الدوال التحليلية

Chapter · January 2007

1 author:

Ramadan Sabra
Jazan University

الوحدة الثانية

الدوال التحليلية

(Analytic Functions)

الدالة المركبة (Complex Function):

إن مفهوم الدالة هو مـن المفاهيم الأساسية والتي تلعـب دوراً أساسياً في تطوير علم الرياضيات. حيث أن الدالة هي أداة هامة فـي كتابة الظاهرة على شكل معادلات رياضية والتي بدراستها نعطي تفسيراً علمياً لهـذه الظاهرة سواءً أكانت هذه الظاهرة فيزيائية أو كيميائية أو اقتصادية.

تعريف:

إذا كانت Γ , Ω مجموعتان جزئيتان مـن مجموعة الأعداد المـركبة C فإن الدالـة المركبـة ووحيـدة القيمة (single-valued) f مـن المجموعة Ω إلى المجموعة Γ ويرمز لها بالرمز $f:\Omega \rightarrow \Gamma$ هي عبارة عـن قاعدة تربط كل عنصر مـن عناصر المجموعـة Ω بعنصر وحيد من عناصر المجموعة Γ يرمز له بالرمز $f(\omega)$.

ملاحظة : كما هـو الحـال فـي التحليل الحقيقـي هناك دوال متعددة القيمـة (multiple – valued) مثل $f(z)=\sqrt{z}$. فـي سياق هـذا الكتـاب سنقصد بالدالة الدالة وحيدة القيمة إلا اذا ذكر غير ذلك.

مثال: إذا كانت $\Omega=\{i\,,\,i+1,3\}$ وكانت $f(z)=z+i$ فإن :

$$f(i)=2i\ ,\quad f(i+1)=2i+1\ ,\quad f(3)=3+i$$

مثال: الدالة $f(z)=\frac{1}{z}$ معرفة لجميع عناصر المجموعة $\Omega=\{z:z\neq 0\}$ أما في النقطة $z=0$ فإن هذه الدالة غير معرفة.

وهذا يقودنا إلى التعريف التالي:

تعريف: إن مجموعة الأعداد التي تكون الدالة $f(z)$ معرفة عليها تسمى مجال **(Domain)** الدالة $f(z)$ ويرمز لها بالرمز D_f .
أي أن

$$D_f=\{\ z: f(z)\ \ defined\ \}$$

مثال: إذا كانت $f(z)=\frac{i}{z^2+1}$ فإن $D_f=C\setminus\{\pm i\}$.

ملاحظة: من الاختلافات الأساسية بين الدالة الحقيقية والدالة المركبة أننا لا نستطيع رسم بيان الدالة المركبة (لماذا؟) بل من الممكن أن نمثل بيانيا تأثير الدالة على المناطق وهذا ما سيتم التعرض له بالتفصيل في الوحدة الثالثة.

ملاحظة: إن أي دالة مركبة $f(z)$ يمكن كتابتها على الشكل

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\ .$$

حيث أن

$$v(x,y)=\mathrm{Im}(f(z))\ ,\ \ u(x,y)=\mathrm{Re}(f(z))$$

مثال : إذا كانت $f(z)=z^2$ فإن $f(z)=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2xyi$

وبذلك تكون $u(x,y)=(x^2-y^2)\ \ ,\ \ v(x,y)=2xy$

تمارين:

1. إذا كانت $f(z)=\dfrac{z+i}{z^2+(1+i)}$. احسب كلا مما يلي:

$$D_f\ ,\ \ f(0)\ \ ,\ \ f(i)\ \ ,\ \ f(2-i)$$

2. أوجد صيغة مناسبة لتعريف $D_{f\pm g}, D_{fg}, D_{\frac{f}{g}}$. ثم احسب مجال الدوال التالية:

a. $h(z)=|z|+\dfrac{1}{z}$

b. $k(z)=(\mathrm{Im}z)(\arg z)$

c. $k(z)=\dfrac{z-i}{|z+i|}$

3. أوجد صيغة مناسبة لتعريف D_{u+iv} ثم احسب مجال الدوال التالية:

a.. $f(z)=\dfrac{1}{x^2+y^2-2}+i\sqrt{x^2+y^2-1}$

b. $g(z)=y\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-xt}\,dt+i\sum_{n=0}^{\infty}y^n$

4. اكتب الدالة $f(z)=xy+i\sin(x-y)$ بدلالة $\bar{z}$, z .

النهايات(Limits):

مما سلف رأينا أن قيمة الدالة في نقطة ما ممكن أن تكون غير معرفة أي أن هذه النقطة ممكن أن تكون لا تنتمي إلى مـجال هـذه الدالة . لكن إذا كانت هـــذه الدالة معرفة في جوار هذه النقطة فمن البديهي أن نتساءل عن سلوك هـــذه الدالة حول هـذه النقطة. وكما سنرى في هذه الوحدة فإن النهايات ستعطي الدراسة الدقيقة لسلوك الدالة حول نقطة ما.

ونذكر هنا بأن هناك الكثير من الظواهر الطبيعية التي لا تدرس في نقطة معينة بل تتم دراسة هذه الظاهرة أثناء الإقتراب من هذه النقطة . فــمثلاً لو كانت الدالة f تبين عدد الوحدات المباعة من سلعةٍ ما فإن عدد هـــذه الوحدات في يومٍ معين لا يعكس الطلب الحقيقي عـلى هـذه السلعة ، لأن اليوم الذي تمت فـيه الدراسة قـد يكون يوم عطلة ويكون عدد الوحدات المباعة في هذا اليوم صفر أو على العكس تماما قد يكون هذا اليوم هو اليوم الذي يسبق العيد وبذلك يكو ن عدد الوحدات المباعة كبير جداً . لذلك فإن المؤشر الحقيقي يكون عندما تتم دراسة هذه الظاهرة قبل وبعد هـــذا اليوم بعدة أيام . ومــن الأمــثلة الأخــرى مــسألة حساب درجات الحرارة في مدينة ما حيث أن حساب درجة الحرارة في نقطة مالا يعكس درجة الحرارة الحقيقية لأن هذه النقطة قد تكون ظل شجرة .

تعريف: إذا كانت $f(z)$ دالة مركبة معرفة في جوارٍ مـا للنقطة z_0 (z_0 ليس بالضرورة أن تكون من مجال الدالة $f(z)$) . فإننا نقول أن نهايــة الدالــة $f(z)$ عنــدما z تقتــرب مــن النقطــة z_0 هـــي ω_0 وبـــالرموز ($\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\omega_0$) إذا وفقط إذا كان :

$$(\forall \varepsilon \rangle 0 \ , \ \exists \ \delta \rangle 0 : | \ f(z) - \omega_0 \ | \langle \ \varepsilon \qquad when \qquad | \ z - z_0 \ | \langle \ \delta \ )$$

مثال: أثبت أن

$$\lim_{z \to 0} 3z + i = i$$

الإثبات : نفرض أن $\varepsilon > 0$ معطى نريد أن نحصل على $\delta > 0$

بحيث أن $| \ 3z + i \ - \ i \ | < \varepsilon$ عندما $|z| < \delta$:

من المتباينة

$$| \ 3z + i \ - \ i \ | < \varepsilon \ \rightarrow \ | \ 3z \ | \ < \varepsilon \ \rightarrow \ | \ z \ | < \frac{\varepsilon}{3}$$

نجد أن $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$

ومن هنا نستنتج أنه

$$(\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0 : | \ 3z + i \ - \ i| < \varepsilon \qquad when \qquad | \ z \ | < \delta \ )$$

وهذا يعني أن

$$\lim_{z \to 0} 3z + i = i$$

مثال: أثبت أن $\lim\limits_{z \to 0} \ \bar{z} \ = \ 0$

الإثبات : نفرض أن $\varepsilon > 0$ معطى نريد أن نحصل على $\delta > 0$

بحيث أن

$$|\bar{z}-0|<\varepsilon \quad \text{عندما} \quad |z|<\delta$$

من المتباينة

$$|\bar{z}-0|<\varepsilon \quad \rightarrow \quad |\bar{z}|=|z|<\varepsilon$$

نجد أن

$$\delta=\varepsilon$$

لذلك

$$(\ \forall\varepsilon>0\ ,\ \exists\ \delta=\varepsilon>0\ :\ |\bar{z}|<\varepsilon \quad when\ \ |z|<\delta\ )$$

وعليه فإن

$$\lim_{z\to 0}\bar{z}=0$$

نظرية : إذا كانت $z_0 = x_0 + iy_0$ وكانت $\omega_0 = u_0 + iv_0$ وكانت الدالة $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ فإن $\lim_{z\to z_0} f(z) = \omega_0$ إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0 \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0$$

الإثبات:

أولا: نفرض أن $\lim_{z\to z_0} f(z)=\omega_0$ وهذا يعني أن

$$(\ \forall\varepsilon>0\ ,\ \exists\ \delta>0 : |f(z)-\omega_0|<\varepsilon \quad when\ \ |z-z_0|<\delta\ )$$

إذن وبما أن $|u(x,y)-u_0| \le |f(z)-\omega_0| < \varepsilon$

$$|v(x,y)-v_0| \le |f(z)-\omega_0|<\varepsilon$$

فإن

$$(\ \forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ \delta > 0 : \left| u(x,y) - u_0 \right| < \varepsilon \ \ when\ \ \left| (x,y) - (x_0,y_0) \right| < \delta\ )$$

$$(\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0 : \left| v(x,y) - v_0 \right| < \varepsilon\ \ when \left| (x,y) - (x_0,y_0) \right| < \delta\ )$$

أي أن

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0 \qquad , \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$$

ثانياً: بفرض أن $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$ و

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

نستنتج أن

$$(\ \forall\ \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists\ \delta_1 > 0 : \left| u(x,y) - u_0 \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad when \quad \left| (x,y) - (x_0,y_0) \right| < \delta_1\ )$$

$$(\ \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0\ ,\ \exists\ \delta_2 > 0 : \left| v(x,y) - v_0 \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad when \quad \left| (x,y) - (x_0,y_0) \right| < \delta_2\ )$$

وبما أن

$$\left| f(z) - \omega_0 \right| \le \left| u(x,y) - u_0 \right| + \left| v(x,y) - v_0 \right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

إذن

$$(\ \forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ \delta = \min\{\ \delta_1, \delta_2\ \} : \left| f(z) - \omega_0 \right| < \varepsilon \quad when \quad \left| z - z_0 \right| < \delta\ )$$

أي أن

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \omega_0$$

وهذا ما ينهي الإثبات.

مثال: إذا كانت $f(z)=(x^2-y^2)+2xyi$ فإن:

$$\lim_{z\to 1+i} f(z)=\lim_{(x,y)\to(1,1)}(x^2-y^2)+i\lim_{(x,y)\to(1,1)}2xy=2i$$

مثال: هل النهاية $\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}$ موجودة ولماذا؟

الحل: بما أن

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-i\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

فإن هذه النهاية غير موجودة لأن النهاية

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

غير موجودة.

نظرية: إذا كانت $\lim_{z\to z_0} f(z)=\omega_0$ وكانت $\lim_{z\to z_0} g(z)=\omega_1$ فـــإن جميع العلاقات التالية صحيحة:

1. $\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\pm g(z)\right]=\omega_0\pm\omega_1$
2. $\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\,g(z)\right]=\omega_0\,\omega_1$
3. $\lim_{z\to z_0}\left[f(z)/g(z)\right]=\omega_0/\omega_1,\qquad \omega_1\neq 0$

الإثبات: نثبت الخاصية الثانية

اذا كانت $\omega_0=0$ فان الاثبات ينتج مباشرة من التعريف

بفرض أن

$$\lim_{z\to z_0} g(z)=\omega_1 \quad \text{و} \quad \lim_{z\to z_0} f(z)\neq\omega_0 \quad , |g(z)|\leq M$$

نحصل على

$$\left(\lim_{z\to z_0} f(z)=\omega_0\right) \leftrightarrow \left(\forall \frac{\varepsilon}{2M}>0 \ \exists \ \delta_1>0 : \left| f(z)-\omega_0 \right| < \frac{\varepsilon}{2M} \ , \left| z-z_0 \right| < \delta_1\right.$$

$$\left(\lim_{z\to z_0} g(z)=\omega_1\right) \leftrightarrow \left(\forall \frac{\varepsilon}{2|\omega_0|}>0 \ \exists \ \delta_2>0 : \left| g(z)-\omega_1 \right| < \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \ , \left| z-z_0 \right| < \delta_2\right.$$

وبما أن

$$\left| f(z)g(z)-\omega_0\omega_1 \right| = \left| f(z)g(z)-g(z)\omega_0+g(z)\omega_0-\omega_0\omega_1 \right| =$$

$$= \left| g(z) \right| \left| f(z)-\omega_0 \right| + \left| \omega_0 \right| \left| g(z)-\omega_1 \right| \leq$$

$$\leq M\frac{\varepsilon}{2M}+\left|\omega_0\right|\frac{\varepsilon}{2\left|\omega_0\right|}=\varepsilon$$

إذن

$$(\forall\varepsilon\rangle 0 \exists\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}: \left|f(z)g(z)-\omega_0\omega_1\right|\langle\varepsilon, \left|z-z_0\right|\langle\delta$$

أي أن

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)g(z)\right]=\omega_0\omega_1$$

إثبات باقي الخصائص يتم بصورةٍ مشابهة .

مثال:

$$1.\ \lim_{z\to i}\frac{z^2+2z}{z+i}=\frac{-1+2i}{2i}$$

$$2.\ \lim_{z\to(1+i)}(z+1)(\sqrt{z})=(2+i)(\sqrt{1+i})$$

$$3.\ \lim_{z\to -1}(z+3iz)=(-1-3i)$$

كما هو معروف من التحليل الحقيقي فإن هناك الكثير من النهايات التي لا تحل مباشرة ، بل يلزمنا إجراء تحايل قانوني على مثل هـذه المسائل مثل التحليل أو الاستبدال أو الضرب بالمرافق.

مثال:

$$1.\ \lim_{z\to 1}\frac{z^2-1}{z-1}=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z+1)}{(z-1)}=\lim_{z\to 1}z+1=2$$

$$2.\ \lim_{z\to 1}\frac{\sqrt{z}-1}{z-1}=\lim_{z\to 1}\frac{(\sqrt{z}-1)(\sqrt{z}+1)}{(z-1)(\sqrt{z}+1)}=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{(z-1)(\sqrt{z}+1)}=\lim_{z\to 1}\frac{1}{\sqrt{z}+1}=\frac{1}{2}$$

$$3.\ \lim_{z\to 1}\frac{\sqrt[3]{z}-1}{z-1}=\left[\sqrt[3]{z}=\omega\right]=\lim_{\omega\to 1}\frac{\omega-1}{\omega^3-1}=\lim_{\omega\to 1}\frac{(\omega-1)}{(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)}=\frac{1}{3}$$

تمارين

1. أثبت أن

$$a.\ \lim_{z\leftarrow z_0}\operatorname{Im} z=\operatorname{Im} z_0$$

$$b.\ \lim_{z\to z_0}a\,z+b=a\,z_0+b,\qquad a,b\in C$$

$$c.\ \lim_{z\to 1-i}(x+i(2x+y))=1+i$$

2. أوجد النهايات التالية **:**

$$1.\ \lim_{z\to 1}\frac{z^3-1}{z-1} \qquad 2.\ \lim_{z\to 4}\frac{\sqrt{z}-2}{z-4}$$

$$3.\ \lim_{z\to 1}\frac{\sqrt[3]{z}-1}{z^2-1} \qquad 4.\ \lim_{z\to i}\frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{i}}{z-i}$$

3. أثبت أنه إذا كانت $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=0$ وكانت $|g(z)|\le M$ فـــي جــوارٍ ما للنقطة z_0 فإن $\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)g(z)\right]=0$.

4. نقول أن $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\omega_0$ إذا كان لكل عـــدد موجب $\varepsilon>0$ فإنه يوجد $\delta>0$ بحيث

$$|\ f(z)-\omega_0\,|<\varepsilon\ ,\quad |\,z\,|>\frac{1}{\delta}$$

استخدم هذا التعريف لتثبت أن $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{z^2}=0$.

5. . نقول أن $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$ إذا كان لكل عـدد موجب $\varepsilon>0$ فــإنــه يوجد $\delta>0$ بحيث

$$|\ f(z)\ |>\frac{1}{\varepsilon},\qquad 0<|\ z-z_0\ |<\delta$$

استخدم هذا التعريف لتثبت أن $\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{z^2}=\infty$.

6. استخدم التعاريف المعطاة أعلاه لإثبات ما يلي :

$$a.\quad \lim_{z\to\infty} f(z)=\omega_0 \ \leftrightarrow\ \lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z}) = \omega_0$$

$$b.\quad \lim_{z\to z_0} f(z)=\infty \ \leftrightarrow\ \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)}=0$$

7. استخدم النتائج من التمرين **7** لإثبات ما يلي

$$a.\qquad \lim_{z\to\infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2} = 4$$

$$b.\qquad \lim_{z\to 1} \frac{1}{(z-1)^3} = \infty$$

الاتصال (Continuity):

مـفهوم الاتصال مـن المفاهيم الأساسية فـي الرياضيات حيث أن الدوال المتصلة تتسم بصفات مـهمة جداً . علماً بأن هناك نظريات وقواعد كثيرة جداً لا تتحقق إلا للدوال المتصلة. كـمـا أن الكثير مـن الظواهر الطبيعية تكتب على شكل دوال متصلة.

تعريف. نقول أن الدالة $f(z)$ متصلة في النقطة z_0 إذا تحققت الشروط الثلاث التالية:

1. $f(z_0)$ معرفة
2. $\lim_{z\to z_0} f(z)$ موجودة
3. $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$.

وتكون الدالة متصلة في المنطقة Ω إذا كانت متصلة فـــي كــل نقطة مــن نقاط هــذه المنطقة.

مثال : الدالة

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2-1}{z-1} & , \quad z\neq 1\\ 2 & , \quad z=1\end{cases}$$

متصلة في النقطة $z=1$ لأن $\lim\limits_{z\to 1} f(z)=2=f(1)$.

مثال: الدالة

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2-1}{z-1} & , \quad z\neq 1\\ i & , \quad z=1\end{cases}$$

غير متصلة (منفصلة) في النقطة $z=1$ ذلك ولأن

$$\lim_{z\to 1} f(z)=2\neq f(1)=i$$

نظرية: إذا كانت الدالة معطاة على الشكل $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ فان $f(z)$ تكون متصلة فـي النقطة $z_0=x_0+iy_0$ إذا وفقط إذا كانت كـل مـن الدوال $u(x,y)$ و $v(x,y)$ متصلة في النقطة $z_0=(x_0,y_0)$.

مثال: الدوال التالية:

$$f(z)=\sin(x^2-y^2)+ie^{xy}\,,\quad g(z)=(x^2-y^2)+2xyi$$

هــي دوال متصلة عــلــى المستوى المركب C وذلك ينتج مباشرة مــن اتصال كثيرات الحدود $(x^2-y^2),2xy$ والدوال $\sin(x^2-y^2),e^{xy}$ عــلى المستوى الديكارتي xy .

الدوال التحليلية (Analytic Functions):

إن مفهــوم المشتقة يعتبر الأداة الأساسية لدراسة الظواهــر المتغيرة فــي الطبيعة. حيث أن كل شيء حولنا فــي حركة دائمة رغم مــا نلحظه مــن سكون نسبي .

تعريف: لتكن الدالة $f(z)$ معرفة في جوار ما للنقطة z_0 . مشتقة الدالــة $f(z)$ فــي النقطة z_0 ويرمز لها بالرمز $f^{/}(z_0)$ تعرف عــلى أنهــا

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

باعتبار أن هذه النهاية موجودة. فـي هـذه الحالة تسمى الدالة $f(z)$ دالــة قابلة للتفاضل في النقطة z_0 .

ملاحظة: كما هو الحال في التحليل الحقيقي فهناك الكثير من الصيغ المتكافئة التي تعبر عن مشتقة الدالة في النقطة، مثل الصيغة :

$$f^{/}(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

مثال: إذا كانت $f(z) = z^2$ فإن :

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - {z_0}^2}{z - z_0} = 2z_0$$

نلاحظ أن هــذه الدالة قابلة للاشتقاق في جميع النقاط . فعلى سبيل المثال

$$f'(-\sqrt{2}i) = -2\sqrt{2}\, i \ ، \ f'(3) = 6 \ ، \ f'(3-2i) = 6 - 4i$$

مثال: . إذا كانت $f(z) = \bar{z}$ فإن

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z \to z_0} \frac{\bar{z}}{z}$$

وهــذه النهاية غير موجودة(لماذا؟) لذا تكون الدالة $f(z) = \bar{z}$ غير قابلة للاشتقاق عندما $z_0 = 0$.

ملاحظة: عادة ما تستخدم الرموز التالية للتعبير عن مشتقة الدالة :

$$\frac{df}{dz} ,\ \frac{dw}{dz} ,\ Df$$

ملاحظة : ان الصيغة $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ تعبر عنم مشتقة الدالة في أي نقطة اختيارية z .

مثال : اذا كانت $f(z) = z^2$ فإن $f'(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = 2z$

نظرية : اذا كانت الدالة $f(z)$ قابلة للاشتقاق في النقطة z_0 فانها متصلة في هذه النقطة .

الاثبات :

اثبات هذه النظرية ينتج مباشرة من العلاقة التالية :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) - f(z_o) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}(z - z_o) = f^{l}(z_0).\,0 = 0$$

تمرين : هل عكس النظرية صحيح؟ ولماذا؟

قواعد الاشتقاق (Differentiation Rules):

كما أسلفنا فإن هناك الكثير من القواعد التي يمكن تعميمها من التحليل الحقيقي إلى التحليل المركب حتى أنه وفي كثير من الأحيان يكون الإثبات هو نفسه . من هذه القواعد قواعد الاشتقاق التالية:

$$1.\frac{d}{dz}c = 0;$$

$$2.\frac{d}{dz}z^r = rz^{r-1} \qquad \forall r \in R;$$

$$3.\frac{d}{dz}\left[f(z) \pm g(z)\right] = \frac{df}{dz} \pm \frac{dg}{dz}$$

$$4.\frac{d}{dz}\left[f(z)g(z)\right] = g\,\frac{df}{dz} + f\,\frac{dg}{dz}$$

$$5.\frac{d}{dz}\left[f(z)/g(z)\right] = \frac{\frac{d}{dz}\,f(z)g(z) - f(z)\frac{d}{dz}g(z)}{g^2(z)}$$

$$6.\quad \frac{d}{dz}\left[f(g(z))\right] = f^{/}(g(z))g^{/}(z)$$

اثبات هذه القواعد يتشابه الى حد كبير مع الاثباتات في حالة التحليل الحقيقي ونتركه كتمرين للطالب.

مثال: إذا كانت $f(z) = \left[\dfrac{z^2+i}{\sqrt{z}}\right]^3$ فإن **:**

$$f^{/}(z) = 3\left[\frac{z^2+i}{\sqrt{z}}\right]^2 \frac{4z^2-(z^2+i)}{2z\sqrt{z}} = 3\left[\frac{z^2+i}{\sqrt{z}}\right]^2 \frac{3z^2-i}{2z\sqrt{z}}$$

تمارين

1. استخدم تعريف المشتقة لإيجاد $f^{/}(z)$ لكل مما يلي:

$a.\ f(z) = iz + (3-i)$

$b.\ k(z) = \sqrt{z}$

$c.\ l(z) = \dfrac{1}{z}$

2.استخدم قواعد الاشتقاق لإيجاد مشتقة كل من الدوال التالية:

$a.\ f(z) = \sqrt{iz + (3-i)}$

$b.\ g(z) = \sqrt{z}(z^3 + iz + 5)$

$c.\ h(z) = \dfrac{1}{z^5} + \sqrt[5]{\dfrac{iz+2}{z^2-i}} + i$

3. ما العلاقة بين مجال الدالة ومجال مشتقتها. هل $D_f = D_{f^{\prime}}$.

4. . أثبت أن الدالة $f(z) = \operatorname{Re} z$ غير قابلة للتفاضل في أي من النقاط.

5. استخدم قواعد الاشتقاق لإيجاد النهاية التالية $\lim_{z\to 1} \dfrac{\sqrt[5]{z}-1}{z-1}$.

6. اعط تعريفا مناسبا للمشتقات العليا $f^{I}(z), f^{II}(z), f^{III}(z), \dots\dots, f^{(n)}(z)$.

صيغ كوشي – ريمان (Cauchy-Riemann Equations):

في هذا الجزء سندرس شروط تفاضل الدوال المعطاة على الشكل :

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

وسنحصل علىالشرط الضروري والكافي لقابلية التفاضل والذي يتطلب دراسة بسيطة للمشتقات الجزئية v_x, v_y, u_y, u_x مما يسهل اختبار قابلية التفاضل لهذه الدالة .

نظرية (الشرط الضروري) : إذا كانت $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ وكانت $f^{\prime}(z_0)$ موجودة في النقطة $z_0 = (x_0 + iy_0)$. فإن المشتقات الجزئية v_x, v_y, u_y, u_x يجب أن تكون موجودة في النقطة (x_0, y_0) وتحقق معادلات كوشي – ريمان التالية :

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

في هذه النقطة . كما أن $f^{\prime}(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)$.

الإثبات: نفرض أن $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ و $f^{/}(z_0)$ موجودة .

إذن

$$f^{/}(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=$$
$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)+i\left[v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)\right]}{\Delta x+i\Delta y}$$
$$+\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{i\left[v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)\right]}{\Delta x+i\Delta y}$$
$$=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\Delta x+i\Delta y}$$

هذه النهاية موجودة باتجاه جميع المسارات نأخذ هذه النهاية بالنسبة إلى المسارين التاليين :

1. عندما $\Delta y=0,\Delta x\to 0$ نجد أن :

$$f^{/}(z_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)$$

2. عندما $\Delta y\to 0,\Delta x=0$ نحصل على:

$$f^{/}(z_0)=v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0)$$

من (1) و (2) نحصل على معادلات كوشي-ريمان وهي :

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

ملاحظة: نلاحظ أنه إذا كانت المشتقات الجزئية v_x, v_y, u_y, u_x موجودة في النقطة (x_0, y_0) وتحقق معادلات كوشي – ريمان $u_y = -v_x \ , \ u_x = v_y$ في هذه النقطة فإن هذا لا يعني أن تكون $f^{/}(z_0)$ موجودة حيث $z_0 = x_0 + iy_0$.
فعلى سبيل المثال الدالة

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(\bar{z})^2}{z} & , \ z \neq 0 \\ 0 & , \ z = 0 \end{cases}$$

غير قابلة للتفاضل في النقطة $z_0 = 0$ بالرغم من أن شروط كوشي- ريمان تتحقق في هذه النقطة (في هذا المثال نجد v_x, v_y, u_y, u_x باستخدام التعريف).

نظرية(الشرط الكافي): إذا كانت $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ معرفة في جوار ما للنقطة $z_0 = x_0 + iy_0$ وإذا كانت المشتقات الجزئية v_x, v_y, u_y, u_x موجودة في هذا الجوار ومتصلة في النقطة (x_0, y_0) وكانت تحقق شروط كوشي- ريمان في النقطة (x_0, y_0) فإن $f^{/}(z_0)$ موجودة.

الإثبات:

نكتب $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ، $0 < |\Delta z| < \varepsilon$ و $\Delta\omega = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \Delta u + i\Delta v$

حيث أن :

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$$

$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)$$

والآن وبما أن المشتقات الجزئية الأولى v_x, v_y, u_y, u_x متصلة في النقطة $(x_0 y_0)$ فإن

$$\Delta u = u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_2\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\Delta v = v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_2\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

حيث أن

$\varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0$ عندما $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

لذلك

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} + \\ &+ i\left[v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_2\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right] \qquad (*)\end{aligned}$$

وبما أن شروط كوشي– ريمان تتحقق في النقطة $(x_0 y_0)$ نستبدل $u_y(x_0 y_0)$ بالعبارة $-v_x(x_0 y_0)$ ونستبدل $v_y(x_0 y_0)$ بالعبارة $u_x(x_0 y_0)$ وبقسمة المعادلة (*) على Δz نحصل على:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta z} = u_x(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta z}$$

لكن $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = |\Delta z|$

لذلك

$$\left|\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta z}\right| = 1$$

من كل ذلك نستنتج أن

$$f^{/}(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta z} = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

مثال: إذا كانت $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$ فإن شروط كوشي – ريمان $u_y = -v_x, u_x = v_y$ تتحقق في جميع النقاط لذلك

$$f^{/}(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = e^x(\cos y + i\sin y)$$

أي أن

$$f^{/}(z_0) = f(z)$$

مثال: أوجد جميع النقاط (ان وجدت) التي تكون فيها الدالة $f(z) = \bar{z}$ قابلة للاشتقاق.

الحل:

بما أن

$$f(z) = \bar{z} = x - iy$$

فإن

$$v_x = 0\ ,\ v_y = -1\ ,\ u_y = 0\ ,\ u_x = 1$$

لذا فإن شروط كوشي – ريمان لا تتحقق في أي من النقاط وعليه تكون المشتقة $f^{/}(z)$ غير موجودة.

مثال: أوجد جميع النقاط (ان وجدت) التي تكون فيها الدالة $f(z) = \operatorname{Re} z$ قابلة للاشتقاق.

الحل: بما أن $f(z) = x + i0$ فإن $v_x = 0 \ , \ v_y = 0 \ , \ u_y = 0 \ , \ u_x = 1$
لذا فإن شروط كوشي – ريمان لا تتحقق في أي من النقاط وعليه تكون المشتقة $f^{/}(z)$ غير موجودة.

مثال: أوجد جميع النقاط (ان وجدت) التي تكون فيها الدالة $f(z) = |z|^2$ قابلة للاشتقاق.
الحل: بما أن $f(z) = (x^2 + y^2) + i0$ فإن

$$v_x = 0 \ , \ v_y = 0 \ , \ u_y = 2y \ , \ u_x = 2x$$

لذا فإن شروط كوشي – ريمان لا تتحقق إلا في نقطة واحدة وهي $z = (0,0)$. وبناءً على ذلك نجد أن $f^{/}(0) = 0$.

شروط كوشي – ريمان في حالة الإحداثيات القطبية :
بفرض أن الدالة $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ والمشتقات الجزئية v_x, v_y, u_y, u_x موجودة في جوار ما للنقطة $z_0 = (x_0, y_0) \neq 0$ وجميعها متصلة في هذه النقطة . وإذا كانت x و y معطاة بالشكل القطبي فإن $v_\theta, v_r, u_\theta, u_r$ موجودة في نفس الجوار ومتصلة في النقطة z_0 .
إذا كانت شروط كوشي – ريمان $u_y = -v_x \ , \ u_x = v_y$ تتحقق في هذه النقطة فإن:

$$\begin{cases} r \ u_r = v_\theta \\ u_\theta = -r \, v_r \end{cases}$$

وهذه المعادلات هي معادلات كوشي-ريمان في حالة الإحداثيات القطبية.
للحصول على هذه المعادلات نفرض أن

$$u(r,\theta)=u(r\cos\theta, r\sin\theta)$$
$$v(r,\theta)=v(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

باشتقاق هـذه الدوال باستخـدام قاعـدة السلسلة للـدوال ذات المتغيـريـن نحصل على:

$$u_\theta=-u_x r\sin\theta+u_y r\cos\theta \qquad (1)$$

$$u_r=u_x\cos\theta+u_y\sin\theta \qquad (2)$$

$$v_\theta=-v_x r\sin\theta+v_y r\cos\theta \qquad (3)$$

$$v_r=v_x\cos\theta+v_y\sin\theta \qquad (4)$$

وباستبدال $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ في المعادلة (4) وبجمع (1) و (4) نحصل علـــى $u_\theta=-rv_r$ وبنفس الطريقة من المعادلات (2) و (3) نحصل على $ru_r=v_\theta$.

نظرية(الشرط الكافي):

إذا كـانت $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ معـرفــة في جوار ما للنقطة $z_0=r_0(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)\neq 0$ وإذا كانـــت المشـــتقات الجزئيـــة $v_\theta, v_r, u_\theta, u_r$ مـــوجودة فـــي هـــذا الجـــوار ومتصلـــة فـــي النقطـة (r_0,θ_0) وكانت هـذه المشتقات الجزئيـة تحقق شروط كوشـي- ريمـان في النقطة (r_0,θ_0) فإن $f'(z_0)$ موجودة وعلاوة على ذلك

$$f^{/}(z_0)=(\cos\theta_0-i\sin\theta_0)\big(u_r(r_0,\theta_0)+iv_r(r_0,\theta_0)\big)$$

مثال: إذا كانت $f(z)=z=(r\cos\theta+ir\sin\theta)$ فإن الشروط $u_\theta=-r\,v_r$ $r\,u_r=v_\theta$ تتحقق في جميع النقاط.
وعليه تكون

$$f^{/}(z)=(\cos\theta-i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

تمارين

1. أوجد النقاط (إن وجدت) التـــي تكــون فيها كل من الدوال التالية قابلة للاشتقاق:

1. $f(z)=z^2$ 2. $f(z)=(x^2-y^2)+2xyi$
3. $f(z)=2x+ixy^2$ 4. $f(z)=e^{x-iy}$

2. أثبت أن $f^{/}(z)$ ومشتقتها $f^{//}(z)$ موجودة لكل قيم z . ثم أوجد كل من $f^{/}(z)$ **و** $f^{//}(z)$ لكل من الدوال التالية:

1. $f(z)=iz+2$ 2. $f(z)=e^{-x}e-iy$
3. $f(z)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$ 4. $f(z)=z^3$

3. أثبت أن الدالة $r>0,-\pi<\theta<\pi$ $f(z)=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ قابلة للاشتقاق في مجالها . ثم أثبت أن $f^{/}(z)=\dfrac{1}{2f(z)}$.

4. أ درس قابلية التفاضل للدالة $f(z)=x^3+i(1-y)^2$ ثم أوجد $f^{/}(z)$.

5 . أ درس قابلية التفاضل للدالة $f(z)=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{re^{i\theta}}$ ثم أوجد $f^{/}(z)$.

إن الصفة التحليلية للدالة تجعلها تحقق الكثير مــن الخصائص مـما يجعل الدوال التحليلية تكون مجموعة مــن الدوال التي تنطبق عليها الكثير مــن النظريات .

تعريف: تسمى الدالـة $f(z)$ تحليلية (Analytic) في النقطـة z_0 اذا كانـت قابلة للاشتقاق في كل نقطة z من جوار ما لهذه النقطة . وتكــون الدالـة تحليليــة فــي المنطقة D إذا كانت تحليلية في كل نقطة من D .

مثال : إذا كانت $P(z)$ كثيــرة حـدود فإن $P(z)$ تحليلية لجميع النقـاط z .

فعلى سبيل المثال الدوال $f(z)=z^n$,.......... .., $f(z)=z^3$, $f(z)=z^2$

جميعها تحليلية في جميع النقاط z .

مثال : الدالة $f(z)=\bar{z}$ ليست تحليليـة فـي أي من النقاط لأنها غير قابلة للاشتقاق في أي من النقاط.

مثال : الدالة $f(z)=|z|^2$ ليسـت تحليليــة فــي أي مــن النقاط لأنــهـا قابلة للاشتقاق فقط في النقطة $z_0=0$ **.**

مثال: إذا علمت أن الدالة $f(z)=(x^2-y^2)+iv(x,y)$ تحليلية فأوجد الدالة $v(x,y)$.

الحـــــل: بمــــــا أن $u=(x^2-y^2)$ فــــــإن $u_x=2x=v_y$ و
$u_y=-2y=-v_x$ ومن هنا نجد أن $v_y=2x$ **و** $v_x=2y$
عندها وبحل المعادلة الأولى نحصل على $v=2xy+h(x)$
وبالتعويض في المعادلة الثانية نجد أن $2y+h'(x)=2y$ إذن
$h'(x)=0$ أي أن $h(x)=c$ إذن $v(x,y)=2xy+c$

وعليه تكون

$$f(z)=(x^2-y^2)+i(2xy+c).$$

الدوال التوافقية (Harmonic Functions):

تعريف: الدالة $h=h(x,y)$ تسمى توافقية في المنطقة D من المستوى الديكارتي xy إذا كانت المشتقات الجزئية من الدرجة الأولى والثانية موجودة ومتصلة وتحقق معادلة لابلاس $h_{xx}(x,y)+h_{yy}(x,y)=0$ في هذه المنطقة.

مثال : الدالة $h(x,y)=x^2-y^2$ توافقية ذلك ولأن $h_{xx}(x,y)=2$ و $h_{yy}(x,y)=-2$ لذلك نجد أن $h_{xx}(x,y)+h_{yy}(x,y)=0$.

نظرية: إذا كانت الدالة $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تحليلية في المنطقة D فإن كل من $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ عبارة عن دوال توافقية في المنطقة D.

الإثبات : بما أن الدالة $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تحليلية في المنطقة D فإن معادلات كوشي – ريمان تتحقق في المنطقة D أي أن

$$u_y=-v_x,u_x=v_y$$

وباشتقاق المعادلة الأولى بالنسبة للمتغير x والثانية بالنسبة إلى المتغير y وبجمع المعادلتين نحصل على

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=0$$

أي أن الدالة $u=u(x,y)$ توافقية في المنطقة D. وبنفس الطريقة باشتقاق المعادلة الأولى بالنسبة للمتغير y والثانية بالنسبة إلى المتغير x وبجمع المعادلتين نحصل على $v_{xx}(x,y)+v_{yy}(x,y)=0$ أي أن الدالة $v=v(x,y)$ توافقية في المنطقة D.

تمارين

1. أثبت أن الدوال التالية دوال تحليلية في المستوى المركب C

$$1.\ f(z)=3x+y+i(3y-x)$$
$$2.\ f(z)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$$

2. أثبت أن الدوال التالية ليست تحليلية في أي من نقاط المستوى المركب

$$1.\ f(z)=xy+iy$$
$$2.\ f(z)=e^{y}\,e^{ix}$$

3.أثبت أن كل من الدوال التالية هي دوال توافقية في المستوى المركب

$$1.\ u(x,y)=3x+y;$$
$$2.\ u(x,y)=\sin x\cosh y$$

4. إذا علمت أن $f(z)=(y^3-3x^2y)+iv(x,y)$ دالة تحليلية **.** أوجد $v=v(x,y)$.