إختر الإجابة الصحيحة :

إشتقاق :

(١) إذا كانت ص = قتا(π − ٢ س) فإن $\frac{د ص}{د س}$ = ...

(أ) ٢ قتا(٢ س) ظتا(٢ س) (ب) ٤ قتا(π-٢ س) ظتا(٢ س)

(جـ) ٢ قتا(π-٢ س) ظتا(π-٢ س) (د) -٢ قتا(π-٢ س) ظتا(π-٢ س)

---

(٢) إذا كانت ص = (قتاس+ ظتا س)$^{-١}$ فإن $\frac{د ص}{د س}$ = ...

(أ) $\frac{-قتا س}{(قتا س + ظتا س)^{٢}}$ (ب) $\frac{-قتا س}{قتا س + ظتا س}$ (جـ) $\frac{قتا س}{قتا س + ظتا س}$ (د) $\frac{قتا س}{(قتا س + ظتا س)^{٢}}$

---

(٣) إذا كان ص = ٤قا^{٢}س فإن ص$'$ $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = ...

(أ) -٨ (ب) صـــفر (جـ) ٤ $\sqrt{٢}$ (د) ١٦

---

(٤) إذا كان د(س) =ظتاس فإن د$''$ $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = ...

(أ) $\frac{-٤}{٩}$ (ب) $\frac{٤}{٩}$ (جـ) ٤ (د) $\frac{٩}{٢}$

---

(٥) إذا كانت ص =جتاس فإن $\frac{د^{٢٠١٨} ص}{د س^{٢٠١٨}}$ = ...

(أ) جتاس (ب) -جتاس (جـ) جاس (د) -جاس

---

(٦) إذا كانت د(س) = لـو$_{هـ}$ (٢ + $\sqrt{٢}$قتاس) حيث ٠ < س < $\frac{\pi}{٢}$ فإن د$'$ $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$= .....

(أ) $\frac{-١}{٤}$ (ب) $\frac{-١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٤

---

(٧) إذا كانت ص = هـ^{س} جتاس^{٢} فإن $\frac{د ص}{د س}$ = ...

(أ) − هـ^{س} جاس^{٢} (ب) هـ^{س} (جتاس^{٢} − ٢سجاس^{٢})

(جـ) هـ^{س} جتاس^{٢} − ٢سجاس^{٢} (د) − ٢سهـ^{س} جاس

(٨) إذا كانت س = ن^{٣} − ن ، ص = $\sqrt{٣ن+١}$ فإن $\frac{د ص}{د س}$ = ... عندما ن = ١

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $\frac{٣}{٨}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ٨

---

(٩) إذا كانت هـ$_{د}(س)$ = س^{٢} + ١ فإن د$'$(س) = ...

(أ) $\frac{١}{س^{٢}+١}$ (ب) $\frac{٢س}{س^{٢}+١}$ (جـ) ٢س(س^{٢} + ١) (د) ٢سهـ$^{س^{٢}+١}$

---

(١٠) إذا كانت ص = ١٠$^{(س^{٢}-١)}$ فإن $\frac{د ص}{د س}$ = ...

(أ) ١٠$^{س^{٢}-١}$ × لـو$_{هـ}$ ١٠ (ب) ٢س × ١٠$^{س^{٢}-١}$ (جـ) ٢س × ١٠$^{س^{٢}-٢}$ (د) ٢س(لـو$_{هـ}$ ١٠) × ١٠$^{س^{٢}-١}$

---

(١١) إذا كانت د(س) = س جا س فإن د$'$ (س) + د (س) = ...

(أ) ٢ جتاس (ب) صفر (جـ) − جاس (د) ٢س جاس

---

(١٢) إذا كانت س = ٥ + قا^{٢} ٣θ ، ص = ١ − ظا ٣θ فإن $\frac{د ص}{د س}$ = ... عندما $\theta = \frac{\pi}{٤}$.

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{-١}{٢}$

---

(١٣) إذا كانت س = ٥ + قا^{٢} ٣θ ، ص = ١ − ظا ٣θ فإن العلاقة الضمنية بين س ، ص هي .....

(أ) س^{٢} = ص + ٥ (ب) س^{٢} + ص^{٢} = ٥ (جـ) س^{٢} + ص^{٢} = ٦ (د) س − ٦ = (١ − ص)^{٢}

---

(١٤) إذا كانت (س + ص)^{٨} = ٧ فإن $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) ٥٦(س + ص)^{٧} (د) −١

---

(١٥) إذا كانت $\frac{د ص}{د س}$ = ٢س − ٣ ، $\frac{د ع}{د س}$ = س^{٢} − ١ فإن $\frac{د^{٢} ص}{د ع^{٢}}$ = ... عندما س = ٢.

(أ) $\frac{٢}{٢٧}$ (ب) $\frac{٢}{٩}$ (جـ) صفر (د) $\frac{-٢}{٩}$

---

(١٦) إذا كانت ص = لـو$_{هـ}$ (س + ٢) فإن $\frac{د^{٢٠١٨} ص}{د س^{٢٠١٨}}$ = ...

(أ) $\frac{|٢٠١٧|}{(س+٢)^{٢٠١٨}}$ (ب) $\frac{-|٢٠١٧|}{(س+٢)^{٢٠١٨}}$ (جـ) $\frac{|٢٠١٨|}{(س+٢)^{٢٠١٨}}$ (د) $\frac{-|٢٠١٨|}{(س+٢)^{٢٠١٧}}$

(١٧) إذا كانت د(س) = لـو$_{هـ}$(جاس) −لـو$_{هـ}$(جتاس) فإن $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{د(س) - د(\frac{\pi}{٤})}{س - \frac{\pi}{٤}}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صـفر (د) −٢

---

(١٨) إذا كانت س جا٢ص = ص جتا٢س فإن $\frac{ء ص}{ء س}$ =..... عند النقطة $(\frac{\pi}{٤} , \frac{\pi}{٢})$.

(أ) صـفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

---

(١٩) إذا كانت د(س) = س^{٢} ، ك(٢) = ٣ ، ك$'$(٢) = −٢، ك$''$(٢) = ٥ فإن (د○ك)$''$(٢) =.....

(أ) ٣٨ (ب) −٣٨ (جـ) ١٠ (د) ٣

---

(٢٠) إذا كانت ص = د(س) دالة فردية و كانت دَ(ك) = م فإن دَ(− ك) = ...

(أ) م (ب) −م (جـ) صفر (د) غير معرفة

النهايات :

(١) $\lim_{س \to \infty} (١ + \frac{١}{س})^{\frac{١}{٣س}}$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) هـ (د) هـ^{٢}

---

(٢) $\lim_{س \to ٠} (١+س)^{\frac{١}{٣س}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) هـ^{٣} (جـ) $\sqrt[٣]{هـ}$ (د) $\frac{هـ}{٣}$

---

(٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{٢^{س} - ١}{٣س}$ = ...

(أ) ٣لـو$_{هـ}$٢ (ب) $\frac{١}{٣}$لـو$_{هـ}$٢ (جـ) $\frac{١}{٣}$لـو$_{٢}$هـ (د) ٢لـو$_{هـ}$٣

---

(٤) $\lim_{س \to ١} \frac{لـو_{٥} س}{س - ١}$ = ...

(أ) $\frac{١}{لـو_{٥} هـ}$ (ب) ١ (جـ) هـ (د) لـو$_{٥}$هـ

(٥) $\lim_{س \to 0} \frac{لـو_{هـ}(١+٢س)}{٣^{س} - ١} =$ .....

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $لـو_{٣} هـ^{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{١}{٢} لـو_{٣} هـ$

---

(٦) $\lim_{س \to هـ} \frac{لـو_{هـ} س - ١}{س - هـ} =$ .....

(أ) ١ (ب) هـ (جـ) $\frac{١}{هـ}$ (د) $-هـ$

---

(٧) $\lim_{س \to 0} (١+جاس)^{\frac{١}{س}} =$ .....

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{هـ}$ (د) هـ

---

(٨) $\lim_{س \to 0} لـو_{هـ} (١+٥س)^{\frac{-٢}{س}} =$ .....

(أ) $هـ^{-١٠}$ (ب) $-١٠هـ$ (جـ) $-١٠لـو_{هـ}$ (د) -١٠

تطبيقات هندسية :

(١) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د(س) عند نقطة ما يساوى $\frac{١}{٢}$ وكان الإحداثى السينى لهذه النقطة يتناقص بمعدل ٣ وحدات/ث فإن معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن يساوى .....وحدة / ث

(أ) $\frac{-١}{٦}$ (ب) $\frac{-٣}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

---

(٢) النسبة بين ميل مماس المنحنى الدالة ص = $لـو_{هـ}$ ٣ $\sqrt{س+١}$ و ميل مماس المنحنى ص = $لـو_{هـ}$ ٥ $\sqrt{س+١}$ عند س = ١ كنسبة .....

(أ) ٣ : ٥ (ب) ٥ : ٣ (جـ) ١ : ١ (د) $لـو_{هـ}$ ٣ : $لـو_{هـ}$ ٥

---

(٣) معادلة المماس لمنحنى الدالة د حيث د(س) = $هـ^{٢س+١}$ عند النقطة $(\frac{-١}{٢} , ١)$ هى .....

(أ) ٢ص = س + ١ (ب) ص = ٢س + ٢ (جـ) ص = ٢س − ٣ (د) ٢ص = ٣س + ١

---

(٤) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = لـو$_{\frac{1}{2}}$ (س) عندما س = ٤ يساوى .....

(أ) $\frac{1}{8}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) ٤

---

(٥) معادلة المماس الإنقلابى للدالة د(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢ هى.....

(أ) ص = −٦س − ٦ (ب) ص = −٣س + ١ (ج) ص = ٢س + ١٠ (د) ص = ٣س − ١

---

(٦) إذا كان المستقيم ص + س = ك مماس لمنحنى الدالة ص = س^{٢} + ٣س + ١ فإن ك = ...

(أ) −٣ (ب) −٢ (ج) −١ (د) صـــفر

---

(٧) إذا كانت ص = لـو$_{هـ}$ (س^{٢} + ص^{٢}) فإن ميل المماس للمنحنى عند النقطة (١ , ٠) يساوى .....

(أ) صـــفر (ب) ١ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) ٢

---

(٨) إذا كان جتا (πص) = ٣س + ١ فإن ميل المماس للمنحنى عند النقطة $\left(\frac{-1}{3} , \frac{\pi}{4}\right)$ يساوى .....

(أ) ٣ (ب) −٣ (ج) صـــفر (د) ١

---

(٩) إذا كانت $\lim_{ع \to ١} \frac{د(ع) - د(١)}{ع - ١} = -١$ فإن قياس زاوية ميل المماس لمنحنى الدالة د عند النقطة (١ ، د(١)) يساوى .....

(أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{\pi}{6}$ (ج) $\frac{\pi}{4}$ (د) $\frac{\pi 3}{4}$

---

(١٠) المماس لمنحنى الدالة ص + س = هـ$^{س ص}$ يكون رأسياً عند النقطة .....

(أ) (١ , ١) (ب) (٠ , ١) فقط (ج) (١ , ٠) فقط (د) (٠ , ١) ، (١ , ٠)

معدلات زمنية :

(١) ينصهر مكعب من الثلج محتفظاً بشكله بمعدل ١ سم^{٣}/ث فإن معدل تغير طول حرف المكعب عندما يكون حجمه ٨ سم^{٣} يساوى ..... سم/ث

(أ) $\frac{-1}{12}$ (ب) $\frac{1}{12}$ (ج) $\frac{-1}{6}$ (د) $\frac{1}{6}$

---

(٢) جسم يتحرك على المنحنى ص^{٢} = س^{٣} إذا كان $\frac{د س}{د ن} = \frac{١}{٢}$ وحدة / ث عند س = −١ فإن $\frac{د ص}{د ن}$ عند هذه اللحظة يساوى.....

(أ) $\frac{-٣}{٤}$ (ب) $\frac{-٣}{٨}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

---

(٣) مخروط دائرى قائم إذا كان طول كل من نصف قطر قاعدته و إرتفاعه يتزايد بمعدل $\frac{١}{٢}$ سم/ث و فى لحظة ما كان طول نصف قطر القاعدة يساوى ٦ سم و الإرتفاع يساوى ٩ سم فإن معدل تغير حجم المخروط فى تلك اللحظة = ...سم^{٣}/ث

(أ) $\pi \frac{١}{٢}$ (ب) $\pi ١٠$ (جـ) $\pi ٢٤$ (د) $\pi ٥٤$

---

(٤) دائرة محيطها ع سم إذا كان طول نصف قطرها يتناقص بمعدل ٠,١ سم/ث فإن معدل تغير مساحتها =.....سم^{٢}/ث

(أ) −٠,٢ ع (ب) −٠,١ ع (جـ) ٠,١ ع (د) (٠,١)^{٢} ع

---

(٥) وعاء فارغ حجمه ٩٠ سم^{٣} يصب فيه الماء بمعدل ٥ سم^{٣}/ث فإن الوعاء يمتلئ بعد مرور ..... ثانية.

(أ) ٩ (ب) ٢٢٥ (جـ) ١٨ (د) ٦

---

(٦) Δ يتزايد طول قاعدته ق بمعدل ٣ سم/ث بينما يتناقص إرتفاعه ع بمعدل ٣ سم/ث و كانت مساحة سطحة هى م فإن العبارة التى من المؤكد أنها صحيحة فيما يلى هى .....

(أ) م تتزايد دائماً (ب) م تتناقص دائماً (جـ) م تتناقص فقط ق > ع (د) م تتناقص فقط ق < ع

---

(٧) إذا كان محيط صفيحة مربعة الشكل يتزايد بمعدل ٠.٤ سم/ث و تتزايد مساحة صطحها بمعدل ٦ سم^{٢}/ث فإن طول ضلع الصفيحة فى تلك اللحظة يساوى .....سم

(أ) ٣٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٤٠ (د) ٦٠

---

(٨) إذا كان معدل تزايد قطر بالون كروى يساوى ١ سم/د عندما كان طول قطره ٤ سم فإن معدل تغير حجمه عند تلك اللحظة يساوى .....

(أ) $\pi ٢$ (ب) $\pi ٨$ (جـ) $\pi ١٦$ (د) $\pi ٤$

---

(٩) تتحرك نقطة على المنحنى **ص = س^{٢} − ٣ س** فإذا كانت سرعة إحداثيها السينى تساوى سرعة إحداثيها الصادى فإن ميل المماس للمنحنى عند تلك النقطة يساوى.....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

سلوك الدالة :

(١) إذا كان لمنحنى الدالة د نقطة إنقلاب عند س = ٢ حيث د(س) = س^{٣} + ك س^{٢} + ٤ فإن ك = ...

(أ) -٦ (ب) -٣ (جـ) ٣ (د) ٦

---

(٢) أكبر قيمة للمقدار ٤س-س^{٢} حيث س ∈ ح هى .....

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٣٢

---

(٣) منحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + ٢ محدب لأعلى عندما س ∈ .....

(أ)]-∞ , ٠[(ب)]-∞ , ١[(جـ)]١ , ٣[(د)]١ , ∞[

---

(٤) د(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + ٥ متناقصة عندما س ∈.....

(أ)]٠ , ٣[(ب)]٠ , ٢[(جـ) [٠ , ٢] (د) ع − [٠ , ٢]

---

(٥) إذا كانت د$'$(س) = ا س^{٣} − ٨ب حيث ا ، ب ثوابت وكان لمنحنى الدالة د(س) نقطة عظمى محلية هى (٢ , ٥) فإن ا × ب ∈ .....

(أ)]٢ , ∞[(ب)]٠ , ∞[(جـ)]-∞ , ٠[(د)]٨ , ∞[

---

(٦) إذا كانت س + ص = ك حيث س ≺ ٠ ، ص ≺ ٠ فإن س ص قيمة عظمى عندما .....

(أ) س = ك ص (ب) ك س = ص (جـ) س = ص (د) س ص = ١

---

(٧) العبارة التى من المؤكد انها صحيحة فيما يلى هى .....

(أ) (ا , د(ا)) نقطة حرجة إذا كان د$'$(ا) = ٠ فقط. (ب) (ا , د(ا)) نقطة إنقلاب للدالة إذا كان د$''$(ا) = ٠

(جـ) إذا كان د$'$(ا) = ٠ فإن د(ا) قيمة عظمى محلية.

(د) إذا كان د$'$(ا) = ٠ و د$''$(ا) ≺ ٠ فإن د(ا) قيمة صغرى محلية.

---

(٨) إذا كانت د(س) دالة متصلة على ح فإن العبارة التى من المؤكد انها صحيحة فيما يلى هى .....

(أ) (ا , د(ا)) نقطة إنقلاب إذا كان د$'$(ا) = ٠ أو د$''$(ا) غير معرفة.

(ب) (ا , د(ا)) نقطة إنقلاب للدالة إذا كان د$''$(ا) = ٠ و د$''$(ا$^{+}$) × د$''$(ا$^{-}$) ≺ ٠

ج) $(أ ، د(أ))$ نقطة إنقلاب للدالة إذا كان $د'(أ)$ غير معرفة و $د''(أ^+) \times د''(أ^-) < 0$.

د) $(أ ، د(أ))$ نقطة إنقلاب للدالة إذا كان $د'(أ)$ لها وجود و $د''(أ^+) \times د''(أ^-) < 0$.

---

(٩) أكبر قيمة لميل منحنى الدالة $د(س) = -س^3 + ٦س^2 + ٢س + ١$ تساوى .....

أ) ١٤ ب) ١٦ ج) ١٩ د) -١٣

---

(١٠) إذا كانت $د(س) = \sqrt{س^2 - ١٦س}$ فإن الدالة لها نقط حرجة عندما س=.....

أ) ٨ ب) صفر ، ١٦ ج) ٠ ، ١٦ ، ٨ د) صفر

---

(١١) منحنى الدالة $د(س) = س - ٢\sqrt{س}$ له نقطة حرجة عندما س = ...

أ) صفر ب) ١ ج) ٠ ، ١ د) ١ ، -١

---

(١٢) منحنى الدالة $ص = \frac{-٥}{س - ٢}$ محدب لأسفل إذا كانت .....

أ) $س < ٢$ ب) $س > ٢$ ج) $س < ٥$ د) $س < ٠$

---

(١٣) إذا كانت $د(س)$ دالة كثيرة الحدود و الجدول المجاور يبين بعض قيم $د''(س)$ فإن العبارة التى من المؤكد أنها صحيحة فيما يلى هى .....

س	٠	١	٢	٣
$د'(س)$	٥	٠	-٧	٤

أ) الدالة $د(س)$ تزايدية فى $]٠ ، ٢[$ ب) الدالة $د(س)$ تناقصية فى $]٠ ، ٢[$

ج) الدالة $د(س)$ يتغير تحدبها فى $]٠ ، ٢[$ د) الدالة $د(س)$ لها قيمة عظمى عند س=١

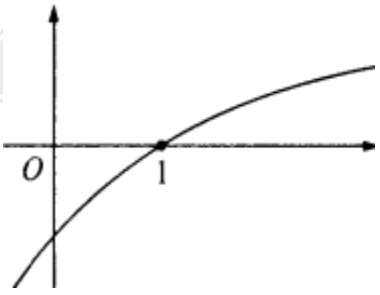
---

(١٤) إذا كانت $د(س) = س + \frac{١}{س}$ فإن الدالة تزايدية فى الفترة .....

أ) $|س| \geq ١$ ب) $|س| \leq ١$ ج) $|س| < ١$ د) $|س| < ١ ، س \neq ٠$

---

(١٥) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة $د(س)$ القابلة للإشتقاق مرتين عند س = ١ فإن العبارة الصحيحة فيما يلى هى.....



أ) $د'(١) < د''(١) < د(١)$ ب) $د''(١) < د'(١) < د(١)$

ج) $د(١) < د''(١) < د'(١)$ د) $د''(١) < د(١) < د'(١)$

التكامل :

(١) $\int$ ظاθ ؤθ = ...

(أ) $-$لـو$_{هـ}$|جتاθ| + ث (ب) $-$لـو$_{هـ}$وجتاθ + ث (جـ) لـو$_{هـ}$وجتاθ + ث (د) لـو$_{هـ}$|جتاθ| + ث

---

(٢) $\int$ ٤س هـ$^{س^{٢}}$ ؤس = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$هـ$^{س^{٢}}$ + ث (ب) هـ$^{س^{٢}}$ + ث (جـ) ٢هـ$^{س^{٢}}$ + ث (د) ٤هـ$^{س^{٢}}$ + ث

---

(٣) $\int \frac{١}{س لـو_{هـ} س^{٣}}$ ؤس = ...

(أ) ٣لـو$_{هـ}$|س| + ث (ب) ٣لـو$_{هـ}$|لـو$_{هـ}$س| + ث (جـ) $\frac{١}{٣}$لـو$_{هـ}$|س| + ث (د) $\frac{١}{٣}$لـو$_{هـ}$|لـو$_{هـ}$س| + ث

---

(٤) $\int$س(س^{٢} + ٣)^{٥} ؤس = ...

(أ) $\frac{١}{٦}$(س^{٢} + ٣)^{٦} + ث (ب) $\frac{١}{١٢}$(س^{٢} + ٣)^{٦} + ث

(جـ) $\frac{١}{٤}$(س^{٢} + ٣)^{٤} + ث (د) $\frac{١}{٨}$(س^{٢} + ٣)^{٤} + ث

---

(٥) $\int$قا^{٤}سظاس ؤس = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$قا^{٥}س + ث (ب) $\frac{١}{٤}$قا^{٤}س + ث (جـ) $\frac{١}{٣}$ظا^{٣}س + ث (د) $\frac{-١}{٣}$ظا^{٣}س + ث

---

(٦) $\int$(٤$-$قتاسظتاس) ؤس = ...

(أ) ٤س$-$قتاس + ث (ب) ٤س+قتاس + ث (جـ) ٤س$-$ظتاس + ث (د) ٤س+ظتاس + ث

---

(٧) $\int$(قتا^{٤}س$-$قتا^{٢}سظتا^{٢}س) ؤس = ...

(أ) $\frac{١}{٥}$قتا^{٥}س$-\frac{١}{٣}$ظتا^{٣}س + ث (ب) $-$ظاس + ث

(جـ) $-$ظتاس + ث (د) $\frac{١}{٣}$قتا^{٣}س + ث

---

(٨) $\int \frac{هـ^{س}}{هـ^{س} - ٣}$ ؤس = ...

(أ) $-\frac{1}{2}(هـ^{س} - ٣) + ث$ (ب) $-لـ_{هـ}|هـ^{س} - ٣| + ث$

(جـ) $لـ_{هـ}|هـ^{س} - ٣| + ث$ (د) $\frac{1}{2}لـ_{هـ}|هـ^{س} - ٣| + ث$

---

(٩) إذا كانت $\int (٢س - ١)هـ^{٢س+٣}$ د$س$ = ص$ع$ − $\int ع$ د$ص$ فإن $\int ع$ د$ص$ = ...

(أ) $هـ^{٢س+٣} + ث$ (ب) $\frac{1}{2}هـ^{٢س+٣} + ث$ (جـ) $-هـ^{٢س+٣} + ث$ (د) $-\frac{1}{2}هـ^{٢س+٣} + ث$

---

(١٠) إذا كانت $\int (٢س + ٣)لـ_{هـ}س$ د$س$ = ص$ع$ − $\int ع$ د$ص$ فإن ص$ع$ =.....

(أ) $٢س لـ_{هـ}س$ (ب) $(٢س+٣)لـ_{هـ}س$ (جـ) $\frac{1}{2}(٢س+٣)لـ_{هـ}س$ (د) $س(س+٣)لـ_{هـ}س$

---

(١١) إذا كانت ر$(س)$ = $هـ^{س+هـ^{س}}$ فإن المشتقة العكسية للدالة ر$(س)$ يمكن أن تكون هى .....

(أ) $\frac{هـ^{١+هـ^{س}}}{١+هـ^{س}}$ (ب) $(١+هـ^{س})هـ^{هـ+هـ^{س}}$ (جـ) $هـ^{١+هـ^{س}}$ (د) $هـ^{هـ^{س}}$

---

(١٢) إذا كان $\int$ ر$(س)$جاس د$س$ = −ر$(س)$جتاس+$\int ٣س^{٢}$ جتاس د$س$ فإن ر$(س)$ = ...

(أ) $٣س^{٢}$ (ب) $س^{٣}$ (جـ) $-س^{٣}$ (د) جاس

---

(١٣) $\int_{٠}^{٢} (٢ - |س|)$ د$س$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) ١

---

(١٤) $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (جاس+جتاس)$ د$س$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) صـــفر (د) π

---

(١٥) إذا كان $\int_{-٢}^{٢}$ ر$(س)$ د$س$ = ١٢ ، $\int_{-٢}^{٠}$ ر$(س)$ د$س$ = ١٦ فإن $\int_{٠}^{٢}$ ر$(س)$ د$س$ = ...

(أ) −٢٨ (ب) −٤ (جـ) ٤ (د) ٢٨

---

(١٦) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} س+١ & , \ س < ٠ \\ جتا \pi س & , \ س \geq ٠ \end{cases}$ فإن $\int_{-١}^{١} د(س)\ ع س$ = ...

ⓐ $\frac{١}{٢} + \frac{١}{\pi}$ ⓑ $\frac{-١}{٢}$ ⓒ $\frac{١}{٢} - \frac{١}{\pi}$ ⓓ $\frac{١}{٢}$

---

(١٧) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{} \frac{هـ^{ظاس}}{جتا^{٢} س}\ ع س$ = ...

ⓐ $هـ - ١$ ⓑ $هـ + ١$ ⓒ $هـ$ ⓓ ١

---

(١٨) إذا كان $\int_{-١}^{١} هـ^{-س^{٢}}\ ع س = ك$ فإن $\int_{-١}^{١} هـ^{-س^{٢}}\ ع س$ = ...

ⓐ $ك$ ⓑ $٢ك$ ⓒ $\frac{١}{٢}ك$ ⓓ $-\frac{١}{٢}ك$

---

(١٩) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{٤س + جاس}{س^{٢} + جتاس}\ ع س$ = ...

ⓐ $-\pi$ ⓑ صـــفر ⓒ π ⓓ ٢π

---

(٢٠) إذا إستخدمنا التعويض ص $= \frac{١}{٢}$ س فإن $\int_{٢}^{٤} \frac{١ - (\frac{١}{٢}س)^{٢}}{س}\ ع س$ = ...

ⓐ $\int_{٢}^{٤} \frac{١ - ص^{٢}}{ص}\ ع ص$ ⓑ $\int_{٢}^{٤} ١ - ص^{٢}\ ع ص$ ⓒ $\int_{١}^{٢} \frac{١ - ص^{٢}}{ص}\ ع ص$ ⓓ $\int_{١}^{٢} \frac{١ - ص^{٢}}{٢ص}\ ع ص$

ثانيـاً:

(١) إذا كانت $\frac{ع ص}{ع س} = ق ت ا^{٢} س$ ، ص = ٢ عندما س $= \frac{\pi}{٤}$ فإن ص = ...

ⓐ $-(٢ + ظتاس)$ ⓑ $-(٣ + ظتاس)$ ⓒ $٢ - ظتاس$ ⓓ $٣ - ظتاس$

---

(٢) إذا كانت $\frac{ع ص}{ع س} = س + \frac{١}{س}$ ، ص $= \frac{١}{٢}$ عندما س = ١ فإن ص = ... عندما س = هـ

ⓐ $هـ^{٢} - هـ$ ⓑ $\frac{هـ^{٢} - ١}{٢}$ ⓒ $\frac{هـ^{٢} + ١}{٤}$ ⓓ $\frac{هـ^{٢}}{٢} + ١$

(٣) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه يساوى $\frac{١}{س-٢}$ و كان المنحنى يمر بالنقطة عند (٣ , ٠) فإن د(هـ^{٢} + ٢) = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) لـو$_{هـ}$ ٢ (د) لـو$_{هـ}$ ٣

---

(٤) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\frac{١}{س}$ ،المستقيمين ص = ١ ، ص = ٢ و محور الصادات دورة كاملة حول محور الصادات = ...

(أ) $\frac{\pi}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) π (د) π ٢

---

(٥) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س^{٣} و المستقيمين ص = ٠ ، س = ٢ تساوى .....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٨

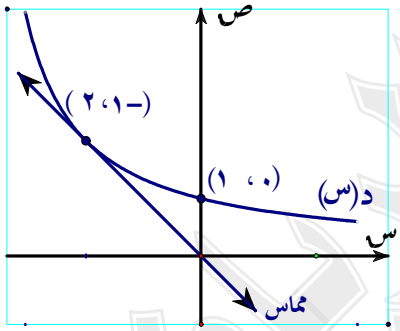
---

(٦) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\sqrt{٤-س^{٢}}$ و محور السينات مقدرة بالوحدات المربعة تساوى .....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) π ٢ (د) π ٤

---

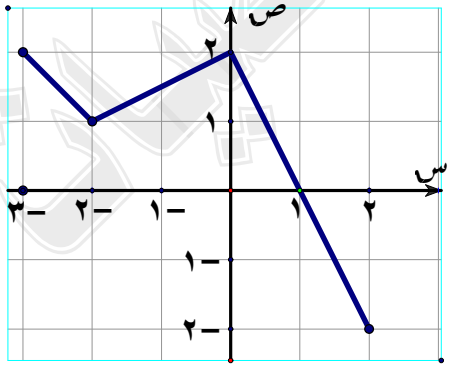
(٧) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة د(س) رسم لها مماس عند النقطة (-١ , ٢) فإن $\int_{-١}^{١}$ س [د$''$(س)] دس =.....



(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٠ (د) -١

---

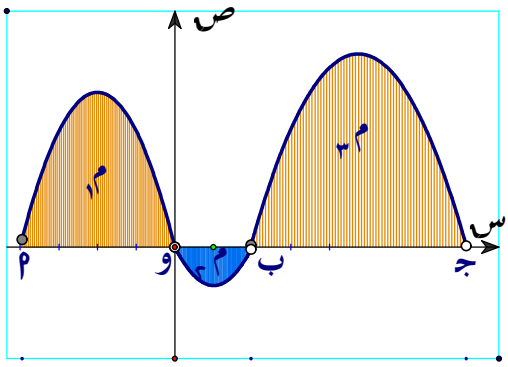
(٨) إذا كان المنحنى المجاور يمثل منحنى الدالة الخطية د(س) معرفة بأكثر من قاعدة و كانت ر(س) = $\int_{-٢}^{س}$ د(ن) دن فإن العدد الذى له أكبر قيمة هو .....



(أ) ر(٢) (ب) ر(-٢) (جـ) ر(٠) (د) ر(١)

---

(٩) فى الشكل المقابل إذا كان $\int_{أ}^{جـ} د(س)\ ﻫس = ٨ = \int_{ب}^{جـ} د(س)\ ﻫس$



وكان $م_١ + م_٢ + م_٣ = ٣٠$ وحدة مربعة فإن

$م_٢$ = ... وحدة مربعة.

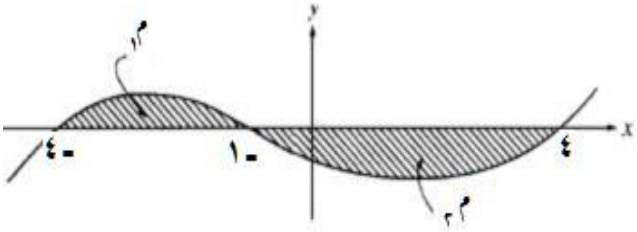
(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٤

---

(١٠) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة د(س) وكانت

$م_١$ ، $م_٢$ عددان موجبان يمثلان مساحتى المنطقتين المظللتين



فإن $\int_{-٤}^{٤} ر(س)\ ﻫس - ٢\int_{-١}^{٤} ر(س)\ ﻫس$ = ...

(أ) $م_١ + م_٢$ (ب) $م_١ - م_٢$ (جـ) $٢م_١ - م_٢$ (د) $م_١ + ٢م_٢$

أسئلة إنتاج الإجابة

المشتقات:

(١) إوجد المشتقة الأولى للدالة ص = س^{٢} قا$(\frac{١}{س})$

---

(٢) إوجد قيمة ميل المماس للمنحنى ص = ٢ظتاس + $\sqrt{٢}$ قاس عند س = $\frac{\pi}{٤}$

---

(٣) إذا كانت ص =جتا$(\theta\pi٢)$ ، س =جا$(\theta\pi٢)$ أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما $\theta = \frac{١}{٦}$.

---

(٤) إوجد قيمة البارامتر ن التى عندها يكون للمنحنى س = ٢ن^{٣} − ٥ن^{٢} + ٤ن + ٩ ، ص = ٢ن^{٢} + ن − ٥

(أ) مماس رأسى (ب) مماس أفقى

---

(٥) بإستخدام الإشتقاق البارامترى إوجد مشتقة س−جاس بالنسبة ١−جتاس عند س = $\frac{\pi}{٣}$.

---

(٦) إذا كانت ص = $\sqrt{٢س + ٥}$ أثبت أن $(٢س + ٥)\frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}} + ٣\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ٠$

---

(٧) إذا كانت ص^{٢} + س^{٢} ص^{٢} = ٨ أثبت أن $(س^{٢} + ١)\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} + ٣ س \frac{د ص}{د س} + ص = ٠$

---

(٨) إذا كانت ص^{٢} + ٢ س^{٣} − ب س = جـ أثبت أن ص ص$''$ + (ص$'$)^{٢} + ٣٢س = ٠

---

(٩) إذا كانت جا ٢س − جتا ٣ص = ٠ أثبت أن $٣\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ ظا ٣ ص + ٩ $(\frac{د ص}{د س})^{٢}$ − ٤ = ٠

---

(١٠) إذا كانت س ص = ١ أثبت أن $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ + ٣ ص $\frac{د ص}{د س}$ + ص^{٣} = ٠

---

(١١) إذا كانت ص = س^{٣} + ١ ، ع = س^{٢} +٣ أوجد قيمة $\frac{د^{٢}ع}{د ص^{٢}}$ عندما س = ٢

---

(١٢) إذا كانت س^{٢} = ٢ ن − ٣ ، ص = ٢ ن^{٢} − ١ أثبت أن ٣ $\frac{د ص}{د س}$ − س $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ − ١٢ س = ٠

---

(١٣) إذا كانت س =جا٢ن ، ص =جتا٢ن فإوجد $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ عندما ن = $\frac{\pi}{٢}$.

(١٤) إذا كانت ص = ظا٢ س فأثبت أن $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}$ =٢(١ + ص)(١+٣ص)

---

(١٥) إذا كانت ص = س $i^{س}$ فاثبت أن $س\frac{د ص}{د س}$ = ص(١ + س)

تطبيقات هندسية

(١) أوجد معادلة كل من المماس و العمودى للمنحنى س ٢ + ص ٢ − ٦ص − ١٦ = ٠ عند نقطة تقاطعه مع محور الصادات حيث ص > ٠

---

(٢) أوجد معادلة كل من المماس و العمودى للمنحنى س = صقاس عند النقطة التى إحداثيها السينى π .

---

(٣) إذا كانت المعادلتان البارمتريان لمنحنى الدالة ص = د(س) هما س =قا٢θ − ١ ، ص =ظاθ كل من فإوجد معادلة المماس و العمودى عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$.

---

(٤) أثبت أن المنحنيان ص = س ٢ − س + ٢ ، ص = ٣س − س ٢ متماسان و أوجد معادلة المماس المشترك لهما.

---

(٥) أوجد نقط تقاطع المنحنيين سص = ٢ ، س ٢ − ص ٢ = ٣ و برهن أنهما يتقاطعان على التعامد .

---

(٦) أوجد قيم الثوابت ﺃ ، ب ، جـ حتى يكون للمنحنى ص = ﺃس ٣ + بس ، ص =جـس ٢ − س مماس مشترك عند النقطة (−١ , ٢)

---

(٧) إوجد مساحة Δ المحدود بمحور السينات ، المماس ، العمودى عليه للمنحنى ٣س ٢ + ص ٢ = ١٢ عند النقطة (−١ , ٣) الواقعة على المنحنى.

---

(٨) أوجد النقط الواقعة على المنحنى ٢ص٢ − ٨ ص + س = ٠ و التى عندها المماس يوازى محور الصادات.

---

(٩) أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = س٢ − س و التى عندها المماس يمر بالنقطة (١ ، − ٤) .

---

(١٠) إوجد النقط الواقعة على محور الصادات بحيث يصنع المماسان المرسومان منها للمنحنى ٤ص + س٢ = ٠ مع المستقيم المار بنقطتى التماس مثلث متساوى الأضلاع.

المعدلات الزمنية :

(١) بالون كروى مملوء بالغاز يتسرب منه بمعدل س سم^{٣}/ث. أثبت أن معدل نقص مساحته فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطره نهـ سم يساوى $\frac{٢ س}{نهـ}$ سم^{٢}/ث.

---

(٢) مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول حرفه بمعدل ٠.٠٢ سم/د و تزداد مساحة سطحه فى لحظة ما بمعدل ٠.٧٢ سم^{٢}/د أوجد طول حرف المكعب فى هذه اللحظة و معدل الزيادة فى حجمه حينئذ.

---

(٣) جسم معدنى على شكل متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ، طول ضلعها يتزايد بمعدل ١سم/د و ارتفاعه يتناقص بمعدل ٢سم/د. أوجد معدل تزايد حجمه عندما يكون طول ضلع قاعدته ٥سم و ارتفاعه ٢٠سم، بعد كم دقيقة يتوقف تغير حجم متوازى المستطيلات عن الزيادة

---

(٤) يتمدد هرم رباعى منتظم من المعدن ارتفاعه يساوى ضلع قاعدته فيزداد حجمه بمعدل ١سم^{٣}/ث ، إذا كان معدل تزايد كل من ارتفاع الهرم و طول قاعدته يساوى ٠.٠١ سم/ث فأوجد طول ضلع قاعدته.

---

(٥) أ ب جـ Δ قائم الزاوية فى جـ ، مساحته ثابتة و تساوى ٢٤ سم^{٢} ، إذا كان معدل تغير بَ يساوى ١سم/ث فأوجد معدل تغير كل من أَ ، طـ($\hat{أ}$) عند اللحظة التى يكون فيها بَ يساوى ٨سم.

---

(٦) مثمن منتظم طول ضلعه ١٠سم و يتزايد بمعدل ٠.٢سم/ث أوجد معدل تزايد مساحته.

---

(٧) تتحرك النقطة أ(س ، ص) على منحنى الدالة ص = س^{٣} + س بحيث $\frac{د ص}{د نهـ} = ٢$ وحدة*ث أوجد معدل التغير فى مساحة المثلث أ و ب حيث " و " نقطة الأصل ، النقطة ب(٠ ، ٦) فى اللحظة التى يكون فيها الإحداثى السينى للنقطة المتحركة يساوى ٣.

---

(٨) قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم و قياس زاويتها المركزيه س° و يتغير بمعدل ٣ °/د أوجد معدل تغير مساحتها عندما س = ٦٠ °.

---

(٩) يستند سلم طوله ٥ م بأحد طرفيه على حائط رأسى و بطرفه الآخر على أرض أفقية فإذا أنزلق الطرف السفلى للسلم مبتعداً عن الحائط بمعدل $\frac{١}{٢}$ م/دقيقة . فأوجد معدل إنخفاض الطرف العلوى للسلم عندما يكون الطرف السفلى على بعد ٣ م من الحائط. ثم أوجد بعد الطرف السفلى عن الحائط عندما يتحرك الطرفان بنفس المعدل.

---

(١٠) مثلث متساوى الساقين طول قاعدته ٨ سم يتغير إرتفاعه بمعدل ٢ سم/د. إوجد معدل التغير فى زاوية رأسه عندما يكون طول إرتفاعه ٦ سم.

---

(١١) رجل طوله ١٨٠سم يقف أمام مصباح يرتفع عن سطح الأرض بمقدار ٥.٤ متراً . فإذا تحرك الرجل مبتعداً عن المصباح على طريق أفقى بسرعة ثابته ٣ م/ث فاحسب

[١] معدل تغير طول ظل الرجل. [٢] سرعة نهاية ظل الرجل .

[٣] معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح عندما يكون الرجل على بعد ٤.٨ م من قاعدة المصباح .

---

(١٢) ينسكب الماء في وعاء إسطوانى الشكل بمعدل ٢ سم^{٣}/ث اوجد معدل التغير فى إرتفاع الماء علما بان طول نصف قطر قاعدة الإسطوانة يساوى ٢ سم .و إذا كان إرتفاع الوعاء ٢.٨ سم فأوجد متى يمتلئ الوعاء معتبراً $\pi = \frac{٢٢}{٧}$

سلوك الدالة :

(١) عين فترات تزايد و تناقص الدالة د(س)=جاس + جتاس حيث س $\in \left[٠ , \frac{\pi ٣}{٢} \right]$.

---

(٢) عين فترات تزايد و تناقص الدالة د(س)=س – هـ^{س} .

---

(٣) عين فترات تزايد و تناقص الدالة د(س)=س + لـو$_{هـ}$ س .

---

(٤) عين القيم العظمى و الصغرى المحلية إن وجدت للدالة د(س) = س^{٣} – ٩س^{٢} + ٢٤س + ١٠ مبيناً نوعها

---

(٥) عين القيم العظمى و الصغرى المحلية للدالة د(س) = $\sqrt[٣]{(س - ١)^{٢}}$ + ٢ مبيناً نوعها إن وجدت

---

(٦) عين القيم العظمى و الصغرى المحلية للدالة د(س) = $\frac{س^{٢}}{١ - س}$ + ٢ مبيناً نوعها إن وجدت

---

(٧) عين القيم العظمى و الصغرى المحلية للدالة د(س) = لـو$_{هـ}$ (هـ^{٢س} – ٢هـ^{س} + ٣) مبيناً نوعها إن وجدت

---

(٨) عين القيم العظمى و الصغرى المحلية للدالة د(س) = هـ$^{\frac{١}{س}}$ $\left(\frac{١}{س} - ٢\right)$ مبيناً نوعها إن وجدت.

---

(٩) عين القيم العظمى و الصغرى المحلية للدالة د(س) = س^{٢} – ١ – ٢لـو$_{هـ}$|س| مبيناً نوعها إن وجدت.

(١٠) أوجد مناطق التحدب لأعلى و لأسفل و نقط الإنقلاب إن وجدت لمنحنى الدالة د (س) = س^{٣} + ٣س^{٢} – ٤س – ٨

---

(١١) إذا كانت للدالة د حيث د (س) = س^{٣} + ا س^{٢} + ب س نقطة إنقلاب عند النقطة (٢ ، ٢) عين قيمة الثابتين ا ، ب .

---

(١٢) عين القيم العظمى و الصغرى **المطلقة** إن وجدت لكل من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاه:

(أ) د(س) = ٢+٣ س – س ^{٣} فى [١ ، ٣] (ب) د(س) = س ^{٢} هـ ^{س} فى [-٣ ، ١]

---

(١٣) أرسم منحنى الدالة د (س) = ٢ + ٣ س – س^{٣}

تطبيقات على القيم العظمى و الصغرى :

(١) مثلث قائم الزاوية طول وتره ٢٦ سم. إوجد طول كل من ضلعى القائمة بحيث يكون طول العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر أكبر ما يمكن.

---

(٢) إذا كان المستقيم ل يقطع محورى الإحداثيات فى النقطتين ا ، ب و يمر بالنقطة جـ = (٨ ، ١) أوجد أصغر طول للقطعة المستقيمة $\overline{ا ب}$.

---

(٣) إوجد أكبر مساحة لمنطقة مستطيلة الشكل مرسومة داخل Δ و ا ب فيها ضلعان منطبقان على محورى الإحداثيات حيث ا = (٣ ، ٠) ، ب = (٠ ، ٤) ، و = (٠ ، ٠).

(٤) $\overline{ا ب}$ قطر فى الدائرة م ، هـ ∋ للدائرة ، المماس للدائرة عند هـ يقطع المماس المرسوم عند ا فى جـ ، يقطع المماس المرسوم عند ب فى د أثبت أن أصغر مساحة لشبه المنحرف ا ب د جـ تساوى ضعف مربع طول نصف قطر الدائرة.

---

(٥) أوجد بعدى أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث متساوى الساقين طول قاعدته ١٨سم ، إرتفاعة ١٢سم بحيث تقع رأسان منه على قاعة المثلث و الرأسان الآخران على كل من ساقى المثلث.

---

(٦) متوازي مستطيلات حجمة ٥٧٦سم^{٣} و النسبة بين طولى قاعدتية ٢ : ١ أوجد أبعاد متوازي المستطيلات التى تجعل مساحتة السطحية أصغر ما يمكن.

التكامل:

(أولاً)

(١) $\int (1+ظا^{٢}س)جتا^{٢}س\ وس$

(٢) $\int \frac{وس}{\sqrt{س}(1+\sqrt{س})^{٣}}$

(٣) $\int (س^{٢}+٥)\sqrt{س-١}\ وس$

(٤) $\int س\ هـ^{-٢س}\ وس$

(٥) $\int \frac{هـ^{لـو س}}{\sqrt{س}}\ رس$

(٦) $\int س جاس\ وس$

(٧) $\int \frac{٤س}{\sqrt[٣]{٢س+١}}\ وس$

(٨) $\int هـ^{\sqrt{س}}\ وس$

(٩) $\int \frac{هـ^{لـو س}}{س^{٢}}\ وس$

(١٠) $ت=\int س(هـ^{لـو س})^{٢}\ وس$

(١١) $\int س^{٣}\sqrt{٤-س^{٢}}\ وس$

(١٢) $\int (٣+جاس)^{٥}جتاس\ وس$

(١٣) $\int \frac{قا^{٢}(هـ^{لـو س})}{س}\ وس$

(١٤) $\int س^{٢}\sqrt[٣]{٣س+١}\ وس$

(١٥) $\int هـ^{لـو}(س+١)\ وس$

(١٦) $\int س^{٣}هـ^{لـو س}\ رس$

(١٧) $\int س قا^{٢}س\ وس$

(١٨) $\int \frac{٣س+٥}{هـ^{٢س}}\ وس$

(١٩) $\int \frac{س\ هـ^{س}}{(س+١)^{٢}}\ وس$

(٢٠) $\int_{-٣}^{٣} |س^{٢}-٤|\ وس$

(ثانياً)

(١) إذا كان $\int_{٣}^{أ-١} ر(س)وس = \int_{٢}^{٣} ٢ر(٢س-١)وس$ فإوجد قيمة أ.

---

(٢) إوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{٢}\ ,\ \frac{\pi^{٢}}{٤}+٩)$ إذا كان ميل المماس له عند أى نقطة عليه (س ، ص) يعطى بالعلاقة $م = ٢س + \frac{١}{٢}قا^{٢}\frac{س}{٢}$

---

(٣) إوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطتين $(\frac{\pi}{٤}\ ,\ ٥)$ ، $(\frac{\pi^{٣}}{٤}\ ,\ ١)$ إذا كان ميل المماس له عند أى نقطة عليه (س ، ص) يعطى بالعلاقة $م = -أ قتا^{٢}س$.

(٤) إذا كان ميل العمودى لمنحنى عند أى نقطة عليه (س ، ص) معطى بالعلاقة م = -قتا س قا س أوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة $\left(\frac{\pi}{٦} , ١\right)$

---

(٥) منحنى ميل المماس له عند أى نقطة عليه (س ، ص) يعطى بالعلاقة $\frac{ع ص}{ع س} = \frac{٣}{ص + \sqrt{ص}}$ أوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة $(\frac{١}{١٨} ، ١)$.

---

(٦) إذا كان منحنى الدالة ص = د (س) له قيمة عظمى محلية عند النقطة (٢ ، ٧) و كانت $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}} = ٢ - ٦$ س أوجد معادلة المنحنى .

---

(٧) إذا كانت ص $\frac{ع ص}{ع س}$ + ٢ س = ٣ و كان المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢) فإوجد العلاقة بين س ، ص

---

(٨) إذاكان معدل تغير ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه هو ٦س – ٣ أوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة (٢ ، ٢) و المماس له عند س = ١ يكون أفقياً .

---

(٩) إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه يعطى بالعلاقة $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٣ س^{٢} – ١٨س + ٢٤ و للمنحنى قيمة صغرى محلية تساوى ٢٦ أوجد القيمة العظمى المحلية للدالة .

---

(١٠) أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة ر(س) = س ^{٣} و محور السينات و المستقيمين س = -٢ ، س = ٢ .

---

(١١) إذا كانت د : $]-\infty , ١] \leftarrow$ ح حيث ر(س) = س ^{٣} – ٤ س إوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة و محور السينات و تقع أعلى محور السينات

---

(١٢) أوجد مساحة المنطقة المستوية المحددة بالمنحنى ص = ٣ + ٢ س – س ^{٢} و المستقيمات س = -١ ، س = ٤ ، ص = ٠

---

(١٣) إوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين ر(س) = س ^{٣} – ٣ س ^{٢} + ٥ ، ر(س) = س + ٢ .

---

(١٤) إذا كانت تكلفة المتر المربع من أرضية ممرات الفندق بالجرانيت ٤٠٠ جنيه و تم تغطية ٥ ممرات متطابقة بالجرانيت مساحة كل منها محدودة بمنحنى الدالة د و المستقيمين س = ٠ ، ص = ٠ حيث ر(س) = ١٢ – $\frac{١}{٣}$ س ^{٢} أوجد تكلفة تغطية الممرات الخمسة.

(١٥) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = $\sqrt{س}$ ، ص = س ^{٢} دورة كاملة حول محور السينات.

---

(١٦) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين ص = ٤ - س ^{٢} ، ٢ س + ص = ٤ دورة كاملة حول محور الصادات.

---

(١٧) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$ و محور السينات دورة كاملة حول محور السينات. حيث أ ، ب ثابتان.

إجابات أسئلة الإختيار

الإشتقاق :

(١)	جـ	(٢)	جـ	(٣)	د	(٤)	جـ	(٥)	ب
(٦)	ب	(٧)	ب	(٨)	ب	(٩)	ب	(١٠)	د
(١١)	أ	(١٢)	جـ	(١٣)	د	(١٤)	ب	(١٥)	أ
(١٦)	أ	(١٧)	ب	(١٨)	جـ	(١٩)	أ	(٢٠)	أ

النهايات :

(١)	أ	(٢)	جـ	(٣)	ب	(٤)	د	(٥)	ب
(٦)	جـ	(٧)	د	(٨)	د				

تطبيقات هندسية :

(١)	ب	(٢)	جـ	(٣)	ب	(٤)	ب	(٥)	ب
(٦)	أ	(٧)	د	(٨)	ب	(٩)	د	(١٠)	جـ

معدلات زمنية :

(١)	أ	(٢)	أ	(٣)	جـ	(٤)	ب	(٥)	د
(٦)	جـ	(٧)	أ	(٨)	ب	(٩)	أ		

سلوك الدالة :

(١)	أ	(٢)	أ	(٣)	ب	(٤)	ب	(٥)	ب
(٦)	جـ	(٧)	د	(٨)	د	(٩)	أ	(١٠)	ب
(١١)	جـ	(١٢)	ب	(١٣)	جـ	(١٤)	جـ	(١٥)	د

التكامل :

أولاً

(١)	أ	(٢)	جـ	(٣)	د	(٤)	ب	(٥)	ب
(٦)	ب	(٧)	جـ	(٨)	جـ	(٩)	ب	(١٠)	د
(١١)	د	(١٢)	ب	(١٣)	ب	(١٤)	ب	(١٥)	جـ
(١٦)	د	(١٧)	أ	(١٨)	جـ	(١٩)	ب	(٢٠)	جـ

ثانياً

(١)	د	(٢)	د	(٣)	أ	(٤)	ب	(٥)	جـ
(٦)	جـ	(٧)	د	(٨)	د	(٩)	جـ	(١٠)	أ

الأشتقاق:

(١) $ص = س^{٢}\ قا(\frac{١}{س})$ $\Leftarrow$ $\frac{د ص}{د س} = ٢س\ قا(\frac{١}{س}) + \left(\frac{-١}{س^{٢}}\right) قا(\frac{١}{س}) ظا(\frac{١}{س})\ س^{٢}$

$\frac{د ص}{د س} = ٢س\ قا(\frac{١}{س}) + \left(\frac{-١}{س^{٢}}\right) \times س^{٢} \times قا(\frac{١}{س}) ظا(\frac{١}{س})$

$\frac{د ص}{د س} = ٢س\ قا(\frac{١}{س}) - قا(\frac{١}{س}) ظا(\frac{١}{س})$

---

(٢) $ص = ٢ ظتاس + \sqrt{٢}\ قاس$ $\Leftarrow$ $\frac{د ص}{د س} = -٢ قتا^{٢} س + \sqrt{٢}\ قاس ظاس$

$\left[\frac{د ص}{د س}\right]_{س=\frac{\pi}{٤}} = -٢ قتا^{٢} \frac{\pi}{٤} + \sqrt{٢} \times قا\frac{\pi}{٤} \times ظا\frac{\pi}{٤}$

$\left[\frac{د ص}{د س}\right]_{س=\frac{\pi}{٤}} = \frac{-٢}{\left(جا\frac{\pi}{٤}\right)^{٢}} + \sqrt{٢} \times \frac{١}{جتا\frac{\pi}{٤}} \times ظا\frac{\pi}{٤}$

$\left[\frac{د ص}{د س}\right]_{س=\frac{\pi}{٤}} = -٤ + ٢ = -٢$

---

(٣) $\because$ $ص = جتا(٢\theta\pi)$ $\Leftarrow$ $\frac{د ص}{د \theta} = -٢\pi\ جا(٢\theta\pi)$

$\therefore$ $س = جا(٢\theta\pi)$ $\Leftarrow$ $\frac{د س}{د \theta} = ٢\pi\ جتا(٢\theta\pi)$

$\because$ $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د \theta} \times \frac{\theta د}{د س}$ $\Leftarrow$ $\frac{د ص}{د س} = -٢\pi\ جا(٢\theta\pi) \times \frac{١}{٢\pi\ جتا(٢\theta\pi)}$

$\therefore$ $\frac{د ص}{د س} = -\frac{جا(٢\theta\pi)}{جتا(٢\theta\pi)}$ $\Leftarrow$ $\frac{د ص}{د س} = -ظا(٢\theta\pi)$

$\therefore$ $\left[\frac{د ص}{د س}\right]_{\theta=\frac{١}{٦}} = -ظا\left(٢ \times \frac{١}{٦}\pi\right)$ $\Leftarrow$ $\left[\frac{د ص}{د س}\right]_{\theta=\frac{١}{٦}} = -ظا(\frac{\pi}{٣}) = -\sqrt{٣}$

حل آخر:

$\because$ $\left.\begin{array}{l} ص = جتا(٢\theta\pi) \\ س = جا(٢\theta\pi) \end{array}\right\}$ $\Leftarrow$ $\left.\begin{array}{l} ص^{٢} = جتا^{٢}(٢\theta\pi) \\ س^{٢} = جا^{٢}(٢\theta\pi) \end{array}\right\}$ بالجمع

$\therefore$ $س^{٢} + ص^{٢} = جا^{٢}(٢\theta\pi) + جتا^{٢}(٢\theta\pi)$

$\therefore$ $س^{٢} + ص^{٢} = ١$ $\Leftarrow$ $٢س + ٢ص\frac{د ص}{د س} = ٠$

$\therefore$ $س + ص\frac{د ص}{د س} = ٠$ $\Leftarrow$ $\frac{د ص}{د س} = \frac{-س}{ص}$

$\therefore$ $\frac{د ص}{د س} = \frac{-جا(٢\theta\pi)}{جتا(٢\theta\pi)}$ $\Leftarrow$ $\frac{د ص}{د س} = -ظا(٢\theta\pi)$

$\therefore$ $\left[\frac{د ص}{د س}\right]_{\theta=\frac{١}{٦}} = -ظا\left(٢ \times \frac{١}{٦}\pi\right)$ $\Leftarrow$ $\left[\frac{د ص}{د س}\right]_{\theta=\frac{١}{٦}} = -ظا(\frac{\pi}{٣}) = -\sqrt{٣}$

---

(٤) $\because$ $س = ٢ن^{٣} - ٥ن^{٢} + ٤ن + ٩$ $\Leftarrow$ $\frac{د ص}{د ن} = ٦ن^{٢} - ١٠ن + ٤$

∴ $ص = 2ن^2 + ن - 5$ ⇐ $\frac{د ص}{د ن} = 4ن + 1$

∵ $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن} \times \frac{د ن}{د س}$ ⇐ $\frac{د ص}{د س} = \frac{4ن + 1}{6ن^2 - 10ن + 4}$

(أ) ∵ المماس رأسى ⇐ ميل المماس غير معرف أى أن $\frac{د ص}{د س}$ غير معرف

∴ $6ن^2 - 10ن + 4 = 0$ ⇐ $3ن^2 - 5ن + 2 = 0$

∴ $(3ن - 2)(ن - 1) = 0$ ⇐ $\boxed{ن = \frac{2}{3}}$ ، $\boxed{ن = 1}$

(ب) ∵ المماس أفقى ⇐ ميل المماس يساوى صفر أى أن $\frac{د ص}{د س} = 0$

∴ $4ن + 1 = 0$ ⇐ $\boxed{ن = \frac{-1}{4}}$

---

(٥) نفرض أن $ص = س - جاس$ ، $ع = 1 - جتاس$ ⇐ المطلوب هو $\frac{د ص}{د ع}$ عند $س = \frac{\pi}{3}$

∵ $ص = س - جاس$ ⇐ $\frac{د ص}{د س} = 1 - جتاس$

∵ $ع = 1 - جتاس$ ⇐ $\frac{د ع}{د س} = جاس$

∵ $\frac{د ص}{د ع} = \frac{د ص}{د س} \times \frac{د س}{د ع}$ ⇐ $\frac{د ص}{د ع} = \frac{1 - جتاس}{جاس}$

∴ $\left[\frac{د ص}{د ع}\right]_{س = \frac{\pi}{3}} = \frac{1 - جتا\frac{\pi}{3}}{جا\frac{\pi}{3}}$ ⇐ $\left[\frac{د ص}{د ع}\right]_{س = \frac{\pi}{3}} = \frac{1 - جتا\frac{\pi}{3}}{جا\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

---

(٦) ∵ $ص = \sqrt{2س + 5}$ ⇐ $ص^2 = 2س + 5$

∴ $2ص \frac{د ص}{د س} = 2$ ⇐ $ص \frac{د ص}{د س} = 1$ .... (١) بالإشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $\frac{د ص}{د س} \times \frac{د ص}{د س} + ص \frac{د^2 ص}{د س^2} = 0$ ⇐ $\left(\frac{د ص}{د س}\right)^2 + ص \frac{د^2 ص}{د س^2} = 0$ بالإشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $2\frac{د ص}{د س} \times \frac{د^2 ص}{د س^2} + \frac{د ص}{د س} \times \frac{د^2 ص}{د س^2} + ص \frac{د^3 ص}{د س^3} = 0$

∴ $3\frac{د ص}{د س} \times \frac{د^2 ص}{د س^2} + ص \frac{د^3 ص}{د س^3} = 0$ بالتعويض من (١) عن $\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{ص}$

∴ $3 \times \frac{1}{ص} \times \frac{د^2 ص}{د س^2} + ص \frac{د^3 ص}{د س^3} = 0$ ⇐ $3\frac{د^2 ص}{د س^2} + ص^2 \frac{د^3 ص}{د س^3} = 0$ ، ∵ $ص^2 = 2س + 5$

∴ $(2س + 5)\frac{د^3 ص}{د س^3} + 3\frac{د^2 ص}{د س^2} = 0$

---

(٧) ∵ $ص^2 + س^2 ص^2 = 8$ بالإشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $2ص\frac{د ص}{د س} + 2س ص^2 + س^2 \times 2ص\frac{د ص}{د س} = 0$

$2ص \frac{د ص}{د س} + 2س ص^2 + 2س^2 ص \frac{د ص}{د س} = 0$ بالقسمة ÷ 2 ص

$\frac{د ص}{د س} + س ص + س^2 \frac{د ص}{د س} = 0$ بالإشتقاق بالنسبة لـ س

$\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}$ + س $\frac{ء ص}{ء س}$ + ص + ٢س $\frac{ء ص}{ء س}$ + س^{٢} $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}$ = ٠

(١ + س^{٢}) $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}$ + ٣س $\frac{ء ص}{ء س}$ + ص = ٠

---

(٨) ∵ ص^{٢} + ٢ س^{٣} − ب س = جـ بالإشتقاق بالنسبة لـ س

∴ ٢ص صَ + ٦س^{٢} − ب = ٠ بالإشتقاق بالنسبة لـ س

∴ ٢صَ × صَ + ٢ص × صً + ٦ ٢س = ٠ بالقسمة ÷ ٢

∴ ص صً + (صَ)^{٢} + ٣ ٢س = ٠

---

(٩) ∵ جا ٢س − جتا ٣ص = ٠ .....(١) بالإشتقاق بالنسبة لـ س

∴ ٢جتا ٢س + ٣صَ جا ٣ص = ٠ بالإشتقاق بالنسبة لـ س

∴ − ٤ جا ٢س + ٣صً جا ٣ص + ٩صَ^{٢}جتا ٣ص = ٠ بالقسمة ÷ جتا ٣ص

∴ −٤× $\frac{\text{جا ٢س}}{\text{جتا ٣ص}}$ + ٣ صً × $\frac{\text{جا ٣ص}}{\text{جتا ٣ص}}$ + ٩ صَ^{٢} × $\frac{\text{جتا٣ص}}{\text{جتا٣ص}}$ = ٠ من (١) جا ٢س = جتا ٣ص

∴ ٣ $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}$ ظا ٣ ص + ٩ ($\frac{ء ص}{ء س}$)^{٢} − ٤ = ٠

---

(١٠) ∵ ص = $\frac{١}{س}$ ...(١) بالإشتقاق بالنسبة لـ س

⟸ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{-١}{س^{٢}}$ ...(٢) بالإشتقاق بالنسبة لـ س

⟸ $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}$ = $\frac{٢}{س^{٣}}$ ...(٣)

الطرف الأيمن للمطلوب = $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}$ + ٣ ص $\frac{ء ص}{ء س}$ + ص^{٣} بالتعويض من (١) ، (٢) ،(٣)

الطرف الأيمن للمطلوب = $\frac{٢}{س^{٣}}$ + ٣ × $\frac{١}{س}$ × $\frac{-١}{س^{٢}}$ + ($\frac{١}{س}$)^{٣}

الطرف الأيمن للمطلوب = $\frac{٢}{س^{٣}}$ − $\frac{٣}{س^{٣}}$ + $\frac{١}{س^{٣}}$ = ٠

---

(١١) ∵ ص = س^{٣} + ١ ∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٣س^{٢} .....(١)

∵ ع = س^{٢} + ٣ ∴ $\frac{ء ع}{ء س}$ = ٢س .....(٢)

∵ $\frac{ء ع}{ء ص}$ = $\frac{ء ع}{ء س}$× $\frac{ء س}{ء ص}$ بالتعويض من (١) ، (٢)

$\frac{ء ع}{ء ص}$ = ٢ س × $\frac{١}{٣ س^{٢}}$ ⟸ $\frac{ء ع}{ء ص}$ = $\frac{٢}{٣}$ س$^{-١}$ بالإشتقاق بالنسبة لـ ص

$\frac{ء^{٢}ع}{ء ص^{٢}}$ = − $\frac{٢}{٣}$ س$^{-٢}$ × $\frac{ء س}{ء ص}$ بالتعويض من (١)

$\frac{ء^{٢}ع}{ء ص^{٢}}$ = − $\frac{٢}{٣}$ س$^{-٢}$ × $\frac{١}{٣ س^{٢}}$ ⟸ $\frac{ء^{٢}ع}{ء ص^{٢}}$ = − $\frac{٢}{٩}$ × س$^{-٤}$ بالتعويض عن س = ٢

$\frac{ء^{٢}ع}{ء ص^{٢}}$ = − $\frac{٢}{٩}$ × $\frac{١}{١٦}$ = − $\frac{١}{٧٢}$

(١٢) ∵ $س^{٢} = ٢ن - ٣$ ∴ $ن = \frac{١}{٢}س^{٢} + \frac{٣}{٢}$ .....(١)

∵ $ص = ٢ن^{٢} - ١$ بالتعويض من (١)

∴ $ص = ٢(\frac{١}{٢}س^{٢} + \frac{٣}{٢})^{٢} - ١$ بالإشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = ٤(\frac{١}{٢}س^{٢} + \frac{٣}{٢}) \times س$ ⇐ $\frac{ء ص}{ء س} = ٢س^{٣} + ٦س$ .....(٢)

بالإشتقاق بالنسبة لـ س $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = ٦س^{٢} + ٦$ .....(٣)

الطرف الأيمن للمطلوب = $٣\frac{ء ص}{ء س} - س\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} - ١٢س$ بالتعويض من (٢) ، (٣)

الطرق الأيمن للمطلوب = ٣(٢س^{٣} + ٦س) – س (٦س^{٢} + ٦) – ١٢س

الطرق الأيمن للمطلوب = ٦س^{٣} + ١٨س – ٦س^{٣} – ٦س – ١٢س = ٠

---

(١٣) ∵ $س = جا٢ن$ ⇐ $\frac{ء س}{ء ن} = ٢جتا٢ن$

∵ $ص = جتا٢ن$ ⇐ $\frac{ء ص}{ء ن} = -٢جا٢ن$

∵ $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ء ص}{ء ن} \times \frac{ء ن}{ء س}$ ⇐ $\frac{ء ص}{ء س} = ٢جا٢ن \times \frac{١}{-٢جتا٢ن}$

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{-جا٢ن}{جتا٢ن}$ ⇐ $\frac{ء ص}{ء س} = -ظا٢ن$ بالإشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = -٢ \frac{ء ن}{ء س} \times قا^{٢}٢ن$ ⇐ $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = -٢ \times \frac{١}{٢جتا٢ن} \times قا^{٢}٢ن$

∴ $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = \frac{-١}{جتا٢ن} \times \frac{١}{جتا^{٢}٢ن}$ ⇐ $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = \frac{-١}{جتا^{٣}٢ن}$

∴ $\left[\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}\right]_{ن=\frac{\pi}{٢}} = \frac{-١}{(جتا٢ \times \frac{\pi}{٢})^{٣}} = ١$

---

(١٤) ∵ $ص = ظا^{٢}س$ ⇐ $\frac{ء ص}{ء س} = ٢ظاس قا^{٢}س$

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = ٢ظاس(١ + ظا^{٢}س)$ ⇐ $\frac{ء ص}{ء س} = ٢ظاس(١ + ص)$ بالإشتقاق مرة أخرى

∴ $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = ٢قا^{٢}س(١ + ص) + ٢\frac{ء ص}{ء س}ظاس$ ⇐ $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = ٢قا^{٢}س(١ + ص) + ٤ظا^{٢}س(١ + ص)$

∴ $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = (١ + ص)(٢قا^{٢}س + ٤ظا^{٢}س)$ ⇐ $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = (١ + ص)(٢ + ٢ظا^{٢}س + ٤ظا^{٢}س)$

∴ $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = (١ + ص)(٢ + ٦ظا^{٢}س)$ ⇐ $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = ٢(١ + ص)(١ + ٣ص)$

---

(١٥) ∵ $ص = س هـ^{س}$ ⇐ $\frac{ء ص}{ء س} = س هـ^{س} + هـ^{س}$ ⇐ $\frac{ء ص}{ء س} = هـ^{س}(س + ١)$

∴ $س\frac{ء ص}{ء س} = س هـ^{س}(س + ١)$ ⇐ $س\frac{ء ص}{ء س} = ص(س + ١)$

تطبيقات هندسية

(١) لإيجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠ فى معادلة المنحنى

∵ $س^{٢} + ص^{٢} - ٦ص - ١٦ = ٠$ ، $س = ٠$

∴ $٠ + ص^{٢} - ٦ص - ١٦ = ٠$ ⇐ $(ص - ٨)(ص + ٢) = ٠$

∴ $ص = ٨$ أو $ص = -٢$ مرفض ؟ ⇐ النقطة هى $(٠ , ٨)$

نوجد الميل

∵ $س^{٢} + ص^{٢} - ٦ص - ١٦ = ٠$ بالإشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $٢س + ٢ص \frac{د ص}{د س} - ٦ \frac{د ص}{د س} = ٠$ بوضع $س = ٠$ ، $ص = ٨$ ⇐ $\frac{د ص}{د س} = ٠$

∴ المماس // محور السينات و بالتالى العمودى // محور الصادات.

معادلة المماس	معادلة العمودى
$\boxed{ص = ٨}$	$\boxed{س = ٠}$

---

(٢) أولاً : نوجد نقطة التماس و ذلك بالتعويض عن قيمة س فى معادلة المنحنى لإيجاد قيمة ص

∵ $س = ص ق\theta$ ، $س = \pi$ ⇐ $\pi = ص \times ق\pi$

∴ $ص = -\pi$ ⇐ نقطة التماس هى $(\pi , -\pi)$

ثانياً : نوجد ميل المماس

∵ $س = ص ق\theta$ بالإشتقاق بالنسبة لـ س ثم التعويض عن س ، ص

∴ $١ = \frac{د ص}{د س} ق\theta + ص ق\theta ظ\theta$ ⇐ $١ = \frac{د ص}{د س} \times ق\pi + \pi(-\pi) \times ق\pi \times ظ\pi$

∴ $١ = -\frac{د ص}{د س} + ٠$ ⇐ $\boxed{\frac{د ص}{د س} = -١}$

معادلة المماس	معادلة العمودى
$ص - (-\pi) = -١ \times (س - \pi)$	$ص - (-\pi) = ١ \times (س - \pi)$
$ص + \pi = -س + \pi$	$ص + \pi = س - \pi$
$\boxed{ص + س = ٠}$	$\boxed{س - ص - ٢\pi = ٠}$

---

(٣) أولاً : نوجد نقطة التماس و ذلك بالتعويض عن قيمة س فى معادلتى المنحنى لإيجاد قيمة ص

∵ $\left.\begin{array}{l} س = ق^{٢}\theta - ١ \\ ص = ظ\theta \end{array}\right\}$ ⇐ $\left.\begin{array}{l} س = (ق(\frac{-\pi}{٤}))^{٢} - ١ \\ ص = ظ(\frac{-\pi}{٤}) \end{array}\right\}$

∴ $\left.\begin{array}{l} س = ١ \\ ص = -١ \end{array}\right\}$ ⇐ نقطة التماس هى $(١ , -١)$

ثانياً : نوجد ميل المماس

$\because \left.\begin{array}{l} س = قا^{٢}\theta - ١ \\ ص = ظا\theta \end{array}\right\} \Leftarrow \left.\begin{array}{l} \frac{د س}{د \theta} = ٢ قا\theta (قا\theta ظا\theta) = ٢ قا^{٢}\theta ظا\theta \\ قا^{٢}\theta = \frac{د س}{د \theta} \end{array}\right\}$

$\because \frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د \theta} \times \frac{د \theta}{د س} \Leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٢ قا^{٢}\theta ظا\theta} \times قا^{٢}\theta$

$\therefore \left[\frac{د ص}{د س}\right]_{س = -\frac{\pi}{٤}} = \frac{١}{ظا(-\frac{\pi}{٤})} \Leftarrow \left[\frac{د ص}{د س}\right]_{س = -\frac{\pi}{٤}} = -١$

معادلة المماس :

$ص + ١ = -(س - ١) \Leftarrow \boxed{س + ص = ٠}$

معادلة العمودى :

$ص + ١ = س - ١ \Leftarrow \boxed{س - ص - ٢ = ٠}$

---

(٤) لإثبات أن منحنيان متماسان نبرهن أنهما متقاطعان فى نقطة ، ميلاهما عند هذه النقطة متساويان.

(أولاً) نوجد نقطة التقاطع و ذالك بحل المعادلتين معاً كما يلى

$\because ص = س^{٢} - س + ٢ \quad ...(١)$ ، $ص = ٣س - س^{٢} \quad ...(٢)$

$\therefore س^{٢} - س + ٢ = ٣س - س^{٢} \Leftarrow ٢س^{٢} - ٤س + ٢ = ٠$ بالقسمة ÷ ٢

$\therefore س^{٢} - ٢س + ١ = ٠ \Leftarrow (س - ١)^{٢} = ٠$

$\therefore \boxed{س = ١}$ بالتعويض فى أى من المعادلتين (١) أو (٢) و لتكن المعادلة (١)

$\therefore ص = ١^{٢} - ١ + ٢ = ٢ \Leftarrow$ النقطة هى $\boxed{(١ , ٢)}$

المنحنى الأول	المنحنى الثانى
$\because ص = س^{٢} - س + ٢$	$\because ص = ٣س - س^{٢}$
$\therefore \frac{د ص}{د س} = ٢س - ١$	$\therefore \frac{د ص}{د س} = ٣ - ٢س$
$\therefore \left[\frac{د ص}{د س}\right]_{س=١} = ٢ \times ١ - ١ = ١$	$\therefore \left[\frac{د ص}{د س}\right]_{س=١} = ٣ - ٢ \times ١ = ١$
$\therefore م_{١} = ١$	، $م_{٢} = ١$

$\because$ المنحنيان متقاطعان فى $(١ , ٢)$ ، $م_{١} = م_{٢}$ $\therefore$ المنحنيان متماسان .

معادلة المماس المشترك لهما:

$ص - ٢ = س - ١ \Leftarrow \boxed{س - ص + ١ = ٠}$

---

(٥) نوجد نقطة التقاطع بحل المعادلتين معاً كما يلى

$\because س ص = ٢ \quad ...(١)$ ، $س^{٢} - ص^{٢} = ٣ \quad ...(٢)$

من المعادلة (١) $ص = \frac{٢}{س}$ ...(٣) بالتعويض فى المعادلة (٢)

∴ $س^{٢} - \left(\frac{٢}{س}\right)^{٢} = ٣$ ⇐ $س^{٢} - \frac{٤}{س^{٢}} = ٣$ بالضرب × $س^{٢}$

∴ $س^{٤} - ٤ = ٣س^{٢}$ ⇐ $س^{٤} - ٣س^{٢} - ٤ = ٠$

∴ $(س^{٢} - ٤)(س^{٢} + ١) = ٠$ ⇐ $س^{٢} = ٤$ ، ~~$س^{٢} = -١$~~ غير ممكن

∴ $س = ٢$ أو $س = -٢$ بالتعويض فى (٣) ⇐ $ص = ١$ أو $ص = -١$

∴ النقط هى $(٢ , ١)$ ، $(-٢ , -١)$

لكى نبرهن أن المنحنيان متقاطعان على التعامد نبرهن أن حاصل ضرب ميلاهما = − ١

المنحنى الأول	المنحنى الثانى
∴ $س ص = ٢$ بالإشتقاق بانسبة لـ س	∴ $س^{٢} - ص^{٢} = ٣$ بالإشتقاق بالنسبة لـ س
∴ $ص + س \frac{ء ص}{ء س} = ٠$	∴ $٢س - ٢ص \frac{ء ص}{ء س} = ٠$
∴ $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{- ص}{س}$	∴ $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{س}{ص}$
∴ $م_{١} = \frac{- ص}{س}$	∴ $م_{٢} = \frac{ص}{س}$

∴ $م_{١} \times م_{٢} = \frac{- ص}{س} \times \frac{ص}{س} = -١$

∴ المنحنيان متقاطعان على التعامد عند كل من النقطتين .

---

(٦) ✸حتى يكون للمنحنيان مماس مشترك عند النقطة $(-١ , ٢)$ لابد أن تحقق النقطة كل من المنحنيين

∴ $٢ = أ \times (-١)^{٣} + ب \times (-١)$ ⇐ $\boxed{-أ - ب = ٢}$ ... (١)

، $٢ = جـ (-١)^{٢} - (-١)$ ⇐ $\boxed{جـ = ١}$

✸ حتى يكون للمنحنيان مماس مشترك عند النقطة $(-١ , ٢)$ يجب أن يكون ميل المماس للمنحنى الأول = ميل المماس للمنحنى الثانى عند هذه النقطة.

∴ $ص = أس^{٣} + بس$ ، $ص = جـس^{٢} - س$ بالإشتقاق بالنسبة لـ س

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = ٣أس^{٢} + ب$ ، $\frac{ء ص}{ء س} = ٢جـس - ١$ بالتعويض عن $س = -١$، $جـ = ١$

∴ $م_{١} = ٣أ + ب$ ، $م_{٢} = -٣$ ⇐ $\boxed{٣أ + ب = -٣}$ ... (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) ⇐ $\boxed{أ = \frac{-١}{٢}}$ ، $\boxed{أ = \frac{-٣}{٢}}$

---

(٧) (أولاً) نوجد معادلة كل من المماس و العمودى :

∵ ٣س^{٢} + ص^{٢} = ١٢ ⇐ ٦س + ٢ص $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٠

∴ ٦ × (−١) + ٢ × ٣ × $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٠

∴ $\frac{ع ص}{ع س}$ = ١ " ميل المماس"

معادلة { المماس : ص − ٣ = س + ١ ، العمودى : ص − ٣ = −(س + ١) }

(ثانياً) نوجد تقاطع كل منهم مع محور السينات بوضع ص = ٠

∴ { ٠ − ٣ = س + ١ ، ٠ − ٣ = −(س + ١) } ⇐ { س = −٤ ، س = ٢ }

∴ طول قاعدة المثلث = |−٤ − ٢| = ٦ وحدة طول ، طول الإرتفاع = ٣ وحدة طول

∴ مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٣ = ٩ وحدة طول مربعة.

---

(٨) ∵ ٢ص^{٢} − ٨ص + س = ٠ .....(١) بالإشتقاق بالنسبة لـ س

∴ ٤ ص $\frac{ع ص}{ع س}$ − ٨ $\frac{ع ص}{ع س}$ + ١ = ٠ ⇐ ٤ $\frac{ع ص}{ع س}$ (ص − ٢) = − ١

∴ $\frac{ع ص}{ع س}$ = $\frac{-١}{٤(ص - ٢)}$ ∵ المماس // محور الصادات

∴ $\frac{ع ص}{ع س}$ غير معرفه ∴ ٤ (ص − ٢) = ٠ ⇐ ص = ٢ بالتعويض فى (١)

∴ ٢ × ٤ − ٨ × ٢ + س = ٠ ∴ س = ٨ ∴ النقطة هى (٨ ، ٢)

---

(٩) نفرض أن النقطة المطلوبه هى (أ ، ب)

∵ (أ ، ب) ∋ للمنحنى ∴ تحقق معادلته أى أن ب = أ^{٢} − أ ..... (١)

نوجد معادلة المماس بدلالة أ ، ب

∵ ص = س^{٢} − س ∴ $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٢س − ١ ميل المماس = ٢أ − ١

معادلة المماس : ص − ب = (٢أ − ١)(س − أ)

∵ النقطة (١ ، − ٤) ∋ المماس ∴ تحقق معادلته

∴ − ٤ − ب = (٢أ − ١)(١ − أ) ⇐ − ٤ − ب = − ٢أ^{٢} + ٣أ − ١

∴ ب = ٣ − ٣أ^{٢} ..... (٢) بالتعويض من (١) عن قيمة ب

٣ − ٣أ^{٢} = أ − أ^{٢} ⇐ ٣ − ٢أ − أ^{٢} = ٠

(أ − ٣)(أ + ١) = ٠ ⇐ أ = ٣ أو أ = − ١ بالتعويض فى (١)

ب = ٦ أو ب = ٢ ⇐ النقط هى (٣، ٦) أو (− ١ ، ٢)

---

(١٠) ∵ ٤ص + س^{٢} = ٠ ⇐ $\frac{ع ص}{ع س}$ = − $\frac{١}{٢}$ س

∵ Δ متساوى الأضلاع ⇐ هـ = ٦٠° و هـ = ١٢٠°

∴ $\frac{ع ص}{ع س}$ = $\sqrt{٣}$ ، $\frac{ع ص}{ع س}$ = − $\sqrt{٣}$ ⇐ − $\frac{١}{٢}$ س = $\sqrt{٣}$ ، − $\frac{١}{٢}$ س = − $\sqrt{٣}$

∴ س = −٢$\sqrt{٣}$ ، س = ٢$\sqrt{٣}$ ⇐ ص = − ٣

نوجد معادلة المماس عند إحدى النقطتين (− ٢$\sqrt{٣}$ ، − ٣) أو (٢$\sqrt{٣}$ ، − ٣) ثم نوجد نقطة تقاطعه مع محور الصادات

ص + ٣ = $\sqrt{٣}$ (س + ٢$\sqrt{٣}$) ⇐ ص + ٣ = $\sqrt{٣}$ (٠ + ٢$\sqrt{٣}$) ⇐ النقطة هى (٠ ، ٢)

المعدلات الزمنية :

(١) نفرض أن حجم الغاز ع ، و طول نصف قطر البالون نوه : فيكون : $\frac{ع ع}{ع ن}$ = − ٢٠ سم^{٣}/ث ، نوه= ١٠ سم

المطلوب : $\frac{ع نوه}{ع ن}$ = ؟؟؟ ، $\frac{ع م}{ع ن}$ = ؟؟؟ حيث م مساحة سطح البالون.

∵ ع = $\frac{٤}{٣}$ π نوه^{٣} ⇐ $\frac{ع ع}{ع ن}$ = ٤π نوه^{٢} $\frac{ع نوه}{ع ن}$ ⇐ − ٢٠ = ٤π × (١٠)^{٢} × $\frac{ع نوه}{ع ن}$

∴ $\boxed{\frac{ع نوه}{ع ن} = \frac{-١}{٢٠\pi}}$ سم/ث ∵ م = ٤π نوه^{٢} ⇐ $\frac{ع م}{ع ن}$ = ٨π نوه $\frac{ع نوه}{ع ن}$ ⇐

$\frac{ع م}{ع ن}$ = ٨π × ١٠ × $\frac{-١}{٢٠\pi}$ = − ٤ سم^{٢}/ث

---

(٢) نفرض أن طول حرف المكعب = س فيكون $\frac{ع س}{ع ن}$ = ٠,٠٢ سم/د ، $\frac{ع م}{ع ن}$ = ٠,٧٢سم^{٢}/د حيث م مساحة سطحة

المطلوب : س ، $\frac{ع ع}{ع ن}$ حيثث ح حجم المكعب

∵ م = ٦س^{٢} ⇐ $\frac{ع م}{ع ن}$ = ١٢س $\frac{ع س}{ع ن}$ ⇐ ٠,٧٢ = ١٢س × ٠,٠٢

∴ س = ٣ سم ، ∵ ح = س^{٣} ⇐ $\frac{ع ع}{ع ن}$ = ٣س ^{٢} $\frac{ع س}{ع ن}$

∴ $\frac{ع ع}{ع ن}$ = ٣ × ٣ ^{٢} × ٠,٠٢ = ٠,٥٤ سم^{٣}/د

---

(٣) نفرض أن آبعاد متوازى المستطيلات هى س ، س ، ص حيث $\frac{ع س}{ع ن}$ = ١سم/د ، $\frac{ع ص}{ع ن}$ = -٢ سم/د

، س$_{٠}$ = ٥ ، ص$_{٠}$ = ٢٠ فى أي لحظة زمنية ن : تكون س = ٥+ ن ، ص = ٢٠-٢ن

∵ الحجم ع = س ^{٢} ص ⇐ ع = (٥+ن)^{٢} (٢٠-٢ن)

∴ ع = ٢(٥+ن)^{٢} (١٠-ن) ⇐ $\frac{ع ع}{ع ن}$ = ٤(٥+ن)(١٠-ن) − ٢(٥+ن)^{٢}

∴ $\frac{ع ع}{ع ن}$ = ٢(٥+ن)[٢(١٠-ن) − (٥+ن)] ⇐ $\frac{ع ع}{ع ن}$ = ٢(٥+ن)(١٥-٣ن)

عندما ن = ٠ ⇐ $\frac{ع ع}{ع ن}$ = ٢ × ٥ × ١٥ = ١٥٠ سم^{٣}/د

يتوقف معدل التغير عندما $\frac{ع ع}{ع ن}$ = ٠ ⇐ ٢(٥+ن)(١٥-٣ن) = ٠ ⇐ ن = ٣ د

---

(٤) الهرم الرباعى المنتظم قاعدته مربعة الشكل : نفرض أن طول ضلع قاعدته " س " فيكون إرتفاعه " ص "

∵ حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الإرتفاع ⇐ $ح = \frac{1}{3} ص س^2 \times س = \frac{1}{3} س^3$

∴ $\frac{د ح}{د ن} = س^2 \frac{د ص}{د ن}$ ⇐ $1 = س^2 \times 0,01$ ⇐ س = ١٠سم

---

(٥) ∵ المساحة = ٢٤ ⇐ $\frac{1}{2} م ب = 24$

∴ م ب = ٤٨ ، عندما ب = ٨ ⇐ م = ٦ ، $ظا\theta = \frac{3}{4}$ ، $قا\theta = \frac{5}{4}$ ، $1 = \frac{د ب'}{د ن}$ جـ

∵ م ب = ٢٤ ⇐ $م \times \frac{د ب'}{د ن} + ب \times \frac{د ا'}{د ن} = 0$

∴ $6 \times 1 + 8 \times \frac{د ا'}{د ن} = 0$ ⇐ $\frac{د ا'}{د ن} = \frac{-3}{4}$

∵ $ظا\theta = \frac{ا'}{ب'}$ ⇐ $ب' ظا\theta = ا'$ ⇐ $ب' \frac{د \theta}{د ن} قا^2 \theta + \frac{د ب'}{د ن} ظا\theta = \frac{د ا'}{د ن}$

∴ $8 \times \frac{د \theta}{د ن} \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 + 1 \times \frac{3}{4} = \frac{-3}{4}$ ⇐ $\frac{د \theta}{د ن} = \frac{-3}{25}$

---

(٦) مساحة المضلع المنتظم م = $\frac{1}{4} ن س^2 ظتا \frac{180}{ن}$ حيث ن عدد أضلاعه ، س طول ضلعه

مساحة المثمن م = $\frac{1}{4} \times 8 س^2 ظتا \frac{180}{8}$ ⇐ $م = 2 س^2 ظتا \frac{180}{8}$

$\frac{د م}{د ن} = 4 س \times \frac{د س}{د ن} \times ظتا \frac{180}{8}$ ⇐ $\frac{د م}{د ن} = 4 \times 10 \times 0,2 \times ظتا \frac{180}{8} = 19,3$

---

(٧) ∵ ص = $س^3 + س$ ⇐ $\frac{د ص}{د ن} = 3 س^2 \frac{د س}{د ن} + \frac{د س}{د ن}$

∵ $\frac{د ص}{د ن} = 2$ ، س = ٣ ⇐ $2 = 3 \times 9 \times \frac{د س}{د ن} + \frac{د س}{د ن}$

∴ $2 = 28 \frac{د س}{د ن}$ ⇐ $\frac{د س}{د ن} = \frac{1}{28}$

∵ مساحة Δ م = $\frac{1}{2} \times 6 \times س$ ⇐ م = ٣ س

∴ $\frac{د م}{د ن} = 3 \frac{د س}{د ن}$ ⇐ $\frac{د م}{د ن} = 3 \times \frac{1}{28} = \frac{3}{28}$

---

(٨) نق = ١٠سم ، $\frac{د س}{د ن} = 3$ ق/د ، $س^\circ = 60^\circ$

∵ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ $نق^2$ ($س^c$ − جا $س^\circ$)

∴ م = $\frac{1}{2} \times 100 \times$ ($س^c$ − جا $س^\circ$)

∴ م = ٥٠($س^c$ − جا $س^\circ$) بالإشتقاق بالنسبة للزمن ن

∴ $\frac{د م}{د ن} = 50 \times \left(\frac{د س}{د ن} - \frac{د س}{د ن} \times جتا س^\circ\right)$ بالتعويض عن $س^\circ$ ، $\frac{د س}{د ن}$

∴ $\frac{د م}{د ن} = 50 \times (3 - 3 \times جتا 60)$

∴ $\frac{د م}{د ن} = 75$ سم^2/د

(٩) نفرض أن : بعد الطرف السفلى عن الحائط = س ، بعد الطرف العلوى عن الأرض = ص

فيكون $\frac{ء س}{ء ن} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{ء ص}{ء ن} =$ ؟؟؟؟ ، س = ٣م

∴ $س^{٢} + ص^{٢} = ٥^{٢}$ .... (١) ، س = ٣ م ⟸ ص = ٤ م

بإشتقاق العلاقة (١) بالنسبة للزمن ن

$٢س \times \frac{ء س}{ء ن} + ٢ص \times \frac{ء ص}{ء ن} = ٠$ ⟸ بالقسمة ÷ ٢ $\boxed{س \times \frac{ء س}{ء ن} + ص \times \frac{ء ص}{ء ن} = ٠}$ .... (٢)

بالتعويض عن س ، ص ، $\frac{ء س}{ء ن}$

$٣ \times \frac{١}{٣} + ٤ \times \frac{ء ص}{ء ن} = ٠$ ⟸ $\frac{ء ص}{ء ن} = -\frac{٣}{٨}$ م/د

✹ عندما يتحرك الطرفان بنفس المعدل يكون $\frac{ء ص}{ء ن} = -\frac{ء س}{ء ن}$ بالتعويض فى (٢)

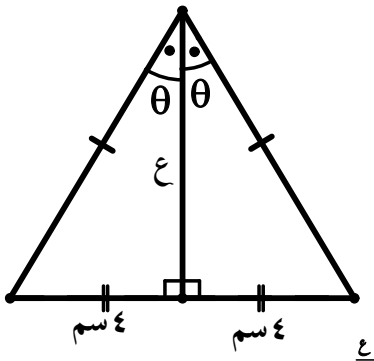
$س \times \frac{ء س}{ء ن} + ص \times (-\frac{ء س}{ء ن}) = ٠$ بالقسمة ÷ $\frac{ء س}{ء ن}$

س − ص = ٠ ⟸ $\boxed{ص = س}$ .... (٣) بالتعويض من (٣) فى (١)

$س^{٢} + س^{٢} = ٢٥$ ⟸ $س^{٢} = \frac{٢٥}{٢}$ ⟸ $س = ٢.٥\sqrt{٢}$ م

---

(١٠) نفرض أن إرتفاع Δ يساوى ع ، قياس زاوية رأسه يساوى ٢θ



المطلوب $\frac{ء(٢\theta)}{ء ن}$ عندما ع = ٦ سم ، $\frac{ء ع}{ء ن} = ٢$

∴ $ظا\theta = \frac{٤}{ع}$ ، ع = ٦ ⟸ $ظا\theta = \frac{٢}{٣}$

∴ $جتا\theta = \frac{٣}{\sqrt{١٣}}$ ⟸ $قا^{٢}\theta = \frac{١٣}{٩}$

∴ $ظا\theta = \frac{٤}{ع}$ بالإشتقاق بالنسبة للزمن ⟸ $قا^{٢}\theta \frac{ء\theta}{ء ن} = \frac{-٤ \times \frac{ء ع}{ء ن}}{ع^{٢}}$

∴ $\frac{ء\theta}{ء ن} \times \frac{١٣}{٩} = \frac{-٤ \times ٢}{٢٦}$ ⟸ $\frac{ء\theta}{ء ن} = \frac{-٢}{١٣}$ ⟸ $\frac{ء(٢\theta)}{ء ن} = \frac{-٤}{١٣}$

---

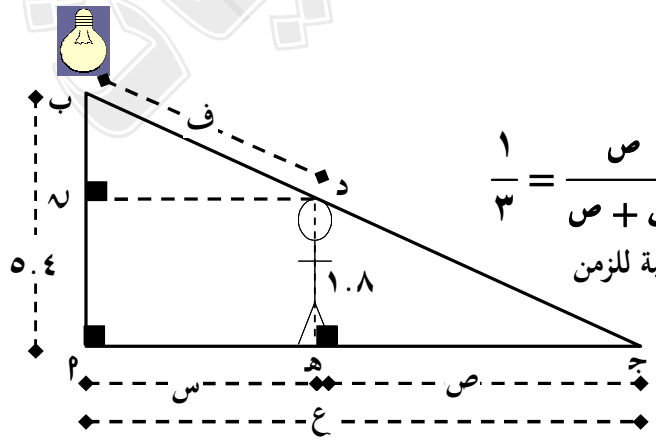
(١١) نفرض أن بعد الرجل عن قاعدة المصباح = س متراً ، طول ظل الرجل = ص متراً

، بعد رأس الرجل عن المصباح = ف متراً ، بعد نهاية ظل الرجل عن قاعدة المصباح = ع

∵ الرجل يتحرك مبتعداً عن قاعدة المصباح بسرعة ٣م/ث ∴ $\frac{ء س}{ء ن}$ = ٣م/ث

١ إيجاد معدل تغير طول ظل الرجل يعنى إيجاد $\frac{ء ص}{ء ن}$

فى Δ أ ب جـ ∵ $\overline{أ ب} // \overline{هـ د}$



∴ $\frac{جـ هـ}{جـ أ} = \frac{د هـ}{أ ب}$ ⟸ $\frac{س + ص}{ص} = \frac{٥,٤}{١,٨}$ ⟸ $\frac{ص}{س + ص} = \frac{١}{٣}$

∴ ٣ ص = س + ص ⟸ ٢ ص = س بالإشتقاق بالنسبة للزمن

$٢ \times \frac{ء ص}{ء ن} = \frac{ء س}{ء ن}$ بالتعويض عن $\frac{ء س}{ء ن}$

∴ $\frac{ء ص}{ء ن} = \frac{١}{٢} \times ٣ = \frac{٣}{٢}$ م/ث

٢ إيجاد سرعة نهاية ظل الرجل يعنى إيجاد $\frac{ع}{ن}$ "كأن جسم يتحرك عند ج و نريد إيجاد سرعته "

∵ ع = س + ص بالإشتقاق بالنسبة للزمن ن

∴ $\frac{ع}{ن} = \frac{س}{ن} + \frac{ص}{ن}$ ⇐ $\frac{ع}{ن} = ٣ + \frac{٣}{٤}$ $\sqrt{}$ ٤ م/ث

٣ إيجاد معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح نوجد $\frac{ف}{ن}$ عندما س = ٤.٨ م

من هندسة الشكل د ن = هـ ب = س ، ب ن = ٥.٤ − ١.٨ = ٣.٦ م

فى Δ ب ن د ف^{٢} = س^{٢} + (٣.٦)^{٢} ⇐ ف = $\sqrt{س^{٢} + (٣.٦)^{٢}}$

ف = (س^{٢} + (٣.٦)^{٢})$^{\frac{١}{٢}}$ بالإشتقاق بالنسبة للزمن ⇐ $\frac{ف}{ن} = \frac{١}{٢}$ (س^{٢} + (٣.٦)^{٢})$^{-\frac{١}{٢}}$ ×٢ س × $\frac{س}{ن}$

$\frac{ف}{ن} = \frac{١}{٢} \times ((٤.٨)^{٢} + (٣.٦)^{٢})^{-\frac{١}{٢}} \times ٢ \times ٤.٨ \times ٣ = ٢.٤$ م / ث

---

(١٢) نفرض أن إرتفاع السائل فى الوعاء = ع سم ، حجم السائل = ح

أى أن $\frac{ح}{ن}$ = ٢ سم^{٣}/ث ، نهـ = ٢ سم

∵ ح = π نهـ^{٢} ع ⇐ ح = ٤π ع بالإشتقاق بالنسبة للزمن

$\frac{ح}{ن} = ٤\pi \frac{ع}{ن}$ ⇐ $= ٤ \times \frac{٢٢}{٧} \times \frac{ع}{ن}$

$\frac{ع}{ن} = \frac{٧}{٤٤}$ سم/ث .

∵ $\frac{ح}{ن}$ = ٢ سم^{٣}/ث ∴ ح = ٢ ن حتى يمتلئ الوعاء يجب أن يكون حجم السائل مساوياً حجم الوعاء

∴ ٢ ن = π × ٤ × ٢.٨ ⇐ ٢ن = $\frac{٢٢}{٧} \times ٤ \times ٢.٨$ ⇐ ن = ١٧.٦ ث

سلوك الدالة :

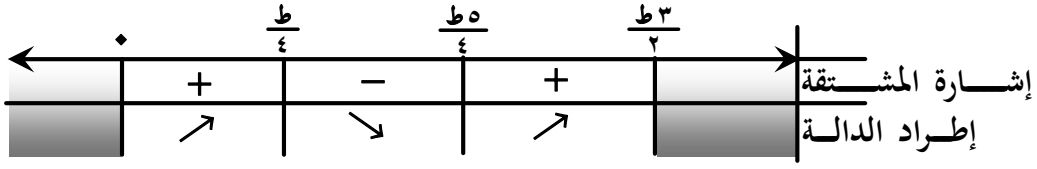
(١) ∵ ص = جاس + جتاس ⇐ $\frac{ص}{س}$ = جتاس − جاس

$\frac{ص}{س} = ٠$ ⇐ جتاس − جاس = ٠

∴ جاس = جتاس ⇐ $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} = ١$

∴ ظاس = ١ ⇐ س = ظا$^{-١}$(١) أو س = ١٨٠ + ظا$^{-١}$(١)

∴ س = ٤٥° أو س = ٢٢٥° ⇐ $\boxed{س = \frac{ط}{٤}}$ أو $\boxed{س = \frac{٥ط}{٤}}$



∴ الدالة تزايدية ∀ س ∈] ٠ ، $\frac{ط}{٤}$ [∪] $\frac{٥}{٤}$ ط ، $\frac{٣}{٤}$ ط [

، الدالة تناقصية ∀ س ∈] $\frac{ط}{٤}$ ، $\frac{٥}{٤}$ ط [

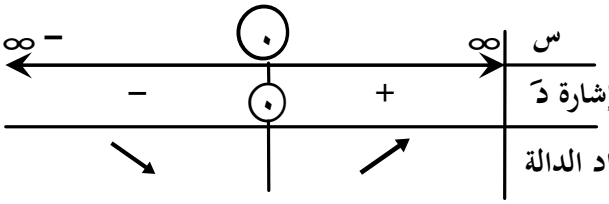
(٢) ∵ د(س) = س − هـ^س ⇐ د′(س) = ١ − هـ^س

د′(س) = ٠ ⇐ ١ − هـ^س = ٠

∴ هـ^س = ١ ⇐ س = ٠

∴ الدالة تزايدية ∀ س ∈]٠ ، ∞[

، الدالة تناقصية ∀ س ∈]−∞ ، ٠ [



---

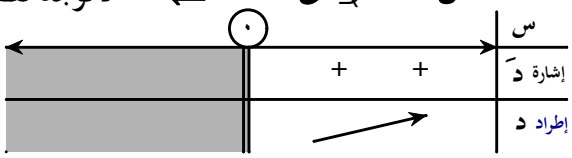
(٣) ∵ د(س) = س + لـو س ⇐ مجال الدالة ع^+

هـ

∴ د′(س) = ١ + ١/س ⇐ ١ + ١/س = ٠ ⇐ س = −١ ∉ ع^+

د′(س) غير معرفة ⇐ س = ٠ ∉ ع^+ ⇐ لاتوجد نقط حرجة.

∴ الدالة تزايدية على مجالها.

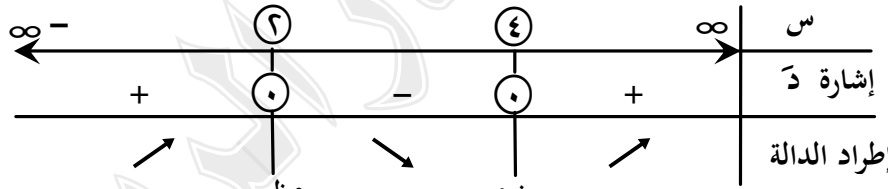


---

(٤) دَ(س) = ٣ س^٢ − ١٨س + ٢٤ نعين مواقع النقط الحرجة للدالة

٣س^٢ − ١٨ س + ٢٤ = ٠ بالقسمة ÷ ٣ ⇐ س^٢ − ٦س + ٨ = ٠

(س − ٢)(س − ٤) = ٠ ⇐ س = ٢ ، س = ٤



د(٢) = (٢)^٣ − ٩× (٢)^٢ + ٢٤ × ٢ + ٣٠ = ٣٠ ∴ القيمة العظمى المحلية = ٣٠ عظمى

د(٤) = (٤)^٣ − ٩× (٤)^٢ + ٢٤ × ٤ + ١٠ = ٢٦ ∴ القيمة الصغرى المحلية = ٢٦ صغرى

النقطة (٢ ، ٣٠) تسمى نقطة عظمى محلية ، النقطة (٤ ، ٢٦) تسمى صغرى محلية .

حل آخر :

دَ(س) = ٣ س^٢ − ١٨س + ٢٤ نعين مواقع النقط الحرجة للدالة

٣س^٢ − ١٨ س + ٢٤ = ٠ بالقسمة ÷ ٣ ⇐ س^٢ − ٦س + ٨ = ٠

(س − ٢)(س − ٤) = ٠ ⇐ س = ٢ ، س = ٤

دً(س) = ٦س − ١٨ ⇐ دً(٢) = ٦ × ٢ − ١٨ = عدد سالب ∴ س = ٢ موقع عظمى.

، دً(٤) = ٦ × ٤ − ١٨ = عدد موجب ⇐ س = ٤ موقع صغرى محلية .

د(٢) = (٢)^٣ − ٩× (٢)^٢ + ٢٤ × ٢ + ١٠ = ٣٠ ∴ القيمة العظمى المحلية = ٣٠

د(٤) = (٤)^٣ − ٩× (٤)^٢ + ٢٤ × ٤ + ١٠ = ٢٦ ∴ القيمة الصغرى المحلية = ٢٦

(٥) $د(س) = \sqrt[3]{(س-١)^{٢}} + ٢$ ⇐ $د(س) = (س-١)^{\frac{٢}{٣}} + ٢$

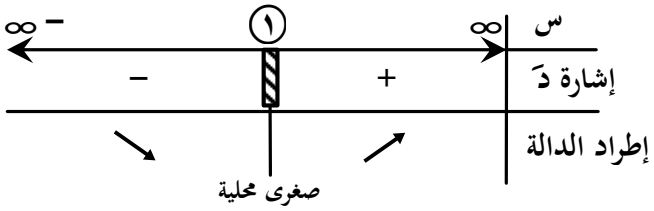
$د'(س) = \frac{٢}{٣}(س-١)^{-\frac{١}{٣}}$ ⇐ $د'(س) = \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{\sqrt[3]{س-١}}$

$د'(س) = ٠$ ⇐ $\frac{٢}{٣} \times \frac{١}{\sqrt[3]{س-١}} = ٠$ ⇐ غير ممكن

$د'(س)$ غير معرفة عندما $س = ١$ " أصفار المقام "

$د(١) = \sqrt[3]{(١-١)^{٢}} + ٢$

$د(١) = ٢$ قيمة صغرى محلية .



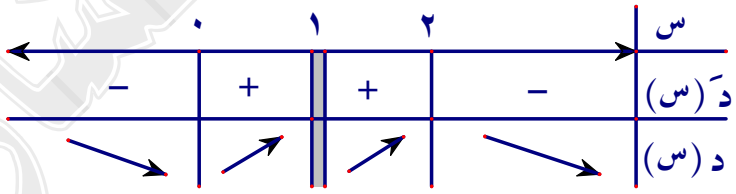
---

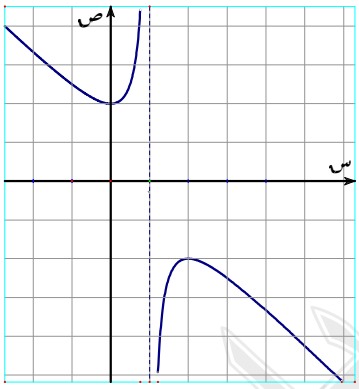
(٦) ∵ $د(س) = \frac{س^{٢}}{١-س} + ٢$ ⇐ مجال الدالة = ح − { ١ }

، $د'(س) = \frac{٢س(١-س) + س^{٢}}{(١-س)^{٢}}$ ⇐ $د'(س) = \frac{س(٢-س)}{(١-س)^{٢}}$

∴ $د'(س) = ٠$ ⇐ $س(٢-س) = ٠$

∴ $\boxed{س = ٠}$ ، $\boxed{س = ٢}$





القيمة العظمى المحلية = $د(٢) = \frac{٢^{٢}}{٢-١} + ٢ = -٢$

القيمة الصغرى المحلية = $د(٠) = \frac{٠^{٢}}{٠-١} + ٢ = ٢$

---

(٧) ∵ $د(س) = لـو_{هـ}(هـ^{٢س} - ٢هـ^{س} + ٣)$ ⇐ مجال الدالة هو مجموعة حل $هـ^{٢س} - ٢هـ^{س} + ٣ \prec ٠$

لإيجاد مجموعة حل هذه المتباينة يجب إيجاد جذور المعادلة $هـ^{٢س} - ٢هـ^{س} + ٣ = ٠$

نوجد مميز المعادلة : $ب^{٢} - ٤أجـ = (-٢)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٣ = -٨$ " عدد سالب"

∴ المعادلة ليس لها أصفار " جذور " ⇐ المقدار $هـ^{٢س} - ٢هـ^{س} + ٣$ له نفس إشارة $هـ^{٢س}$

أى أن المقدار $هـ^{٢س} - ٢هـ^{س} + ٣$ موجب مهما كانت قيمة س

∴ مجال الدالة = ح

∵ $د(س) = لـو_{هـ}(هـ^{٢س} - ٢هـ^{س} + ٣)$ ⇐ $د'(س) = \frac{٢هـ^{٢س} - ٢هـ^{س}}{هـ^{٢س} - ٢هـ^{س} + ٣}$

∴ $د'(س) = \frac{٢هـ^{س}(هـ^{س} - ١)}{هـ^{٢س} - ٢هـ^{س} + ٣}$ نوجد مواقع النقط الحرجة

∴ د′(س) = ٠ ⇐ ٢هـ^س (هـ^س − ١) = ٠

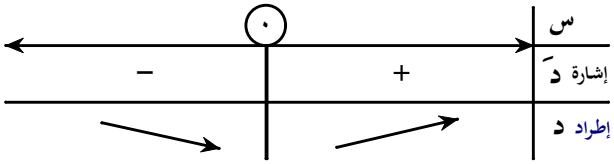
∴ هـ^س = ٠ غير ممكن ، هـ^س = ١ ⇐ **س = ٠**

∴ القيمة الصغرى المحلية = د (٠)

= لـو_هـ (هـ^٠ − ٢ × هـ^٠ + ٣)

= لـو_هـ (١ − ٢ × ١ + ٣)

= لـو_هـ ٢ = ٠,٦٩ تقريبا ⇐ **ln ٢ =**



---

(٨) ∵ د(س) = هـ^(١/س) (١/س − ٢) ⇐ مجال الدالة = ح − {٠}

∴ د′(س) = (−١/س^٢) هـ^(١/س) (١/س − ٢) + (−١/س^٢) هـ^(١/س) نوجد مواقع النقط الحرجة

∴ د′(س) = ٠ ⇐ (−١/س^٢) هـ^(١/س) (١/س − ٢) + (−١/س^٢) هـ^(١/س) = ٠

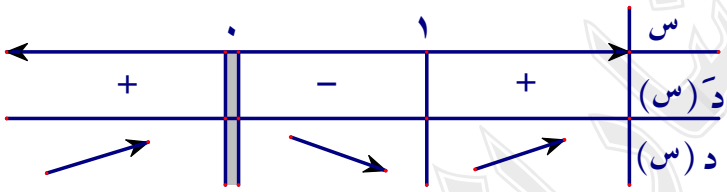
∴ (−١/س^٢) هـ^(١/س) (١/س − ٢ + ١) = ٠ ⇐ (−١/س^٢) هـ^(١/س) (١/س − ١) = ٠

∴ −١/س^٢ = ٠ غير ممكن أو هـ^(١/س) = ٠ غير ممكن أو ١/س − ١ = ٠ ⇐ **س = ١**

∴ القيمة الصغرى المحلية = د (١)

= هـ × (١ − ٢)

= − هـ



---

(٩) ∵ د(س) = س^٢ − ١ − ٢ لـو_هـ |س| ⇐ مجال الدالة = ح − {٠}

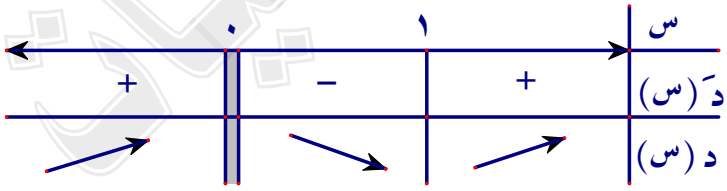
∴ د′(س) = ٢س − ٢ × ١/س ⇐ د′(س) = ٢س − ٢/س نوجد مواقع النقط الحرجة

∴ د′(س) = ٠ ⇐ ٢س − ٢/س = ٠ بالضرب × ½ س

∴ س^٢ − ١ = ٠ ⇐ **س = ١** أو **س = −١**

∴ القيمة الصغرى المحلية = د (١)

= هـ × (١ − ٢) = − هـ



---

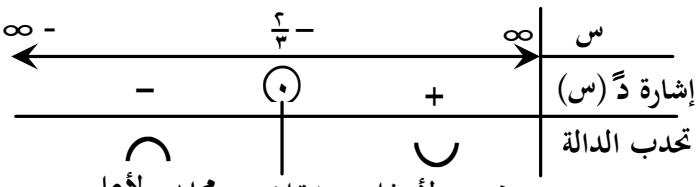
(١٠) ∵ د (س) = س^٣ + ٣س^٢ − ٤س − ٨ ⇐ دَ (س) = ٣س^٢ + ٦س − ٤

دً (س) = ٦س + ٤ نوجد أصفار دً ⇐ ٦س + ٤ = ٠ ⇐ س = −٢/٣

ندرس إشارة دً (س)

∀ س ∈] −∞ ، −٢/٣ [المنحنى محدب لأعلى

، ∀ س ∈] −٢/٣ ، ∞ [المنحنى محدب لأسفل .



د (−٢/٣) = (−٢/٣)^٣ + ٢ × (−٢/٣)^٢ − ٤ × (−٢/٣) − ٨ = −١٢٨/٢٧

النقطة (−٢/٣ ، −١٢٨/٢٧) هى نقطة إنقلاب للدالة لأن المنحنى يتغير تحدبه قبل و بعد س = −٢/٣ و لها مماس عندها.

---

(١١) ∵ د (س) = س^٣ + ﺃ س^٢ + ب س ⇐ دَ (س) = ٣س^٢ + ٢ﺃ س + ب

، دً (س) = ٦ س + ٢ﺃ ، ∵ (٢ ، ٢) نقطة إنقلا ⇐ دً (٢) = ٠

∴ ٦ × ٢ + ٢ ﺃ = ٠ ⇐ ﺃ = −٦

∵ (٢ ، ٢) نقطة إنقلاب ⇐ د (٢) = ٢

٢^٣ + ﺃ × ٢^٢ + ب × ٢ = ٢ بالتعويض عن قيمة ﺃ ⇐ ب = ٩

---

(١٢)

(أ) ∵ د(س) = ٢+٣ س − س^٣ ⇐ د'(س) = ٣ − ٣ س^٢

∴ د'(س) = ٠ ⇐ س = ١ ، س = -١ ∉ [١ ، ٣]

∴ د(٣) = -١٦ ، د(١) = ٤

∴ القيمة العظمى المطلقة = ٤ ، القيمة الصغرى المطلقة = −١٦

(ب) ∵ د(س) = س^٢ هـ^س ⇐ د'(س) = ٢ س هـ^س + س^٢ هـ^س

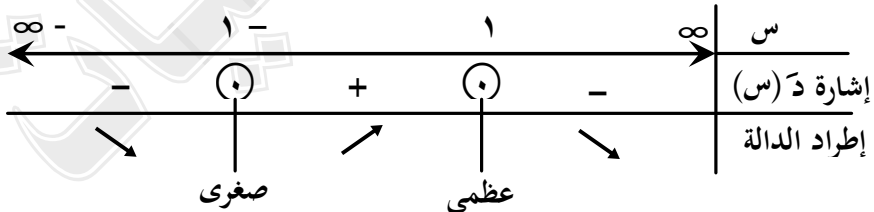
∴ د'(س) = س هـ^س (٢ + س) ⇐ د'(س) = ٠ ⇐ س = ٠ ، س = -٢

∴ د(-٣) ≃ ٠,٤٥ ، د(-٢) ≃ ٠,٥٤ ، د(٠) = ٠ ، د(١) ≃ ٢,٧٢

∴ القيمة العظمى المطلقة ≃ ٢,٧٢ ، القيمة الصغرى المطلقة = صفر

---

(١٣) دَ (س) = ٣ − ٣ س^٢ ، دً (س) = − ٦ س



● ندرس إشارة دَ(س) = ٠

⇐ ٣ − ٣ س^٢ = ٠

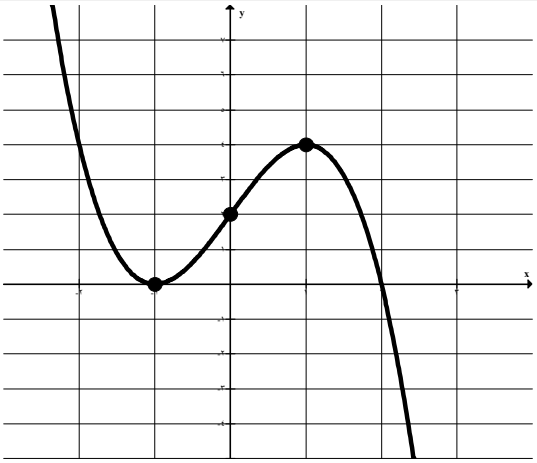
⇐ س = ± ١

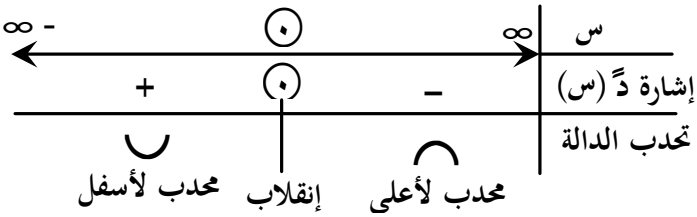
● نوجد القيم العظمى و الصغرى المحلية

د (١) = ٤ ⇐ (١ ، ٤) عظمى محلية ، د (− ١) = ٠ ⇐ (− ١ ، ٠) صغرى محلية

● ندرس إشارة دً (س) = ٠ ⇐ − ٦ س = ٠ ⇐ س = ٠

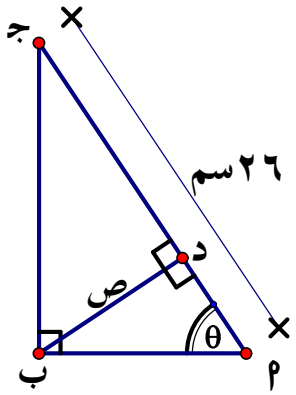
● نوجد نقط الإنقلاب د (٠) = ٢ ∴ (٠ ، ٢) نقطة إنقلاب .





النقطة	نوعها
(١ ، ٤)	عظمى محلية
(− ١، ٠)	صغرى محلية
(٠ ، ٢)	إنقلاب

تطبيقات على القيم العظمى و الصغرى:



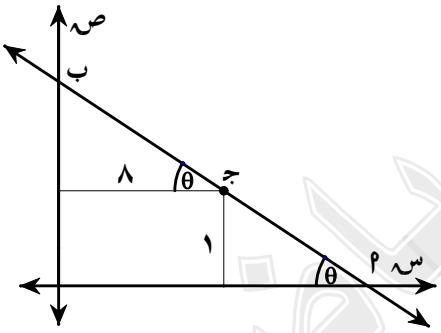
(١) نفرض أن ق(أ) = θ فيكون أب = ٢٦ جتاθ ، ب جـ = ٢٦ جاθ

∵ ب د × أ جـ = أ ب × ب جـ ⇐ ٢٦ص = ٢٦جتاθ × ٢٦جاθ

∴ ص = ٢٦جاθجتاθ ⇐ ص = ١٣جا٢θ

∴ $\frac{د ص}{د θ}$ = ٢٦جتا٢θ ⇐ ٢٦جتا٢θ = ٠ ⇐ $\boxed{θ = \frac{ط}{٤}}$

، $\frac{د^٢ ص}{د θ^٢}$ = −٥٢جا٢θ سالبة ⇐ أب = ١٣√٢ ، ب جـ = ١٣√٢ سم.



(٢) ∵ جاθ = $\frac{١}{أجـ}$ ، جتاθ = $\frac{٨}{جب}$ ⇐ $\left\{\begin{array}{l} أجـ = \frac{١}{جاθ} \\ جب = \frac{٨}{جتاθ} \end{array}\right.$

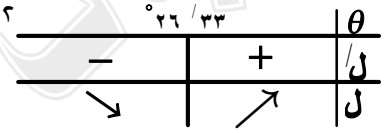
∴ أب = $\frac{١}{جاθ} + \frac{٨}{جتاθ}$ ⇐ ل = $\frac{١}{جاθ} + \frac{٨}{جتاθ}$

∴ $\frac{د ل}{د θ}$ = $\frac{θ جا٨}{θ^٢ جتا^٢} - \frac{جتاθ}{θ^٢ جا^٢}$ ⇐ $\frac{د ل}{د θ}$ = $\frac{جتا^٣ θ - ٨ جا^٣ θ}{θ^٢ جا^٢ θ جتا^٢ θ}$

∴ $\frac{جتا^٣ θ - ٨ جا^٣ θ}{θ^٢ جا^٢ θ جتا^٢ θ}$ = ٠ ⇐ جتا^٣ θ − ٨ جا^٣ θ = ٠

∴ ١ − ٨ ظا^٣ θ = ٠ ⇐ ظا^٣ θ = $\frac{١}{٨}$ ⇐ ظاθ = $\frac{١}{٢}$

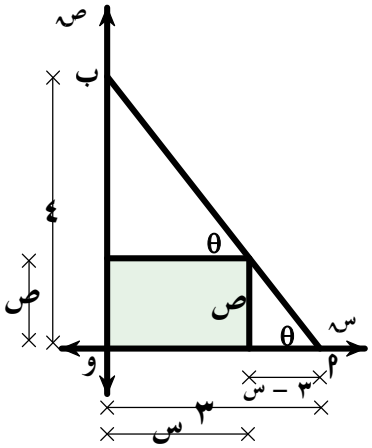
∴ θ = ظا^−١ $\frac{١}{٢}$ = ٢٦° ٣٣′



∴ ل = $\frac{١}{\frac{١}{٥√}} + \frac{٨}{\frac{٢}{٥√}}$ ⇐ ل = ٥ √٥

---

(٣) نفرض أن آبعاد المستطيل هى س ، ص كما باشكل



∵ $\text{ظا}\theta = \frac{\text{ص}}{٣ - \text{س}}$ ، $\text{ظا}\theta = \frac{٤}{٣}$ ⇐ $\frac{\text{ص}}{٣ - \text{س}} = \frac{٤}{٣}$

∴ $\text{ص} = \frac{٤}{٣}(٣ - \text{س})$ ... (١)

∵ المساحة م = س ص ⇐ $\text{م} = \frac{٤}{٣}\text{س}(٣ - \text{س})$

∴ $\text{م} = ٤\text{س} - \frac{٤}{٣}\text{س}^{٢}$ ⇐ $\text{م}' = ٤ - \frac{٨}{٣}\text{س}$

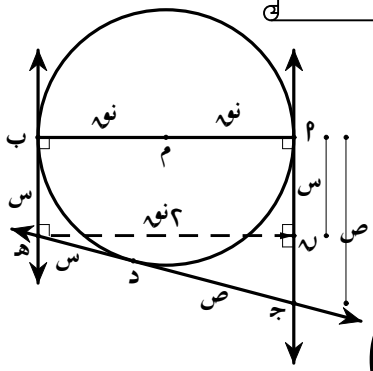
∴ $٤ - \frac{٨}{٣}\text{س} = ٠$ ⇐ $\boxed{\text{س} = \frac{٣}{٢}}$ ، $\text{م}'' = -\frac{٨}{٣}$ "عظمى"

∴ أكبر مساحة $\text{م} = ٤ \times \frac{٣}{٢} - \frac{٤}{٣} \times \frac{٩}{٤} = ٣$ وحدة مربعة .

---

(٤) نفرض أن هـ ب = س ، جـ د = ص فيكون هـ د = س ، أ جـ = ص

المماسان المرسومان لدائرة من نقطة خارجها متساويان فى الطول



نرسم $\overline{\text{هـ ن}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ فيكون ن جـ = ص − س

فى Δ هـ ن جـ : $(\text{س} + \text{ص})^{٢} = (\text{ص} - \text{س})^{٢} + ٤\text{نوهـ}^{٢}$

∴ $\text{س}^{٢} + ٢\text{س ص} + \text{ص}^{٢} = \text{س}^{٢} - ٢\text{س ص} + \text{ص}^{٢} + ٤\text{نوهـ}^{٢}$

∴ $٤\text{س ص} = ٤\text{ نوهـ}^{٢}$ ⇐ $\text{ص} = \frac{\text{نوهـ}^{٢}}{\text{س}}$

∵ المساحة $\text{م} = \frac{\text{س} + \text{ص}}{٢} \times ٢\text{نوهـ}^{٢}$ ⇐ $\text{م} = ٢\text{نوهـ}^{٢}(\text{س} + \text{ص})$

∴ $\text{م} = ٢\text{نوهـ}^{٢}\left(\text{س} + \frac{\text{نوهـ}^{٢}}{\text{س}}\right)$ ⇐ $\frac{\text{د}\text{م}}{\text{د}\text{س}} = ٢\text{نوهـ}^{٢}\left(١ - \frac{\text{نوهـ}^{٢}}{\text{س}^{٢}}\right)$

∴ $٢\text{نوهـ}^{٢}\left(١ - \frac{\text{نوهـ}^{٢}}{\text{س}^{٢}}\right) = ٠$ ⇐ $\text{س} = \text{نوهـ}$ ، ∵ $\frac{\text{د}^{٢}\text{م}}{\text{د}\text{س}^{٢}} < ٠$ صغرى

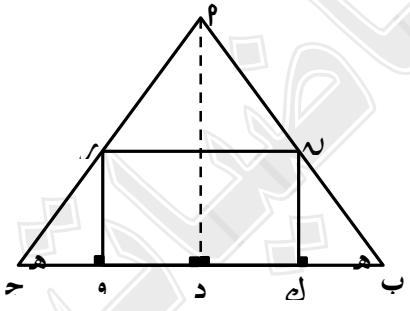
∴ أصغر مساحة $\text{م} = (٢\text{نوهـ})^{٢}$ ⇐ أصغر مساحة = مربع طول القطر.

---

(٥) ∵ Δ أ ب جـ متساوى الساقين ، $\overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ⇐ ب د = د جـ

∵ Δ Δ ن ب ك ، ر و جـ متطابقان ⇐ ب ك = جـ و

∴ ك د = د و



نفرض أن آبعاد المستطيل هى ك و = ٢ س ، ن ك = ص

فى Δ أ ب د ∵ ك $\overline{\text{ن}}$ // $\overline{\text{د أ}}$ ⇐ $\frac{\text{ب ك}}{\text{ب د}} = \frac{\text{ن ك}}{\text{أ د}}$

$\frac{٩ - \text{س}}{٩} = \frac{\text{ص}}{١٢}$ ⇐ $\text{ص} = ١٢ \times \frac{٩ - \text{س}}{٩}$ ⇐ $\text{ص} = \frac{٤}{٣}(٩ - \text{س})$

مساحة المستطيل م = ٢س ص بالتعويض عن ص

م = ٢س × $\frac{٤}{٣}(٩ - \text{س})$ ⇐ $\text{م} = ٢٤\text{ س} - \frac{٨}{٣}\text{ س}^{٢}$ ⇐ $\text{م}' = ٢٤ - \frac{١٦}{٣}\text{س}$

م َ = ٠ ⇐ $٢٤ - \frac{١٦}{٣}\text{س} = ٠$ ⇐ $\text{س} = \frac{٩}{٢}$

∴ م″ = $-\frac{16}{س^3}$ عدد سالب عظمى

∴ مساحة المستطيل أكبر ما يمكن عندما تكون أبعاده ٢س = ٢ × $\frac{9}{2}$ = ٩سم ، ص = $\frac{4}{3}$ (٩ − $\frac{9}{2}$) = ٦سم .

---

(٦) نفرض أن آبعاد متوازى المستطيلات هى ٢س ، س ، ص

∴ الحجم ح = ٥٧٦ ⟸ ٢ س^2 ص = ٥٧٦ ⟸ ص = $\frac{288}{س^2}$ ..... (١)

∴ المساحة السطحية م = ٦ س ص + ٤ س^2 بالتعويض من (١)

م = ٦ س × $\frac{288}{س^2}$ + ٤ س^2 ⟸ م = $\frac{6\times288}{س}$ + ٤ س^2 ⟸ م′ = $\frac{-6\times288}{س^2}$ + ٨ س

م′ = ٠ ⟸ $\frac{-6\times288}{س^2}$ + ٨ س = ٠ بالضرب × س^2

− ٦ × ٢٨٨ + ٨ س^3 = ٠ ⟸ س^3 = ٢١٦ ⟸ س = ٦

∴ م″ = $\frac{12\times288}{س^3}$ + ٨ عند س = ٦ م″ موجبة عظمى

∴ الآبعاد التى تجعل المساحة أصغر ما يمكن هى ٦ ، ١٢ ، ٨ سم .

التكامل:

(١) $\int$ (١+ظا^2 س) جتا^2 س ءس = $\int$ قا^2 س × جتا^2 س ءس = $\int$ ءس = س + ث

---

(٢) $\int \frac{ءس}{\sqrt{س}(1+\sqrt{س})^3} = 2\int (1+\sqrt{س})^{-3} \times \frac{1}{2\sqrt{س}} ءس = -(1+\sqrt{س})^{-2} + ث$

---

(٣) نفرض أن : ص = س − ١ ⟸ $\begin{cases} س = ص + 1 \\ ءس = ءص \end{cases}$

∴ ت = $\int (س^2 + 5)\sqrt{س-1}$ ءس ⟸ ت = $\int ((ص+1)^2 + 5)\sqrt{ص}$ ءص

∴ ت = $\int (ص^2 + 2ص + 6)\sqrt{ص}$ ءص ⟸ ت = $\int \left(ص^{\frac{5}{2}} + 2ص^{\frac{3}{2}} + 6ص^{\frac{1}{2}}\right)$ ءص

∴ ت = $\frac{2}{7}$ ص$^{\frac{7}{2}}$ + $\frac{4}{5}$ ص$^{\frac{5}{2}}$ + ٤ص$^{\frac{3}{2}}$ + ث ⟸ ت = $\frac{2}{7}$ (س − ١)$^{\frac{7}{2}}$ + $\frac{4}{5}$ (س − ١)$^{\frac{5}{2}}$ + ٤ (س − ١)$^{\frac{3}{2}}$ + ث

∴ ت = $\frac{2}{35}$ (س − ١)$^{\frac{3}{2}}$ [٥ (س − ١)^2 + ١٤ (س − ١) + ٧٠] + ث

∴ ت = $\frac{2}{35}\sqrt{(س-1)^3}$ [٥ (س − ١)^2 + ١٤ (س − ١) + ٧٠] + ث

∴ ت = $\frac{2}{35}\sqrt{(س-1)^3}$ [٥س^2 + ٤س + ٦١] + ث

حل آخر:

نفرض أن : ص = $\sqrt{س-1}$ ⟸ $\begin{cases} س = ص^2 + 1 \\ ءس = 2ص ءص \end{cases}$

∴ ت = $\int (س^2 + 5)\sqrt{س-1}$ ءس ⟸ ت = $\int \left((ص^2+1)^2 + 5\right)$ ص × ٢ص ءص

∴ ت = ∫ ٢ (ص^٤ + ٢ص^٢ + ٦) ص^٢ دص ⇐ ت = ∫ (٢ص^٦ + ٤ص^٤ + ١٢ص^٢) دص

∴ ت = $\frac{٢}{٧}$ ص^٧ + $\frac{٤}{٥}$ ص^٥ + ٤ص^٣ + ث ⇐ ت = $\frac{٢}{٧}$ (س − ١)^$\frac{٧}{٢}$ + $\frac{٤}{٥}$ (س − ١)^$\frac{٥}{٢}$ + ٤(س − ١)^$\frac{٣}{٢}$ + ث

∴ ت = $\frac{٢}{٣٥}$ (س − ١)^$\frac{٣}{٢}$ [٥(س − ١)^٢ + ١٤(س − ١) + ٧٠] + ث

∴ ت = $\frac{٢}{٣٥}$ √(س − ١)^٣ [٥(س − ١)^٢ + ١٤(س − ١) + ٧٠] + ث

∴ ت = $\frac{٢}{٣٥}$ √(س − ١)^٣ [٥س^٢ + ٤س + ٦١] + ث

---

(٤) ت = $-\frac{١}{٢}$ س هـ^−٢س + $\frac{١}{٢}$ ∫ هـ^−٢س دس

ت = $-\frac{١}{٢}$ س هـ^−٢س + $\frac{١}{٢}$ × $-\frac{١}{٢}$ هـ^−٢س + ث

ت = $-\frac{١}{٢}$ س هـ^−٢س − $\frac{١}{٤}$ هـ^−٢س + ث

ص = س ↓ تفاضل ↙ دص = دس ↓ تكامل ⟵ ∫ ع = $-\frac{١}{٢}$ هـ^−٢س ↓ دع = هـ^−٢س دس

---

(٥) ت = ٢س^$\frac{١}{٢}$ لـو_هـ س − ٢ ∫ س^$\frac{-١}{٢}$ دس

ت = ٢س^$\frac{١}{٢}$ لـو_هـ س − ٢ × ٢س^$\frac{١}{٢}$ + ث ⇐ ت = ٢ √س لـو_هـ س − ٤ √س + ث

ف = لـو_هـ س ↓ تفاضل ↙ دف = $\frac{دس}{س}$ ↓ تكامل ⟵ ∫ ع = ٢س^$\frac{١}{٢}$ ↓ دع = س^$\frac{-١}{٢}$ دس

حل آخر:

نفرض أن : ص = √س ⇐ $\begin{cases} س = ص^٢ \\ دس = ٢ص\,دص \end{cases}$

ت = ∫ $\frac{لـو_هـ س}{√س}$ دس ⇐ ت = ∫ $\frac{لـو_هـ ص^٢}{ص}$ × ٢ص دص

ت = ٤ ∫ لـو_هـ ص دص

ت = ٤ (ص لـو_هـ ص − ∫ دص)

ت = ٤ (ص لـو_هـ ص − ص) + ث ⇐ ت = ٤ √س لـو_هـ √س − ٤ √س + ث

ف = لـو_هـ ص ↓ تفاضل ↙ دف = $\frac{دص}{ص}$ ↓ تكامل ⟵ ∫ ع = ص ↓ دع = دص

---

(٦) ليكن ت = ∫ س جاس دس

∴ ت = س جتاس − ∫ جتاس دس ⇐ ت = س جتاس − جاس + ث

ص = س ↓ تفاضل ↙ دص = دس ↓ تكامل ⟵ ∫ ع = −طاس ↓ دع = قا^٢س دس

---

(٧) نفرض أن : ص = ٢س + ١ ⇐ $\begin{cases} س = \frac{١}{٢}(ص - ١) \\ دس = \frac{١}{٢} دص \end{cases}$

$ت = \int \frac{٤س}{\sqrt[٣]{(٢س+١)}}\ وس \Leftarrow ت = \int \frac{٤ \times \frac{١}{٣}(ص-١)}{\sqrt[٣]{ص}} \times \frac{١}{٣} وص$

$ت = \int (ص-١) \times ص^{\frac{-١}{٣}}\ وص \Leftarrow ت = \int (ص^{\frac{٢}{٣}} - ص^{\frac{-١}{٣}})\ وص$

$ت = \frac{٣}{٥} ص^{\frac{٥}{٣}} - \frac{٣}{٤} ص^{\frac{٢}{٣}} + ث \Leftarrow ت = \frac{٣}{٥}(٢س+١)^{\frac{٥}{٣}} - \frac{٣}{٤}(٢س+١)^{\frac{٢}{٣}} + ث$

---

(٨) $ت = \int هـ^{\sqrt{س}}\ وس$ نفرض أن $\boxed{هـ = \sqrt{س}} \Leftarrow وهـ = \frac{وس}{٢\sqrt{س}}$

$\therefore وهـ = \frac{وس}{٢هـ} \Leftarrow \boxed{وس = ٢هـ\ وهـ}$

$\therefore ت = \int هـ^{٣} \times ٢هـ\ وهـ \Leftarrow ت = \int ٢هـ^{٣} هـ^{٣}\ وهـ$

$\therefore ت = ٢هـ^{٣} هـ^{٣} - ٢\int هـ^{٣}\ وهـ = ٢هـ^{٣} هـ^{٣} - ٢هـ^{٣} + ث$

تفاضل: $\boxed{ص = ٢هـ}$ ← $\boxed{وص = ٢\ وهـ}$

تكامل: $\boxed{وع = هـ^{٣}\ وهـ}$ ← $\boxed{ع = هـ^{٣}}$

$-\int$

---

(٩) نفرض أن $ت = \int س^{-٢} لـو_{هـ} س\ وس$

$\therefore ت = (-س^{-١}) لـو_{هـ} س - \int (-س^{-١})(\frac{١}{س})\ وس$

$\therefore ت = \frac{-١}{س} لـو_{هـ} س + \int س^{-٢}\ وس \Leftarrow ت = \frac{-١}{س} لـو_{هـ} س - س^{-١} + ث$

---

(١٠) $ت = \int س (لـو_{هـ} س)^{٢}\ وس$

$\therefore ت = \frac{١}{٢} س^{٢} (لـو_{هـ} س)^{٢} - \int (\frac{١}{٢} س^{٢})(\frac{٢}{س} لـو_{هـ} س\ وس)$

$\therefore ت = \frac{١}{٢} س^{٢} (لـو_{هـ} س)^{٢} - \int س لـو_{هـ} س\ وس$

$\therefore ت = \frac{١}{٢} س^{٢} (لـو_{هـ} س)^{٢} - (\frac{١}{٢} س^{٢} لـو_{هـ} س - \int (\frac{١}{٢} س^{٢})(\frac{وس}{س}))$

$\therefore ت = \frac{١}{٢} س^{٢} (لـو_{هـ} س)^{٢} - \frac{١}{٢} س^{٢} لـو_{هـ} س + \int \frac{١}{٢} س\ وس$

$\therefore ت = \frac{١}{٢} س^{٢} (لـو_{هـ} س)^{٢} - \frac{١}{٢} س^{٢} لـو_{هـ} س + \frac{١}{٤} س^{٢} + ث$

تفاضل: $\boxed{ص = (لـو_{هـ} س)^{٢}}$ ← $\boxed{وص = \frac{٢}{س} لـو_{هـ} س\ وس}$

تكامل: $\boxed{وع = س\ وس}$ ← $\boxed{ع = \frac{١}{٢} س^{٢}}$

$-\int$

تفاضل: $\boxed{ص = لـو_{هـ} س}$ ← $\boxed{وص = \frac{وس}{س}}$

تكامل: $\boxed{وع = س\ وس}$ ← $\boxed{ع = \frac{١}{٢} س^{٢}}$

$-\int$

---

(١١) نفرض أن $ت = \int س^{٣} \sqrt{٤ - س^{٢}}\ وس$

$\therefore ت = \int (\frac{س^{٣}}{-٢س} \times -٢س \sqrt{٤ - س^{٢}})\ وس$

$\therefore ت = \int (\frac{-١}{٢} س^{٢} \times -٢س (٤ - س^{٢})^{\frac{١}{٢}})\ وس$

تفاضل: $\boxed{ص = \frac{-١}{٢} س^{٢}}$ ← $\boxed{وص = -س\ وس}$

تكامل: $\boxed{وع = -٢س(٤ - س^{٢})^{\frac{١}{٢}}\ وس}$ ← $\boxed{ع = \frac{٢}{٣}(٤ - س^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}$

$-\int$

$\therefore\ ت = -\frac{1}{2} س^{2} \times \frac{2}{3}(٤ - س^{2})^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(٤ - س^{2})^{\frac{3}{2}} (-س)\, ى س$

$\therefore\ ت = -\frac{1}{3} س^{2}(٤ - س^{2})^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\int س(٤ - س^{2})^{\frac{3}{2}}\, ى س$

$\therefore\ ت = -\frac{1}{3} س^{2}(٤ - س^{2})^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \times -\frac{1}{2}\int -٢س(٤ - س^{2})^{\frac{3}{2}}\, ى س$

$\therefore\ ت = -\frac{1}{3} س^{2}(٤ - س^{2})^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(٤ - س^{2})^{\frac{5}{2}} + ث$

$\therefore\ ت = -\frac{1}{3} س^{2}(٤ - س^{2})^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}(٤ - س^{2})^{\frac{5}{2}} + ث$

---

(١٢) $\int (٣ + جاس)^{٥} \, جتاس\, ى س = \frac{1}{6}(٣ + جاس)^{٦} + ث$

---

(١٣) $\int \frac{قا^{٢}(لـو_{هـ} س)}{س}\, ى س = \int \underbrace{\frac{1}{س}}_{\text{مشتقة الزاوية}} \times قا^{٢}(لـو_{هـ} س)\, ى س = ظا(لـو_{هـ} س) + ث$

---

(١٤) نفرض أن : $ص = ٣س + ١$ $\Leftarrow$ $\begin{cases} س = \frac{1}{3}(ص - ١) \\ ى س = \frac{1}{3} ى ص \end{cases}$

$\therefore ت = \int س^{٢} \sqrt{٣س + ١}\, ى س$ $\Leftarrow$ $ت = \int \frac{1}{9}(ص - ١)^{٢} \sqrt{ص} \times \frac{1}{3} ى ص$

$\therefore ت = \int \frac{1}{27}(ص^{٢} - ٢ص + ١) ص^{\frac{1}{2}}\, ى ص$ $\Leftarrow$ $ت = \int \frac{1}{27}(ص^{\frac{5}{2}} - ٢ص^{\frac{3}{2}} + ص^{\frac{1}{2}})\, ى ص$

$\therefore ت = \int \frac{1}{27}(ص^{\frac{7}{3}} - ٢ص^{\frac{4}{3}} + ص^{\frac{1}{3}})\, ى ص$ $\Leftarrow$ $ت = \int \frac{1}{27}(ص^{\frac{7}{3}} - ٢ص^{\frac{4}{3}} + ص^{\frac{1}{3}})\, ى ص$

$\therefore ت = \frac{1}{27}(\frac{3}{10} ص^{\frac{10}{3}} - \frac{6}{7} ص^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{4} ص^{\frac{4}{3}}) + ث$

$\therefore ت = \frac{1}{27}(\frac{3}{10}(٣س + ١)^{\frac{10}{3}} - \frac{6}{7}(٣س + ١)^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{4}(٣س + ١)^{\frac{4}{3}}) + ث$

---

(١٥) $ت = س\, لـو_{هـ}(س + ١) - \int \frac{س}{س + ١}\, ى س$

$ت = س\, لـو_{هـ}(س + ١) - \int \frac{(س + ١) - ١}{س + ١}\, ى س$

$ت = س\, لـو_{هـ}(س + ١) - \int [\frac{س + ١}{س + ١} - \frac{١}{س + ١}]\, ى س$

$ت = س\, لـو_{هـ}(س + ١) - \int [١ - \frac{١}{س + ١}]\, ى س$ $\Leftarrow$ $ت = س\, لـو_{هـ}(س + ١) - [س - لـو_{هـ}(س + ١)] + ث$

$ت = س\, لـو_{هـ}(س + ١) - س + لـو_{هـ}(س + ١) + ث$ $\Leftarrow$ $ت = (س + ١)\, لـو_{هـ}(س + ١) - س + ث$

$ص = لـو_{هـ}(س + ١)$ ↓ تفاضل — $ى ص = \frac{ى س}{س + ١}$ — $\xrightarrow{\text{تكامل}}$ — $ع = س$ ↓ تكامل — $ى ع = ى س$

حل آخر:

نفرض أن $ص = س + ١$ $\Leftarrow$ $\left\{\begin{array}{l} س = ص - ١ \\ ﺩس = ﺩص \end{array}\right.$

$\because ت = \int_{هـ} لـو(س+١)\, ﺩس$ $\Leftarrow$ $ت = \int_{هـ} لـو ص\, ﺩص$

$\therefore ت = ص لـو_{هـ} ص - \int ﺩص$ $\Leftarrow$ $ت = ص لـو_{هـ} ص - ص + ث$

$\therefore ت = (س+١) لـو_{هـ}(س+١) - (س+١) + ث$

تفاضل: $ق = لـو_{هـ} ص$ ، $ﺩق = \frac{ﺩص}{ص}$ — تكامل: $ع = ص$ — $\xrightarrow{-أ}$ — تفاضل: $ص = س+١$ ، $ﺩص = ﺩس$ — تكامل: $ع = ﺩص$

---

(١٦) ليكن $ت = \int س^{٣} لـو_{هـ} س\, ﺩس$

$\therefore ت = \left(لـو_{هـ} س\right)\left(\frac{١}{٤} س^{٤}\right) - \int \left(\frac{١}{٤} س^{٤}\right)\left(\frac{١}{س}\right) ﺩس$

$\therefore ت = \frac{١}{٤} س^{٤} لـو_{هـ} س - \int \frac{١}{٤} س^{٣}\, ﺩس$ $\Leftarrow$ $ت = \frac{١}{٤} س^{٤} لـو_{هـ} س - \frac{١}{١٦} س^{٤} + ث$

تفاضل: $ص = لـو_{هـ} س$ ، $ﺩص = \frac{١}{س}$ — تكامل: $ع = \frac{١}{٤} س^{٤}$ — $\xrightarrow{-أ}$ — تفاضل: $ص = س$ ، $ﺩص = ﺩس$ — تكامل: $ع = ظاس$

---

(١٧) $ت = \int س قا^{٢} س\, ﺩس$

$\therefore ت = س ظاس - \int ظاس\, ﺩس$ $\Leftarrow$ $ت = س ظاس - \int \frac{جاس}{جتاس}\, ﺩس$

$\therefore ت = س ظاس + \int \frac{-جاس}{جتاس}\, ﺩس$ $\Leftarrow$ $ت = س ظاس + لـو_{هـ}|جتاس| + ث$

تفاضل: $ص = س$ ، $ﺩص = ﺩس$ — تكامل: $ع = ظاس$ — $\xrightarrow{-أ}$ — تفاضل: $ص = ٣س + ٥$ ، $ﺩص = ٣ﺩس$ — تكامل: $ع = -\frac{١}{٢} هـ^{-٢س}$

---

(١٨) $ت = \int (٣س+٥) هـ^{-٢س}\, ﺩس$

$ت = -\frac{١}{٢}(٣س+٥) هـ^{-٢س} + \int \frac{٣}{٢} هـ^{-٢س}\, ﺩس$

$ت = -\frac{١}{٢}(٣س+٥) هـ^{-٢س} + \frac{٣}{٢} \times -\frac{١}{٢} هـ^{-٢س} + ث$

$ت = -\frac{١}{٢}(٣س+٥) هـ^{-٢س} - \frac{٣}{٤} هـ^{-٢س} + ث$

تفاضل: $ص = س هـ^{س}$ ، $ﺩص = س هـ^{س} + هـ^{س}$ — تكامل: $ع = -(س+١)^{-١}$ — $\xrightarrow{-أ}$ — تفاضل: $ص = ٣س + ٥$ ، $ﺩص = ٣ﺩس$ — تكامل: $ع = -\frac{١}{٢} هـ^{-٢س}$

---

(١٩) نفرض أن $ت = \int \frac{س هـ^{س}}{(س+١)^{٢}}\, ﺩس$ ...(١)

$\because \int ص\, ﺩع = ص ع - \int ع\, ﺩص$

$\therefore ت = -س هـ^{س} (س+١)^{-١} + \int هـ^{س} (س+١) \times \frac{١}{(س+١)}\, ﺩس$

$\therefore ت = -\frac{س هـ^{س}}{س+١} + \int هـ^{س}\, ﺩس = -\frac{س هـ^{س}}{س+١} + هـ^{س} + ث$

$\therefore ت = \frac{-س هـ^{س} + س هـ^{س} + هـ^{س}}{س+١} + ث = \frac{هـ^{س}}{س+١} + ث$

تفاضل: $ص = س$ ، $ﺩص = ﺩس$ — تكامل: $ع = قا^{٢} س$ — $\xrightarrow{-أ}$ — تفاضل: $ص = س$ ، $ﺩص = ﺩس$ — تكامل: $ع = ظاس$

(٢٠) د(س) = |س ٢ − ٤| دالة زوجية ⇐ ت = $\int_{-٣}^{٣}$ |س ٢ − ٤| ءس = ٢ $\int_{٠}^{٣}$ |س ٢ − ٤| ءس

∵ أصفار (س ٢ − ٤) هى ٢ ، −٢ ، ٢ ∈ [٠ ، ٣]

∴ ت = ٢ $\left[\int_{٠}^{٢}(٤ - س^{٢})\,ءس + \int_{٢}^{٣}(س^{٢} - ٤)\,ءس\right]$ = ٢(١٦/٣ + ٧/٣) = ٤٦/٣

(ثانياً)

(١) ∵ $\int_{٣}^{أ-١}$ د(س) ءس = $\int_{٣}^{٥}$ ٢د(٢س − ١) ءس

فى الطرف الأيسر : بوضع ص = ٢س − ١ ⇐ ءص = ٢ ءس

، عندما س = ٢ أو س = ٣ ⇐ ص = ٣ أو ص = ٥

∴ $\int_{٣}^{أ-١}$ د(س) ءس = $\int_{٣}^{٥}$ ٢د(ص) × ½ ءص ⇐ $\int_{٣}^{أ-١}$ د(س) ءس = $\int_{٣}^{٥}$ د(ص) ءص

∴ أ − ١ = ٥ ⇐ أ = ٦

---

(٢) ∵ ء ص/ء س = ٢س + ½ قا ٢ س/٢ ⇐ ص = $\int$ (٢س + ½ قا ٢ س/٢) ءس

∴ ص = س ٢ + ظا س/٢ + ث ، ∵ (π/٢ ، π ٢/٤ + ٩) ∈ للمنحنى

∴ π ٢/٤ + ٩ = π ٢/٤ + ظا π/٤ + ث ⇐ ث = ١٠ ⇐ ص = س ٢ + ظا س/٢ + ١٠

---

(٣) ء ص/ء س = − أ قتا ٢ س ⇐ ص = $\int$ (− أ قتا ٢ س) ءس

∴ ص = أ ظتا س + ث ، ∵ (π/٤ ، ٥) ، (π ٣/٤ ، ١) ∈ للمنحنى

∴ $\left\{\begin{array}{l} ٥ = أ\,ظتا\,\frac{\pi}{٤} + ث \\ ١ = أ\,ظتا\,\frac{\pi\,٣}{٤} + ث \end{array}\right.$ ⇐ $\left\{\begin{array}{l} ٥ = أ + ث \\ ١ = - أ + ث \end{array}\right.$ ⇐ ث = ٣ ، أ = ٢

∴ معادلة المنحنى ص = ٢ ظتا س + ٣

---

(٤) ∵ ميل العمودى م = − قتا س قا س ⇐ ء ص/ء س = جا س جتا س

∴ ص = $\int$ (جا س جتا س) ءس ⇐ ص = جا ٢ س + ث

∵ $\left(\frac{\pi}{٦} , ١\right) \in$ للمنحنى $\Leftarrow$ $١ = \left(\text{جا}\frac{\pi}{٦}\right)^{٢} + ث$

∴ $ث = \frac{٣}{٤}$ $\Leftarrow$ معادلة المنحنى هى $ص = \text{جا}^{٢} س + \frac{٣}{٤}$

---

(٥) ∵ $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{٣}{ص + \sqrt{ص}}$ $\Leftarrow$ $(ص + \sqrt{ص})\ ء ص = ٣\ ء س$ بتكامل الطرفين

$\int (ص + \sqrt{ص})\ ء ص = \int ٣\ ء س$ $\Leftarrow$ $\int (ص + ص^{\frac{١}{٢}})\ ء ص = \int ٣\ ء س$

$\frac{١}{٢} ص^{٢} + \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} = ٣ س + ث$ ∵ $(\frac{١}{١٨} ، ١) \in$ للمنحنى

$\frac{١}{٢} \times ١^{٢} + \frac{٢}{٣} \times (١)^{\frac{٣}{٢}} = ٣ \times \frac{١}{١٨} + ث$ $\Leftarrow$ $ث = ١$

$\frac{١}{٢} ص^{٢} + \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} = ٣ س + ١$ بالضرب× ٦ $\Leftarrow$ $\boxed{٣ ص^{٢} + ٤ \sqrt{ص^{٣}} = ١٨ س + ٦}$

---

(٦) ∵ المنحنى له قيمة عظمى محلية عند النقطة (٢ ، ٧) $\Leftarrow$ $\left.\begin{array}{l} ص = ٧ \\ \frac{ء ص}{ء س} = ٠ \end{array}\right\}$ عندما $س = ٢$

∵ $ص' = \int \left(\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}\right) ء س$ $\Leftarrow$ $ص' = \int (٢ - ٦ س)\ ء س$

$ص' = ٢ س - ٣ س^{٢} + ث_{١}$ ، ∵ $ص' = ٠$ عندما $س = ٢$

$٠ = ٢ \times ٢ - ٣ \times ٢^{٢} + ث_{١}$ $\Leftarrow$ $ث_{١} = ٨$ $\Leftarrow$ $ص' = ٢ س - ٣ س^{٢} + ٨$

∵ $ص = \int ص'\ ء س$ $\Leftarrow$ $ص = \int (٢ س - ٣ س^{٢} + ٨)\ ء س$

$ص = س^{٢} - س^{٣} + ٨ س + ث_{٢}$ ، ∵ $ص = ٧$ عندما $س = ٢$

$٧ = ٢^{٢} - ٢^{٣} + ٨ \times ٢ + ث_{٢}$ $\Leftarrow$ $ث_{٢} = -٥$

∴ $\boxed{ص = س^{٢} - س^{٣} + ٨ س - ٥}$

---

(٧) ∵ $ص \frac{ء ص}{ء س} + ٢ س = ٣$ $\Leftarrow$ $ص \frac{ء ص}{ء س} = ٣ - ٢ س$

$ص\ ء ص = (٣ - ٢ س)\ ء س$ $\Leftarrow$ $\int ص\ ء ص = \int (٣ - ٢ س)\ ء س$

$\frac{١}{٢} ص^{٢} = ٣ س - س^{٢} + ث$ ∵ $(١ ، ٢) \in$ للمنحنى

$\frac{١}{٢} \times ٢^{٢} = ٣ \times ١ - ١^{٢} + ث$ $\Leftarrow$ $ث = ٠$

∴ $\frac{١}{٢} ص^{٢} = ٣ س - س^{٢}$ بالضرب × ٢ $\Leftarrow$ $\boxed{ص^{٢} = ٦ س - ٢ س^{٢}}$

---

(٨) ليكن ميل المماس هو م ، ∵ معدل تغير ميل المماس هو $٦ س - ٣$ ∴ $\frac{ء م}{ء س} = ٦ س - ٣$

∴ $م = \int (٦ س - ٣)\ ء س$ $\Leftarrow$ $م = ٣ س^{٢} - ٣ س + ث$

∵ المماس أفقى عند $س = ١$ $\Leftarrow$ $م = ٠$ عندما $س = ١$

$٠ = ٣ \times ١^{٢} - ٣ \times ١ + ث_{١}$ $\Leftarrow$ $ث_{١} = ٠$ $\Leftarrow$ $م = ٣ س^{٢} - ٣ س$

∴ $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٣ س^{٢} − ٣ س ⟸ ص = ∫ (٣ س^{٢} − ٣ س) ع س

ص = س^{٣} − $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} + ث م ، ∵ (٢ ، ٢) ∈ للمنحنى ⟸ ٢ = ٨ − ٦ + ث م

∴ ث م = ٠ ⟸ $\boxed{ص = س^{٣} - \frac{٣}{٢} س^{٢}}$

---

(٩) ∵ $\frac{ع ص}{ع س}$ = ٣ س^{٢} − ١٨ س + ٢٤ نعين مواقع القيم العظمى ، الصغرى المحلية

٣ س^{٢} − ١٨ س + ٢٤ = ٠ ⟸ س^{٢} − ٦ س + ٨ = ٠ ⟸ (س − ٢)(س − ٤) = ٠

س = ٢ أ، س = ٤ ∵ ص$'$ = ٦ س − ١٨

$\left[ص' \right]_{س = ٢}$ = − ٦ عدد سالب ⟸ س = ٢ موقع العظمى المحلية

$\left[ص' \right]_{س = ٤}$ = ٦ عدد موجب ⟸ س = ٤ موقع الصغرى المحلية .

∴ ص = ٢٦ عندما س = ٤

∵ ص = ∫ (٣ س^{٢} − ١٨ س + ٢٤) ع س ⟸ ص = س^{٣} − ٩ س^{٢} + ٢٤ س + ث

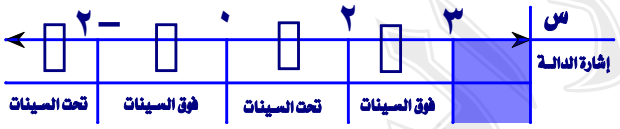
٢٦ = ٤^{٣} − ٩ × ٤^{٢} + ٢٤ × ٤ + ث ⟸ ث = ١٠

ص = س^{٣} − ٩ س^{٢} + ٢٤ س + ١٠

القيمة العظمى المحلية = (٢)^{٣} − ٩ × (٢)^{٢} + ٢٤ × ٢ + ١٠ = ٣٠

---

(١٠) ∵ د(س) = س^{٣}



∴ أصفار الدالة س^{٣} = ٠ ⟸ س = ٠

ندرس إشارة الدالة فى الفترة [−٢ , ٢]

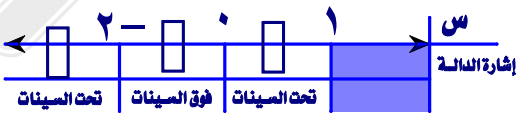
∴ المساحة م = $\int_{-٢}^{٢}$ | د(س)| ع س ⟸ م = $\int_{-٢}^{٠}$ (− س^{٣}) ع س + $\int_{٠}^{٢}$ (س^{٣}) ع س

∴ م = $\left[\frac{-س^{٤}}{٤} \right]_{-٢}^{٠}$ + $\left[\frac{س^{٤}}{٤} \right]_{٠}^{٢}$ ⟸ م = ٤ + ٤ = ٨ وحدة طول مربعة

---

(١١) نوجد التقاطع مع محور السينات : س^{٣} − ٤ س = ٠ ⟸ $\boxed{س = ٠}$ ، $\boxed{\cancel{س = ٢}}$ ∉ للمجال ، $\boxed{س = -٢}$

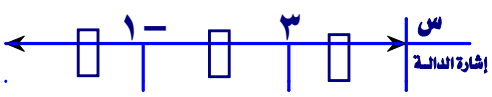
ندرس إشارة الدالة : كما فى الشكل المجاور



∴ المساحة المطلوبة م = $\int_{-٢}^{٠}$ د(س) ع س = $\int_{-٢}^{٠}$ (س^{٣} − ٤ س) ع س = ٤ وحدة طول مربعة

---

(١٢) ص = ٠ يعنى محور السينات ، نوجد التقاطع مع محور السينات : $٣ + ٢س - س^{٢} = ٠ \Leftarrow$ س = ٣ ، س = -١



∴ المساحة = $\int_{-١}^{٤} |٣ + ٢س - س^{٢}| \, ds$

∴ المساحة = $\int_{-١}^{٣} (٣ + ٢س - س^{٢}) \, ds + \int_{٣}^{٤} (-٣ - ٢س + س^{٢}) \, ds = \frac{٣٢}{٣} + \frac{٧}{٣} = ١٣$ وحدة طول مربعة

---

(١٣) نوجد نقط تقاطع المنحنيين: $س^{٣} - ٣س^{٢} + ٥ = س + ٢$

∴ $س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣ = ٠ \Leftarrow س^{٢}(س - ٣) - (س - ٣) = ٠$

∴ $(س - ٣)(س^{٢} - ١) = ٠ \Leftarrow (س - ٣)(س + ١)(س - ١) = ٠$

∴ س = ٣ ، س = ١ ، س = -١

∴ المساحة م = $\int_{-١}^{١} [د(س) - ر(س)] \, ds + \int_{١}^{٣} [ر(س) - د(س)] \, ds$

د(٠) ≺ ر(٠)
ر(٢) ≺ د(٢)

∴ المساحة م = $\int_{-١}^{١} (س^{٣} - ٣س^{٢} + ٥ - س - ٢) \, ds + \int_{١}^{٣} (س + ٢ - س^{٣} + ٣س^{٢} - ٥) \, ds$

∴ المساحة م = $\int_{-١}^{١} (س^{٣} - ٣س^{٢} - س + ٣) \, ds + \int_{١}^{٣} (س - س^{٣} + ٣س^{٢} - ٣) \, ds = ٨$ وحدة طول مربعة

---

(١٤) تكلفة الممر الواحد = مساحة الممر × تكلفة التر الواحد من الجرانيت

مساحة الممر = مساحة المنطقة المحدودة بمنحنى الدالة ، المستقيمان س = ٠ ، ص = ٠

نوجد تقاطع الدالة مع محور السينات : $١٢ - \frac{١}{٣}س^{٢} = ٠ \Leftarrow$ س = ٦ ، ~~س = -٦~~

مساحة الممر = $\int_{٠}^{٦} (١٢ - \frac{١}{٣}س^{٢}) \, ds = \left[١٢س - \frac{١}{٩}س^{٣} \right]_{٠}^{٦} = ٤٨$

تكلفة الممرات الخمس = ٥ × ٤٨ × ٤٠٠ = ٩٦٠٠٠ جنيه

---

(١٥) ليكن $ص_{١} = \sqrt{س}$ ، $ص_{٢} = س^{٢}$

نوجد الإحداثى السينى لنقط تقاطع المنحنيين : $\sqrt{س} = س^{٢} \Leftarrow س = س^{٤}$

∴ $س - س^{٤} = ٠ \Leftarrow س(١ - س^{٣}) = ٠ \Leftarrow$ س = ٠ ، س = ١

∴ الحجم = $\pi \int_{0}^{1} \left[ص_{1}^{2} - ص_{2}^{2} \right] ى س$ ⇐ الحجم = $\pi \int_{0}^{1} (س - س^{4}) ى س$

∴ الحجم = $\pi \left[\frac{1}{2} س^{2} - \frac{1}{5} س^{5} \right]_{0}^{1} = \frac{3}{10} \pi$ وحدة طول مكعبة.

---

(١٦) نوجد الإحداثى الصادى لنقط تقاطع المنحنيين : $2 س + 4 - س^{2} = 4$ ⇐ $س = 0$ ، $س = 2$

بالتعويض فى أى من المعادلتين : $\boxed{ص = 4}$ ، $\boxed{ص = 0}$ " حدود التكامل"

لتكن $ص = 4 - س_{1}^{2}$ ، $2 س_{2} + ص = 4$ ⇐ $س_{1}^{2} = 4 - ص$ ، $س_{2}^{2} = 4 - 2 ص + \frac{1}{4} ص^{2}$

∴ الحجم = $\pi \int_{0}^{4} \left[س_{1}^{2} - س_{2}^{2} \right] ى ص$ ⇐ الحجم = $\pi \int_{0}^{4} (4 - ص - 4 + 2 ص - \frac{1}{4} ص^{2}) ى ص$

∴ الحجم = $\pi \int_{0}^{4} (ص - \frac{1}{4} ص^{2}) ى ص = \pi \left[\frac{1}{4} ص^{2} - \frac{1}{12} ص^{3} \right]_{0}^{4} = \frac{8}{3} \pi$ وحدة طول مكعبة.

---

(١٧) نوجد الإحداثى السينى لنقط تقاطع المنحنى مع محور السينات بوضع $ص = 0$: $\boxed{س = أ}$ ، $\boxed{س = -أ}$ " حدود التكامل"

∴ $\frac{س^{2}}{أ^{2}} + \frac{ص^{2}}{ب^{2}} = 1$ ⇐ $ص^{2} = ب^{2} \left(1 - \frac{س^{2}}{أ^{2}} \right)$

∴ الحجم = $\pi \int_{-أ}^{أ} ص^{2} ى س$ ⇐ الحجم = $\pi \int_{-أ}^{أ} ب^{2} \left(1 - \frac{س^{2}}{أ^{2}} \right) ى س$

∴ الحجم = $2 \pi ب^{2} \int_{0}^{أ} \left(1 - \frac{1}{أ^{2}} س^{2} \right) ى س$ ⇐ الحجم = $2 \pi ب^{2} \left[س - \frac{1}{3 أ^{2}} س^{3} \right]_{0}^{أ}$

∴ الحجم = $2 \pi ب^{2} (أ - \frac{1}{3 أ^{2}} \times أ^{3})$ ⇐ الحجم = $2 \pi ب^{2} (أ - \frac{1}{3} أ) = \frac{4}{3} \pi أ ب^{2}$