ملخص لأهم نقاط الجبر والهندسة الفراغية للصف الثالث الثانوى

أولًا ملخص لأهم نقاط الجبر

* مبدأ العد :

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى ن طريقة وعدد طرق إجراء عمل آخر يساوى م طريقة فإن عدد طرق إجراء

- العمل الأول و العمل الثانى = م × ن «قاعدة الضرب»
- العمل الأول أو العمل الثانى = م + ن «قاعدة الجمع»

* إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى $م_1$ طريقة وعدد طرق إجراء عمل ثان يساوى $م_2$ طريقة وعدد طرق إجراء عمل ثالث يساوى $م_3$ طريقة وهكذا إلى ن من العمليات

فإن : عدد طرق إجراء هذه الأعمال معًا = $م_1 \times م_2 \times م_3 \times ..... \times م_ن$

* مضروب العدد الصحيح الموجب ن يساوى حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من أو تساوى ن

أى أن : $\underline{|ن} = ن(ن-1)(ن-2) \times ..... \times 3 \times 2 \times 1$

ويكون عدد عوامل المضروب = ن من العوامل

* التبديل : هو ترتيب لعدة أشياء مختلفة بأخذها كلها أو بعض منها فى كل مرة

* $^{ن}ل_{ر}$: هو عدد الترتيبات التى يمكن تكوينها من ن من الأشياء بحيث يحتوى كل ترتيب على ر من تلك الأشياء ويكون :

$$^{ن}ل_{ر} = ن(ن-1)(ن-2) \times ..... \times (ن-ر+1) \text{ لكل } 1 \le ر \le ن \text{ ، } ن \in ص^+$$

وإذا كانت : ر = ٠ فإن : $^{ن}ل_{٠} = 1$

أى أن : $^{ن}ل_{٠} = 1$ لكل $ن \in ص^+$

* التوافيق : هو كل مجموعة يمكن تكوينها من مجموعة من الأشياء بأخذ بعضها أو كلها بصرف النظر عن ترتيبها.

* $^{ن}ق_{ر}$: هو عدد التوافيق المكون كل منها من ر من الأشياء المختارة معًا من بين ن من العناصر

حيث : $0 \le ر \le ن$ ويكون : $^{ن}ق_{ر} = \dfrac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}}$

عند اختيار أشياء عددها «ر» من بين أشياء عددها «ن»

مع الاحلال والترتيب	مع الاحلال وبدون مراعاة الترتيب	دون الاحلال مع مراعاة الترتيب	دون الاحلال وبدون مراعاة الترتيب
فإن عدد طرق الاختيار			
$ن^{ر}$	$^{ن+ر-1}ق_{ر}$	$^{ن}ل_{ر}$	$^{ن}ق_{ر}$
تكوين عدد مكون من رقمين من مجموعة الأرقام {٥ ، ٣ ، ٢ ، ١}	توزيع ٤ كرات على ٥ سلال	تكوين عدد مكون من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام {٥ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ١}	تكوين وجبة مكونة من ٣ أصناف مختلفة من بين ٥ أصناف
$4^{2} = 16$	$^{5+4-1}ق_{4} = 70$	$^{5}ل_{2} = 5 \times 4 = 20$	$^{5}ق_{3} = 10$

* عدد أقطار مضلع مكون من ن من الأضلاع = $^{ن}ق_{2} - ن$

* عدد طرق وقوف (ر) سيارة متجاورة فى ساحة انتظار بها (ن) مكان للوقوف إذا كان الموقف على شكل
  * دائرة ← $ن\,\underline{|ر}$
  * صف ← $(ن - ر + 1)\,\underline{|ر}$

قوانين التباديل

إذا كان : $ن ، ر \in ص^{+}$ ، $ن \geq ر$ فإن :

(١) $^{ن}ل_{ر} = ن(ن-1)(ن-2)\ldots\ldots(ن-ر+1)$

(٢) $^{ن}ل_{ن} = \underline{|ن} = ن(ن-1)(ن-2) \times \ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1$

(٣) $\underline{|ن} = ن\,\underline{|ن-1} = ن(ن-1)\,\underline{|ن-2}$

(٤) $^{ن}ل_{ر} = \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}}$

* ملاحظات :

(١) $^{ن}ل_{0} = 1$ ، $^{ن}ل_{1} = ن$

(٢) $\underline{|0} = \underline{|1} = 1$

(٣) $\underline{|ن} \in ص^{+}$ ، $^{ن}ل_{ر} \in ص^{+}$

مراجعة

قوانين التوافيق

إذا كان : $ن ، ر \in ص^+$ ، $ن \geq ر$ فإن :

① $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\lfloor ر} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر \lfloor ن - ر}$ ② $^{ن}ق_{ر} = {^{ن}ق_{ن-ر}}$ «قانون التبسيط»

③ إذا كان : $^{ن}ق_{س} = {^{ن}ق_{ص}}$ فإن : $س = ص$ أو $س + ص = ن$

④ $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{ن - ر + ١}{ر}$ ⑤ $^{ن}ق_{ر} + {^{ن}ق_{ر-١}} = {^{ن+١}ق_{ر}}$

نظرية ذات الحدين

إذا كان : $أ ، س \in ح$ ، $ن$ عددًا صحيحًا موجبًا فإن :

① $(س + أ)^{ن} = {^{ن}ق_{٠}} س^{ن} + {^{ن}ق_{١}} س^{ن-١} أ + {^{ن}ق_{٢}} س^{ن-٢} أ^{٢} + ... + {^{ن}ق_{ر}} س^{ن-ر} أ^{ر} + ... + {^{ن}ق_{ن}} أ^{ن}$

② $(س - أ)^{ن} = {^{ن}ق_{٠}} س^{ن} - {^{ن}ق_{١}} س^{ن-١} أ + {^{ن}ق_{٢}} س^{ن-٢} أ^{٢} - {^{ن}ق_{٣}} س^{ن-٣} أ^{٣} + ... + {^{ن}ق_{ن}} (-أ)^{ن}$

ملاحظات

في مفكوك $(س + أ)^{ن}$:

① عدد حدود المفكوك = $(ن + ١)$ حدًا

② في أي حد يكون $\boxed{\text{أس (س) + أس (أ) = ن}}$

③ الحد العام $\boxed{ح_{ر+١} = {^{ن}ق_{ر}} أ^{ر} س^{ن-ر}}$

أي أن : الحد العام = $^{ن}ق_{ر}$ × (الحد الثانى)^{ر} × (الحد الأول)$^{ن-ر}$

④ $\boxed{\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{أ}{س}}$ ← $\boxed{\frac{ن - ر \text{ (الأصغر)} + ١}{ر \text{ (الأصغر)}} \times \frac{\text{الثانى}}{\text{الأول}}}$

⑤ $\frac{\text{معامل } ح_{ر+١}}{\text{معامل } ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{معامل أ}}{\text{معامل س}}$

⑥ إذا علم ترتيب الحد من النهاية في مفكوك ذى الحدين فإن :

$\boxed{\text{رتبة الحد = عدد حدود المفكوك – ترتيب الحد من النهاية + ١}}$

(٧) إذا كانت $ن$ زوجية : يكون عدد حدود المفكوك ($ن + ١$) فرديًا ويوجد للمفكوك حد أوسط وحيد رتبته $\frac{ن + ٢}{٢}$

(٨) إذا كانت $ن$ فردية : يكون عدد حدود المفكوك ($ن + ١$) زوجيًا ويوجد للمفكوك حدان أوسطان رتبتهما على الترتيب $\frac{ن + ١}{٢}$ ، $\frac{ن + ٣}{٢}$

(٩) إذا أردنا إيجاد مجموع معاملات حدود مفكوك ذى الحدين فيمكن إيجاد ذلك بوضع كل قيمة لكل متغير في المقدار تساوى الواحد الصحيح دون إيجاد المفكوك.

مجموع معاملات حدود مفكوك : $(أ س + ب ص)^ن = (أ + ب)^ن$

(١٠) $(س + أ)^ن + (س - أ)^ن = ٢ (ح_١ + ح_٣ + ح_٥ + ...)$ أى ضعف مجموع الحدود الفردية الرتبة.

(١١) $(س + أ)^ن - (س - أ)^ن = ٢ (ح_٢ + ح_٤ + ح_٦ + ...)$ أى ضعف مجموع الحدود الزوجية الرتبة.

الحد المشتمل على $س^ك$ من مفكوك ذات الحدين

في مفكوك $(س + أ)^ن$ لإيجاد الحد المشتمل على $س^ك$ حيث $ك \in ط$ نتبع ما يلى :

(١) نوجد $ح_{ر+١}$ في أبسط صورة له لتحديد أس المتغير $س$ بدلالة $ر$

(٢) نساوى أس المتغير $س$ الناتج فى $ح_{ر+١}$ بالأس المطلوب $ك$ للحصول على قيمة $ر$ ومنها نحدد الحد الذى يحتوى على $س^ك$ وهو $ح_{ر+١}$

(٣) نوجد الحد المشتمل على $س^ك$ بالتعويض عن قيمة $ر$ التى حصلنا عليها فى $ح_{ر+١}$

ملاحظات

(١) إذا كانت قيمة $ر$ التى حصلنا عليها لاتنتمى إلى مجموعة الأعداد الطبيعية فإن هذا يدل على أنه لا يوجد حد مشتمل على $س$ أس $ك$ المطلوبة.

(٢) إذا كان المطلوب إيجاد الحد الخالى من $س$ فنعتبر أن المطلوب إيجاد الحد المشتمل على $س^٠$ أى نساوى أس المتغير $س$ فى $ح_{ر+١}$ بالصفر ونوجد قيمة $ر$

(٣) • فى مفكوك $(١ + س)^ن$

(١) إذا كان : $ن$ عددًا زوجيًا

فإن : أكبر معامل فى المفكوك هو معامل الحد الأوسط $= {}^نق_{\frac{ن}{٢}}$

(٢) إذا كان : ن عددًا فرديًا

فإن : معاملا الحدين الأوسطين متساويان ومعامل أى منها هو أكبر معامل فى المفكوك

$= {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\frac{\text{ن}-١}{٢}}$ أو ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\frac{\text{ن}+١}{٢}}$

- فى مفكوك $(١ - \text{س})^{\text{ن}}$ المعامل الذى له أكبر قيمة عددية (قيمة مطلقة)

$=$ أكبر معامل فى مفكوك $(١ + \text{س})^{\text{ن}}$

④ • فى مفكوك $(\text{أ}\,\text{س} + \text{ب})^{\text{ن}}$ لإيجاد أكبر معامل فى المفكوك نضع $\frac{\text{معامل ح}_{\text{ر}+١}}{\text{معامل ح}_{\text{ر}}} \geq ١$

فيكون : $\frac{\text{ن} - \text{ر} + ١}{\text{ر}} \times \frac{\text{ب}}{\text{أ}} \geq ١$ $\therefore \frac{\text{ن} - \text{ر} + ١}{\text{ر}} \geq \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

$\therefore \frac{\text{ن}+١}{\text{ر}} - \frac{\text{ر}}{\text{ر}} \geq \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ $\therefore \frac{\text{ن}+١}{\text{ر}} \geq \frac{\text{أ}}{\text{ب}} + ١$

$\therefore \text{ر} \leq \frac{\text{ن}+١}{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}+١}$ وتوجد حالتان :

(١) إذا كان : $\frac{\text{ن}+١}{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}+١} =$ عددًا صحيحًا يساوى م

فإن : معاملا $\text{ح}_{\text{م}}$ ، $\text{ح}_{\text{م}+١}$ متساويان وكل منها يمثل أكبر معامل فى المفكوك.

(٢) إذا كان : $\frac{\text{ن}+١}{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}+١} =$ عددًا غير صحيح

، م هو أكبر عدد صحيح يحقق العلاقة $\text{ر} \leq \frac{\text{ن}+١}{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}+١}$

فإن : أكبر معامل فى المفكوك هو معامل $\text{ح}_{\text{م}+١}$

- فى مفكوك $(\text{أ}\,\text{س} - \text{ب})^{\text{ن}}$ المعامل الذى له أكبر قيمة عددية (قيمة مطلقة)

$=$ أكبر معامل فى مفكوك $(\text{أ}\,\text{س} + \text{ب})^{\text{ن}}$

الأعداد المركبة

- العدد التخيلى ت : هو العدد الذى مربعه $= -١$ أى أن : $\text{ت}^٢ = -١$
- $\text{ت}^١ = \text{ت}$ ، $\text{ت}^٢ = -١$ ، $\text{ت}^٣ = -\text{ت}$ ، $\text{ت}^٤ = ١$

القوى الصحيحة للعدد التخيلى ت

لإيجاد $ت^{م}$ حيث م عدد صحيح ← نوجد باقي قسمة م ÷ ٤ فإذا كان :

- الباقي = صفر ← فإن ← $ت^{م} = ١$
- الباقي = ١ ← فإن ← $ت^{م} = ت$
- الباقي = ٢ ← فإن ← $ت^{م} = -١$
- الباقي = ٣ ← فإن ← $ت^{م} = -ت$

العدد المركب

الصورة الجبرية	الصورة المثلثية	الصورة الأسية
$ع = س + ت ص$	$ع = ل (جتا \theta + ت جا \theta)$	$ع = ل هـ^{\theta ت}$

الصورة الجبرية

* $ع = س + ت ص$ حيث $س \in ح$ ، $ص \in ح$ ، $ت^{٢} = -١$
* $\overline{ع} = س - ت ص$ «مرافق العدد ع»

$\overline{ع_{١} + ع_{٢}} = \overline{ع_{١}} + \overline{ع_{٢}}$ ، $\overline{ع_{١} ع_{٢}} = \overline{ع_{١}} \times \overline{ع_{٢}}$

* $ع + \overline{ع} = ٢ س$ «حقيقي صرف» ، $ع - \overline{ع} = ٢ ت ص$ «تخيلي صرف»

، $ع \overline{ع} = س^{٢} + ص^{٢} = ل^{٢}$ حيث ل مقياس العدد المركب «| ع |»

* إذا كان : $ع = س$ فإن : $\overline{ع} = س$

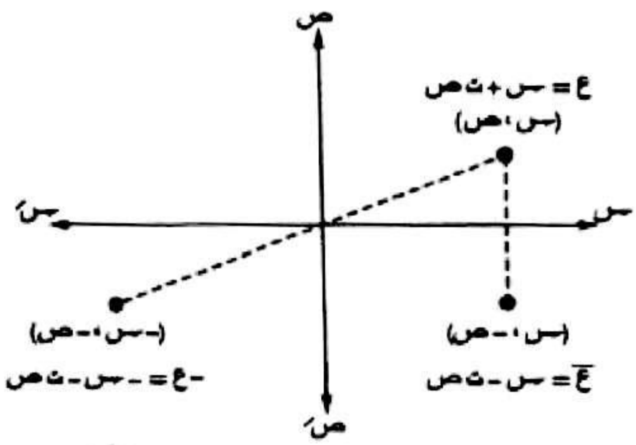
، إذا كان : $ع = ت ص$ فإن : $\overline{ع} = -ت ص$

* إذا كان : $ع_{١} = س_{١} + ت ص_{١}$ ، $ع_{٢} = س_{٢} + ت ص_{٢}$ فإن :

- $ع_{١} \pm ع_{٢} = (س_{١} \pm س_{٢}) + (ص_{١} \pm ص_{٢}) ت$
- $ع_{١} ع_{٢} = (س_{١} س_{٢} - ص_{١} ص_{٢}) + (س_{١} ص_{٢} + س_{٢} ص_{١}) ت$
- $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}} = \frac{ع_{١} \times \overline{ع_{٢}}}{ع_{٢} \overline{ع_{٢}}}$ «أى نضرب كلًا من البسط والمقام فى مرافق العدد»
- إذا كان : $ع_{١} = ع_{٢}$ فإن : $س_{١} = س_{٢}$ ، $ص_{١} = ص_{٢}$

مراجعة

- إذا مثلنا الجزء الحقيقي س على محور السينات والجزء التخيلي ص على محور الصادات فإن النقطة (س ، ص) هي التي تمثل العدد المركب : ع = س + ت ص على مستوى أرجاند.



العددان المترافقان ع ، $\overline{ع}$ يمثلان في شكل أرجاند بنقطتين متماثلتين حول محور السينات.	العدد المركب ومعكوسه الجمعي ع ، ـ ع يمثلان في شكل أرجاند بنقطتين متماثلتين حول نقطة الأصل.

الصورة المثلثية

إذا كان العدد المركب ع = س + ت ص في الصورة الجبرية

فإن الصورة المثلثية للعدد المركب ع هي :

$$ع = ل (جتا \theta + ت جا \theta)$$

• ل تسمى مقياس العدد المركب ع ويرمز لها بالرمز | ع | حيث | ع | = $\sqrt{س^2 + ص^2}$ مع ملاحظة أن | ع | ≥ صفر	• θ تسمى سعة العدد المركب ع وتسمى θ بالسعة الأساسية إذا كانت $\theta \in]-\pi ، \pi]$ مع ملاحظة أن السعة في الجزء الحقيقي هي نفسها في الجزء التخيلي.

دالة جيب التمام بالجزء الحقيقي ودالة الجيب بالجزء التخيلي

ملاحظات

لكل عدد مركب ع = س + ص ت وسعته θ يكون :

① |ع| ≥ ٠ مع ملاحظة أن : |ع| = ٠ إذا كان ع = ٠ .

② |ع| = |ع̄| = |−ع| = |−ع̄|

③ ع ع̄ = |ع|² = |ع̄|²

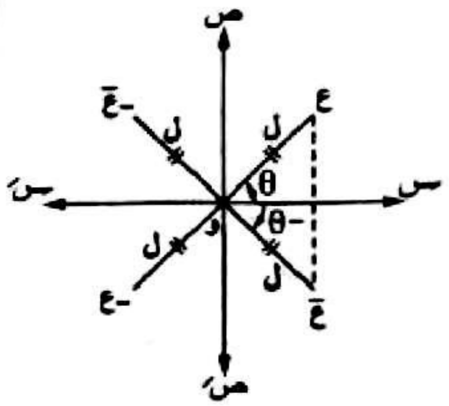
④ سعة العدد المركب تأخذ عدد غير منته من القيم وذلك بإضافة عدد صحيح من الدورات الكاملة (٢ π)

أى أن : سعة العدد المركب = θ + ٢ ن π حيث ن ∈ ص

⑤ سعة العدد المركب لا تتغير عند ضربه فى عدد حقيقى موجب

أى أن : سعة ع = سعة ك ع حيث ك ∈ ح⁺

من الرسم



- العدد ومرافقه متماثلان حول محور السينات.
- العدد ومعكوسه الجمعى متماثلان حول نقطة الأصل.
- العدد ومرافقه ومعكوساهما الجمعيين لهم نفس المقياس

تحويل الصورة الجبرية إلى الصورة المثلثية (القطبية) :

إذا كان : ع = س + ت ص هى الصورة الجبرية للعدد ع

① نوجد مقياس العدد |ع| = $\sqrt{س^2 + ص^2}$ = ل

② نحدد الربع الذى يقع فيه العدد ع من اشارتى س ، ص

③ نوجد ظا⁻¹ (ص/س) ومنها نوجد قياس الزاوية θ وهى السعة الأساسية للعدد المركب ع وذلك باستخدام الشكل المقابل.

④ نكتب العدد المركب ع فى الصورة المثلثية

ع = ل (جتا θ + ت جا θ)

إذا كان

ع = س + ت ص = ل (جتا θ + ت جا θ)

① تقع فى الربع الأول فإن السعة الأساسية θ = ظا⁻¹ (ص/س)

② تقع فى الربع الثانى فإن السعة الأساسية θ = π + ظا⁻¹ (ص/س)

③ تقع فى الربع الثالث فإن السعة الأساسية θ = −π + ظا⁻¹ (ص/س)

④ تقع فى الربع الرابع فإن السعة الأساسية θ = ظا⁻¹ (ص/س)

لاحظ أنه : إذا كان العدد المركب مقياسه ل وسعته θ فإن : س = ل جتا θ ، ص = ل جا θ

ويكون : ع = ل جتا θ + ت ل جا θ = س + ت ص هى الصورة الجبرية.

مراجعة

تحويل الصورة المثلثية الغير قياسية إلى الصورة القياسية

نحدد الربع الذى يقع فيه العدد المركب حسب الإشارة التى أمام الدوال المثلثية بالجزئين الحقيقى والتخيلى ثم نستخدم الشكل التالى :

الربع الأول

- إذا كان : ع = ل (جتا θ + ت جا θ) — الدوال المثلثية مضبوطة

تبقى كما هى : ل (جتا θ + ت جا θ)

- إذا كان : ع = ل (جا θ + ت جتا θ) — الدوال المثلثية معكوسة

تحول للصورة ع

= ل [جتا (٩٠° − θ) + ت جا (٩٠° − θ)]

الربع الثانى

- إذا كان : ع = ل (− جتا θ + ت جا θ) — الدوال المثلثية مضبوطة

تحول إلى ع

= ل [جتا (١٨٠° − θ) + ت جا (١٨٠° − θ)]

- إذا كان : ع = ل (− جا θ + ت جتا θ) — الدوال المثلثية معكوسة

تحول إلى ع

= ل [جتا (٩٠° + θ) + ت جا (٩٠° + θ)]

الربع الثالث

- إذا كان : ع = ل (− جتا θ − ت جا θ) — الدوال المثلثية مضبوطة

تحول إلى ع

= ل [جتا (−١٨٠° + θ) + ت جا (−١٨٠° + θ)]

- إذا كان : ع = ل (− جا θ − ت جتا θ) — الدوال المثلثية معكوسة

تحول إلى ع

= ل [جتا (−٩٠° − θ) + ت جا (٩٠° − θ)]

الربع الرابع

- إذا كان : ع = ل (جتا θ − ت جا θ) — الدوال المثلثية مضبوطة

تحول إلى ع

= ل [جتا (− θ) + ت جا (− θ)]

- إذا كان : ع = ل (جا θ − ت جتا θ) — الدوال المثلثية معكوسة

تحول إلى ع

= ل [جتا (−٩٠° + θ) + ت جا (−٩٠° + θ)]

لاحظ أن :

- فى حالة وجود دالة جيب التمام بالجزء الحقيقى ودالة الجيب بالجزء التخيلى (الدوال المثلثية مضبوطة) تنسب الزوايا إلى ١٨٠° أو ٣٦٠°
- فى حالة وجود دالة الجيب بالجزء الحقيقى ودالة جيب التمام بالجزء التخيلى (الدوال المثلثية معكوسة) تنسب الزوايا إلى ٩٠° ، −٩٠°
- الطريقة السابقة نستخدم لكل ل > ٠ ، θ ∋ [٠ ، ٢ π[
- إذا كانت السعة التى حصلنا عليها ∋]− π ، π] فإنها تكون هى السعة الأساسية.
- إذا لم تكن السعة التى حصلنا عليها أساسية نضيف إليها ٣٦٠° أو نحذف منها ٣٦٠° نحصل على السعة الأساسية.

الصورة الأسية للعدد المركب (صورة أويلر)

* $\text{جا } س = \sum_{ر=0}^{\infty} \frac{(-1)^{ر}}{\underline{|2ر+1}} س^{2ر+1} = \frac{س}{\underline{|1}} - \frac{س^{3}}{\underline{|3}} + \frac{س^{5}}{\underline{|5}} - \dots\dots$

* $\text{جتا } س = \sum_{ر=0}^{\infty} \frac{(-1)^{ر}}{\underline{|2ر}} س^{2ر} = 1 - \frac{س^{2}}{\underline{|2}} + \frac{س^{4}}{\underline{|4}} - \frac{س^{6}}{\underline{|6}} + \dots\dots$

* $هـ^{س} = \sum_{ر=0}^{\infty} \frac{س^{ر}}{\underline{|ر}} = 1 + \frac{س}{\underline{|1}} + \frac{س^{2}}{\underline{|2}} + \frac{س^{3}}{\underline{|3}} + \dots\dots$

* $هـ^{ت س} = \text{جتا } س + ت \text{ جا } س$

* العدد المركب ع = س + ت ص (الصورة الجبرية)

= ل (جتا θ + ت جا θ) (الصورة المثلثية)

= $\boxed{ل \; هـ^{θ ت} \text{ (الصورة الأسية)}}$

مقياس العدد المركب | ع |

السعة الأساسية للعدد المركب ع

لاحظ أن :

ت = جتا $\frac{\pi}{2}$ + ت جا $\frac{\pi}{2}$ = $هـ^{\frac{\pi}{2} ت}$ ، − ت = جتا $\frac{-\pi}{2}$ + ت جا $\frac{-\pi}{2}$ = $هـ^{\frac{-\pi}{2} ت}$

، ١ = جتا ٠ + ت جا ٠ = $هـ^{\text{صفر } ت}$ ، −١ = جتا π + ت جا π = $هـ^{\pi ت}$

ضرب وقسمة الأعداد المركبة

إذا كان : $ع_1$ ، $ع_2$ عددان مركبان حيث :

الصورة الجبرية	الصورة المثلثية	الصورة الأسية
$ع_1 = س_1 + ت ص_1$ $ع_2 = س_2 + ت ص_2$	$ع_1 = ل_1 \text{ جتا } θ_1 + ت \text{ جا } θ_1$ $ع_2 = ل_2 \text{ جتا } θ_2 + ت \text{ جا } θ_2$	$ع_1 = ل_1 هـ^{θ_1 ت}$ $ع_2 = ل_2 هـ^{θ_2 ت}$
$\therefore ع_1 ع_2 = (س_1 س_2 - ص_1 ص_2)$ $+ (س_1 ص_2 + س_2 ص_1) ت$	$\therefore ع_1 ع_2 = ل_1 ل_2 [\text{جتا}(θ_1 + θ_2)$ $+ ت \text{ جا}(θ_1 + θ_2)]$	$\therefore ع_1 ع_2$ $= ل_1 ل_2 هـ^{(θ_1 + θ_2) ت}$
$\therefore ع_1 \div ع_2$ $= \frac{س_1 + ت ص_1}{س_2 + ت ص_2} \times \frac{س_2 - ت ص_2}{س_2 - ت ص_2}$ أى نقوم بضرب كلاً من البسط والمقام فى مرافق المقام	$ع_1 \div ع_2 = \frac{ل_1}{ل_2} [\text{جتا}(θ_1 - θ_2)$ $+ ت \text{ جا}(θ_1 - θ_2)]$	$ع_1 \div ع_2$ $= \frac{ل_1}{ل_2} هـ^{(θ_1 - θ_2) ت}$

تعميم : $ع_1 ع_2 \dots ع_ن = ل_1 ل_2 \dots ل_ن \left(\text{جتا}(θ_1 + θ_2 + \dots + θ_ن) + ت \text{ جا}(θ_1 + θ_2 + \dots + θ_ن)\right)$

مراجعة

* مما سبق نستنتج أنه إذا كان : ع = ل (جتا θ + ت جا θ) = $ل\,هـ^{تθ}$ فإن :

① $ع^{ن} = ل^{ن}$ [جتا (ن θ) + ت جا (ن θ)] = $ل^{ن}\,هـ^{ت ن θ}$

حيث ن ∈ $ص^{+}$ وتسمى نظرية ديموافر بأس صحيح موجب

② $ع^{-١} = \frac{١}{ع} = \frac{جتا ٠ + ت جا ٠}{ل (جتا θ + ت جا θ)} = \frac{١}{ل}$ [جتا (− θ) + ت جا (− θ)] = $\frac{١}{ل}\,هـ^{-تθ}$

③ $\overline{ع}$ = ل (جتا − θ + ت جا − θ) = $ل\,هـ^{-تθ}$

نظرية ديموافر بأس نسبي موجب

* تستخدم لإيجاد الجذر النوني للعدد المركب ع وذلك بوضعه في الصورة المثلثية :

ع = ل (جتا θ + ت جا θ) ومنها فإن : $ع^{\frac{١}{ن}} = ل^{\frac{١}{ن}}$ [جتا $\left(\frac{θ + ٣٦٠° ر}{ن}\right)$ + ت جا $\left(\frac{θ + ٣٦٠° ر}{ن}\right)$]

لكل ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، (ن − ١) ، ن ∈ $ص^{+}$

وإذا كانت السعة بالجذور الناتجة ليست السعة الأساسية يتم تحويلها إلى السعة الأساسية.

ملاحظة

● الجذر النوني للعدد المركب يمكن استنتاجه بحيث تكون سعته هى السعة الأساسية

$\left(\frac{θ + ٣٦٠° ر}{ن}\right)$ ∈]−π ، π] وذلك بوضع ر = −٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، .... وذلك بحيث :

أولاً : إذا كان ن عددًا فرديًا : نضع ر = ٠ ، ١ ، −١ ، ٢ ، −٢ إلى قيم عددها ن

ثانيًا : إذا كان ن عددًا زوجيًا :

هنا حالتان :

θ ∈]٠ ، π] أى موجبة نضع ر = ٠ ، −١ ، ١ ، −٢ ، ٢ ، ... إلى قيم عددها (ن)

«لاحظ إننا بعد الصفر بدأنا بالعدد السالب»

θ ∈]−π ، ٠] أى سالبة أو صفر نضع ر = ٠ ، ١ ، −١ ، ٢ ، −٢ ، ... إلى قيم عددها (ن) «لاحظ أننا بعد الصفر بدأنا بالعدد الموجب»

● فمثلًا : لإيجاد الجذر الخامس نضع ر = ٠ ، ١ ، −١ ، ٢ ، −٢ (خمسة قيم)

● لإيجاد الجذر الرابع :

نضع ر = ٠ ، −١ ، ١ ، −٢ (أربعة قيم تبدأ بالسالب بعد الصفر)

إذا كانت : θ ∈]٠ ، π] أى موجبة.

نضع ر = ٠ ، ١ ، −١ ، ٢ (أربعة قيم تبدأ بالموجب بعد الصفر)

إذا كانت : θ ∈]−π ، ٠] أى سالبة أو صفر.

الجذور النونية

المعادلة سـ^ن = أ حيث أ عدد مركب يكون لها ن من الجذور على الصورة : سـ = أ^(١/ن) وتقع الجذور جميعًا فى مستوى أرجاند على دائرة واحدة طول نصف قطرها | أ |^(١/ن) أى الجذر النونى الموجب لمقياس العدد المركب أ

وتكون رؤوس مضلع منتظم عدد أضلاعه ن ويكون الفرق بين سعة كل جذر والجذر التالى له = $\frac{٣٦٠^\circ}{ن}$

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح (١ ، ω ، ω²)

- الصورة المثلثية والصورة الجبرية للجذور التكعيبية للواحد الصحيح :
  - الصورة المثلثية هى : (جتا ٠ + ت جا ٠) ، (جتا $\frac{٢\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٢\pi}{٣}$) ، (جتا $\frac{٤\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٤\pi}{٣}$)
  - الصورة الجبرية هى : ١ ، $\frac{-١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $\frac{-١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

أى أن : الواحد الصحيح له ثلاثة جذور أحدهم حقيقى وهو العدد ١ والآخران غير حقيقيان مترافقان مربع أحدهما يساوى الآخر.

- مجموع الجذور التكعيبية للواحد الصحيح = صفر

أى أن : $\boxed{١ + \omega + \omega^٢ = \text{صفر}}$ ومنها $\boxed{١ + \omega = -\omega^٢}$ ، $\boxed{١ + \omega^٢ = -\omega}$ ، $\boxed{\omega + \omega^٢ = -١}$

- حاصل ضرب الجذرين التكعيبيين الغير حقيقيين للواحد الصحيح = ١

أى أن : $\omega^٣ = ١$ ومنها $\frac{١}{\omega} = \omega^٢$ ، $\frac{١}{\omega^٢} = \omega$

- الفرق بين الجذرين التكعيبيين الغير حقيقيين للواحد الصحيح = ± $\sqrt{٣}$ ت

أى أن : $\boxed{\omega - \omega^٢ = \pm\sqrt{٣}\,ت}$ ، أ $\boxed{\omega^٢ - \omega = \pm\sqrt{٣}\,ت}$

ملاحظتان

① مرافق العدد ω هو ω² وبالتالى يكون : مرافق العدد (١ + ω) هو (١ + ω²)

ومرافق العدد (٢٠١٨ + ω) هو (٢٠١٨ + ω²)

ومرافق العدد (أ ω − ب ω²) هو (أ ω² − ب ω) لكل أ ، ب ∈ ع

② $\omega^{٣ن} = ١$ ، $\omega^{٣ن+١} = \omega$ ، $\omega^{٣ن+٢} = \omega^٢$ حيث ن ∈ صـ

- **الجذور النونية للواحد الصحيح :** إذا كان ع^ن = ١

فإن : ع = (جتا ٠° + ت جا ٠°)^(١/ن) = جتا $\frac{٢\pi ر}{ن}$ + ت جا $\frac{٢\pi ر}{ن}$ حيث ر ∈ صـ ، $\frac{٢\pi ر}{ن}$ ∈]−π ، π]

وتمثل الجذور النونية للواحد الصحيح على مستوى أرجاند برؤوس مضلع منتظم عدد رؤوسه ن وتقع على دائرة مركزها نقطة الأصل ، وطول نصف قطرها ١ ويكون الفرق بين سعة كل جذر والجذر التالى له = $\frac{٣٦٠^\circ}{ن}$

مراجعة

المحددات

① محدد الرتبة الثانية $\begin{vmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{vmatrix}$ = أ١١ أ٢٢ − أ٢١ أ١٢

② محدد الرتبة الثالثة $\begin{vmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{vmatrix}$

ويمكن إيجاد قيمة محدد الرتبة الثالثة بفكه عن طريق إيجاد مجموع حواصل ضرب عناصر أى صف (عمود) فى العامل المرافق المناظر لكل عنصر من عناصر هذا الصف (العمود) مع ملاحظة أن العامل المرافق لأى عنصر أ$_{ص ع}$ هو المحدد من الرتبة الثانية الناتج من حذف الصف رقم ص والعمود رقم ع من المحدد الأصلى مضروبًا × (−١)$^{ص + ع}$ لتحديد إشارة العامل المرافق.

الخواص الأساسية للمحددات

خاصية ١

لا تتغير قيمة المحدد عند تبديل صفوف المحدد بأعمدته المناظرة بنفس الترتيب.

- **وبمعنى آخر** : قيمة محدد المصفوفة المربعة تساوى قيمة محدد مدور هذه المصفوفة.

فمثلًا :

$$\begin{vmatrix} ٧ & ١١ & ١ \\ ١- & ٥ & ٢ \\ ٩ & ٦ & ٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ١١ \\ ٩ & ١- & ٧ \end{vmatrix}$$

خاصية ٢

قيمة المحدد لا تتغير بفكه عن طريق عناصر أى صف أو أى عمود.

فمثلًا : قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٢ & ١- & ٣ \\ ٥ & ١ & ٠ \\ ١ & ١- & ٢ \end{vmatrix}$

- بالفك عن طريق الصف الأول = ٣ (١ + ٥) − (−١) (٠ − ١٠) + ٢ (٠ − ٢) = ٤
- بالفك عن طريق العمود الثانى = − (−١) (٠ − ١٠) + (١) (٣ − ٤) − (−١) (١٥ − ٠) = ٤

خاصية ٣

قيمة المحدد تنعدم في الحالتين الآتيتين :

① إذا كانت : جميع عناصر أى صف (عمود) من محدد تساوى صفر

فمثلًا : قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٠ & ٥ & ٣ \\ ٠ & ٦ & -٢ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$ = صفر

② إذا تساوت العناصر المتناظرة في أى صفين (عمودين) في المحدد :

فمثلًا : قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٣ & ٧ & ٣ \\ -١ & ٨ & -١ \\ ٥ & ٤ & ٥ \end{vmatrix}$ = صفر

خاصية ٤

إذا وجد عامل مشترك في جميع عناصر صف (عمود) في محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد.

فمثلًا : $\begin{vmatrix} ٦ & ٣ & ٢س \\ ٧ & ٤ & ٢ص \\ ٥ & ٩ & ٢ع \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ٦ & ٣ & س \\ ٧ & ٤ & ص \\ ٥ & ٩ & ع \end{vmatrix}$

ومنها نجد أن :

ضرب المحدد في عدد حقيقى $ك \neq ٠$ فإننا نضرب هذا العدد في عناصر أى صف (عمود) واحد فقط.

خاصية ٥

إذا بدلنا موضعى صفين (عمودين) فإن : قيمة المحدد الناتج = − قيمة المحدد الأصلى.

فمثلًا : $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ٩ & ٤ & -٢ \\ ١٣ & ٧ & ٥ \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٣ \\ ٩ & -٢ & ٤ \\ ١٣ & ٥ & ٧ \end{vmatrix}$

خاصية ٦

إذا كتبت جميع عناصر أى صف (عمود) كمجموع عنصرين فإنه يمكن كتابة المحدد الأصلى على صورة مجموع محددين.

فمثلًا :

$$\begin{vmatrix} \text{أ}+\text{ب} & 2 & 3 \\ \text{حـ}+\text{ء} & -5 & 1 \\ \text{هـ}+\text{و} & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ} & 2 & 3 \\ \text{حـ} & -5 & 1 \\ \text{هـ} & 4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ب} & 2 & 3 \\ \text{ء} & -5 & 1 \\ \text{و} & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

خاصية ٧

إذا أضفنا لعناصر أى صف (عمود) بمحدد مضاعفات عناصر أى صف (عمود) آخر فإن قيمة المحدد لا تتغير.

فمثلًا :

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{س} & \text{ء} \\ \text{ب} & \text{ص} & \text{هـ} \\ \text{حـ} & \text{ع} & \text{و} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ} + 2\,\text{س} + 7\,\text{ء} & \text{س} & \text{ء} \\ \text{ب} + 2\,\text{ص} + 7\,\text{هـ} & \text{ص} & \text{هـ} \\ \text{حـ} + 2\,\text{ع} + 7\,\text{و} & \text{ع} & \text{و} \end{vmatrix}$$

خاصية ٨

فى أى محدد إذا ضربنا عناصر أى صف (عمود) فى العوامل المرافقة للعناصر المناظرة فى أى صف (عمود) آخر ثم جمعنا نواتج الضرب فإن الناتج يكون مساويًا صفرًا.

فمثلًا : فى المحدد $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ بضرب عناصر الصف الأول فى العوامل المرافقة للصف الثانى والجمع

فإن : $3 \times (-1)\,(-3 - 2) + (-1) \times (9 - 0) + 2 \times (-1) \times (3 - 0) =$ صفر

خاصية ٩

قيمة المحدد على الصورة المثلثية تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى.

أى أن : قيمة المحدد على الصورة المثلثية = $أ_{١١} \times أ_{٢٢} \times أ_{٣٣}$

فمثلًا : $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ٤ & ٠ \\ ١ & -١ & -٢ \end{vmatrix} = ٣ \times ٤ \times -٢$

$= -٢٤$

، $\begin{vmatrix} -١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٥ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{vmatrix} = -١ \times ٥ \times ٤$

$= -٢٠$

الصورة المثلثية للمحدد

المحدد الذى جميع عناصره تحت أو فوق القطر الرئيسى أصفار يسمى محدد على الصورة المثلثية كما فى الشكلين :

وتسمى العناصر $أ_{١١}$ ، $أ_{٢٢}$ ، $أ_{٣٣}$ بعناصر القطر الرئيسى.

القطر الرئيسى

$\begin{vmatrix} أ_{١١} & ٠ & ٠ \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & ٠ \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$ أو $\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ ٠ & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ ٠ & ٠ & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$

الصورة المثلثية السفلى — الصورة المثلثية العليا

ملاحظة

إذا كان (س − ٢) عاملًا من عوامل المحدد $\begin{vmatrix} ٣ & ٦ \\ أ & س^٢ \end{vmatrix}$ فإن : $\begin{vmatrix} ٣ & ٦ \\ أ & س^٢ \end{vmatrix}$ = صفر عندما س = ٢

المصفوفات

- هى ترتيب لعدد من العناصر (المتغيرات أو الأعداد) فى صورة صفوف أفقية وأعمدة رأسية بين قوسين على الصورة (   )
- المصفوفة المكونة من م صفًا ، ن عمودًا تكون على النظم م × ن

مراجعة

بعض المصفوفات الخاصة

المصفوفة المربعة
عدد صفوفها = عدد أعمدتها

المصفوفة الصفرية
جميع عناصرها أصفار ويرمز لها بالرمز

المصفوفة القطرية
مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار عدا عناصر القطر الرئيسي يكون أحدهم على الأقل ≠ صفر

مصفوفة الوحدة I
مصفوفة قطرية كل عنصر من عناصر قطرها الرئيسي يساوى واحد

مدور المصفوفة

$\text{أ}_{م \times ن}$ بتبديل الصفوف بالأعمدة $\text{أ}^{مد}_{ن \times م}$

$\text{أ}^{مد}_{ن \times م}$ بتبديل الصفوف بالأعمدة $\text{أ}_{م \times ن}$

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٠ & ٢ & ٧ \end{pmatrix} \rightleftarrows \text{أ}^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ -١ & ٢ \\ ٣ & ٧ \end{pmatrix}$$

المصفوفة المتماثلة / شبه المتماثلة

إذا كان : $\text{أ}^{مد} = \text{أ}$ فإن المصفوفة أ تسمى مصفوفة متماثلة

إذا كان : $\text{أ}^{مد} = -\text{أ}$ فإن المصفوفة أ تسمى مصفوفة شبه متماثلة

لاحظ أن :

$(\text{أ}^{مد})^{مد} = \text{أ}$

العمليات على المصفوفات

١ ضرب عدد حقيقى ≠ ٠ × المصفوفة

نضرب هذا العدد فى كل عنصر من عناصر المصفوفة.

مثال

$$5 \times \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -15 \\ 5 & 20 \\ 35 & 10 \end{pmatrix}$$

٢ جمع مصفوفتين

لجمع مصفوفتين يجب أن تكون المصفوفتان على نفس النظم : نجمع كل عنصر مع نظيره.

مثال

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -8 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -1 \\ -7 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

٣ طرح مصفوفتين

لطرح مصفوفتين يجب أن تكون المصفوفتان على نفس النظم وتستخدم القاعدة :

أ − ب = أ + (−ب)

مثال

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

٤ ضرب مصفوفتين

شرط أن تكون عملية الضرب ممكنة يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوى عدد صفوف المصفوفة الثانية.

أى أن : أ$_{م \times ن}$ × ب$_{ك \times ل}$ تكون ممكنة إذا كان ن = ك ويكون ناتج الضرب مصفوفة من النظم م × ل

خواص العمليات على المصفوفات

١) لأى ثلاث مصفوفات أ ، ب ، ج على نفس النظم يكون :

- أ + ب = ب + أ
- (أ + ب) + ج = أ + (ب + ج)
- أ + ☐ = أ
- أ + (−أ) = ☐
- (أ + ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}

مراجعة

(٢) لأى ثلاث مصفوفات ا ، ب ، ج إذا كانت عمليات الضرب معرفة فإن :

- ا ب ≠ ب ا
- (ا ب) ج = ا (ب ج)
- ا I = I ا = ا
- ا (ب + ج) = ا ب + ا ج ، (ب + ج) ا = ب ا + ج ا
- $(\text{ا ب})^{\text{مد}} = \text{ب}^{\text{مد}}\ \text{ا}^{\text{مد}}$ وبصفة عامة $(\text{ا ب ج .. د})^{\text{مد}} = \text{د}^{\text{مد}} \ldots \text{ج}^{\text{مد}}\ \text{ب}^{\text{مد}}\ \text{ا}^{\text{مد}}$

المعكوس الضربى للمصفوفة ا

يكون للمصفوفة المربعة $\text{ا}_{\text{م} \times \text{م}}$ معكوس ضربى عندما يكون

محدد المصفوفة ≠ صفر أى Δ ≠ ٠ حيث Δ = |ا|

أولاً : المعكوس الضربى للمصفوفة على النظم ٢ × ٢

إذا كان : $\text{ا} = \begin{pmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{حـ} & \text{ء} \end{pmatrix}$

فإن : $\text{ا}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \text{ء} & -\text{ب} \\ -\text{حـ} & \text{ا} \end{pmatrix}$

لاحظ أن :

المصفوفة التى ليس لها معكوس ضربى تعرف بالمصفوفة المنفردة (الشاذة) والتى لها معكوس ضربى تعرف بغير المنفردة (غير الشاذة)

لاحظ أننا

قمنا بتبديل عنصرى القطر الرئيسى ويعكس إشارتى عنصرى القطر الآخر.

ثانيًا : المعكوس الضربى للمصفوفة على النظم ٣ × ٣

إذا كان : ا مصفوفة غير منفردة أى |ا| ≠ ٠ فإن المعكوس الضربى لها

$$\boxed{\text{ا}^{-1} = \frac{1}{\text{محدد المصفوفة}} \times \text{مدور مصفوفة العوامل المرافقة}}$$

$\boxed{\text{ا}^{-1} = \frac{1}{|\text{ا}|} \times \text{ا}^{\text{ملـ}}}$ ، $\text{ا}^{\text{ملـ}}$ هى المصفوفة الملحقة وهى مدور مصفوفة العوامل المرافقة.

كيفية إيجاد مصفوفة العوامل المرافقة :

إذا كان : $\text{ا}_{\text{ص ع}}$ أحد عناصر المصفوفة ا فإن مرافق العنصر $\text{ا}_{\text{ص ع}}$ ويرمز له بالرمز

$\text{ا}_{\text{ص ع}} = (-1)^{\text{ص} + \text{ع}} \times$ المحدد الناتج بعد حذف الصف ص والعمود ع من المصفوفة

أى أن : إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \\ \text{أ}_{٣٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{١٣} \end{pmatrix}$

فإن مصفوفة العوامل المرافقة م =

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{١٣} \end{vmatrix} (-١)^{٣+١} & \begin{vmatrix} \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{١٢} \\ \text{أ}_{٣٣} & \text{أ}_{١٣} \end{vmatrix} (-١)^{٢+١} & \begin{vmatrix} \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{٢٢} \\ \text{أ}_{٣٣} & \text{أ}_{٢٣} \end{vmatrix} (-١)^{١+١} \\ \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{١٣} \end{vmatrix} (-١)^{٣+٢} & \begin{vmatrix} \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٣٣} & \text{أ}_{١٣} \end{vmatrix} (-١)^{٢+٢} & \begin{vmatrix} \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{٣٣} & \text{أ}_{٢٣} \end{vmatrix} (-١)^{١+٢} \\ \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \end{vmatrix} (-١)^{٣+٣} & \begin{vmatrix} \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{١٢} \end{vmatrix} (-١)^{٢+٣} & \begin{vmatrix} \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{vmatrix} (-١)^{١+٣} \end{pmatrix}$$

لاحظ أن :

يمكن تحديد إشارة العامل المرافق لكل عنصر باستخدام قاعدة الإشارات التالية دون الحاجة إلى الضرب × $(-١)^{\text{ص}+\text{ع}}$ قاعدة الإشارات : $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

ملاحظات

(١) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ ولتكن $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ء} & \text{حـ} \end{pmatrix}$

فإن : $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} -\text{ب} & \text{ء} \\ \text{أ} & -\text{حـ} \end{pmatrix}$ أى أن المصفوفة الملحقة لمصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ تنتج من تبديل عنصرى القطر الرئيسى مع تغيير إشارتى عنصرى القطر غير الرئيسى

فمثلاً : $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ١- \end{pmatrix}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٥- & ٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ٦- & ٧- \\ ٨ & ٢ \end{pmatrix}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٦ & ٨ \\ ٧- & ٢- \end{pmatrix}$

(٢) لأى مصفوفة مربعة غير منفردة : $\text{أ}\,\text{أ}^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{مد}}\,\text{أ} = \Delta\, I$ حيث $\Delta = |\text{أ}|$

(٣) فى مصفوفة الوحدة I تكون العوامل المرافقة لعناصر القطر الرئيسى كل منها = ١ والعوامل المرافقة لباقى العناصر أصفارًا وعلى ذلك فإن : $\boxed{I^{\text{مد}} = I}$

أى أن : المصفوفة الملحقة لمصفوفة الوحدة هى نفس مصفوفة الوحدة.

بعض خواص المعكوس الضربى للمصفوفة

إذا كانت : أ ، ب مصفوفتين غير منفردتين فإن :

① $\text{أ}\,\text{أ}^{-1} = \text{أ}^{-1}\,\text{أ} = I$ ② $(\text{أ}\,\text{ب})^{-1} = \text{ب}^{-1}\,\text{أ}^{-1}$ ③ $(\text{أ}^{-1})^{-1} = \text{أ}$

④ $(\text{أ}^{-1})^{\text{ن}} = (\text{أ}^{\text{ن}})^{-1}$ ⑤ $(\text{أ}^{-1})^{2} = (\text{أ}^{2})^{-1}$ ⑥ $(I)^{-1} = I$

المعادلة الخطية :

* الصورة العامة للمعادلة الخطية هى : $\text{أ}_1\text{س}_1 + \text{أ}_2\text{س}_2 + \text{أ}_3\text{س}_3 + \text{أ}_4\text{س}_4 + \text{أ}_5\text{س}_5 + \dots + \text{أ}_{\text{ن}}\text{س}_{\text{ن}} = \text{ب}$

حيث س_1 ، س_2 ، س_3 ، ... $\text{س}_{\text{ن}}$ متغيرات عددها ن ، أ_1 ، أ_2 ، أ_3 ، ... ، $\text{أ}_{\text{ن}}$ ، ب أعداد حقيقية

* إذا كان : ب = ٠ فإن المعادلة الخطية السابقة تكون متجانسة.

المعادلة المصفوفية :

لكل نظام مكون من م من المعادلات الخطية

، ن من المتغيرات فإن المعادلة المصفوفية للنظام هى :

$$\text{أ} \quad \text{س} = \text{ب}$$

مصفوفة المعاملات ↑ أ ، مصفوفة المتغيرات ↑ س ، مصفوفة الثوابت ↑ ب

لاحظ أن :

* إذا كانت : ب = $\boxed{}$ فإن النظام يكون نظام معادلات خطية متجانسة.
* إذا كانت : ب ≠ $\boxed{}$ فإن النظام يكون نظام معادلات خطية غير متجانسة.

فمثلًا : نظام المعادلات الخطية : ٣ س − ٤ ص = ٧ ، ٢ س − ٣ ص + ع = ٠

معادلته المصفوفية :
$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

حل نظام مكون من ن من المعادلات الخطية فى ن من المتغيرات باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة :

إذا كانت | الصورة المصفوفية لنظام المعادلات الخطية هى : أ س = ب | و | مصفوفة المعاملات أ مصفوفة مربعة غير منفردة على النظم ٢ × ٢ أو ٣ × ٣ | فإن | عناصر المصفوفة $\text{س} = \text{أ}^{-1}\,\text{ب}$ هى قيم المتغيرات المطلوبة (حل نظام المعادلات)

فمثلًا :

نظام المعادلات

٤ س − ص = ٧

، ٢ س − ٣ ص = ١

←

المعادلة المصفوفية

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

← محدد مصفوفة المعاملات = −١٠ ≠ ٠

الحل

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \frac{-1}{10}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

أى أن : س = ٢ ، ص = ١

مرتبة المصفوفة :

* مرتبة المصفوفة غير الصفرية هى أعلى درجة لمحدد أو محدد أصغر للمصفوفة قيمته لا تساوى صفر.

أى أن : إذا كانت أ مصفوفة غير صفرية على النظم م × ن

فإنه يرمز لمرتبة المصفوفة أ بالرمز ر (أ) ويكون :

• ١ ≤ ر (أ) ≤ ن إذا كان م ≤ ن • ١ ≤ ر (أ) ≤ م إذا كان م ≥ ن

فمثلًا :

• إذا كانت : $أ_{٢ \times ٢}$

فإن ١ ≤ ر (أ) ≤ ٢

• إذا كانت : $أ_{٤ \times ٢}$

فإن ١ ≤ ر (أ) ≤ ٢

* مرتبة المصفوفة الصفرية = ٠

أى أنه : إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ فإن : ر (أ) = ٠

ملاحظات

① حين نقول أن مرتبة المصفوفة أ = ٢ (مثلًا) فإن هذا يعنى أمرين متحققين :

(١) يوجد محدد أو محدد أصغر واحد على الأقل من الدرجة ٢ بحيث قيمته ≠ صفر

(٢) قيم جميع المحددات الصغرى من درجة أكبر من ٢ = صفر

② إذا كانت أ مصفوفة صف أو عمود غير صفرية فإن : ر (أ) = ١

③ إذا كانت I مصفوفة وحدة على النظم ن × ن فإن : ر (I) = ن

④ مرتبة المصفوفة أ = مرتبة $أ^{مد}$

⑤ إذا أضيف أو حذف صف (عمود) صفرى على المصفوفة أ فإن رتبتها لا تتغير.

⑥ إذا أضيف أو حذف صف (عمود) عبارة عن تجميع لعدة صفوف (أعمدة) فإن مرتبة المصفوفة لا تتغير.

• المصفوفة الموسعة :

إذا كان لدينا م من المعادلات الخطية فى ن من المجاهيل فإنها تكتب على الصورة أ س = ب ويمكن تعريف المصفوفة الموسعة $أ^*$ حيث $أ^*$ = (أ ⋮ ب) وتكون على النظم م × (ن + ١)

فمثلًا : إذا كان نظام المعادلات

٣ س − ٤ ص + ع = ٧

٧ س + ص − ٣ ع = ١

فإن المصفوفة الموسعة $أ^*$ = $\left(\begin{array}{ccc:c} ٣ & -٤ & ١ & ٧ \\ ٧ & ١ & -٣ & ١ \end{array}\right)$

مراجعة

بحث إمكانية حل نظام مكون من (ن) من المعادلات الخطية فى (ن) من المتغيرات

① نكتب المعادلة المصفوفية : أ س = ب

② نوجد أ*

③ نوجد ر (أ) ، ر (أ*)

وهنا توجد حالتان

(أ) المعادلات غير متجانسة
أى ب ≠ $\boxed{\quad}$

النظام

- حل وحيد
  إذا كان
  ر (أ) = ر (أ*) = ن
- عدد لانهائى من الحلول
  إذا كان
  ر (أ) = ر (أ*) = ك < ن
- لايوجد حل على الاطلاق
  إذا كان
  ر (أ) ≠ ر (أ*)

(ب) المعادلات متجانسة
أى ب = $\boxed{\quad}$

فى هذه الحالة ر (أ) = ر (أ*)
لأن إضافة عمود صفرى لمصفوفة
المعاملات لا يغير من مرتبتها
ويكون للنظام

- حل وحيد هو الحل الصفرى أو الحل البديهى
  إذا كان
  ر (أ) = ن
- عدد لانهائى من الحلول بجانب الحل الصفرى
  إذا كان
  ر (أ) < ن

ثانيا ملخص لأهم نقاط الهندسة الفراغية

* إحداثيات نقطة أ فى الفراغ ثلاثى الأبعاد تتعين بالثلاثى المرتب أ (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$) ∈ ح^٣

حيث س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$ مساقط النقطة أ على المحاور الثلاثة س ، ص ، ع على الترتيب

* إذا كان : أ (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$) ، ب (س$_٢$ ، ص$_٢$ ، ع$_٢$) نقطتين فى الفراغ فإن :

① إحداثيات نقطة منتصف $\overline{أب}$ = $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} ، \frac{ع_١ + ع_٢}{٢}\right)$

② متجه موضع النقطة أ بالنسبة لنقطة الأصل هو $\overrightarrow{وأ} = \overrightarrow{أ}$ = (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$)

، متجه موضع النقطة ب بالنسبة لنقطة الأصل هو $\overrightarrow{وب} = \overrightarrow{ب}$ = (س$_٢$ ، ص$_٢$ ، ع$_٢$)

③ القطعة المستقيمة الموجهة من أ إلى ب = $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ = (س$_٢$ − س$_١$ ، ص$_٢$ − ص$_١$ ، ع$_٢$ − ع$_١$)

④ طول القطعة المستقيمة الموجهة من أ إلى ب = معيار المتجه $\overrightarrow{أب}$ = $\|\overrightarrow{أب}\|$ = البعد بين النقطتين أ ، ب

= أب = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$

⑤ معيار $\overrightarrow{أ}$ = $\|\overrightarrow{أ}\|$ = $\sqrt{س_١^٢ + ص_١^٢ + ع_١^٢}$

⑥ $\overrightarrow{أ}$ «بدلالة متجهات الوحدة الأساسية» = س$_١$ $\overrightarrow{س}$ + ص$_١$ $\overrightarrow{ص}$ + ع$_١$ $\overrightarrow{ع}$

⑦ متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{ى}_١$ = $\frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|}$

⑧ جمع المتجهات فى الفراغ : $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ = (س$_١$ + س$_٢$ ، ص$_١$ + ص$_٢$ ، ع$_١$ + ع$_٢$)

* ($\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$) ∈ ح^٣ «خاصية الانغلاق»
* ($\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$) = ($\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ}$) «خاصية الإبدال»
* إذا كان : $\overrightarrow{ح}$ = (س$_٣$ ، ص$_٣$ ، ع$_٣$) ∈ ح^٣

فإن : ($\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$) + $\overrightarrow{ح}$ = $\overrightarrow{أ}$ + ($\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ح}$) = $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ح}$ «خاصية الدمج»

⑨ $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{و} = \overrightarrow{و} + \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{أ}$ «خاصية وجود المحايد الجمعى $\overrightarrow{و}$ = (٠ ، ٠ ، ٠)»

⑩ لكل $\overrightarrow{أ}$ = (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$) يوجد (−$\overrightarrow{أ}$) = (−س$_١$ ، −ص$_١$ ، −ع$_١$) حيث $\overrightarrow{أ}$ + (−$\overrightarrow{أ}$) = (−$\overrightarrow{أ}$) + $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{و}$

«المتجه الصفرى» ويسمى −$\overrightarrow{أ}$ بالمعكوس الجمعى للمتجه $\overrightarrow{أ}$

⑪ إذا كان : $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ح}$ فإن : $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ح}$ «خاصية الحذف»

(١٢) إذا كان : ك ∈ ح

فإن : ك $\overrightarrow{أ}$ = ك (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$) = (ك س$_١$ ، ك ص$_١$ ، ك ع$_١$) ∈ ح^٣

حيث $\overrightarrow{أ}$ // ك $\overrightarrow{أ}$ ويكونا ← في نفس الاتجاه إذا كانت ك < .

← في اتجاهين متضادين إذا كانت ك > .

(١٣) ك ($\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$) = ك $\overrightarrow{أ}$ + ك $\overrightarrow{ب}$
، (ك + ل) $\overrightarrow{أ}$ = ك $\overrightarrow{أ}$ + ل $\overrightarrow{أ}$ } «خاصية التوزيع»

(١٤) ك (ل $\overrightarrow{أ}$) = (ك ل) $\overrightarrow{أ}$ = ك ل $\overrightarrow{أ}$ «خاصية الدمج»

(١٥) إذا كان : ك $\overrightarrow{أ}$ = ك $\overrightarrow{ب}$ فإن : $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{ب}$ «خاصية الحذف»

(١٦) $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{ب}$ إذا وإذا فقط كان س$_١$ = س$_٢$ ، ص$_١$ = ص$_٢$ ، ع$_١$ = ع$_٢$

(١٧) مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$ = مسقط المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$ = ‖$\overrightarrow{أ}$‖ جتا θ

(١٨) زوايا الاتجاه لمتجه $\overrightarrow{أ}$ فى الفراغ هى $\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$ وتساوى قياسات الزوايا التى يصنعها المتجه مع الاتجاهات الموجبة للمحاور س ، ص ، ع على الترتيب.

(١٩) جيوب تمام الاتجاه لمتجه $\overrightarrow{أ}$ فى الفراغ هى جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$
أى جتا $\theta_{س}$ ، جتا $\theta_{ص}$ ، جتا $\theta_{ع}$

(٢٠) (جتا $\theta_{س}$ ، جتا $\theta_{ص}$ ، جتا $\theta_{ع}$) = $\overrightarrow{ى}_{أ}$ = متجه وحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أ}$ = $\dfrac{\overrightarrow{أ}}{‖\overrightarrow{أ}‖}$

(٢١) زوايا الاتجاه لمتجه $\overrightarrow{أب}$ (لا يمر بنقطة الأصل) فى الفراغ هى قياسات الزوايا التى يصنعها متجه يمر بنقطة الأصل موازيًا للمتجه $\overrightarrow{أب}$

(٢٢) جتا^٢ $\theta_{س}$ + جتا^٢ $\theta_{ص}$ + جتا^٢ $\theta_{ع}$ = ١

(٢٣) جيوب تمام الاتجاه الموجب للمحاور س ، ص ، ع أو أى متجه فى اتجاه أى منهما هى (١ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ١ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ١) على الترتيب.

(٢٤) زوايا اتجاه المحاور س ، ص ، ع الموجبة أو أى متجه فى اتجاه أى منهما هى (٠ ، ٩٠° ، ٩٠°) ، (٩٠° ، ٠ ، ٩٠°) ، (٩٠° ، ٩٠° ، ٠) على الترتيب.

(٢٥) إذا كانت : ($\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$) هى زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$

فإن : ($\pi - \theta_{س}$ ، $\pi - \theta_{ص}$ ، $\pi - \theta_{ع}$) هى زوايا الاتجاه للمتجه $-\overrightarrow{أ}$

(٢٦) إذا كان المتجه $\overrightarrow{أ}$ يصنع زوايا متساوية مع محاور الإحداثيات

أى أن : $\theta_{س} = \theta_{ص} = \theta_{ع} = \theta$ فإن : جتا $\theta_{س}$ = جتا $\theta_{ص}$ = جتا $\theta_{ع}$ = جتا θ

، ∵ جتا^2 θ + جتا^2 θ + جتا^2 θ = ١ ∴ ٣ جتا^2 θ = ١

∴ جتا^2 θ = $\frac{١}{٣}$ ∴ جتا θ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنها θ = ٥٤° ٤٤َ ٨ً

أ، جتا θ = $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنها θ = ١٢٥° ١٥َ ٥٢ً

(٢٧) إذا كان : $\overrightarrow{ب}$ = م $\overrightarrow{أ}$ فإن : $\|\overrightarrow{ب}\| = |م| \cdot \|\overrightarrow{أ}\|$

(٢٨) $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| \leq \|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\|$

الضرب القياسى والضرب الاتجاهى لمتجهين :

الضرب القياسى لمتجهين	الضرب الاتجاهي لمتجهين
$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \|\overrightarrow{ب}\|$ جتا θ (كمية قياسية)	$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (\|\overrightarrow{أ}\| \|\overrightarrow{ب}\|$ جا $\theta) \overrightarrow{ى}$ (كمية متجهة) حيث $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة عمودى على المستوى الذى يحوى $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ وفى اتجاه تحدده قاعدة اليد اليمنى.
$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = أ_{س} ب_{س} + أ_{ص} ب_{ص} + أ_{ع} ب_{ع}$	$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ أ_{س} & أ_{ص} & أ_{ع} \\ ب_{س} & ب_{ص} & ب_{ع} \end{vmatrix}$
$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} \cdot \overrightarrow{أ}$	$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = -(\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ})$
$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب}$ = صفر ، $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ غير صفريين ⟸ $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدان	$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{0}$ ، $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ غير صفريين ⟸ $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيان
$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\|^2$	$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{0}$
• $\overrightarrow{س} \cdot \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص} \cdot \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع} \cdot \overrightarrow{ع} = ١$ • $\overrightarrow{س} \cdot \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ص} \cdot \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ع} \cdot \overrightarrow{س} = \overrightarrow{س} \cdot \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ص} \cdot \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ع} \cdot \overrightarrow{ص}$ = صفر	• $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{0}$ • $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص}$ • $\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{س} = -\overrightarrow{ع}$ • $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ع} = -\overrightarrow{ص}$ • $\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ص} = -\overrightarrow{س}$ 

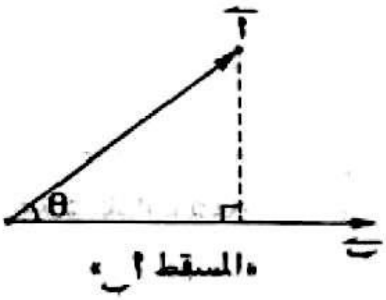
مراجعة

$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{و}} = \overrightarrow{\text{و}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{و}} \cdot \overrightarrow{\text{و}} = \text{صفر}$	$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{و}} = \overrightarrow{\text{و}} \times \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{و}} \times \overrightarrow{\text{و}} = \overrightarrow{\text{و}}$
$(\text{م}\overrightarrow{\text{أ}}) \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{أ}} \cdot (\text{م}\overrightarrow{\text{ب}}) = \text{م}(\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}})$	$(\text{م}\overrightarrow{\text{أ}}) \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{أ}} \times (\text{م}\overrightarrow{\text{ب}}) = \text{م}(\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}})$
$(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) \cdot \overrightarrow{\text{جـ}}$ $= \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{جـ}} + \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{جـ}}$	$(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) \times \overrightarrow{\text{جـ}}$ $= \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{جـ}} + \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}}$

ملاحظات على الضرب القياسى

(١) مسقط (مركبة جبرية) المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ ويرمز لها بالرمز $\text{أ}_{\text{ب}}$

هى $\text{أ}_{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \theta = \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$



(حيث θ هو قياس الزاوية الصغرى بين المتجهين عند رسمهما داخلين إلى أو خارجين من نفس النقطة ، $0 \le \theta \le 180°$)

(٢) المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$:

= المركبة الجبرية ($\text{أ}_{\text{ب}}$) × متجه وحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$

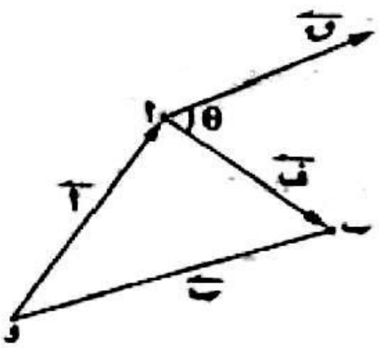
$$= \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|} \times \frac{\overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|} = \left(\frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2}\right)\overrightarrow{\text{ب}}$$

(٣) $\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}\|^2 = (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) \cdot (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) = \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$

$$= \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2 + 2(\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}) + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2$$

$$= \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2 + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2 + 2\|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\| \text{ جتا } \theta$$

تطبيق على الضرب القياسى (الشغل المبذول من قوة)



إذا أثرت قوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ على جسم ما فحركته

بإزاحة $\overrightarrow{\text{ف}}$ فإننا نقول أن القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ قد بذلت شغلاً (ش)

حيث : $\text{ش} = \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{ف}}$

$$= \|\overrightarrow{\text{ق}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ف}}\| \text{ جتا } \theta$$

ملاحظات

① إذا كانت القوة $\overleftarrow{ق}$ فى نفس اتجاه الإزاحة (θ = صفر°) فإن : $ش = \|\overleftarrow{ق}\| \|\overleftarrow{ف}\|$

② إذا كانت القوة $\overleftarrow{ق}$ عكس اتجاه الإزاحة (θ = ١٨٠°) فإن : $ش = - \|\overleftarrow{ق}\| \|\overleftarrow{ف}\|$

③ إذا كانت القوة $\overleftarrow{ق}$ عمودية على اتجاه الإزاحة (θ = ٩٠°) فإن : ش = ٠

④ إذا كانت وحدة قياس مقدار القوة بالنيوتن ، مقدار الإزاحة بالمتر فإن الشغل المبذول يكون بالجول «الجول = نيوتن. متر»

⑤ إذا كانت وحدة قياس مقدار القوة بالداين ، مقدار الإزاحة بالسم فإن الشغل المبذول يكون بالإرج «الإرج = داين. سم»

ملاحظات على الضرب الاتجاهى

① $\|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}\| = \|\overleftarrow{أ}\| \|\overleftarrow{ب}\|$ جا θ ، جا $\theta = \dfrac{\|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}\|}{\|\overleftarrow{أ}\| \|\overleftarrow{ب}\|}$

② متجه الوحدة فى اتجاه $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ هو $\overleftarrow{ى} = \dfrac{\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}}{\|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}\|} = \dfrac{\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}}{\|\overleftarrow{أ}\| \|\overleftarrow{ب}\| \text{ جا } \theta}$

③ إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{حـ}$ ثلاثة متجهات غير صفرية
وكان : $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{حـ}$ فهذا لا يعنى بالضرورة أن $\overleftarrow{ب} = \overleftarrow{حـ}$ «خاصية الحذف غير متحققة»

④ إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ متجهين غير صفريين وكان :

* $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{و}$ فإن : $\overleftarrow{أ} // \overleftarrow{ب}$ والعكس صحيح.
* $\dfrac{أ_س}{ب_س} = \dfrac{أ_ص}{ب_ص} = \dfrac{أ_ع}{ب_ع}$ فإن : $\overleftarrow{أ} // \overleftarrow{ب}$ والعكس صحيح.

⑤ إذا كانت : أ ، ب ، حـ ثلاثة نقاط فى الفراغ ثلاثى الأبعاد
وكان : $\overleftarrow{أب} \times \overleftarrow{ب حـ} = \overleftarrow{و}$ فإن : أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة.

المعنى الهندسى لمعيار الضرب الاتجاهى لمتجهين

معيار الضرب الاتجاهى لمتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$

$= \|\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}\|$ = مساحة متوازى الأضلاع الذى فيه $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{أ}$ ضلعان متجاوران فيه

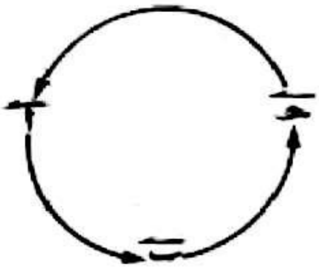
= ضعف مساحة المثلث الذى فيه : $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{أ}$ ضلعان متجاوران فيه

مراجعة

الضرب الثلاثى القياسى

$$\therefore \overline{\text{أ}} \cdot (\overline{\text{ب}} \times \overline{\text{ح}}) = \begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{س}} & \text{أ}_{\text{ص}} & \text{أ}_{\text{ع}} \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} & \text{ب}_{\text{ع}} \\ \text{ح}_{\text{س}} & \text{ح}_{\text{ص}} & \text{ح}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$$

* **خواص الضرب الثلاثى القياسى :**



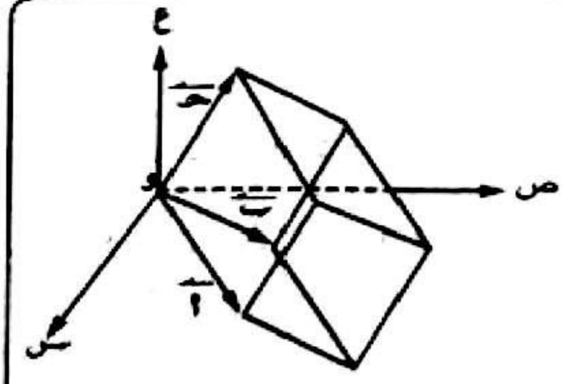
(١) قيمة الضرب الثلاثى القياسى لا تتغير إذا تم تبديل المتجهات مع احتفاظهم بنفس الترتيب الدورى.

أى أن : $\overline{\text{أ}} \cdot \overline{\text{ب}} \times \overline{\text{ح}} = \overline{\text{ب}} \cdot \overline{\text{ح}} \times \overline{\text{أ}} = \overline{\text{ح}} \cdot \overline{\text{أ}} \times \overline{\text{ب}}$

(٢) يمكن تبديل علامتى الضرب القياسى والاتجاهى مع الحفاظ على الترتيب الدورى للمتجهات دون أن تتغير قيمة حاصل الضرب الثلاثى القياسى.

أى أن : $\overline{\text{أ}} \cdot \overline{\text{ب}} \times \overline{\text{ح}} = \overline{\text{أ}} \times \overline{\text{ب}} \cdot \overline{\text{ح}}$

المعنى الهندسى لحاصل الضرب الثلاثى القياسى



إذا كان : $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ ، $\overline{\text{ح}}$ ثلاثة متجهات تكون ثلاثة أحرف غير متوازية فى متوازى سطوح فإن حجم متوازى السطوح = القيمة المطلقة لحاصل الضرب الثلاثى القياسى.

أى أن : حجم متوازى السطوح = $|\overline{\text{أ}} \cdot \overline{\text{ب}} \times \overline{\text{ح}}|$

لاحظ أن

متوازى السطوح هو الجسم المتولد من انتقال سطح متوازى أضلاع موازيًا لنفسه فى اتجاه ثابت.

لذلك تحده ستة أوجه كل منها سطح متوازى أضلاع وكل سطحين متقابلين متوازيان ومتطابقان وفى حالة أن يكون :

(١) القاعدتان متوازيا أضلاع والأوجه الجانبية مستطيلات يسمى متوازى سطوح قائم.

(٢) الستة أوجه مستطيلات يسمى متوازى مستطيلات.

(٣) الستة أوجه مربعات يسمى مكعب.

معادلة الكرة فى الفراغ

* الكرة هى مجموعة نقط الفراغ التى تبعد عن نقطة ثابتة (تعرف بمركز الكرة) بعدًا ثابتًا (يعرف بطول نصف قطر الكرة).

* معادلة الكرة فى الفراغ :

① الصورة القياسية : $(س - ل)^٢ + (ص - ك)^٢ + (ع - ن)^٢ = نق^٢$

ومنها مركز الكرة م (ل ، ك ، ن) ، طول نصف قطرها نق

② الصورة العامة : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + ٢ ن ع + ء = ٠$

ومنها مركز الكرة (− ل ، − ك ، − ن) وطول نصف قطرها نق = $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ - ء}$

ملاحظات

① فى المعادلة العامة للكرة يجب أن يكون :

* معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = معامل $ع^٢ \neq$ صفر
* $ل^٢ + ك^٢ + ن^٢ - ء >$ صفر
* المعادلة خالية من الحد الذى يشمل س ص ، أو ص ع ، أو س ع ، أو س ص ع

② مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^٢ وحجم الكرة = $\frac{٤}{٣}\pi$ نق^٢

③ الكرة التى تمس مستويات الإحداثيات الموجبة وطول نصف قطرها نق يكون مركزها هو النقطة (نق ، نق ، نق)

④ الكرة التى مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (أ ، ب ، حـ)

* طول نصف قطرها نق = $\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢}$
* معادلتها القياسية $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢$

⑤ الكرة التى مركزها م (أ ، ب ، حـ)

* تمس المستوى س ص فإن نق = |حـ|
* تمس المستوى س ع فإن نق = |ب|
* تمس المستوى ص ع فإن نق = |أ|

مراجعة

⑥ الكرة التي يقع مركزها على المحور

- س وتمس المستوى ص ع فإن مركزها (أ ، ٠ ، ٠) ، نق = |أ|
- ص وتمس المستوى س ع فإن مركزها (٠ ، ب ، ٠) ، نق = |ب|
- ع وتمس المستوى س ص فإن مركزها (٠ ، ٠ ، جـ) ، نق = |جـ|

⑦ لإيجاد معادلة الكرة التي طرفي قطر فيها أ (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$ ، ع$_2$) هناك طريقتان :

الأولى : (١) نوجد م مركز الكرة ، منتصف $\overline{أب}$ = $\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} ، \frac{ع_1 + ع_2}{2}\right)$

(٢) نوجد نق = $\frac{1}{2}$ أب = $\frac{1}{2}\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2 + (ع_2 - ع_1)^2}$

(٣) نستخدم الصورة القياسية لمعادلة الكرة : $(س - ل)^2 + (ص - ك)^2 + (ع - ن)^2 = نق^2$

الثانية : نوجد $(س - س_1)(س - س_2) + (ص - ص_1)(ص - ص_2) + (ع - ع_1)(ع - ع_2) = 0$

وبالتبسيط نحصل على معادلة الكرة في الصورة العامة.

⑧ إذا كانت : م ، ن كرتين طولا نصفي قطريهما نق$_1$ ، نق$_2$ على الترتيب (حيث نق$_1$ > نق$_2$)

إذا كانت الكرتان م ، ن	فإن
(١) متباعدتين	م ن > نق$_1$ + نق$_2$
(٢) متماستين من الخارج	م ن = نق$_1$ + نق$_2$
(٣) متقاطعتين	نق$_1$ − نق$_2$ < م ن < نق$_1$ + نق$_2$
(٤) متماستين من الداخل	م ن = نق$_1$ − نق$_2$
(٥) إحداهما بداخل الأخرى	م ن < نق$_1$ − نق$_2$
(٦) متحدتي المركز	م ن = صفر

الصور المختلفة لمعادلة المستقيم فى الفراغ

إذا كان ل مستقيم فى الفراغ ، أ (س١ ، ص١ ، ع١) نقطة معلومة عليه ، $\overline{ى}$ = (أ ، ب ، حـ) متجه اتجاه له فإن :

① $\overline{ر} = \overline{أ} + ك \; \overline{ى}$ (الصورة المتجهة لمعادلة الخط المستقيم)

- $\overline{ر}$: متجه موضع أى نقطة على المستقيم
- $\overline{أ}$: متجه موضع نقطة معلومة على المستقيم
- ك : عدد حقيقى ≠ صفر
- $\overline{ى}$: متجه اتجاه المستقيم

② $\frac{س - س_١}{أ} = \frac{ص - ص_١}{ب} = \frac{ع - ع_١}{حـ}$ (الصورة الإحداثية لمعادلة الخط المستقيم)

③ س = س١ + ك أ ، ص = ص١ + ك ب ، ع = ع١ + ك حـ (المعادلات البارامترية للخط المستقيم)

ملاحظات

① إذا كانت : $\theta_س$ ، $\theta_ص$ ، $\theta_ع$ هى زوايا الاتجاه للمستقيم ل فإن :

- (جتا $\theta_س$ ، جتا $\theta_ص$ ، جتا $\theta_ع$) متجه وحدة فى اتجاه المستقيم وهو متجه اتجاه له
- (م جتا $\theta_س$ ، م جتا $\theta_ص$ ، م جتا $\theta_ع$) حيث م ∈ ح* تسمى نسب اتجاه للمستقيم وهى مركبات متجه اتجاه له.

② فى معادلة المستقيم بالصورة البارمترية $\frac{س - س_١}{أ} = \frac{ص - ص_١}{ب} = \frac{ع - ع_١}{حـ}$ حيث (س١ ، ص١ ، ع١) نقطة عليه ، (أ ، ب ، حـ) متجه اتجاه له

إذا كان

- أ = ٠ تصبح : س = س١ ، $\frac{ص - ص_١}{ب} = \frac{ع - ع_١}{حـ}$
- ب = ٠ تصبح : ص = ص١ ، $\frac{س - س_١}{أ} = \frac{ع - ع_١}{حـ}$
- حـ = ٠ تصبح : ع = ع١ ، $\frac{س - س_١}{أ} = \frac{ص - ص_١}{ب}$

③ معادلة المحور

- س هى ص = ع = ٠ ومتجه اتجاهه (ك ، ٠ ، ٠)
- ص هى س = ٠ ، ع = ٠ ومتجه اتجاهه (٠ ، ك ، ٠)
- ع هى س = ٠ ، ص = ٠ ومتجه اتجاهه (٠ ، ٠ ، ك)

حيث ك ≠ ٠

④ معادلة المستقيم المار بالنقطة (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) ويوازى المحور

- س ← هى ← ص = ص$_1$ ، ع = ع$_1$
- ص ← هى ← س = س$_1$ ، ع = ع$_1$
- ع ← هى ← س = س$_1$ ، ص = ص$_1$

⑤ معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل ، (أ ، ب ، حـ) متجه اتجاه له هى :

⇐ $\overrightarrow{ر}$ = ك (أ ، ب ، حـ) «الصورة الاتجاهية»

⇐ س = ك أ ، ص = ك ب ، ع = ك حـ «المعادلات البارامترية»

⇐ $\frac{س}{أ} = \frac{ص}{ب} = \frac{ع}{حـ}$ «الصورة الإحداثية»

⑥ إذا علمت نقطتان أ ، ب على المستقيم فإن :

⇐ متجه اتجاه المستقيم = $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

⇐ ك $\overrightarrow{أب}$ حيث ك ∈ ح* هو أيضًا متجه اتجاه لنفس المستقيم.

⑦ المستقيم المار بنقطة الأصل وبالنقطة أ (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$)

فإن : $\overrightarrow{أ}$ = (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) متجه اتجاه للمستقيم.

⑧ • المستقيم الذى متجه اتجاه له $\overrightarrow{ى}$ = (أ ، ب ، ٠) يقع فى مستوى يوازى المستوى س ص وكذلك

المستقيم الذى متجه اتجاه له $\overrightarrow{ى}$ = (أ ، ٠ ، حـ) يقع فى مستوى يوازى المستوى س ع

والمستقيم الذى متجه اتجاه له $\overrightarrow{ى}$ = (٠ ، ب ، حـ) يقع فى مستوى يوازى المستوى ص ع

• لاحظ الفرق بين جيوب تمام الاتجاه للمستقيم ونسب الاتجاه للمستقيم :

⇐ ل ، م ، ن هى جيوب تمام الاتجاه للمستقيم حيث (ل ، م ، ن) هو متجه وحدة فى اتجاه المستقيم

، ل^2 + م^2 + ن^2 = ١ «لأن جتا^2 θ$_س$ + جتا^2 θ$_ص$ + جتا^2 θ$_ع$ = ١»

⇐ أ ، ب ، حـ هى نسب اتجاه للمستقيم حيث : (أ ، ب ، حـ) هو متجه اتجاه المستقيم

، (أ ، ب ، حـ) = ك (ل ، م ، ن) ، ك ≠ ٠

⇐ (ل ، م ، ن) = $\frac{(أ ، ب ، حـ)}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + حـ^2}}$

الهندسة الفراغية

• معادلة المستوى فى الفراغ :

يتطلب إيجاد معادلة المستوى فى الفراغ معرفة نقطة أ (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) تقع عليه ومتجه اتجاه عمودى عليه $\overrightarrow{ن} = (أ ، ب ، حـ)$ فتكون معادلة المستوى :

• $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$ «المعادلة المتجهة لمعادلة المستوى»

• أ (س − س$_1$) + ب (ص − ص$_1$) + حـ (ع − ع$_1$) = ٠ «الصورة القياسية لمعادلة المستوى»

• أ س + ب ص + حـ ع + د = ٠ «الصورة العامة لمعادلة المستوى»

• يمكن أيضًا إيجاد معادلة المستوى فى الحالات الآتية :

(١) بمعلومية أطوال الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات : $\frac{س}{س_1} + \frac{ص}{ص_1} + \frac{ع}{ع_1} = ١$

حيث يقطع المستوى محاور الإحداثيات فى النقاط (س$_1$ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ص$_1$ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ع$_1$)

(٢) بمعلومية ٣ نقاط أ (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$ ، ع$_2$) ، حـ (س$_3$ ، ص$_3$ ، ع$_3$) تقع عليه وليست على استقامة واحدة :

• نوجد ناتج الضرب الاتجاهى $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{بحـ}$ فيكون متجه اتجاه عمودى للمستوى ($\overrightarrow{ن}$)

• نستخدم أى نقطة من الثلاث.

• نوجد المعادلة المتجهة للمستوى : $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$ ويمكن إيجادها مباشرة من المحدد :

$$\begin{vmatrix} س - س_1 & ص - ص_1 & ع - ع_1 \\ س_2 - س_1 & ص_2 - ص_1 & ع_2 - ع_1 \\ س_3 - س_1 & ص_3 - ص_1 & ع_3 - ع_1 \end{vmatrix} = ٠$$

(٣) بمعلومية مستقيمان متقاطعان يقعان فيه :

• نوجد حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهى الاتجاه للمستقيمين = $\overrightarrow{ن}$

• نوجد أى نقطة تنتمى لأحد المستقيمين.

• نوجد المعادلة المتجهة للمستوى : $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$

(٤) مستقيم ل ونقطة أ لا تنتمى للمستقيم :

• نوجد متجه الاتجاه للمستقيم المعطى.

• نوجد نقطة تنتمى للمستقيم ولتكن ب

• نوجد : $\overrightarrow{ن}$ = حاصل الضرب الاتجاهى لمتجه اتجاه المستقيم ل والمتجه $\overrightarrow{أب}$

• نوجد المعادلة المتجهة للمستوى : $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$

مراجعة

⑤ مستقيمين مختلفين متوازيين ل١ ، ل٢

- نوجد نقطة أ ∈ ل١ ، ب ∈ ل٢
- نوجد $\overrightarrow{ن}$ = حاصل الضرب الاتجاهى لمتجه الاتجاه للمستقيم ل١ والمتجه $\overrightarrow{أب}$
- نوجد المعادلة المتجهة للمستوى : $\overrightarrow{ن} . \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} . \overrightarrow{أ}$

ملاحظات

* من المعادلة العامة للمستوى ط : أ س + ب ص + جـ ع + ء = ٠ نستنتج أن :

– (أ ، ب ، جـ) متجه اتجاه عمودى على المستوى ط ، ء = $\overrightarrow{م} . \overrightarrow{ن}$ حيث $\overrightarrow{م}$ متجه موضع نقطة ∈ المستوى ، $\overrightarrow{ن}$ متجه الاتجاه العمودى.

– أى مستوى يوازى المستوى ط يكون المتجه (أ ، ب ، جـ) متجه اتجاه عمودى له أيضًا.

– إذا كانت ء = صفر فإن المستوى يحوى نقطة الأصل.

–إذا كانت	أ = ٠	فإن	ب ص + جـ ع + ء = ٠	وهى	يوازى محور س	وعموديًا	ص ع
	ب = ٠	المعادلة	أ س + جـ ع + ء = ٠	معادلة	يوازى محور ص	على	س ع
	جـ = ٠	تصبح	أ س + ب ص + ء = ٠	مستوى	يوازى محور ع	المستوى	س ص
–إذا كانت	أ = ء = ٠	فإن	ب ص + جـ ع = ٠	وهى	يحوى المحور س	وعموديًا	ص ع
	ب = ء = ٠	المعادلة	أ س + جـ ع = ٠	معادلة	يحوى المحور ص	على	س ع
	جـ = ء = ٠	تصبح	أ س + ب ص = ٠	مستوى	يحوى المحور ع	المستوى	س ص

– معادلة المستوى س ص هى ع = ٠ ، المعادلة ع = أ هى معادلة مستوى يوازى المستوى س ص

– معادلة المستوى ص ع هى س = ٠ ، المعادلة س = أ هى معادلة مستوى يوازى المستوى ص ع

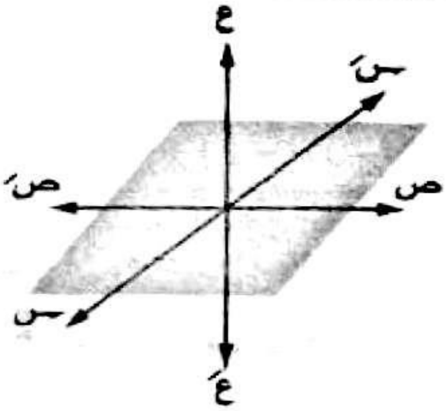
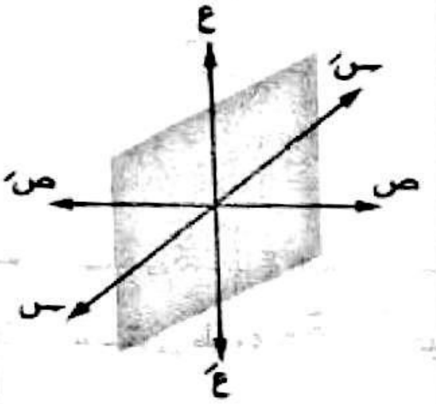
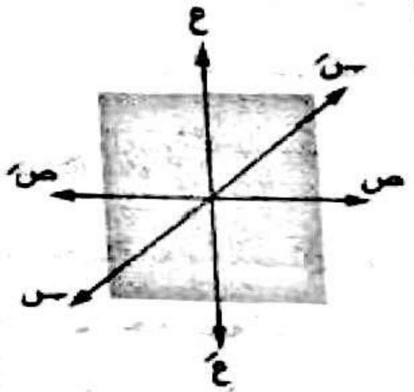
– معادلة المستوى س ع هى ص = ٠ ، المعادلة ص = أ هى معادلة مستوى يوازى المستوى س ع

– إذا كانت : هـ (س١ ، ص١ ، ع١) ، و (س٢ ، ص٢ ، ع٢) ، ن (س٣ ، ص٣ ، ع٣) ثلاثة نقاط فى الفراغ وكان التعويض عنهم فى معادلة المستوى كالتالى :

أ س١ + ب ص١ + جـ ع١ + ء = ٠ ، أ س٢ + ب ص٢ + جـ ع٢ + ء > ٠ ، أ س٣ + ب ص٣ + جـ ع٣ + ء < ٠

فمعنى ذلك أن : هـ (س١ ، ص١ ، ع١) تنتمى للمستوى ، و (س٢ ، ص٢ ، ع٢) ، ن (س٣ ، ص٣ ، ع٣) لا تنتميان للمستوى وكل منهما يقع فى جهة مختلفة عن الأخرى بالنسبة للمستوى.

• مستويات الإحداثيات :

المستوى الإحداثي س ص	المستوى الإحداثي س ع	المستوى الإحداثي ص ع
		
يحوى جميع نقط الفراغ التى إحداثياتها (س ، ص ، ٠) وتكون معادلته ع = ٠	يحوى جميع نقط الفراغ التى إحداثياتها (س ، ٠ ، ع) وتكون معادلته ص = ٠	يحوى جميع نقط الفراغ التى إحداثياتها (٠ ، ص ، ع) وتكون معادلته س = ٠

• معادلة المستوى الذى يحوى جميع نقط الفراغ التى على الصورة.

(س ، ص ، أ) هى ع = أ

(س ، أ ، ع) هى ص = أ

(أ ، ص ، ع) هى س = أ

حيث أ ثابت ∈ ح

• الزاوية بين (متجهين – مستقيمين – مستويين) فى الفراغ :

① الزاوية θ بين متجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ فى الفراغ نوجدها من العلاقة :

متجهين

$$\text{حتا}\,\theta = \frac{\overrightarrow{أ}\cdot\overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ}\|\,\|\overrightarrow{ب}\|} \quad \text{حيث } ٠ \le \theta \le ١٨٠^\circ$$

② الزاوية θ بين مستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ فى الفراغ حيث متجها اتجاهيهما $\overrightarrow{م_١}$ ، $\overrightarrow{م_٢}$ نوجدها من العلاقة :

مستقيمين

$$\text{حتا}\,\theta = \frac{|\overrightarrow{م_١}\cdot\overrightarrow{م_٢}|}{\|\overrightarrow{م_١}\|\,\|\overrightarrow{م_٢}\|} \quad \text{حيث } ٠ \le \theta \le ٩٠^\circ$$

وإذا كان ($ل_١$ ، $م_١$ ، $ن_١$) ، ($ل_٢$ ، $م_٢$ ، $ن_٢$) هى جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين

فإن : $\text{حتا}\,\theta = |\,ل_١ ل_٢ + م_١ م_٢ + ن_١ ن_٢\,|$

③ الزاوية θ بين مستويين فى الفراغ حيث $\overrightarrow{ن_١}$ متجه الاتجاه العمودى على الأول

، $\overrightarrow{ن_٢}$ متجه الاتجاه العمودى على الثانى نوجدها من العلاقة :

مستويين

$$\boxed{جتا \theta = \frac{|\overrightarrow{ن_١} \cdot \overrightarrow{ن_٢}|}{\|\overrightarrow{ن_١}\| \|\overrightarrow{ن_٢}\|}}$$ حيث $٠ \leq \theta \leq ٩٠^\circ$

* شرط توازى (متجهين - مستقيمين - مستويين) فى الفراغ :

① إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overrightarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ متجهان فى الفراغ

فإن : $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ إذا تحقق أحد الشروط التالية :

متجهين

- $\overrightarrow{أ} = ك \overrightarrow{ب}$ حيث $ك \in ع^*$
- $\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$
- $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$
- جتا θ = ١ ويكونا متوازيين وفى نفس الاتجاه
  جتا θ = -١ ويكونا متوازيين وكل منهما فى عكس اتجاه الآخر
  حيث θ قياس الزاويتين المتجهين

② شرط توازى مستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ فى الفراغ هو توازى متجها اتجاهيهما

مستقيمين أى $\boxed{\overrightarrow{ى_١} // \overrightarrow{ى_٢}}$

③ شرط توازى مستويين فى الفراغ هو توازى متجها الاتجاه العموديين عليهما

مستويين أى $\boxed{\overrightarrow{ن_١} // \overrightarrow{ن_٢}}$

* شرط تعامد (متجهين - مستقيمين - مستويين) فى الفراغ :

① إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (أ_س ، أ_ص ، أ_ع)$ ، $\overrightarrow{ب} = (ب_س ، ب_ص ، ب_ع)$ متجهان فى الفراغ الزاوية بينهما θ

فإن : $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$ إذا تحقق أحد الشروط التالية :

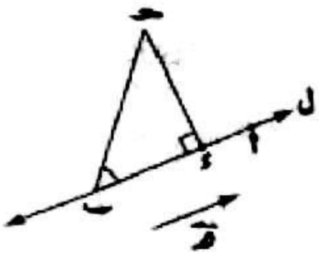
متجهين

- جتا θ = صفر
- $\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} = ٠$ أى $أ_س ب_س + أ_ص ب_ص + أ_ع ب_ع = ٠$

② مستقيمين شرط تعامد مستقيمين هو تعامد متجها اتجاهيهما أى $\overrightarrow{ى_1} \perp \overrightarrow{ى_2}$

③ مستويين شرط تعامد مستويين هو تعامد متجها الاتجاه العموديين عليهما أى $\overrightarrow{ن_1} \perp \overrightarrow{ن_2}$

• طول العمود من نقطة إلى مستقيم فى الفراغ :



بفرض مستقيم ل فى الفراغ يمر بالنقطتين أ ، ب ومتجه اتجاهه $\overrightarrow{ى}$

فإنه لإيجاد بعد نقطة حـ فى الفراغ عن المستقيم ل وليكن حـ ء :

حيث $\overleftrightarrow{حـ ء} \perp \overleftrightarrow{أب}$ ، $ء \in \overleftrightarrow{أب}$:

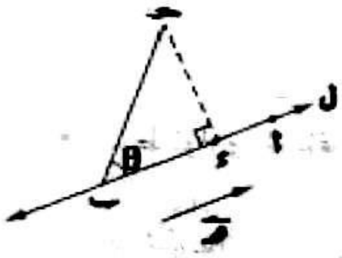
① نوجد ب حـ = $\|\overrightarrow{ب حـ}\|$

② نوجد ب ء = مقياس مسقط $\overrightarrow{ب حـ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب أ}$ = $\frac{|\overrightarrow{ب حـ} \cdot \overrightarrow{ب أ}|}{\|\overrightarrow{ب أ}\|}$

③ نوجد البعد العمودى حـ ء باستخدام فيثاغورس حـ ء = $\sqrt{(ب حـ)^2 - (ب ء)^2}$

• يمكن استخدام $\overrightarrow{ى}$ «متجه اتجاه المستقيم بدلًا من $\overrightarrow{ب أ}$»

طريقة أخرى



① نوجد θ قياس الزاوية

بين المستقيمين $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$

من العلاقة θ = $\text{جتا}^{-1}\left(\frac{|\overrightarrow{ب حـ} \cdot \overrightarrow{ب أ}|}{\|\overrightarrow{ب حـ}\|\|\overrightarrow{ب أ}\|}\right)$

② نوجد ب حـ = $\|\overrightarrow{ب حـ}\|$

③ نوجد طول العمود حـ ء من العلاقة حـ ء = ب حـ جا θ

• يمكن استخدام $\overrightarrow{ى}$ «متجه اتجاه المستقيم بدلًا من $\overrightarrow{ب أ}$»

• طول العمود من نقطة إلى مستوى :

إذا كانت المعادلة العامة للمستوى هى أ س + ب ص + حـ ع + ء = ٠

فإن طول العمود المرسوم من النقطة ب (س١ ، ص١ ، ع١) إلى المستوى

هو $ل = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + حـ ع_1 + ء|}{\sqrt{أ^2 + ب^2 + حـ^2}}$

مراجعة

طول العمود المرسوم من النقطة (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$)

- على المحور س $= \sqrt{ص_1^2 + ع_1^2}$
- على المحور ص $= \sqrt{س_1^2 + ع_1^2}$
- على المحور ص $= \sqrt{س_1^2 + ص_1^2}$

طول العمود المرسوم من النقطة (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$)

- على المستوى ص ع $= |س_1|$
- على المستوى س ع $= |ص_1|$
- على المستوى س ص $= |ع_1|$

عند حل معادلتى مستقيمين فى الفراغ معًا

وكانت

① مجموعة الحل = ∅ فإن المستقيمين متخالفان أو متوازيان.

② مجموعة الحل = نقطة واحدة فإن المستقيمين متقاطعان ويحويهما مستوىً واحد.

* إذا اشترك المستقيمان فى أكثر من نقطة فإنهما ينطبقان.

عند حل معادلتى مستقيم ومستوى فى الفراغ معًا

وكانت

① مجموعة الحل = ∅ فإن المستقيم يوازى المستوى.

② مجموعة الحل = نقطة واحدة فإن المستقيم يقطع المستوى فى هذه النقطة.

* إذا اشترك مستقيم ومستوى فى أكثر من نقطة فإن المستوى يحوى هذا المستقيم.

معادلة خط تقاطع مستويين

إذا كان ط$_1$: أ$_1$ س + ب$_1$ ص + حـ$_1$ ع + ء$_1$ = ٠ ، ط$_2$: أ$_2$ س + ب$_2$ ص + حـ$_2$ ع + ء$_2$ = ٠

معادلتى مستويين مختلفين فى الفراغ وكانت النسب $\frac{أ_1}{أ_2}$ ، $\frac{ب_1}{ب_2}$ ، $\frac{حـ_1}{حـ_2}$

ليست جميعها متساوية فإن المستويين يتقاطعان ويمكننا إيجاد معادلة خط التقاطع بعدة طرق

والمثال التالى يوضح بعضها

فمثلًا : أوجد معادلة خط تقاطع المستويين :

ط$_1$: س + ص + ٢ ع + ١ = ٠ ، ط$_2$: ٢ س + ص − ع + ١ = ٠

الحل :

معادلتا المستويين هما س + ص + ٢ ع + ١ = ٠ (١)

، ٢ س + ص − ع + ١ = ٠ (٢)

، ∵ $\frac{١}{٢} \neq \frac{١}{١}$ ∴ المستويان متقاطعان

وبطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢) «لحذف المتغير ص»

∴ س − ٣ ع = ٠ ∴ س = ٣ ع (٣)

وبضرب المعادلة (٢) × ٢ والجمع إلى (١) : «لحذف المتغير ع»

∴ ٥ س + ٣ ص + ٣ = ٠ ∴ س = $\frac{-٢ - ٣ ص}{٥}$ (٤)

من (٣) ، (٤) : ∴ معادلة خط التقاطع هى س = $\frac{-٢ - ٣ ص}{٥}$ = ٣ ع «الصورة الإحداثية»

• **حل آخر :**

س + ص + ٢ ع + ١ = ٠ (١)

٢ س + ص − ع + ١ = ٠ (٢)

وبطرح (١) من (٢) : ∴ س − ٣ ع = ٠

∴ $\boxed{\text{س = ٣ ك}}$

وبفرض $\boxed{\text{ع = ك}}$

وبالتعويض فى (١) : ∴ ٣ ك + ص + ٢ ك + ١ = ٠ ∴ $\boxed{\text{ص = −١ − ٥ ك}}$

∴ المعادلات البارامترية لخط التقاطع هى :

س = ٣ ك ، ص = −١ − ٥ ك ، ع = ك

• **حل ثالث :**

∴ خط التقاطع يكون عموديًا على متجهى الاتجاه العموديين على المستويين ($\overrightarrow{ن_١}$ ، $\overrightarrow{ن_٢}$)

، ∵ $\overrightarrow{ن_١}$ = (١ ، ١ ، ٢) ، $\overrightarrow{ن_٢}$ = (٢ ، ١ ، −١)

∴ $\overrightarrow{ى}$ = ($\overrightarrow{ن_١}$ × $\overrightarrow{ن_٢}$) يكون متجه اتجاه لخط التقاطع

$$\therefore \overrightarrow{ى} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ١ & ٢ \\ ٢ & ١ & -١ \end{vmatrix} = -٣ \overrightarrow{س} + ٥ \overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$$

ولإيجاد نقطة تنتمى لخط التقاطع نضع س = ٢ «أو أى رقم آخر» فى معادلتى المستويين

∴ ص + ٢ ع = −٣ (١)

، ص − ع = −٥ (٢)

وبحل المعادلتين : ∴ ع = $\frac{٢}{٣}$ ، ص = $\frac{-١٣}{٣}$

∴ النقطة $\left(٢ ، \frac{٢}{٣} ، \frac{-١٣}{٣}\right)$ تقع على خط التقاطع

الصورة المتجهة لخط التقاطع هى : $\overrightarrow{ر} = \left(٢ ، \frac{٢}{٣} ، \frac{-١٣}{٣}\right) + ك \,(-٢ ، ٥ ، -١)$

ملاحظات

١) المستقيمان المتوازيان يجمعهما مستوى واحد.

٢) المستقيمان المتقاطعان يجمعهما مستوى واحد.

٣) المستقيمان المتعامدان :

أما أن يكونا متقاطعين على التعامد وعندها يجمعهما مستوى واحد

أ، متخالفين وعندها لا يمكن أن يجمعهما مستوى واحد.

٤) إذا توازى مستقيمان وكانت نقطة على أحدهما تحقق معادلة المستقيم الآخر فإن المستقيمين منطبقان.

٥) فى المستويان :

$أ_١ س + ب_١ ص + حـ_١ ع + ء_١ = ٠$

، $أ_٢ س + ب_٢ ص + حـ_٢ ع + ء_٢ = ٠$ وكان :

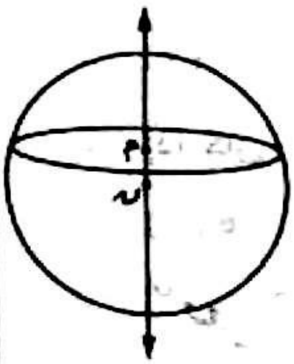
(١) $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{حـ_١}{حـ_٢} \neq \frac{ء_١}{ء_٢}$ فإن المستويين متوازيان وغير منطبقين.

(٢) $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{حـ_١}{حـ_٢} = \frac{ء_١}{ء_٢}$ فإن المستويين منطبقان.

٦) لإيجاد المسافة بين مستويين متوازيين فى الفراغ نوجد نقطة تقع على أحدهما ونحسب طول العمود المرسوم من هذه النقطة إلى المستوى الآخر.

٧) إذا كان $(أ_١ ، ب_١ ، حـ_١)$ متجه اتجاه المستقيم ، $(أ_٢ ، ب_٢ ، حـ_٢)$ متجه اتجاه عمودى على المستوى فإن قياس الزاوية الصغرى بين المستقيم والمستوى يساوى متممة الزاوية θ

حيث $جتا θ = \frac{\left|(أ_١ ، ب_١ ، حـ_١) \cdot (أ_٢ ، ب_٢ ، حـ_٢)\right|}{\sqrt{أ_١^٢ + ب_١^٢ + حـ_١^٢}\,\sqrt{أ_٢^٢ + ب_٢^٢ + حـ_٢^٢}}$



٨) المستقيم المار بمركز كره ومركز الدائرة الناتجة من تقاطع مستوى مع هذه الكرة يكون عموديًا على مستوى الدائرة

فمثلًا : إذا قطع مستوى كرة مركزها ن وتنتج من تقاطعهما دائرة مركزها م فإن $\overleftrightarrow{من}$ يكون عموديًا على مستوى الدائرة م