤\text{س} - ٨\text{ص} = ١٠٨$ عين موضع النقطة عند اللحظة التى يكون فيها معدل تغير احداثيها السينى بالنسبة للزمن مساويا لمعدل تغير احداثيها الصادى بالنسبة للزمن .

الحل

$\because \text{س}^2 + \text{ص}^2 + ٤\text{س} - ٨\text{ص} = ١٠٨$ بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

$\therefore ٢\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + ٢\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} + ٤\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} - ٨\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٠$ بالتعويض عن $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$

$\therefore ٢\text{س}\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} + ٢\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} + ٤\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} - ٨\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٠$ ← $\therefore ٢\text{س} + ٢\text{ص} + ٤ - ٨ = ٠$

$\therefore ٢\text{س} + ٢\text{ص} - ٤ = ٠$ ← $\therefore \text{س} + \text{ص} - ٢ = ٠$ ← $\therefore \text{س} = ٢ - \text{ص}$ بالتعويض فى معادلة المنحنى

∴ (٢ − ص)^{٢} + ص^{٢} + ٤(٢ − ص) − ٨ص = ١٠٨

∴ ٤ − ٤ص + ص^{٢} + ص^{٢} + ٨ − ٤ص − ٨ص = ١٠٨ ← ∴ ٢ص^{٢} − ١٦ص − ٩٦ = ٠

∴ ص^{٢} − ٨ص − ٤٨ = ٠ ← ∴ (ص − ١٢)(ص + ٤) = ٠

∴ ص = ١٢	أو	∴ ص = −٤
∵ س = ٢ − ص		∵ س = ٢ − ص
∴ س = ٢ − ١٢ = −١٠		∴ س = ٢ − (−٤) = ٦
النقطة هى (−١٠ ، ١٢)		**النقطة هى** (٦ ، −٤)

٤) قطعة من المعدن مستطيلة الشكل يزيد طولها عن عرضها بمقدار ٢٠ سم تنكمش بالتبريد بحيث يظل طولها يزيد عن عرضها بمقدار ٢٠ سم فإذا كان الطول ينكمش بمعدل ٠,٠٢٥ سم/ث عندما يكون العرض ٨٠ سم، فأحسب معدل تغير المساحة عند هذه اللحظة.

الحل

نفرض أن الطول = س ∴ **العرض = س − ٢٠**

∵ **مساحة المستطيل = الطول × العرض**

م = س(س − ٢٠) = س^{٢} − ٢٠س   **بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن**

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٢س $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ − ٢٠ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = (٢س − ٢٠) $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ ← (١)

عندما يكون العرض = ٨٠ سم فإن الطول = س = ١٠٠ سم بالتعويض فى (١) عن س = ١٠٠ ، $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = −٠,٠٢٥

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = (٢ × ١٠٠ − ٢٠) × (−٠,٠٢٥) = ١٨٠ × (−٠,٠٢٥) = −٤,٥ سم^{٢}/ث

٥) سقط حجر فى ماء فتكونت موجة دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٢ سم/ث.اوجد معدل الزيادة في مساحة سطح الموجة فى نهاية ١٠ ثوانى.

الحل

∵ **مساحة الدائرة = ط نق^{٢}**   ∴ م = ط نق^{٢} **بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن**

∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٢ط نق $\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$ ، ∵ $\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$ = ٢ سم/ث   ∴ **بعد ١٠ ث يكون نق = ٢ × ١٠ = ٢٠ سم**

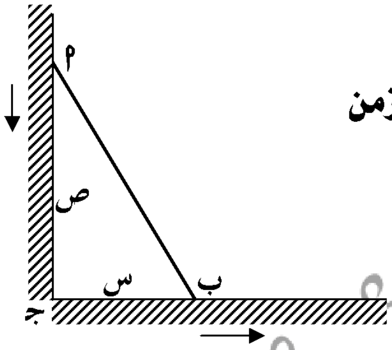
∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٢ط × ٢٠ × ٢ = ٨٠ط سم^{٢}/ث

٦) يستند سلم طوله ٦,٥ متر بأحد طرفيه علي أرض افقية وبطرفه الاخر علي حائط رأسي ، فإذا إنزلق الطرف السفلى للسلم مبتعدا عن الحائط بسرعة ٣٠ سم/دقيقة عندما يكون على بعد ٢,٥ متر من

الحائط ، أوجد عندئذ معدل إنخفاض الطرف العلوى للسلم ثم أوجد بعد الطرف العلوي للسلم عن الأرض عندما يتحرك الطرف العلوى والطرف السفلى بنفس المعدل.

الحل

نفرض أن السلم هو أ ب = ٦,٥ متر وأن بعد الطرف السفلي عن الحائط = س وأن بعد الطرف العلوي عن الحائط = ص



في ∆ أ ب جـ $\because$ $(\text{أب})^{2} = (\text{أجـ})^{2} + (\text{جـب})^{2}$

$\therefore$ $\text{س}^{2} + \text{ص}^{2} = (٦٫٥)^{2} \longrightarrow (١)$ بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

$\therefore ٢\text{س}\dfrac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٢\text{ص}\dfrac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٠$

$\therefore \text{س}\dfrac{\text{دس}}{\text{دن}} + \text{ص}\dfrac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٠ \longrightarrow (٢)$

عندما س = ٢,٥ م وبالتعويض في (١)

$\therefore (٢٫٥)^{2} + \text{ص}^{2} = (٦٫٥)^{2}$ $\therefore$ $\text{ص}^{2} = ٤٢٫٢٥ - ٦٫٢٥ = ٣٦$ $\therefore$ ص = ٦ م

بالتعويض في (٢) عن س = ٢٥٠ سم ، ص = ٦٠٠ سم ، $\dfrac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٣٠$ سم / دقيقة

$٢٥٠ \times ٣٠ + ٦٠٠ \times \dfrac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٠$ $\therefore \dfrac{\text{دص}}{\text{دن}} = \dfrac{-٧٥}{٦} = ١٢٫٥$

اي ان الطرف العلوى يتحرك مقتربا من الأرض بمعدل ١٢,٥ سم / دقيقة

عندما يتحرك الطرف العلوى والطرف السفلى نفس المعدل اى عندما $\dfrac{\text{دص}}{\text{دن}} = -\dfrac{\text{دس}}{\text{دن}}$ وبالتعويض في (٢)

$\therefore \text{س}\dfrac{\text{دص}}{\text{دن}} + \text{ص}\dfrac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٠ \Leftarrow$ ص = −س وبالتعويض في (١)

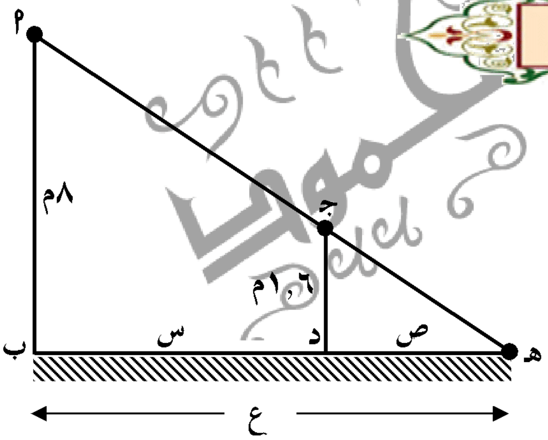
$\therefore (-\text{ص})^{2} + \text{ص}^{2} = ٤٢٫٢٥ \Leftarrow$ $\therefore ٢\text{ص}^{2} = ٤٢٫٢٥ \Leftarrow$ $\therefore \text{ص} = \sqrt{\dfrac{٤٢٢٥}{٢٠٠}} = ٣٢٥\sqrt{٢}$

اى أن الطرف العلوى للسلم يبعد عن الأرض مسافة $٣٢٥\sqrt{٢}$ سم

٧) وضع مصباح كشاف على إرتفاع ٨ أمتار فوق طريق يسير عليه رجل طوله ١,٦ متر مبتعدا عن الضوء بسرعة ٢ م/دقيقة أوجد:

(ا): معدل إزدياد طول ظل الرجل. (ب): سرعة تحرك نهاية ظل الرجل.

الحل



نفرض ان المصباح عند نقطة أ وقاعدة المصباح نقطة ب

وأن الرجل هو جـ د وان نهاية ظل الرجل هو نقطة هـ

وأن بعد الرجل عن قاعدة المصباح ب د = س

وأن طول ظل الرجل د هـ = ص

وأن بعد نهاية ظل الرجل عن قاعدة المصباح ب هـ = ع

من تشابه المثلثين هـ جـ د ، هـ أ ب

$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{ص}+\text{س}} = \frac{١٦}{٨٠} \Leftarrow \therefore \frac{\text{ص}}{\text{ص}+\text{س}} = \frac{١}{٥}$

$\therefore ٥\text{ص} = \text{ص} + \text{س} \Leftarrow \therefore ٤\text{ص} = \text{س}$ بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

$\therefore ٤\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ بالتعويض عن $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٢$ م/دقيقة

$\therefore ٤\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٢ \Leftarrow \therefore \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{٢}{٤} \Leftarrow \therefore \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{١}{٢}$ اى أن ظل الرجل يزيد بمعدل $\frac{١}{٢}$ م/دقيقة

$\because \text{ع} = \text{س} + \text{ص}$ بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

$\therefore \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{\text{دس}}{\text{دن}} + \frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ بالتعويض عن $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٢$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{١}{٢}$

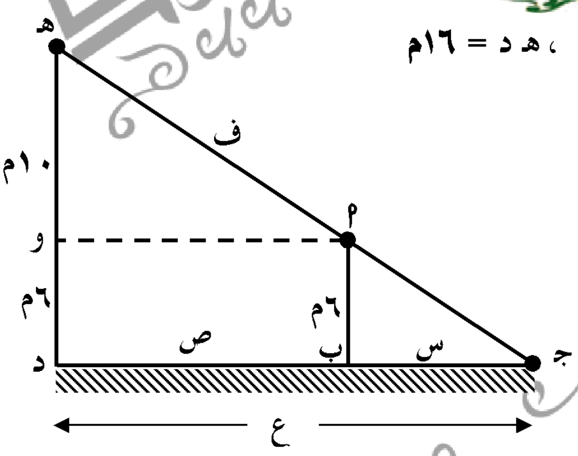
$\therefore \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = ٢ + \frac{١}{٢} = ٢\frac{١}{٢}$ اى أن نهاية ظل الرجل يتحرك بسرعة $٢\frac{١}{٢}$ م/دقيقة

٨) ونش رأسى طوله ٦ أمتار يتحرك بسرعة ٥ م/ث فى اتجاه مصباح على ارتفاع ١٦ مترا أوجد:

(أ): معدل تحرك نهاية ظل الونش. (ب): معدل تغير طول ظل الونش.

(جـ): معدل تغير بعد نهاية الونش العليا عن المصباح عندما يكون الونش على بعد ١٠ أمتار من قاعدة المصباح.

الحل



نفرض ان الونش هو أب والمصباح عند نقطة هـ ∴ أب = ٦م ، هـ د = ١٦م

وأن ظل الونش هو ب جـ حيث ب جـ = س

وأن بعد الونش عن قاعدة المصباح ب د = ص

وأن نهاية ظل الونش نقطة جـ حيث جـ د = ص

وأن نهاية الونش العليا هى نقطة أ حيث أ هـ = ف

من تشابه المثلثين جـ أ ب ، جـ هـ د

نجد أن: $\frac{\text{جب}}{\text{جد}} = \frac{\text{أب}}{\text{هد}} \leftarrow (١)$

اولا: ايجاد معدل تحرك نهاية ظل الونش اى $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

سرعة الونش ٥ م/ث وحيث أن الونش يقترب من المصباح $\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = -٥$ م/ث

من (١) $\therefore \frac{\text{س}}{\text{ع}} = \frac{٦}{١٦}$ لكن $\text{س} = \text{ع} - \text{ص}$ $\therefore \frac{\text{ع}-\text{ص}}{\text{ع}} = \frac{٦}{١٦} = \frac{٣}{٨}$

$\therefore ٨\text{ع} - ٨\text{ص} = ٣\text{ع} \Leftarrow \therefore ٥\text{ع} = ٨\text{ص}$ بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

$\therefore ٥\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = ٨\frac{\text{دص}}{\text{دن}} \Leftarrow \therefore ٥\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = ٨ \times (-٥) \Leftarrow \therefore \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = -٨$

اى أن نهاية الظل تقترب من قاعدة المصباح بسرعة ٨ م/ث

ثانيا : ايجاد معدل تغير طول ظل الونش اى $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

من (١) ∴ $\frac{\text{س}}{\text{ع}} = \frac{٦}{١٦}$ لكن ع = س + ص ∴ $\frac{\text{س}}{\text{س} + \text{ص}} = \frac{٦}{١٦} = \frac{٣}{٨}$

∴ ٨س = ٣س + ٣ص ⇐ ∴ ٥س = ٣ص بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

∴ ٥ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = ٣ $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ ⇐ ∴ ٥ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = ٣ × (−٥) ⇐ ∴ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = −٣

اى أن طول ظل الونش يقل بمعدل ٣ م/ث

ثالثا : ايجاد معدل تغير بعد نهاية الونش العليا عن المصباح اى $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$

من المثلث أوهـ نجد ان أ و = ص ، هـ و = ١٦ − ٦ = ١٠

ف² = ص² + (١٠)² ⇐ ∴ ف² = ص² + ١٠٠ ← (٢)

عندما يكون الونش على بعد ١٠ امتار من قاعدة المصباح اى ان ص = ١٠

من (٢) ∴ ف² = (١٠)² + ١٠٠ = ٢٠٠ ← ∴ ف = √٢٠٠ = ١٠√٢

∵ ف² = ص² + ١٠٠ بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

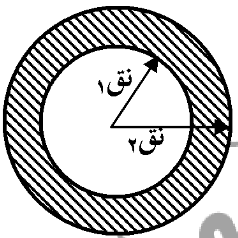
∴ ٢ف $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٢ص $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ وبالتعويض عن ف = ١٠√٢ ، ص = ١٠ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ = −٥

∴ ١٠√٢ $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ١٠ × (−٥) ⇐ ∴ $\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{-٥}{\sqrt{٢}} = \frac{-٥\sqrt{٢}}{٢}$

اى أن نهاية الونش العليا تقترب من المصباح بمعدل $\frac{-٥\sqrt{٢}}{٢}$ م/ث

٩) إذا كانت ح المساحة المحصورة بين دائرتين متحدتى المركز نصفى قطريهما نق١ ، نق٢ حيث نق١ < نق٢ ، فاوجد معدل تغير ح بالنسبة للزمن عند اللحظة التى عندها نق١ = ٤ سم ويتزايد بمعدل ٠,٢ سم/ث ، نق٢ = ٧سم ويتناقص بمعدل ٠,١ سم/ث.

الحل



المساحة المحصورة بين الدائرتين = ط نق٢² − ط نق١²

∴ ح = ط نق٢² − ط نق١² بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

∴ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ = ٢ط نق٢ $\frac{\text{دنق٢}}{\text{دن}}$ − ٢ط نق١ $\frac{\text{دنق١}}{\text{دن}}$

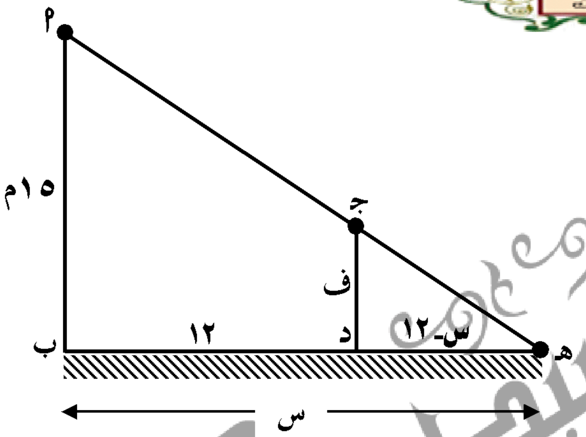
بالتعويض عن نق١ = ٤ سم ، $\frac{\text{دنق١}}{\text{دن}}$ = ٠,٢ سم/ث ، نق٢ = ٧ سم ، $\frac{\text{دنق٢}}{\text{دن}}$ = −٠,١ سم/ث

∴ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}}$ = ٢ط × ٧ × −٠,١ − ٢ط × ٤ × ٠,٢ = −١,٤ط − ١,٦ط = −٣ط سم²/ث

اى أن المساحة بين الدائرتين تتناقص بمعدل ٣ط سم²/ث

١٣) عمود إنارة طوله ١٥ مترا اعلاه مصباح قذفت كرة رأسيا ألى أعلى بسرعة ٥ أمتار/ث من مسافة قدرها ١٢ مترا من قاعدة العمود ، أوجد معدل ابتعاد ظل الكرة على الأرض من قاعدة العمود عند منتصف الثانية الأولى.

الحل



نفرض أن عمود الإنارة هو ا ب
وأن نقطة القذف هى د حيث د ب = ١٢ م
وأن الكرة بعد زمن ن من لحظة قذفها
كانت عند نقطة جـ وأن ظلها هو النقطة هـ
وأن بعد ظلها عن قاعدة العمود = س

ايجاد ف:

ع. = ٥ م/ث ، ء = −٩,٨ م/ث^{٢}

$\because$ ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ ء ن^{٢}

$\therefore$ ف = ٥ن − $\frac{١}{٢}$ × ٩,٨ ن^{٢} $\qquad$ $\therefore$ ف = ٥ن − ٤,٩ ن^{٢} $\qquad$ (١)

من تشابه المثلثين جـ د هـ ، ا ب هـ نجد أن $\frac{\text{هـ د}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ا ب}}$

$\therefore$ $\frac{\text{س} - ١٢}{\text{س}} = \frac{\text{ف}}{١٥}$ $\Leftarrow$ $\therefore$ س ف = ١٥س − ١٨٠ $\Leftarrow$ $\therefore$ ١٥س − س ف = ١٨٠

$\therefore$ س(١٥ − ف) = ١٨٠ $\qquad$ وبالتعويض عن ف من المعادلة (١)

$\therefore$ س(١٥ − ٥ن + ٤,٩ن^{٢}) = ١٨٠ $\qquad$ $\therefore$ س = ١٨٠(١٥ − ٥ن + ٤,٩ن^{٢})$^{-١}$ وبالتفاضل

$\therefore$ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = −١٨٠(١٥ − ٥ن + ٤,٩ن^{٢})$^{-٢}$ × (−٥+٩,٨ن) $\qquad$ وبالتعويض عن ن = $\frac{١}{٢}$

$\therefore$ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = −١٨٠(١٥ − ٥×$\frac{١}{٢}$ + ٤,٩×$\frac{١}{٤}$)$^{-٢}$ × (−٥+٩,٨×$\frac{١}{٢}$) = $\frac{-١٨}{(١٣,٧٢٥)^{٢}}$ = ٠,٠٩

أى أن ظل الكرة يبتعد عن قاعدة العمود بمعدل ٠,٠٩ م/ث

١٤) كرة جوفاء يزداد نصف قطرها الداخلى بمعدل ١ سم/ث بحيث يبقى حجم مادة الكرة ثابتا وذلك عند اللحظة التى يكون فيها طولا نصفى قطريها ٣ ، ٩ سم .أوجد عند هذه اللحظة:

(ا): معدل تغير نصف قطرها الخارجى. (ب): معدل تغير مساحة سطحها الخارجى.
(جـ): معدل تغير سمكها.

الحل

نفرض ان حجم مادة الكرة = ح ، ونصف قطرها الداخلى نق$_{١}$ ، ونصف قطرها الخارجى نق$_{٢}$

$\therefore$ $\frac{\text{ءنق}_{١}}{\text{ءن}}$ = ١ سم/ث عندما نق$_{١}$ = ٣ سم ، نق$_{٢}$ = ٩ سم

اولا: إيجاد معدل تغير نصف القطر الخارجي اى $\frac{\text{د نق}_٢}{\text{د ن}}$

حجم مادة الكرة $\text{ع} = \frac{٤}{٣}\text{ط نق}_٢^٣ - \frac{٤}{٣}\text{ط نق}_١^٣$

بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن مع ملاحظة ان $\frac{\text{دع}}{\text{د ن}} = ٠$ لأن حجم مادة الكرةثابت

$\therefore \frac{٤}{٣}\text{ط} \times ٣\,\text{نق}_٢^٢ \frac{\text{د نق}_٢}{\text{د ن}} - \frac{٤}{٣}\text{ط} \times ٣\,\text{نق}_١^٢ \frac{\text{د نق}_١}{\text{د ن}} = ٠$

$\therefore \text{نق}_٢^٢ \frac{\text{د نق}_٢}{\text{د ن}} = \text{نق}_١^٢ \frac{\text{د نق}_١}{\text{د ن}}$ وبالتعويض عن $\frac{\text{د نق}_١}{\text{د ن}} = ١$ ، $\text{نق}_٢ = ٩$ ، $\text{نق}_١ = ٣$

$\therefore ٩^٢ \times \frac{\text{د نق}_٢}{\text{د ن}} = ٣^٢ \times ١ \Leftarrow \therefore \frac{\text{د نق}_٢}{\text{د ن}} = \frac{١}{٩}$ سم/ث

ثانيا: إيجاد معدل تغير مساحة السطح الخارجي

مساحة سطح الكرة الخارجي $\text{م} = ٤\text{ط نق}_٢^٢$ بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

$\therefore \frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٤\text{ط} \times ٢\,\text{نق}_٢ \frac{\text{د نق}_٢}{\text{د ن}}$ وبالتعويض عن $\frac{\text{د نق}_٢}{\text{د ن}} = \frac{١}{٩}$ ، $\text{نق}_٢ = ٩$ ،

$\therefore \frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٤\text{ط} \times ٢ \times ٩ \times \frac{١}{٩} \Leftarrow \therefore \frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٨\,\text{ط}$ سم٢/ث

ثالثا: إيجاد معدل تغير سمك الكرة

نفرض ان سمك الكرة عند اى لحظة = س

$\therefore \text{س} = \text{نق}_٢ - \text{نق}_١$ بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

$\therefore \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{\text{د نق}_٢}{\text{د ن}} - \frac{\text{د نق}_١}{\text{د ن}}$ وبالتعويض عن $\frac{\text{د نق}_٢}{\text{د ن}} = \frac{١}{٩}$ ، $\frac{\text{د نق}_١}{\text{د ن}} = ١$ ،

$\therefore \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٩} - ١ \Leftarrow \therefore \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{-٨}{٩}$ سم/ث

١٥) تتمدد قطعة من المعدن على هيئة متوازى مستطيلات طول ضلع قاعدته يزيد عن عرضه ٢ سم وارتفاعها ثلاثة امثال عرضه بالتسخين بحيث تظل محتفظة بهذه النسبة فإذا كان يزداد بمعدل ٠,٦ سم٣/دقيقة عندما يزداد العرض بمعدل ٠,٠١ سم/دقيقة فأوجد أبعاد قطعة المعدن.

الحل

نفرض ان العرض = س

$\because$ الطول يزيد عن العرض بمقدار ٢ $\therefore$ الطول = س + ٢

، $\because$ الارتفاع ثلاثة أمثال العرض $\therefore$ الارتفاع = ٣ س

$\because$ حجم متوازى المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع

$\therefore \text{ع} = \text{س}(\text{س} + ٢) \times ٣\text{س} = ٣\text{س}^٣ + ٦\text{س}^٢$ بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

$\therefore \frac{دع}{دن} = ٩س^٢ \frac{دس}{دن} + ١٢س \frac{دس}{دن}$ بالتعويض عن $\frac{دع}{دن} = ٠,٦$ ، $\frac{دس}{دن} = ٠,٠١$

$٠,٦ = ٩س^٢ \times ٠,٠١ + ١٢س \times ٠,٠١$ بالضرب × ١٠٠

$\therefore ٩س^٢ + ١٢س - ٦٠ = ٠$ بالقسمة على ٣

$\therefore ٣س^٢ + ٤س - ٢٠ = ٠ \Leftarrow \therefore (س - ٢)(٣س + ١٠) = ٠$

اما $س - ٢ = ٠$ | او $٣س + ١٠ = ٠$

$\therefore س = ٢$ | $\therefore ٣س = -١٠$ مرفوض

$\therefore$ العرض = س = ٢ سم ، الطول = س+٢=٢+٢=٤ سم ، الارتفاع = ٣س=٣×٢=٦ سم

أى أن ابعاد قطعة المعدن هى ٢ ، ٤ ، ٦ سم

١٦)حبل من الصلب علي شكل اسطوانة دائرية قائمة يتمدد بالتسخين بحيث يزداد طوله بمعدل ٠,٠٠٥ سم/دقيقة ويزداد طول قطر مقطعه الدائرى بمعدل ٠,٠٠٢ سم/دقيقة أوجد بدلالة ط معدل تغير حجم الحبل بالنسبة للزمن عندما يكون طوله ٤٠ سم وطول قطر مقطعه ٢ سم.

الحل

الحبل على شكل اسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها = نق و طول الحبل يمثل ارتفاع الاسطوانة = ع

$\because$ حجم الاسطوانه = مساحة القاعدة × الارتفاع $\therefore ح = ط نق^٢ ع$ بتفاضل الطرفين بالنسبة للزمن

$\therefore \frac{دح}{دن} = ٢ط نق \times \frac{دنق}{دن} \times ع + ط نق^٢ \times \frac{دع}{دن} \leftarrow (١)$

$\because$ القطر يزداد بمعدل ٠,٠٠٢ سم/دقيقة $\therefore$ نصف القطر يزداد بمعدل ٠,٠٠١ سم/ دقيقة

بالتعويض فى (١) عن ع = ٤٠ ، نق = ١ ، $\frac{دنق}{دن} = \frac{١}{١٠٠٠}$ ، $\frac{دع}{دن} = \frac{٥}{١٠٠٠}$

$\therefore \frac{دح}{دن} = ٢ط \times ١ \times \frac{١}{١٠٠٠} \times ٤٠ + ط \times (١)^٢ \times \frac{٥}{١٠٠٠}$

$\therefore \frac{دح}{دن} = \frac{٨٠}{١٠٠٠}ط + \frac{٥}{١٠٠٠}ط = \frac{٨٥}{١٠٠٠}ط = ٠,٠٨٥ ط$ سم^٣/دقيقة

أى أن حجم الحبل يزداد بمعدل ٠,٠٨٥ سم^٣/دقيقة

ومع أطيب تمنياتى بالنجاح والتفوق بإذن الله

مهندس/ السيد محمود