حل اختبارات التفاضل والتكامل مذاكره ١

الاختبار الأول ١

① أ $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$

٢ د محيط الدائره = ٢ط نق ⇐ م = ٢ط نق ⇐ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢\text{ط} \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

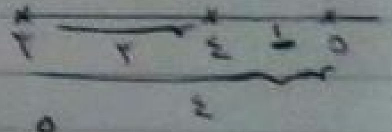
$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٢\text{ط} \times \frac{١}{\text{ط}} = ٢$

٣ ج $\text{د}'(\text{س}) = ٣\text{س}^٢ - ٦\text{س}$ ∴ $\text{د}''(\text{س}) = ٦\text{س} - ٦$ ⇐ س = ١

--- ١ +++

٤ ب $\int_{-\frac{\text{ط}}{٤}}^{\frac{\text{ط}}{٤}} (\text{جاس} + \text{جتاس})\,\text{دس} = ٢$ الأعلى $]-\infty ، ١[$

٥ ج

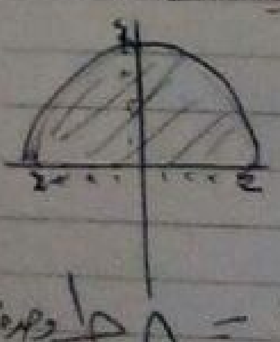


$\int_{٢}^{٥} ٥\,\text{د}(\text{س})\,\text{دس} = ٥$

لأن $\int_{٤}^{٥} \text{د}(\text{س})\,\text{دس} = ١$

٦ $\text{ص} = \sqrt{١٦ - \text{س}^٢}$ ⇐ $\text{ص}^٢ = ١٦ - \text{س}^٢$ $\text{ص}^٢ + \text{س}^٢ = ١٦$

وهي معادلة دائرة مركزها (٠،٠) وطول نصف قطرها ٤



$\int_{-٤}^{٤} \sqrt{١٦ - \text{س}^٢} =$ مساحة النصف الموضح بالرسم

= $\frac{١}{٢}$ مساحة الدائره

= $\frac{١}{٢} \times \text{ط} \times ١٦ = ٨\text{ط}$ وحدة مربعة

ح

② ب: $\int$ جاس جتا^{٣}س دس = $-\int$ -جاس جتا^{٣}س دس

= $-\frac{1}{4}$ جتا^{٤}س + ث

ج: هـ$^{س ص}$ - س^{٤} + ص^{٣} = ٠ ، أوجد $\frac{دص}{دس}$ عند س = ٠

[س $\frac{دص}{دس}$ + ص] هـ$^{س ص}$ - ٤س + ٣ص^{٢} $\frac{دص}{دس}$ = ٠ عند س = ٠

ص + ٣ص^{٢} $\frac{دص}{دس}$ = ٠ ⇐ ص = -١

∴ -١ + ٣ $\frac{دص}{دس}$ = ٠ ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{1}{3}$

---

③

أ س^{٢} - ٣س ص - ص^{٢} + ٣ = ٠

٢س - ٣س $\frac{دص}{دس}$ - ٣ص - ٢ص $\frac{دص}{دس}$ = ٠ عند (-١، ٤)

-٢ + ٣ $\frac{دص}{دس}$ - ١٢ - ٨ $\frac{دص}{دس}$ = ٠

-٥ $\frac{دص}{دس}$ = ١٤ ∴ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-14}{5}$

ص - ص$_{١}$ = م(س - س$_{١}$) ⇐ ص - ٤ = $\frac{-14}{5}$ (س + ١)

٥ص - ٢٠ = -١٤س - ١٤

١٤س + ٥ص - ٦ = ٠

ب: بفرض ن طول الضلع الأول = ٦ + $\frac{1}{3}$ ن ، الضلع الثاني = ٣٠ - ن

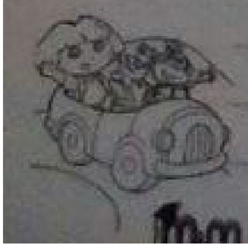
∴ م = $\frac{1}{2}$ (٦ + $\frac{1}{3}$ ن)(٣٠ - ن)

∴ م = ٩٠ + ٢ن - $\frac{1}{6}$ ن^{٢} ⇐ $\frac{دم}{دن}$ = ٢ - $\frac{1}{3}$ ن

عند ن = ٣

∴ $\frac{دم}{دن}$ = ١ سم^{٢}/د

عند $\frac{دم}{دن}$ = ٠ ⟵ ن = ٦ دقيقة



I

④

أ) د(س) = س + ٢ جا س ، ٠ ≤ س ≤ ٢ط

د'(س) = ١ + ٢ جتا س

عند ١ + ٢ جتا س = ٠ ← جتا س = $-\frac{١}{٢}$

الربع الثاني ، الثالث

١٨٠ - ٦٠ = ١٢٠ ، ١٨٠ + ٦٠ = ٢٤٠

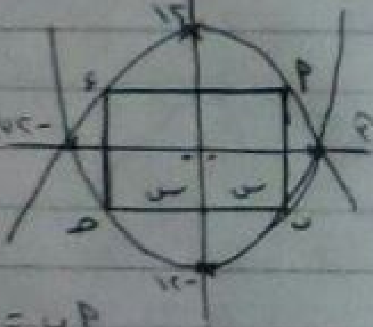
٠ +++ $\frac{٢ط}{٣}$ --- $\frac{٤ط}{٣}$ +++ ٢ط

تزايد في]٠ ، $\frac{٢ط}{٣}$[∪]$\frac{٤ط}{٣}$ ، ٢ط[

تناقص]$\frac{٢ط}{٣}$ ، $\frac{٤ط}{٣}$[

ب

نفرض ب ح = ٢س



أ = (س ، ص$_١$) ← أ = (س ، ١٢ - س^٢)

ب = (س ، ص$_٢$) ← ب = (س ، س^٢ - ١٢)

∴ أب = $\sqrt{(\text{س} - \text{س})^٢ + (١٢ - \text{س}^٢ - \text{س}^٢ + ١٢)^٢}$

أب = $\sqrt{(٢٤ - ٢\text{س}^٢)^٢}$ ← أب = ٢٤ - ٢س^٢

ساحة المستطيل م = ٢س (٢٤ - ٢س^٢) ← م = ٤٨س - ٤س^٣

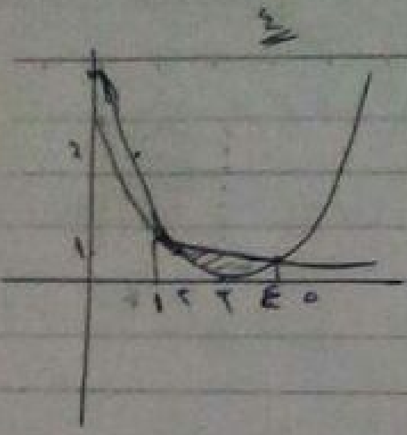
م' = ٤٨ - ١٢س^٢ ← س = ٢

+++ ٢ ---

∴ أكبر مساحة للمستطيل

= ٤٨ × ٢ - ٤ × ٨ = ٦٤ وحدة مربعة

٤



٥ أ) $ص_١ = \frac{٤}{س}$ ، $ص_٢ = (س-٣)^٢$

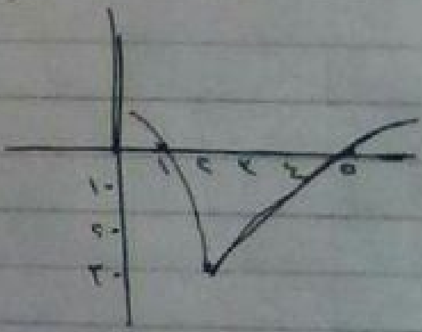
$\frac{٤}{س} = (س-٣)^٢$ بالتعويض وحل المعادلة بالحاسبة $س = ٤$ ، $س = ١$

ومنها نحصل على حدود التكامل من الرسم

$$ح = ط \int_{١}^{٤} \left[\frac{١٦}{س^٢} - (س-٣)^٤\right] ءس$$

$$ح = ط \left[-١٦ س^{-١} - \frac{١}{٥}(س-٣)^٥\right]_{١}^{٤} = ٥,٤$$ ط وحدة مكعبة

ب



الاختبار الثاني

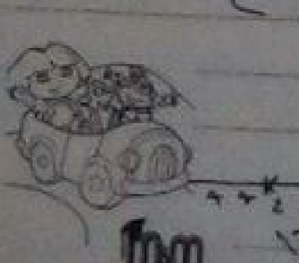
① أ) $ص = هـ^{٢س+١} \Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = ٢هـ^{٢س+١}$ عند $س = -\frac{١}{٢}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٢ \Leftarrow ص - ١ = ٢(س + \frac{١}{٢}) \Leftarrow ص = ٢س + ٢$

ب) $ص = ٤ن^٣ + ٤$ ، $ع = ٣ن^٢ - ٢$

$\frac{ءص}{ءن} = ١٢ن^٢$ ، $\frac{ءع}{ءن} = ٦ن$ ∴ $\frac{ءص}{ءن} \times \frac{ءن}{ءع} = \frac{١٢ن^٢}{٦ن}$

$\frac{ءص}{ءع} = ٢ن$ ، $\frac{ءع}{ءص} = \frac{١}{٢ن}$



جـ) بفرض $د(س) = ٨س - س^٢$

$د'(س) = ٨ - ٢س$

∴ $س = ٤$

$- - ٤ + +$

أكبر قيمة ١٦

fhm

Page
Date

ج

د) ص' = $\frac{١}{س-٢}$ $\xLeftarrow{\text{بالتكامل}}$ ص = $لو_{هـ}$ |س − ٢| + ث

عند (٣، ٠) ⟸ ٠ = $لو_{هـ}$ ١ + ث ∴ ث = صفر

ص = $لو_{هـ}$ |س − ٢| ⟸ د($هـ^٢$ + ٢) = $لو_{هـ}$ |$هـ^٢$ + ٢ − ٢|

د($هـ^٢$ + ٢) = ٢ $لو_{هـ}$ هـ ⟸ د($هـ^٢$ + ٢) = ٢

هـ

١ ← ٩ → ٢ ← ٧ → ٦

$\int_{١}^{٦}$ د(س) ءس = $\int_{١}^{٢}$ د(س) ءس − $\int_{٢}^{٦}$ د(س) ءس

∴ $\int_{١}^{٦}$ د(س) ءس = ٩ − (−٧) = ١٦

و) ٢ط

③

أ) ∫ س(٢س − ١$)^٣$ ءس ⟸ $\frac{١}{٢}$ ∫ (٢س − ١ + ١)(٢س − ١$)^٣$ ءس

= $\frac{١}{٢}$ ∫ (٢س − ١$)^٤$ ءس + $\frac{١}{٢}$ ∫ (٢س − ١$)^٣$ ءس

= $\frac{(٢س-١)^٥}{٢×٢×٥}$ + $\frac{١}{٢}$ × $\frac{(٢س-١)^٤}{٤×٢}$ + ث

= $\frac{١}{٢٠}$ (٢س − ١$)^٥$ + $\frac{١}{١٦}$ (٢س − ١$)^٤$ + ث

∫ س $هـ^{-٢س}$ ءس بالتجزئ

= س × −$\frac{١}{٢}$ $هـ^{-٢س}$ − ∫ −$\frac{١}{٢}$ $هـ^{-٢س}$ × ١ ءس

= −$\frac{١}{٢}$ س $هـ^{-٢س}$ − $\frac{١}{٤}$ $هـ^{-٢س}$ + ث

ب بفرض $\text{ص} = \sqrt{١٦ + \text{س}^2}$ ، $\text{ع} = \frac{\text{س}}{\text{س} - ٢}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢\text{س}}{٢\sqrt{١٦+\text{س}^2}} \quad ، \quad \frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{\text{س} - ٢ - \text{س}}{(\text{س}-٢)^2} = \frac{-٢}{(\text{س}-٢)^2}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دس}}{\text{دع}} = \frac{\text{س}}{\sqrt{١٦+\text{س}^2}} \times \frac{(\text{س}-٢)^2}{-٢} \quad \text{عند س} = -٣$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{-٣}{٥} \times \frac{٢٥}{-٢} = \frac{١٥}{٢}$$

---

(٣)

أ اذا كانت $\text{س جتاص} + \text{ص جتاس} = ١$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل

$$\text{س} \times -\text{جاص} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{جتاص} + \text{ص جتاس} + \text{جتاس} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} =$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \left[-\text{س جاص} + \text{جتاس} \right] = \text{ص جاس} - \text{جتاص}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص جاس} - \text{جتاص}}{\text{جتاس} - \text{س جاص}}$$

ب

$\text{د}'(\text{س}) = ٦\text{س}^2 + ١٢\text{س}$

$٦\text{س}^2 + ١٢\text{س} = ٠$

$٦\text{س}(\text{س} + ٢) = ٠$

$\text{س} = ٠$ ، أو $\text{س} = -٢ \notin [-١ ، ١]$

$\text{س} = ٠ \qquad \text{س} = -١ \qquad \text{س} = ١$

$\text{ص} = ٥ \qquad \text{ص} = ٩ \qquad \text{ص} = ١٣$

(٠،٥) صغرى مطلقة (١،١٣) عظمى مطلقة

fmm

Page
Date

④

أ $د(س) = \begin{cases} ٢س + س^٢ & س < ٠ \\ ٢س - س^٢ & س \geq ٠ \end{cases}$

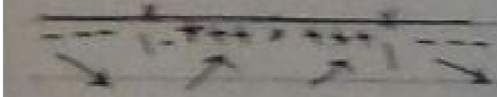
الحل

متصلة على ح $\bar{د}(٠)^- = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{د(٠ + هـ) - د(٠)}{هـ} = ٢$

$\bar{د}(٠)^+ = ٢$ $\therefore \bar{د}(٠)^- = \bar{د}(٠)^+ = ٢$

$\bar{د}(س) = \begin{cases} ٢ + ٢س & س < ٠ \\ ٢ & س = ٠ \\ ٢ - ٢س & س > ٠ \end{cases}$

$٢ + ٢س = ٠ \Longleftarrow س = -١$
$ص = -١$



$٢ - ٢س = ٠ \Longleftarrow س = ١$
$ص = ١$

$(-١ ، -١)$ صغرى محلية $(١ ، ١)$ عظمى محلية

$\int_{-١}^{٢} د(س) \, ءس = \int_{-١}^{٠} (٢س + س^٢) \, ءس + \int_{٠}^{٢} (٢س - س^٢) \, ءس$

$= \left[س^٢ + \frac{١}{٣}س^٣\right]_{-١}^{٠} + \left[س^٢ - \frac{١}{٣}س^٣\right]_{٠}^{٢} = - \frac{٢}{٣}$

ب

$ع = ل^٣ \Leftarrow \frac{دع}{دن} = ٣ل^٢ \frac{دل}{دن} \Leftarrow ٢٧ = ٣ \times ٩ \times \frac{دل}{دن} \Leftarrow \frac{دل}{دن} = ١ سم/ث$

$ص = ٦ل^٢ \Longleftarrow \frac{دص}{دن} = ١٢ل \frac{دل}{دن} \Leftarrow \frac{دص}{دن} = ١٢ \times ٣ \times ١ = ٣٦ سم^٢/ث$

⑤

أ ص' = ٦س - س² ← ٦ - ٢س = ٠ ← س = ٣

عندما س = ١ ∈]١، ٣[تكون الدالة محدبة

م = ∫ (٦س - س²) ء س ← م = ∫ (٦س - س²) ء س

م = [٣س² - ⅓ س³]₀³ = ٩ وحدة مربعة

ب

د(س) = س³ + أ س² + ب س تمر بالنقطة (٢، ٢)

∴ ٢ = ٨ + ٤أ + ٢ب ← ٤أ + ٢ب = -٦ ①

د'(س) = ٣س² + ٢أ س + ب ، د'(١) = ٠ ← ٣ + ٢أ + ب = ٠ ②

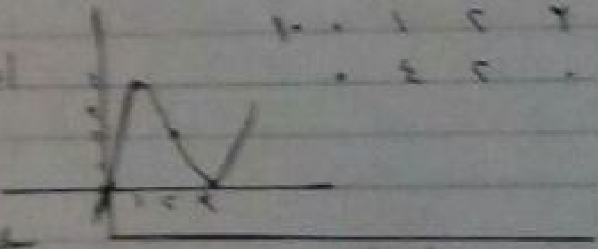
د''(س) = ٦س + ٢أ عند د''(٢) = صفر ← أ = -٦

بالتعويض في ② ∴ ب = ٩

س ② ٣س² - ١٢س + ٩ = ٠ ← س = ١ ، س = ٣

ص = ٤ ، ص = ٠

س	٣	٢	١	٠	-١
ص	٠	٢	٤	٠	



انظروا الى الحلول كاملة إن شاء الله

الاختبار الثالث

①

أ ميل المماس = -٣/٤ ، د'(٣) = -١٢ ، ص = ظاس ، عند س = ٣

ب

∫ ٢د(س) ء س = ٢ × ٧ = ١٤   ∫ ٤ ء س = ٢٠

∫ -٥ ء س = [-٥س] = -٢٠ - (-١٠) = -١٠

∫ [٣د(س) - ٢ر(س) - ٥] ء س = ١٤ + ٦ - ١٠ = ١٠

ء ٢س - ٣ = -س + ١ ← س = ٤ ، ٣٢/٣

∫ [(س + ١) - (٢س - ٣)] ء س

= [-½ س² + ٤س] = ٢

④

أ) $ص = س^{٢} لو_{هـ} س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = س^{٢} \times \frac{١}{س} + ٢س لو_{هـ} س$

$\frac{دص}{دس} = س + ٢س لو_{هـ} س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = س(١ + لو_{هـ} س^{٢})$

ب)

$د(س) = (س - ٤)^{\frac{٢}{٣}} \Leftarrow د'(س) = \frac{٢}{٣}(س - ٤)^{-\frac{١}{٣}} \Leftarrow د'(٤)$ غير معرفة

$د''(س) = -\frac{٢}{٩}(س - ٤)^{-\frac{٤}{٣}} \Leftarrow د''(س) = \frac{-٢}{٩\sqrt[٣]{(س - ٤)^{٤}}} \Leftarrow د''(س) \neq ٠$

∴ لا يوجد نقط انقلاب ، $د''(س)$ غير معرفة عند $س = ٤$

∴ المنحنى محدب لأعلى $ح - \{٤\}$

− − − − ④ − − − −

③

أ) $\int س(س - ٥)^{٣} دس$

$= \int (س - ٥ + ٥)(س - ٥)^{٣} دس = \int (س - ٥)^{٤} دس + ٥ \int (س - ٥)^{٣} دس$

$= \frac{١}{٥}(س - ٥)^{٥} + \frac{٥}{٤}(س - ٥)^{٤} + ث$ (حاول الحل بالتعويض)

ب) $\int ٤س هـ^{٢س} دس$ بالتجزئ

∫ حاصل ضرب دالتين = الأولى × تكامل الثانية − ∫ تكامل الثانية × مشتقة الأولى

$\int ٤س هـ^{٢س} دس = ٤س \times \frac{١}{٢} هـ^{٢س} - \int \frac{١}{٢} هـ^{٢س} \times ٤ دس$

$\Leftarrow \int ٤س هـ^{٢س} دس = ٢س هـ^{٢س} - هـ^{٢س} + ث$

ج)

$د(س) = س^{٤} - ٤س^{٣}$ في $[٠، ٤]$

$د'(س) = ٤س^{٣} - ١٢س^{٢} \leftarrow ٤س^{٢}(س - ٣) = ٠$

$\leftarrow س = ٠ \quad س = ٣ \quad س = ٤$

$ص = ٠ \quad ص = -٢٧ \quad ص = ٠$

عظمى مطلقة　　صغرى مطلقة　　عظمى مطلقة

④

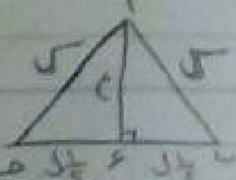
أ) $ص_1 = س^3$ ، $ص_2 = ١$ ∴ $س^3 = ١$ ← $س = ١$ بالتعويض بـ $س = \frac{١}{٢}$ ← $ص_2 > ص_1$

$ح = ط \int_0^1 (ص_2^2 - ص_1^2)\, ءس$ ← $ح = ط \int_0^1 (١ - س^6)\, ءس$

$ح = ط \left[س - \frac{١}{٧} س^7\right]_0^1$ ← $ح = \frac{٦}{٧} ط$ (حجم الاسطوانة طنق² ع)

∴ $\frac{٦}{٧} ط = ط \times نق^2 \times ٤٢$ ← $نق = \frac{١}{٧}$ وحدة طول

ب)



$ع = \sqrt{س^2 - \frac{١}{٤} ل^2}$ $م = \frac{١}{٢} ل \sqrt{س^2 - \frac{١}{٤} ل^2}$ ($\frac{ءس}{ءن} = -٣$)

$\frac{ءم}{ءن} = \frac{١}{٢} ل \times \frac{٢س}{٢\sqrt{س^2 - \frac{١}{٤} ل^2}} \times \frac{ءس}{ءن}$ ، عند ل = س

$\frac{ءم}{ءن} = \frac{١}{٢} ل \times \frac{ل}{\sqrt{ل^2 - \frac{١}{٤} ل^2}} \times -٣$ ← $\frac{ءم}{ءن} = -ل\sqrt{٣}$

⑤

أ) $ص_1 = س$ ، $ص_2 = ٤س - س^2$ ∴ $س^2 - ٣س = ٠$ ← $س = ٠$ ، $س = ٣$

عند $س = ١ \in [٠، ٣]$ ∴ $ص_2 > ص_1$

$م = \int_0^3 (٤س - س^2 - س)\, ءس$ ← $م = \int_0^3 (٣س - س^2)\, ءس$

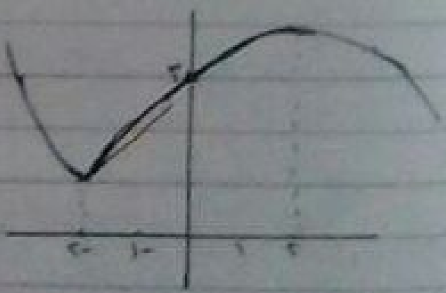
$م = \left[\frac{٣}{٢} س^2 - \frac{١}{٣} س^3\right]_0^3 = \frac{٩}{٢}$ وحدة مربعة

ب)

$د'(٢) = د'(-٢) = ٠$

أ، ب ميل المماس = صفر المماس أفقياً

$د'(٠) = ٢$ ← $(٠، ٢) \in$ للمنحنى



الاختبار الرابع

① أ) $\frac{د^2ص}{دس^2} = -٦$

ب) $\int قا^2س\,ظاس\,دس = \int قاس\,قاس\,ظاس\,دس = \frac{١}{٢}قا^2س + ث$

ج) (٠،٢،٠) ٢ دص $\int_{١٠}^{\frac{٢}{٣}} (-٢س^2 + ٢ [illegible]) دس$

[illegible] ١٠ ٢ ٤

= ٢٠

د) $ط\int_{١}^{٤} \frac{١}{ص}\,دص \rightarrow ح = ط\left[لو_{هـ}ص\right]_{١}^{٤} \rightarrow ح = ط\,لو_{هـ}٤ = ٢ط\,لو_{هـ}٢$

② أ) $\int (٣س^2 - ٤هـ^{٢س})\,دس = س^3 - ٢هـ^{٢س} + ث$

ب) $\int \frac{س-١}{\sqrt{س+٣}}\,دس = \int (س-١)(س+٣)^{-\frac{١}{٢}}\,دس$

$= \int (س+٣-٤)(س+٣)^{-\frac{١}{٢}}\,دس$

$= \int (س+٣)^{\frac{١}{٢}} - ٤\int (س+٣)^{-\frac{١}{٢}}\,دس = \frac{٢}{٣}(س+٣)^{\frac{٣}{٢}} - ٨(س+٣)^{\frac{١}{٢}} + ث$

ج) $جاص + جتا٢س = ٠ \rightarrow جتاص\,\frac{دص}{دس} - ٢جا٢س = ٠$

$-جاص \times \left(\frac{دص}{دس}\right)^2 + \frac{د^2ص}{دس^2} \times جتاص - ٤جتا٢س = ٠ \quad \div جتاص$

$-ظاص\left(\frac{دص}{دس}\right)^2 + \frac{د^2ص}{دس^2} - \frac{٤جتا٢س}{جتاص} = ٠$

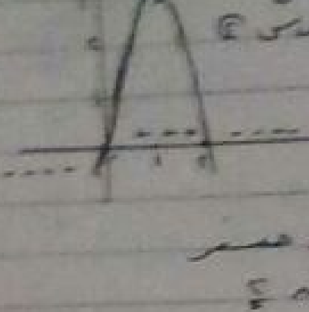
$\frac{د^2ص}{دس^2} - \left(\frac{دص}{دس}\right)^2 ظاص = ٤جتا٢س\,قاص$

③ أ) $\int_{١}^{٤} د(س) + \int_{١}^{٤} ٣ر(س) - \int_{١}^{٤} ٤\,دس = ٧ + (-٦) - \left[٤س\right]_{١}^{٤}$

$= ٧ - ٦ - (١٦ - ٤) = -١١$

الاختبار الخامس.

لاحظ اشارة المشتقة عند الشكل تمثالة تمثل د̄(س) بمعاد



د(س) = أس³ + ب س² + جـ ← د̄(س) = ٣أس² + ٢ب س

أ: الدالة تناقصية ∀ س ∈]-∞، ٠[،]٢، ∞[

ب: لمنحنى الدالة د نقط حرجة عند س ∈ {٠، ٢}

جـ: المنحنى د محدب لأسفل على الفترة]١، ∞[

د: توجد قيمة صغرى محلية للدالة د عند س = صفر

هـ: لايجاد د(١) نجد النقطة (٢، ٠) تحقق معادلة د̄

∴ ١٢أ + ٤ب = ٠ ← $\boxed{ب = -٣أ}$

رأس المنحنى (١، ٣) ، ∵ د̄(س) = ٣أس² + ٢ب س

٣ = ٣أ + ٢ب ← ٣ = ٣أ - ٦أ ← $\boxed{أ = -١}$

$\boxed{ب = ٣}$

د(س) = -س³ + ٣س² ← د(١) = ٢

ثـ

م = $\int_{٠}^{٢}$ (-س³ + ٣س²) ءس ← م = $[-\frac{١}{٤}$ س⁴ + س³$]_{٠}^{٢}$

م = -٤ + ٨ = ٤ وحدة مربعة

---

③ أ) ∫ قتا² $\frac{س+٥}{٢}$ = -٢ظتا $\frac{س+٥}{٢}$ + ث

ب) ∫ $\frac{٥س}{٣س²-١}$ ءس = $\frac{٥}{٦}$ ∫ $\frac{٦س}{٣س²-١}$ ءس = $\frac{٥}{٦}$ لوهـ|٣س²-١| + ث

جـ) د(س) = س³ - ٦س² + ٩س - ١

د̄(س) = ٣س² - ١٢س + ٩ ← س² - ٤س + ٣ = ٠

∴ س = ١ ، س = ٣

+ + + ١ - - - - ٣ + + +

تزايدية ح - [١، ٣]

تناقصية]١، ٣[

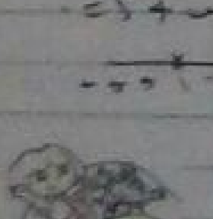
د) في الفترة [٠، ٢]

س = ٠ س = ١ س = ٢

ص = -١ ص = ٣ ص = ١

← عظمى مطلقة

← صغرى مطلقة



١٤

د(س) = ٤ + ظتا س − قا س ⟸ د‘(س) = − قتا٢ س − قا س ظا س [illegible]

د‘(س) = − قتا٢ س − قا س ظا س عند س = $\frac{\pi}{4}$

د‘(س) = −٢ − [illegible] = [illegible]   ميل العمود = $\frac{1}{[illegible]}$

معادلة العمود ص − ص١ = م (س − س١)

عند س = $\frac{\pi}{4}$ ، ص = ٣

ص − ٣ = $\frac{1}{[illegible]}$ (س − $\frac{\pi}{4}$) ⟸ [illegible] = س − $\frac{\pi}{4}$

[illegible] = $\frac{\pi}{4}$ [illegible]

$\frac{دع}{دن}$ = ٣ن٢ + ٢ن + ٣ [illegible] ⟸ ع = ن٣ + ن٢ + ٣ن [illegible]

[illegible] ⟸ ع = ن٣ + ٣ن [illegible]

ن٢ + ٣ن = ١ ⟸ ن٢ + ٣ن − ١ = ٠ ⟸ [illegible]

حل آخر

$\frac{دع}{دن}$ = ٣ن + ٣ ⟶ ع = ∫ (٣ن + ٣) دن

ع = [ن٢ + ٣ن] $\xleftarrow{[illegible]}$ ن٢ + ٣ن − ١ = ٠ ⟵ $\boxed{ن = ٤}$

---

④ نها_{س ⟵ ∞} $\left(\frac{٢س − ١}{٢س + ١}\right)^{س}$

= نها_{س ⟵ ∞} $\left(\frac{٢س + ١}{٢س + ١} − \frac{٢}{٢س + ١}\right)^{س}$ = نها_{س ⟵ ∞} $\left[١ − \frac{٢}{٢س + ١}\right]^{[illegible]}$

= نها_{س ⟵ ∞} $\left[١ − \frac{٢}{٢س + ١}\right]^{[illegible]}$ × نها_{س ⟵ ∞} $\left[١ − \frac{٢}{٢س + ١}\right]^{-١}$

= هـ$^{-٢}$ × ١ = هـ$^{-٢}$

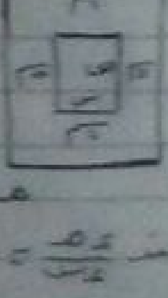
م = س ص ⟸ س ص = [illegible] ⟸ ص = $\frac{[illegible]}{س}$

م = [illegible]

م = [illegible]

م = [illegible]

م = [illegible] ⟸ $\frac{دم}{دس}$ = [illegible] − $\frac{[illegible]}{س٢}$



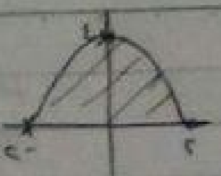
عند $\frac{دم}{دس}$ = ٠ ، س = [illegible] ، ص = [illegible]

Thm [illegible]

١٥

Page
Date

⑤ أ



٤ − س^2 = ⟵ س = ±٢

ح = ط $\int_{-٢}^{٢}$ (٤ − س^2)^2 ءس

ح = ط $\int_{-٢}^{٢}$ (١٦ − ٨س^2 + س^4) ءس ⟵ ح = ط [١٦س − $\frac{٨}{٣}$ س^3 + $\frac{١}{٥}$ س^5]$_{-٢}^{٢}$

ح = $\frac{٥١٢}{١٥}$ ط وحدة مكعبة

ب

د(س) = س^3 + أس^2 + ب س + ٤

د'(س) = ٣س^2 + ٢أس + ب   د'(س) = ٠ ، س = ٢

١٢ + ٤أ + ب = ٠ ⟸ ٤أ + ب = −١٢

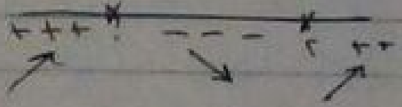
د''(س) = ٦س + ٢أ   عند د''(س) = ٠ ، س = ١

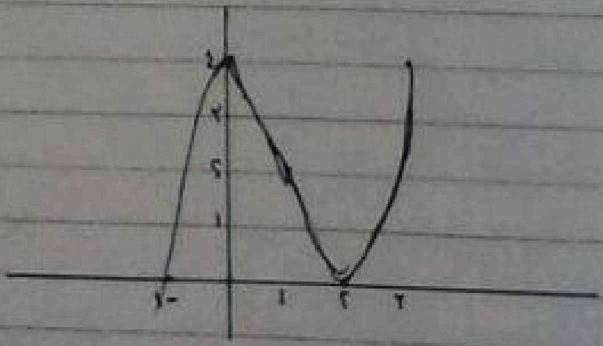
٦ + ٢أ = ٠ ⟸ أ = −٣ ، ب = ٠

∴ د(س) = س^3 − ٣س^2 + ٤ ⟸ د'(س) = ٣س^2 − ٦س

عند د'(س) = ٠ ⟸ ٣س(س − ٢) = ٠ ⟵ س = ٠ ، س = ٢
ص = ٤   ص = ٠

س	٣	٢	١	٠	−١
ص	٤	٠	٢	٤	٠





Page
Date

٣ ث

الإختبار السادس

حل

①

١ (ب)

٢ نفرض $\text{س} = \sqrt{\text{ن}^{2}+3} \leftarrow \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{\text{ن}}{\sqrt{\text{ن}^{2}+3}}$

$$\text{ص} = \frac{\text{ن}}{\text{ن}+1} \Longleftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{\text{ن}+1-\text{ن}}{(\text{ن}+1)^{2}} = \frac{1}{(\text{ن}+1)^{2}}$$

$$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دص}} = \frac{\text{ن}}{\sqrt{\text{ن}^{2}+3}} \times \frac{(\text{ن}+1)^{2}}{1} \Leftarrow \frac{\text{دس}}{\text{دص}} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)^{2}}{\sqrt{\text{ن}^{2}+3}} \quad (\text{أ})$$

٣

$$\sqrt{\text{ص}} - \sqrt{\text{س}} = 2 \Longleftarrow \frac{1}{2\sqrt{\text{ص}}}\text{ص}' - \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}} = 0 \Longleftarrow \text{ص}' = \frac{\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}}}$$

$$\therefore \text{ص}'' = \frac{\sqrt{\text{س}} \times \frac{1}{2\sqrt{\text{ص}}}\text{ص}' - \sqrt{\text{ص}} \times \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}}{\text{س}}$$ بالتعويض عن ص′

$$\text{ص}'' = \frac{\sqrt{\text{س}} \times \frac{1}{2\sqrt{\text{ص}}} \times \frac{\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}}} - \frac{\sqrt{\text{ص}}}{2\sqrt{\text{س}}}}{\text{س}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\text{ص}}}{2\sqrt{\text{س}}}}{\text{س}}$$

$$\text{ص}'' = \frac{\frac{\sqrt{\text{س}}-\sqrt{\text{ص}}}{2\sqrt{\text{س}}}}{\text{س}} = \frac{\sqrt{\text{س}}-\sqrt{\text{ص}}}{2\text{س}\sqrt{\text{س}}} = \frac{-2}{2\text{س}\sqrt{\text{س}}} = \frac{-1}{\text{س}\sqrt{\text{س}}} \quad (\text{أ})$$

٤

$$\int \frac{\text{س}-4}{(\text{س}-2)^{6}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{س}-2-2}{(\text{س}-2)^{6}}\,\text{دس} = \int (\text{س}-2-2)(\text{س}-2)^{-6}\,\text{دس}$$

$$= \int (\text{س}-2)^{-5}\,\text{دس} - 2\int (\text{س}-2)^{-6}\,\text{دس}$$

$$= -\frac{1}{4}(\text{س}-2)^{-4} + \frac{2}{5}(\text{س}-2)^{-5} + \text{ث} \quad (\text{ب})$$

---

٥ (أ) ٦ (ب)

Page
Date

② ١٧

أ) $\int \frac{٧ س^٣}{٢-٥س^٤} ءس = \frac{-٧}{٢٠} \int \frac{-٢٠ س^٣}{٢-٥س^٤} ءس = -\frac{٧}{٢٠} لو_{هـ} |٢-٥س^٤| + ث$

$\int (٣ هـ^{-٥س} + \frac{١١}{س}) ءس = -\frac{٣}{٥} هـ^{-٥س} + ١١ لو_{هـ} |س| + ث$

ب) اذا كان $ص = أ هـ^{س^٢+١} \Leftarrow ص' = ٢س أ هـ^{س^٢+١} = ٢س ص$

$ص'' = ٢س \times ص' + ٢ص \Leftarrow ص'' = ٢س(\overset{ص'}{٢سص}) + ٢ص$

$ص''' = ٢س \times ص'' + ٢ص' + ٢ص'$

$\Downarrow$

$\frac{ء^٣ص}{ءس^٣} = ٢س(٤س^٢ص + ٢ص) + ٤ص'$

$= ٨س^٣ص + ٤سص + ٤ \times ٢سص = ٨س^٣ص + ٤سص + ٨سص$

$= ٨س^٣ص + ١٢سص = ٤سص(٢س^٢ + ٣)$

---

③

أ) $\int ظتاس قتا^٢س ءس = -\int -ظتاس قتاس (قتاس) ءس$

$= \frac{-١}{٢} قتا^٢س + ث$

ب) $(س،ص) \times \xrightarrow{ف} \bullet (١،٠)$

$ف = \sqrt{(س-١)^٢ + ص^٢} \Leftarrow ف^٢ = (س-١)^٢ + ص^٢$

$\because ص = \sqrt{س} \therefore ص^٢ = س \Leftarrow ف^٢ = (س-١)^٢ + س$

$ع = \frac{ءف}{ءس} = ٢(س-١) + ١ \quad \therefore \frac{ءف}{ءس} = ٠$

$\Leftarrow س = \frac{١}{٢} \quad \therefore ص = \sqrt{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$- - - - \frac{١}{٢} + + +$

$\therefore$ النقطة $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{\sqrt{٢}})$

Page
Date

١٨

④

أ) د(س) = { س(س−٤) س ≥ ٠ ، −س(س−٤) س < ٠ ⟸ د(س) = { س² − ٤س س ≥ ٠ ، −س² + ٤س س < ٠

$\text{د}(٠)^{+} = \lim_{\text{هـ} \to ٠^{+}} \frac{\text{د}(٠ + \text{هـ}) - \text{د}(٠)}{\text{هـ}} = ٢$ ، $\text{د}(٠)^{-} = -٢$

∴ د̀(٠) غير موجوده عند ٢س − ٤ = ٠ ⟸ س = ٢

س = −١ س = ٠ س = ٢ س = ٣

ص = −٥ ص = ٠ ص = −٤ ص = −٣

صغرى مطلقة ⟸ ⟸ عظمى مطلقة

ب) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٦\text{س}^2 + \text{ب س}$ ⟸ $\text{ص} = ٢\text{س}^3 + \frac{١}{٢}\text{ب س}^2 + \text{ث}$

∵ د(٠) = ٥ ∴ ٥ = ٠ + ٠ + ث ∴ ث = ٥

∴ $\text{ص} = ٢\text{س}^3 + \frac{١}{٢}\text{ب س}^2 + ٥$ ∵ د(٢) = −٣

∴ −٣ = ١٦ + ٢ب + ٥ ⟸ ب = −١٢ أكمل الحل كما في الإجابة السابقة

---

⑤

أ) نفرض ع = $\text{لو}_{\text{هـ}}(٩ + \text{س}^2)$

⟸ $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = ٢\text{س} \times \frac{١}{٩ + \text{س}^2}$

ص = س² + ٣ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}$

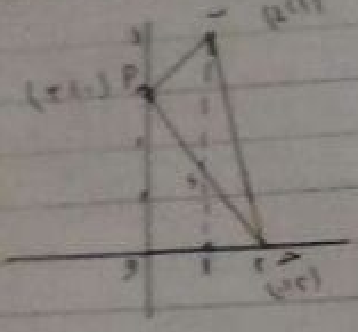
$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دس}}{\text{دص}} = \frac{٢\text{س}}{٩ + \text{س}^2} \times \frac{١}{٢\text{س}} = \frac{٢\text{س}}{١٨ + ٢\text{س}^2}$ عند س = ١

∴ $\frac{\text{دع}}{\text{دص}} = \frac{٢}{٢٠}$

ج) م(△ أ ب جـ) = $\frac{١}{٢}\left|\begin{vmatrix} ٠ & ٣ & ١ \\ ١ & ٤ & ١ \\ ٢ & ٠ & ١ \end{vmatrix}\right| = \frac{٥}{٢}$ وحدة مساحة

المطلوب باستخدام التكامل

١٩



ب معادلة $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ← $\frac{\text{ص} - \text{ص}_١}{\text{س} - \text{س}_١} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

← $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - ٠} = \frac{٤ - ٢}{١ - ٠}$ ← $\text{ص}_١ = \text{س} + ٢$

بالمثل معادلة $\overleftrightarrow{\text{بح}}$ ← $\text{ص}_٢ = -٤\text{س} + ٨$

معادلة أح ← $\text{ص}_٣ = -\frac{٣}{٢}\text{س} + ٢$

م △ أبح = م △(أبد) + م(△ بدح)

م △ أبد = $\int_{٠}^{١} (\text{ص}_١ - \text{ص}_٣)\, ء\text{س}$

$= \int_{٠}^{١} \text{س} + ٢ + \frac{٣}{٢}\text{س} - ٢ = \int_{٠}^{١} \frac{٥}{٢}\text{س}\, ء\text{س} = \left[\frac{٥}{٤}\text{س}^٢\right]_{٠}^{١} = \frac{٥}{٤}$

م △ بدح = $\int_{١}^{٢} (\text{ص}_٢ - \text{ص}_٣)\, ء\text{س} = \int_{١}^{٢} (-٤\text{س} + ٨ + \frac{٣}{٢}\text{س} - ٢)\, ء\text{س}$

$= \int_{١}^{٢} (-\frac{٥}{٢}\text{س} + ٥)\, ء\text{س} = \left[-\frac{٥}{٤}\text{س}^٢ + ٥\text{س}\right]_{١}^{٢} = \frac{٥}{٤}$

∴ م △ (أبد) = $\frac{٥}{٤} + \frac{٥}{٤} = \frac{١٠}{٤} = \frac{٥}{٢}$ وحدة مساحة

الحجم الناشئ من دوران △ أوح حول محور الصادات

∵ $\text{ص}_٣ = -\frac{٣}{٢}\text{س} + ٢ \Leftarrow ٢\text{ص} = -٢\text{س} + ٦$ ← $\text{س} = -\frac{٢}{٣}\text{ص} + ٢$

$\text{ح} = \text{ط}\int_{٠}^{٣} \text{س}^٢\, ء\text{ص}$ ← $\text{ح} = \text{ط}\int_{٠}^{٣} (-\frac{٢}{٣}\text{ص} + ٢)^٢\, ء\text{ص}$

$\text{ح} = \text{ط}\left[\frac{(-\frac{٢}{٣}\text{ص} + ٢)^٣}{٣ \times -\frac{٢}{٣}}\right]_{٠}^{٣} = \text{ط}\left[\frac{(١ - \frac{٢}{٣}\text{ص} + ٢)^٣}{-٢}\right]_{٠}^{٣} = ٤\text{ط}$ وحدة حجوم

Page
Date

الاختبار السابع

① أ

$\text{ص}^{٢} = ٣\text{س}^{٢} - ٧$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ص}}{٣\text{س}}$

$٢\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٦\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٣\text{س}}{\text{ص}}$ (ب)

ب

$\text{د(س)} = \text{س}^{٣} - ٣\text{س} + ١$ نقطة انقلاب هي (٠، ١)

$\Leftarrow \text{د}'\text{(س)} = ٣\text{س}^{٢} - ٣ \Leftarrow \text{د}''\text{(س)} = ٦\text{س}$

س = صفر، ص = ١ (أ)

$- - - - - \bullet + + +$

نقطة انقلاب

---

٣ (أ) / ٤ (ب) / ٥ (أ) / ٦ (ب)

---

②

أ) $\int \text{س جاس دس}$ إنتبه

تكامل حاصل ضرب دالتين = الأولى × تكامل الثانية − $\int$ تكامل الثانية × تفاضل الأولى

$\int \text{س جاس دس} = \text{س} \times -\text{جتاس} - \int -\text{جتاس} \times ١ \text{ دس}$

$= -\text{س جتاس} + \text{جاس} + \text{ث}$

للتأكد فقط

تفاضل	تكامل
س	جاس
١	−جتاس
٠	−جاس

ب) $\int_{-١}^{١} \sqrt{\text{س}^{٤} + \text{س}^{٢}} \text{ دس}$

$\Leftarrow$ الدالة زوجية ∴ $\int_{-١}^{١} \sqrt{\text{س}^{٤} + \text{س}^{٢}} \text{ دس} = ٢ \int_{٠}^{١} \sqrt{\text{س}^{٤} + \text{س}^{٢}} \text{ دس}$

$= ٢ \int_{٠}^{١} \sqrt{\text{س}^{٢}} \sqrt{\text{س}^{٢} + ١} \text{ دس} \rightarrow ٢ \int_{٠}^{١} \overset{\text{موجب}}{|\text{س}|} \sqrt{\text{س}^{٢} + ١} \text{ دس}$

$= \int_{٠}^{١} ٢\text{س} \sqrt{\text{س}^{٢} + ١} \text{ دس} = \int_{٠}^{١} \overset{\text{د}'\text{(س)}}{٢\text{س}} (\text{س}^{٢} + ١)^{\frac{١}{٢}} \text{ دس}$

$= \left[\frac{٢}{٣} (\text{س}^{٢} + ١)^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{١} = \frac{٢}{٣} \left(٢^{\frac{٣}{٢}} - ١ \right]$

$= \frac{٢}{٣} \left[\sqrt{٨} - ١ \right]$

٢١

ب $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(٢ - \sqrt{٢}\,\text{جتاس})$ ، $\text{س} = \frac{\pi}{٤}$

الحل عند $\text{س} = \frac{\pi}{٤} \Leftarrow \text{ص} = ٠$

$\text{ص}' = \sqrt{٢}\,\text{جاس} \times \frac{١}{٢ - \sqrt{٢}\,\text{جتاس}} \xLeftarrow{\text{س} = \frac{\pi}{٤}} \text{ص}' = ١$

معادلة المماس $\text{ص} - ٠ = ١(\text{س} - \frac{\pi}{٤}) \Leftarrow \text{ص} = \text{س} - \frac{\pi}{٤}$

---

③

أ $\text{د}(\text{س}) = (\text{س} - ١)^٤ + ٣$

$\text{د}'(\text{س}) = ٤(\text{س} - ١)^٣$ $\quad \text{د}''(\text{س}) = ١٢(\text{س} - ١)^٢$

عند $\text{د}''(\text{س}) = ٠ \Leftarrow \text{س} = ١$

لا يوجد نقط انقلاب $\quad$ ++++ لأعلى $\quad$ ١ $\quad$ +++++ لأسفل $\quad$ محدب لأسفل في $ح - \{١\}$

ب

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٠٫٤$ $\quad \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = -٠٫٥$ $\quad \text{ح} = \text{س}^٢\text{ع}$

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \text{س}^٢ \frac{\text{دع}}{\text{دن}} + \text{ع} \times ٢\text{س} \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

عند $\text{س} = ٦$ ، $\text{ع} = ٥$

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = ٣٦ \times -٠٫٥ + ٥ \times ١٢ \times ٠٫٤ = ٦ \ \text{سم}^٣/\text{ث}$

---

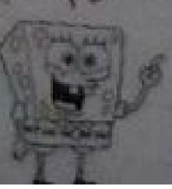
④

أ $\text{د}(\text{س}) = \int_{٠}^{٣} \text{س}\sqrt{\text{س} + ١}\,\text{دس}$

$= \int_{٠}^{٣} (\text{س} + ١ - ١)(\text{س} + ١)^{\frac{١}{٢}}\,\text{دس}$

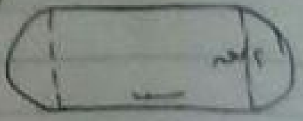
$= \int_{٠}^{٣} (\text{س} + ١)^{\frac{٣}{٢}} - \int_{٠}^{٣} (\text{س} + ١)^{\frac{١}{٢}}\,\text{دس} = \frac{٢}{٥}(\text{س} + ١)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٢}{٣}(\text{س} + ١)^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{٠}^{٣}$

أكمل الحل



٢٢

ﻫـ



المحيط = محيط المستطيل + $\frac{1}{2}$ محيط دائرة + $\frac{1}{2}$ محيط دائرة

٤٠٠ = ٢س + ٢ط نق ⟸ ٢٠٠ = س + ط نق

س = ٢٠٠ − ط نق

المساحة = مساحة المستطيل + مساحة الدائرة

م = س × ٢نق + ط نق² ⟸ م = ٢نق (٢٠٠ − ط نق) + ط نق²

م = ٤٠٠نق − ٢ط نق² + ط نق² ⟸ م = ٤٠٠نق − ط نق²

$\frac{\text{دم}}{\text{دنق}}$ = ٤٠٠ − ٢ط نق   حيث $\frac{\text{دم}}{\text{دنق}}$ = ٠ ∴ نق = $\frac{٢٠٠}{\text{ط}}$

− − − $\overset{\times}{\frac{٢٠٠}{\text{ط}}}$ + + +

س = ٢٠٠ − ط × $\frac{٢٠٠}{\text{ط}}$ = صفر

∴ البعد يتلاشى ويصبح الشكل دائرة

---

⑤

أ د(س) = س³ − ٣س + ٢   في الفترة [٠، ٢]

د'(س) = ٣س² − ٣   حيث د'(س) = ٠ ⟸ س = ±١

س = ١   س = ٠   س = ٢

ص = ١   ص = ٣   ص = ٥ ⟵ عظمى مطلقة

⟸ صغرى مطلقة

ثانياً

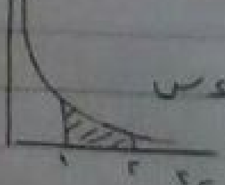
م = $\int_{٠}^{٢}$ (س³ − ٣س + ٢) دس = $\left[\frac{1}{4}\text{س}^4 - \frac{3}{2}\text{س}^2 + ٢\text{س}\right]_{٠}^{٢}$ = ٤ وحدة مساحة

ب

الدوران حول محور السينات

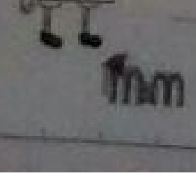
∴ س ص = ٢ ⟵ ص = $\frac{٢}{\text{س}}$

ح = ط $\int_{١}^{٢} \left(\frac{٢}{\text{س}}\right)^2$ ء س



ح = ط $\int_{١}^{٢} \frac{٤}{\text{س}^2}$ ء س

ح = ط $\left[-٤\text{س}^{-1}\right]_{١}^{٢}$ = ٢ط وحدة حجم



الثامن

① أ

$س^٣ × ٢ص \frac{دص}{دس} + ٣س^٢ ص = ٠$ ← عند ص = ١ ، $س^٣ ص^٢ = ١$ ⇐ س = ١

عند س = ١ ، ص = ١

$١ × ٢ \frac{دص}{دس} + ٣ = ٠$ ⇐ $\frac{دص}{دس} = \frac{-٣}{٢}$

ب

$٧ قاس طاس هـ^{قاس}$

هـ

(٠، ١-) انقلاب

ج

$\int_{٢}^{٧} د(س) دس - \int_{٤}^{٧} د(س) دس = \int_{٢}^{٤} د(س) دس$

د

$س^٢ - ٤س = ٠$ ⇐ س = ٠ ، س = ٤ $ص_١ = س^٢$ $ص_٢ = ٤س$

عند س = ١ ∈ [٠، ٤] نجد $ص_٢ > ص_١$

$\int_{٠}^{٤} (٤س - س^٢) دس = \left[٢س^٢ - \frac{١}{٣} س^٣\right]_{٠}^{٤} = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

هـ

$\frac{ط}{٢}$

② أ

$\int \frac{(س+٣)^٣ - ٢٧}{س} دس$ ⇐ $\int \frac{(س+٣-٣)\left[(س+٣)^٢ + ٣(س+٣) + ٩\right]}{س}$

$= \int (س^٢ + ٦س + ٩ + ٣س + ٩ + ٩) دس = \int (س^٢ + ٩س + ٢٧) دس$

$= \frac{١}{٣} س^٣ + \frac{٩}{٢} س^٢ + ٢٧س$

ب

$د(س) = ٢ طا^٣ س$ ⇐ عند $س = \frac{ط}{٤}$ ⇐ ص = ٢

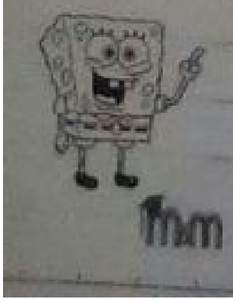
$دَ(س) = ٦ طا^٢ س قا^٢ س$ عند $س = \frac{ط}{٤}$ ∴ $دَ(س) = ١٢$

$ص - ٢ = ١٢(س - \frac{ط}{٤})$ ⇐ $ص - ٢ = ١٢س - \frac{ط}{٣}$

تابع ٢ج

$\int س^٢ هـ^{-س} دس =$

←



$\int س^2 هـ^{-س} ءس = س^2 \times -هـ^{-س} - \int -هـ^{-س} \times ٢س \, ءس$

$\int س^2 هـ^{-س} ءس = -س^2 هـ^{-س} - \left[٢س \times هـ^{-س} - \int هـ^{-س} \times ٢ \, ءس \right]$

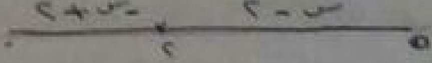
$= -س^2 هـ^{-س} - ٢س \times هـ^{-س} - ٢ هـ^{-س} + ث$

تفاضل	تكامل
$س^2$	$هـ^{-س}$
$٢س$ $+$	$-هـ^{-س}$
٢ $-$	$هـ^{-س}$
٠ $+$	$-هـ^{-س}$

$= -س^2 هـ^{-س} - ٢س هـ^{-س} - ٢هـ^{-س} + ث$

②

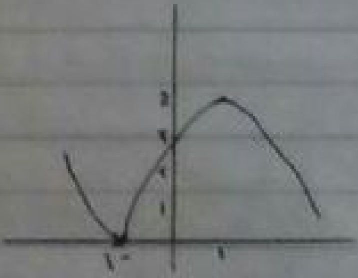
أ $\int_{٠}^{٥} |س - ٢| \, ءس$



$= \int_{٠}^{٢} (-س + ٢) \, ءس + \int_{٢}^{٥} (س - ٢) \, ءس$

$= \left[-\frac{1}{2}س^2 + ٢س \right]_{٠}^{٢} + \left[\frac{1}{2}س^2 - ٢س \right]_{٢}^{٥} = ٦,٥$

ب



③ أ

$د(س) = \sqrt{٤ - س^2} \Leftarrow د(س) = (٤ - س^2)^{\frac{1}{2}}$

$د'(س) = \frac{1}{2}(٤ - س^2)^{-\frac{1}{2}} \times -٢س$

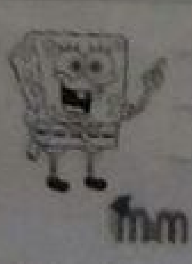
عند $د'(س) = ٠$

$س(٤ - س^2)^{-\frac{1}{2}} = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$س = ٠$ $\quad$ $س = ٢$

$ص = ٢$ $\quad$ $ص = ٠$

⟸ عظمى مطلقة $\quad$ ⟸ صغرى مطلقة



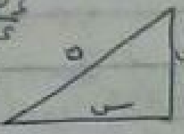
٢٥

٤

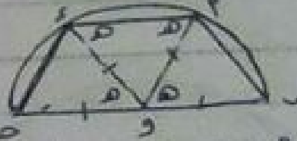
$\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ١ \text{ م/د}$ $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = ٢٥$ عند ص = ٣ ⇐ س = ٤

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ؟$ $٢\text{س} \frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٢\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دن}} =$

$٢ \times ٤ \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٢ \times ٣ \times ١ = ٠ \Leftarrow \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -\frac{٣}{٤} \text{ م/د}$



٥ م



مساحة أ ب هـ د = م(△ أ ب و) + م(△ أ و د) + م(△ د و هـ)

$\text{م}(\text{أ ب هـ د}) = \frac{١}{٢} \text{نق}^2 \text{جا هـ} + \frac{١}{٢} \text{نق}^2 \text{جا هـ} + \frac{١}{٢} \text{نق}^2 \text{جا}(١٨٠ - ٢\text{هـ})$

$\text{م}(\text{أ ب هـ د}) = \text{نق}^2 \text{جا هـ} + \frac{١}{٢} \text{نق}^2 \text{جا ٢هـ} =$

$= \text{نق}^2 [\text{جا هـ} + \frac{١}{٢} \text{جا ٢هـ}] = \text{نق}^2 [\text{جا هـ} + \text{جا هـ جتا هـ}]$

$\text{م} = \text{نق}^2 \text{جا هـ} (١ + \text{جتا هـ}) \Leftarrow \text{م}' = \text{نق}^2 \text{جا هـ} \times - \text{جا هـ} + (١ + \text{جتا هـ}) \text{نق}^2 \text{جتا هـ}$

$\text{عند م}' = ٠ \Leftarrow - \underline{\text{جا}^2 \text{هـ}} + \text{جتا هـ} + \text{جتا}^2 \text{هـ} = ٠$

$\underline{\text{جتا}^2 \text{هـ} - ١} + \text{جتا هـ} + \text{جتا}^2 \text{هـ} = ٠$

$\Leftarrow ٢ \text{جتا}^2 \text{هـ} + \text{جتا هـ} - ١ = ٠$

$(٢ \text{جتا هـ} - ١)\underset{\text{مرفوضة}}{(\text{جتا هـ} + ١)} = ٠$ $\text{جتا هـ} = \frac{١}{٢} \Leftarrow \text{هـ} = ٦٠^\circ$

$\therefore \text{م}(\text{أ ب هـ}) = ٦٠^\circ$ ٧ --- $\frac{٣}{٤}$ + ٣ + ٩ ٩

ب

$\text{م} = \int_{١}^{٤} \text{ص دس}$ $\text{ص} = \frac{٤ + \text{س}^2}{\text{س}} = \text{س} + \frac{٤}{\text{س}}$

$\text{م} = \int_{١}^{٤} (\text{س} + \frac{٤}{\text{س}}) \text{دس} = \left[\frac{١}{٢} \text{س}^2 + ٤ \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| \right]_{١}^{٤}$

$\text{م} = ٨ + ٤ \text{لو}_{\text{هـ}} ٤ - \frac{١}{٢} = \frac{١٥}{٢} + ٤ \text{لو}_{\text{هـ}} ٤$ وحدة مربعة

$\text{ح} = \text{ط} \int_{١}^{٤} (\text{س} + \frac{٤}{\text{س}})^2 \text{دس} \Leftarrow \text{ح} = \text{ط} \int_{١}^{٤} (\text{س}^2 + ٨ + \frac{١٦}{\text{س}^2}) \text{دس}$

$\text{ح} = \text{ط} \left[\frac{١}{٣} \text{س}^3 + ٨\text{س} - \frac{١٦}{\text{س}} \right]_{١}^{٤}$ وحدة مكعبة

الاختبار التاسع

١) متروك للطالب سهل و تكررت نفس الأفكار مرة قبل

---

٢) أ) $\int \frac{\text{٣س}}{\text{س}^{٢}-١}\,\text{دس} \Rightarrow \frac{٣}{٢}\int \frac{\text{٢س}}{\text{س}^{٢}-١}\,\text{دس} = \frac{٣}{٢}\,\text{لوهـ}\,|\text{س}^{٢}-١| + \text{ث}$

ب) $\int \text{٩س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{٣س}}\,\text{دس}$

$= \text{٩س}^{٢} \times \frac{١}{٣}\,\text{هـ}^{\text{٣س}} - \int \frac{١}{٣}\,\text{هـ}^{\text{٣س}} \times \text{١٨س}\,\text{دس}$

$= \text{٣س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{٣س}} - \int \text{٦س}\,\text{هـ}^{\text{٣س}}\,\text{دس}$

$= \text{٣س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{٣س}} - \left[\text{٦س} \times \frac{١}{٣}\,\text{هـ}^{\text{٣س}} - \int \frac{١}{٣}\,\text{هـ}^{\text{٣س}} \times ٦\,\text{دس}\right]$

$= \text{٣س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{٣س}} - \text{٢س}\,\text{هـ}^{\text{٣س}} + \frac{٢}{٣}\,\text{هـ}^{\text{٣س}} + \text{ث}$

ب) $\text{ص}^{٣} = \text{س}^{٢} \Leftarrow \text{٣ص}^{٢}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢س}$ عند س = ٨ ⇐ ص = ٤

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٣}$

---

③ أ) $\text{جاس} = \text{س ص} \Leftarrow \text{جتاس} = \text{س}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص}$ ①

$\Leftarrow -\text{جاس} = \text{س}\,\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} + \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\Leftarrow -\text{جاس} = \text{س ص}'' + \text{٢ص}'$ بالضرب × س

$-\text{س جاس} = \text{س}^{٢}\,\text{ص}'' + \text{٢س ص}'$ من ① $\text{س ص}' = \text{جتاس} - \text{ص}$

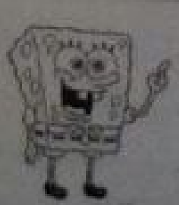
لاحظ جاس = س ص

$-\underline{\text{س جاس}} = \text{س}^{٢}\,\text{ص}'' + ٢(\text{جتاس} - \text{ص})$

$-\text{س}^{٢}\text{ص} - \text{س}^{٢}\,\text{ص}'' = \text{٢جتاس} - \text{٢ص}$

$\text{س}^{٢}(\text{ص} + \text{ص}'') + \text{٢جتاس} = \text{٢ص}$

#



Tom

ب) ص = ٢س^3 + ٣س^2 + ٤س + ٥

ص' = ٦س^2 + ٦س + ٤ عند س = -١

ص' = ٤ ⟵ ٦س^2 + ٦س = ٠ ⟵ س = ٠ ، س = -١

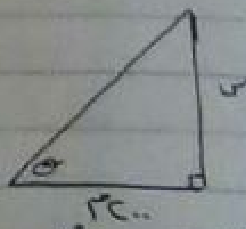
عند س = ٠ ⟵ ص = ٥ ∴ المماس الأول يمر بالنقطة (٠، ٥)

ص − ٥ = ٤(س − ٠) ⟸ ٤س − ص + ٥ = ٠

---

④

أ)



دس/دن = ٢٨م/د

طاθ = س/٢٠٠ ⟸ قا^{2}θ دθ/دن = ١/٢٠٠ دس/دن

دθ/دن = ١/٢٠٠ × ٢٨ × حتا^2 ٤٥ = ٠.٠٧ ر

عند س = ٢٠٠م

∴ θ = ٤٥°

ب) دص/دس = ٣س^2 − ٣ ⟵ ص = س^3 − ٣س + ث عند (-٢، -١)

∴ ص = س^3 − ٣س + ١ ث = +١

ص' = ٣س^2 − ٣ عند ص' = ٠ ⟵ س = ١ ، س = -١

+++ -١ --- ١ +++

(-١، ٣) عظمى محلية

(١، -١) صغرى محلية

ص'' = ٦س عند ص'' = ٠ ⟸ س = ٠

--- ٠ +++

للأعلى
لأسفل

نقطة انقلاب (٠، ١)

س	٢	١	٠	-١	-٢
ص	٣	-١	١	٣	-١

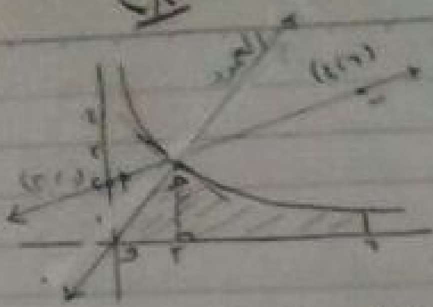
ارسم المنحنى

٢ب

⑤

أ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$

$\frac{ص - ٤}{س - ٦} = \frac{٤ - ٢}{٦ - ٠} = \frac{١}{٣}$



٣ص − ١٢ = س − ٦ ⟵ س − ٣ص + ٦ = ٠

حل معادلتي المستقيم و المنحنى

٢ ∵ ص = $\frac{٩}{س}$ ⟵ س − $\frac{٢٧}{س}$ + ٦ = ٠

س² + ٦س − ٢٧ = ٠ ⟵ س = ٣ ∴ ص = ٣ السالب مرفوض

∴ ح = (٣، ٣)

لإيجاد معادلة العمود عند ح ∵ ص = ٩س$^{-١}$

ص' = −٩س$^{-٢}$ ∴ ص'$_{(س=٣)}$ = −١

∴ ميل العمود = ١

معادلة المستقيم ص − ٣ = ١(س − ٣)

ص − ٣ = س − ٣ ⟵ س − ص = ٠

⟵ س = ص ∴ المستقيم يمر بنقطة الأصل

$ح = ط \int_{٠}^{٣} س^{٢}\,ءس + ط \int_{٣}^{٦} \frac{٨١}{س^{٢}}\,ءس$

$= ط \left[\frac{١}{٣} س^{٣}\right]_{٠}^{٣} + ط \left[\frac{-٨١}{س}\right]_{٣}^{٦} = ٩ط + \frac{٢٧}{٢}ط = \frac{٤٥}{٢}ط$

٢٩

الاختبار العاشر

① أ) $\lim_{س \to \infty} \left(١+\frac{١}{س}\right)^{س+٢} = هـ$

ب) $٢(٥-٢ظتا س)^٢ \times ٢ \times قتا^٢ س = ٦ قتا^٢ س (٥-٢ظتا س)^٢$

جـ) $ق(س) = ٣ك س^٢ + ١٨س \Leftarrow ق'(س) = ٦ك س + ١٨$

$٦ك \times -١ + ١٨ = ٠ \Leftarrow ك = ٣$

د) -١٦٠ هـ) صفر   و) $\frac{١٦}{١٥}$ وحدة مساحة

---

② أ) $\int ظا(٣س+١) دس \Leftarrow \int \frac{جا(٣س+١)}{جتا(٣س+١)} دس$

$\Leftarrow -\frac{١}{٣} \int \frac{-٣جا(٣س+١)}{جتا(٣س+١)} = -\frac{١}{٣} لو_{هـ} |جتا(٣س+١)| + ث$

ب) $\int (١-٥س^٤)(٢س-س^٥)^٥ دس$

$= \frac{١}{٢} \int (٢-١٠س^٤)(٢س-س^٥)^٥ دس$

$= \frac{١}{١٢} (٢س-س^٥)^٦ + ث$

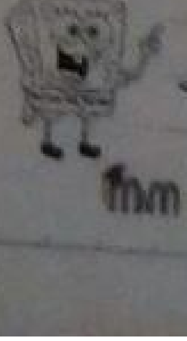
جـ) $\frac{دس}{دن} = ٦ن^٢ \quad \frac{دص}{دن} = ٤ن^٣ \leftarrow \frac{دص}{دس}\Big|_{(ن=١)} = \frac{٢}{٣}$

عند ن = ١ ← س = ٥ ، ص = ١

معادلة المماس ص - ١ = $\frac{٢}{٣}$ (س - ٥) ← ٣ص - ٣ = ٢س - ١٠

٢س - ٣ص - ٧ = ٠

$\because \frac{دص}{دس} = \frac{٤ن^٣}{٦ن^٢} = \frac{٢}{٣} ن$



$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = \frac{٢}{٣} \frac{دن}{دس} = \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٦ن^٢} = \frac{١}{٩ن^٢}$

$\left(\frac{د^٢ص}{دس^٢}\right)_{ن=١} = \frac{١}{٩}$

Page
Date

$\underline{\underline{٣٠}}$ ③

أ) $$\text{د}(\text{س}) = |\text{س}^3 - ١| = \begin{cases} \text{س}^3 - ١ & \text{س} \geq ١ \\ -\text{س}^3 + ١ & \text{س} < ١ \end{cases}$$

$$\text{د}'(١)^{+} = \underset{\text{هـ}\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(١+\text{هـ}) - \text{د}(١)}{\text{هـ}} = ٣$$

$$\text{د}'(١)^{-} = \underset{\text{هـ}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(١+\text{هـ}) + \text{د}(١)}{\text{هـ}} = -٣$$

$$\text{د}'(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س}^2 & \text{س} > ١ \\ \text{غير معرفة} & \text{س} = ١ \\ -٣\text{س}^2 & \text{س} < ١ \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \text{د}''(\text{س}) = \begin{cases} ٦\text{س} & \text{س} > ١ \\ -٦\text{س} & \text{س} < ١ \end{cases}$$

$$\text{د}''(\text{س}) = ٠ \Longleftarrow \text{س} = ٠$$

+ + + ٠ − − − ١ + + +

محدب لأعلى]٠، ١[محدب لأسفل]١، ∞[∪]−∞، ٠[

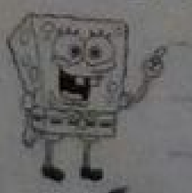
ب) $$\int_{-٢}^{٥} [٣\text{د}(\text{س}) - ٦\text{س}]\, \text{ءس} = ٣\int_{-٢}^{٥} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} - \int_{-٢}^{٥} (٦\text{س})\, \text{ءس}$$

$$٣\int_{-٢}^{٥} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} = ٣\left[\int_{-٢}^{٣} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} - \int_{٥}^{٣} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس}\right]$$

$$= ٣(٩ - ٤) = ١٥$$

$$\int_{-٢}^{٥} ٦\text{س}\, \text{ءس} = \left[٣\text{س}^2\right]_{-٢}^{٥} = ٧٥ - (١٢) = ٦٣$$

$$\int_{-٢}^{٥} [٣\text{د}(\text{س}) - ٦\text{س}]\, \text{ءس} = ١٥ - ٦٣ = -٤٨$$



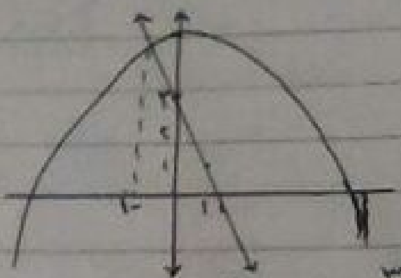
fnm

④

أ) $ص_١ = ٦ - س^٢$ ، $ص_٢ = ٢ - ٢س$

$٦ - س^٢ = ٢ - ٢س \longleftarrow س^٢ - ٢س - ٣ = ٠$

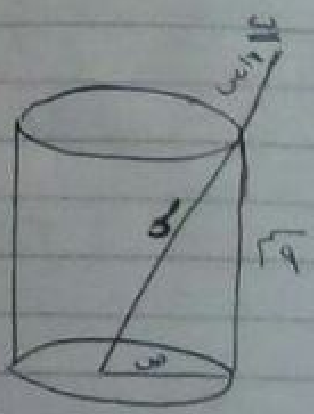
$(س - ٣)(س + ١) = ٠$ ، $س = ٣$ ، $س = -١$



$م = \int_{-١}^{٣} (٦ - س^٢ - ٢ + ٢س)\, ءس$

$م = \int_{-١}^{٣} (٢ - س^٢ + ٢س)\, ءس$

$م = \left(٢س - \frac{١}{٣}س^٣ + س^٢\right)\Big|_{-١}^{٣} = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة



$س^٢ = ص^٢ + ٨١$ $\quad \frac{ءس}{ءن} = ٢$

$٢س \frac{ءس}{ءن} = ٢ص \frac{ءص}{ءن}$ ①

عندما تصل الساق الى نهاية القاعده

$ص =$ القطر $= ١٢$

$س = \sqrt{٨١ + ١٤٤} = \sqrt{٢٢٥} = ١٥$ بالتعويض في ①

$٢ \times ١٥ \times ٢ = ٢ \times ١٢ \frac{ءص}{ءن} \Longleftarrow \frac{ءص}{ءن} = \frac{٥}{٢}$ سم/ث

---

⑤

أ) $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٦ - ١٢س \Longleftarrow \frac{ءص}{ءس} = ٦س - ٦س^٢ + ث$

عند $صَ = ٠$ ، $س = ١ \Longleftarrow ث =$ صفر

$\therefore صَ = ٦س - ٦س^٢ \Longleftarrow ص = ٣س^٢ - ٢س^٣ + ﻫ$ *

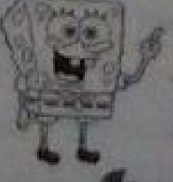
عند $صَ = ٠ \Longleftarrow ٦س(١ - س) = ٠ \Longleftarrow س = ٠ ، س = ١$

عند (٠ ، ٤) بالتعويض في *

− − − ٠ + + + ١ − − −

$\therefore ﻫ = ٤$

$\therefore ص = ٣س^٢ - ٢س^٣ + ٤$



٢٢

عند س = ١ ← ص = ٩ ∴ صَ = ١٢

∴ ميل العمود = $\frac{-١}{١٢}$ ← ص − ٩ = $-\frac{١}{١٢}$ (س + ١)

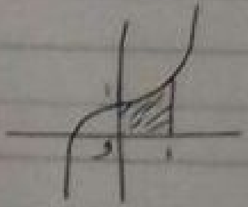
١٢ ص − ١٠٨ = −س + ١

س − ١٢ ص + ١٠٩ = ٠

ص'' = ٦ − ١٢س عند ص'' = ٠ ← س = $\frac{١}{٢}$

($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٩}{٢}$) انقلاب

ب



ح = ط $\int_{٠}^{١}$ ص² ءس ← ح = ط $\int_{٠}^{١}$ (س³ + ١)² ءس

ح = ط $\int_{٠}^{١}$ (س⁶ + ٢س³ + ١) ءس

ح = ط $\left[\frac{١}{٧} س^{٧} + \frac{١}{٢} س^{٤} + س\right]_{٠}^{١}$ = $\frac{٢٣}{١٤}$ ط وحدة حجوم

اذا وجد خطأ فأرجو المعذرة

واذا لم يوجد فالتوفيق من عند الله

م محمد