اجابة نموذج تدريب 1 تفاضل وتكامل 2018

(١) إذا كان د(س) = ظا س فإن د'(π/٤) = ...

د(س) = − قتا² س ⇐ د'(س) = −قتاس × −قتاس ظاس

د'(س) = قتا² س ظاس ⇐ د'(π/٤) = قتا² π/٤ ظا π/٤

د'(π/٤) = (√٢)² × ١ = ٢ ✓ [٤]

---

(٢) إذا كان س² + ص² = ١ فإن ص ص' = ...

بالاشتقاق بالنسبة إلى س ∴ ٢س + ٢ص ص' = صفر

∴ ٢ص ص' = −٢س ⇐ ص ص' = −س

✓ [ص ص' = −س]

---

(٣) إذا كان س² + ص² = ٣ اثبت أن ص ص'' + ص'² + ٣ = صفر

بالاشتقاق بالنسبة إلى س

س + ص ص' = صفر ⇐ ص ص' = −س ←(١)

بالاشتقاق مرة أخرى بالنسبة الى س

١ + ص ص'' + ص' × ص' = صفر

١ + ص ص'' + (ص')² = صفر بالتعويض من (١)

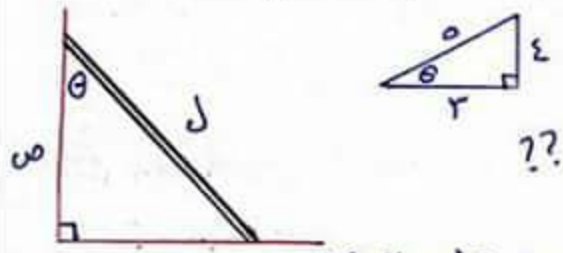
١ + ص ص'' + س²/ص² = صفر بالضرب في ص²

ص² + ص³ ص'' + س² = صفر بالتعويض من (١)

∴ ص³ ص'' + ٣ = صفر ✓

أحمد العوانى
معلم أول الرياضيات بطنطا

④ سلم طول ل يرتكز بطرفه العلوي على حائط رأسي بمعدل $\frac{1}{2}$ وحدة طول/ث أوجد معدل ابتعاد طرفه السفلي عن الحائط عندما يميل السلم على الرأسي بزاوية θ حيث $\tan\theta = \frac{5}{4}$



بفرض أن طول السلم الثابت = ل

$\frac{د ص}{د ن} = -\frac{1}{2}$ ل وحدة/ث ، $\frac{د س}{د ن} = ??$

$\sin\theta = \frac{4}{5}$ ، $\tan\theta = \frac{3}{5}$

من نظرية فيثاغورث $س^2 + ص^2 = ل^2$ بالاشتقاء بالنسبة إلى ن

$2س \times \frac{د س}{د ن} + 2ص \times \frac{د ص}{د ن} = صفر$ ، $س = ل\sin\theta$ ، $ص = ل\tan\theta$

$2ل\sin\theta \times \frac{د س}{د ن} + 2ل\tan\theta \times -\frac{1}{2}$ ل $= صفر \Leftarrow \frac{4}{5}\frac{د س}{د ن} - \frac{3}{5}\frac{1}{2}$ ل $= صفر$

$\therefore \frac{د س}{د ن} = \boxed{\frac{3}{4}\frac{1}{2}}$ ل وحدة طول/ث

---

⑤ $\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{س} = [\lim_{س \to صفر} (1+س)^{\frac{1}{س}}]^{س} = \boxed{هـ}$ #

---

⑥ إذا كان $ق(س) = هـ^{3س}$ فإن $ق'(س) = 3هـ^{3س}$ #

---

⑦ $\int (3س^2 + \frac{5}{س}) د س = \frac{3}{4}س^4 + 5 لو_{هـ}|س| + ث = س^3 + لو_{هـ}|س| + ث$ #

---

⑧ إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أي نقطة (س، ص) عليه يساوي $\frac{1}{س - هـ}$

وكان $د(هـ) = \frac{1}{2}$ أوجد د(س)

$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{س - هـ} \Leftarrow ص = \int \frac{1}{س - هـ} د س$

بفرض $د(س) = س - هـ$
$د'(س) = 1$

$ص = \frac{1}{2}\int \frac{2}{س - هـ} د س$ بالمشتقة

$ص = \frac{1}{2} لو_{هـ}|س - هـ| + ث \Leftarrow ق(هـ) = \frac{1}{2} لو_{هـ}هـ + ث = \frac{1}{2} \Leftarrow ث = صفر$

$ق(س) = \frac{1}{2} لو_{هـ}|س - هـ| \Leftarrow ق(هـ^2) = \frac{1}{2} لو_{هـ}|هـ^2 - هـ|$

$ق(هـ^2) = \boxed{\frac{1}{2} لو_{هـ}هـ^3}$ #

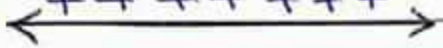
أحمد العوائي
معلم أول الرياضيات بطنطا

(٩) $د(س) = س^٣ + ٦س^٢ + ٢$ تكون متزايدة على ح ...

$د'(س) = ٣س^٢ + ١٢س$ لبحث الإطراد نضع $د'(س) = صفر$

$٣س^٢ + ١٢س = صفر \Leftarrow ٣س(س + ٤) = صفر \Leftarrow س = ٠ ، س = -٤$ ليس كامل

∴ الدالة تزايدية لكل $س \in ح$



(١٠) إذا كان للمنحنى $ص = (٥س - ٢)^٣ + ٤$ نقطة انقلاب عندما $س = ٢$ فإن $أ = ٠٫٠٠٠$

$ص' = ٣(٥س - ٢)^٢ \times ٥ \Leftarrow ص' = ١٥(٥س - ٢)^٢$

$ص'' = ٣٠(٥س - ٢) \times ٥$ عند نقط الانقلاب $د'(٢) = صفر$

$٣٠ \times ٥ - ٢ = صفر \Leftarrow ٢ = ١٠$

(١١) القيمة العظمى المطلقة للدالة $د(س) = -س^٢$ على الفترة $[-٣ ، ٢]$

$د(-٣) = -(-٣)^٢ = -٩$ $د(٢) = -٤$

$د'(س) = -٢س$ عند النقط الحرجة $د'(س) = صفر \Leftarrow س = صفر$

$د(٠) = ٠$ ∴ القيمة العظمى المطلقة هي $د(٠)$ #

(١٢) أجب عن إحدى النقطتين الآتيتين

أحمد العوانى
معلم اول الرياضيات بطنطا

(أ) عين القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية (إن وجدت) للدالة د حيث $د(س) = ٨ لو_هـ س - س^٢$

$د'(س) = \frac{٨}{س} - ٢س \Leftarrow د'(س) = \frac{-٨}{س^٢} - ٢$ السالب لا يوجد

عند النقط الحرجة $د'(س) = صفر \Leftarrow \frac{٨}{س} = ٢س \Leftarrow س^٢ = ٤ \Leftarrow س = \pm ٢ \notin$ مجال الدالة

عند $س = ٢ \Leftarrow د'(٢) = \frac{-٨}{٤} - ٢ < صفر$ ∴ يوجد قيمة عظمى محلية وهي $د(٢) = ٨ لو_هـ ٢ - ٤$

مع اطيب التمنيات ... احمد العوانى ... معلم اول الرياضيات بطنطا
لاى إستفسار لفضلوا بزيارة صفحة مجانب وغرائب الرياضيات
على الفيسبوك او من خلال الكود المقابل
https://www.facebook.com/Mr.Ahmed.Elawany/

4

(ب) عين القيم القصوى المطلقة للدالة د حيث د(س) = $س^{3} - ٣س + ٢$

، س ∈ [-٢، ١]

د(-٢) = -٨ + ٦ + ٢ = صفر ، د(١) = ١ - ٣ + ٢ = صفر

د'(س) = $٣س^{٢} - ٣$ عند النقط الحرجة د'(س) = صفر ⇐ س = ± ١

عند س = ١ ⇐ د(١) = صفر ، عند س = -١ ⇐ د(-١) = -١ + ٣ + ٢ = ٤

∴ القيمة الصغرى المطلقة هي صفر والعظمى المطلقة هي ٤ #

---

(١٣) $\int ظا^{٢}س \, دس$

تذكر صيغ تحويل حساب المثلثات

$ظا^{٢}س + ١ = قا^{٢}س \Leftarrow ظا^{٢}س = قا^{٢}س - ١$

$= \int (قا^{٢}س - ١) \, دس$

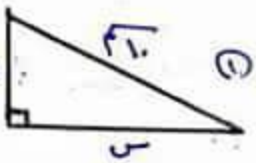
$= ظاس - س + ث$ #

أحمد العواني

معلم أول الرياضيات بطنطا

---

(١٤) إذا كان طول وتر مثلث قائم الزاوية ١٠ سم فأوجد طول كل من ضلعيه الآخرين عندما تكون مساحة المثلث أكبر ما يمكن



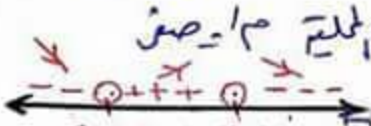
من فيثاغورث $س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠ \Leftarrow ص = \sqrt{١٠٠ - س^{٢}}$ ←①

مساحة المثلث م = $\frac{١}{٢}$ س ص من ①

$م = \frac{١}{٢} س \times \sqrt{١٠٠ - س^{٢}}$

$م' = \frac{١}{٢} \left[س \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{١٠٠ - س^{٢}}} + \sqrt{١٠٠ - س^{٢}} \times ١ \right] = \frac{١}{٢} \left[\frac{-س^{٢} + ١٠٠ - س^{٢}}{\sqrt{١٠٠ - س^{٢}}} \right]$

$م' = \frac{١}{٢} \left[\frac{١٠٠ - ٢س^{٢}}{\sqrt{١٠٠ - س^{٢}}} \right]$ عند العظمى أو الصغرى المحلي م' = صفر



$١٠٠ - ٢س^{٢} = صفر \Leftarrow ٢س^{٢} = ١٠٠ \Leftarrow س = \pm ٥\sqrt{٢}$

من بحث الإشارة على خط الأعداد تكون المساحة أكبر ما يمكن عند $س = ٥\sqrt{٢}$ م

بالتعويض في ① $ص = \sqrt{١٠٠ - ٥٠} = \sqrt{٥٠} = ٥\sqrt{٢}$ م

∴ طول ضلعي المثلث القائم لتكون المساحة أكبر ما يمكن $٥\sqrt{٢}$، $٥\sqrt{٢}$ م #

---

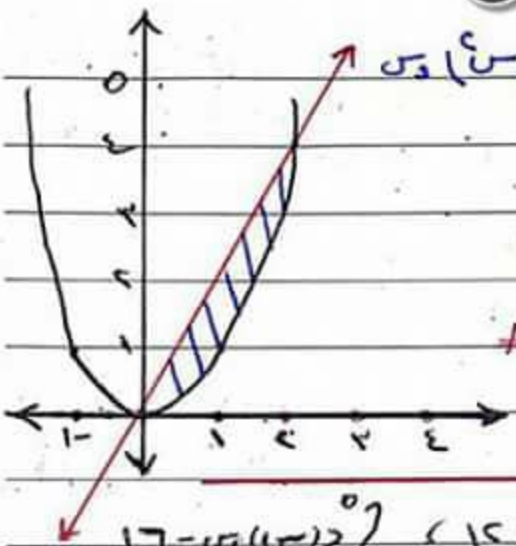
(١٥) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين

$ص = س^{٢}$ ، $ص = ٢س$

نحل المعادلتين معاً لإيجاد نقاط التقاطع $س^{٢} = ٢س \Leftarrow س(س - ٢) = صفر$

$س = ٠$ ⇐ $س = ٢$ نقط التقاطع (٠، ٠)، (٢، ٤)

$ص = ٠$ ⇐ $ص = ٤$



المساحة المطلوبة $= \int_{-1}^{2} (2س - س^2)\, دس$

$= [س^2 - \frac{1}{3}س^3]_{-1}^{2}$

$= 4 - \frac{8}{3} - صفر = \frac{4}{3}$

$= \boxed{1\frac{1}{3}}$ وحدة مربعة #

---

(١٦) إذا كان $\int_{-2}^{3} د(س)\, دس = 12$ ، $\int_{-2}^{5} د(س)\, دس = 16$

فإن $\int_{3}^{5} د(س)\, دس =$ ....

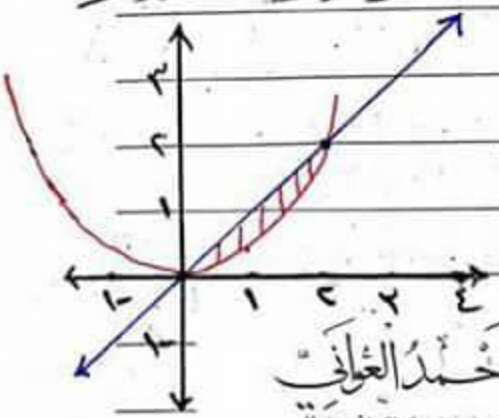
$\therefore \int_{-2}^{5} د(س)\, دس = \int_{-2}^{3} د(س)\, دس + \int_{3}^{5} د(س)\, دس$

$\therefore 16 = 12 + \int_{3}^{5} د(س)\, دس$

$\therefore \int_{3}^{5} د(س)\, دس = 16 - 12 = \boxed{4}$ #

---

(١٧) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيين $ص = س$ ، $ص = \frac{1}{2}س^2$ حول محور السينات دورة كاملة.



نحل المعادلتين معاً لإيجاد نقط التقاطع

$\frac{1}{2}س^2 = س \Leftarrow س(\frac{1}{2}س - 1) = صفر$

$س = 0$ أو $س = 2$

$ص = 0$ أو $ص = 2$

نقط التقاطع $(0,0)$ ، $(2,2)$

مع اطيب التمنيات ... احمد العوانى ... معلم اول الرياضيات بطنطا
لاى إستفسار لفضلوا بزيارة صفحة عجائب وغرائب الرياضيات
على الفيسبوك او من خلال الكود المقابل
https://www.facebook.com/Mr.Ahmed.Elawany/

حجم الجسم الناشئ عند دوران حول محور السينات $= \pi \int_{0}^{2} (ص_2^2 - ص_1^2)\, د س$

$= \pi \int_{0}^{2} (س^2 - \frac{1}{4} س^4)\, د س = \pi \left[\frac{1}{3} س^3 - \frac{1}{20} س^5 \right]_{0}^{2}$

$= \pi \left[\frac{8}{3} - \frac{32}{20} - صفر \right] = \boxed{\frac{16}{15} \pi}$ وحدة مكعبة #

---

(١٨) أجب عن إحدى الفقرتين الآتيتين:

(أ) أوجد $\int س (س-2)^4\, د س$

الحل الأول بالتجزيئ:

$= \frac{1}{5} س (س-2)^5 - \int \frac{1}{5} (س-2)^5\, د س$

$= \frac{1}{5} س (س-2)^5 - \frac{1}{30} (س-2)^6 + ث$ #

س	$(س-2)^4$
نفاضلها ↓	تكاملها ↓
1	$\frac{1}{5}(س-2)^5$

(-)

حل آخر بأفكار الصف الثاني الثانوي

$ث = \int [(س-2)+2](س-2)^4\, د س = \int (س-2)^5 + 2(س-2)^4\, د س$

$= \frac{1}{6}(س-2)^6 + \frac{2}{5}(س-2)^5 + ث$ #

أحمد العوانى
معلم أول الرياضيات بطنطا

(ب) $\int س^3 هـ^{س^2}\, د س = \frac{1}{2} \int س^2 (2 س هـ^{س^2})\, د س$

$= \frac{1}{2} \left[س^2 هـ^{س^2} - \int 2 س هـ^{س^2}\, د س \right]$

$= \frac{1}{2} س^2 هـ^{س^2} - \frac{1}{2} هـ^{س^2} + ث$ #

$س^2$	$2 س هـ^{س^2}$
نفاضلها ↓	تكاملها ↓
2 س	$هـ^{س^2}$

(-)

تمت بحمد الله وتوفيقه

الأستاذ أحمد محمد العوانى
معلم أول الرياضيات بطنطا
002-01110910645
00235-90595065

لأى إستفسار لفضلوا بزيارة صفحة مجانب وفرانب الرياضيات
على الفيسبوك او من خلال الكود المقابل
https://www.facebook.com/Mr.Ahmed.Elawany/