ستاتيكا

العمليات الأساسية على القوى

الفصل الأول : العمليات الأساسية على القوى

الجدارة:

معرفة أنواع المتجهات وتطبيق مختلف العمليات الرياضيّة عليها. معرفة خصائص القوّة وتحليل وإيجاد محصّلة مجموعة قوى مستوية باستخدام الطريقة البيانيّة (Graphical method) والطريقة التحليليّة (Analytical method).

الأهداف:

عند الإنتهاء من دراسة هذه الوحدة يكون لديك القدرة على:

- تصنيف وتحليل المتجهات وتطبيق العمليات الرياضيّة عليها
- تحليل قوة إلى مركبتين بالطريقة البيانيّة والطريقة التحليليّة
- إيجاد محصّلة مجموعة قوى بالطريقة البيانيّة والطريقة التحليليّة
- التعامل مع القوى الموزّعة (distributed forces) وإيجاد محصّلاتها

مستوى الأداء المطلوب: أن يصل المتدرّب إلى إتقان هذه الجدارة بنسبة ١٠٠٪.

الوقت المتوقع للفصل: ٨ ساعات

الوسـائل المساعدة:

- آلة حاسبة
- مسطرة ومنقلة وفرجار وطقم مثلّثات
- ورق ميليمتري وأقلام ملوّنـة

متطلبات الجـدارة:

معرفة ما سبق دراسته في مقرر الرياضيات التخصصية وخاصة العمليّـات الرياضيّة على المتّجهات ومعرفة التعامل وتطبيق قوانين الزوايا والمثلثات (يمكن مراجعتها في الملحق A من هذه المذكّرة).

العمليات الأساسية على القوى

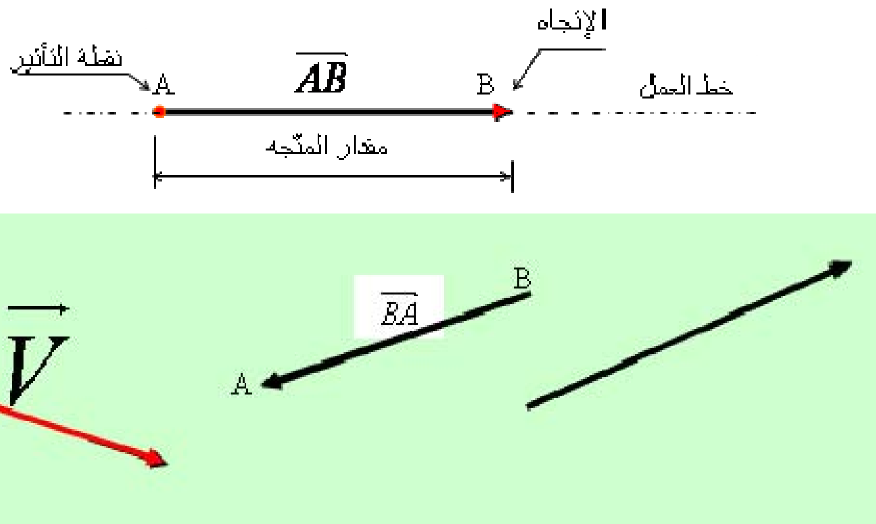
١- ١– أنــواع المتجهات:

تبحث الإستاتيكا في مواضيع تحتوي على كمّيات متّجهة (vectors) وأخرى غير متّجهة (scalars). تعرف الكمّيات غير المتّجهة من مقدارها فقط، ومن أمثلتها: الحجم، المساحة، الكتلة، الطول. وتعرف الكمّيات المتّجهة، وهي موضوع هذا الفصل، بأنّها كمّيات لها بصفة عامّة مقدار واتّجاه ونقطة تأثير وخط عمل، ومن أمثلتها: المتّجه، القـوّة، الإزاحة، الدّفع، ...

١- ١- ١- تعريف المتّجه:

المتّجه عبارة عن كمية مـتّجهة معرّفة بنقطة تأثير وخطّ عمل وبمقدار عددي واتجاه. ويمثل المتجه بخط مستقيم، طوله مناسب للمقدار العددي للمتجه، ينتهي بسهم يدل على اتجاه المتجه.

يرمز للمتجه بأول وآخر نقطة فيه وفوقها سهم أفقي مثل $\overrightarrow{AB}$ ويراعي عند ذلك أن يتطابق ترتيب الحرفين لإتّجاه سهم المتّجه. كما يمكن أن يرمز إلى المتجه بحرف واحد: مثل $\vec{V}$ ، $\vec{F}$ ، كما في الشكل (١- ١).



شـكـل (1 – 1)

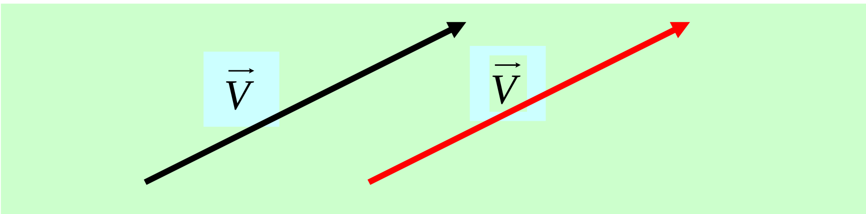
ملاحظة: أحيانا ، يمكن الإستغناء عن سهم المتجه لصعوبة التعامل معه، لذا وجب الإنتباه والتمييز بين الكميات المتجهة (vector) وغير المتجهة - القياسيّة أو العدديّة- (scalar).

١- ١- ٢- أنواع المتجهات:

تصنّف المقادير الفيزيائيّة المتّجهة إلى إحدى الأصناف الثلاثة التالية:

أ- **متجهات حرّة**: ويقصد بها متجهات غير مقيّدة بنقطة تأثير، فيمكن مّد خط عملها كما يمكن نقلها موازية لنفسها محتفظة بمقدارها، كما في الشكل (١- ٢).

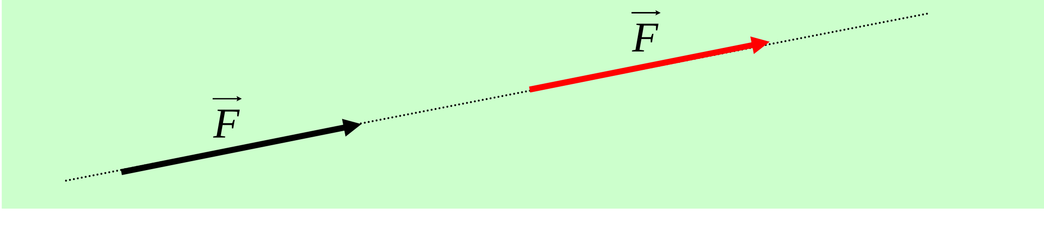
ومثال هذا متجه عزم الإزدواج كما سيأتي لاحقا.



شـكـل (١ – ٢)

ب- **متجهات منزلقة**: وهي متجهات مقيدة بخط عمل، تعمل في خطوط معيّنة لا تحيد عنها.

ومثال هذا المتجه القوّة المؤثرة على جسم متماسك، كما في الشكل (١- ٣) وسيأتي ذلك لاحقا.



شـكـل (١- ٣)

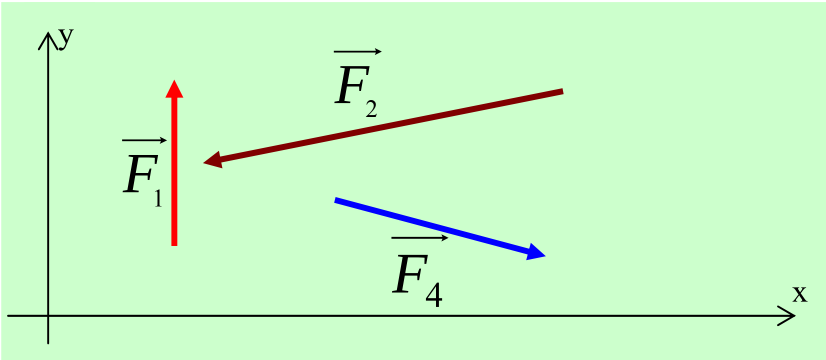
ج- **متجهات ثابتة**: وهي متجهات مقيّدة بنقطة تأثير فهي تؤثر في نقطة معيّنة. ومثال هذا المتجه تأثير قوّة ما على جسم غير صلب وقابل للتشوّه.

١- ١- ٣ - تصنيف مجموعات المتّجهات:

يمكن تصنيف مجموعات المتجهات إلى:

أ) المتجهات في مستوى و احد **Coplanar Vectors**:

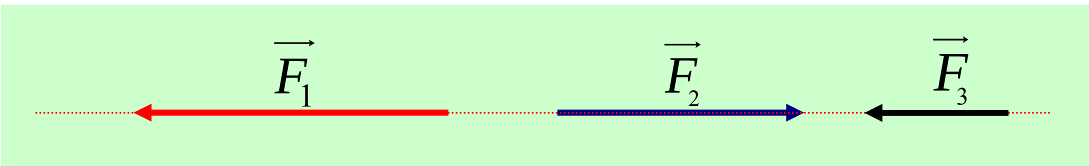
وهي المتجهات التي تقع في مستوى واحد ، كما هو مبين في الشكل رقم (١- ٤).



شكل (١- ٤)

ب) متجهات على نفس الخط **Colinear Vectors**:

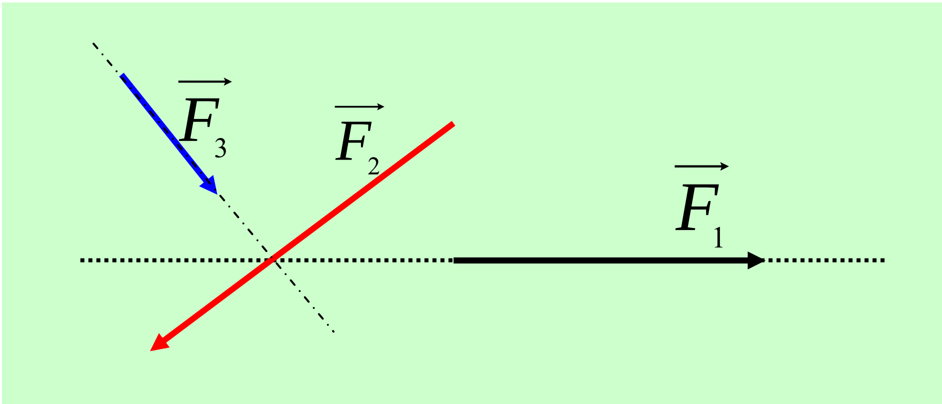
وهي متجهات تعمل أو تأثر في نفس الخط كما في الشكل(١- ٥).



شكل (١- ٥)

ج) متجهات متلاقية **Concurrent Vectors** :

وهي متجهات تتلاقى خطوط تأثيرها في نقطة مشتركة كما هو مبين في الشكل(١- ٦).

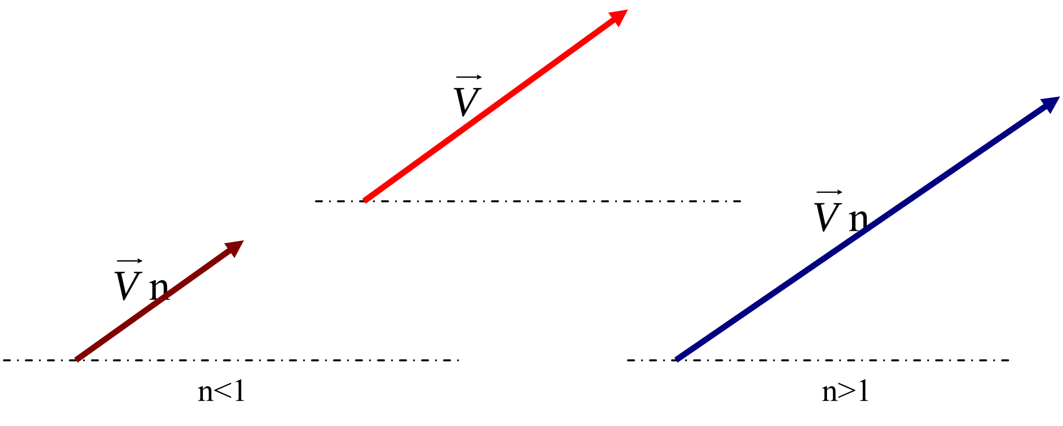


شكل (١- ٦)

١ - ٢- العمليات الرياضيّة على المتجهات:

١- ٢- ١- ضرب متجه في كمية قياسيّة:

إذا ضرب المتجه $\vec{V}$ في كميّة قياسيّة (عدديّة) n أنتج ذلك متجه جديد$\vec{V}$ n موازيا للأول ومقداره n من المرات من مقدار الأول، بزيادة أو نقصان كما في الشكل (١- ٧).



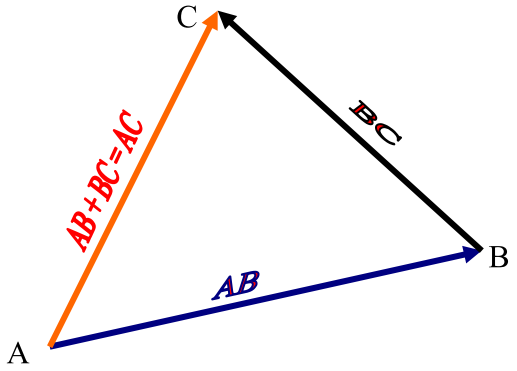
شكل (١ – ٧)

١- ٢- ٢- جمع المتجهات:

إذا انتقل شخص من مدينة A إلى مدينة B ثم إلى مدينة ثالثة C، كان انتقاله المحصّل هو المتّجه AC، ويمكن التعبير عن ذلك بالمعادلة الإتجاهيّة التالية:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

وعلامة (+) لا تعني جمع جبري وإنما تعني تركيب المتجهين AB و BC بواسطة مثلث كما في الشكل (١- ٨).

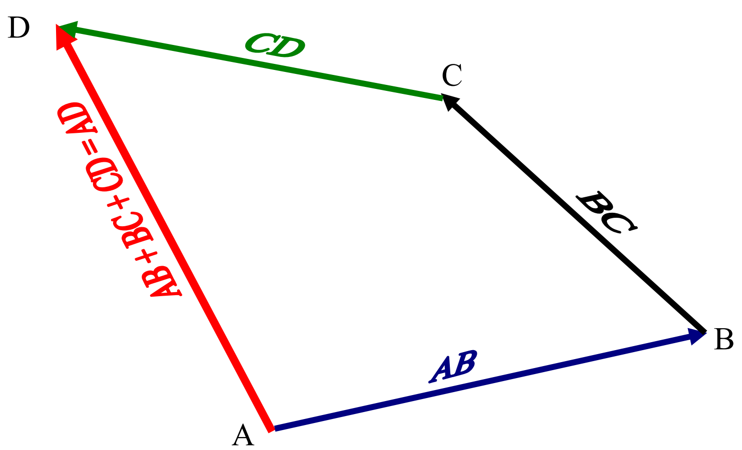


شكل (١ – 8)

ويمكن التدرّج بمفهوم الجمع الإتّجاهي إلى جمع عدّة متجهات بما يسمى مضلع المتجهات كما في الشكل (١- ٩)، حيث يمكن التعبير عن المجموع الإتجاهي للمتجهات AB و BC و CD بالمعادلة الإتجاهية التالية:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

وهذه المعادلة الإتجاهية تعني أن المتجه AD هو محصّلة المتجهات الثلاثة AB و BC و CD.



شكل (١ – ٩)

ويراعى في مضلع المتجهات أن يكون الإنتقال على أضلاع المضلع في اتجاه دائري واحد وأن المحصّلة هي المتجه الذي يقفل المضلع أي يصل بين أول نقطة فيه A وآخره نقطة D.

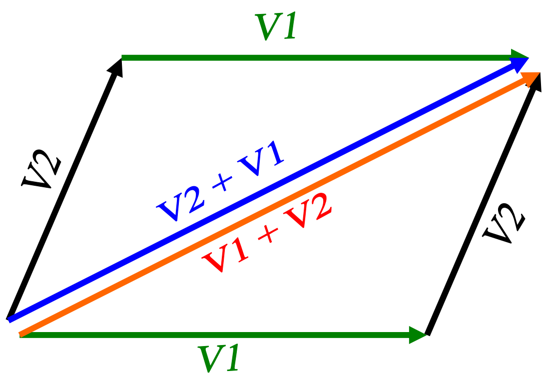
باستخدام فكرة جمع المتجهات ومفهوم ضرب المتجه في كميّة قياسية، يمكن إثبات القوانين الأساسية الآتية:

$$\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1}$$

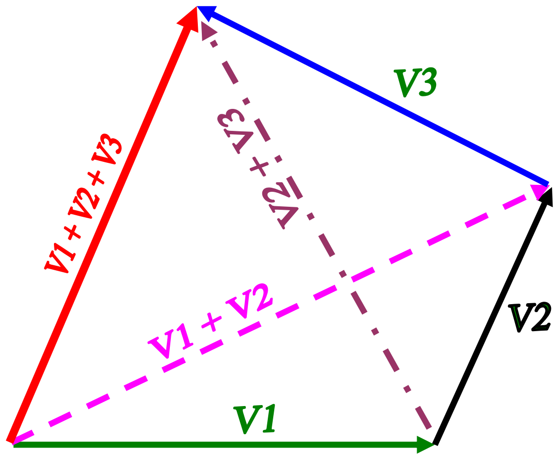
$$(\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}) + \overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{V_1} + (\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}) = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}$$

$$n(\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}) = n\overrightarrow{V_1} + n\overrightarrow{V_2}$$

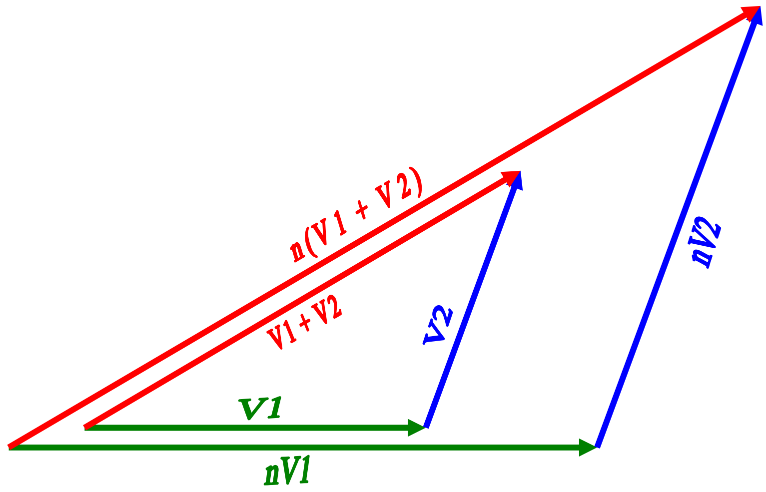
وبراهين القوانين السابقة موضحة على التوالي بالأشكال (١- ١٠) و(١- ١١) و (١- ١٢) التالية:



شـكـل (١ – ١٠)



شــكــل (١ – ١١)



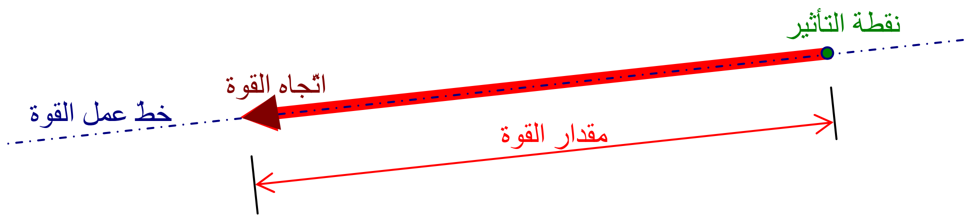
شــكــل (١ – ١٢)

١ –٣- تـعريـف القـــوّة:

تعرّف القوة (Force) بأنها أي فعل يغيّر أو يحاول أن يغيّر حالة جسم ما من السكون (static) إلى الحركة (motion) أو العكس.

وتمثل القوة بخط ذي سهم. ولا تتحدّد أي قوّة تحديدا كاملا إلا بمعرفة قيمتها، أو مقدارها (Magnitude) بدلالة وحدة معيّنة واتجاهها (direction) ونقطة تأثيرها (point of application)، كما يبين ذلك الشكل (١- ١٣).

واتجاه القوة يمكن أن يكون عمودي، أو رأسي، (Vertical) مثل قوّة الجاذبية، أو اتجاه أفقي (Horizontal) مثل قوّة الرّياح ، أو في اتجاه مائل (Inclined) مثل قـوّة الزلازل.

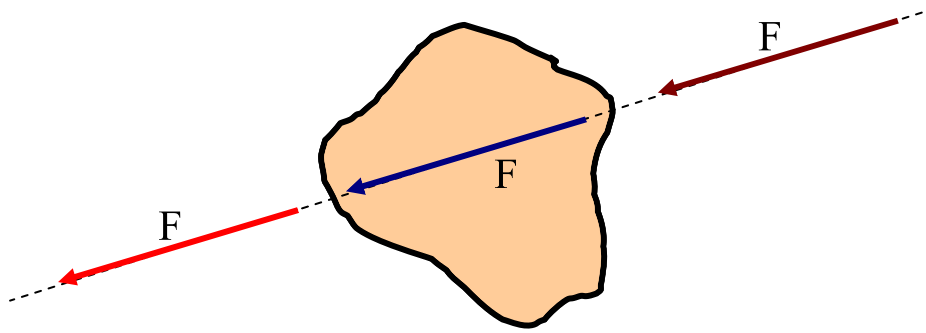


شـكـل (١- ١٣)

١- ٣-١- قـاعـدة قـابليّة الإنـتـقـال:

تنـصّ على جواز تطبيق قوّة ما في أي نقطة على خط عملها بدون تغيير التأثير الإجمالي لهذه القوّة الخارجيّة على الجسم (شكل (١- ١٤)). وبالتالي يجوز معاملة القوّة كمتّجه إنزلاقي عند دراسة التأثير الخارجي الكلي فقط.

فلتحديد القوّة بالكامل، من الضروري تحديد مقدارها واتجاهها وخطّ عملها.



شـكـل (١ – ١٤)

ملاحظة: أحيانا ، قد نستغني عن سهم المتجه لصعوبة التعامل معه، لذا وجب الإنتباه والتمييز بين الكميات المتجهة (vectors) وغير المتجهة، القياسيّة أو العدديّة (scalars).

١-٣-٢- وحـدة الـقـوّة (unit of force):

إن النظام العالمي للوحدات (International units System) أو ما يعرف إختصارا بوحدات SI، يعتمد على ثلاثة وحدات أساسية وهي: المتر(meter) m وهي وحدة الطول (length)، والكيلوغرام Kg (Kilogram) وهي وحدة الكتلة (Mass)، والثانية (second) s وهي وحدة الزمن (time).
تدعى وحدة القوة في النظام العالمي SI : نيوتن (Newton) ويرمز لها بحرف N، وهي القوة اللازمة لإعطاء جسم كتلته كيلوغراما واحدا (1 Kg) تسارعا (Acceleration) مقداره مترا واحدا في مربع الثانية ($1\ m/s^2$) أي أنّ:

$$\mathbf{1\ N = 1\ Kg.m/s^2}$$

إن قيمة التعجيل الأرضي (g) في النظام العالمي SI هي : $g = 9.81\ m/s^2 = 9.81\ N/Kg$
وتشتق قيمة الكتلة M من تجربة الجاذبية عندما يكون الوزن W :
$W = M.g$ أو $M = W/g$ وبهذا يعتبر الكيلوغرام وحدة للكتلة **(Mass)** وليس للقوّة.

عند التعبير عن مقادير الكميات، يستخدم التكرار أو كسور عشرية يعبر عنها برموز قياسيّة تسبق الوحدات. فمثلا بالنسبة لوحدات القوى نستخدم الوحدات التالية:

daN = 10 N الديكانيوتن (dekanewton)
KN = 1000 N = 100 daN الكيلونيوتن (kilonewton)
$\mathbf{MN = 10^6\ N = 1000\ KN = 10^5\ daN}$ الميجا نيوتن (Meganewton).

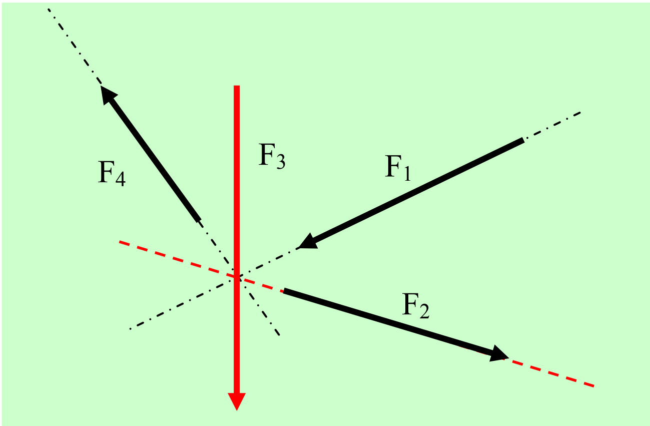
١- ٤- أنـواع مجموعات القوى (types of forces groups):

إن دراسة سلوك المنشآت والتصميم الإنشائي يعتمد على دراسة وتحليل القوى المؤثرة على المنشآت، بحيث تسمّـى القوى التي تؤثر على المنشآت أحـمـالا (Loads).
وتنقسم أنواع القوى إلى نوعين: قوى إستاتيكية (أو ساكنة) وقوى ديناميكية (متغيرة مع الزمن).
ويمكن تصنيف مجموعات القوى إلى قوى مستوية (planar forces) أي واقعة في نفس المستوى، وقوى غير مستوية (nonplanar forces) أي لا تقع في نفس المستوى. ثم يمكن تصنيفها بعد ذلك حسب أوضاع خطوط عمل قوى المجموعة إلى:

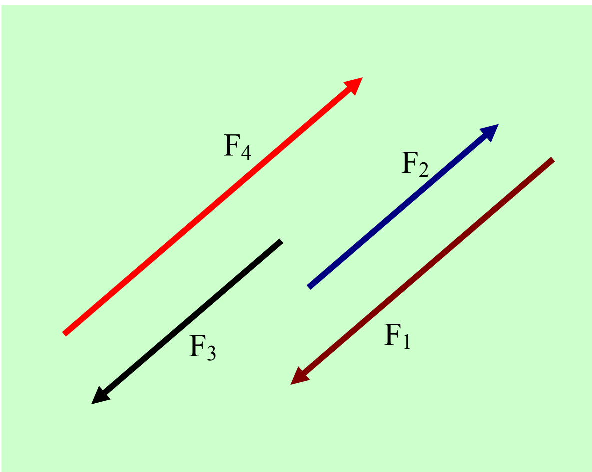
أ- قوى متلاقية (concurrent forces): تتلاقى خطوط عمل جميع قوى المجموعة في نقطة مشتركة كما في الشكل (١- ١٥).

ب- قوى متوازية (parallel forces): خطوط عمل جميع قوى المجموعة متوازية كما في الشكل (١- ١٦).

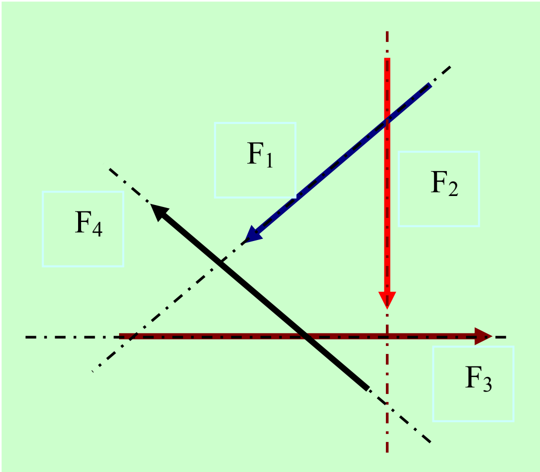
ت- قوى غير متلاقية (nonconcurrent forces): لا تتلاقى خطوط عمل جميع قوى المجموعة في نقطة واحدة مشتركة كما في الشكل (١- ١٧).



شكل (١ – ١٥)



شكل (١ – ١٦)



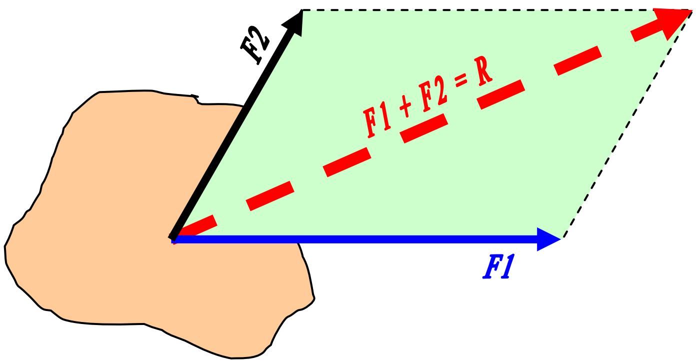
شـــكـل (١ – ١٧)

١- ٥- العمليـات على الـقوى:

١- ٥- ١- تركـيب وتـحـلـيـل الـقـوى:

القانون الأساسي في عمليات تركيب وتحليل القوي هو قانون متوازي أضلاع القوى (Parallelogram) (#) وينصّ على أنه إذا أثّـرت قـوّتان F_1 و F_2 بينهـما زاوية على جسم ما، فإن تأثيرهـما مـعا يعادل تأثير قوّة واحدة تسمّى المحصّلة (Resultant) يمكن تمثيلها من حيث المقدار والإتجاه بالقطر لمتوازي الأضلاع المشكّل من القوّتين F_1 و F_2 (شـكـل ١ – ١٨).

لمنع أي إلتباس، من المستحسن أن نرسم القوى F_1، F_2 بخطوط متّصلة، بينما نرسم المحصّلة R بخط متقطّع.



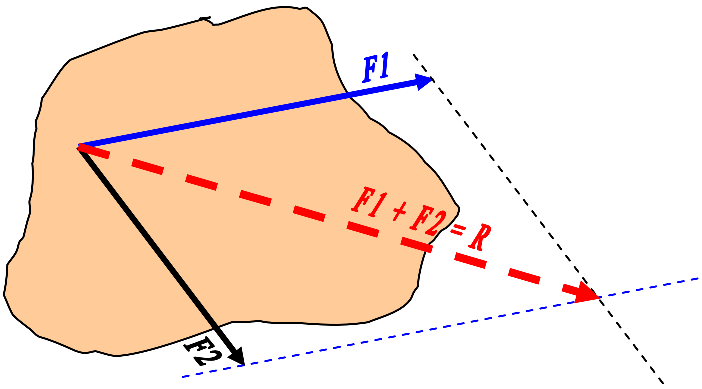
شـــكـل (١ – ١٨)

١- ٥- ٢- إيجاد محصّلة قوّتين بالطريقة البيانيّة (Graphical Method) :

في الطريقة البيانيّة، يتمّ رسم متجهات القوى باستخدام مقياس رسم مناسب. ويمكن جمع قوّتين F_1 و F_2 متلاقيتين في نقطة واحدة بواسطة قاعدة متوازي الأضلاع للحصول على محصلتهما R كما هو موضّح في الأمثلة التالية:

مثال ١- ١:

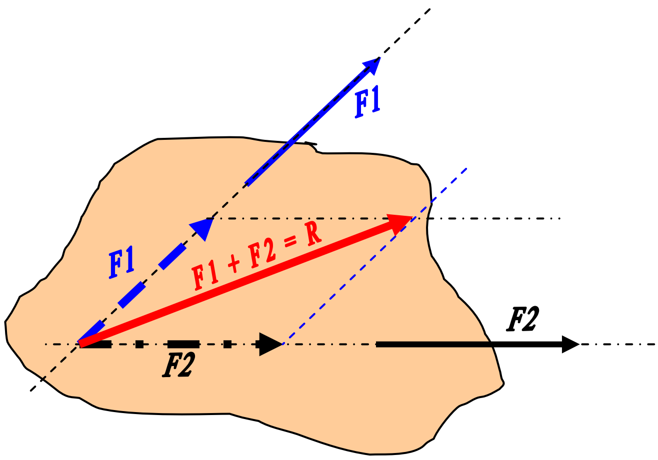
رسم محصّلة القوّتين F_1 و F_2 كما هو مبيّن في الشكل (١ – ١٩).



شكل (١ – ١٩)

مثال ١- ٢:

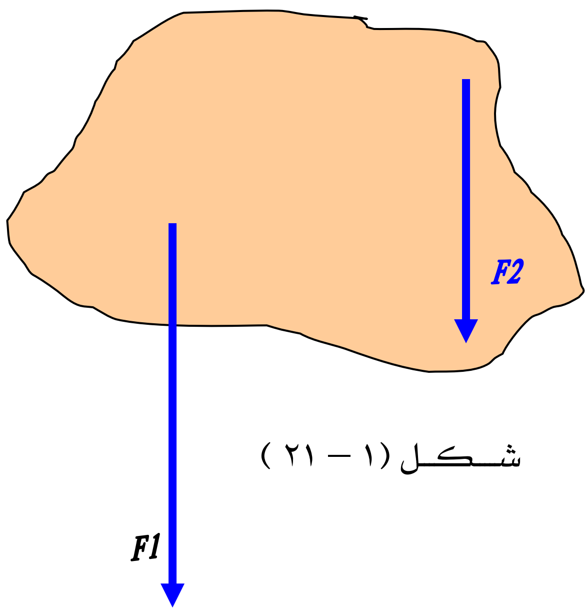
إذا كانت القوتان المتلاقيتان في نقطة واحدة تقعان في مستوى واحد، وكانت نقطة تأثير كل منهما تختلف عن الأخرى كما في الشكل (١ – ٢٠)، فيمكن تحريك كل منهما على إمتداد خط عملها طبقا لقاعدة الإنتقال لإكمال شكل متوازي الأضلاع ورسم المحصلة R من نقطة التلاقي. وتحل المحصلة R بدلا من القوّتين F_1 وF_2 بدون أي تغيير للتأثير الخارجي على الجسم.



شـكـل (١ – ٢٠)

مـثـال ١- ٣:

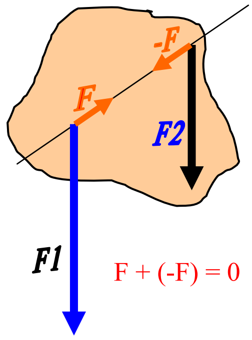
ارسم محصّلة القوتين المتوازنتين F_1 و F_2 كما هما مبيّنتان في الشـكـل (١ – ٢١).



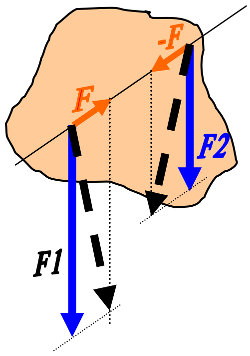
شـكـل (١ – ٢١)

الـحـل:

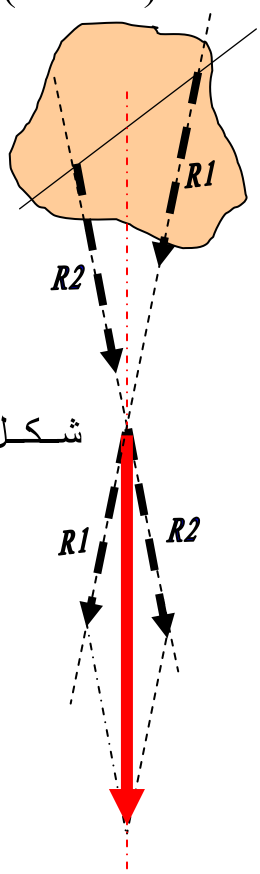
تنتج حالة خاصّة عندما تكون القوّتان F_1 وF_2 متوازيتين. يجوز إضافتهما أوّلاً قوتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الإتجاه وتقعان على خط واحد F و$-F$ كما هو موضح في الشكل (١- ٢٢- a) حيث لاتنتج هذه الإضافة أي قوّة خارجيّة على الجسم. بعد ذلك، يتم الحصول على R_1 كمحصلة F_1 وF، وعلى R_2 كمحصلة F_2 و($-F$) كما هو موضح في الشكل(١- ٢٢- b)، ثم تُجمع R_1 و R_2 للحصول على R وهي محصّلة القوّتين F_1 وF_2 كما هو موضّح على الشكل رقم (١- ٢٢- c).



شـكـل (١-٢٢- a)



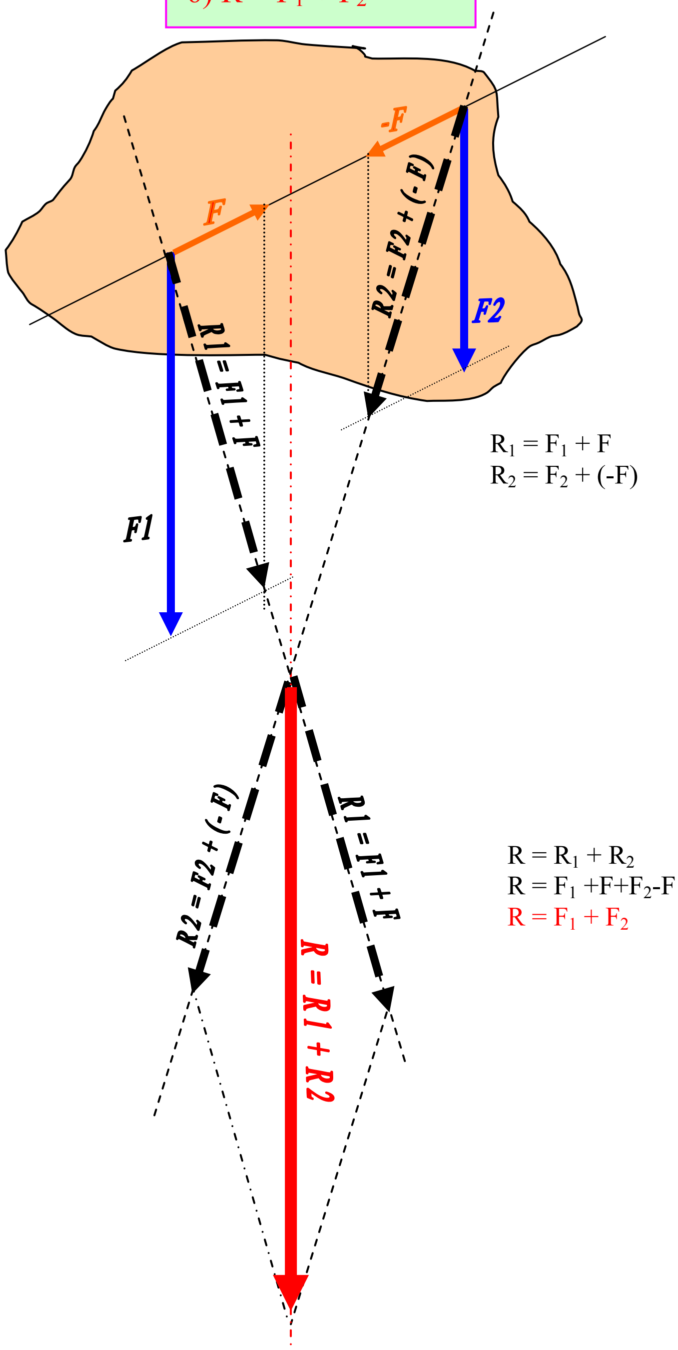
شـكـل (١-٢٢- b)



شـكـل (١-٢٢-

خطوات الحــــلّ :

1) $F + (-F) = 0$
2) $R_1 = F_1 + F$
3) $R_2 = F_2 + (-F)$
4) $R = R_1 + R_2$
5) $R = F_1 + F + F_2 - F$
6) $R = F_1 + F_2$



شـكـل (١-٢٢)

ملاحظة: يمكن استعمال هذه الطريقة للحصول على محصّلة قوّتين ذات نقطة تلاقي في مكان بعيد غير ملائم للرسم البياني.

١–٥- ٣ - إيجاد محصّلة مجموعة من القوى بالطريقة البيانيّة :

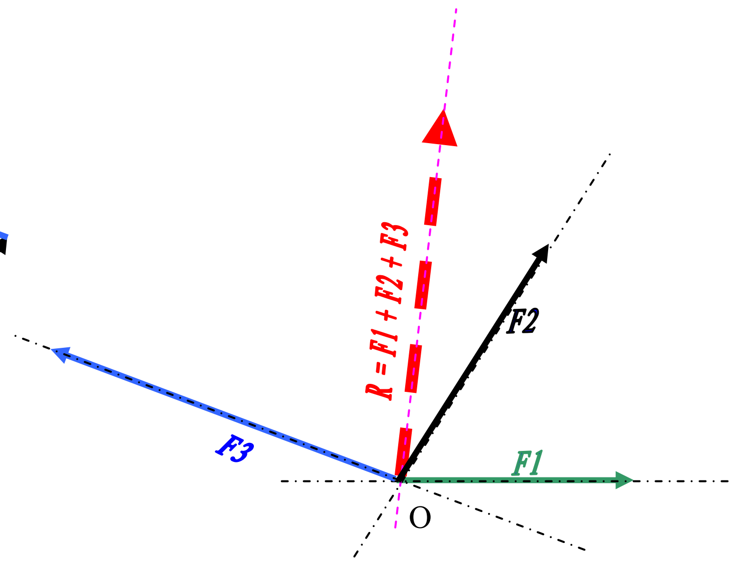
لتركيب، أو إيجاد محصّلة، مجموعة من القوى الملتقية (F_1،F_2 ، F_3، F_4 ، ...)، يتم رسم مضلع متجهات القوى بمقياس رسم مناسب وتوصل نقطة البداية بنقطة النهاية للحصول على المحـصّـلة R مقدارا واتجاها كما سبق بيانه في باب المتجهات. أمّا خط عمل المحصّلة فإنه يمرّ بنقطة تلاقي القوى.

كما يمكن إيجاد محصلة مجموعة من القوى المتلاقية R مقدارا واتجاها وخط عمل باستعمال طريقة متوازي الأضلاع، كما هو مبيّن في المثال التالي.

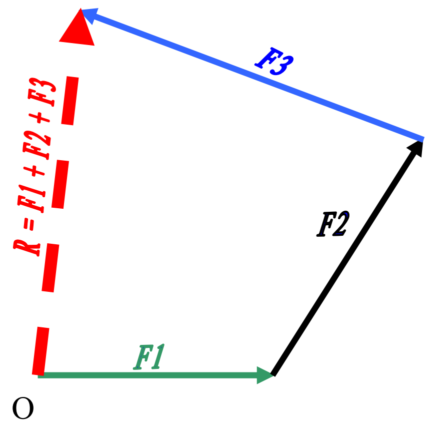
مـثـــال ١- ٤:
اوجد محصّلة القوى F_1 و F_2 و F_3 الموضحة في الشكل (١- ٢٣) بإستعمال الطريقة الـبـيـانـيـة .

١- طريقة مضلع القوى:
يُحدّد مقياس واحد لرسم جميع القوى.
من النقطة O يتم رسم متجه موازي وبمقدار القوّة F_1. ومن نهاية هذا المتجه يُرسم متجه موازي وبمقدار القوة F_2 كما هو مبين في الشكل رقم (١- ٢٤).
ثم من نهاية متجه F_2 يتم رسم متجه موازي وبمقدار القوة F_3 . يتم الحصول على محصلة القوى الثلاثة R بوصل بداية المتجه الأول ونهاية المتجه الثالث كما هو مبين في الشكل (١- ٢٤).
وأخيرا يتمّ قياس طول المتجه R الذي يعطي قيمة محصلة القوى الثلاثة. كذلك يمكن قياس الزاوية المحصورة بين المحصلة والمحور الأفقي باستعمال المنقلة.

ملاحظة: تعتبر الطريقة البيانية لإيجاد محصلة القوى بسيطة ، ولكنها غير دقيقة.



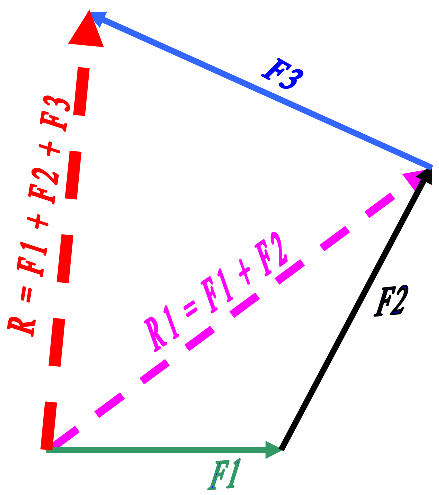
شـكـل (١- ٢٣) :
خطوط عمل القوى



شـكـل (١- ٢٤) :
مـضـلـع القوى

ويلاحظ أن المحصّلة R هي كما في الشكل (١ – ٢٥):

$$R = F_1 + F_2 + F_3$$
$$R_1 = F_1 + F_2$$
$$R = R_1 + F_3$$



شـكـل (١ – ٢٥)

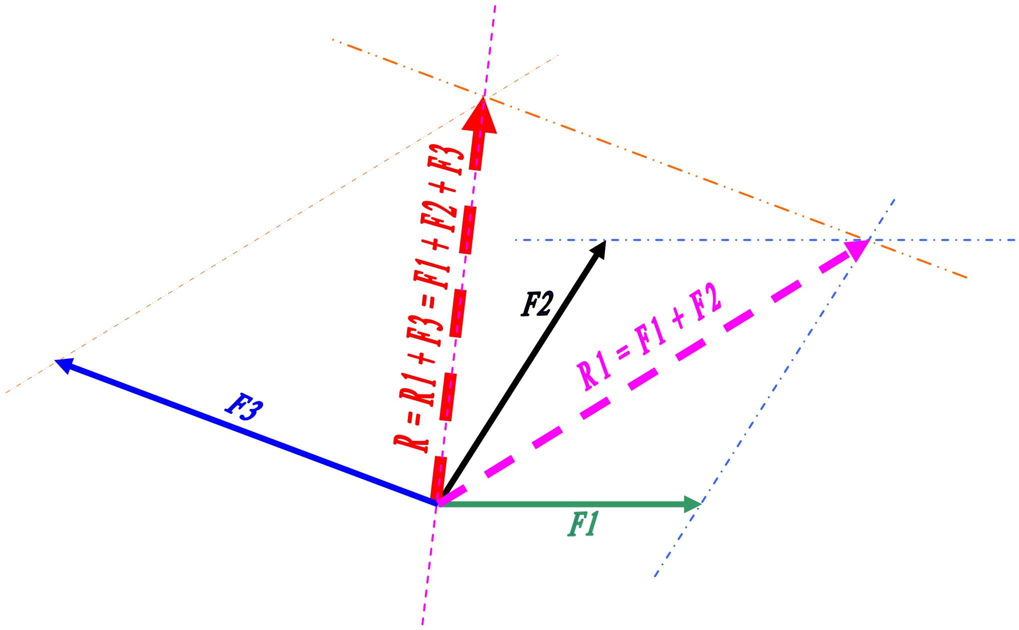
٢- طريقة متوازي الأضلاع:

يتم تشكيل متوازي الأضلاع لإيجاد محصّلة F_1 و F_2 :

$$R_1 = F_1 + F_2$$

ثم تشكيل متوازي أضلاع R_1 و F_3 للحصول على المحصّلة R كما في الشكل (١ – ٢٦):

$$R = R_1 + F_3$$



شـكـل (١ – ٢٦)

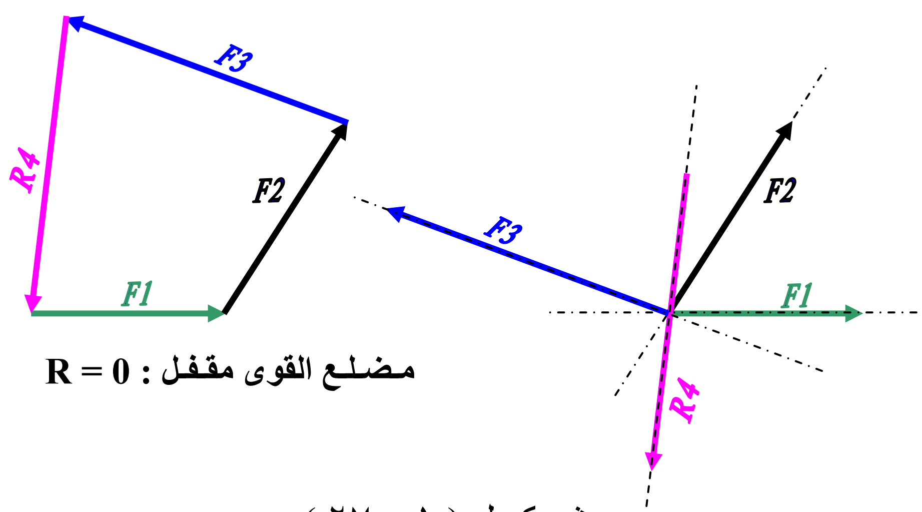
١ – ٦ - إتــــزان الـقـوى:

إذا وقعت نقطة النهاية في مضلع القوى على نقطة البداية ، قيل أن مضلع القوى مـقـفل، وتتلاشى في هذه الحالة محصّلة القوى R. وعلى هذا فالشرط البياني لتلاشي محصلة مجموعة من القوى المتلاقية هو أن يكون مضلع القوى مقفلا : وهذا هو شرط إتزان هذه القوى.

مـثـــال ١- ٥:

يـوضّـح الـشـكـل (١ – ٢٧) أنّ القوى الأربعة مـتّـزنة ، وبالـتالــي فإنّ:

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 0$$



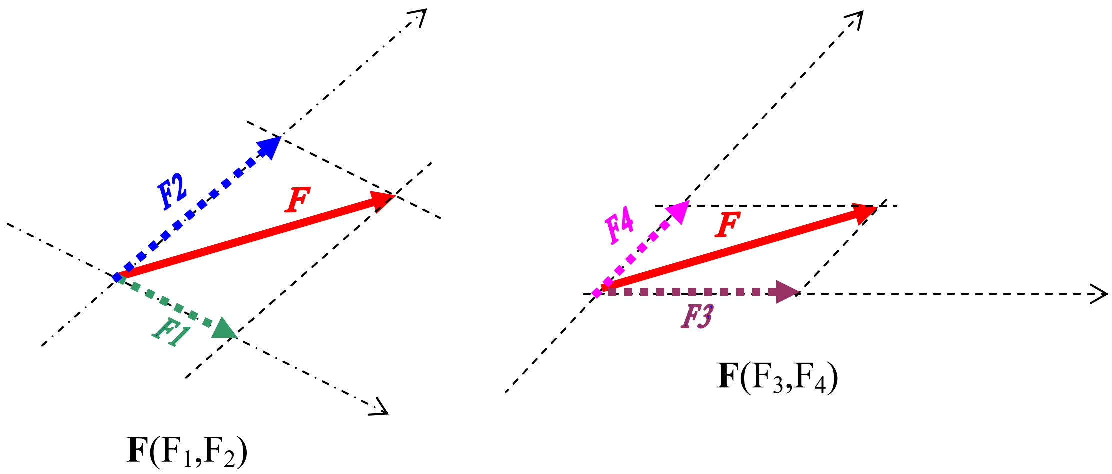
شــكـــل (١ – ٢٧)

١ – ٧ - إيجاد محصّلة مجموعة من القوى بـالطريقة الـتـحليـليّـة :

١ – ٧ - ١ - تحليل قوّة إلى مركّبتين :

استنادا إلى قانون متوازي الأضلاع، يمكن تحليل قوّة إلى مركّبتين (two components)، كما هو مبيّن في الأشكال التالية.

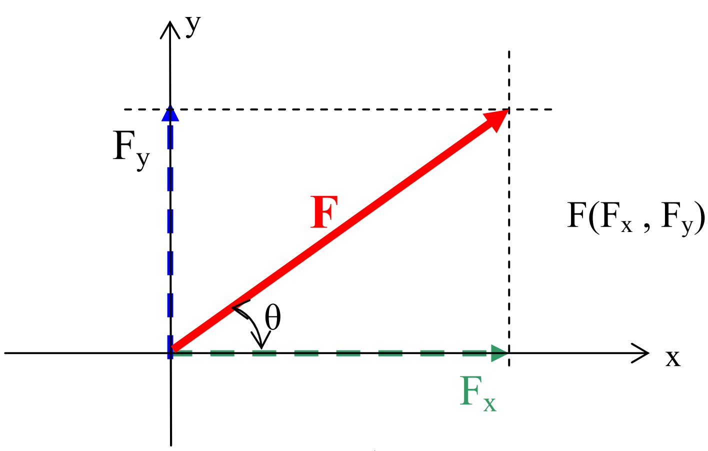
لمنع أي إلتباس، من المستحسن أن رسم مركّبات القوّة بالخطوط المتقطّعة ، بينما تُرسم القوّة بخط متّصل.



شـكـل (١ – ٢٨)

يطلق على أي متجهين يساوي حاصل جمعهما (المحصّلة) F بمركّبات تلك القوّة كما في الشكل (١- ٢٨). فالمتجهان F_1 و F_2 هما مركّبتان في الإتجاهين ١ و ٢ على الترتيب للقوّة F. وبالمثل المتجهان F_3 و F_4 هما مركّبتان في الإتجاهين ٣ و ٤ على الترتيب لنفس القوّة F.

من المعتاد التعامل مع المركّبات المتعامدة، فالمتجهان F_x و F_y من الشكل (١- ٢٩) هما مركّبتان في الإتجاهين x و y للقوّة F. وفي هذه الحالة، يصبح متوازي الأضلاع مستطيلا.



شـكـل (١ – ٢٩)

إن طريقة تحليل القوّة F إلى مركّبتين متعامدتين F_x و F_y هي طريقة العمل الشائعة. ومن خلال الشكل السابق يتّضح أن:

$$F_x = F\cos(\alpha)$$
$$F_y = F\sin(\alpha)$$

حيث α هي الزاوية بين المحور الأفقي والقوّة F.

واعتمادا على الشكل السابق ، يمكن إيجاد F بمعرفة مقدار محصلة القوّتين المتعامدتين F_x و F_y وبالطريقة التحليليّة التالية:

$$F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}}$$
$$\alpha = Tan^{-1}\left(F_y / F_x\right)$$

حيث α هي الزاوية التي تحدّد خط عمل المحصّلة F.

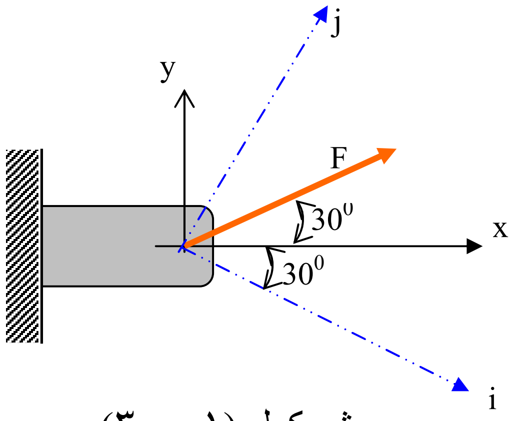
وتقدّم الأشكال التالية بعض الأمثلة عن حالات تحليل القوى في اتّجاهين.

مثال ١- ٦ :

سلّطت القوّة $F = 100\ N$ على الحامل الموضّح في الشكل (١- 30). احسب المركّبات العموديّة للقوّة F :

١- في اتجاه x و y .

٢- في اتجاه i و j .

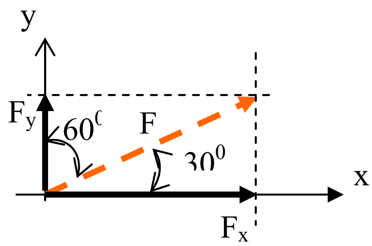


شـكـل (١ – ٣٠)

الـحـل:

١- إن المركّبتين في الإتجاهين x و y للقوة F موضحة في الشكل (١- ٣٠) التالي وهما:

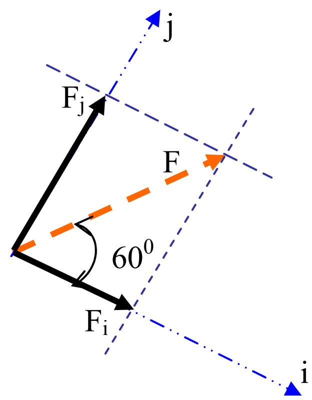
$F_x = 100\cos30 = 100\sin60 = 86.6$ N
$F_y = 100\sin30 = 100\cos60 = 50$ N



شـكـل (١ – ٣١)

2- إن المركّبتين في الإتجاهين i و j للقوة F موضحة في الشكل (١ - ٣٢) التالي وهما:

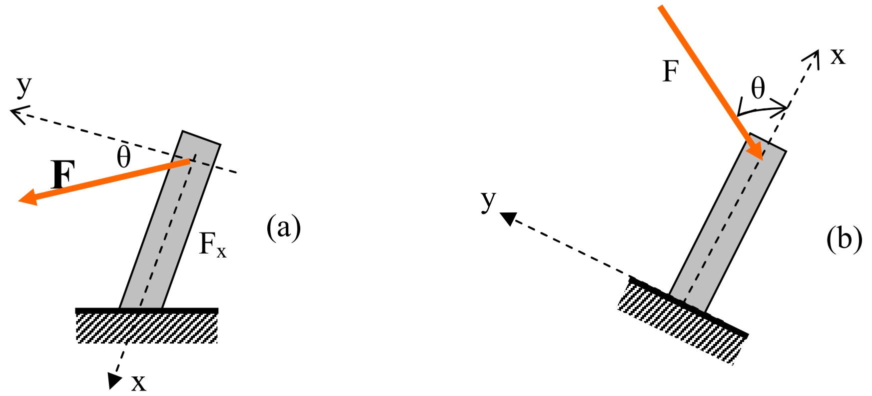
$F_i = 100\cos 60 = 100\ \sin30 = 50$ N
$F_j = 100\sin 60^0 = 100\ \cos30 = 86.6$ N



شـكـل (١ – ٣٢)

مـثــال١- ٧:

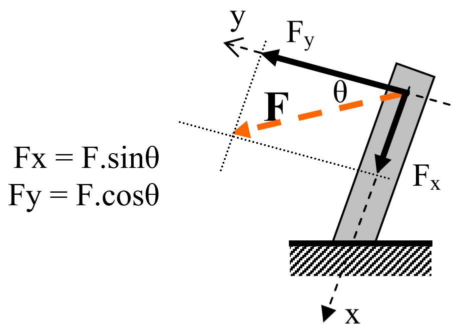
احسب المركّبات العموديّة للقوّة F في الحالتين التاليتين الموضحتين في الشكل (١ - ٣٣) :



شـكـل (١ – ٣٣)

الحـــل:

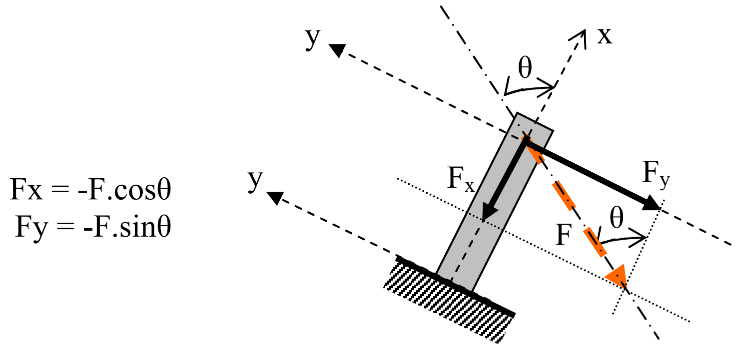
بالنسبة للشكل (a) فإن نتـائجها واضحة بإسقاطها على المحاور x و y كما هو مبيّن في الشكل (١- ٣٤):



شـكـل (١ – ٣٤)

أما بالنسبة للشكل (b) فيمكن تحريك القوّة على خط عملها ، ثم إسقاطها على المحاور x و y كما في الشكل (١- ٣٥):

حيث يلاحظ أن قيمتي المركبتين F_x، F_y سالبين لأنهما في الاتجاه المعاكس للاتجاه الموجب للمحورين.



شـكـل (١ – ٣٥)

١–٧ - ٢ - إيجاد محصّلة مجموعة من القوى بالطريقة التحليليّة:

لإيجاد R كمحصّلة مجموعة قوى متلاقية (F_1، F_2، F_3، ...) بالطريقة التحليليّة،يلزم اتباع الخطوات التالية:

١- تحليل كل قوّة على حدة إلى مركّباتها المتعامدة في الإتجاهين الأفقي x والرأسي y:

$$F_1(F_{1x}،F_{1y})\text{ ، }\quad F_2(F_{2x}،F_{2y})\text{ ، }\quad F_3(F_{3x}،F_{3y})\text{ ، }\ldots$$

٢- جمع مركّبات القوى في كل إتجاه على حده لإيجاد مقدار مركّبتي المحصّلة R_x و R_y :

$$R(R_x،R_y)$$
$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots$$

٣- تطبيق قاعدة فيثاغورس لإيجاد مقدار المحصّلة R:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

٤ – يقع تحديد إتجاه المحصّلة بحساب الزاوية α المحصورة بين خط عمل المحصّلة والمحور الأفقي:

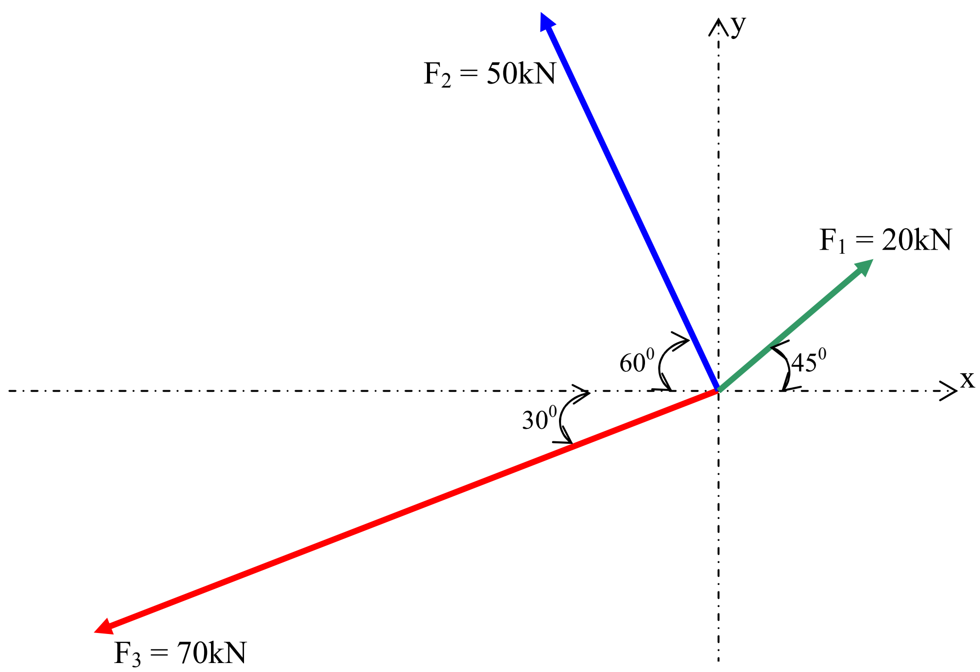
$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \alpha = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

مـثـــال ١- ٨ :

أوجد محصلة القوى الثلاثة المبينة في الشكل رقم (١- ٣٦) حيث :

$F_3 = 70$ kN، $F_2 = 50$ kN، $F_1 = 20$ kN

ثم ارسم المحصّلة وبيّن واحسب الزاوية المحصورة بين المحصّلة والمحور الأفقي.

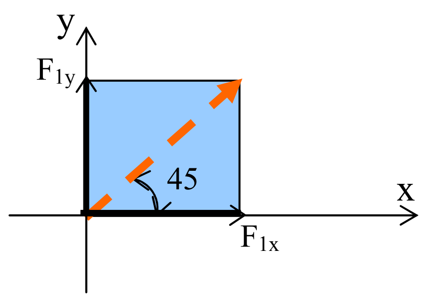


شـكـل (١ ـ ٣٥)

الحـــل :

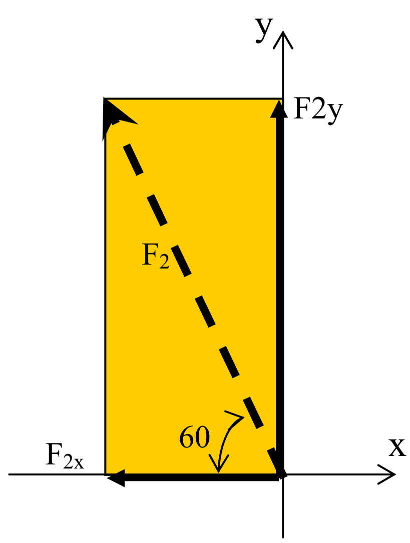
١- كما هو موضح في الأشكال التالية يتم تتحليل كل قوة إلى مركبتيها في اتجاه المحور x والمحور y.

- تحليل القوّة F_1:



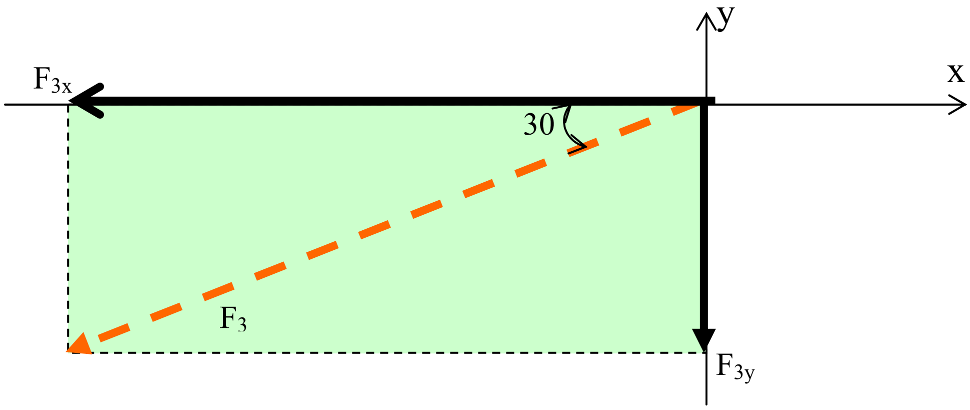
$$F_{1x} = 20\times\cos(45^0) = 14.14 \text{ kN}$$
$$F_{1y} = 20\times\sin(45^0) = 14.14 \text{ kN}$$

- تحليل القوّة F_2:



$$F_{2x} = -50\times\cos(60^0) = -25 \text{ kN}$$
$$F_{2y} = 50\times\sin(60^0) = 43.30 \text{ kN}$$

- تحليل القوّة F_3



$$F_{3x} = -70\times\cos(30^0) = -60.62 \text{ KN}$$
$$F_{3y} = -70\times\sin(30^0) = -35 \text{ KN}$$

٢- جمع مركّبات القوى في كل إتجاه على حده لإيجاد مقدار مركّبتي المحصّلة R_x و R_y :

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 14.14 - 25 - 60.62 = -71.48 \text{ KN}$$

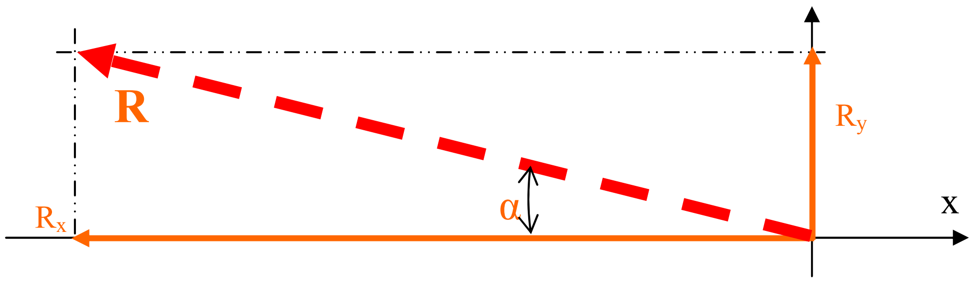
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 14.14 + 43.30 - 35 = 22.44 \text{ KN}$$

$$R(R_x ، R_y) = (-71.48 \text{ KN} ، 22.44 \text{ KN})$$

٣- تطبيق قاعدة فيثاغورس لإيجاد مقدار المحصّلة R:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$R = \sqrt{(-71.48)^2 + (22.44)^2} = 74.92KN$$

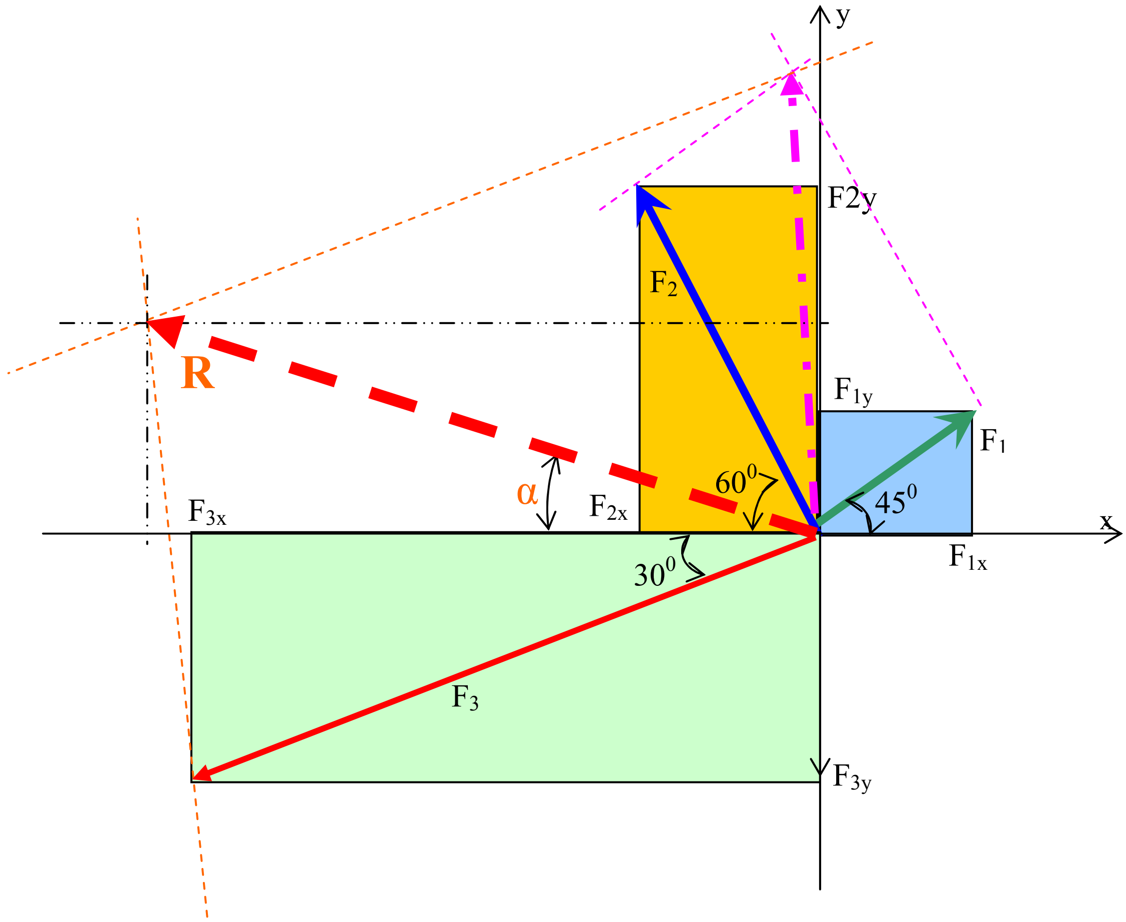


٤ – تحديد إتجاه المحصّلة بحساب الزاوية α المحصورة بين خط عمل المحصّلة والمحور الأفقي:

$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \alpha = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

$$\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{22.44}{71.48}\right) = 17.43^{0}$$

الشـكـل (١ – ٣٧) يجمع ويوضّح جميع خطوات الحل السابق.



شـكـل (١ – ٣٧)

١–٧ -٣- محصّلة القوى الموزّعة (distributed forces):

تسمّى القوى التي تؤثر على المنشآت أحمالا (Loads). وقد تكون الأحمال (القوى) عمودية - أو رأسية - Vertical كما هو الحال في غالب الأحيان بفعل الجاذبية الأرضية، أو أفقية Horizontal مثل قوى الناتجة عن الرياح ، أو في اتجاه مائل Inclined مثل القوى الناتجة عن الزلازل.

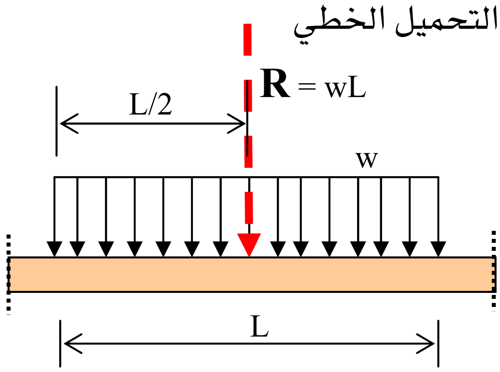
تكون القوى أو الأحمال إما:

- مركّزة (concentrated forces) في نقطة واحدة، وتستخدم مثلا في تقدير الأحمال المنقولة عن طريق الأعمدة أو في تقدير أحمال الكمرات الثانويّة المحمّلة على كمرات رئيسه.
- أو موزّعة (distributed forces)، وهذا النوع ينقسم إلى نوعين أساسيين:

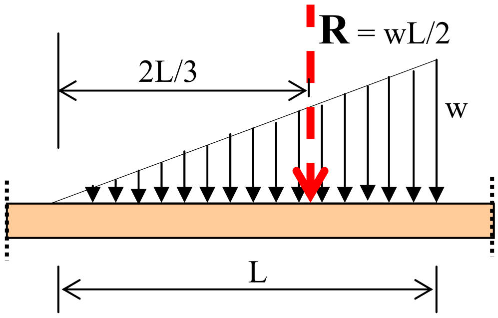
أ – **التوزيع الخطي**: عندما توزّع قوّة على طول خط، عندئذ يعبّر عن الشدّة (Intensity) كقوّة بوحدة طول الخط، ووحدتها الرئيسيّة النيوتن بالمتر الطولي (N/m). ويستخدم الحمل الخطي مثلا في تقدير الأحمال التي تؤثر على الكمرات كوزنها ووزن الحوائط التي فوقها، وكذلك الأحمال الناتجة عن البلاطات المؤثرة عليها.

وتوضّح الرسومات الموضّحة في الشكل (١- ٣٨) أهم ثلاثة أنواع ومحصّلات الأحمال أو القوى الموزّعة خطّيا.

w : شدّة التحميل الخطي



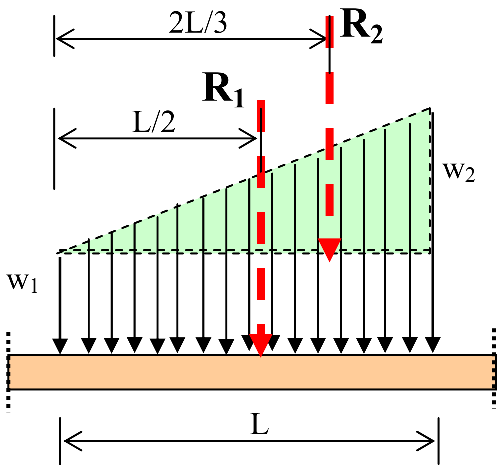
(**a**) : قوى موزّعة بانتظام
(uniformly distributed)



(**b**) : قوى متغيّرة خطّيا
(شكل مثلث linearly varying)

$\mathbf{R_1} = w_1 L$
$\mathbf{R_2} = (w_2 - w_1)L/2$

(**c**) : قوى متغيّرة خطّيا
(شكل شبه منحرف trapezoidal)



شـــكـــل (١ – ٣٨)

ويلاحظ في كل حالة من الحالات السابقة أن المحصّلة تمرّ من المركز الهندسي للشكل الذي ترسمه الشدّة والطول الذي وزّعت عليه القوّة.

ب- التوزيع المساحي (أو الحمل السطحي): عندما توزّع القوى على مساحة، عندئذ يعبّر عن الشدّة (Intensity) كقوّة بوحدة المساحة، ووحدتها الرئيسيّة النيوتن بالمتر المربّع (N/m^2). ويستخدم الحمل السطحي مثلا في تحديد أوزان البلاطات وما يؤثّر عليها من أحمال مختلفة.

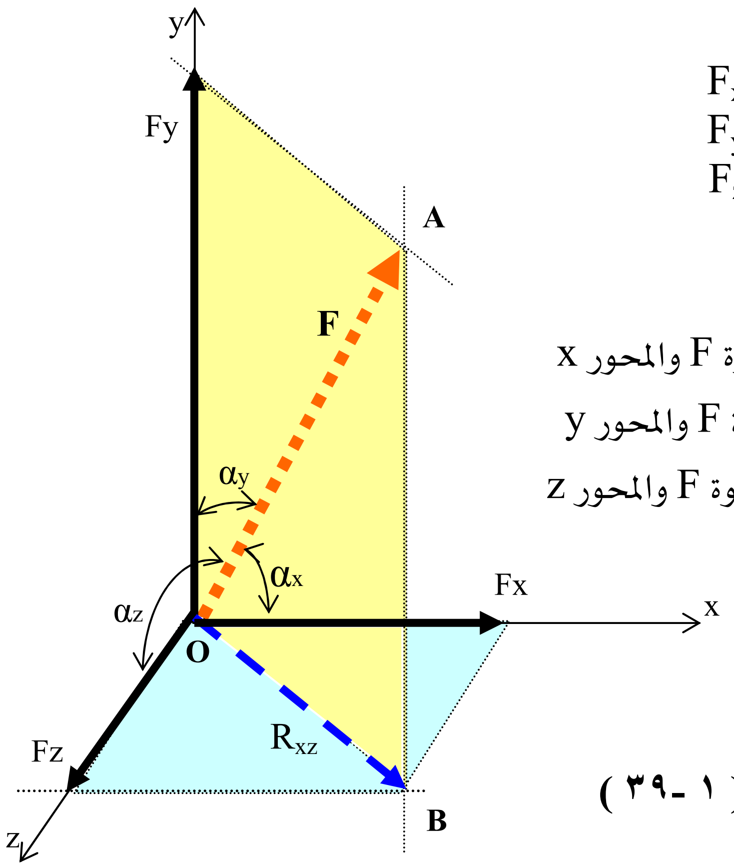
١- ٨- القوى المؤثرة في البعد الثالث:

في الفقرات السابقة كانت القوى تؤثر في مستوى (البعد الثنائي).

تتطلّب مسائل عديدة في علم الميكانيكا ، ومنها الإستاتيكا وتحليل الإنشاءات، تحليل وتركيب القوى المؤثرة في البعد الثالث (الفضاء).

فالقوة في البعد الثالث لها ثلاث مركبات (F_x ,F_y ,F_z) حسب المحاور x، y، z .

والشكل (١ – ٣٩) يوضح تحليل القوة F إلى مركّباتها المتعامدة الثلاثة. ويلاحظ أن عمليّة التحليل أو التركيب تعتمد على عدد (٢) من متوازي الأضلاع.



$$F_x = F\,Cos(\alpha_x)$$
$$F_y = F\,Cos(\alpha_y)$$
$$F_z = F\,Cos(\alpha_z)$$

حيث أن:

α_x هي الزاوية بين القوة F والمحور x

α_y هي الزاوية بين القوة F والمحور y

α_z هي الزاوية بين القوة F والمحور z

شكل(١ ـ٣٩)

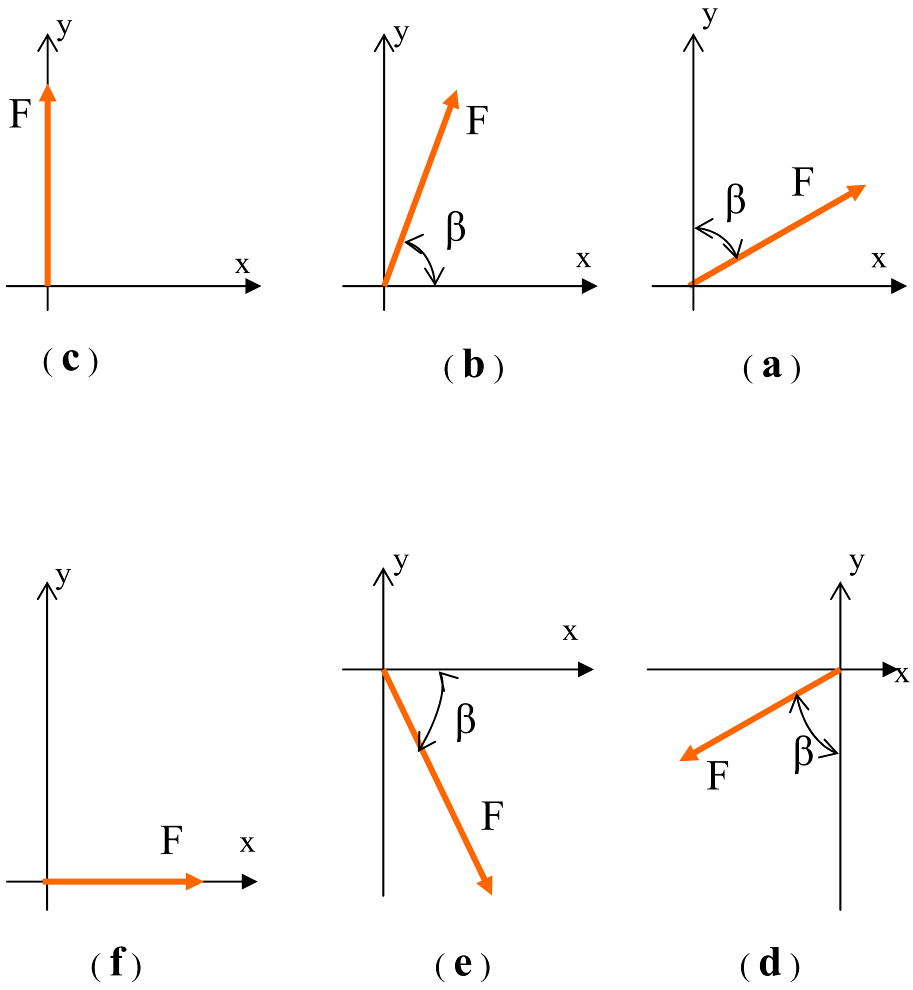
وعليه يصبح مقدار محصلة المركّبات (القوى) الثلاثة F يـساوي:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

١-٩- تــمـــاريـــن:

ت١- ١:

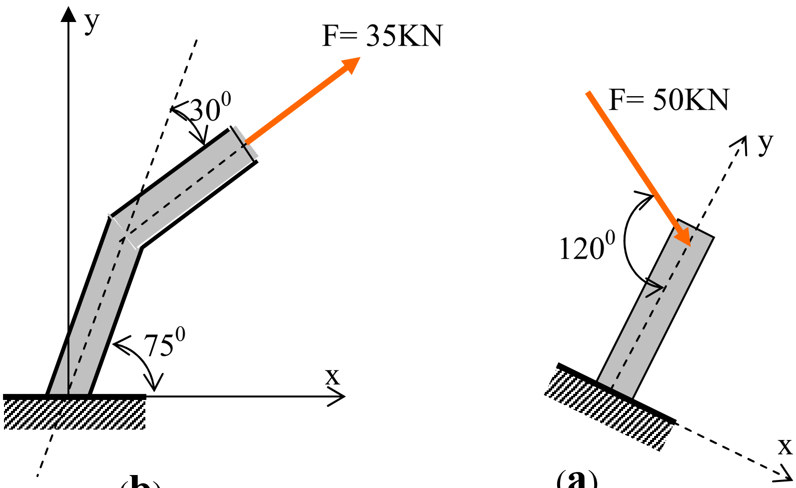
أرسم واحسب مركّبتي القـوّة F في جميع الحالات التالية : $F = 10\ KN$ ، $\beta = 60^0$



شـكـل (ت ١- ١)

ت١- ٢ :

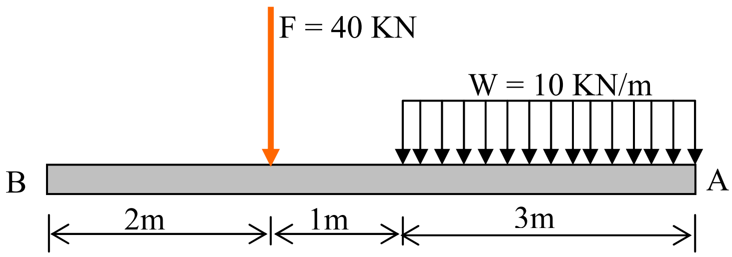
في الحالتين التاليتين: ارسم واحسب مركبتي القوة F في اتجاه المحاور x و y .



شـكـل (ت١-٢)

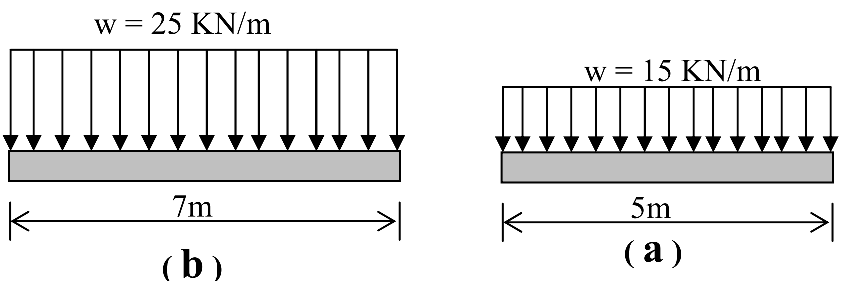
ت١- ٣ : أوجد محصلة القوى R المؤثرة على الكمرة كما هو موضّح في الشكل (١- ٣) باستعمال الطريقة البيانية. أحسب مقدار المحصّلة.

[الجواب: R = 70 kN، خط عملها يبعد 2.93m عن الطرف A]



شـكـل (ت١- ٣)

ت١–٤ : احسب وبيّن محصلة القوي الموزّعة علي الكمرة في الحالة **(a)** و **(b)**.

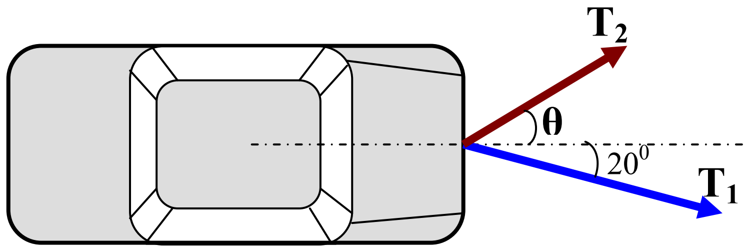


شـكـل(ت١- ٤)

ت١- ٥ : في طريقك إلى الكليّة لحضور محاضرة الإستاتيكا، تعطّلت سيارتك فوقع سحبها بواسطة حبلين. فإذا كانت محصلة الشدين في الحبلين هي $F = 600\ N$ في اتجاه محور السيارة، أوجد:

أ – الشد في كل من الحبلين إذا كانت الزاوية $\theta = 30^0$.

ب – أوجد أقل زاوية θ حتى يكون الشد T_2 أقل ما يمكن.

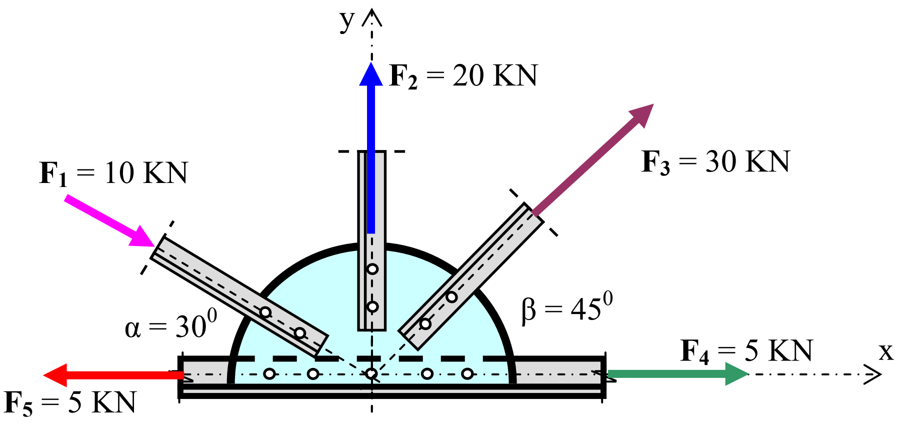


شـكـل (ت ١ – ٥)

ت١–٦ :

أوجد المحصلة R للقوى الخمسة المؤثرة على لوح التقوية المبينة في الشكل (ت ١- ٦) باستعمال الطريقة البيانية. ثم أوجد الزاوية θ_x المحصورة بين المحصلة والمحور الأفقي.

تحقق من النتيجة باستخدام الطريقة التحليلية.



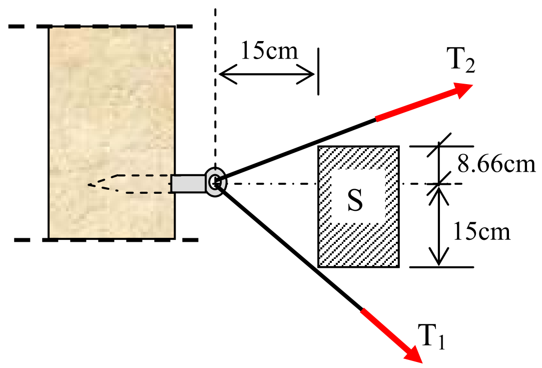
شـكـل (ت ١ - ٦)

ت١–٧ :

أثناء إشرافك على إحدى المشاريع الإنشائيّة، تعرّضت إلى الحالة التالية:

المطلوب إزالة المسمار من قطعة الخشب بتسليط قوّة على إمتداد محوره الأفقي، ونظرا لوجود العائق (S) لا تستطيع القيام بذلك، عليه يمكن استخدام قوّتين إحداهما $T_1 = 2$ kN والثانية T_2 بواسطة الكوابل كما هو موضّح بالشكل (ت١ - ٧).

فهل لك أن تحسب مقدار T_2 اللازمة لتوليد الشد على إمتداد محور المسمار؟



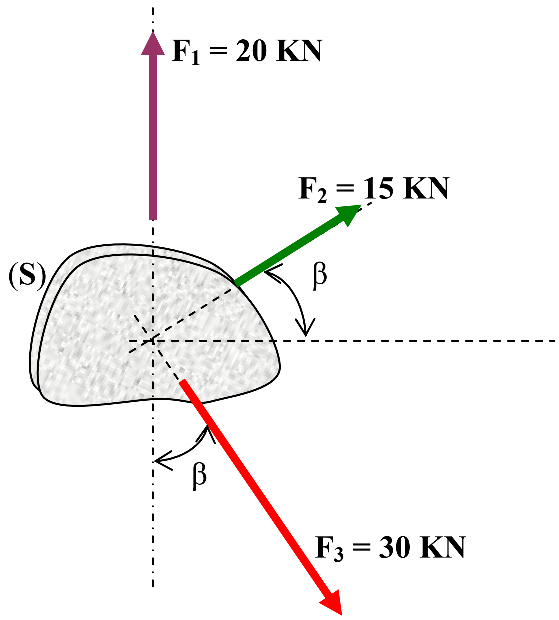
شـكـل (ت ١ – ٧)

ت١–٨ : بعد أن تم إصلاح سيارتك، اتّصلت بزميلك في الفصل حتى تتدارك محاضرة الإستاتيكا التي تغيّبت عنها. فأعلمك أن المدرّب طلب حل التمرين التالي:

ثلاث قوى متلاقية تؤثر في نفس المستوى على الجسم (S) كما هو مبين في الشكل (ت ١ - ٨).

أوجد قيمة الزاوية β بحيث يكون اتجاه محصلة القوى الثلاثة أفقية. أوجد مقدار محصلة القوى في هذه الحالة.

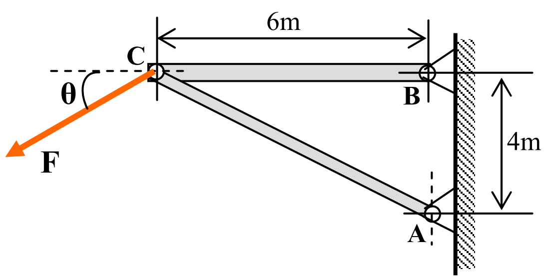
[الجواب: $\beta = 26.83^0$ ، $R = 26.92$ kN]



شكل (ت ١ – ٨)

ت ١ – ٩ : لغاية جماليّة عند تصميم العنصرين AC وBC المكوّنين للحامل (ABC)، المطلوب البحث عن أكبر قيمة للزاوية θ لتعيين اتجاه القوّة F بحيث لا تزيد قيمة مركّبتها على امتداد CA عن ٨٠٪ من قيمة مركبتها على امتداد BC .

[الجواب: $\theta = 53^0$]



شكل (ت١- ٩)

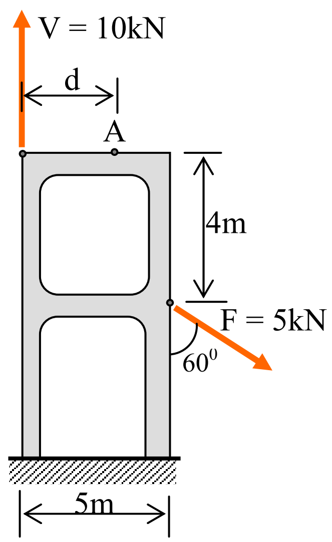
ت ١ – ١٠ :

المطلوب إستبدال القوتين اللتين تؤثران على الهيكل بقوة مكافئة واحدة R في النقطة A .

أ- أوجد قيمة R .

ب- احسب المسافة d إلى النقطة A .

إستخدم الطريقة التحليليّة مع الإستعانة بطريقة الرسم البياني.

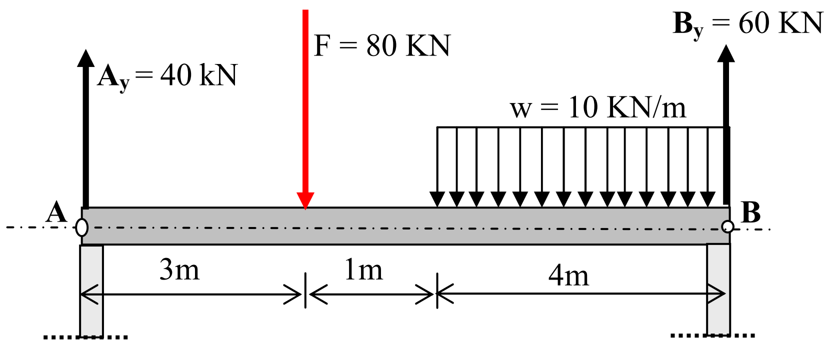


شكل (ت ١ – ١٠)

ت ١ – ١١:

الكمرة المبينة في الشكل (ت ١ – ١١) واقعة تحت تأثير مجموعة قوى:

أوجد قيمة محصّلة مجموعة القوى مع تحديد خط عملها.

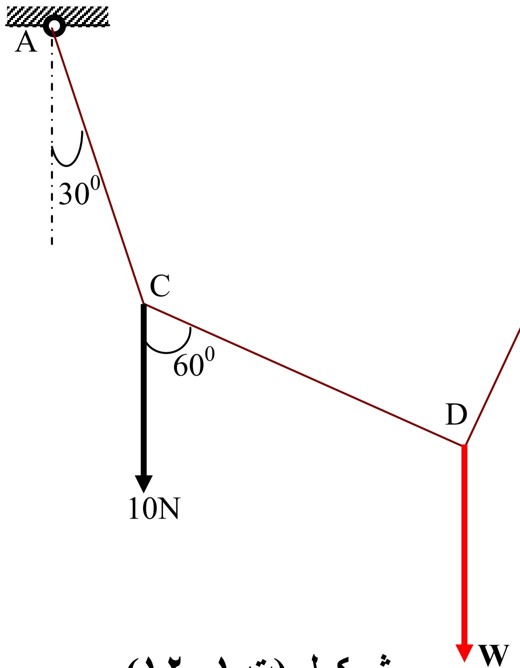


شكل (ت ١ – ١١)

ت١- ١٢:

خيط خفيف ABCD يحمل ثقلين أحدهما قيمته 10N في B و الآخر مجهول القيمة W في C وكانت أجزاء الخيط AB، BC ، CD، تميل على الرأسي بزاوية قدرها 30^0 و 60^0 و 30^0 على الترتيب كما هو موضّح في الشكل (ت١- ١٢).

أوجد قيمة الحمل الثاني W ؟



شـكـل (ت ١ـ ١٢)