المتميز

فى
الرياضيات البحتة
التفاضل و التكامل

الجزء النظرى
و
حلول التمارين
الوحدة الأولى

لوهـ | س |	نهـــا س ← ∞	ءص / ءس	$\int$

إعداد : أحمد الشنتورى

الصف الثالث الثانوى
القسم العلمى

الوحدة الأولى

١ – ١ الاشتقاق و تطبيقاته

تذكر ما يلى :

[١] معدل تغير الدالة د عند النقطة (٩ ، د (٩)) =

نهـــا (و ← ٠) [د (٩ + و) – د (٩)] / و بشرط أن تكون النهاية موجودة

= د/ (٩) " مشتقة الدالة د عند نفس النقطة "

= ميل المماس لمنحنى الدالة د عند نفس النقطة

= ظل الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس لمنحنى الدالة د عند نفس النقطة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

[٢] قواعد الاشتقاق :

(١) إذا كانت : د (س) = ٩ حيث : ٩ ∈ ح

فإن : د/ (س) = صفر

(٢) إذا كانت : ص = سن حيث : ن ∈ ح

فإن : ص/ = ن سن – ١

ملاحظات :

١) إذا كانت : ص = س فإن : ص/ = ١

٢) إذا كانت : ص = ص = ٩ سن حيث : ن ، ٩ ∈ ح

فإن : ص/ = ٩ ن سن – ١

٣) إذا كانت : ص = √س فإن : ص/ = ١ / (٢ √س)

(٣) إذا كانت : د (س) = ع (س) ± ى (س)

فإن : د/ (س) = ع/ (س) ± ى/ (س)

(٤) إذا كانت : د (س) = ع (س) · ى (س) فإن :

د/ (س) = ع (س) · ى/ (س) + ى (س) · ع/ (س)

(٥) إذا كانت : د (س) = ع (س) / ى (س) فإن :

د/ (س) = [ى (س) ع/ (س) – ع (س) ى/ (س)] / [ى (س)]٢

حيث : ى (س) ≠ صفر

(٦) قاعدة السلسلة :

إذا كانت : ص = د (ع) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى ع

، ع = ر (س) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : ص = (د ○ ر) (س) = د [ر (س)]

تكون : قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

و يكون : ءص/ءس = ءص/ءع × ءع/ءس أى أن :

ء/ءس (د [ر (س)]) = د/ [ر (س)] × ر/ (س)

(٧) إذا كانت : ص دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : ء/ءس (صن) = ن صن – ١ × ءص/ءس

أحمد الشنتورى

(٨) إذا كانت : ص = [د (س)]^{ن}

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ن [د (س)]$^{ن - ١}$ × د$^{/}$(س)

(٩) إذا كانت : ص = $\sqrt{د (س)}$

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{د^{/}(س)}{٢ \sqrt{د (س)}}$

(١٠) اشتقاق الدوال المثلثية الأساسية :

١) إذا كانت : د (س) = حا س

فإن : د$^{/}$ (س) = حتا س

٢) إذا كانت : د (س) = حتا س

فإن : د$^{/}$ (س) = – حا س

٣) إذا كانت : د (س) = طا س

فإن : د$^{/}$ (س) = قا^{٢} س

و بصفة عامة :

١] إذا كانت : ع = د (س) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

١) و كانت : ص = حا ع فإن : ص$^{/}$ = حتا ع × ع$^{/}$

٢) و كانت : ص = حتا ع فإن : ص$^{/}$ = – حا ع × ع$^{/}$

٣) و كانت : ص = طا ع فإن : ص$^{/}$ = قا^{٢} ع × ع$^{/}$

٢] (١) إذا كانت : ص = حا^{ن} د (س)

فإن : ص$^{/}$ = ن حا$^{ن - ١}$ د (س) × حتا س × د$^{/}$(س)

(٢) إذا كانت : ص = حتا^{ن} د (س)

فإن : ص$^{/}$ = – ن حتا$^{ن - ١}$ د (س) × حا د (س) × د$^{/}$(س)

(٣) إذا كانت : ص = طا^{ن} د (س)

فإن : ص$^{/}$ = ن طا$^{ن - ١}$ د (س) × قا^{٢} د (س) × د$^{/}$(س)

اشتقاق مقلوبات الدوال المثلثية الأساسية

(١) إذا كانت : د (س) = طتا س

فإن : د$^{/}$ (س) = – قتا^{٢} س

(٢) إذا كانت : د (س) = قا س

فإن : د$^{/}$ (س) = قا س طا س

(٣) إذا كانت : د (س) = قتا س

فإن : د$^{/}$ (س) = – قتا س طتا س

و بصفة عامة :

١] إذا كانت : ع = د (س) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

١) و كانت : ص = طتا ع فإن : ص$^{/}$ = – قتا^{٢} ع × ع$^{/}$

٢) و كانت : ص = قا ع فإن : ص$^{/}$ = – قا ع طا ع × ع$^{/}$

٣) و كانت : ص = قتا ع فإن : ص$^{/}$ = – قتا ع طتا ع × ع$^{/}$

٢] (١) إذا كانت : $\text{ص} = \text{حا}^{\text{ن}}\,\text{د}(\text{س})$

فإن : $\text{ص}' = \text{ن}\ \text{حا}^{\text{ن}-١}\,\text{د}(\text{س}) \times \text{حتا}\ \text{س} \times \text{د}'(\text{س})$

(٢) إذا كانت : $\text{ص} = \text{حتا}^{\text{ن}}\,\text{د}(\text{س})$

فإن : $\text{ص}' = -\,\text{ن}\ \text{حتا}^{\text{ن}-١}\,\text{د}(\text{س}) \times \text{حا}\,\text{د}(\text{س}) \times \text{د}'(\text{س})$

(٣) إذا كانت : $\text{ص} = \text{طا}^{\text{ن}}\,\text{د}(\text{س})$

فإن : $\text{ص}' = \text{ن}\ \text{طا}^{\text{ن}-١}\,\text{د}(\text{س}) \times \text{قا}^{٢}\,\text{د}(\text{س}) \times \text{د}'(\text{س})$

حل تمارين (١ – ١) صفحة ٨ بالكتاب المدرسى

إذا كانت : د ، ر ، ع دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س أكمل ما يلى باستخدام القيم المعطاة فى الجدول المقابل

س	١	٢
د (س)	– ١	٤
ر (س)	٢	١
د' (س)	١	٥
ر' (س)	٢	– ٣

(١) $\text{ع}(\text{س}) = ٣\,\text{د}(\text{س}) - ٢\,\text{ر}(\text{س})$

فإن : $\text{ع}'(١) = ...$

(٢) $\text{ع}(\text{س}) = \text{د}(\text{س})\,[\,٥ + \text{ر}(\text{س})\,]$

فإن : $\text{ع}'(٢) = ...$

(٣) $\text{ع}(\text{س}) = \text{د}(\text{س}) \div [\,\text{ر}(\text{س}) + ٢\,]$

فإن : $\text{ع}'(١) = ...$

(٤) $\text{ع}(\text{س}) = \text{د}\,[\,\text{ر}(\text{س})\,]$

فإن : $\text{ع}'(١) = ...$

(٥) $\text{ع}(\text{س}) = \text{ر}\,[\,٣\text{س} - \text{د}(\text{س})\,]$

فإن : $\text{ع}'(٢) = ...$

(٦) $\text{ع}(\text{س}) = [\,\text{س}^{٣} + \text{ر}(\text{س})\,]^{-٢}$

فإن : $\text{ع}'(١) = ...$

الحل

(١) $\because \text{ع}(\text{س}) = ٣\,\text{د}(\text{س}) - ٢\,\text{ر}(\text{س})$

$\therefore \text{ع}'(\text{س}) = ٣\,\text{د}'(\text{س}) - ٢\,\text{ر}'(\text{س})$

$\therefore \text{ع}'(١) = ٣\,\text{د}'(١) - ٢\,\text{ر}'(١) = ٣ \times ١ - ٢ \times ٢ = ٣ - ٤ = -١$

(٢) $\because \text{ع}(\text{س}) = \text{د}(\text{س})\,[\,٥ + \text{ر}(\text{س})\,]$

$\therefore \text{ع}'(\text{س}) = \text{د}'(\text{س}) \times [\,٥ + \text{ر}(\text{س})\,] + \text{د}(\text{س}) \times \text{ر}'(\text{س})$

$\therefore \text{ع}'(٢) = \text{د}'(٢) \times [\,٥ + \text{ر}(٢)\,] + \text{د}(٢) \times \text{ر}'(٢)$

$= ٥ \times [\,٥ + ١\,] + ٤ \times (-٣) = ٣٠ - ١٢ = ١٨$

(٣) $\because \text{ع}(\text{س}) = \text{د}(\text{س}) \div [\,\text{ر}(\text{س}) + ٢\,] = \dfrac{\text{د}(\text{س})}{\text{ر}(\text{س}) + ٢}$

$\therefore \text{ع}'(\text{س}) = \dfrac{[\,\text{ر}(\text{س}) + ٢\,] \times \text{د}'(\text{س}) - \text{د}(\text{س}) \times \text{ر}'(\text{س})}{[\,\text{ر}(\text{س}) + ٢\,]^{٢}}$

$\therefore \text{ع}'(١) = \dfrac{[\,\text{ر}(١) + ٢\,] \times \text{د}'(١) - \text{د}(١) \times \text{ر}'(١)}{[\,\text{ر}(١) + ٢\,]^{٢}}$

$= \dfrac{[\,٢ + ٢\,] \times ١ - (-١) \times ٢}{[\,٢ + ٢\,]^{٢}} = \dfrac{٦}{١٦} = \dfrac{٣}{٨}$

(٤) $\because \text{ع}(\text{س}) = \text{د}\,[\,\text{ر}(\text{س})\,]$

$\therefore \text{ع}'(\text{س}) = \text{د}'\,[\,\text{ر}(\text{س})\,] \times \text{ر}'(\text{س})$

أحمد الشنتورى

∴ $\text{ن}'(١) = \text{د}'[\text{ر}(١)] \times \text{ر}'(١) = \text{د}'(٢) \times \text{ر}'(١)$

$= ٥ \times ٢ = ١٠$

(٥) ∵ $\text{ن}(\text{س}) = \text{ر}[٣\text{س} - \text{د}(\text{س})]$

∴ $\text{ن}'(\text{س}) = \text{ر}'[٣\text{س} - \text{د}(\text{س})] \times [٣ - \text{د}'(\text{س})]$

∴ $\text{ن}'(٢) = \text{ر}'[٣ \times ٢ - \text{د}(٢)] \times [٣ - \text{د}'(٢)]$

$= \text{ر}'[٦ - ٤] \times [٣ - ٥] = \text{ر}'(٢) \times (-٣)$

$= (-٣) \times (-٢) = ٦$

(٦) ∵ $\text{ن}(\text{س}) = [\text{س}^{٣} + \text{ر}(\text{س})]^{-٢}$

∴ $\text{ن}'(\text{س}) = (-٢)[\text{س}^{٣} + \text{ر}(\text{س})]^{-٣} \times [٣ + \text{ر}'(\text{س})]$

∴ $\text{ن}'(١) = (-٢)[(١)^{٣} + \text{ر}(١)]^{-٣} \times [٣ + \text{ر}'(١)]$

$= (-٢)[١ + ٢]^{-٣} \times [٣ + ٢]$

$= (-٢)[٣]^{-٣} \times [٥] = -٢ \times \frac{١}{٢٧} \times ٥ = -\frac{١٠}{٢٧}$

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل مما يلي :

(٧) $\text{ص} = \text{س}^{٣} - ٢\ \text{قا س}$ (٨) $\text{ص} = \text{قتا}(٢ - ٣\text{س})$

(٩) $\text{ص} = \text{ظتا}(\pi - \frac{١}{\text{س}})$ (١٠) $\text{ص} = \text{ظا}(\text{ظتا س})$

(١١) $\text{ص} = (١ + \text{ظتا س})^{٢}$ (١٢) $\text{ص} = \text{قتا}(\pi - ٢\text{س})$

(١٣) $\text{ص} = \text{حتا }٢\text{س} - ٥\ \text{ظتا }٣\text{س}$ (١٤) $\text{ص} = \text{ظا }٣\text{س} - \text{قتا }٢\text{س}$

(١٥) $\text{ص} = \text{حا}^{٢}\ ٣\text{س} + \text{قا}^{٢}\ \text{س}$ (١٦) $\text{ص} = \text{قا س ظا }٢\text{س}$

(١٧) $\text{ص} = \text{ظتا}^{٣} \sqrt{\text{س}}$ (١٨) $\text{ص} = \text{قتا}^{٢}(١ + \text{س}^{٢})$

(١٩) $\text{ص} = ٣\ \text{قا}^{٢}(٢\text{س} + \pi)$ (٢٠) $\text{ص} = \sqrt{١ + \text{قتا س}}$

(٢١) $\text{ص} = \text{س}^{٣}\ \text{ظتا }٣\text{س}$ (٢٢) $\text{ص} = (\text{قتا س} + \text{ظتا س})^{-١}$

(٢٣) $\text{ص} = \frac{\text{ظتا }٣\text{س}}{٢\text{س} + ٣}$ (٢٤) $\text{ص} = \frac{١ - \text{قا س}}{١ + \text{قا س}}$

الحل

(٧) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^{٢} - ٢\ \text{قا س ظا س}$

(٨) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{قتا}(٢ - ٣\text{س})\ \text{ظتا}(٢ - ٣\text{س}) \times (-٣)$

$= ٣\ \text{قتا}(٢ - ٣\text{س})\ \text{ظتا}(٢ - ٣\text{س})$

(٩) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{قتا}^{٢}(\pi - \frac{١}{\text{س}}) \times (- \frac{-١}{\text{س}^{٢}}) = \frac{-١}{\text{س}^{٣}}\ \text{قتا}^{٢}(\pi - \frac{١}{\text{س}})$

(١٠) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{٢}(\text{ظتا س}) \times (-\text{قتا}^{٢}\text{س}) = (-\text{قتا}^{٢}\text{س})\ \text{قا}^{٢}(\text{ظتا س})$

(١١) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢(١ + \text{ظتا س}) \times (-\text{قتا}^{٢}\text{س}) = (-٢\ \text{قتا}^{٢}\text{س})(١ + \text{ظتا س})$

(١٢) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{قتا}(\pi - ٢\text{س})\ \text{ظتا}(\pi - ٢\text{س}) \times (-٢)$

$= ٢\ \text{قتا}(\pi - ٢\text{س})\ \text{ظتا}(\pi - ٢\text{س})$

(١٣) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{حا }٢\text{س} \times ٢ - ٥\ \text{قتا}^{٢}\ ٣\text{س} \times (-٣)$

$= (-٢)\ \text{حا }٢\text{س} + ١٥\ \text{قتا}^{٢}\ ٣\text{س}$

(١٤) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{٢}\ ٣\text{س} \times ٣ - (-\text{قتا }٢\text{س ظتا }٢\text{س}) \times ٢$

$= ٣\ \text{قا}^{٢}\ ٣\text{س} + ٢\ \text{قتا }٢\text{س ظتا }٢\text{س}$

(١٥) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\ \text{حا }٣\text{س حتا }٣\text{س} \times ٣ + ٢\ \text{قا }٢\text{س} \times \text{قا }٢\text{س ظا }٢\text{س}$

$= \text{حا }٦\text{س} \times ٣ + ٢\ \text{قا}^{٢}\ ٢\text{س ظا }٢\text{س}$

$= ٣\ \text{حا }٦\text{س} + ٢\ \text{قا}^{٢}\ ٢\text{س ظا }٢\text{س}$

(١٦) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا س} \times \text{قا}^{٢}\ ٢\text{س} \times ٢ + \text{ظا }٢\text{س} \times \text{قا س ظا س}$

= ٢ قا س قا^٢ ٢س + طا ٢س قا س طا س

(١٧) ءص/ءس = ٣ طتا^٢ √س × (− قتا^٢ √س) × ١/(٢√س)

= −٣/(٢√س) طتا^٢ √س قتا^٢ √س

(١٨) ءص/ءس = ٢ قتا (١ + س^٢) [− قتا (١ + س^٢) طتا (١ + س^٢)] × ٢ س

= (−٤ س) قتا^٢ (١ + س^٢) طتا (١ + س^٢)

(١٩) ءص/ءس = ٣ × ٢ قا (٢س + π) طا (٢س + π) × ٢

= ١٢ قا (٢س + π) طا (٢س + π)

(٢٠) ءص/ءس = ١/(٢√(١ + قتا س)) × (− قتا س طتا س) = − قتا س طتا س / (٢√(١ + قتا س))

(٢١) ءص/ءس = س^٢ × (− قتا^٢ ٣س) × ٣ + طتا ٣س × ٢س

= (−٣ س^٢) قتا^٢ ٣س + ٢س طتا ٣س

(٢٢) ءص/ءس = (−١) (قتا س + طتا س)^(−٢) × (− قتا س طتا س + قتا^٢ س)

= (قتا س طتا س − قتا^٢ س) (قتا س + طتا س)^(−٢)

= قتا س (قتا س − قتا س) / (قتا س + طتا س)^٢ = قتا س / (قتا س − قتا س)

(٢٣) ءص/ءس = [(٢س + ٣) × (− قتا^٢ ٣س) × ٣ − طتا ٣س] / (٢س + ٣)^٢

= [(−٣) (٢س + ٣) قتا^٢ ٣س − ٢ طتا ٣س] / (٢س + ٣)^٢

(٢٤) ءص/ءس = [(١ + قا س) × (− قا س طا س) − (١ − قا س) × (قا س طا س)] / (١ + قا س)^٢

= [(− قا س طا س) − قا^٢ س طا س − قا س طا س + قا^٢ س طا س] / (١ + قا س)^٢

= − ٢ قا س طا س / (١ + قا س)^٢

(٢٥) إذا كان : ص = طتا ½ π ع ، ع = ٣ √س

أوجد : ءص/ءس عند : س = ١

الحل

ءص/ءع = (− قتا^٢ ½ π ع) × ½ π = (− ½ π) قتا^٢ ½ π ع

ءع/ءس = ٣/(٢√س)

ءص/ءس = ءص/ءع × ءع/ءس = (− ½ π) قتا^٢ ½ π ع × ٣/(٢√س)

= (− ½ π) قتا^٢ ½ π × ٣ √س × ٣/(٢√س)

= (− π/(٤√س)) قتا^٢ ½ π √س

، عندما س = ١ ∴ ءص/ءس = (− ¼ π) قتا^٢ ½ π

= (− ¼ π) × ١ = (− ¼ π)

حل آخر

ص = طتا ½ π ع = طتا ½ π × ٣ √س = طتا ½ π √س

∴ ءص/ءس = (− قتا^٢ ½ π √س) × ½ π × ١/(٢√س)

$= \left(-\frac{١}{٤}\pi\right) \text{قتا}^{٢}\,\frac{١}{٢}\pi\,\sqrt{\text{س}}$

، عندما $\text{س} = ١$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \left(-\frac{١}{٤}\pi\right) \text{قتا}^{٢}\,\frac{١}{٢}\pi$

$= \left(-\frac{١}{٤}\pi\right) \times ١ = \left(-\frac{١}{٤}\pi\right)$

(٢٦) إذا كان : $\text{ص} = \sqrt{٥ - ٢\text{ع}}$ ، $\text{ع} = \text{قا}\,٢\text{س}$

أثبت أن : $\sqrt{٣}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ١٢ = ٠$ عند : $\text{س} = \frac{١}{٦}\pi$

الحل

$\text{ص} = (٥ - ٢\text{ع})^{\frac{١}{٢}} = (٥ - ٢\,\text{قا}\,٢\text{س})^{\frac{١}{٢}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢}(٥ - ٢\,\text{قا}\,٢\text{س})^{-\frac{١}{٢}} \times (-٢\,\text{قا}\,٢\text{س}\,\text{طا}\,٢\text{س} \times ٢)$

$= (-٢\,\text{قا}\,٢\text{س}\,\text{طا}\,٢\text{س})(٥ - ٢\,\text{قا}\,٢\text{س})^{-\frac{١}{٢}}$

عندما : $\text{س} = \frac{١}{٦}\pi$

فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (-٢\,\text{قا}\,\frac{١}{٣}\pi\,\text{طا}\,\frac{١}{٣}\pi)(٥ - ٢\,\text{قا}\,\frac{١}{٣}\pi)^{-\frac{١}{٢}}$

$= (-٢ \times ٢ \times \sqrt{٣})(٥ - ٢ \times ٢)^{-\frac{١}{٢}}$

$= (-٤\sqrt{٣})(١)^{-\frac{١}{٢}} = (-٤\sqrt{٣})$

∴ الطرف الأيمن $= \sqrt{٣} \times (-٤\sqrt{٣}) + ١٢$

$= (-١٢) + ١٢ = ٠ =$ الطرف الأيسر

(٢٧) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث : $\text{ص} = \text{د}(\text{س})$
لكل مما يلى :

(أ) $\text{ص} = ٢\,\text{طتا}\,\text{س} + \sqrt{٢}\,\text{قا}\,\text{س}$ عند : $\text{س} = \frac{١}{٤}\pi$

(ب) $\text{ص} = ٣\,\text{طا}\,\text{س} - \text{قتا}^{٢}\,\text{س}$ عند : $\text{س} = \frac{٣}{٤}\pi$

الحل

(أ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢ \times (-\text{قتا}^{٢}\,\text{س}) + \sqrt{٢}\,\text{قا}\,\text{س}\,\text{طا}\,\text{س}$

$= (-٢)\,\text{قتا}^{٢}\,\text{س} + \sqrt{٢}\,\text{قا}\,\text{س}\,\text{طا}\,\text{س}$

∴ ميل المماس $= \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س} = \frac{١}{٤}\pi}$

$= (-٢)\,\text{قتا}^{٢}\,\frac{١}{٤}\pi + \sqrt{٢}\,\text{قا}\,\frac{١}{٤}\pi\,\text{طا}\,\frac{١}{٤}\pi$

$= (-٢) \times (\sqrt{٢})^{٢} + \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \times ١$

$= (-٢) \times ٢ + ٢ = (-٤) + ٢ = (-٢)$

(ب) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\,\text{قا}^{٢}\,\text{س} - ٢\,\text{قتا}\,\text{س} \times (-\text{قتا}\,\text{س}\,\text{طتا}\,\text{س})$

$= ٣\,\text{قا}^{٢}\,\text{س} + ٢\,\text{قتا}^{٢}\,\text{س}\,\text{طتا}\,\text{س}$

∴ ميل المماس $= \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س} = \frac{٣}{٤}\pi}$

$= ٣\,\text{قا}^{٢}\,\frac{٣}{٤}\pi + ٢\,\text{قتا}^{٢}\,\frac{٣}{٤}\pi\,\text{طتا}\,\frac{٣}{٤}\pi$

$= ٣ \times (-\sqrt{٢})^{٢} + ٢ \times (\sqrt{٢})^{٢} \times (-١)$

$= ٣ \times ٢ + ٢ \times ٢ \times (-١)$

$= ٦ - ٤ = ٢$

أحمد الشنتورى

١ – ٢ الاشتقاق الضمنى و البارامترى

الدالة الصريحة :

الدالة الصريحة هى دالة على الصورة : ص = د (س)
أى كل معادلة يرتبط فيها المتغير التابع ص بالمتغير المستقل س
حيث تحدد قيمة ص مباشرة متى علم قيمة س
، و يكون ص فى أحد طرفى المعادلة ، و س فى الطرف الآخر

العلاقة الضمنية :

العلاقة الضمنية هى علاقة على الصورة : ع (س ، ص) = ٠
يرتبط فيها ص بالمتغير س بمعادلة تحوى س ، ص معاً
أى أن : النقطة (س ، ص) تقع على المنحنى البيانى لها

ملاحظات :

(١) إذا أمكن كتابة العلاقة ع (س ، ص) = ٠ على الصورة : ص = د (س) " دالة واحدة صريحة "
فإن : العلاقة ع (س ، ص) = ٠ دالة ضمنية

(٢) فى كثير من المعادلات على الصورة د (س ، ص) = ٠
يصعب التعبير عن ص بدلالة س مباشرة
لأن المتغير ص لا يمثل دالة صريحة بالنسبة إلى المتغير س
تسمى هذه الدالة غير الصريحة بالدالة الضمنية

الدالة الضمنية :

الدالة الضمنية هى دالة على الصورة : د (س ، ص) = ٠

ملاحظة :

توجد بعض العلاقات لا تمثل دالة و لكنها تنتج لنا دالتين صريحتين

اشتقاق الدالة الضمنية (الاشتقاق الضمنى) :

(١) لايجاد $\frac{ءص}{ءس}$ لعلاقة ضمنية نحولها لعلاقة صريحة ثم نستخدم قواعد الاشتقاق

(٢) إذا تعذر تحويل العلاقة الضمنية لعلاقة صريحة (أى لا يمكن فصل المتغير ص فى طرف مستقل) نشتق طرفى المعادلة بالنسبة إلى أحد المتغيرين س أو ص وفقاً لقاعدة السلسلة لنحصل على $\frac{ءص}{ءس}$ أو $\frac{ءس}{ءص}$ على الترتيب

ملاحظات :

(١) $\frac{ء}{ءس}\left(ص^{ن}\right) = ن\,ص^{ن-1} \times \frac{ءص}{ءس}$ ، $\frac{ء}{ءص}\left(س^{ن}\right) = ن\,س^{ن-1} \times \frac{ءس}{ءص}$

(٢) العلاقة سواء كانت صريحة أو ضمنية يكون لها نفس المشتقة و نحصل عليها بالاشتقاق بالنسبة لأحد المتغيرين س أو ص

الاشتقاق البارامترى :

إذا أمكن التعبير عن كل من الإحداثى السينى و الإحداثى الصادى للنقطة (س ، ص) كدالة فى متغير ثالث ن (يسمى الوسيط أو البارامتر) بالمعادلتين : س = د (ن) ، ص = ر (ن) فإن :
المعادلتين معاً تمثلان معادلة لمنحى واحد معبراً عنه بالصورة البارامترية حيث : الدالتين د ، ر قابلتين للاشتقاق بالنسبة إلى ن و يكون :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \times \frac{ءن}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن}$$

ملاحظات :

(١) يمكن تحويل الصورة البارامترية إلى الصورة الصريحة أو الضمنية بحذف المتغيلا البارامترى (ن) من معادلتى س ، ص

(٢) لايجاد مشتقة الدالة د (س) بالنسبة إلى الدالة ر (س)

نفرض أن : ص = د (س) ، ع = ر (س)

فتكون : مشتقة الدالة د (س) بالنسبة إلى الدالة ر (س)

هى : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \div \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءع}}$

حل تمارين (١ – ٢) صفحة ١٣ بالكتاب المدرسى

أولاً : أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) إذا كان : $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} =$ ....

(أ) س (ب) $\frac{١}{\text{ص}}$ (حـ) $-\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ (ء) $-\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

(٢) إذا كان : $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٢\,\text{س ص}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} =$ ....

(أ) -١ (ب) صفر (حـ) ١ (ء) ٢

(٣) إذا كان : $\text{ص}^٢ - ٢\sqrt{\text{س}} = ٠$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} =$ ....

(أ) $\frac{٢\text{ص}}{\sqrt{\text{س}}}$ (ب) $\sqrt{\text{س}}$ (حـ) $\frac{\text{س}}{\text{ص}^٢}$ (ء) $\frac{١}{\text{ص}^٣}$

(٤) إذا كان : $\text{س} = ٢\text{ن}^٢ + ٣$ ، $\text{ص} = \sqrt{\text{ن}^٣}$

، ن = ١ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} =$ ....

(أ) $\frac{٣}{٨}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (حـ) ٣ (ء) ٦

(٥) ميل المماس للمنحنى : $\text{س ص}^٢ = ٣$ عند النقطة (٣ ، ١) يساوى ....

(أ) -٣ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (حـ) $\frac{١}{٣}$ (ء) $\frac{٣}{٢}$

الحل

(١) ∵ $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٢\text{س} + ٢\text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$ و منها : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\frac{\text{س}}{\text{ص}}$

(٢) ∵ $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٢\,\text{س ص}$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٢\text{س} + ٢\text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\text{س} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٢\text{ص}$ و منها :

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص} - \text{س}}{\text{ص} - \text{س}} = ١$

(٣) ∵ $\text{ص}^٢ = ٢\sqrt{\text{س}}$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٢\text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢ \times \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$ و منها :

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\text{ص} \times ٢\sqrt{\text{س}}} = \frac{١}{\text{ص} \times \text{ص}^٢} = \frac{١}{\text{ص}^٣}$

(٤) ∵ $\text{س} = ٢\text{ن}^٢ + ٣$ ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٤\text{ن}$

، ∵ $\text{ص} = \sqrt{\text{ن}^٣} = \text{ن}^{\frac{٣}{٢}}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{٣}{٢}\text{ن}^{\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٢}\sqrt{\text{ن}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{\frac{٣}{٢}\sqrt{\text{ن}}}{٤\text{ن}}$ و عندما : ن = ١

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٣}{٨}$

(٥) ∵ $\text{س ص}^٢ = ٣$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$\text{ص}^٢ + ٢\,\text{س ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$ و منها : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\frac{\text{ص}}{٢\text{س}}$

∴ ميل المماس = $\left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{(٣ ، ١)} = -\frac{١}{٢}$

ثانياً : أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يلى :

(٦) $س^{٢} - ٤ص^{٢} + ٧ = ٠$

(٧) $س^{٤} + ٣ص^{٤} - ٢ = ٠$

(٨) $س^{٢} - ٢س ص = ٥ - ص^{٢}$

(٩) $س^{٣} + ٦س ص = ٤ص + ٣$

(١٠) $\frac{س}{ص} + \frac{ص}{س} = ١$

(١١) $س ص + حا ص = ٥$

(١٢) $س حا ص + ص حتا س = ٠$

(١٣) $س قتا ص = ص طتا س$

(١٤) $س^{٢} حا ص - ص^{٢} حا س = ٩$

(١٥) $حا ٢س حتا ٢ص = \frac{٣}{٤}$

الحل

(٦) $\because س^{٢} - ٤ص^{٢} + ٧ = ٠$ $\therefore$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٢س - ٨ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$ و منها : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{س}{٤ص}$

(٧) $\because س^{٤} + ٣ص^{٤} - ٢ = ٠$ $\therefore$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٤س^{٣} + ١٢ص^{٣} \frac{ءص}{ءس} = ٠$ و منها : $\frac{ءص}{ءس} = -\frac{س^{٣}}{٣ص^{٣}}$

(٨) $\because س^{٢} - ٢س ص = ٥ - ص^{٢}$ $\therefore$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٢س - ٢ص - ٢س \frac{ءص}{ءس} = -٢ص \frac{ءص}{ءس}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} (س - ص) = (س - ص)$ و منها : $\frac{ءص}{ءس} = ١$

(٩) $\because س^{٣} + ٦س ص = ٤ص + ٣$ $\therefore$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٣س^{٢} + ٦ص + ٦س \frac{ءص}{ءس} = ٤ \frac{ءص}{ءس}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} (٤ - ٦س) = ٣س^{٢} + ٦ص$

و منها : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣س^{٢} + ٦ص}{٤ - ٦س} = -\frac{٣ (س^{٢} + ٢ص)}{٢ (٣س - ٢)}$

(١٠) $\because \frac{س}{ص} + \frac{ص}{س} = ١$ بالضرب $\times$ س ص ينتج :

$س^{٢} + ص^{٢} = س ص$ $\therefore$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٢س + ٢ص \frac{ءص}{ءس} = ص + س \frac{ءص}{ءس}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} (٢ص - س) = ص - ٢س$

و منها : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص - ٢س}{٢ص - س}$

(١١) $\because س ص + حا ص = ٥$ $\therefore$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$ص + س \frac{ءص}{ءس} + حتا ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} (س + حتا ص) = -ص$ و منها : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-ص}{س + حتا ص}$

(١٢) $\because س حا ص + ص حتا س = ٠$ $\therefore$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$حا ص + س حتا ص \frac{ءص}{ءس} + \frac{ءص}{ءس} حتا س - ص حا س = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} (س حتا ص + حتا س) = ص حا س - حا ص$

و منها : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص حا س - حا ص}{س حتا ص + حتا س}$

(١٣) $\because س قتا ص = ص طتا س$ $\therefore$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$قتا ص + س \times (- قتا ص طتا ص) \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءس} طتا س - ص قتا^{٢} س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} (طتا س + س قتا ص طتا ص) = ص قتا^{٢} س + قتا ص$

و منها : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص قتا^{٢} س + قتا ص}{طتا س + س قتا ص طتا ص}$

أحمد الشنتورى

(١٤) $\because$ س² حا ص − ص² حا س = ٩ $\therefore$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$$\text{٢ س حا ص} + \text{س}^2 \text{ حتا ص } \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - \text{ص}^2\text{ حتا س} - \text{٢ ص } \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \text{ حا س} = ٠$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \left(\text{س}^2 \text{ حتا ص} - \text{٢ ص حا س} \right) = \text{ص}^2 \text{ حتا س} - \text{٢ س حا ص}$$

و منها : $$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص}^2 \text{ حتا س} - \text{٢ س حا ص}}{\text{س}^2 \text{ حتا ص} - \text{٢ ص حا س}}$$

(١٥) $\because$ حا ٢س حتا ٢ص = $\frac{٣}{٤}$ $\therefore$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$$\text{حا ٢س} \times \left(-\text{٢ حا ٢ص } \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \right) + \text{٢ حتا ٢س حتا ٢ص} = ٠$$

و منها : $$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٢ حتا ٢س حتا ٢ص}}{\text{٢ حا ٢س حا ٢ص}} = \text{طتا ٢س طتا ٢ص}$$

ثالثاً : أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للمنحنيات الآتية عند النقط المعطاة :

(١٦) س = ١٣ − ٢ن ، ص = ٤ن² − $\sqrt{\text{ن}}$ ، ن = ٤

(١٧) س = حا ٢$\pi\theta$ ، ص = حتا ٢$\pi\theta$ ، $\theta = \frac{١}{٦}$

(١٨) س = ٥ + قا² ٣θ ، ص = ١ − طا ٣θ ، $\theta = \frac{١}{٤}\pi$

الحل

(١٦) $\because$ س = ١٣ − ٢ن $\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = -٢$

، $\because$ ص = ٤ن² − $\sqrt{\text{ن}}$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \text{٨ن} - \frac{١}{٢\sqrt{\text{ن}}}$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{\text{٨ن} - \frac{١}{٢\sqrt{\text{ن}}}}{-٢}$$

و عندما : ن = ٤ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٣٢ - \frac{١}{٤}}{-٢} = -\frac{١٢٧}{٨}$

(١٧) $\because$ س = حا ٢$\pi\theta$ $\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ء}\theta} = ٢\pi \text{ حتا } ٢\pi\theta$

، $\because$ ص = حتا ٢$\pi\theta$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta} = -٢\pi \text{ حا } ٢\pi\theta$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ء}\theta} = \frac{-٢\pi \text{ حا } ٢\pi\theta}{٢\pi \text{ حتا } ٢\pi\theta} = -\text{طا } ٢\pi\theta$$

و عندما : $\theta = \frac{١}{٦}$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{طا } ٢\pi \times \frac{١}{٦} = -\text{طا } \frac{١}{٣}\pi = -\sqrt{٣}$

(١٨) $$\frac{\text{ءس}}{\text{ء}\theta} = \text{٢ قا}^2 ٣\theta \text{ طا } ٣\theta \times ٣ = \text{٦ قا}^2 ٣\theta \text{ طا } ٣\theta$$

، $$\frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta} = -\text{قا}^2 ٣\theta \times ٣ = -\text{٣ قا}^2 ٣\theta$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ء}\theta} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ء}\theta} = \frac{-\text{٣ قا}^2 ٣\theta}{\text{٦ قا}^2 ٣\theta \text{ طا } ٣\theta} = \frac{-١}{\text{٢ طا } ٣\theta}$$

و عندما : $\theta = \frac{١}{٤}\pi$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-١}{\text{٢ طا } \frac{٣}{٤}\pi} = \frac{١}{٢}$

(١٩) أوجد ميل المماس للمنحنى : حتا $\sqrt{\pi \text{ص}}$ = ٣س + ١ عند النقطة $\left(-\frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤}\pi\right)$

الحل

$\because$ حتا $\sqrt{\pi \text{ص}}$ = ٣س + ١ $\therefore$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$$-\text{حا } \sqrt{\pi \text{ص}} \times \frac{\pi}{٢\sqrt{\pi \text{ص}}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٦\sqrt{\pi \text{ص}}}{-\pi \text{ حا } \sqrt{\pi \text{ص}}}$$

$$\therefore \text{ميل المماس} = \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\left(-\frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤}\pi\right)} = \frac{٦\sqrt{\pi \times \frac{١}{٤}\pi}}{-\pi \text{ حا } \sqrt{\pi \times \frac{١}{٤}\pi}} = \frac{٦ \times \frac{١}{٢}\pi}{-\pi \text{ حا } \frac{١}{٢}\pi} = -٣$$

(٢٠) أوجد مشتقة $\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$ بالنسبة إلى $\sqrt{\text{٢س} + ١}$ عند س = ٤

الحل

نضع : $\text{ص} = \frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س} - ١) \times ١ - (\text{س} + ١) \times ١}{(\text{س} - ١)^{٢}} = \frac{-٢}{(\text{س} - ١)^{٢}}$

، $\text{ع} = \sqrt{٢\text{س} + ١} = (٢\text{س} + ١)^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢}(٢\text{س} + ١)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢ = \frac{١}{\sqrt{٢\text{س} + ١}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \div \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{-٢}{(\text{س} - ١)^{٢}} \times \frac{\sqrt{٢\text{س} + ١}}{١}$

، عندما : $\text{س} = ٤$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = -\frac{٢}{٩} \times \frac{٣}{١} = -\frac{٢}{٣}$

(٢١) أوجد قيمة البارامتر ن التى عندها يكون للمنحنى :

$\text{س} = ٢\text{ن}^{٣} - ٥\text{ن}^{٢} + ٤\text{ن} - ٩$ ، $\text{ص} = ٢\text{ن}^{٢} + \text{ن} - ٥$

(أ) مماس رأسى　　(ب) مماس أفقى

الحل

$\because \text{س} = ٢\text{ن}^{٣} - ٥\text{ن}^{٢} + ٤\text{ن} - ٩$ $\therefore \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٦\text{ن}^{٢} - ١٠\text{ن} - ٤$

، $\because \text{ص} = ٢\text{ن}^{٢} + \text{ن} - ٥$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٤\text{ن} + ١$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{٤\text{ن} + ١}{٦\text{ن}^{٢} - ١٠\text{ن} - ٤}$

(أ) $\because$ المماس رأسى $\therefore$ ميل المماس = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ غير معرف

$\therefore ٦\text{ن}^{٢} - ١٠\text{ن} - ٤ = ٠$ $\therefore ٣\text{ن}^{٢} - ٥\text{ن} - ٢ = ٠$

$\therefore (٣\text{ن} - ٢)(\text{ن} - ١) = ٠$ و منها : $\text{ن} = \frac{٢}{٣}$ أو $\text{ن} = ١$

(ب) $\because$ المماس أفقى $\therefore$ ميل المماس = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$\therefore ٤\text{ن} + ١ = ٠$ و منها : $\text{ن} = -\frac{١}{٤}$

١ – ٣ المشتقات العليا للدالة

(١) إذا كانت : ص = د (س) حيث د دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن : مشتقتها الأولى هى $\text{ص}' = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{د}'(\text{س})$ و تمثل دالة جديدة

(٢) إذا كانت : المشتقة الأولى للدالة ص = د (س) قابلة للاشتقاق بالنسبة فإن : مشتقتها $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)$ تسمى المشتقة الثانية للدالة د و تمثل دالة أخرى و يرمز لها بالرمز :

$$\text{ص}'' = \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \text{د}''(\text{س})$$

(٣) بتكرار عملية الاشتقاق نحصل على المشتقة الثالثة للدالة د و يرمز لها بالرمز : $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}}$ ، ..... و هكذا

(٤) تسمى المشتقات لدالة بدءاً من المشتقة الثانية بالمشتقات العليا و تكتب المشتقة من الرتبة ن كما يلى :

$\text{ص}^{(\text{ن})} = \frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{ن}}} = \text{د}^{(\text{ن})}(\text{س})$ حيث : ن عدد صحيح موجب

ملاحظات :

(١) الرمز $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ يقرأ دال اثنين ص دال س اثنين

(٢) الرمز $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}}$ يدل على المشتقة الثانية للدالة

بينما $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)^{٢}$ يدل على مربع المشتقة الأولى

(٣) $\frac{ء}{ء س}\left(ص \frac{ء ص}{ء س} \right) = ص \frac{ء}{ء س}\left(\frac{ء ص}{ء س} \right) + \frac{ء ص}{ء س} \times \frac{ء ص}{ء س} = ص \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + \left(\frac{ء ص}{ء س} \right)^{٢}$

(٤) إذا كانت : ص = د (ع) ، ع = ر (س) فإن :

$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ء ص}{ء ع} \times \frac{ء ع}{ء س}$ ،

$\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = \left[\frac{ء}{ء ع} \left(\frac{ء ص}{ء س} \right) \right] \times \frac{ء ع}{ء س}$

(٥) إذا كانت : ص = د (س) ، ع = ر (س) دالتان قابلتان للإشتقاق عدة مرات بالنسبة إلى س فإن :

$\frac{ء ص}{ء ع} = \frac{ء ص}{ء س} \div \frac{ء ع}{ء س} = \frac{ء ص}{ء س} \times \frac{ء س}{ء ع}$ ،

$\frac{ء^{٢} ص}{ء ع^{٢}} = \left[\frac{ء}{ء ع} \left(\frac{ء ص}{ء س} \right) \right] \times \frac{ء س}{ء ع}$ ،

$\frac{ء^{٣} ص}{ء ع^{٣}} = \left[\frac{ء}{ء ع} \left(\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} \right) \right] \times \frac{ء س}{ء ع}$ ، ... هكذا

حل تمارين (١ – ٣) صفحة ١٣ بالكتاب المدرسى

(١) إذا كانت : ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + حـ س + ء

و كانت ارتباطات س ، ص ، ص$'$ ، ص$''$ موضحة بالجدول التالى :

أوجد قيم : أ ، ب ، حـ ، ء الحقيقية

ثم أكمل الجدول

س	ص	ص$'$	ص$''$
١	٨		٢٨
٢		٧٥	٣٤

الحل

∵ ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + حـ س + ء

∴ ص$'$ = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + حـ ، ص$''$ = ٦ أ س + ٢ ب

، ∵ ص$''$ = ٢٨ عندما : س = ١ ∴ ٢٨ = ٦ أ + ٢ ب

∴ ١٤ = ٣ أ + ب (١)

، ∵ ص$''$ = ٣٤ عندما : س = ٢ ∴ ٢٨ = ١٢ أ + ٢ ب

∴ ١٧ = ٦ أ + ب (٢) بطرح (١) من (٢) ينتج :

٣ = ٣ أ ∴ أ = ١ ، بالتعويض فى (١) ينتج : ب = ١١

، ∵ ص$'$ = ٧٥ عندما : س = ٢ ∴ ٧٥ = ١٢ أ + ٤ ب + حـ

، ∵ أ = ١ ، ب = ١١ ∴ حـ = ١٩

، ∵ ص = ٨ عندما : س = ١ ∴ ٨ = أ + ب + حـ + ء

، ∵ أ = ١ ، ب = ١١ ، حـ = ١٩ ∴ ء = – ٢٣

∴ ص = ١ × ٨ + ١١ × ٤ + ١٩ × ٢ – ٢٣ = ٦٧

∴ ص$'$ = ٣ × ١ × ١ + ٢ × ١١ × ١١ + ١٩ = ٤٤

أوجد المشتقة الثالثة لكلاً مما يلى :

(٢) ص = س^{٥} – ٤ س^{٣} + ٣ **(٣)** ص = $\frac{٢ س}{س + ١}$

(٤) ص = حا (٢ س – ٧) **(٥)** ص = حتا (π – ٣ س)

(٦) ص = حا س حتا س **(٧)** ص = $\sqrt{٢ س – ٥}$

الحل

(٢) ∵ ص = س^{٥} – ٤ س^{٣} + ٣ ∴ ص$'$ = ٥ س^{٤} – ١٢ س^{٢}

، ص$''$ = ٢٠ س^{٣} – ٢٤ س ، ص$''$ = ٦٠ س^{٢} – ٢٤

(٣) $\because$ ص = ٢ س $(س + ١)^{-١}$

$\therefore ص' = ٢ (س + ١)^{-١} - (س + ١)^{-٢} \times ٢ س$

$= ٢ (س + ١)^{-٢} [س + ١ - س]$

$= ٢ (س + ١)^{-٢} \times ١ = ٢ (س + ١)^{-٢} = \frac{٢}{(س + ١)^{٢}}$

$\therefore ص'' = -٤ (س + ١)^{-٣} = \frac{-٤}{(س - ١)^{٣}}$

$\therefore ص''' = ١٢ (س + ١)^{-٤} = \frac{١٢}{(س + ١)^{٤}}$

(٤) $\because ص = \text{حا} (٢ س - ٧)$ $\therefore ص' = ٢ \text{ حتا} (٢ س - ٧)$

$\therefore ص'' = -٤ \text{ حا} (٢ س - ٧)$ $\therefore ص''' = -٨ \text{ حتا} (٢ س - ٧)$

(٥) $\because ص = \text{حتا} (\pi - ٣ س)$

$\therefore ص' = -\text{حا} (\pi - ٣ س) \times -٣ = ٣ \text{ حا} (\pi - ٣ س)$

$\therefore ص'' = ٣ \text{ حتا} (\pi - ٣ س) \times -٣ = -٩ \text{ حتا} (\pi - ٣ س)$

$\therefore ص''' = -٩ \times -\text{حا} (\pi - ٣ س) \times -٣ = -٢٧ \text{ حا} (\pi - ٣ س)$

(٦) $\because ص = \text{حا س حتا س}$

$\therefore ص' = \text{حا س} \times -\text{حا س} + \text{حتا س} \times \text{حتا س}$

$= -\text{حا}^{٢} س + \text{حتا}^{٢} س = \text{حتا ٢ س}$ $\therefore ص'' = -٢ \text{ حا ٢ س}$

$\therefore ص''' = -٢ \times ٢ \text{ حتا ٢ س} = -٤ \text{ حتا ٢ س}$

(٧) $\because ص = \sqrt{٢ س - ٥} = (٢ س - ٥)^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore ص' = \frac{١}{٢} (٢ س - ٥)^{-\frac{١}{٢}} \times ٢ = \frac{١}{\sqrt{٢ س - ٥}}$

$\therefore ص'' = -\frac{١}{٢} (٢ س - ٥)^{-\frac{٣}{٢}} \times ٢ = \frac{-١}{(\sqrt{٢ س - ٥})^{٣}}$

$\therefore ص''' = - \times - \frac{٣}{٢} (٢ س - ٥)^{-\frac{٥}{٢}} \times ٢ = \frac{٣}{(\sqrt{٢ س - ٥})^{٥}}$

أجب عما يلى :

(٨) إذا كان : $٣ س^{٢} + ٥ = ٢ س ص$ أثبت أن :

$$س \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + ٢ \frac{ء ص}{ء س} = ٣$$

الحل

$\because ٣ س^{٢} + ٥ = ٢ س ص$ $\therefore$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٦ س = ٢ ص + ٢ س ص'$ $\therefore ٣ س = ص + س ص'$

، بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س ينتج :

$٣ = ص' + ص' + س ص''$ $\therefore ٣ = ٢ ص' + س ص''$

أى أن : $س \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + ٢ \frac{ء ص}{ء س} = ٣$

(٩) إذا كان : $س^{٢} + ص^{٢} = ٤$ أثبت أن :

$$ص^{٣} \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + ٤ = ٠$$

الحل

$\because س^{٢} + ص^{٢} = ٤$ $\therefore$ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$٢ س + ٢ ص ص' = ٠$ $\therefore س + ص ص' = ٠$ و منها : $ص' = -\frac{س}{ص}$

، بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س ينتج :

$١ + (ص')^{٢} + ص ص'' = ٠$ ، بالتعويض عن ص' ينتج :

$١ + \frac{س^{٢}}{ص^{٢}} + ص ص'' = ٠$ ، بالضرب × $ص^{٢}$ ينتج :

$ص^{٢} + س^{٢} + ص^{٣} ص'' = ٠$ ، $\because س^{٢} + ص^{٢} = ٤$

$\therefore ٤ + ص^{٣} ص'' = ٠$ أى أن : $ص^{٣} \frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} + ٤ = ٠$

(١٠) إذا كان : ص = ٣ حتا (٢ س + ١) أثبت أن :

$$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + ٤ ص = ٠$$

الحل

∵ ص = ٣ حتا (٢ س + ١)　∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$ص'$ = ٣ × (– حا (٢ س + ١)) × ٢ = – ٦ حا (٢ س + ١)

، بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س ينتج :

$ص''$ – ٦ حتا (٢ س + ١) × ٢ = – ١٢ حا (٢ س + ١)

∴ الطرف الأيمن = – ١٢ حا (٢ س + ١) + ٤ × ٣ حتا (٢ س + ١)

= – ١٢ حا (٢ س + ١) + ١٢ حا (٢ س + ١) = ٠

أى أن : $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ + ٤ ص = ٠

(١١) إذا كان : س ص = حا س حتا س أثبت أن :

$$س \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + ٢ \frac{ءص}{ءس} + ٤ س ص = ٠$$

الحل

∵ س ص = حا س حتا س = $\frac{١}{٢}$ × (٢ حا س حتا س) = $\frac{١}{٢}$ حا ٢ س

∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

ص + س $ص'$ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ حتا ٢ س = حتا ٢ س

، بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س ينتج :

$ص'$ + $ص'$ + س $ص''$ = – ٢ حا ٢ س　　(١)

، ∵ س ص = $\frac{١}{٢}$ حا ٢ س　∴ حا ٢ س = ٢ س ص

∴ من (١) : ٢ $ص'$ + س $ص''$ + ٤ س ص = ٠

أى أن : س $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ + ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ + ٤ س ص = ٠

(١٢) إذا كان : ص = س حا س أثبت أن :

$$س \frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}} + س \frac{ءص}{ءس} + ٢ ص = ٠$$

الحل

∵ ص = س حا س　∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$ص'$ = حا س + س حتا س ، بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س ينتج :

$ص''$ = حتا س + حتا س – س حا س = ٢ حتا س – س حا س

، بالاشتقاق مرة ثالثة بالنسبة إلى س ينتج :

$ص'''$ = – ٢ حا س – حا س – س حتا س = – ٣ حا س – س حتا س

∴ الطرف الأيمن = س (– ٣ حا س – س حتا س) + س (حا س + س حتا س) + ٢ س حا س

= – ٣ س حا س – $س^{٢}$ حتا س + س حا س

+ $س^{٢}$ حتا س + ٢ س حا س = ٠ = الطرف الأيسر

(١٣) إذا كان : ص = قا س أثبت أن :

$$ص \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢} = ص^{٢} (٣ ص^{٢} – ٢)$$

الحل

∵ ص = قا س　∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$ص'$ = قا س ظا س ، بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى س ينتج :

$ص''$ = قا س × $قا^{٢}$ س + ظا س × قا س ظا س = $قا^{٣}$ س + قا س $ظا^{٢}$ س

∴ الطرف الأيمن = قا س ($قا^{٣}$ س + قا س $ظا^{٢}$ س) + (قا س ظا س $)^{٢}$

= $قا^{٤}$ س + $قا^{٢}$ س $ظا^{٢}$ س + $قا^{٢}$ س $ظا^{٢}$ س

= $قا^{٤}$ س + ٢ $قا^{٢}$ س $ظا^{٢}$ س

= $قا^{٢}$ س ($قا^{٢}$ س + ٢ $ظا^{٢}$ س)

$= \text{قا}^٢\text{س} \left(\text{قا}^٢\text{س} + ٢ \left(\text{قا}^٢\text{س} - ١ \right) \right)$

$= \text{قا}^٢\text{س} \left(\text{قا}^٢\text{س} + ٢\,\text{قا}^٢\text{س} - ٢ \right)$

$= \text{قا}^٢\text{س} \left(٣\,\text{قا}^٢\text{س} - ٢ \right) = \text{ص}^٢ \left(٣\,\text{ص}^٢ - ٢ \right) =$ الطرف الأيسر

أى أن : $\text{ص} \frac{ء^٢\text{ص}}{ء\text{س}^٢} + \left(\frac{ء\text{ص}}{ء\text{س}} \right)^٢ = \text{ص}^٢ \left(٣\,\text{ص}^٢ - ٢ \right)$

(١٤) إذا كان : $\frac{ء\text{ص}}{ء\text{س}} = ٢\text{س} - ٣$ ، $\frac{ء\text{ع}}{ء\text{س}} = \text{س}^٢ - ١$

أوجد : $\frac{ء^٢\text{ص}}{ء\text{ع}^٢}$ عند : $\text{س} = ٢$

الحل

$\because \frac{ء\text{ص}}{ء\text{ع}} = \frac{ء\text{ص}}{ء\text{س}} \div \frac{ء\text{ع}}{ء\text{س}} = \frac{٢\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ - ١}$

$\therefore \frac{ء^٢\text{ص}}{ء\text{ع}^٢} = \frac{ء}{ء\text{ع}} \left(\frac{ء\text{ص}}{ء\text{ع}} \right) = \frac{ء}{ء\text{س}} \left(\frac{ء\text{ص}}{ء\text{ع}} \right) \times \frac{ء\text{س}}{ء\text{ع}}$

$= \frac{ء}{ء\text{س}} \left(\frac{٢\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ - ١} \right) \times \frac{١}{\text{س}^٢ - ١}$

$= \frac{(\text{س}^٢ - ١) \times ٢ - (٢\text{س} - ٣) \times ٢\text{س}}{(\text{س}^٢ - ١)^٢} \times \frac{١}{\text{س}^٢ - ١}$

$= \frac{٢\text{س}^٢ - ٢ - ٤\text{س}^٢ + ٦\text{س}}{(\text{س}^٢ - ١)^٣} = \frac{٦\text{س} - ٢ - ٢\text{س}^٢}{(\text{س}^٢ - ١)^٣}$

، عند : $\text{س} = ٢$ $\therefore \frac{ء^٢\text{ص}}{ء\text{ع}^٢} = \frac{٦ \times ٢ - ٢ - ٢ \times ٤}{(٤ - ١)^٣} = \frac{٢}{٢٧}$

(١٥) إذا كان : $\text{س} = ٣\text{ن}^٢ - ٢$ ، $\text{ص} = \text{ن}^٣ + ٢$

أوجد : $\frac{ء^٢\text{ص}}{ء\text{س}^٢}$ عند : $\text{ن} = ٤$

الحل

$\because \text{س} = ٣\text{ن}^٢ - ٢ \quad \therefore \frac{ء\text{س}}{ء\text{ن}} = ٦\text{ن}$

، $\because \text{ص} = \text{ن}^٣ + ٢ \quad \therefore \frac{ء\text{ص}}{ء\text{ن}} = ٣\text{ن}^٢$

$\therefore \frac{ء\text{ص}}{ء\text{س}} = \frac{ء\text{ص}}{ء\text{ن}} \div \frac{ء\text{س}}{ء\text{ن}} = \frac{٣\text{ن}^٢}{٦\text{ن}} = \frac{١}{٢}\text{ن}$ ،

$\frac{ء^٢\text{ص}}{ء\text{س}^٢} = \frac{ء}{ء\text{س}} \left(\frac{ء\text{ص}}{ء\text{س}} \right) = \frac{ء}{ء\text{ن}} \left(\frac{ء\text{ص}}{ء\text{س}} \right) \times \frac{ء\text{ن}}{ء\text{س}}$

$= \frac{ء}{ء\text{ن}} \left(\frac{١}{٢}\text{ن} \right) \times \frac{١}{٦\text{ن}} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٦\text{ن}} = \frac{١}{١٢\text{ن}}$

و عندما : $\text{ن} = ٤$ فإن : $\frac{ء^٢\text{ص}}{ء\text{س}^٢} = \frac{١}{٤٨}$

(١٦) إذا كان : $\text{س} = \frac{\text{ع} + ١}{\text{ع} - ١}$ ، $\text{ص} = \frac{\text{ع} - ١}{\text{ع} + ١}$

أوجد : $\frac{ء\text{ص}}{ء\text{س}}$ عند : $\text{ع} = ٢$

الحل

$\because \text{س} = \frac{\text{ع} + ١}{\text{ع} - ١}$ ، $\text{ص} = \frac{\text{ع} - ١}{\text{ع} + ١}$

$\therefore$ عند : $\text{ع} = ٢$ فإن : $\text{س} = ٣$ ، $\text{ص} = \frac{١}{٣}$

، $\text{س}\,\text{ص} = ١$ ، بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$\text{ص} + \text{س} \frac{ء\text{ص}}{ء\text{س}} = ٠ \quad \therefore \frac{ء\text{ص}}{ء\text{س}} = - \frac{\text{ص}}{\text{س}} = - \frac{١}{٩}$

(١٧) إذا كان : $\text{س} = \text{قا}\,\text{ع}$ ، $\sqrt{\text{ص}} = \text{طا}\,\text{ع}$ أثبت أن : $\frac{ء^٢\text{ص}}{ء\text{س}^٢} = ٢$

الحل

$\because \text{س} = \text{قا}\,\text{ع} \quad \therefore \frac{ء\text{س}}{ء\text{ع}} = \text{قا}\,\text{ع}\,\text{طا}\,\text{ع}$

، $\because \sqrt{\text{ص}} = \text{طا}\,\text{ع}$ $\therefore$ بالتربيع ينتج : $\text{ص} = \text{طا}^٢\text{ع}$

، $\frac{ء\text{ص}}{ء\text{ع}} = ٢\,\text{طا}\,\text{ع}\,\text{قا}^٢\text{ع}$

، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءع}} = \frac{\text{٢ طاع قا}^{٢}\text{ع}}{\text{قاع طاع}} = \text{٢ قاع}$

∴ $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right) = \frac{\text{ء}}{\text{ءع}}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right) \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

$= \frac{\text{ء}}{\text{ءع}}\left(\text{٢ قاع}\right) \times \frac{١}{\text{قاع طاع}}$

$= \text{٢ طاع قا}^{٢}\text{ع} \times \frac{١}{\text{قاع طاع}} = ٢$

حل آخر

∵ $\text{س} = \text{قاع}$ ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءع}} = \text{قاع طاع}$

، ∵ $\sqrt{\text{ص}} = \text{طاع}$ ∴ $\frac{١}{٢\sqrt{\text{ص}}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \text{قا}^{٢}\text{ع}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = ٢\sqrt{\text{ص}}\ \text{قا}^{٢}\text{ع} = \text{٢ طاع قا}^{٢}\text{ع}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءع}} = \text{٢ قاع} = \text{٢س}$

، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right) = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{٢س}\right) = ٢$

أحمد الشنتورى

٤ – ١ معادلتا المماس و العمودى لمنحنى

إذا كانت النقطة أ $(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ تقع على منحنى الدالة د حيث :

ص = د (س) ، م ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة فإن :

(١) معادلة المماس للمنحنى عند النقطة أ $(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ هى :

$$\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_١)$$

(٢) معادلة العمودى على المنحنى عند النقطة أ $(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ هى :

$$\text{ص} - \text{ص}_١ = \frac{-١}{\text{م}}\,(\text{س} - \text{س}_١)$$

تذكر ما يلى :

(١) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة أ $(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ هو : $\text{م} = \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)}$

(٢) ميل العمودى على الدالة ص = د (س) عند النقطة أ $(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ هو : $\text{م} = \frac{-١}{\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)}}$

(٣) ميل المستقيم الذى معادلته : أ س + ب ص + جـ = ٠ هو : $\text{م} = \frac{-\text{أ}}{\text{ب}}$

(٤) ميل المستقيم المار بالنقطتين $(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ ، $(\text{س}_٢ ، \text{ص}_٢)$ هو : $\text{م} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

(٥) ميل المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها (θ) هو : م = طا θ

و يكون ميل المستقيم موجباً إذا كانت : (θ) حادة

بينما يكون سالباً إذا كانت : (θ) منفرجة

(٦) ميل المستقيم الذى متجه اتجاهه $\overleftarrow{\text{ى}}$ = (أ ، ب) هو : م = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

(٧) ميل محور السينات = ميل أى مستقيم أفقى (موازى لمحور السينات = صفر

(٨) ميل محور الصادات = ميل أى مستقيم رأسى (موازى لمحور الصادات = $\frac{1}{0}$ (غير معرف)

(٩) إذا كان : م_1 هو ميل المستقيم ل_1 ، م_2 هو ميل المستقيم ل_2

و كان : **[١]** $\text{ل}_1 \parallel \text{ل}_2$ فإن : $\text{م}_1 \parallel \text{م}_2$

و العكس صحيح

[٢] $\text{ل}_1 \perp \text{ل}_2$ فإن : $\text{م}_1 \times \text{م}_2 = -1$

و العكس صحيح

(١٠) المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة و (س_1 ، ص_1) ، و المتجه $\overleftarrow{\text{ى}}$ = (أ ، ب) متجه اتجاه له هى :

$\overleftarrow{\text{ر}} = \overleftarrow{\text{و}} + \text{ك}\,\overleftarrow{\text{ى}}$

(١١) المعادلة الكارتيزية للمستقيم المار بالنقطة و (س_1 ، ص_1) ، و ميله (م) هى : $\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م} (\text{س} - \text{س}_1)$

(١٢) المعادلة الكارتيزية للمستقيم المار بنقطة الأصل و ميله (م) هى : ص = م س

(١٣) المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذى ميله (م) ، و يقطع من محور الصادات جزءاً طوله = | حـ | هى : ص = م س + حـ

(١٤) المعادلة الكارتيزية للمستقيم الذى يقطع من محور السينات جزءاً طوله = | أ | ، و من محور الصادات جزءاً طوله = | ب | هى : $\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = 1$

(١٥) معادلة المستقيم الموازى لمحور السينات و المار بالنقطة (ل ، ك) هى : ص = ك

(١٦) معادلة المستقيم الموازى لمحور الصادات و المار بالنقطة (ل ، ك) هى : س = ل

(١٧) معادلة محور السينات هى : ص = ٠

(١٨) معادلة محور الصادات هى : س = ٠

(١٩) لايجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات هى : ص = ٠ و نوجد قيم س

(٢٠) لايجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات هى : س = ٠ و نوجد قيم ص

(٢١) لايجاد نقط تقاطع منحنيين نحل معادلتيهما معاً آنياً

(٢٢) زاوية التقاطع بين مستقيم و منحنى هى الزاوية المحصورة بين هذا المستقيم و المماس للمنحنى عند نقطة التقاطع

(٢٣) زاوية التقاطع بين منحنيين هى الزاوية بين المماسيين عند نقط تقاطع المنحنيين

(٢٤) يتقاطع المنحنيان على التعامد إذا كان المماسان المرسومان لهما من نقطة تقاطعهما متعامدين

(٢٥) لإثبات أن : المنحنيين يتقاطعان على التعامد عند نقطة نتبع ما يلى :

١) نوجد النقطة إذا كانت غير معلومة

٢) نوجد ميل المماس لكلا المنحنيين عند هذه النقطة

٣) نتأكد من أن حاصل ضرب ميلى المماسيين = – ١

(٢٦) لإثبات أن : المنحنيين متماسان نتبع ما يلى :

١) نوجد نقطة التماس إذا كانت غير معلومة

٢) نوجد ميل المماس لكلا المنحنيين عند هذه النقطة

٣) نتأكد من أن ميلى المماسيين متساويان

حل تمارين (١ – ٤) صفحة ٢١ بالكتاب المدرسى

(١) إذا كانت : د ، ر ، ع دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س
أوجد معادلتى المماس و العمودى لمنحنى الدالة فى كل مما يأتى بالقيم المعطاة فى الجدول التالى :

س	د (س)	ر (س)	د' (س)	ر' (س)
٣	١	٧	– ١	٦
٧	– ٢	١	٢	٥

(أ) ع (س) = د (س) × ر (س) عند : س = ٣

(ب) ع (س) = د (س) ÷ ر (س) عند : س = ٧

(جـ) ع (س) = د [ر (س)] عند : س = ٣

الحل

(أ) ∵ ع (س) = د (س) × ر (س)

∴ ع' (س) = د (س) × ر' (س) + ر (س) × د' (س)

، عند : س = ٣ فإن :

ميل المماس = ع' (٣) = د (٣) × ر' (٣) + ر (٣) × د' (٣)

= ١ × ٦ + ٧ × (– ١) = ٦ – ٧ = – ١

∴ ميل العمودى = ١ ، ص = ع (٣) = د (٣) × ر (٣) = ١ × ٧ = ٧

∴ عند النقطة (٣ ، ٧) فإن :

معادلة المماس هى : ص – ٧ = (– ١) × (س – ٣)

∴ ص – ٧ = – س + ٣ أى : س + ص – ١٠ = ٠

، معادلة العمودى هى : ص – ٧ = ١ × (س – ٣)

∴ ص – ٧ = س – ٣ أى : س – ص + ٤ = ٠

(ب) ∵ ع (س) = د (س) ÷ ر (س) = د (س) / ر (س)

∴ ع' (س) = [ر (س) × د' (س) – د (س) × ر' (س)] / [ر (س)]²

، عند : س = ٧ فإن :

ميل المماس = ع' (٧) = [ر (٧) × د' (٧) – د (٧) × ر' (٧)] / [ر (٧)]²

= [١ × ٢ – (– ٢) × ٥] / [١]² = ١٢

∴ ميل العمودى = – ١/١٢ ، ص = ع (٧) = د (٧) / ر (٧) = –٢ / ١ = – ٢

∴ عند النقطة (٧ ، – ٢) فإن :

معادلة المماس هى : ص + ٢ = ١٢ × (س – ٧)

∴ ص + ٢ = ١٢ س – ٨٤ أى : ١٢ س – ص – ٨٦ = ٠

، معادلة العمودى هى : ص + ٢ = (– ١/١٢) × (س – ٧)

∴ ١٢ ص + ٢٤ = – س + ٧ أى : س + ١٢ ص + ١٧ = ٠

(حـ) ∵ ن (س) = د [ر (س)]

∴ ن/ (س) = د/ [ر (س)] × ر/ (س) ، عند : س = ٣ فإن :

ميل المماس = ن/ (٣) = د/ [ر (٣)] × ر/ (٣) = د/ (٣) × ر/ (٣)

= ٢ × ٦ = ١٢ ∴ ميل العمودى = $-\frac{١}{١٢}$

، ص = ن (٣) = د [ر (٣)] = د (٧) = − ٢ ∴ عند النقطة (٣ ، − ٢) فإن :

معادلة المماس هى : ص + ٢ = ١٢ × (س − ٣)

∴ ص + ٢ = ١٢ س − ٣٦ أى : ١٢ س − ص − ٣٨ = ٠

، معادلة العمودى هى : ص + ٢ = ($-\frac{١}{١٢}$) × (س − ٣)

∴ ١٢ ص + ٢٤ = − س + ٣ أى : س + ١٢ ص + ٢١ = ٠

(٢) أوجد معادلتى المماس و العمودى لمنحنى الدالة د حيث :
ص = د (س) عند قيم س المعطاة :

(أ) ص = ٣ − طتا² س ، س = $\frac{١}{٤}\pi$

(ب) ص = ٢ حتا س − قا س ، س = $\frac{١}{٣}\pi$

الحل

(أ) ∵ ص = ٣ − طتا² س ∴ ص/ = − ٢ طتا س × (− قتا² س) = ٢ طتا س قتا² س

، عند : س = $\frac{١}{٤}\pi$ فإن : ص = ٣ − طتا² $\frac{١}{٤}\pi$ = ٣ − ١ = ٢

، ميل المماس = ٢ طتا $\frac{١}{٤}\pi$ قتا² $\frac{١}{٤}\pi$ = ٢ × ١ × $(\sqrt{٢})^2$ = ٤

∴ ميل العمودى = $-\frac{١}{٤}$ ∴ عند النقطة ($\frac{١}{٤}\pi$ ، ٢) فإن :

معادلة المماس هى : ص − ٢ = ٤ × (س − $\frac{١}{٤}\pi$)

، معادلة العمودى هى : ص − ٢ = ($-\frac{١}{٤}$) × (س − $\frac{١}{٤}\pi$)

(ب) ∵ ص = ٢ حتا س − قا س ∴ ص/ = − ٢ حا س − قا س طا س

، عند : س = $\frac{١}{٣}\pi$ فإن :

ص = ٢ حتا $\frac{١}{٣}\pi$ − حتا $\frac{١}{٣}\pi$ = ٢ × $\frac{١}{٢}$ − ٢ = ١ − ٢ = − ١

، ميل المماس = − ٢ حا $\frac{١}{٣}\pi$ − قا $\frac{١}{٣}\pi$ طا $\frac{١}{٣}\pi$

= − ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ − ٢ × $\sqrt{٣}$ = − ٣ $\sqrt{٣}$

∴ ميل العمودى = $\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$ ∴ عند النقطة ($\frac{١}{٣}\pi$ ، − ١) فإن :

معادلة المماس هى : ص + ١ = (− ٣ $\sqrt{٣}$) × (س − $\frac{١}{٣}\pi$)

، معادلة العمودى هى : ص + ١ = $\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$ × (س − $\frac{١}{٣}\pi$)

(٣) أوجد معادلتى المماس و العمودى لكل من المنحنيات التالية عند النقط المعطاة :

(أ) س² + ص² = ٥٢ عند النقطة (٤ ، − ٦)

(ب) س² + ٥ س ص + ص² = ٧ عند النقطة (− ١ ، − ١)

(حـ) ص² (١ + س²) = ٨ عند النقطة (− ١ ، ٢)

(ء) (حا س + حتا س) ص = حتا² س عند س = $\frac{١}{٢}\pi$

الحل

(أ) ∵ س² + ص² = ٥٢ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

٢ س + ٢ ص ص/ = ٠ ∴ س + ص ص/ = ٠ و منها : ص/ = $-\frac{س}{ص}$

∴ عند النقطة (٤ ، − ٦) فإن : ميل المماس = $-\frac{٤}{-٦}$ = $\frac{٢}{٣}$

، ميل العمودى = $-\frac{٣}{٢}$ ،

أحمد الشنتورى

معادلة المماس هى : ص + ٦ = ٢/٣ × (س − ٤)

∴ ٣ ص + ١٨ = ٢ س − ٨ أى : ٢ س − ٣ ص − ٢٦ = ٠

، معادلة العمودى هى : ص + ٦ = (− ٣/٢) × (س − ٤)

∴ ٢ ص + ١٢ = − ٣ س + ١٢ أى : ٣ س + ٢ ص = ٠

(ب) ∵ س² + ٥ س ص + ص² = ٧ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

٢ س + ٥ ص + ٥ س ص′ + ٢ ص ص′ = ٠

∴ ص′ (٥ س + ٢ ص) = − (٢ س + ٥ ص)

و منها : ص′ = − (٢ س + ٥ ص) / (٥ س + ٢ ص) ∴ عند النقطة (−١ ، −١) فإن :

ميل المماس = − (٢ × (−١) + ٥ × (−١)) / (٥ × (−١) + ٢ × (−١)) = − (−٧ / −٧) = −١

، ميل العمودى = ١ ، معادلة المماس هى : ص + ١ = (−١) × (س + ١)

∴ ص + ١ = − س − ١ أى : س + ص + ٢ = ٠

، معادلة العمودى هى : ص + ١ = ١ × (س + ١)

∴ ص + ١ = س + ١ أى : س − ص = ٠

(حـ) ∵ ص² (١ + س²) = ٨ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

ص² × ٢ س + (١ + س²) × ٢ ص ص′ = ٠

و منها : ص′ = − س ص² / ص (١ + س²) ∴ عند النقطة (−١ ، ٢) فإن :

ميل المماس = − (−١) × ٤ / ٢ (١ + ١) = ١ ، ميل العمودى = −١ ،

معادلة المماس هى : ص − ٢ = ١ × (س + ١)

∴ ص − ٢ = س + ١ أى : س − ص + ٣ = ٠

، معادلة العمودى هى : ص − ٢ = (−١) × (س + ١)

∴ ص − ٢ = − س − ١ أى : س + ص − ١ = ٠

(ء) ∵ (حا س + حتا س) ص = حتا² س ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

(حا س + حتا س) ص′ + (حتا س − حا س) ص

= ٢ حتا س × (− حا س) = − حا ٢ س

∴ (حا س + حتا س) ص′ = − حا ٢ س − (حتا س − حا س) ص

و منها : ص′ = (− حا ٢ س − (حتا س − حا س) ص) / (حا س + حتا س)

∴ عند س = ½ π فإن : (حا ½ π + حتا ½ π) ص = حتا² ½ π

∴ (١ + ٠) ص = ٠ ∴ ص = ٠ ،

ميل المماس = (− حا π − (حتا ½ π − حا ½ π) × ٠) / (حا ½ π + حتا ½ π) = ٠

، ميل العمودى = غير معرف ، ∴ عند النقطة (½ π ، ٠) فإن :

معادلة المماس هى : ص = ٠ ، معادلة العمودى هى : س = ½ π

(٤) أوجد معادلتى المماس و العمودى لكل من المنحنيات التالية عند القيم المعطاة :

(أ) س = ن² + ٤ ن ، ص = ٢ ن² عند : ن = ١

(ب) س = قا θ ، ص = طا θ عند : θ = ١/٦ π

الحل

(أ) ∵ س = ن² + ٤ ن ∴ ءس/ءن = ٢ ن + ٤

، ∵ ص = ٢ ن² ∴ ءص/ءن = ٤ ن

∴ ءص/ءس = ءص/ءن ÷ ءس/ءن = ٤ ن / (٢ ن + ٤) ، عند : ن = ١ فإن :

ميل المماس = ٤ × ١ / (٢ × ١ + ٤) = ٤/٦ = ٢/٣ ، ميل العمودى = − ٣/٢ ،

س = ١ + ٤ = ٥ ، ص = ١ × ٢ = ٢

∴ عند النقطة (٥ ، ٢) فإن :

معادلة المماس هى : ص − ٢ = $\frac{٢}{٣}$ × (س − ٥)

∴ ٣ ص − ٦ = ٢ س − ١٠ أى : ٢ س − ٣ ص − ٤ = ٠ .

، معادلة العمودى هى : ص − ٢ = (− $\frac{٣}{٢}$) × (س − ٥)

∴ ٢ ص − ٤ = − ٣ س + ١٥ أى : ٣ س + ٢ ص − ١٩ = ٠ .

(ب) ∵ س = قا θ ∴ $\frac{دس}{د\theta}$ = قا θ طا θ

، ∵ ص = طا θ ∴ $\frac{دص}{د\theta}$ = قا^{٢} θ

∴ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{دص}{د\theta}$ ÷ $\frac{دس}{د\theta}$ = $\frac{قا^{٢}\theta}{قا\theta\ طا\theta}$ = $\frac{قا\theta}{طا\theta}$ = $\frac{١}{حتا\theta}$ × $\frac{حتا\theta}{حا\theta}$

= $\frac{١}{حا\theta}$ = قتا θ و عندما : θ = $\frac{١}{٦}\pi$ فإن :

س = قا θ = قا $\frac{١}{٦}\pi$ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، ص = طا θ = طا $\frac{١}{٦}\pi$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

، ميل المماس = قتا $\frac{١}{٦}\pi$ = ٢ ، و ميل العمودى = − $\frac{١}{٢}$

∴ عند النقطة ($\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$) فإن :

معادلة المماس هى : ص − $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = ٢ × (س − $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$)

∴ $\sqrt{٣}$ ص − ١ = ٢ $\sqrt{٣}$ س − ٤ أى : ٢ $\sqrt{٣}$ س − $\sqrt{٣}$ ص − ٣ = ٠ .

أى بالقسمة ÷ $\sqrt{٣}$ ينتج : ٢ س − ص − $\sqrt{٣}$ = ٠ .

، معادلة العمودى هى : ص − $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = (− $\frac{١}{٢}$) × (س − $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$)

∴ ٢ $\sqrt{٣}$ ص − ٢ = − $\sqrt{٣}$ س + ٢ أى : $\sqrt{٣}$ س + ٢ $\sqrt{٣}$ ص − ٤ = ٠ .

(٥) إذا كانت النقطة (٤ ، − ٢) تنتمى للمنحنى :

س^{٢} + ص^{٢} − ٢ ك س + ١٢ = ٠ . أوجد قيمة ك

ثم أوجد معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة

الحل

∵ النقطة (٤ ، − ٢) تنتمى للمنحنى : س^{٢} + ص^{٢} − ٢ ك س + ١٢ = ٠ .

∴ فهى تحقق معادلته أى أن : ١٦ + ٤ − ٨ ك + ١٢ = ٠

∴ ٣٢ − ٨ ك = ٠ و منها : ك = ٤ ،

معادلة المنحنى هى : س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س + ١٢ = ٠ .

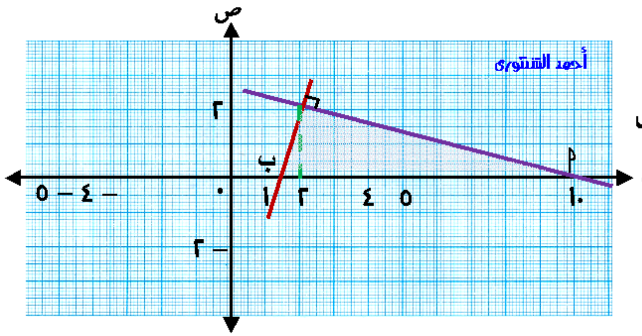
∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج : ٢ س + ٢ ص ص′ − ٨ = ٠ .

و منها : ص′ = $\frac{٤ - س}{ص}$ ∴ عند النقطة (٤ ، − ٢) فإن :

ميل المماس = $\frac{٤ - ٤}{- ٢}$ = ٠ ، معادلة المماس هى : ص + ٢ = ٠ .

(٦) أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور السينات و المماس و العمودى عليه للمنحنى : س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ٢٠ عند النقطة (٢ ، ٢)

الحل



∵ س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ٢٠

∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

٢ س + ٨ ص ص′ = ٠ .

و منها : ص′ = $\frac{- س}{٤ ص}$

∴ عند النقطة (٢ ، ٢)

فإن : ميل المماس = $\frac{- ٢}{٤ \times ٢}$ = − $\frac{١}{٤}$ ، ميل العمودى = ٤ ،

معادلة المماس هى : ص − ٢ = (− $\frac{١}{٤}$) × (س − ٢)

∴ ٤ ص − ٨ = − س + ٢ أى : س + ٤ ص − ١٠ = ٠ .

، معادلة العمودى هى : ص − ٢ = ٤ × (س − ٢)

∴ ص − ٢ = ٤ س − ٨ أى : ٤ س − ص − ٦ = ٠ .

بفرض أن : المماس يقطع محور السينات فى النقطة أ (ل ، ٠)

∴ بالتعويض فى معادلة المماس ينتج : ل − ١٠ = ٠ و منها : ل = ١٠

أى أن : المماس يقطع محور السينات فى النقطة أ (١٠ ، ٠)

، بفرض أن : العمودى على المماس يقطع محور السينات فى النقطة ب (ل ، ٠)

∴ بالتعويض فى معادلة العمودى ينتج : ٤ ل − ٦ = ٠ و منها : ل = $\frac{٣}{٢}$

أى أن : العمودى يقطع محور السينات فى النقطة ب ($\frac{٣}{٢}$ ، ٠)

∴ أ ب = | ١٠ − $\frac{٣}{٢}$ | = $\frac{١٧}{٢}$ وحدة طول

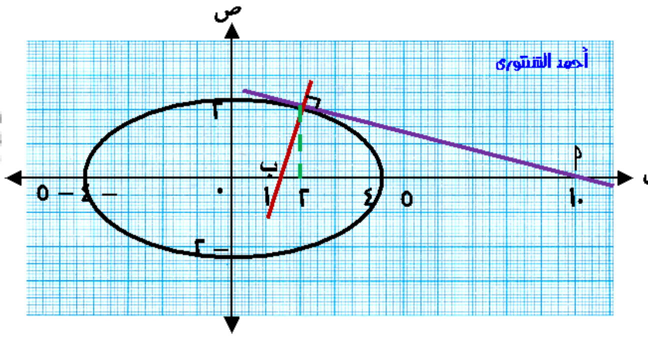
، و من الشكل : ارتفاع المثلث المطلوب = ٢ وحدة طول

∴ مساحة المثلث المطلوب = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١٧}{٢}$ × ٢ = $\frac{١٧}{٢}$ (٨,٥) وحدة مربعة

ملاحظة :

" معلومة إثرائية " : المنحنى يمثل قطع ناقص معادلته هى : $\frac{\text{س}^{٢}}{٢٠} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٥} = ١$

و الشكل المقابل يمثل ذلك المنحنى



(٧) أثبت أن المنحنيين : (س − ١)^{٢} + ص^{٢} = ٢ ، (س + ١)^{٢} + ص^{٢} = ٢ يتقاطعان على التعامد

ثم أوجد معادلات المماسات لهما عند نقط التقاطع

الحل

∵ معادلة المنحنى الأول هى : ص^{٢} = ٢ − (س − ١)^{٢}

، معادلة المنحنى الثانى هى : ص^{٢} = ٢ − (س + ١)^{٢}

∴ لايجاد نقط التقاطع نضع : ٢ − (س − ١)^{٢} = ٢ − (س + ١)^{٢}

∴ − س^{٢} + ٢ س − ١ = − س^{٢} − ٢ س − ١

∴ ٤ س = ٠ ∴ س = ٠ ، بالتعويض فى معادلة المنحنى الأول ينتج :

ص^{٢} = ٢ − (٠ − ١)^{٢} = ٢ − ١ = ١ و منها : ص = ١ أ؛ ص = −١

∴ نقط التقاطع هى : (٠ ، ١) ، (٠ ، −١)

، باشتقاق معادلة المنحنى الأول بالنسبة إلى س ينتج :

٢ ص ص$'$ = −٢ × (س − ١) و منها : ص$'$ = $\frac{-\text{س} + ١}{\text{ص}}$

، باشتقاق معادلة المنحنى الأول بالنسبة إلى س ينتج :

٢ ص ص$'$ = −٢ × (س + ١) و منها : ص$'$ = $\frac{-\text{س} - ١}{\text{ص}}$

∵ عند النقطة (٠ ، ١) : ميل المماس للمنحنى الأول (م$_{١}$) = ١

، ميل المماس للمنحنى الثانى (م$_{٢}$) = −١

∵ م$_{١}$ × م$_{٢}$ = ١ × −١ = −١ ∴ المنحنيان يتقاطعان على التعامد ،

معادلة المماس للمنحنى الأول هى : ص − ١ = ١ × (س − ٠)

∴ ص − ١ = س أى : س − ص + ١ = ٠

معادلة المماس للمنحنى الثانى هى : ص − ١ = (−١) × (س − ٠)

∴ ص − ١ = − س أى : س + ص − ١ = ٠

، عند النقطة (٠ ، −١) : ميل المماس للمنحنى الأول (م$_{١}$) = −١

، ميل المماس للمنحنى الثانى (م$_{٢}$) = ١

∵ م$_{١}$ × م$_{٢}$ = −١ × ١ = −١ ∴ المنحنيان يتقاطعان على التعامد ،

معادلة المماس للمنحنى الأول هى : ص + ١ = (−١) × (س − ٠)

∴ ص + ١ = − س أى : س + ص + ١ = ٠

معادلة المماس للمنحنى الثانى هى : ص + ١ = ١ × (س − ٠)

∴ ص + ١ = س أى : س − ص − ١ = ٠

١ – ٥ المعدلات الزمنية المرتبطة

إذا كانت : ص = د (س) ، س تتغير تبعاً لتغير الزمن ن
فإن : ص تتغير أيضاً تبعاً لتغير الزمن ن
أى أن : ص دالة الدالة فى الزمن ن و يكون :

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ن}} = \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} \times \frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}}$$

و تربط هذه العلاقة المعدل الزمنى لتغير س $\left(\frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}} \right)$

بالمعدل الزمنى لتغير ص $\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ن}} \right)$

ملاحظات :

(١) إذا كان المتغير يتزايد بتزايد الزمن فإن المعدل يكون موجباً
(٢) إذا كان المتغير يتناقص بتزايد الزمن فإن المعدل يكون سالباً
(٣) بعض الأفعال التى تدل على أن المعدل موجباً :
يتزايد ، يبتعد ، يتمدد ، يصب ، يتراكم ، ....
(٤) بعض الأفعال التى تدل على أن المعدل سالباً :
يتناقص ، يقترب ، ينكمش ، يتسرب ، ينصهر ، ....
(٥) إذا كانت : س_0 القيمة الابتدائية للمتغير س عند (ن = ٠)
، $\frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}}$ معدل تغير س بالنسبة للزمن ن ، س قيمة المتغير بعد س زمن ن فإن : $\text{س} = \text{س}_0 + \frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}} \times \text{ن}$

خطوات حل مسائل المعدلات الزمنية :

(١) تحديد المعطى و المطلوب مع الرسم إن أمكن
(٢) إيجاد علاقة رياضية تربط بين المتغيرات
(٣) اشتقاق طرفى العلاقة بالنسبة للزمن
(٤) التعويض بالمعطى لإيجاد المطلوب

ملاحظات :

(١) العلاقة الرياضية التى تربط بين المتغيرات قد تكون :
محيط أو مساحة شكل هندسى ، المساحة الجانبية أو الكلية أو حجم مجسم ، تناسب أضلاع مثلثين متشابهين ، .....
(٢) العلاقة الرياضية قد تربط بين أكثر من متغيرين

حل تمارين (١ – ٥) صفحة ٢٧ بالكتاب المدرسى

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{٤}{\pi}$ سم / ث
فإن : محيط الدائرة يزيد عند هذه اللحظة بمعدل .... سم / ث

(أ) $\frac{١}{\pi}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٨}$ (د) ٨

(٢) ينصهر مكعب من الثلج محتفظاً بشكله بمعدل ١ سم^{٣} / ث فإن :
معدل تغير طول حرف المكعب عندما يكون حجمه ٨ سم^{٣} هو :
.... سم / ث

(أ) $-\frac{١}{١٢}$ (ب) $\frac{١}{١٢}$ (جـ) $-\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{١}{٦}$

(٣) جسم يتحرك على المنحنى : ص^{٢} = س^{٣} ، إذا كان :

$\frac{\text{ع س}}{\text{ع ن}} = \frac{١}{٢}$ وحدة / ث عند ص = − ١ فإن :

$\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}}$ عند هذه اللحظة يساوى .... وحدة / ث

(أ) $-\frac{٣}{٤}$ (ب) $-\frac{٣}{٨}$ (حـ) $\frac{٣}{٤}$ (ء) $\frac{٣}{٢}$

(٤) إذا كان ميل المماس للمنحنى : ص = د (س) عند نقطة ما = $\frac{١}{٢}$

و كان الاحداثى السينى لهذه النقطة يتناقص بمعدل ٣ وحدات / ث

فإن : معدل تغير احداثيها الصادى يساوى .... وحدة / ث

(أ) $-\frac{١}{٦}$ (ب) $-\frac{٣}{٢}$ (حـ) $\frac{١}{٦}$ (ء) $\frac{٣}{٢}$

الحل

(١) نفرض أن : طول نصف قطر الدائرة = نق ، محيطها = م

∴ م = ٢ π نق ، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

، $\frac{\text{ع م}}{\text{ع ن}} = ٢\pi \frac{\text{ع نق}}{\text{ع ن}} = ٢\pi \times \frac{٤}{\pi} = ٨$ سم / ث

∴ محيط الدائرة يزيد بمعدل ٨ سم / ث

(٢) نفرض أن : طول حرف المكعب = ل ∴ حجمه (ح) = $ل^{٣}$

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج : $\frac{\text{ع ح}}{\text{ع ن}} = ٣ ل^{٢} \frac{\text{ع ل}}{\text{ع ن}}$ (١)

، ∵ ح = ٨ $سم^{٣}$ فإن : ل = ٢ سم ، ∵ $\frac{\text{ع ح}}{\text{ع ن}} = -١$ $سم^{٣}$ / ث

∴ $-١ = ٣ \times ٤ \frac{\text{ع ل}}{\text{ع ن}}$ و منها : $\frac{\text{ع ل}}{\text{ع ن}} = -\frac{١}{١٢}$ سم / ث

∴ طول حرف المكعب يتناقص بمعدل $\frac{١}{١٢}$ سم / ث

(٣) ∵ $ص^{٢} = س^{٣}$ ∴ ص = − ١ فإن : $س^{٣} = ١$ أى أن : س = ١

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج : $٢ ص \frac{\text{ع ص}}{\text{ع ن}} = ٣ س \frac{\text{ع س}}{\text{ع ن}}$

∴ $٢ \times (-١) \frac{\text{ع ص}}{\text{ع ن}} = ٣ \times ١ \times \frac{١}{٢}$ و منها : $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع ن}} = -\frac{٣}{٤}$ وحدة / ث

(٤) ∵ $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}} = \frac{\text{ع ص}}{\text{ع ن}} \div \frac{\text{ع س}}{\text{ع ن}}$ ∴ $\frac{١}{٢} = \frac{\text{ع ص}}{\text{ع ن}} \times -\frac{١}{٣}$

و منها : $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع ن}} = -\frac{٣}{٢}$ وحدة / ث

∴ الاحداثى الصادى يتناقص بمعدل $\frac{٣}{٢}$ وحدة / ث

(٥) تتحرك نقطة على منحنى معادلته :

$س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س + ٢ ص - ٦ = ٠$. فإذا كان معدل تغير احداثيها السينى بالنسبة للزمن عند النقطة (٣ ، ١) يساوى ٤ وحدات / ث ، أوجد معدل تغير احداثيها الصادى بالنسبة للزمن

الحل

∵ $س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س + ٢ ص - ٦ = ٠$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$٢ س \frac{\text{ع س}}{\text{ع ن}} + ٢ ص \frac{\text{ع ص}}{\text{ع ن}} - ٤ \frac{\text{ع س}}{\text{ع ن}} + ٢ \frac{\text{ع ص}}{\text{ع ن}} = ٠$

، ∵ عند النقطة (٣ ، ١) $\frac{\text{ع س}}{\text{ع ن}} = ٤$ وحدات / ث

∴ $٢ \times ٣ \times ٤ + ٢ \times ١ \times \frac{\text{ع ص}}{\text{ع ن}} - ٤ \times ٤ + ٢ \times \frac{\text{ع ص}}{\text{ع ن}} = ٠$

و منها : $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع ن}} = -٠,٨$ ∴ الاحداثى الصادى يتناقص بمعدل ٠,٨ وحدة / ث

(٦) سقط حجر فى بحيرة ساكنة فتولدت موجة دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٤ سم / ث ، أوجد معدل تزايد مساحة سطح الموجة فى نهاية ٥ ثوان

الحل

بفرض أن : طول نصف قطر الموجة = نق ، مساحة سطحها = م

∴ م = π $نق^{٢}$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$\frac{\text{ع م}}{\text{ع ن}} = ٢\pi\, نق \frac{\text{ع نق}}{\text{ع ن}}$ ، بعد : ٥ ثوان فإن :

$نق = نق_{.} + \frac{\text{ع نق}}{\text{ع ن}} \times ن = ٠ + ٤ \times ٥ = ٢٠$ سم

∴ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = 2\pi \times 20 \times 4 = 160\pi$ سم² / ث

أى أن : مساحة سطح الموجة تتزايد بمعدل 160π سم² / ث

(٧) صفيحة على شكل سداسى منتظم تنكمش بالبرودة ، وجد أن معدل تغير طول ضلعها ٠,١ سم / ث ، أوجد معدل التغير فى مساحة الصفيحة عندما يكون طول ضلعها ١٠ سم

الحل

بفرض أن : طول ضلع الصفيحة = ل ، مساحة سطحها = م

، ∵ الصفيحة على شكل سداسى منتظم ∴ $\text{م} = \frac{3}{2}\sqrt{3}\,\text{ل}^2$

∴ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج : $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \times 2\,\text{ل}\,\frac{\text{ءل}}{\text{ءن}}$

، عندما : ل = ١٠ سم ، $\frac{\text{ءل}}{\text{ءن}} = -0.1$ سم / ث

∴ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \times 2 \times 10 \times (-0.1) = -3\sqrt{3}$

أى أن : مساحة الصفيحة تتناقص بمعدل $3\sqrt{3}$ سم² / ث

(٨) كتلة معلومة من غاز درجو حرارتها ثابتة ، انقص حجمها بمعدل ثابت قدره ٢ سم³ / ث ، فإذا كان الضغط يتناسب عكسياً مع الحجم و أن الضغط يعادل ١٠٠٠ ث جم / سم³ عندما يكون الحجم ٢٥٠ سم³ ، أوجد معدل تغير الضغط بالنسبة للزمن عندما يصبح حجم الغاز ١٠٠ سم³

الحل

بفرض أن : الضغط = ض ، الحجم = ع ، ∵ $\text{ض} \propto \frac{1}{\text{ع}}$

∴ $\text{ض} = \frac{\text{ك}}{\text{ع}}$ حيث : ك ثابت $\neq 0$

، ∵ ض = ١٠٠٠ ث جم / سم³ ، ∵ ع = ٢٥٠ سم³

∴ $1000 = \frac{\text{ك}}{250}$ و منها : ك = ٢٥٠٠٠٠ ∴ $\text{ض} = \frac{250000}{\text{ع}}$

∴ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج : $\frac{\text{ءض}}{\text{ءن}} = -\frac{250000}{\text{ع}^2} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$

، عندما ع = ١٠٠ سم³ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = -2$ سم³ / ث

∴ $\frac{\text{ءض}}{\text{ءن}} = -\frac{250000}{10000} \times (-2) = 50$ ث جم / سم³ / ث

أى أن : الضغط يتزايد بمعدل ٥٠ ث جم / سم³ / ث

(٩) يتسرب الغاز من بالون كرى بمعدل ٢٠ سم³ / ث ، أوجد معدل تغير طول نصف قطر البالون فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطره ١٠ سم ، ثم أوجد معدل تغير مساحة السطح الخارجى للبالون فى هذه اللحظة

الحل

بفرض أن : طول نصف قطر البالون = نق ، حجمه = ع

، مساحة السطح الخارجى = م

، ∵ البالون كرى الشكل ∴ $\text{ع} = \frac{4}{3}\pi\,\text{نق}^3$

∴ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج : $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = \frac{4}{3}\pi \times 3\,\text{نق}^2\,\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$

، ∵ نق = ١٠ سم ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = -20$ سم³ / ث

∴ $-20 = \frac{4}{3}\pi \times 3 \times 100 \times \frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$ و منها : $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}} = \frac{-1}{20\pi}$ سم / ث

أى أن : طول نصف قطر البالون يتناقص بمعدل $\frac{-1}{20\pi}$ سم / ث

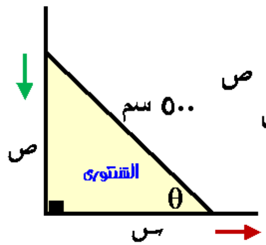
، $\text{م} = 4\pi\,\text{نق}^2$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = 8\pi\,\text{نق}\,\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$ ، ∵ نق = ١٠ سم ، $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}} = \frac{-1}{20\pi}$ سم / ث

∴ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = 8\pi \times 10 \times \frac{-1}{20\pi} = -4$ سم² / ث

أى أن : مساحة السطح الخارجى للبالون تتناقص بمعدل ٤ سم² / ث

(١٠) سلم طوله ٥ أمتار يرتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى و بطرفه السفلى على أرض أفقية ، إذا تحرك الطرف السفلى مبتعداً عن الحائط بمعدل ٤ سم / د عندما يكون الطرف العلوى على ارتفاع ٤ أمتار ، أوجد معدل انزلاق الطرف العلوى للسلم ، ثم أوجد معدل تغير قياس الزاوية بين السلم و الأرض عند هذه اللحظة



الحل

نفرض أن : المسافة بين الطرف العلوى للسلم و الآرض = ص

، المسافة بين الطرف السفلى للسلم و الحائط الرأسى = س

∴ من هندسة الشكل : $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥٠٠٠٠$ (١)

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$٢ س \frac{ءس}{ءن} + ٢ ص \frac{ءص}{ءن} = ٠$ ، عندما : ص = ٤٠٠ سم

∴ من (١) : س = ٣٠٠ سم ، ∵ $\frac{ءس}{ءن} = ٤$ سم / د

∴ $٢ × ٣٠٠ × ٤ + ٢ × ٤٠٠ \frac{ءص}{ءن} = ٠$ و منها : $\frac{ءص}{ءن} = -٣$ سم / د

أى أن : الطرف العلوى ينزلق لأسفل بمعدل ٣ سم / د

و بفرض أن θ قياس الزاوية بين السلم و الأرض

∴ من هندسة الشكل : $حا θ = \frac{ص}{٥٠٠}$ ، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

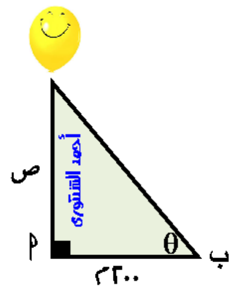
$حتا θ \frac{ءθ}{ءن} = \frac{١}{٥٠٠} × \frac{ءص}{ءن}$

، عندما : ص = ٤٠٠ سم فإن : $حتا θ = \frac{٣}{٥}$ ، $\frac{ءص}{ءن} = -٣$ سم / د

∴ $\frac{٣}{٥} × \frac{ءθ}{ءن} = \frac{١}{٥٠٠} × -٣$ و منها : $\frac{ءθ}{ءن} = -٠,٠١$ ^ء / د أى أن :

قياس الزاوية بين السلم و الأرض يتناقص بمعدل ٠,٠١ زاوية نصف قطرية / د

(١١) يرتفع بالون رأسياً لأعلى من نقطة أ على سطح الأرض ، وضع جهاز لتتبع حركة البالون عند نقطة ب فى نفس المستوى الأفقى للنقطة أ و على بعد ٢٠٠ متر منها ، عند لحظة ما رصد الجهاز زاوية ارتفاع البالون فوجدها $\frac{١}{٤} π$ و تتزايد بمعدل ٠,١٢ ^ء / د أوجد معدل ارتفاع البالون فى هذه اللحظة



الحل

نفرض أن : ارتفاع البالون عن الآرض = ص

∴ من هندسة الشكل : $طا θ = \frac{ص}{٢٠٠}$

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

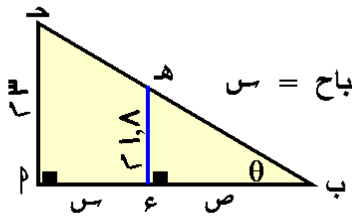
$قا^{٢} θ \frac{ءθ}{ءن} = \frac{١}{٢٠٠} × \frac{ءص}{ءن}$ ،

عندما $θ = \frac{١}{٤} π$ ، $\frac{ءθ}{ءن} = ٠,١٢$ ^ء / د فإن :

$قا^{٢} \frac{١}{٤} π × \frac{١٢}{١٠٠} = \frac{١}{٢٠٠} × \frac{ءθ}{ءن}$ ∴ $(\sqrt{٢})^{٢} × \frac{١٢}{١٠٠} = \frac{١}{٢٠٠} × \frac{ءθ}{ءن}$

و منها : $\frac{ءθ}{ءن} = ٤٨$ م / د أى أن : البالون يرتفع بمعدل ٤٨ م / د

(١٢) يسير رجل طوله ١٨٠ سم مبتعداً عن قاعدة مصباح ارتفاعه ٣ أمتار بمعدل ١,٢ م / ث ، أوجد معدل تغير طول ظل الرجل ، و إذا كان المستقيم المار بأعلى نقطة من رأس الرجل و قمة المصباح يميل على الأرض بزاوية θ ^ء عندما يبعد الرجل عن قاعدة المصباح بمسافة قدرها س متراً فأثبت أن : $س = \frac{٢}{٣}$ ظتا θ ، ثم أوجد معدل تغير θ عندما يبعد الرجل مسافة ٣,٦ متر عن قاعدة المصباح



الحل

نفرض أن : طول ظل الرجل = ص ،

المسافة التى يتحركها الرجل مبتعداً عن قاعدة المصباح = س

، من هندسة الشكل : △ أ ب حـ ~ △ ء ب هـ

∴ $\frac{س + ص}{ص} = \frac{٣}{١,٨} = \frac{٥}{٣}$ و منها :

$٣ س + ٣ ص = ٥ ص$

∴ ٣ س = ٢ ص ، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

٣ $\frac{دس}{دن}$ = ٢ $\frac{دص}{دن}$ و عندما : $\frac{دس}{دن}$ = ١,٢ فإن :

٣ × ١,٢ = ٢ $\frac{دص}{دن}$ ∴ $\frac{دص}{دن}$ = ١,٨ م / ث

أى أن : طول ظل الرجل يتزايد بمعدل ١,٨ م / ث

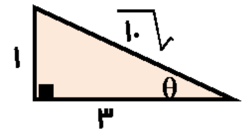
، من هندسة الشكل : ظا θ = $\frac{٣}{س + ص}$

∴ (س + ص) ظا θ = ٣ ، ∵ ٣ س = ٢ ص أى : ص = $\frac{٣}{٢}$ س

∴ (س + $\frac{٣}{٢}$ س) ظا θ = ٣ ∴ $\frac{٥}{٢}$ س ظا θ = ٣

∴ س ظا θ = $\frac{٦}{٥}$ ∴ س = $\frac{٦}{٥}$ ظتا θ

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج : $\frac{دس}{دن}$ = $\frac{٦}{٥}$ × − قتا² θ $\frac{د\theta}{دن}$



و عندما : $\frac{دس}{دن}$ = ١,٢ ، س = ٣,٦

فإن : ٣,٦ ظا θ = $\frac{٦}{٥}$ و منها : ظا θ = $\frac{١}{٣}$

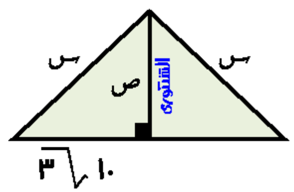
∴ ١,٢ = $\frac{٦}{٥}$ × − $\left(\frac{\sqrt{١٠}}{١}\right)^٢$ $\frac{د\theta}{دن}$

و منها : $\frac{د\theta}{دن}$ = − ٠,١ ء / ث

أى أن : θ تتناقص بمعدل ٠,١ زاوية نصف قطرية / د

(١٣) مثلث متساوى الساقين طول قاعدته ٢٠ $\sqrt{٣}$ سم ، إذا كان طول كل من ساقيه يتناقص بمعدل ٣ سم / ساعة ، فأوجد معدل تناقص مساحة سطح المثلث عند اللحظة التى يكون فيها طول كل من الساقين مساوياً لطول القاعدة

الحل



نفرض أن : طول كل من ساقى المثلث = س

ارتفاع المثلث = ص ، مساحة المثلث = ن

، من هندسة الشكل : ص² = س² − ٣٠٠

أى أن : ص = $(س^٢ - ٣٠٠)^{\frac{١}{٢}}$

∴ م = $\frac{١}{٢}$ × ٢٠ $\sqrt{٣}$ × $(س^٢ - ٣٠٠)^{\frac{١}{٢}}$ = ١٠ $\sqrt{٣}$ $(س^٢ - ٣٠٠)^{\frac{١}{٢}}$

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$\frac{دم}{دن}$ = ١٠ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ $(س^٢ - ٣٠٠)^{-\frac{١}{٢}}$ × ٢ س $\frac{دس}{دن}$

= ١٠ $\sqrt{٣}$ س $(س^٢ - ٣٠٠)^{-\frac{١}{٢}}$ $\frac{دس}{دن}$

و عندما : س = ٢٠ $\sqrt{٣}$ ، $\frac{دس}{دن}$ = − ٣

∴ $\frac{دم}{دن}$ = ١٠ $\sqrt{٣}$ × ٢٠ $\sqrt{٣}$ $(١٢٠٠ - ٣٠٠)^{-\frac{١}{٢}}$ × (− ٣)

= ٦٠٠ × $\frac{١}{٣٠}$ × (− ٣) = − ٦٠

أى أن مساحة المثلث تتناقص بمعدل ٦٠ سم² / ساعة

حل تمارين عامة صفحة ٣٠ بالكتاب المدرسى

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) إذا كان : ص = ٤ قا² س فإن : ص/ $(\frac{١}{٤} \pi)$ يساوى ....

(أ) − ٨ (ب) صفر (جـ) ٤ $\sqrt{٢}$ (د) ١٦

(٢) إذا كان : ص = حا ٢ س حتا ٢ س فإن : ص// $(\frac{١}{٢} \pi)$ يساوى ....

(أ) − ٤ (ب) صفر (جـ) ٤ $\sqrt{٢}$ (د) ٨

(٣) تتحرك نقطة على المنحنى : س ص² = ١٢ ، عند النقطة (٣ ، ٢) يكون : $\frac{دص}{دس}$ يساوى ....

(أ) − ٤ (ب) − $\frac{٣}{٢}$ (جـ) − $\frac{١}{٣}$ (د) ٣

(٤) إذا كان : ص = ٢ ن^{٣} + ٧ ، ع = ن^{٢} − ٤ فإن :
معدل تغير ص بالنسبة إلى ع يساوي ....
(أ) ٢ ن (ب) ٣ ن (جـ) ٦ (د) ١٢

(٥) يتزايد طول نصف قطر دائرة بمعدل ٢ سم / د و مساحتها بمعدل ٢٠ π سم^{٢} / د فإن : طول نصف قطرها عند هذه اللحظة يساوي .... سم
(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ٥ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

الحل

(١) ∵ ص = ٤ قا^{٢} س ∴ ص$'$ = ٨ قا^{٢} س طا س
، ص$'$ ($\frac{١}{٤}$ π) = ٨ قا^{٢} $\frac{١}{٤}$ π طا $\frac{١}{٤}$ π = ٨ × ($\sqrt{٢}$)^{٢} × ١ = ١٦

(٢) ∵ ص = حا ٢ س حتا ٢ س = $\frac{١}{٢}$ × (٢ حا ٢ س حتا ٢ س)
= $\frac{١}{٢}$ حا ٤ س ∴ ص$'$ = $\frac{١}{٢}$ × ٤ حتا ٤ س = ٢ حتا ٤ س
، ص$''$ = ٢ × (− ٤ حا ٤ س) = − ٨ حا ٤ س
∴ ص$''$ ($\frac{١}{٣}$ π) = − ٨ حا $\frac{٤}{٣}$ π = − ٨ × − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٤ $\sqrt{٣}$

(٣) ∵ س ص^{٢} = ١٢ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :
ص^{٢} + ٢ س ص $\frac{دص}{دس}$ = ٠ ∴ $\frac{دص}{دس}$ = − $\frac{٢س}{ص}$
، عند النقطة (٣ ، ٢) : $\frac{دص}{دس}$ = − $\frac{٦}{٢}$ = − ٣

(٤) ∵ ص = ٢ ن^{٣} + ٧ ∴ $\frac{دص}{دن}$ = ٦ ن^{٢}
، ∵ ع = ن^{٢} − ٤ ∴ $\frac{دع}{دن}$ = ٢ ن
، $\frac{دص}{دع}$ = $\frac{دص}{دن}$ ÷ $\frac{دع}{دن}$ = $\frac{٦ن^{٢}}{٢ن}$ = ٣ ن

(٥) بفرض أن : طول نصف قطر الجائرى = نق ، مساحة سطحها = م
∴ م = π نق^{٢} ∴ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :
$\frac{دم}{دن}$ = ٢ π نق $\frac{دنق}{دن}$ ∴ ٢٠ π = ٢ π نق × ٥ و منها : نق = ٥ سم

أجب عما يأتي :

(٦) أوجد $\frac{دص}{دس}$ إذا كانت ص تساوي :
(أ) س + طتا ٢ س (ب) $\sqrt[٣]{س}$ + قا ٥ س
(جـ) ٢ س − ٥ حتا (π س)^{٢} (د) ٢ حتا^{٢} (π س + ١)
(هـ) طا س طتا س (و) قا ٢ س طا ٢ س

الحل

(أ) ∵ ص = س + طتا ٢ س ∴ $\frac{دص}{دس}$ = ١ − ٢ قتا^{٢} ٢ س

(ب) ∵ ص = $\sqrt[٣]{س}$ + قا ٥ س = س$^{\frac{١}{٣}}$ + قا ٥ س
∴ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{٣}$ س$^{-\frac{٢}{٣}}$ + قا ٥ س طا ٥ س × ٥
= $\frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^{٢}}}$ + ٥ قا ٥ س قا ٥ س

(جـ) ∵ ص = ٢ س − ٥ حتا (π س)^{٢} = ٢ س − ٥ حتا π^{٢} س^{٢}
∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٢ − ٥ × (− حا (π س)^{٢}) × ٢ π^{٢} س
= ٢ + ١٠ π^{٢} س حا (π س)^{٢}

(د) ∵ ص = ٢ حتا^{٢} (π س + ١)
∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٢ × ٢ حتا (π س + ١) × (− حا (π س + ١)) × π
= − ٢ π × ٢ حا (π س + ١) حتا (π س + ١)
= − ٢ π حا ٢ (π س + ١)

(هـ) ∵ ص = طا س طتا س = ١ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

(و) ∵ ص = قا ٢ س طا ٢ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = قا ٢ س × طا^٢ ٢ س × ٢ + طا ٢ س × قا ٢ س طا ٢ س × ٢

= ٢ قا ٢ س طا^٢ ٢ س + ٢ قا^٢ ٢ س طا ٢ س

= ٢ قا ٢ س (طا^٢ ٢ س + قا^٢ ٢ س)

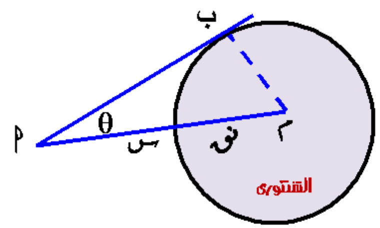
= ٢ قا ٢ س (قا^٢ ٢ س − ١ + قا^٢ ٢ س)

= ٢ قا ٢ س (٢ قا^٢ ٢ س − ١)

(٧) فى الشكل المقابل : أ نقطة تتحرك فى المستوى ،

$\overline{أب}$ مماس للدائرة م عند ب ،

أ م = س + نق حيث : نق طول نصف قطر الدائرة



(أ) أثبت أن : س = نق (قتا θ − ١)

(ب) أوجد معدل تغير س بالنسبة إلى θ عندما : θ = $\frac{١}{٦}$ π

الحل

(أ) ∵ $\overline{أب}$ مماس للدائرة ، $\overline{مب}$ نصف قطر فى الدائرة ∴ $\overline{أب}$ ⊥ $\overline{مب}$

∴ قتا θ = $\frac{أم}{مب}$ = $\frac{نق + س}{نق}$ ∴ نق قتا θ = نق + س

∴ نق قتا θ − نق = س و منها : س = نق (قتا θ − ١)

و بالاشتقاق بالنسبة إلى θ ينتج : $\frac{ءس}{ءθ}$ = نق (− قتا θ طتا θ)

(ب) عندما : θ = $\frac{١}{٦}$ π فإن : $\frac{ءس}{ءθ}$ = − نق قتا $\frac{١}{٦}$ π طتا $\frac{١}{٦}$ π

= − نق × ٢ × $\sqrt{٣}$ = − ٢ $\sqrt{٣}$ نق

(٨) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ فى أبسط صورة لكل من :

(أ) س^٢ − ٣ ص^٢ + ٩ = ٠

(ب) ٥ س^٢ + ١٢ ص^٣ − ٧ = ٠

(حـ) س^٢ − ٢ س ص + ٢ ص^٢ = ١٤

(ء) (س − ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٢٥

(هـ) س ص + حا س = ٥

(و) حا س حتا ص = $\frac{١}{٢}$

الحل

(أ) ∵ س^٢ − ٣ ص^٢ + ٩ = ٠ ∴ ٢ س − ٦ ص ص$'$ = ٠

و منها : $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{س}{٣ ص}$

(ب) ∵ ٥ س^٢ + ١٢ ص^٣ − ٧ = ٠ ∴ ١٠ س + ٣٦ ص^٢ ص$'$ = ٠

و منها : $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{− ٥ س}{١٨ ص^٢}$

(حـ) ∵ س^٢ − ٢ س ص + ٢ ص^٢ = ١٤

∴ ٢ س − ٢ ص − ٢ س ص$'$ + ٤ ص ص$'$ = ٠

∴ ص$'$ (س − ٢ ص) = س − ص

و منها : $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{س − ص}{س − ٢ ص}$

(ء) ∵ (س − ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٢٥

∴ ٢ (س − ٣) + ٢ (ص + ٢) ص$'$ = ٠

و منها : $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٣ − س}{ص + ٢}$

(هـ) ∵ س ص + حا س = ٥ ∴ ص − س ص$'$ + حتا س = ٠

و منها : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص + حتا س}}{\text{س}}$

(و) ∵ حا س حتا ص = $\frac{1}{2}$

∴ حتا س حتا ص + حا س × (− حا ص) ص$'$ = ٠

و منها : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{حتا س حتا ص}}{\text{حا س حا ص}}$ = ظتا س ظتا ص

(٩) (أ) أوجد معدل تغير (س + ٣) (س − ٢) بالنسبة إلى $\frac{\text{س − ٣}}{\text{س + ٢}}$

(ب) إذا كانت : د (س) = $\frac{\text{٢}}{\text{س + ١}}$ ، ر (س) = ٣ س

أوجد $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ [(د ∘ ر) (س)] عند : س = − ٢

الحل

(أ) نضع : ص = (س + ٣) (س − ٢) = س^2 − ٥ س + ٦

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ س − ٥ ، ع = $\frac{\text{س − ٣}}{\text{س + ٢}}$

∴ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{\text{(س + ٢) × ١ − (س − ٣) × ١}}{\text{(س + ٢)}^2} = \frac{\text{٥}}{\text{(س + ٢)}^2}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \div \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = (٢ س − ٥) × $\frac{\text{(س + ٢)}^2}{\text{٥}}$

= $\frac{1}{5}$ (٢ س − ٥) (س + ٢)^2

(ب) نفرض أن : ص = [(د ∘ ر) (س)] = د [ر (س)]

= د (٣ س) = $\frac{\text{٢}}{\text{٣ س + ١}}$ = ٢ (٣ س + ١)$^{-1}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ × (− ١) (٣ س + ١)$^{-2}$ × ٣

، عند : س = − ٢ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − ٦ × (− ٥)$^{-2}$ = − $\frac{6}{25}$

(١٠) (أ) إذا كانت : ص = $\sqrt{\text{٢ س + ٥}}$ أثبت أن :

(٢ س + ٥) $\frac{\text{ء}^3\text{ص}}{\text{ء س}^3}$ + ٣ $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ء س}^2}$ = ٠

(ب) إذا كانت : س ص = حا أ س أثبت أن :

س $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ء س}^2}$ + ٢ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + أ^2 س ص = ٠

(حـ) إذا كانت : ص = أ حتا س^2 + ب حا س^2 أثبت أن :

س $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ء س}^2}$ − $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ٤ س^3 ص = ٠

الحل

(أ) ∵ ص = $\sqrt{\text{٢ س + ٥}}$ = (٢ س + ٥)$^{\frac{1}{2}}$

∴ ص$'$ = $\frac{1}{2}$ (٢ س + ٥)$^{-\frac{1}{2}}$ × ٢ = (٢ س + ٥)$^{-\frac{1}{2}}$

∴ ص$''$ = − $\frac{1}{2}$ (٢ س − ٥)$^{-\frac{3}{2}}$ × ٢ = − (٢ س − ٥)$^{-\frac{3}{2}}$

∴ ص$'''$ = − × − $\frac{3}{2}$ (٢ س − ٥)$^{-\frac{5}{2}}$ × ٢ = ٣ (٢ س − ٥)$^{-\frac{5}{2}}$

∴ الطرف الأيمن = (٢ س + ٥) × ٣ (٢ س − ٥)$^{-\frac{5}{2}}$ +

٣ × − (٢ س − ٥)$^{-\frac{3}{2}}$

= ٣ (٢ س − ٥)$^{-\frac{3}{2}}$ − ٣ (٢ س − ٥)$^{-\frac{3}{2}}$

= ٠ = الطرف الأيسر

(ب) ∵ س ص = حا أ س ∴ بالاشتقاق مرتين بالنسبة إلى س ينتج :

ص + س ص$'$ = أ حتا أ س ،

ص$'$ + ص$'$ + س ص$''$ = أ × − أ حا أ س

∴ ٢ ص$'$ + س ص$''$ = − أ^2 حا أ س ، ∵ س ص = حا أ س

أحمد الشتوى

∴ ٢ ص′ + س ص″ = − أ² س ص و منها :

س $\frac{d^2ص}{dس^2}$ + ٢ $\frac{dص}{dس}$ + أ² س ص = ٠ .

(حـ) ∵ ص = أ حتا س² + ب حا س²

∴ ص′ = − أ حا س² × ٢ س + ب حتا س² × ٢ س

= − ٢ أ س حا س² + ٢ ب س حتا س²

∴ ص″ = − ٢ أ حا س² − ٢ أ س حتا س² × ٢ س + ٢ ب حتا س²

+ ٢ ب س × (− حا س²) × ٢ س

= − ٢ أ حا س² − ٤ أ س² حتا س² + ٢ ب حتا س²

− ٤ ب س² حا س² بالضرب × س ينتج ترتيب الحدود :

∴ س ص″ = (− ٢ أ س حا س² + ٢ ب س حتا س²)

− ٤ س³ (أ حتا س² + ب حا س²)

= ص′ − ٤ س³ ص ∴ س ص″ − ص′ + ٤ س³ ص = ٠ .

أى أن : س $\frac{d^2ص}{dس^2}$ − $\frac{dص}{dس}$ + ٤ س³ ص = ٠ .

(١١) أوجد معادلتى المماس و العمودى للمنحنيات التالية عند النقط المعطاة :

(أ) س² − س ص $\sqrt{3}$ + ٢ ص² = ١٢ عند ($\sqrt{3}$ ، ٣)

(ب) س حا ٢ ص = ص حتا ٢ س عند ($\frac{1}{4}\pi$ ، $\frac{1}{2}\pi$)

الحل

(أ) ∵ س² − س ص $\sqrt{3}$ + ٢ ص² = ١٢ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

٢ س − ص $\sqrt{3}$ − س ص′ $\sqrt{3}$ + ٤ ص ص′ = ٠ .

∴ ص′ (٤ ص − س $\sqrt{3}$) = ص $\sqrt{3}$ − ٢ س

و عند ($\sqrt{3}$ ، ٣) فإن :

ص′ (٤ × ٣ − $\sqrt{3}$ × $\sqrt{3}$) = ٣ × $\sqrt{3}$ − ٢ × $\sqrt{3}$

∴ ص′ (١٢ − ٣) = ٣ $\sqrt{3}$ − ٢ $\sqrt{3}$

∴ ٩ ص′ = $\sqrt{3}$ و منها : ميل المماس = $\frac{\sqrt{3}}{9}$

، ميل العمودى = − ٣ $\sqrt{3}$

∴ معادلة المماس هى : ص − ٣ = $\frac{\sqrt{3}}{9}$ × (س − $\sqrt{3}$)

∴ ٩ ص − ٢٧ = $\sqrt{3}$ س − ٣ أى : $\sqrt{3}$ س − ٩ ص + ٢٤ = ٠ .

، معادلة المعمودى هى : ص − ٣ = − ٣ $\sqrt{3}$ × (س − $\sqrt{3}$)

∴ ص − ٣ = − ٣ $\sqrt{3}$ س + ٩ أى : ٣ $\sqrt{3}$ س + ص − ١٢ = ٠ .

(ب) ∵ س حا ٢ ص = ص حتا ٢ س ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

حا ٢ ص + ٢ س حتا ٢ ص ص′ = ص′ حتا ٢ س − ٢ ص حا ٢ س

∴ ص′ (حتا ٢ س − ٢ س حتا ٢ ص) = حا ٢ ص + ٢ ص حا ٢ س

و عند ($\frac{1}{4}\pi$ ، $\frac{1}{2}\pi$) فإن :

ص′ (حتا $\frac{1}{2}\pi$ − $\frac{1}{2}\pi$ حتا π) = حا π + π حا $\frac{1}{2}\pi$

∴ $\frac{1}{2}\pi$ ص′ = π و منها : ميل المماس = ٢

، ميل العمودى = − $\frac{1}{2}$

∴ معادلة المماس هى : ص − $\frac{1}{2}\pi$ = ٢ × (س − $\frac{1}{4}\pi$)

∴ ص − $\frac{1}{2}\pi$ = ٢ س − $\frac{1}{2}\pi$ أى : ٢ س − ص = ٠ .

، معادلة المعمودى هى : ص − $\frac{1}{2}\pi$ = − $\frac{1}{2}$ × (س − $\frac{1}{4}\pi$)

∴ ٢ ص − π = − س + $\frac{1}{4}\pi$ أى : ٤ س + ٨ ص − ٨ π = ٠ .

(١٢) أوجد معادلتى المماس و العمودى للمنحنيات التالية عند النقط المعطاة

(أ) س = ن^{٢} + ٢ ن + ٣ ، ص = ٢ ن^{٣} − ٦ ن + ١ عند ن = ٠ .

(ب) س = قا^{٢} θ − ١ ، ص = طا θ عند θ = − ¼ π

الحل

(أ) ∵ س = ن^{٢} + ٢ ن + ٣ ∴ دس / دن = ٢ ن + ٢

، ∵ ص = ٢ ن^{٣} − ٦ ن + ١ ∴ دص / دن = ٦ ن^{٢} − ٦

∴ دص / دس = دص / دن ÷ دس / دن = (٦ ن^{٢} − ٦) / (٢ ن + ٢) ، عند : ن = ٠ . فإن :

ميل المماس = − ٣ ، ميل العمودى = ⅓ ، س = ٣ ، ص = ١

∴ عند النقطة (٣ ، ١) فإن :

معادلة المماس هى : ص − ١ = − ٣ × (س − ٣)

∴ ص − ١ = − ٣ س + ٩ أى : ٣ س + ص − ١٠ = ٠ .

، معادلة العمودى هى : ص − ١ = ⅓ × (س − ٣)

∴ ٣ ص − ٣ = س − ٣ أى : س − ٣ ص = ٠ .

(ب) ∵ س = قا^{٢} θ − ١ = طا^{٢} θ ∴ دس / دθ = ٢ طا θ قا^{٢} θ

، ∵ ص = طا θ ∴ دص / دθ = قا^{٢} θ

∴ دص / دس = دص / دθ ÷ دس / دθ = قا^{٢} θ / (٢ طا θ قا^{٢} θ) = ١ / (٢ طا θ)

و عندما : θ = − ¼ π فإن : س = طا^{٢} (− ¼ π) = (− ١)^{٢} = ١

، ص = طا (− ¼ π) = − ١

، ميل المماس = ٢ طا (− ¼ π) = ١ / (٢ طا (− ¼ π)) = − ½

، و ميل العمودى = ٢ ∴ عند النقطة (١ ، − ١) فإن :

معادلة المماس هى : ص + ١ = − ½ × (س − ١)

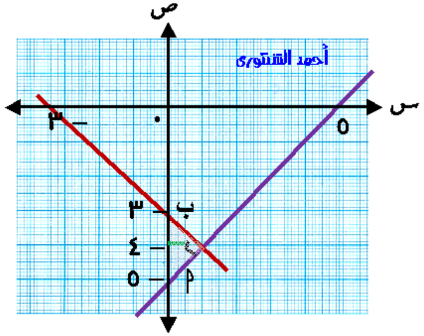
∴ ٢ ص + ٢ = − س + ١ أى : س + ٢ ص + ١ = ٠ .

، معادلة العمودى هى : ص + ١ = ٢ × (س − ١)

∴ ص + ١ = ٢ س − ٢ أى : ٢ س − ص − ٣ = ٠ .

(١٣) أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور الصادات و المماس و العمودى عليه للمنحنى : ٤ س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠ عند النقطة (١ ، − ٤)

الحل



∵ ٤ س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠

∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

٨ س + ٢ ص ص' = ٠

و منها : ص' = − ٤ س / ص

∴ عند النقطة (١ ، − ٤)

فإن : ميل المماس = (− ٤ × ١) / (− ٤) = ١

، ميل العمودى = − ١ ،

معادلة المماس هى : ص + ٤ = ١ × (س − ١)

∴ ص + ٤ = س − ١ أى : س − ص − ٥ = ٠ .

، معادلة العمودى هى : ص + ٤ = − ١ × (س − ١)

∴ ص + ٤ = − س + ١ أى : س + ص + ٣ = ٠ .

بفرض أن : المماس يقطع محور الصادات فى النقطة أ (٠ ، ل)

∴ بالتعويض فى معادلة المماس ينتج : − ل − ٥ = ٠ و منها : ل = − ٥

أى أن : المماس يقطع محور الصادات فى النقطة أ (٠ ، − ٥) ،

بفرض أن : العمودى على المماس يقطع محور الصادات فى النقطة ب (٠ ، ل)

∴ بالتعويض فى معادلة العمودى ينتج : ل + ٣ = ٠ و منها : ل = – ٣

أى أن : العمودى يقطع محور السينات فى النقطة ب (٠ ، – ٣)

∴ أ ب = | – ٥ – (– ٣) | = | – ٥ + ٣ | = ٢ وحدة طول

، و من الشكل : ارتفاع المثلث المطلوب = ١ وحدة طول

∴ مساحة المثلث المطلوب = $\frac{1}{2}$ × ٢ × ١ = ١ وحدة مربعة

(١٤) أثبت أن المنحنيين : ص^4 + ٩ ص = ٦ س ، س^2 – ٢ ص = ٣ س متقاطعان على التعامد عند نقطة الأصل

الحل

∵ ص^4 + ٩ ص = ٦ س ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

٤ ص^3 ص$'$ + ٩ ص$'$ = ٦ ∴ ص$'$ (٤ ص^3 + ٩) = ٦

، و عند نقطة الأصل (٠ ، ٠) فإن : ٩ ص$'$ = ٦

و منها : ميل المماس للمنحنى الأول (م_1) = $\frac{6}{9}$ = $\frac{2}{3}$

، ∵ س^2 – ٢ ص = ٣ س ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

٢ س – ٢ ص$'$ = ٣ ∴ ٢ ص$'$ = ٢ س – ٣

، و عند نقطة الأصل (٠ ، ٠) فإن : ٢ ص$'$ = – ٣

، ميل المماس للمنحنى الثانى (م_2) = – $\frac{3}{2}$

، ∵ $\text{م}_1 \times \text{م}_2$ = $\frac{2}{3}$ × – $\frac{3}{2}$ = – ١

∴ المنحنيان يتقاطعان على التعامد عند نقطة الأصل (٠ ، ٠)

(١٥) أثبت أن المنحنيين : $\left(\frac{\text{س}}{\text{أ}}\right)^{\text{ن}} + \left(\frac{\text{ص}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}} = 2$ يمس المستقيم $\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = 2$ عند النقطة (أ ، ب) مهما تكن قيمة ن

الحل

∵ $\left(\frac{\text{س}}{\text{أ}}\right)^{\text{ن}} + \left(\frac{\text{ص}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}} = 2$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$\text{ن}\left(\frac{\text{س}}{\text{أ}}\right)^{\text{ن}-1} \times \frac{1}{\text{أ}} + \text{ن}\left(\frac{\text{ص}}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}-1} \times \frac{1}{\text{ب}}\,\text{ص}' = 0$

، عند النقطة (أ ، ب) فإن : ن × ١ × $\frac{1}{\text{أ}}$ + ن × ١ × $\frac{1}{\text{ب}}$ ص$'$ = ٠

و منها : ص$'$ = ميل المماس = – $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

، و بضرب معادلة المستقيم المعطى × أ ب ينتج :

ب س + أ ص = ٠ ∴ ميل المستقيم المعطى = – $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

∴ المستقيم يمس المنحنى عند النقطة (أ ، ب) التى تقع على كليهما مهما تكن قيمة ن

(١٦) إذا تحركت نقطة مادية فى خط مستقيم و كانت العلاقة بين المسافة و الزمن هى : ف = ٣ ن^3 + ٣ ن^2 – ٤ حيث ف بالسنتيمترات ، ن بالثوانى أوجد معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن فى نهاية ٣ ثوان

الحل

∵ ف = ٣ ن^3 + ٣ ن^2 – ٤ ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى ن ينتج :

$\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ٩ ن^2 + ٦ ن ، عند ن = ٣ ينتج :

$\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$ = ٨١ + ١٨ = ٩٩

أى أن : معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن فى نهاية ٣ ثوان = ٩٩ سم / ث

(١٧) بالون كروى مملوء بالغاز يتسرب منه الغاز بمعدل س سم^3 / ث أثبت أن معدل نقص مساحته فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطره نق سم يساوى $\frac{2\,\text{س}}{\text{نق}}$ سم^2 / ث

الحل

بفرض أن : حجم البالون = ع ، مساحة سطحه = م

، ∵ البالون كروى الشكل ∴ $ح = \frac{٤}{٣} \pi \, نق^{٣}$

∴ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج : $\frac{دح}{دن} = \frac{٤}{٣} \pi \times ٣ \, نق^{٢} \, \frac{دنق}{دن}$

، ∵ $\frac{دح}{دن} = -س$ سم³ / ث ∴ $-س = \frac{٤}{٣} \pi \times ٣ \, نق^{٢} \, \frac{دنق}{دن}$

و منها : $\frac{دنق}{دن} = \frac{-س}{٤ \pi \, نق^{٢}}$ سم / ث

، $م = ٤ \pi \, نق^{٢}$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$\frac{دم}{دن} = ٨ \pi \, نق \, \frac{دنق}{دن} = ٨ \pi \, نق \times \frac{-س}{٤ \pi \, نق^{٢}} = \frac{-٢س}{نق}$ سم² / ث

أى أن : مساحة البالون تتناقص بمعدل $\frac{٢س}{نق}$ سم² / ث

(١٨) نقطة تتحرك على المنحنى : $ص^{٢} = ٤ س$ ، إذا كان معدل تغير احداثيها السينى بالنسبة للزمن عند النقطة (٤ ، –٤) يساوى ٢ وحدة / ث فأوجد معدل تغير احداثيها الصادى بالنسبة للزمن

الحل

∵ $ص^{٢} = ٤ س$ ∴ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$٢ص \frac{دص}{دن} = ٤ \frac{دس}{دن}$ ، ∵ عند النقطة (٤ ، –٤) كان : $\frac{دس}{دن} = ٢$

∴ $٢ \times -٤ \frac{دص}{دن} = ٤ \times ٢$ ، و منها : $\frac{دص}{دن} = -١$ وحدة / ث

أى أن : الاحداثى الصادى للنقطة يتناقص بمعدل ١ وحدة / ث

(١٩) مستطيل طوله ٢٤ سم و عرضه ١٠ سم يتناقص طوله بمعدل ٢ سم / ث بينما يتزايد عرضه بمعدل ١,٥ سم / ث أوجد معدل تغير مساحته بعد مضى ٤ ثوان ، ثم أوجد الزمن الذى يتوقف عنده معدل تغير المساحة ، و كم تكون مساحة المستطيل حينئذ ؟

الحل

بفرض أن : طول المستطيل = س ، عرضه = ص ، مساحة سطحه = م
بعد قدره ن ثنية حيث : س ، ص ، م دوال فى الزمن

∴ $س = ٢٤ - ٢ن$ ، $ص = ١٠ + ١,٥ن$

∴ $م = س \times ص = (٢٤ - ٢ن)(١٠ + ١,٥ن)$

$= ٢٤٠ + ١٦ن - ٣ن^{٢}$ ، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$\frac{دم}{دن} = ١٦ - ٦ن$ و عندما : ن = ٤

∴ $\frac{دم}{دن} = ١٦ - ٦ \times ٤ = -٨$ سم² / ث

أى أن : مساحة المستطيل تتناقص بمعدل ٨ سم² / ث

، عندما : $\frac{دم}{دن} = ٠$ فإن : $١٦ - ٦ن = ٠$ و منها : $ن = \frac{٨}{٣}$ ث

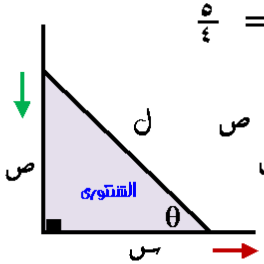
أى أن : المساحة تتوقف عن التناقص بعد $\frac{٨}{٣}$ ث

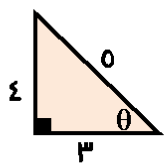
و حينئذ : $م = (٢٤ - ٢ \times \frac{٨}{٣})(١٠ + ١,٥ \times \frac{٨}{٣})$

$= \frac{٥٦}{٣} \times ١٤ = \frac{٧٨٤}{٣}$ سم²

(٢٠) سلم ثابت الطول ينزلق طرفه العلوى على حائط رأسى بمعدل ك وحدة / ث ، أوجد معدل ابتعاد طرفه السفلى عن الحائط عندما يميل السلم على الرأسى بزاوية θ حيث قتا θ = $\frac{٥}{٤}$

الحل





نفرض أن : المسافة بين الطرف العلوى للسلم و الآرض = ص
، المسافة بين الطرف السفلى للسلم و الحائط الرأسى = س
، طول السلم = ل حيث : ل ثابت

∴ من هندسة الشكل : $س^{٢} + ص^{٢} = ل^{٢}$

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$٢س \frac{دس}{دن} + ٢ص \frac{دص}{دن} = ٠$ (١)

، عندما : قتا θ = $\frac{٥}{٤}$ فإن : س = ل حا θ = $\frac{٤}{٥}$ ل

، ص = ل حتا θ = $\frac{٣}{٥}$ ل ، ∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = − ل وحدة / ث ،

التعويض فى (١) ينتج : ٢ × $\frac{٤}{٥}$ ل × $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ + ٢ × $\frac{٣}{٥}$ ل × − ل = ٠

و منها : $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = $\frac{٣}{٤}$ ل وحدة / ث

أى أن : الطرف السفلى للسلم يبتعد عن الحائط الرأسى بمعدل $\frac{٣}{٤}$ ل وحدة / ث

(٢١) **يتمدد هرم رباعى منتظم من المعدن ارتفاعه يساوى طول ضلع قاعدته فيزداد حجمه بمعدل ١ سم^{٣} / ث ، إذا كان معدل تزايد كل من ارتفاع الهرم و طول قاعدته يساوى ٠,٠١ سم / ث فأوجد طول ضلع قاعدته**

الحل

نفرض أن : طول ضلع قاعدة الهرم = ارتفاع الهرم = س

، حجم الهرم = ح ، ∵ الهرم رباعى منتظم ∴ قاعدته مربع

∴ ح = $\frac{١}{٣}$ س^{٢} × س = $\frac{١}{٣}$ س^{٣}

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج : $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ = س^{٢} $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

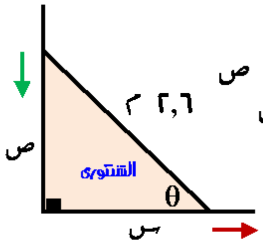
، ∵ $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}}$ = ١ ، $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٠,٠١ ∴ ١ = س^{٢} × ٠,٠١

و منها : س^{٢} = ١٠٠ ∴ س = ١٠ سم

أى أن : طول ضلع قاعدته = ١٠ سم

(٢٢) **سلم طوله ٢,٦ متر يستند بطرفه العلوى على حائط رأسى و بطرفه السفلى على أرض أفقية ، إذا كان طرفه السفلى يتحرك مبتعداً عن الحائط بمعدل ٤ متر / د عندما يكون على بعد ١ متر من الحائط أوجد معدل تحرك طرفه العلوى و معدل تغير قياس زاوية ميل السلم على الأرض حينئذ**

الحل



نفرض أن : المسافة بين الطرف العلوى للسلم و الآرض = ص

، المسافة بين الطرف السفلى للسلم و الحائط الرأسى = س

∴ من هندسة الشكل : س^{٢} + ص^{٢} = ٦,٧٦

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

٢ س $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٠

، عندما : س = ١ م فإن : ص = ٢,٤ م ، $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٤ م / د

∴ ٢ × ١ × ٤ + ٢ × ٢,٤ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٠ و منها : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = − $\frac{٥}{٣}$ م / د

أى أن : الطرف العلوى ينزلق لأسفل بمعدل $\frac{٥}{٣}$ م / د

و بفرض أن : θ قياس الزاوية بين السلم و الأرض

∴ من هندسة الشكل : حا θ = $\frac{\text{ص}}{٢,٦}$ ∴ ص = ٢,٦ حا θ

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٢,٦ حتا θ $\frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}}$

، عندما : ص = ٢,٤ م فإن : حتا θ = $\frac{١}{٢,٦}$ ، = − $\frac{٥}{٣}$ م / د

∴ − $\frac{٥}{٣}$ = ٢,٦ × $\frac{١}{٢,٦}$ × $\frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}}$ و منها : $\frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}}$ = − $\frac{٥}{٣}$ ء / د أى أن :

قياس الزاوية بين السلم و الأرض يتناقص بمعدل $\frac{٥}{٣}$ زاوية نصف قطرية / د

(٢٣) **متوازى مستطيلات أبعاده ٣ ، ٤ ، ١٢ من السنتيمترات ، إذا كان معدل تزايد بعده الأول ٢ سم / ث و معدل تزايد بعده الثانى ١ سم / ث و معدل تناقص بعده الثالث ٣ سم / ث ، فأوجد حجم متوازى المستطيلات فى أى لحظة زمنية ن ، و معدل تغير حجمه فى نهاية ٢ ثانية**

الحل

بفرض أن : أبعاد متوازى المستطيلات هى : س ، ص ، ع ، حجمه = ح

بعد قدره ن ثنية حيث : س ، ص ، ع ، ح دوال فى الزمن

$\therefore$ س $= ٣ + ٢$ن ، ص $= ٤ +$ ن ، ع $= ١٢ - ٣$ن

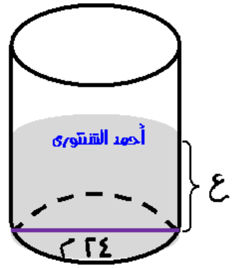
$\therefore$ ح $=$ س $\times$ ص $\times$ ع $= (٣ + ٢$ن$)(٤ +$ ن$)(١٢ - ٣$ن$)$

$= (١٢ + ١١$ن$ + ٢$ن$^٢)(١٢ - ٣$ن$)$

$= ١٤٤ + ٩٦$ن$ - ٩$ن$^٢ - ٦$ن^٣ ، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$\frac{ءح}{ءن} = ٩٦ - ١٨$ن$ - ١٨$ن^٢ ، ن $= ٢$ فإن : $\frac{ءح}{ءن} = - ١٢$ سم^٣ / ث

(٢٤) خزان بترول على شكل اسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ٢٤ متراً ، يراد تفريغ الخزان من البترول بمعدل ٢ م^٣ / د ، فما معدل تغير ارتفاع البترول فى الخزان ؟



الحل

بفرض أن : طول نصف قطر الخزان = نق ،
ارتفاع البترول فى الخزان = ع ، حجم البترول = ح
، $\because$ الخزان على شكل اسطوانة دائرية قائمة

$\therefore$ ح $= \pi$ نق^٢ ع ، $\because$ نق $= ١٢$ م

$\therefore$ ح $= ١٤٤ \pi$ ع ، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

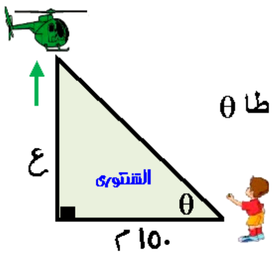
$\frac{ءح}{ءن} = ١٤٤ \pi \frac{ءع}{ءن}$ ، $\because \frac{ءح}{ءن} = - ٢$ م^٣ / د

$\therefore - ٢ = ١٤٤ \pi \frac{ءع}{ءن}$ و منها : $\frac{ءع}{ءن} = \frac{-١}{٧٢ \pi}$ م / د

أى أن : ارتفاع البترول فى الخزان يتناقص بمعدل $\frac{١}{٧٢ \pi}$ م / د

(٢٥) ترتفع طائرة عمودية رأسياً لأعلى بمعدل ثابت قدره ٤٢ م / د ، فإذا تم رصد الطائرة من مشاهد على الأرض و يبعد ١٥٠ م عن موقع إقلاعها ، فأوجد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد للطائرة عندما تكون الطائرة على ارتفاع ١٥٠ م عن سطح الأرض

الحل



بفرض أن : ارتفاع الطائرة = ع
، قياس زاوية ارتفاع نظر المشاهد للطائرة = θ

$\therefore$ من هندسة الشكل : ظا $\theta = \frac{ع}{١٥٠}$ $\therefore$ ع $= ١٥٠$ ظا θ

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$\frac{ءع}{ءن} = ١٥٠$ قا$^٢ \theta \frac{ء\theta}{ءن}$

، عندما : ع $= ١٥٠$ م فإن : $\theta = \frac{١}{٤}\pi$ ، قا$^٢\theta = ٢$

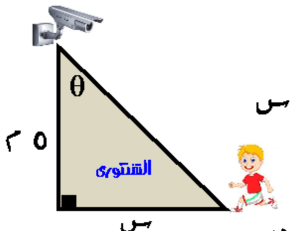
، $\because \frac{ءع}{ءن} = ٤٢$ م / د $\therefore ٤٢ = ١٥٠ \times ٢ \times \frac{ء\theta}{ءن}$

و منها : $\frac{ء\theta}{ءن} = \frac{٧}{٥٠}$ ءً / د (٠,١٤ ءً / د) أى أن :

قياس زاوية ارتفاع نظر المشاهد للطائرة يتزايد بمعدل ٠,١٤ زاوية نصف قطرية / د

(٢٦) فى سباق ١٠٠ متر ، يجرى لاعب فى مسار مستقيم باتجاه خط النهاية ، و كانت إحدى كاميرات خط النهاية على مسافة ٥ أمتار و عمودية على مسار السباق و فى نفس المستوى الأفقى للمتسابقين أوجد معدل تغير قياس الزاوية التى تدور بها الكاميرا لرصد حركة اللاعب عندما كان على بعد ٥ أمتار من نهاية السباق ، و معدل اقترابه لنقطة النهاية ١٠ م / ث

الحل



بفرض أن : المسافة بين المتسابق و خط النهاية = س
، قياس زاوية دوران الكاميرا = θ

$\therefore$ من هندسة الشكل : ظا $\theta = \frac{س}{٥}$

$\therefore$ س $= ٥$ ظا θ ، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$\frac{ءس}{ءن} = ٥$ قا$^٢ \theta \frac{ء\theta}{ءن}$ ، عندما : س $= ٥$ م فإن : $\theta = \frac{١}{٤}\pi$

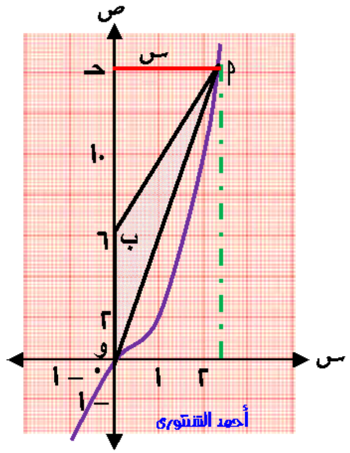
، قا$^٢\theta = ٢$ ، $\because \frac{ءس}{ءن} = - ١٠$ م / د $\therefore - ١٠ = ٥ \times ٢ \times \frac{ء\theta}{ءن}$

و منها : $\frac{ء\theta}{ءن} = - ١$ ءً / د أى أن :

قياس زاوية دوران الكاميرا يتناقص بمعدل ١ زاوية نصف قطرية / د

(٢٧) تتحرك النقطة أ (س ، ص) على منحنى الدالة :

ص = س^{٣} + س بحيث $\frac{دص}{دن}$ = ٢ وحدة / ث ، أوجد معدل التغير فى مساحة المثلث أ و ب حيث (و) نقطة الأصل ، النقطة ب (٠ ، ٦) فى اللحظة التى يكون فيها الاحداثى السينى للنقطة المتحركة يساوى ٣



الحل

∵ ص = س^{٣} + س

∴ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$\frac{دص}{دن}$ = (٣ س^{٢} + ١) $\frac{دس}{دن}$

و عندما : $\frac{دص}{دن}$ = ٢ وحدة / ث ، س = ٣

فإن : ٢ = ٢٨ $\frac{دس}{دن}$

و منها : $\frac{دس}{دن}$ = $\frac{١}{١٤}$ وحدة / ث

و بفرض أن : مساحة △ أ و ب = م

∴ م = $\frac{١}{٢}$ و ب × أ حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × س = ٣ س

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

$\frac{دم}{دن}$ = ٣ $\frac{دس}{دن}$ = ٣ × $\frac{١}{١٤}$ = $\frac{٣}{١٤}$ وحدة مربعة / ث

أى أن : مساحة △ أ و ب تتزايد بمعدل $\frac{٣}{١٤}$ وحدة مربعة / ث

حل اختبار تراكمى صفحة ٣٣ بالكتاب المدرسى

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) إذا كان : د(س) = طتا س فإن : د$''$ ($\frac{١}{٤}\pi$) يساوى ....

(أ) − $\frac{٤}{٩}$ (ب) $\frac{٤}{٩}$ (حـ) ٤ (ء) $\frac{٩}{٢}$

(٢) تتحرك نقطة على المنحنى : ص^{٢} = ٢٥ − س^{٢} بحيث :

$\frac{دس}{دن}$ = $\frac{١}{٢س + ٣}$ فإن : عند النقطة (− ٣ ، ٤)

$\frac{دص}{دن}$ يساوى ....

(أ) − $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (حـ) $\frac{١}{٩}$ (ء) − ٤

(٣) إذا كانت معادلة العمودى للمنحنى ص = د(س) عند النقطة (١ ، ١) هى : س + ٤ ص = ٥ فإن : د$'$(١) يساوى ....

(أ) − ٣ (ب) − $\frac{١}{٤}$ (حـ) ٤ (ء) − ٤

(٤) المماس للمنحنى : ص = ٣ س^{٢} عند النقطة (١ ، − ٢) يمر بالنقطة ....

(أ) (٥ ، − ٢) (ب) (٣ ، ١)

(حـ) (٢ ، − ٤) (ء) (٠ ، − ٨)

الحل

(١) ∵ د(س) = ظتا س ∴ د$'$(س) = − قتا^{2} س ،

د$''$(س) = − ٢ قتا س (− قتا س ظتا س) = ٢ قتا^{2} س ظتا س

، د$''$ (¼ π) = ٢ قتا^{2} ¼ π ظتا ¼ π = ٢ (√٢)^{2} × ١ = ٤

(٢) ∵ ص^{2} = ٢٥ − س^{2} ∴ بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن ن ينتج :

٢ ص دص/دن = − ٢ س دس/دن و عند النقطة (− ٣ ، ٤) فإن :

٢ × ٤ دص/دن = − ٢ × − ٣ دس/دن و منها : دص/دن = ¾ دس/دن

، ∵ دس/دن = ١ / (٢ س + ٣) و عند النقطة (− ٣ ، ٤) فإن :

دس/دن = − ⅓ ∴ دص/دن = ¾ × − ⅓ = − ¼

(٣) ∵ معادلة العمودى هى : س + ٤ ص = ٥ ∴ ميل العمودى = − ¼

∴ ميل المماس = ٤ ، عند النقطة (١ ، ١) فإن : د$'$(١) = ٤

(٤) ∵ ص = ٣ س^{2} ∴ ص$'$ = ٦ س

، عند النقطة (١ ، − ٢) فإن : ص$'$ = ميل المماس = ٦

، معادلة المماس هى : ص + ٢ = ٦ × (س − ١)

∴ ص + ٢ = ٦ س − ٦ أى : ٦ س − ص − ٨ = ٠

، النقطة (٠ ، − ٨) تحقق معادلة المماس

أى أن : المماس يمر بالنقطة (٠ ، − ٨)

(٥) إذا كانت : س = ن − ن^{2} ، ص = ن − ن^{3} أوجد د^{2}ص / دس^{2}

الحل

∵ س = ن − ن^{2} ∴ دس/دن = ١ − ٢ ن

، ∵ ص = ن − ن^{3} ∴ دص/دن = ١ − ٣ ن^{2}

∴ دص/دس = دص/دن ÷ دس/دن = (١ − ٣ ن^{2}) / (١ − ٢ ن) = (١ − ٣ ن^{2})(١ − ٢ ن)$^{-1}$

، د^{2}ص / دس^{2} = د/دس (دص/دس) = د/دن (دص/دس) × دن/دس

= د/دن [(١ − ٣ ن^{2})(١ − ٢ ن)$^{-1}$] × (١ − ٢ ن)$^{-1}$

∴ د^{2}ص / دس^{2} = [(١ − ٣ ن^{2}) × − ١ × (١ − ٢ ن)$^{-2}$ × − ٢

+ (١ − ٢ ن)$^{-1}$ × − ٦ ن] × (١ − ٢ ن)$^{-1}$

= [٢ (١ − ٣ ن^{2})(١ − ٢ ن)$^{-2}$

− ٦ ن (١ − ٢ ن)$^{-1}$] × (١ − ٢ ن)$^{-1}$

= (١ − ٢ ن)$^{-2}$ [٢ (١ − ٣ ن^{2}) − ٦ ن (١ − ٢ ن)]

× (١ − ٢ ن)$^{-1}$

= (١ − ٢ ن)$^{-3}$ [٢ − ٦ ن^{2} − ٦ ن + ١٢ ن^{2}]

= (١ − ٢ ن)$^{-3}$ [٦ ن^{2} − ٦ ن + ٢]

= (٦ ن^{2} − ٦ ن + ٢) / (١ − ٢ ن)^{3}

(٦) المعادلتان البارامتريتان لمنحنى هما : س = ن^{2} − ٦ ن ، ص = ٨ √(ن − ٢) أوجد معادلة المماس عند : ن = ٦

الحل

∵ $\text{س} = \text{ن}^2 - 6\,\text{ن}$ ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = 2\,\text{ن} - 6$

، ∵ $\text{ص} = 8\sqrt{\text{ن} - 2} = 8\,(\text{ن} - 1)^{\frac{1}{2}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = 8 \times \frac{1}{2}\,(\text{ن} - 1)^{-\frac{1}{2}} = 4\,(\text{ن} - 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{\text{ن} - 2}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{4}{\sqrt{\text{ن} - 2}} \times \frac{1}{2\,\text{ن} - 6}$

، عند : $\text{ن} = 6$: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{3}$ ، $\text{س} = 0$ ، $\text{ص} = 16$

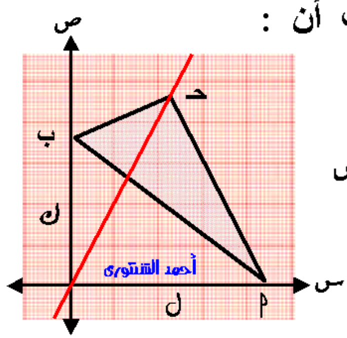
∴ عند النقطة (٠ ، ١٦) : معادلة المماس هى : $\text{ص} + 16 = \frac{1}{3}\,\text{س}$

أى : $\text{س} - 3\,\text{ص} - 48 = 0$

(٧) أ ب حـ مثلث مساحته م ، النقطة حـ تتحرك على المستقيم : $\text{ص} = 2\,\text{س}$ ، فإذا كان : أ (ل ، ٠) ، ب (٠ ، ك)

حيث : ل ، ك ثابتان موجبان ، أثبت أن :

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءس}} = \text{ل} + \frac{\text{ك}}{2}$



الحل

∵ النقطة حـ تتحرك على المستقيم : $\text{ص} = 2\,\text{س}$

∴ احداثى حـ هى (س ، ٢ س)

، ∵ أ (ل ، ٠) ، ب (٠ ، ك)

، بفرض أن : مساحة △ أ ب حـ = م

∴ $\text{م} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \text{ل} & 0 & 1 \\ 0 & \text{ك} & 1 \\ \text{س} & 2\,\text{س} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|\, \text{ل} \times (\text{ك} - 2\,\text{س}) + 1 \times (0 - \text{ك}\,\text{س}) \,\right|$

، حيث : ل ، ك ثابتان موجبان

∴ $\text{م} = \frac{1}{2}\,(\text{ل}\,\text{ك} + 2\,\text{ل}\,\text{س} + \text{ك}\,\text{س})$

∴ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءس}} = \frac{1}{2}\,(2\,\text{ل} + \text{ك}) = \text{ل} + \frac{1}{2}\,\text{ك} = \text{ل} + \frac{\text{ك}}{2}$

(٨) أوجد معدل تغير $\sqrt{9 + \text{س}^2}$ بالنسبة إلى $\frac{\text{س}}{\text{س} - 1}$ عند $\text{س} = -4$

الحل

نضع : $\text{ص} = \sqrt{9 + \text{س}^2} = (9 + \text{س}^2)^{\frac{1}{2}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{2}\,(9 + \text{س}^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2\,\text{س} = \frac{\text{س}}{\sqrt{9 + \text{س}^2}}$

، $\text{ع} = \frac{\text{س}}{\text{س} - 1}$ ∴ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س} - 1) \times 1 - \text{س} \times 1}{(\text{س} - 1)^2} = \frac{-1}{(\text{س} - 1)^2}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \div \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{\text{س}}{\sqrt{9 + \text{س}^2}} \times \frac{(\text{س} - 1)^2}{-1}$

، عندما $\text{س} = -4$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = -\frac{4}{5} \times -25 = 20$

(٩) **(أ)** إذا كان : $\text{ص} = 4 + \text{طتا}\,\text{س} - \text{قا}^2\,\text{س}$ أوجد معادلة العمودى عند $\text{س} = \frac{1}{4}\pi$

(ب) مثمن منتظم طول ضلعه ١٠ سم و يتزايد بمعدل ٠,٢ سم / ث أوجد معدل تزايد مساحته

الحل

(أ) ∵ $\text{ص} = 4 + \text{طتا}\,\text{س} - \text{قا}^2\,\text{س}$

∴ $\text{ص}' = -\text{قتا}^2\,\text{س} - 2\,\text{قا}\,\text{س} \times \text{قا}\,\text{س}\,\text{طا}\,\text{س}$

$= -\text{قتا}^2\,\text{س} - 2\,\text{قا}^2\,\text{س}\,\text{طا}\,\text{س}$ ، عندما : $\text{س} = \frac{1}{4}\pi$

∴ $\text{ص}' =$ ميل المماس $= -\text{قتا}^2\,\frac{1}{4}\pi - 2\,\text{قا}^2\,\frac{1}{4}\pi\;\text{طا}\,\frac{1}{4}\pi$

$= -(\sqrt{2})^2 - 2 \times (\sqrt{2})^2 \times 1$

$= -٢ - ٢ \times ٢ \times ١ = -٦$

∴ ميل العمودى $= \frac{١}{٦}$ ، عندما : س $= \frac{١}{٤}\pi$ فإن :

ص $= ٤ +$ طتا س $-$ قا^٢ س $= ٤ +$ طتا $\frac{١}{٤}\pi -$ قا^٢ $\frac{١}{٤}\pi$

$= ٤ + ١ - (\sqrt{٢})^٢ = ٤ + ١ - ٢ = ٣$

∴ عند النقطة ($\frac{١}{٤}\pi$ ، ٣) : معادلة العمودى هى :

ص $- ٣ = \frac{١}{٦} \times$ (س $- \frac{١}{٤}\pi$)

أى : س $-$ ٦ ص $+ ١٨ \ \frac{١}{٤}\pi = ٠$

(ب) بفرض أن : مساحة المثمن المنتظم = م

∵ مساحة المضلع المنتظم $= \frac{١}{٤}$ ن س^٢ طتا $\frac{\pi}{ن}$

حيث : س = طول ضلعه ، ن = عدد أضلاعه

∴ م $= \frac{١}{٤} \times ٨$ س^٢ طتا $\frac{\pi}{٨} = ٢$ س^٢ طتا $\frac{\pi}{٨}$

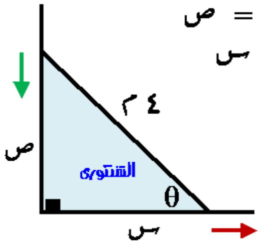
، $\frac{دم}{دن} = ٤$ س طتا $\frac{\pi}{٨} \times \frac{دس}{دن}$

و عندما : س = ١٠ سم ، $\frac{دس}{دن} = ٠,٢$ سم / ث

∴ $\frac{دم}{دن} = ٤ \times ١٠ \times$ طتا $\frac{\pi}{٨} \times ٠,٢ = ١٩,٣$ سم^٢ / ث

(١٠) سلم طوله ٤ أمتار يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسى و بطرفه الآخر على أرض أفقية ، إذا أنزلق الطرف الملامس للأرض مبتعداً عن الحائط بمعدل ٢٠ سم / ث ، أحسب معدل هبوط الطرف العلوى للسلم عندما يكون السلم مائلاً على الأرض بزاوية قياسها $\frac{١}{٣}\pi$

الحل



نفرض أن : المسافة بين الطرف العلوى للسلم و الآرض = ص

، المسافة بين الطرف السفلى للسلم و الحائط الرأسى = س

، قياس زاوية ميل السلم على الأرض = θ

∴ من هندسة الشكل : س^٢ + ص^٢ = ١٦

، بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ينتج :

٢ س $\frac{دس}{دن}$ + ٢ ص $\frac{دص}{دن}$ = ٠ (١)

، عندما : θ $= \frac{١}{٣}\pi$ فإن : س = ٤ حتا $\frac{١}{٣}\pi$ = $٤ \times \frac{١}{٢}$ = ٢ م = ٢٠٠ سم

، ص = ٤ حا $\frac{١}{٣}\pi$ = $٤ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٢ $\sqrt{٣}$ م = ٢٠٠ $\sqrt{٣}$ سم

، ∴ $\frac{دس}{دن}$ = ٢٠ سم / ث ، بالتعويض في (١) ينتج :

∴ ٢ × ٢٠٠ × ٢٠ + ٢ × ٢٠٠ $\sqrt{٣}$ $\frac{دص}{دن}$ = ٠

و منها : $\frac{دص}{دن}$ = $- \frac{٢٠}{٣}\sqrt{٣}$ سم / ث

أى أن : الطرف العلوى يهبط بمعدل $\frac{٢٠}{٣}\sqrt{٣}$ سم / ث

تم بحمد الله و عونه

أحمد الشنتورى