Booklet (2) Exams

Algebra and Solid Geometry

Third Sec

منتدى توجيه الرياضيات

أ/ عادل إدوار

① 12 players participated in a swimming computation, by how many ways can the 1st , 2nd and 3rd places be arranged ?

ⓐ 220 ⓑ 1320

ⓒ 72 ⓓ 60

اشترك ١٢ لاعبًا في مسابقة للسباحة .كم طريقة يمكن بها ترتيب المركز الأول والثاني والثالث ؟

أ ٢٢٠ ب ١٣٢٠

ج ٧٢ د ٦٠

The number of ways

$= {}^{12}P_3$

$= 12 \times 11 \times 10$

$= 1320$

(2) In the expansion of $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^{15}$,find the value of the term free of x ,then prove that this expansion does not contain a term containing x^5.

في مفكوك $\left(٢س+\frac{١}{س^٢}\right)^{١٥}$ أوجد قيمة الحد الخالي من س وأثبت أن هذا المفكوك لا يشتمل على حد يحتوي على س٥

$$T_{r+1} = {}^{15}C_r\left(\frac{1}{x^2}\right)^r(2x)^{15-r}$$

$$= {}^{15}C_r(x)^{-2r}(2)^{15-r}(x)^{15-r}$$

$$= {}^{15}C_r(2)^{15-r}(x)^{15-3r}$$

$$15-3r=0 \Rightarrow \boxed{r=5}$$

$$\therefore T_6 = {}^{15}C_5(2)^{10}$$

$$= 3075072$$

$$15-3r=5$$

$$r=\frac{10}{3}\notin N$$

The exp. does not contain a term of x^5.

(3) If ${}^{a+b}p_3 = x$, ${}^{a-b}p_2 = y$, then the least value for the number $\lfloor x - y$ equals ....

إذا كان $^{أ+ب}ل_٣$ = س، $^{أ-ب}ل_٢$ = ص فإن أقل قيمة للعدد $\lfloor$س - ص تساوي ....

(a) 720	(b) 24	(أ) ٧٢٠	(ب) ٢٤
(c) 120	(d) 4	(جـ) ١٢٠	(د) ٤

$\because {}^{a+b}P_3 = x$

$\therefore a+b \geq 3$

and the smallest value when $a+b = 3$

$\therefore x = {}^{3}P_3$

$= 3 \times 2 \times 1 = 6$

$\because {}^{a-b}P_2 = y$

$\therefore a-b \geq 2$

$\therefore$ The smallest value when $a-b = 2$

$\therefore y = {}^{2}P_2 = 2 \times 1 = 2$

$\therefore \lfloor x - y = \lfloor 6 - 2$

$= \lfloor 4 = 24$

④ If the middle term in the expansion of $\left(\frac{2x}{3} + \frac{y}{x^2}\right)^{8n}$ is the ninth term , then n = ……

(a) 1 (b) $^-3$

(c) 2 (d) 4

إذا كان الحد الأوسط في مفكوك $\left(\frac{٢ س}{٣} + \frac{ص}{س^٢}\right)^{٨ن}$ هو الحد التاسع

فإن ن = ...

(أ) ١ (ب) ٣

(ج) ٢ (د) ٤

order of M.T $= \frac{8n+2}{2}$

$= \boxed{4n+1}$

$\therefore 4n+1 = 9$

$4n = 8$

$\boxed{n = 2}$

⑤ If $|Z| = |Z + 2|$, then the real part of the complex number Z = ...

إذا كان |ع| = |ع + ٢|
فإن الجزء الحقيقي للعدد المركب
ع = ...

ⓐ 1 ⓑ -2
ⓒ 2 ⓓ -1

(١) ١ (ب) -٢
(ج) ٢ (د) -١

let $Z = a + bi$

$\because |Z| = |Z+2|$

$\therefore |a+bi| = |a+bi+2|$

$|a+bi| = |(a+2)+bi|$

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(a+2)^2+b^2}$ ⑤ξ.

$a^2 + \cancel{b^2} = (a+2)^2 + \cancel{b^2}$

$\cancel{a^2} = \cancel{a^2} + 4a + 4$

$4a = -4$

$\boxed{a = -1}$

real Part

6. The exponential form of the number $Z = 2 - 2\sqrt{3}i$ is ......

ⓐ $e^{\frac{8\pi}{3}i}$ ⓑ $2e^{\frac{2\pi}{3}i}$

ⓒ $4e^{\frac{2\pi}{3}i}$ ⓓ $4e^{\frac{-\pi}{3}i}$

الصورة الأسية للعدد ع = ٢ - ٢ $\sqrt{٣}$ ت هي ....

ⓐ هـ$^{\frac{٨\pi}{٣}ت}$ ⓑ ٢هـ$^{\frac{٢\pi}{٣}ت}$

ⓒ ٤هـ$^{\frac{٢\pi}{٣}ت}$ ⓓ ٤هـ$^{\frac{-\pi}{٣}ت}$

$Z = 2 - 2\sqrt{3}i$

$r = |Z|$

$= \sqrt{(2)^2 + (-2\sqrt{3})^2}$

$= 4$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$= \tan^{-1}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \tan^{-1}(-\sqrt{3})$

$\therefore \theta = -\frac{\pi}{3}$

$\therefore Z = 4e^{-\frac{\pi}{3}}$

⑦ If $1, \omega, \omega^2$ are the cubic roots of one, then $(5\omega + 2 + 5\omega^2)^3 = \dots\dots$

ⓐ 343 ⓑ -343

ⓒ 27 ⓓ -27

إذا كانت $(1، \omega، \omega^2)$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فإن:

$(5\omega + 2 + 5\omega^2)^3 = \dots\dots\dots$

ⓐ ٣٤٣ ⓑ -٣٤٣

ⓒ ٢٧ ⓓ -٢٧

$$(5w + 2 + 5w^2)^3$$

$$= [5(w + w^2) + 2]^3$$

$$= [5(-1) + 2]^3$$

$$= [-3]^3$$

$$= -27$$

⑧ **Answer one of the following items**

a- Put the number $1-\sqrt{3}i$ in the trigonometric form, then find the square roots of it.

b - If $Z = e^{\theta i}$,

prove that : $\frac{1+z}{1-z} = i\cot\frac{\theta}{2}$

أجب عن إحدى الفقرتين الآتيتين :

أ- ضع العدد ١ - $\sqrt{3}$ ت في الصورة المثلثية ثم أوجد الجذور التربيعية له.

ب- إذا كان ع = هـ$^{\theta}$ت ،

فأثبت أن $\frac{1+ع}{1-ع}$ = ت ظتا $\frac{\theta}{2}$

a) $Z = 1-\sqrt{3}i$

$r = \sqrt{1+3} = 2$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right)$

$= -\frac{\pi}{3}$

$\therefore Z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$\therefore Z^{1/2} = 2^{1/2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^{1/2}$

$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-60+2\pi m}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-60+2\pi m}{2}\right)\right]$

$m = 0, 1$

$Z^{1/2} = \sqrt{2}\{\cos -30 + i\sin(-30)\}$

$= \sqrt{2}\left[\cos -\frac{\pi}{6} + i\sin -\frac{\pi}{6}\right]$

and $Z^{1/2} = \sqrt{2}\left[\cos 150 + i\sin 150\right]$

$= \sqrt{2}\left[\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right]$

b) $L.H.S = \dfrac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1-\cos\theta - i\sin\theta}$

$$= \frac{\cancel{1} + 2\cos^2\frac{\theta}{2} - \cancel{1} + i\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)}{1-\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) - i\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2} + i\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\frac{\theta}{2} - i\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cancel{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\theta/2 + i\sin\theta/2\right)}{\cancel{2}\sin\theta/2\left(\sin\theta/2 - i\cos\theta/2\right)}$$

$$= \cot\frac{\theta}{2} \times \frac{\cos\theta/2 + i\sin\theta/2}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \cot\frac{\theta}{2} \times \left[\cos\left(\cancel{\frac{\theta}{2}} - \frac{3\pi}{2} - \cancel{\theta/2}\right) + i\sin\left(\cancel{\frac{\theta}{2}} - \frac{3\pi}{2} - \cancel{\frac{\theta}{2}}\right)\right]$$

$$= \cot\frac{\theta}{2}\left[\cos(-270^\circ) + i\sin(-270^\circ)\right]$$

$$= \cot\frac{\theta}{2}\left[\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ\right]$$

$$= \cot\frac{\theta}{2}(0+i) = \boxed{i\cot\frac{\theta}{2}}$$

⑨ Without expanding the determinant,

Prove that :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+y & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \end{vmatrix} = y^2$$

بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١+ص & ١ & ١ \\ ١ & ١+ص & ١ \end{vmatrix} = ص^٢$$

$$L.H.S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+y & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \end{vmatrix}$$

$(R_1 \times -1) + R_2 , (R_1 \times -1) + R_3$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{vmatrix}$$

$= y^2 - 0$

$= y^2$

$= R.H.S$

(10) The equation of the sphere with center (0,4,0) and touches xz-plane is ....

معادلة الكرة التي مركزها (٠ ، ٤ ، ٠) وتمس المستوى الإحداثي س ع هي ....

(a) $x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 0$ — (أ) $س^٢ + (ص-٤)^٢ + ع^٢ = ٠$

(b) $x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 16$ — (ب) $س^٢ + (ص-٤)^٢ + ع^٢ = ١٦$

(c) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ — (جـ) $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ١٦$

(d) $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = 16$ — (د) $(س-٤)^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ١٦$

Touch XZ-Plane

$\therefore r = 4$

$\therefore$ The equation is

$x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 16$

(11) Solve the following system of linear equations using the inverse matrix :

$x - y + 3z = -4$
$, 2x + y = 4$
$, 3x + y - z = 8$

حل المعادلات الآتية باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة:

س - ص + ٣ع = -٤
٢س + ص = ٤
٣س + ص - ع = ٨

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(2-3) - (1+2)$$

$$= -3 - 3 = -6 \neq 0$$

$\therefore Rk(A) = 3$

$\therefore Rk(A) = R(A^*) = 3$ no. of variables

$\therefore$ There is one solution

$$C = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -10 & -4 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -10 & 6 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -10 & 6 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -10 & 6 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -10 & 6 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 4+8-24 \\ -8-40+48 \\ 4-16+24 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$S.S = \{(2, 0, -2)\}$$

⑫ If $30^\circ, 70^\circ, \theta^\circ$ are the direction angles of a vector ,then one of the values of θ equals ....

ⓐ 100°   ⓑ 80°

ⓒ 260°   ⓓ 68.61°

إذا كان ٣٠°، ٧٠°، θ
هي زوايا الاتجاه لمتجه
فإن إحدى قيم θ = ...

أ ١٠٠°   ب ٨٠°

ج ٢٦٠°   د ٦٨,٦١°

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$$

$$\cos^2 30^\circ + \cos^2 70^\circ + \cos^2\theta_z = 1$$

$$\therefore \cos^2\theta_z = 0.133$$

$$\cos\theta_z = 0.365$$

$$\therefore \theta_z = 68.61^\circ$$

13 The measure of the angle between the two straight lines :

$L_1 : x = 2 - 5k$
$, y = 1 - k$
$, z = 3 + 4k$

$L_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{2-y}{4} = \frac{z}{2}$

equals ....

ⓐ 75° ⓑ 83°

ⓒ 40° 35' ⓓ 85° 4'

قياس الزاوية بين المستقيمين

ل١ : س = ٢-٥ك ، ص = ١-ك ،

ع = ٣ + ٤ك ،

ل٢ : $\frac{س+١}{٣} = \frac{٢-ص}{٤} = \frac{ع}{٢}$

يساوي ....

(أ) ٧٥° (ب) ٨٣°

(ج) ٣٥َ ٤٠° (د) ٤َ ٨٥°

$$\vec{d_1} = (-5, -1, 4)$$

$$\vec{d_2} = (3, -4, 2)$$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}|}{\|\vec{d_1}\| \, \|\vec{d_2}\|}$$

$$= \frac{|-15 + 4 + 8|}{\sqrt{25+1+16}\,\sqrt{9+16+4}}$$

$$= \frac{|-3|}{\sqrt{42}\,\sqrt{29}} = \frac{3}{\sqrt{42}\,\sqrt{29}}$$

$$\theta = \boxed{85^\circ\, 4'}$$

(14) The two straight lines :

$\vec{r_1} = (1,2,4) + k_1(2,-1,1)$,

$\vec{r_2} = (1,2,4) + k_2(-2,7,11)$

are............

ⓐ parallel ⓑ skew

ⓒ perpendicular ⓓ congruent

المستقيمان

$\vec{ر_1} = (١، ٢، ٤) + ك_1 (٢، -١، ١)$،

$\vec{ر_2} = (١، ٢، ٤) + ك_2 (-٢، ٧، ١١)$

يكونان ....

(أ) متوازيان (ب) متخالفان

(ج) متعامدان (د) منطبقان

$\vec{d_1} = (2,-1,1)$, $\vec{d_2} = (-2,7,11)$

$\vec{d_1} \cdot \vec{d_2} = (2,-1,1)\cdot(-2,7,11)$

$= -4 - 7 + 11$

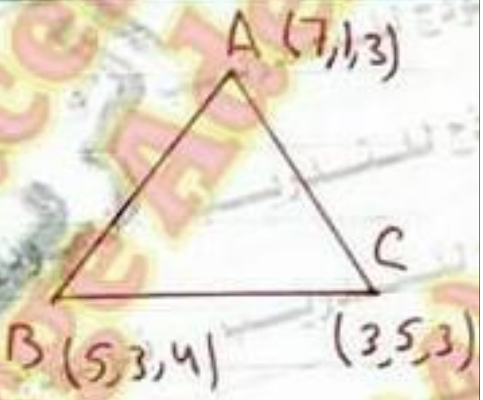
$= 0$

$\therefore \vec{d_1} \perp \vec{d_2}$

$\therefore L_1 \perp L_2$

15 **Prove that the triangle whose vertices are the points:**
(7,1,3),(5,3,4),(3,5,3) is an isosceles triangle.

أثبت أن المثلث الذي رؤوسه النقط (٧، ١، ٣)، (٥، ٣، ٤)، (٣، ٥، ٣) هو مثلث متساوي الساقين.



$AB = \sqrt{(7-5)^2+(1-3)^2+(3-4)^2}$

$= 3$

$AC = \sqrt{(7-3)^2+(1-5)^2+(3-3)^2}$

$= \sqrt{32}$

$BC = \sqrt{(5-3)^2+(3-5)^2+(4-3)^2}$

$= \sqrt{4+4+1}$

$= 3$

$\therefore AB = BC$

$\therefore \Delta ABC$ is isos. Δ

(16) If θ_z is the angle formed by the straight line passes through the point (3,-1,1) and the origin point with the positive direction of the z-axis ,then

$\cos\theta_z = \ldots\ldots$

Ⓐ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ Ⓑ $\frac{1}{\sqrt{11}}$

Ⓒ $\frac{1}{11}$ Ⓓ $\frac{1}{3}$

إذا كانت θع هي الزاوية التي يصنعها المستقيم المار بالنقطة (٣، -١، ١) ونقطة الأصل مع الاتجاه الموجب لمحور ع فإن جتاθع = ...

(أ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{١١}}$

(جـ) $\frac{١}{١١}$ (د) $\frac{١}{٣}$

$$\vec{d} = (3,-1,1) - (0,0,0)$$
$$= (3,-1,1)$$
$$(\cos\theta_x, \cos\theta_y, \cos\theta_z) = \frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|}$$
$$= \frac{(3,-1,1)}{\sqrt{9+1+1}}$$
$$\therefore \cos\theta_z = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

(17) The length of the perpendicular drawn from the point (1,5,-4) to the plane whose equation : $3x - y + 2z = 6$ equals ……….length unit

ⓐ $\frac{8}{\sqrt{3}}$ ⓑ $\frac{8}{\sqrt{2}}$

ⓒ $\frac{8}{7}$ ⓓ $\frac{16}{\sqrt{14}}$

طول العمود المرسوم من النقطة (١، ٥، -٤) على المستوى الذي معادلته ٣ س - ص + ٢ ع = ٦ هو .... وحدة طول

Ⓐ $\frac{٨}{\sqrt{٣}}$ Ⓑ $\frac{٨}{\sqrt{٢}}$

Ⓒ $\frac{٨}{٧}$ Ⓓ $\frac{١٦}{\sqrt{١٤}}$

$$h = \frac{|3(1) - (5) + 2(-4) - 6|}{\sqrt{9+1+4}}$$

$$= \frac{|3 - 5 - 8 - 6|}{\sqrt{14}}$$

$$= \frac{|-16|}{\sqrt{14}}$$

$$= \frac{16}{\sqrt{14}}$$

(18)

Answer one of the following items:

a- Find the different forms of the equation of the plane passes through the point (2,-1,0) and the vector $\vec{n} = 4\vec{i} + 10\vec{j} - 7\vec{k}$ is perpendicular to it.

b- Find the measure of the angle between the two straight lines whose direction ratios are (1,1,2) and $(\sqrt{3}-1, -\sqrt{3}-1, 4)$

أجب عن إحدى الفقرتين الآتيتين:

أ- أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٢، -١، ٠) والمتجه ن = ٤ س + ١٠ ص - ٧ ع عمودي عليه.

ب- أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين نسب اتجاههما (١، ١، ٢)، (√٣ - ١، -√٣ - ١، ٤)

---

a) $\vec{n} \odot \vec{r} = \vec{n} \odot \vec{A}$

$(4, 10, -7) \odot (x, y, z) = (4, 10, -7) \odot (2, -1, 0)$

$4x + 10y - 7z = 8 - 10$

$4x + 10y - 7z + 2 = 0$

b) $\cos\theta = \dfrac{|(1,1,2) \odot (\sqrt{3}-1, -\sqrt{3}-1, 4)|}{\sqrt{1+1+4} \times \sqrt{4-2\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}+16}}$

$= \dfrac{|\cancel{\sqrt{3}}-1-\cancel{\sqrt{3}}-1+8|}{\sqrt{6}\sqrt{24}}$

$= \dfrac{6}{\sqrt{6}\sqrt{24}}$

$\theta = 60^\circ$

(19) If the plane $3x + 2y + 4z = 12$ cuts the coordinate axes x,y,z at the points A ,B and C respectively, Calculate the area of Δ ABC

إذا قطع المستوى ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢ محاور الإحداثيات س ، ص ، ع في النقط أ ، ب ، جـ على الترتيب. احسب مساحة Δ أ ب جـ.

let $A(x,0,0), B(0,y,0), C(0,0,z)$ are the points of intersection of the plane with the cor. Axes

then $A(4,0,0), B(0,6,0), C(0,0,3)$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = (-4,6,0)$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = (-4,0,3)$

$area = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -4 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (18,12,24)$$

$area = \frac{1}{2}\|(18,12,24)\| = 3\sqrt{29}\ square\ unit$