Booklet 1 Exams

ALGEBRA

Third Sec

منتدى توجيه الرياضيات

أ/ عادل إدوار

① If ${}^{n}c_5 : {}^{n}c_4 = 3 : 1$,then n equals ....

ⓐ 7 ⓑ 9

ⓒ 17 ● 19

إذا كان $^{ن}ق_{٥} : {}^{ن}ق_{٤} = ٣ : ١$

فإن ن = ...

(أ) ٧ (ب) ٩

(ج) ١٧ (د) ١٩

$$\frac{{}^{n}C_r}{{}^{n}C_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}$$

$$\frac{{}^{n}C_5}{{}^{n}C_4} = \frac{n-5+1}{5}$$

$$\frac{3}{1} = \frac{n-4}{5}$$

$$n-4 = 15$$

$$\boxed{n = 19}$$

② The fourth term in the expansion of $(x+\frac{1}{x})^4$ according to the descending power of x equals ....

ⓐ $4x^2$ ⓑ $\left(\frac{1}{x}\right)^4$

● $\frac{4}{x^2}$ ⓓ $\frac{1}{x^2}$

الحد الرابع في مفكوك $(س + \frac{١}{س})^٤$ حسب قوى س التنازلية يساوي ....

(أ) ٤ س^٢ (ب) $(\frac{١}{س})^٤$

(ج) $\frac{٤}{س^٢}$ (د) $\frac{١}{س^٢}$

$$T_4 = {}^4C_3\left(\frac{1}{x}\right)^3(x)^1$$

$$= 4(x)^{-3}(x)$$

$$= 4(x)^{-2}$$

$$= \boxed{\frac{4}{x^2}}$$

3 If $\vec{A} = (2,-4,1)$, $\vec{B} = (7,2,1)$, then $\vec{A} \cdot \vec{B}$ equals ………

ⓐ -9 ⓑ 23

ⓒ -7 ⓓ 7

إذا كان $\vec{أ}$ = (٢، -٤، ١)، $\vec{ب}$ = (٧، ٢، ١) فإن $\vec{أ} \cdot \vec{ب}$ يساوي ……………

ⓐ -٩ ⓑ ٢٣

ⓒ -٧ ⓓ ٧

$$\vec{A} \circ \vec{B} = (2,-4,1) \circ (7,2,1)$$
$$= 14 - 8 + 1$$
$$= \boxed{7}$$

(4) Prove that the expansion of $\left(x^2 + \frac{2}{x^3}\right)^{11}$ does not included a term contains x^3

أثبت أن مفكوك $\left(س^2 + \frac{2}{س^3}\right)^{11}$ لا يحتوي على حد يشتمل على $س^3$

$$T_{r+1} = {}^{11}C_r \left(\frac{2}{x^3}\right)^r (x^2)^{11-r}$$

$$= {}^{11}C_r (2)^r (x)^{-3r} (x)^{22-2r}$$

$$= {}^{11}C_r (2)^r (x)^{22-5r}$$

$$22 - 5r = 3$$

$$r = \frac{19}{5} \notin N$$

$\therefore$ The exp. does not included a term contains x^3.

(5) Find the volume of the parallelepiped in which three not parallel (adjacent) sides are represented by the vectors : $\vec{A} = (3, -4, 1)$, $\vec{B} = (0, 2, -3)$ and $\vec{C} = (3, 2, 2)$

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أحرف غير متوازية (متجاورة) تمثلها المتجهات $\overline{أ} = (٣، -٤، ١)$، $\overline{ب} = (٠، ٢، -٣)$، $\overline{جـ} = (٣، ٢، ٢)$

Volume of Parallelepiped $= \vec{A} \odot \vec{B} \times \vec{C}$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (4+6)(3) - (0+9)(-4) + (0-6)(1)$$

$$= 30 + 36 - 6$$

$$= \boxed{60} \text{ Cubic unit}$$

⑥ The number of ways in which 4 cars parks adjacently in the parking area in a form of a row that contains 10 places for parking equals ……

ⓐ 240 ● 168

ⓒ $^{7}P_{4}$ ⓓ $\lfloor 7 \quad \lfloor 4$

عدد طرق وقوف ٤ سيارات متجاورة في ساحة انتظار على شكل صف بها ١٠ أماكن وقوف يساوي ………………

(أ) ٢٤٠ (ب) ١٦٨

(ج) $^{٧}ل_{٤}$ (د) ٧| ٤|

$$= (n-r+1)\lfloor r$$

$$= (10-4+1)\lfloor 4$$

$$= 7\lfloor 4$$

$$= 7 \times 24$$

$$= \boxed{168}$$

7. If $Z = -5(\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ)$, then the principle argument (amplitude) of the number Z equals ....

ⓐ 60° ⓑ 30°

ⓒ 90° ⓓ 120°

إذا كانت

ع = -٥ (جتا ٦٠° - ت جا ٦٠°)،

فإن السعة الأساسية للعدد ع

تساوي ....

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠°

(ج) ٩٠° (د) ١٢٠°

$$Z = -5(\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ)$$

$$= 5(-\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

$Z \in$ 2nd quad

$$\therefore Z = 5(\cos(180^\circ - 60^\circ) + i \sin(180^\circ - 60^\circ))$$

$$= 5(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$$

$$\therefore \text{amp.}(Z) = \boxed{120^\circ}$$

⑧ The length of the diameter of the sphere whose equation:

$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 18x - 24y + 12z + 3 = 0$

equals .... length unit.

ⓐ $2\sqrt{7}$ ● $4\sqrt{7}$

ⓒ $6\sqrt{29}$ ⓓ $12\sqrt{29}$

طول قطر الكرة التي معادلتها
٣س٢ + ٣ص٢ + ٣ع٢ + ١٨س
− ٢٤ص + ١٢ع + ٣ = ٠
يساوي .... وحدة طول.

(أ) ٢√٧ (ب) ٤√٧

(ج) ٦√٢٩ (د) ١٢√٢٩

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 18x - 24y + 12z + 3 = 0$$

$\div 3$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y + 4z + 1 = 0$$

$$\because x^2 + y^2 + z^2 + 2Lx + 2ky + 2Mz + C = 0$$

$$\therefore L = 3, \quad k = -4, \quad M = 2$$

$\therefore$ Center is $(-3, 4, -2)$

$$r = \sqrt{L^2 + K^2 + M^2 - C}$$

$$= \sqrt{9 + 16 + 4 - 1} = \sqrt{28}$$

$$= 2\sqrt{7}$$

$\therefore$ diameter $= 2\sqrt{7} \times 2 = \boxed{4\sqrt{7}}$

9. Without expanding the determinant , Prove that :

$$\begin{vmatrix} x & x^2+1 & (x+1)^2 \\ y & y^2+1 & (y+1)^2 \\ z & z^2+1 & (z+1)^2 \end{vmatrix} = zero$$

بدون فك المحدد أثبت أن

$$\begin{vmatrix} س & س^٢+١ & (س+١)^٢ \\ ص & ص^٢+١ & (ص+١)^٢ \\ ع & ع^٢+١ & (ع+١)^٢ \end{vmatrix} = صفر$$

$$L.H.S = \begin{vmatrix} x & x^2+1 & (x+1)^2 \\ y & y^2+1 & (y+1)^2 \\ z & z^2+1 & (z+1)^2 \end{vmatrix}$$

$(C_1 \times 2) + C_2$

$$L.H.S = \begin{vmatrix} x & x^2+2x+1 & (x+1)^2 \\ y & y^2+2y+1 & (y+1)^2 \\ z & z^2+2z+1 & (z+1)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & (x+1)^2 & (x+1)^2 \\ y & (y+1)^2 & (y+1)^2 \\ z & (z+1)^2 & (z+1)^2 \end{vmatrix}$$

$\because C_2 = C_3$

$\therefore L.H.S = Zero$

$= R.H.S$

⑩ The measure of the angle between the two straight lines : $L_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{z+1}{-2}, y = 1$
$L_2 : \vec{r} = (-1,2,-1) + k(1,2,-2)$
equals ....

ⓐ 15° ⓑ 30°
● 45° ⓓ 60°

قياس الزاوية بين المستقيمين
$\frac{س-٣}{٢} = \frac{ع+١}{-٢}$ ، ص = ١
، $\vec{ر}$ = (-١، ٢، -١) + ك (١، ٢، -٢)
يساوي ....

أ ١٥° ب ٣٠°
ج ٤٥° د ٦٠°

$$\frac{x-3}{2} = \frac{z+1}{-2} = t \quad , y = 1$$

$$x - 3 = 2t \quad , z + 1 = -2t$$

$$x = 3 + 2t \quad , z = -1 - 2t$$

$$\vec{d_1} = (2, 0, -2)$$

$$\vec{d_2} = (1, 2, -2)$$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}|}{\|\vec{d_1}\| \, \|\vec{d_2}\|}$$

$$= \frac{|(2,0,-2) \cdot (1,2,-2)|}{\sqrt{8}\,\sqrt{9}}$$

$$= \frac{|2+4|}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = \boxed{45°}$$

(11) Answer one of the following items:

(a) Find the algebraic form of the vector $\vec{A}$ such that : $\|\vec{A}\| = 5$ units and it forms with the coordinate axes angles of equal measures.

(b) Prove that the triangle ABC is a right. angled triangle at B such that A (2,-1,3), B (-2 , 5 , 1) and C (-4 , 4 ,2).

أجب عن إحدى الفقرتين الآتيتين،

أ- أوجد الصورة الجبرية للمتجه $\vec{أ}$ حيث $\|\vec{أ}\|$ = ٥ وحدات ويصنع مع محاور الإحداثيات زوايا اتجاه متساوية في القياس.

ب- أثبت أن المثلث أ ب جـ هو مثلث قائم الزاوية في ب حيث أ (٢، -١، ٣)، ب (-٢، ٥، ١)، جـ (-٤، ٤، ٢)

a) $\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$

$3\cos^2\theta = 1$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \vec{A} = \|\vec{A}\|(\cos\theta_x, \cos\theta_y, \cos\theta_z)$

$= 5\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= \left(\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}\right)$

b) $AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (5+1)^2 + (1-3)^2}$

$= \sqrt{16+36+4} = \boxed{\sqrt{56}}$

$AC = \sqrt{(-4-2)^2 + (4+1)^2 + (2-3)^2}$

$= \sqrt{36+25+1}$

$= \sqrt{62}$

$BC = \sqrt{(-4+2)^2 + (4-5)^2 + (2-1)^2}$

$= \sqrt{4+1+1} = \boxed{\sqrt{6}}$

$\because (AC)^2 = 62$

$, (AB)^2 + (BC)^2 = 62$

$\therefore m(\angle B)$ is right

12) If $1, \omega, \omega^2$ are the cubic roots of one, then: $\left(\omega^2+\frac{1}{\omega}\right)\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right)^2$ equals ....

(a) 2 (b) Zero
(c) -3 (d) -5

إذا كان (١، ω، ω²) هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح
فإن $\left(\omega^2+\frac{1}{\omega}\right)\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right)^2$ يساوي ....

(أ) ٢ (ب) صفر
(جـ) -٣ (د) -٥

$$\left(\omega^2+\frac{1}{\omega}\right)\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right)^2$$

$$=\left(\omega^2+\frac{\omega^3}{\omega}\right)\left(1+\frac{\omega^3}{\omega^2}\right)^2$$

$$=\left(\omega^2+\omega^2\right)\left(1+\omega\right)^2$$

$$=\left(2\omega^2\right)\left(-\omega^2\right)^2$$

$$=\left(2\omega^2\right)\left(\omega^4\right)$$

$$=\left(2\omega^2\right)\left(\omega\right)$$

$$=2\omega^3$$

$$=\boxed{2}$$

13 The length of the perpendicular drawn from the point (2,3,1) to the plane : 2x-2y+z =5 equals ……….. length unit.

ⓐ 1 ● 2

ⓒ 3 ⓓ 4

طول العمود المرسوم من النقطة (٢،٣،١) إلى المستوى ٢س – ٢ص + ع = ٥ هو ...... وحدة طول

(أ) ١ (ب) ٢

(ج) ٣ (د) ٤

$$h = \frac{|2(2)-2(3)+(1)-5|}{\sqrt{(2)^2+(-2)^2+(1)^2}}$$

$$= \frac{|-6|}{3}$$

$$= \frac{6}{3}$$

$$= \boxed{2}$$

(14) If $Z = 1 - \sqrt{3}i$, then the exponential form of Z is ……. ………

إذا كان ع = ١ - √٣ ت فإن الصورة الأسية للعدد ع هي ……………

(a) $2e^{\frac{-\pi}{3}i}$ (b) $2e^{\frac{\pi}{3}i}$

(c) $2e^{\frac{\pi}{6}i}$ (d) $2e^{\frac{-\pi}{6}i}$

$$r = |Z|$$
$$= \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2}$$
$$= \boxed{2}$$

$\theta \in$ 4th quad

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$= \tan^{-1}(-\sqrt{3}/1)$$
$$= -60^\circ$$
$$= -\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore Z = re^{i\theta}$$
$$= 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$$

(15) Use the multiplicative inverse of the matrix to solve the following equation:

$2x-3y-z=9$

$,x+2y+3z=15$

$,x-2z=12$

باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفات حل المعادلات الآتية:

٢س - ٣ص - ع = ٩

، س + ٢ص + ٣ع = ١٥

، س - ٢ع = ١٢

$$A=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&2&3\\1&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-3&-1\\1&2&3\\1&0&-2\end{vmatrix}$$

$$=2(-4)+3(-5)-(-2)$$

$$=-21\neq 0$$

$\therefore$ $Rk(A)=Rk(A^*)=3$

$\therefore$ Has one Sol.

$$C=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&3\\0&-2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&3\\1&-2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}-3&-1\\0&-2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&-1\\1&-2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&-3\\1&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}-3&-1\\2&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&-1\\1&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&-3\\1&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4&5&-2\\-6&-3&-3\\-7&-7&7\end{pmatrix}$$

$$adj(A)=\begin{pmatrix}-4&6&-7\\5&-3&-7\\-2&-3&7\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-21}\begin{pmatrix}4&6&-7\\5&-3&-7\\-2&-3&7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{-21}\begin{pmatrix}-4&-6&-7\\5&-3&-7\\-2&-3&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\15\\12\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{-21}\begin{pmatrix}-36-90-84\\45-45-84\\-18-45+84\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{-21}\begin{pmatrix}-210\\-84\\21\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}10\\4\\-1\end{pmatrix}$$

$\therefore$ $S.S=\{(10,4,-1)\}$

(16) Prove that the two planes:

$3x + 6y + 6z = 4$,

$x + 2y + 2z = 1$ are parallel,

then find the distance between them.

أثبت أن المستويين

٣س + ٦ص + ٦ع = ٤

، س + ٢ص + ٢ع = ١

متوازيان وأوجد البعد بينهما.

$$m_1 = \frac{-\text{Coeff. of } x}{\text{Coeff. of } y} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

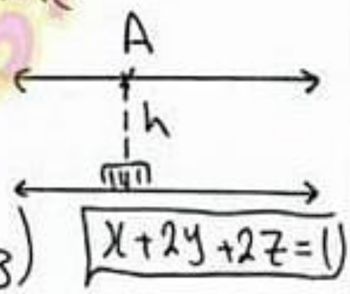
$$m_2 = \frac{-1}{2} \Rightarrow \boxed{L_1 \parallel L_2}$$

let $A(0,0,z) \in$ 1st line

$\therefore 0 + 0 + 6z = 4$

$\therefore z = 2/3$

$\therefore$ Point is $(0,0,2/3)$



$$\therefore h = \frac{|0 + 0 + 2(2/3) - 1|}{\sqrt{1+4+4}}$$

$$= \frac{|1/3|}{3} = \frac{1}{9} \text{ unit length}$$

17. The direction cosines of the vector $\vec{A}=(-2,1,2)$ are ....

(a) $\frac{1}{3}(-2,1,2)$

(b) $(-1,1,1)$

(c) $\left(\frac{5}{3},5,\frac{5}{2}\right)$

جيوب تمام قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\vec{أ}$ = (-٢، ١، ٢) هي ....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (-٢، ١، ٢)

(ب) (-١، ١، ١)

(ج) ($\frac{٥}{٣}$، ٥، $\frac{٥}{٢}$)

$$\vec{A}=\|\vec{A}\|(\cos\theta_x,\cos\theta_y,\cos\theta_z)$$

$$\therefore (\cos\theta_x,\cos\theta_y,\cos\theta_z)=\frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

$$=\frac{(-2,1,2)}{\sqrt{4+1+4}}$$

$$=\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

(18) The equation of the line of intersection of the two planes :

$2x - y + z = 1 , x - 3y - z = -2$

is ....

(a) $\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$

(b) $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{1}$

(c) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{-1}$

(d) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-5}$

معادلة خط تقاطع المستويين

٢س - ص + ع = ١ ، س - ٣ص - ع = -٢

هي ....

(أ) $\frac{س+١}{-١} = \frac{ص}{٢} = \frac{ع}{٣}$

(ب) $\frac{س-١}{١} = \frac{ص}{-٣} = \frac{ع-٥}{١}$

(ج) $\frac{س-٢}{١} = \frac{ص-٣}{-٢} = \frac{ع}{-١}$

(د) $\frac{س-١}{٤} = \frac{ص-١}{٣} = \frac{ع}{-٥}$

$\vec{n_1} = (2, -1, 1)$

$\vec{n_2} = (1, -3, -1)$

$\vec{d} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$

$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

$= (1+3)\hat{i} - (-2-1)\hat{j} + (-6+1)\hat{k}$

$= (4, 3, -5)$

let $\boxed{x = 1}$

$2 - y + z = 1$

$\boxed{-y + z = -1} \rightarrow (1)$

and $1 - 3y - z = -2$

$-3y - z = -3$

$\boxed{3y + z = 3} \rightarrow (2)$

by sub. $-4y = -4 \Rightarrow \boxed{y = 1}$

and $-1 + z = -1 \Rightarrow \boxed{z = 0}$

Point $(1, 1, 0)$

$\vec{r} = (1, 1, 0) + t(\ , 3, -5)$

$\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-5}$

19 **Answer one of the following items:**

(a) If $Z = 8(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$, write the cubic roots of Z in the exponential form.

(b) Find the square roots of the complex number $(-5 - 12i)$.

أجب عن إحدى الفقرتين الآتيتين:

أ- إذا كان

ع = ٨ (جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)

اكتب الجذور التكعيبية للعدد

ع في الصورة الأسية.

ب- أوجد الجذرين التربيعيين

للعدد (-٥-١٢ت).

a) $Z^{1/3} = [8(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)]^{1/3}$

$= 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^{1/3}$

$= 2\left(\cos\left(\frac{30^\circ + 2\pi m}{3}\right) + i \sin\left(\frac{30^\circ + 2\pi m}{3}\right)\right)$

$\boxed{m = 0, 1, 2}$

$\therefore Z_1 = 2(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)$

$= 2e^{\pi/18}$

$Z_2 = 2(\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ)$

$= 2e^{\frac{13}{18}\pi}$

$Z_3 = 2(\cos 250^\circ + i \sin 250^\circ)$

$= 2(\cos(-110^\circ) + i \sin(-110^\circ))$

$= 2e^{-\frac{11}{18}\pi}$

b) let $\sqrt{-5-12i} = a + bi$

(Sq.)

$-5 - 12i = (a + bi)^2$

$-5 - 12i = a^2 + 2abi + b^2 i^2$

$-5 - 12i = a^2 + 2abi - b^2$

$2ab = -12$ $\quad \boxed{a^2 - b^2 = -5} \rightarrow (2)$

$ab = -6$

$\boxed{a = \frac{-6}{b}} \rightarrow (1)$

Sub. from (1) in (2)

$\left(\frac{-6}{b}\right)^2 - b^2 = -5$

$\frac{36}{b^2} - b^2 = -5 \quad \times b^2$

$36 - b^4 = -5b^2$

$b^4 - 5b^2 - 36 = 0$

ref $b^2 = -4$, $b^2 = 9$

$b = \pm 3$

$a = \mp 2$

roots are $\boxed{2 - 3i}$, $\boxed{-2 + 3i}$