حل أسئلة مكتب المستشار
إهداء من أ/ محمد عبد العظيم

اختر الإجابة الصحيحة :

اشتقاق :

(١) إذا كانت ص = قتا (π − ٢س) فإن $\frac{دص}{دس}$ = ...

(أ) ٢ قتا (٢س) ظتا (٢س) (ب) ٤ قتا (π − ٢س) ظتا (٢س)

(ج) ٢ قتا (π − ٢س) ظتا (π − ٢س) (د) −٢ قتا (π − ٢س) ظتا (π − ٢س)

ص = قتا (π − ٢س)

∴ $\frac{دص}{دس}$ = − قتا (π − ٢س) ظتا (π − ٢س) × (−٢)

= ٢ قتا (π − ٢س) ظتا (π − ٢س)

---

(٢) إذا كانت ص = (قتاس + ظتاس)$^{-1}$ فإن $\frac{دص}{دس}$ = ...

(أ) $\frac{-قتاس}{(قتاس + ظتاس)^2}$ (ب) $\frac{-قتاس}{قتاس + ظتاس}$ (ج) $\frac{قتاس}{قتاس + ظتاس}$ (د) $\frac{قتاس}{(قتاس + ظتاس)^2}$

ص = (قتاس + ظتاس)$^{-1}$

∴ $\frac{دص}{دس}$ = − (قتاس + ظتاس)$^{-2}$ × (− قتاس ظتاس − قتا^{2}س)

= − (قتاس + ظتاس)$^{-2}$ × − قتاس (ظتاس + قتاس)

= قتاس (قتاس + ظتاس)$^{-1}$

= $\frac{قتاس}{قتاس + ظتاس}$

---

(٣) إذا كان ص = ٤قا^{2}س فإن ص$'_{(\frac{\pi}{4})}$ = ...

(أ) −٨ (ب) صفر (ج) $4\sqrt{2}$ (د) ١٦

ص = ٤ (قاس)^2

ص' = ٤ × ٢ (قاس)^1 × قاس ظاس

= ٨ قا^{2}س ظاس

(ص')$_{(س = \frac{\pi}{4})}$ = ٨ (قا ٤٥)^2 ظا ٤٥

= ٨ × ٢ × ١ = ١٦

---

(٤) إذا كان د(س) = ظاس فإن د''$(\frac{\pi}{4})$ = ...

(أ) [illegible] (ب) [illegible] (ج) ٤ (د) [illegible]

د(س) = ظتاس

د'(س) = − قتا²س = − (قتاس)²

د''(س) = −٢ (قتاس)¹ × −قتاس ظتاس

= ٢ قتا²س ظتاس

د''($\frac{\pi}{4}$) = ٢ قتا² ٤٥ ظتا ٤٥

= ٢ × ٢ × ١ = ٤

---

(٥) إذا كانت ص = جتاس فإن $\frac{د^{٢٠١٨} ص}{د س^{٢٠١٨}}$ = ...

Ⓐ جاس　　Ⓑ −جتاس　　Ⓒ جتاس　　Ⓓ −جاس

∵ ص = جتاس

∴ ص' = − جاس

ص'' = − جتاس

ص''' = جاس

ص'''' = جتاس ⟵ ∴ $\boxed{ص^{(٤ن)} = ص = جتاس}$

∴ ص$^{(٢٠١٦)}$ = جتاس

ص$^{(٢٠١٧)}$ = − جاس

ص$^{(٢٠١٨)}$ = − جتاس

---

(٦) إذا كانت د(س) = لو$_{هـ}$(٢ + $\sqrt{2}$ قتاس) حيث ٠ < س < $\frac{\pi}{2}$ فإن د'($\frac{\pi}{4}$) = ...

Ⓐ $\frac{-1}{2}$　　Ⓑ $\frac{1}{2}$　　Ⓒ $\frac{1}{4}$　　Ⓓ ١

---

(٦) د(س) = لو$_{هـ}$ (٢ + $\sqrt{2}$ قتاس)

∴ د'(س) = $\frac{1}{٢ + \sqrt{2} \text{ قتاس}}$ × −$\sqrt{2}$ قتاس ظتاس

= $\frac{-\sqrt{2} \text{ قتاس ظتاس}}{٢ + \sqrt{2} \text{ قتاس}}$ ⟵

∴ د'($\frac{\pi}{4}$) = $\frac{-\sqrt{2} \text{ قتا } ٤٥ \text{ ظتا } ٤٥}{٢ + \sqrt{2} \text{ قتا } ٤٥}$ = $\frac{-\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 1}{٢ + \sqrt{2} \times \sqrt{2}}$ = $\frac{-1}{2}$

---

(٧) إذا كانت ص = هـ^{س} جتاس² فإن $\frac{دص}{دس}$ = ...

Ⓐ − هـ^{س} جاس²　　Ⓑ هـ^{س} (جتاس² − ٢س جاس²)

Ⓒ هـ^{س} جتاس² − ٢س جاس²　　Ⓓ − ٢س هـ^{س} جاس

∴ $\frac{دص}{دس}$ = هـ^{س} × (− جاس² × ٢س) + جتاس² × هـ^{س} = هـ^{س} (جتاس² − ٢س جاس²)

٢

(٨) إذا كانت س = ن³ − ن ، ص = $\sqrt{٣ن+١}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ... عندما ن = ١

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $\frac{٣}{٨}$ (ج) $\frac{٣}{٤}$ (د) ٨

∵ س = ن³ − ن ، ص = $\sqrt{٣ن+١}$

∴ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = ٣ن² − ١ ، ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{٣}{٢\sqrt{٣ن+١}}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}}$

$= \frac{٣}{٢\sqrt{٣ن+١}} \times \frac{١}{٣ن^{٢}-١}$

وعند ن = ١ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٣}{٢\times٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٨}$

---

(٩) إذا كانت هـ$^{\text{د(س)}}$ = س² + ١ فإن د'(س) = ...

(أ) $\frac{١}{\text{س}^{٢}+١}$ (ب) $\frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}$ (ج) ٢س(س² + ١) (د) ٢هـ$^{\text{س}^{٢}+١}$

∵ هـ$^{\text{د(س)}}$ = س² + ١ بأخذ لوهـ للطرفين

∴ د(س) = لوهـ (س² + ١)

∴ د'(س) = $\frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}$

أ/ محمد عبد العظيم

---

(١٠) إذا كانت ص = ١٠$^{(\text{س}^{٢}-١)}$ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ...

(أ) ١٠$^{\text{س}^{٢}-١}$ × لوهـ ١٠ (ب) ٢س × ١٠$^{\text{س}^{٢}-١}$ (ج) ٢س × ١٠$^{\text{س}^{٢}-١}$ (د) ٢س(لوهـ ١٠) × ١٠$^{\text{س}^{٢}-١}$

ص = (١٠)$^{\text{س}^{٢}-١}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = (١٠)$^{\text{س}^{٢}-١}$ × ٢س × لوهـ ١٠

= ٢س (لوهـ ١٠) × ١٠$^{\text{س}^{٢}-١}$

---

(١١) إذا كانت د(س) = س جاس فإن د''(س) + د(س) = ...

(أ) ٢جاس (ب) صفر (ج) − جاس (د) ٢س جاس

د(س) = س جاس

د'(س) = س × جتاس + جاس × ١

د''(س) = س × (− جاس) + جتاس × ١ + جتاس

$= -$ س جاس $+ ٢$ جتاس $\leftarrow$

$\therefore$ ص′′(س) + ص(س) = $-$ $\cancel{\text{س جاس}}$ + ٢ جتاس + $\cancel{\text{س جاس}}$

$= ٢$ جتاس $\longleftarrow$

(١٢) إذا كانت س = ٥ + قا² ٣θ ، ص = ١ − ظا ٣θ فإن $\frac{دص}{دس}$ = ... عندما θ = $\frac{\pi}{٤}$.

(أ) ٢ (ب) −٢ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $-\frac{١}{٢}$

∵ س = ٥ + (قا ٣θ)²

∴ $\frac{دس}{دθ}$ = ٢ (قا ٣θ) × ٣ قا ٣θ ظا ٣θ

= ٦ (قا ٣θ)² ظا ٣θ

، ص = ١ − ظا ٣θ

$\frac{دص}{دθ}$ = − ٣ قا² ٣θ

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دθ} \times \frac{دθ}{دس}$

= − ٣ قا² ٣θ × $\frac{١}{\text{٦ قا² ٣θ ظا ٣θ}}$

= $\frac{-١}{\text{٢ ظا ٣θ}}$

وضع θ = $\frac{\pi}{٤}$ ∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{\text{٢ ظا ١٣٥°}} = \frac{١}{٢}$

مع أجمل وأرق أمنياتي
أ/ محمد عبد العظيم
٠١٠٦٠٩٠٦٦٠٦

(١٣) إذا كانت س = ٥ + قا² ٣θ ، ص = ١ − ظا ٣θ فإن العلاقة الضمنية بين س ، ص هي ....

(أ) س² = ص + ٥ (ب) س² + ص² = ٥ (ج) س² + ص² = ٩ (د) س − ٦ = (١ − ص)²

∵ س = ٥ + قا² ٣θ ، ص = ١ − ظا ٣θ

∴ قا² ٣θ = س − ٥ ∴ ظا ٣θ = (١ − ص)

∵ ١ + ظا² ٣θ = قا² ٣θ

∴ ١ + (١ − ص)² = س − ٥

∴ س − ٦ = (١ − ص)² ⟸

(١٤) إذا كانت (س + ص)^٨ = ٧ فإن $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = ...

(أ) ١ (ب) صفر (ج) ٥٦(س + ص)^٧ (د) −١

∴ س + ص = ± $\sqrt[٨]{٧}$

ص = ± $\sqrt[٨]{٧}$ − س ∴ $\frac{دص}{دس}$ = −١ ، $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ = صفر (ب)

(١٥) إذا كانت $\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = ٢\text{س} - ٣$ ، $\frac{d\text{ع}}{d\text{س}} = \text{س}^{٢} - ١$ فإن $\frac{d^{٢}\text{ص}}{d\text{ع}^{٢}} =$ .... عندما س = ٢.

(أ) $\frac{٢}{٢٧}$ (ب) $\frac{٢}{٩}$ (ج) صفر (د) $\frac{-٢}{٩}$

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{ع}} = \frac{d\text{ص}}{d\text{س}} \times \frac{d\text{س}}{d\text{ع}}$$

$$= \frac{٢\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - ١}$$ بالاشتقاق بالنسبة إلى ع

$$\therefore \frac{d^{٢}\text{ص}}{d\text{ع}^{٢}} = \frac{(\text{س}^{٢} - ١) \times ٢\frac{d\text{س}}{d\text{ع}} - (٢\text{س} - ٣) \times ٢\text{س}\frac{d\text{س}}{d\text{ع}}}{(\text{س}^{٢} - ١)^{٢}}$$

$$= \frac{٢\text{س}^{٢} - ٢ - ٤\text{س}^{٢} + ٦\text{س}}{(\text{س}^{٢} - ١)^{٢}} \times \frac{d\text{س}}{d\text{ع}}$$

$$= \frac{-٢\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٢}{(\text{س}^{٢} - ١)^{٣}}$$

وعندما س = ٢ $\therefore \frac{d^{٢}\text{ص}}{d\text{ع}^{٢}} = \frac{-٨ + ١٢ - ٢}{(٤ - ١)^{٣}} = \frac{٢}{٢٧}$

---

(١٦) إذا كانت ص = لوهـ (س + ٢) فإن $\frac{d^{٢٠١٨}\text{ص}}{d\text{س}^{٢٠١٨}} =$ ....

(أ) $\frac{\underline{|٢٠١٧}}{(\text{س} + ٢)^{٢٠١٨}}$ (ب) $\frac{-\underline{|٢٠١٧}}{(\text{س} + ٢)^{٢٠١٨}}$ (ج) $\frac{\underline{|٢٠١٨}}{(\text{س} + ٢)^{٢٠١٨}}$ (د) $\frac{-\underline{|٢٠١٨}}{(\text{س} + ٢)^{٢٠١٧}}$

$$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} + ٢)$$

$$\text{ص}' = \frac{١}{\text{س} + ٢} = (\text{س} + ٢)^{-١}$$

$$\text{ص}'' = -١ (\text{س} + ٢)^{-٢}$$

$$\text{ص}''' = ١ \times ٢ (\text{س} + ٢)^{-٣}$$

$$\text{ص}'''' = -١ \times ٢ \times ٣ (\text{س} + ٢)^{-٤}$$

بالنمط

$$(\text{ص})^{(\text{ن})} = \frac{(-١)^{\text{ن} - ١} \underline{|\text{ن} - ١}}{(\text{س} + ٢)^{\text{ن}}} \longleftarrow$$

$$\therefore (\text{ص})^{(٢٠١٨)} = \frac{(-١)^{٢٠١٧} \underline{|٢٠١٧}}{(\text{س} + ٢)^{٢٠١٨}} = \frac{-\underline{|٢٠١٧}}{(\text{س} + ٢)^{٢٠١٨}}$$

م/ محمد عبد العظيم

(١٧) إذا كانت د(س) = لـو$_{هـ}$ (جاس) − لـو$_{هـ}$ (جتاس) فإن $\underset{س \to \frac{\pi}{4}}{نهـا} \frac{د(س) - د(\frac{\pi}{4})}{س - \frac{\pi}{4}}$ = ...

أ) ١ ب) ٢ ج) صفر د) −٢

د(س) = لو$_{هـ}$ (جتاس) − لو$_{هـ}$ (جتاس)

$=$ لو$_{هـ}$ $\frac{جاس}{جتاس}$ = لو$_{هـ}$(ظاس) ⟵

$\underset{س \to \frac{\pi}{4}}{نهـا} \frac{د(س) - د(\frac{\pi}{4})}{س - \frac{\pi}{4}} = \left[د'(س) \right]_{س = \frac{\pi}{4}}$

$= \left[\frac{قا^2 س}{ظا س} \right]_{س = \frac{\pi}{4}}$

$= \frac{قا^2 45^\circ}{ظا 45^\circ} = \frac{2}{1} = 2$

---

(١٨) إذا كانت س جا٢ص = ص جتا٢س فإن $\frac{دص}{دس}$ = ... عند النقطة $(\frac{\pi}{4} ، \frac{\pi}{2})$.

أ) صفر ب) ١ ج) ٢ د) ٣

∵ س جا٢ص = ص جتا٢س بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ س × (٢ جتا٢ص $\frac{دص}{دس}$) + جا٢ص × ١ = ص × (−٢ جا٢س) + جتا٢س $\frac{دص}{دس}$

∴ ٢س جتا٢ص $\frac{دص}{دس}$ + جا٢ص = −٢ص جا٢س + جتا٢س $\frac{دص}{دس}$

عند النقطة $(\frac{\pi}{4} ، \frac{\pi}{2})$ ∴ س = $\frac{\pi}{4}$ ، ص = $\frac{\pi}{2}$

∴ (٢ × $\frac{\pi}{4}$ جتا π) $\frac{دص}{دس}$ + جا π = −٢ × $\frac{\pi}{2}$ جا $\frac{\pi}{2}$ + (جتا $\frac{\pi}{2}$) $\frac{دص}{دس}$

$-\frac{\pi}{2} \frac{دص}{دس} + ٠ = -\pi + ٠$

∴ $\frac{دص}{دس} = -\pi \times \frac{2}{-\pi}$

$\frac{دص}{دس} = 2$

أ/ محمد عبد العظيم

(١٩) إذا كانت د(س) = س٢ ، ل(٢) = ٣ ، لَ(٢) = -٢ ، لً(٢) = ٥ فإن (د∘ل)ً(٢) = ...

Ⓐ ٣٨　Ⓑ -٣٨　Ⓒ ١٠　Ⓓ ٣

← نعلم أن (د∘ل)(س) = د[ل(س)] من الصيغة الثانية

بوضع س = ل(س) في العلاقة المعطاة

∴ د(ل(س)) = [ل(س)]٢

∴ (د∘ل)(س) = [ل(س)]٢ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ (د∘ل)َ(س) = ٢[ل(س)]١ × لَ(س) بالاشتقاق مرة أخرى

∴ (د∘ل)ً(س) = ٢[ل(س) × لً(س) + لَ(س) × لَ(س)]

وبالتعويض عن س = ٢

∴ (د∘ل)ً(٢) = ٢[ل(٢) × لً(٢) + لَ(٢) × لَ(٢)]

= ٢[٣ × ٥ + (-٢) × (-٢)]

= ٢ × ١٩ = ٣٨

---

(٢٠) إذا كانت ص = د(س) دالة فردية وكانت دَ(ل) = م فإن دَ(-ل) = ...

Ⓐ م　Ⓑ -م　Ⓒ صفر　Ⓓ غير معرفة

∵ د(س) دالة فردية

∴ دَ(س) لابد أن تكون دالة زوجية

بمعنى أن دَ(س) = دَ(-س)

∴ دَ(ل) = دَ(-ل) = م معطى

∴ دَ(-ل) = م

مع أجمل الأماني وأرق

إخصائي أ/ محمد عبد العليم

النهايات :

(1) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{\frac{1}{2س}} = ...$

(أ) 1 (ب) 2 (ج) هـ (د) هـ^{2}

$\lim\limits_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{\frac{1}{2س}}$

$= (1 + صفر)^{صفر} = 1^{صفر} = 1$ بالتعويض المباشر

---

(2) $\lim\limits_{س \to 0} (1 + س)^{\frac{1}{2س}} = ...$

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) هـ^{2} (ج) $\sqrt{هـ}$ (د) $\frac{هـ}{2}$

$\lim\limits_{س \to 0} (1 + س)^{\frac{1}{2س}}$

$= \lim\limits_{س \to 0} \left[(1 + س)^{\frac{1}{س}}\right]^{\frac{1}{2}} =$ هـ$^{\frac{1}{2}} = \sqrt{هـ}$

---

(3) $\lim\limits_{س \to 0} \frac{2^{س} - 1}{2س} = ...$

(أ) 2 لو$_{هـ}$ 2 (ب) $\frac{1}{2}$ لو$_{هـ}$ 2 (ج) $\frac{1}{2}$ لو$_{2}$ هـ (د) 2 لو$_{هـ}$ 3

$\lim\limits_{س \to 0} \frac{2^{س} - 1}{2س}$

أ/ محمد [illegible]

$= \frac{1}{2} \lim\limits_{س \to 0} \frac{2^{س} - 1}{س} = \frac{1}{2}$ لو$_{هـ}$ 2

---

(4) $\lim\limits_{س \to 1} \frac{لو_{هـ} س}{س - 1} = ...$

(أ) $\frac{1}{لو_{هـ}}$ (ب) 1 (ج) هـ (د) لو$_{هـ}$

$\lim\limits_{س \to 1} \frac{لو_{هـ} س}{س - 1}$ بوضع $س - 1 = ص$

$\therefore س = 1 + ص$

$= \lim\limits_{ص \to 0} \frac{لو_{هـ} (1 + ص)}{ص} =$ لو$_{هـ}$ هـ

(٥) $\underset{س\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{لو}_{هـ}(1+2س)}{2^{س}-1} = \ldots\ldots$

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\text{لو}_{هـ} 2$ (ج) $\frac{3}{2}$ (د) $2\,\text{لو}_{2} هـ$

$\underset{س\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{لو}_{هـ}(1+2س)}{2^{س}-1}$ بالقسمة على س بسطاً ومقاماً

$= \underset{س\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\dfrac{\text{لو}_{هـ}(1+2س)}{2س}\times 2}{\dfrac{2^{س}-1}{س}} = \dfrac{2\times 1}{\text{لو}_{هـ} 2} = 2\,\text{لو}_{2} هـ$

$= \text{لو}_{2} هـ^{2}$

---

(٦) $\underset{س\to هـ}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{لو}_{هـ} س - 1}{س - هـ} = \ldots\ldots$

(أ) 1 (ب) $هـ$ (ج) $\frac{1}{هـ}$ (د) $-هـ$

$\underset{س\to هـ}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{لو}_{هـ} س - \text{لو}_{هـ} هـ}{س - هـ}$

$= \underset{\frac{س}{هـ}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{لو}_{هـ}\frac{س}{هـ}}{هـ(\frac{س}{هـ}-1)}$ | بوضع $\frac{س}{هـ} - 1 = ص$ ∴ $\frac{س}{هـ} = 1 + ص$

$= \frac{1}{هـ}\underset{ص\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{لو}_{هـ}(1+ص)}{ص}$

$= \frac{1}{هـ}\times 1 = \frac{1}{هـ}$

أ/ محمد عبد العظيم

---

(٧) $\underset{س\to 0}{\text{نهـا}} (1+\text{حا}\,س)^{\frac{1}{س}} = \ldots\ldots$

(أ) 1 (ب) صفر (ج) $\frac{1}{هـ}$ (د) $هـ$

$\underset{س\to 0}{\text{نهـا}} (1+\text{حا}\,س)^{\frac{1}{س}}$ ---------- $\dfrac{\text{حا}\,س}{س}$

$= \underset{س\to 0}{\text{نهـا}} \left[(1+\text{حا}\,س)^{\frac{1}{\text{حا}\,س}}\right]^{\frac{\text{حا}\,س}{س}} = هـ^{1} = هـ$

---

(٨) $\underset{س\to 0}{\text{نهـا}} \text{لو}_{هـ}(1-10س)^{\frac{1}{س}} = \ldots\ldots$

(أ) $هـ^{-10}$ (ب) $-10\,هـ$ (ج) $-10\,\text{لو}_{هـ}$ (د) -10

(٤) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = لوهـ($\frac{١}{٢}$س) عندما س = ٤ يساوي ....

Ⓐ $\frac{١}{٨}$ Ⓑ $\frac{١}{٤}$ Ⓒ $\frac{١}{٢}$ Ⓓ ٤

∵ ص = لوهـ ($\frac{١}{٢}$ س)

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{\frac{١}{٢}س} × \frac{١}{٢} = \frac{١}{س}$

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س=٤} = \frac{١}{٤}$

(٥) معادلة المماس الإنقلابي للدالة د(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢ هي......

Ⓐ ص = −٦س − ٦ Ⓑ ص = −٣س + ١ Ⓒ ص = ٢س + ١٠ Ⓓ ص = ٣س − ١

∵ د(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢

∴ د̄(س) = ٣س^{٢} + ٦س

د̿(س) = ٦س + ٦

بوضع د̿(س) = ٠ ∴ ٦س + ٦ = ٠ ∴ س = −١

من معادلة المنحنى ∴ د(−١) = (−١)^{٣} + ٣(−١)^{٢} + ٢ = ٤ ∴ نقطة الانقلاب (−١، ٤)

نوجد ميل المماس عند نقطة الانقلاب

∴ $\left[د̄(س)\right]_{(−١، ٤)}$ = ٣(−١)^{٢} + ٦(−١) = −٣

معادلة المماس هي ← ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)

∴ ص − ٤ = −٣ (س + ١)

ص − ٤ = −٣س − ٣ ∴ ص = −٣س + ١

(٦) إذا كان المستقيم ص + س = ك مماس لمنحنى الدالة ص = س^{٢} + ٣س + ١ فإن ك = ...

Ⓐ −٣ Ⓑ −٢ Ⓒ −١ Ⓓ صفر

∵ المستقيم يمس المنحنى

∴ ميل المستقيم = ميل المماس للمنحنى

∴ $\frac{−١}{١}$ = ٢س + ٣ ∴ ٢س = −٤ ∴ س = −٢

وبالتعويض في معادلة المنحنى ∴ ص = ٤ − ٦ + ١ = −١

∴ النقطة (−٢، −١) هي نقطة التماس وهي تحقق معادلة المستقيم

بالتعويض ← ك = −١ − ٢ = −٣

(١١)

معدلات زمنية :

(١) ينصهر مكعب من الثلج محتفظاً بشكله بمعدل ١ سم³/ث فإن معدل تغير طول حرف المكعب عندما يكون حجمه ٨ سم³ يساوي ...... سم/ث

(أ) $\frac{-1}{12}$ (ب) $\frac{1}{12}$ (ج) $\frac{-1}{6}$ (د) $\frac{1}{6}$

بفرض طول حرف المكعب = ل ، حجمه = ح

∵ ح = ل³ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن

∴ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = 3\,\text{ل}^2 \frac{\text{دل}}{\text{دن}}$

∴ $-1 = 3 \times 4 \frac{\text{دل}}{\text{دن}}$

∴ $\frac{\text{دل}}{\text{دن}} = \frac{-1}{12}$ ←

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = -1$

∵ ح = ٨ ∴ ل³ = ٨ ، ل = ٢

---

(٢) جسم يتحرك على المنحنى ص² = س³ إذا كان $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{1}{2}$ وحدة / ث عند ص = -١ فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ عند هذه اللحظة يساوي.........

(أ) $\frac{-3}{4}$ (ب) $\frac{-3}{8}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{3}{2}$

∵ ص² = س³ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن

∴ $2\,\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 3\,\text{س}^2 \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

∴ $2 \times -1 \times \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = 3 \times 1 \times \frac{1}{2}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{-3}{4}$

عند ص = -١

∴ س³ = ١

∴ س = ١

---

(٣) مخروط دائري قائم إذا كان طول كل من نصف قطر قاعدته و ارتفاعه يتزايد بمعدل $\frac{1}{2}$ سم/ث و في لحظة ما كان طول نصف قطر القاعدة يساوي ٦ سم و الارتفاع يساوي ٩ سم فإن معدل تغير حجم المخروط في تلك اللحظة = ... سم³/ث

(أ) $\frac{1}{2}\pi$ (ب) 10π (ج) 24π (د) 54π

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ ح = $\frac{1}{3}\pi$ نق² ع بالاشتقاق بالنسبة للزمن

∴ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{1}{3}\pi \left[\text{نق}^2 \times \frac{\text{دع}}{\text{دن}} + \text{ع} \times 2\,\text{نق} \frac{\text{دنق}}{\text{دن}}\right]$

$= \frac{1}{3}\pi \left[36 \times \frac{1}{2} + 9 \times 2 \times 6 \times \frac{1}{2}\right]$

$= 24\pi$ سم³/ث

أ/ محمد عبد العظيم

(٤) دائرة محيطها ح سم إذا كان طول نصف قطرها يتناقص بمعدل ٠,١ سم/ث فإن معدل تغير مساحتها = ... سم²/ث

(أ) −٠,٢ ح (ب) −٠,١ ح (ج) ٠,١ ح (د) (٠,١)² ح

∵ م = π نق²   بالاشتقاق بالنسبة للزمن

∴ دم/دن = ٢ π نق × دنق/دن

∵ ح = ٢ π نق

∴ نق = ح/(٢π) ، دنق/دن = −٠,١

∴ دم/دن = ٢π × −٠,١ × ح/(٢π)

∴ دم/دن = −٠,١ ح

---

(٥) وعاء فارغ حجمه ٩٠ سم³ يصب فيه الماء بمعدل ٥ن سم³/ث فإن الوعاء يمتلئ بعد مرور .... ثانية.

(أ) ٩ (ب) ٢٢٥ (ج) ١٨ (د) ٦

الحمد لله حمداً كثيراً طيباً مباركاً فيه

∵ دح/دن = ٥ ن

∴ ح = ∫ ٥ ن دن

ح = ٥/٢ ن² + ث

∵ عند بداية الصب ن = ٠ ، ح = ٠ (لا يوجد بالوعاء ماء تماماً) ∴ ث = ٠

∴ ح = ٥/٢ ن²

عندما يمتلئ الوعاء بالماء يصبح ح = ٩٠ سم³

∴ ٩٠ = ٥/٢ ن²   ن² = ٣٦   ∴ ن = ٦ ثانية

---

(٦) ∆ يتزايد طول قاعدته ل بمعدل ٣ سم/ث بينما يتناقص ارتفاعه ع بمعدل ٣ سم/ث و كانت مساحة سطحه هي م فإن العبارة التي من المؤكد أنها صحيحة فيما يلي هي ....

(أ) م تتزايد دائماً (ب) م تتناقص دائماً (ج) م تتناقص فقط ل > ع (د) م تتناقص فقط ل < ع

∵ م = ½ ل × ع   بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن

∴ دم/دن = ½ [ل × دع/دن + ع × دل/دن]

= ½ [ل × −٣ + ع × ٣]

= ٣/٢ [ع − ل]   عندما ع > ل تتزايد م ، عندما ع < ل تتناقص م

∴ م تتناقص عندما ل > ع

(٧) إذا كان محيط صفيحة مربعة الشكل يتزايد بمعدل ٠.٤ سم/ث و تتزايد مساحة سطحها بمعدل ٦ سم²/ث فإن طول ضلع الصفيحة في تلك اللحظة يساوي ......سم

(أ) ٣٠ (ب) ٥٠ (ج) ٤٠ (د) ٦٠

نفرض أن طول ضلع الصفيحة = (س) ومساحتها (م) ومحيطها (ح)

∵ ح = ٤ س

$\therefore \frac{دح}{دن} = ٤ \frac{دس}{دن}$

$\therefore ٠.٤ = ٤ \frac{دس}{دن}$

$\therefore \frac{دس}{دن} = ٠.١$ سم/ث

∵ م = س²

$\therefore \frac{دم}{دن} = ٢ س \frac{دس}{دن}$

∴ ٦ = ٢ س × ٠.١

$\therefore س = \frac{٦}{٢ \times ٠.١} = ٣٠$ سم

---

(٨) إذا كان معدل تزايد قطر بالون كروي يساوي ١ سم/د عندما كان طول قطره ٤ سم فإن معدل تغير حجمه عند تلك اللحظة يساوي ....

(أ) ٢π (ب) ٨π (ج) ١٦π (د) ٤π

$\because ح = \frac{٤}{٣} \pi نق^٣$ بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن

$\therefore \frac{دح}{دن} = ٤ \pi نق^٢ \frac{دنق}{دن}$

$\therefore \frac{دح}{دن} = ٤\pi \times ٤ \times \frac{١}{٢}$

$= ٨ \pi$ سم³/د

∵ معدل تزايد طول قطر البالون = ١

$\therefore \frac{دنق}{دن} = \frac{١}{٢}$ سم/د

∵ طول قطره = ٤ سم

∴ نق = ٢ سم

نأخذ بالقياس حكاية [illegible]

---

(٩) تتحرك نقطة على المنحنى ص = س² - ٣س فإذا كانت سرعة إحداثيها السيني تساوي سرعة إحداثيها الصادي فإن ميل المماس للمنحنى عند تلك النقطة يساوي.........

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

∵ ص = س² − ٣س بالاشتقاق بالنسبة للزمن

$\therefore \frac{دص}{دن} = ٢ س \frac{دس}{دن} - ٣ \frac{دس}{دن}$ بالقسمة على $\frac{دس}{دن}$ ، $\frac{دس}{دن} = \frac{دص}{دن}$

∴ ١ = ٢س − ٣ ∴ ٢س = ٤ ∴ س = ٢

ميل المماس للمنحنى هو $\frac{دص}{دس} = ٢ س - ٣$

$\left(\frac{دص}{دس}\right)_{س=٢} = ٢ \times ٢ - ٣ = ١$

سلوك الدالة:

(١) إذا كان لمنحنى الدالة د نقطة إنقلاب عند س = ٢ حيث د(س) = $س^٣$ + ل$س^٢$ + ٤ فإن ل = ...

(أ) -٦ (ب) -٣ (ج) ٣ (د) ٦

صلي على النبي
صلى الله عليه وسلم

∵ د(س) = $س^٣$ + ل $س^٢$ + ٤

$\acute{}$د(س) = ٣$س^٢$ + ٢ل س

$\ddot{}$د(س) = ٦س + ٢ل

∵ عند س = ٢ نقطة إنقلاب

∴ $\ddot{}$د(٢) = صفر ∴ ١٢ + ٢ل = ٠ ← ل = -٦

(٢) أكبر قيمة للمقدار ٤س - $س^٢$ حيث س ∈ ح هي ....

(أ) ٤ (ب) ٨ (ج) ١٦ (د) ٣٢

بوضع د(س) = ٤س - $س^٢$

$\acute{}$د(س) = ٤ - ٢س

بوضع $\acute{}$د(س) = ٠ ٤ - ٢س = ٠ ∴ س = ٢

$\ddot{}$د(س) = -٢ ∴ عندها أكبر ما يمكن

∴ أكبر قيمة للمقدار هو د(س) = ٤ × ٢ - $٢^٢$ = ٤

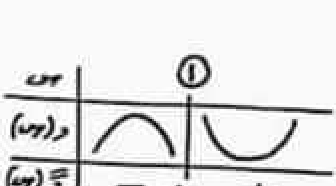
(٣) منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^٣$ - ٣$س^٢$ + ٢ محدب لأعلى عندما س ∈ ....

(أ)]-∞ ، ٠[(ب)]-∞ ، ١[(ج)]١ ، ٢[(د)]١ ، ∞[

∵ د(س) = $س^٣$ - ٣$س^٢$ + ٢

$\acute{}$د(س) = ٣$س^٢$ - ٦س

$\ddot{}$د(س) = ٦س - ٦



بوضع $\ddot{}$د(س) = ٠ ∴ ٦س - ٦ = ٠

∴ س = ١

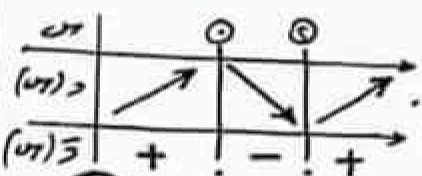
∴ المنحنى محدب لأعلى في]-∞، ١[

(٤) د(س) = $س^٣$ - ٣$س^٢$ + ٥ متناقصة عندما س ∈ ....

(أ)]٠ ، ٣[(ب)]٠ ، ٢[(ج) [٠ ، ٢] (د) ح - [٠ ، ٢]

∵ د(س) = $س^٣$ - ٣$س^٢$ + ٥

$\acute{}$د(س) = ٣$س^٢$ - ٦س



بوضع $\acute{}$د(س) = ٠ ∴ ٣س(س - ٢) = ٠

∴ س = ٠ ، س = ٢

∴ الدالة متناقصة في]٠، ٢[

(٥) إذا كانت د′(س) = أس³ − ٨ب حيث أ ، ب ثوابت وكان لمنحنى الدالة د(س) نقطة عظمى محلية هي (٢ ، ٥)
فإن أ × ب ∈ ......

(أ)]٢ ، ∞[　　(ب)]٠ ، ∞[　　(ج)]−∞ ، ٠]　　(د)]٨ ، ∞[

د′(س) = أ س³ − ٨ ب ←

∵ النقطة (٢ ، ٥) عظمى محلية ∴ د′(س) = صفر عند س = ٢

٠ = ٨أ − ٨ب ∴ ٨أ = ٨ب ← ∴ $\boxed{أ = ب}$ ←

د″(س) = ٣أ س² ←

∵ النقطة (٢ ، ٥) عظمى محلية (أكبر) ∴ د″(س) < ٠ عند س = ٢

∴ ٣أ × ٤ < ٠ ∴ أ < ٠ وكذلك ب < ٠

∴ أ × ب > ٠ ← أ × ب ∈]٠ ، ∞[

(لاحظ أن أ سالب ، ب سالبة ← أ × ب = عدد موجب)

---

(٦) إذا كانت س + ص = ل حيث س > ٠ ، ص > ٠ فإن س ص قيمة عظمى عندما ......

(أ) س = ل ص　　(ب) ل س = ص　　(ج) س = ص　　(د) س ص = ١

∵ س + ص = ل ← ①

∴ ص = ل − س

∴ س ص = ل س − س² بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ (س ص)′ = ل − ٢ س

تكون س ص قيمة عظمى عندما (س ص)′ = ٠

∴ ل − ٢ س = ٠ ∴ س = ½ ل ←

وبالتعويض في ① ∴ ص = ل − ½ ل = ½ ل ←

∴ $\boxed{س = ص}$

---

(٧) العبارة التي من المؤكد أنها صحيحة فيما يلي هي ......

(أ) (١ ، د(١)) نقطة حرجة إذا كان د′(١) = ٠ فقط.

(ب) (١ ، د(١)) نقطة انقلاب للدالة إذا كان د″(١) = ٠

(ج) إذا كان د′(١) = ٠ فإن د(١) قيمة عظمى محلية.

(د) إذا كان د′(١) = ٠ و د″(١) > ٠ فإن د(١) قيمة صغرى محلية.

∵ العبارة التي من المؤكد أنها صحيحة (د)

مع أطيب أمنياتي　أ/ محمد عبد العظيم

(٨) إذا كانت د(س) دالة متصلة على ح فإن العبارة التي من المؤكد أنها صحيحة فيما يلي هي ......

(أ) (١ ، د(١)) نقطة إنقلاب إذا كان $\text{د}'(1) = 0$ أو $\text{د}'(1)$ غير معرفة.

(ب) (١ ، د(١)) نقطة إنقلاب للدالة إذا كان $\text{د}''(1) = 0$ و $\text{د}''(1^{+}) \times \text{د}''(1^{-}) < 0$

(ج) (١ ، د(١)) نقطة إنقلاب للدالة إذا كان $\text{د}'(1)$ غير معرفة و $\text{د}''(1^{+}) \times \text{د}''(1^{-}) < 0$.

(د) (١ ، د(١)) نقطة إنقلاب للدالة إذا كان $\text{د}'(1)$ لها وجود و $\text{د}''(1^{+}) \times \text{د}''(1^{-}) < 0$.

هي العبارة التي من المؤكد أنها صحيحة (د)

---

(٩) أكبر قيمة لميل منحنى الدالة $\text{د}(\text{س}) = -\text{س}^3 + 6\text{س}^2 + 2\text{س} + 1$ تساوي ......

(أ) ١٤ (ب) ١٦ (ج) ١٩ (د) −١٣

ميل المماس للمنحنى هو $\text{م} = \text{د}'(\text{س}) = -3\text{س}^2 + 12\text{س} + 2 \longleftarrow (1)$

$\therefore \text{م}' = -6\text{س} + 12$ ، $\text{م}'' = -6 < 0$ أكبر ما يمكن

ولإيجاد أكبر قيمة للميل نضع $\text{م}' = 0$ $\therefore -6\text{س} + 12 = 0$ $\therefore \boxed{\text{س} = 2}$

وبالتعويض في (١) $\therefore$ أكبر قيمة للميل هي $\text{م} = -3(2)^2 + 12 \times 2 + 2 = 14$

---

(١٠) إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^2 - 16\text{س}}$ فإن الدالة لها نقط حرجة عندما س =......

(أ) ٨ (ب) صفر ، ١٦ (ج) ٠ ، ١٦ ، ٨ (د) صفر

$\because \text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^2 - 16\text{س}}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \dfrac{2\text{س} - 16}{2\sqrt{\text{س}^2 - 16\text{س}}}$

بوضع البسط $= 0 \longrightarrow \therefore 2\text{س} - 16 = 0$ $\therefore \text{س} = 8 \notin$ مجال الدالة

$\sqrt{64 - 128} = \sqrt{-64}$ ✗

المقام $= 0 \longrightarrow \therefore \text{س}^2 - 16\text{س} = 0$

$\text{س}(\text{س} - 16) = 0$ $\therefore \text{س} = 0$ ، $\text{س} = 16$

$\therefore$ النقط الحرجة عند س = ٠ ، ١٦

---

(١١) منحنى الدالة $\text{د}(\text{س}) = \text{س} - 2\sqrt{\text{س}}$ له نقطة حرجة عندما س = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٠ ، ١ (د) ١ ، −١

$\because \text{د}(\text{س}) = \text{س} - 2\sqrt{\text{س}}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = 1 - \dfrac{2}{2\sqrt{\text{س}}} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{\text{س}}}$

بوضع $\text{د}'(\text{س}) = 0 \longrightarrow \therefore \sqrt{\text{س}} = 1$ $\therefore \text{س} = 1$

وبوضع المقام $= 0 \longrightarrow \therefore \sqrt{\text{س}} = 0$ $\therefore \text{س} = 0$

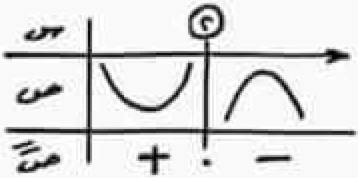
$\therefore$ النقط الحرجة عند س = ١ ، ٠

(١٢) منحنى الدالة ص = $\frac{-٥}{س - ٢}$ محدب لأسفل إذا كانت ....

(أ) س > ٢ (ب) س < ٢ (ج) س < ٥ (د) س > ٠

ص = −٥ (س − ٢)$^{-١}$

ص' = ٥ (س − ٢)$^{-٢}$



ص'' = −١٠ (س − ٢)$^{-٣}$ = $\frac{-١٠}{(س - ٢)^{٣}}$

ص'' ≠ ٠ ولكنها غير معرفة عند س = ٢

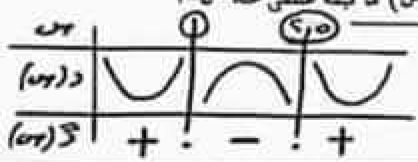
∴ المنحنى محدب لأسفل لما س < ٢

(١٣) إذا كانت د(س) دالة كثيرة الحدود و الجدول المجاور يبين بعض قيم د''(س) فإن العبارة التي من المؤكد أنها صحيحة فيما يلي هي ....

س	٠	١	٢	٣
د''(س)	٥	٠	−٧	٤

(أ) الدالة د(س) تزايدية في]٠، ٢[(ب) الدالة د(س) تناقصية في]٠، ٢[

(ج) الدالة د(س) يتغير تحدبها في]٠، ٢[(د) الدالة د(س) لها قيمة عظمى عند س=١



العبارة التي من المؤكد أنها صحيحة هي العبارة (ج)

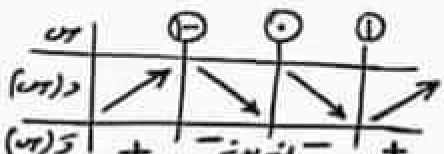
(١٤) إذا كانت د(س) = س + $\frac{١}{س}$ فإن الدالة تزايدية في الفترة ....

(أ) |س| ≤ ١ (ب) |س| ≥ ١ (ج) |س| > ١ (د) |س| < ١، س ≠ ٠

د(س) = س + س$^{-١}$

د'(س) = ١ − س$^{-٢}$

= ١ − $\frac{١}{س^{٢}}$



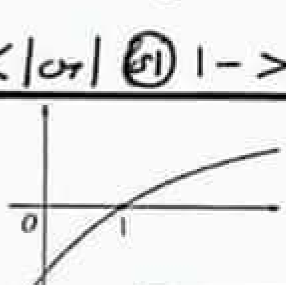
بوضع د'(س) = ٠ ∴ س^{٢} = ١

∴ س = ±١

، د'(س) غير معرفة عند س = ٠

∴ الدالة تكون تزايدية لما س > ١ أو س < −١ (ج) |س| > ١

(١٥) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة د(س) القابلة للاشتقاق مرتين عند س = ١ فإن العبارة الصحيحة فيما يلي هي........



(أ) د'(١) < د''(١) < د(١) (ب) د''(١) < د'(١) < د(١)

(ج) د(١) < د''(١) < د'(١) (د) د''(١) < د(١) < د'(١)

19

من الرسم لمنحنى ← د(١) = ٠ ← لأن المنحنى يمر بالنقطة (١، ٠)

د'(١) > ٠ ← المماس يصنع زاوية حادة

د''(١) < ٠ ← المنحنى محدب لأعلى

∴ د''(١) < د(١) < د'(١)

التكامل :

(1) $\int$ ظا θ ء θ = ...

(أ) $-$لو$|$جتا $\theta|$ + ث (ب) $-$لو جتا θ + ث (ج) لو جتا θ + ث (د) لو$|$جتا $\theta|$ + ث

$\int$ ظا θ ء θ

$= \int \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$ ء θ $= -\int \frac{-\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$ ء θ $= -$لو$_{هـ}|$جتا $\theta|$ + ث

---

(2) $\int$ ٤ س هـ$^{س^2}$ ء س = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ هـ$^{س^2}$ + ث (ب) هـ$^{س^2}$ + ث (ج) ٢ هـ$^{س^2}$ + ث (د) ٤ هـ$^{س^2}$ + ث

$\int$ ٤ س هـ$^{س^2}$ ء س

$=$ ٢ $\int$ ٢ س هـ$^{س^2}$ ء س $=$ ٢ هـ$^{س^2}$ + ث

---

(3) $\int \frac{1}{\text{س لو}_{هـ}\,\text{س}^2}$ ء س = ...

(أ) ٢ لو$|$س$|$ + ث (ب) ٢ لو$|$لو$_{هـ}$ س$|$ + ث (ج) $\frac{1}{2}$ لو$|$س$|$ + ث (د) $\frac{1}{2}$ لو$|$لو$_{هـ}$ س$|$ + ث

$\int \frac{1}{\text{س لو}_{هـ}\,\text{س}^2}$ ء س بالقسمة على س بسطاً ومقاماً

$= \int \frac{1}{\text{٢ س لو}_{هـ}\,\text{س}}$ ء س $= \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{\text{س}}}{\text{لو}_{هـ}\,\text{س}}$ ء س

$= \frac{1}{2}$ لو$_{هـ}|$لو$_{هـ}$ س$|$ + ث

---

(4) $\int$ س (س^2 + ٣)^5 ء س = ...

(أ) $\frac{1}{6}$ (س^2 + ٣)^6 + ث (ب) $\frac{1}{12}$ (س^2 + ٣)^6 + ث

(ج) $\frac{1}{4}$ (س^2 + ٣)^6 + ث (د) $\frac{1}{8}$ (س^2 + ٣)^6 + ث

$\int$ س (س^2 + ٣)^5 ء س

$= \frac{1}{2} \int$ (س^2 + ٣)^5 × ٢ س ء س

$= \frac{1}{2} \times \frac{(\text{س}^2 + 3)^6}{6}$ + ث $= \frac{1}{12}$ (س^2 + ٣)^6 + ث

(٥) $\int \text{قا}^{4}\text{س}\ \text{طا س}\ \text{ء س} = \dots\dots$

(أ) $\frac{1}{4}\text{قا}^{4}\text{س} + \text{ث}$ (ب) $\frac{1}{4}\text{قا}^{4}\text{س} + \text{ث}$ (ج) $\frac{1}{3}\text{طا}^{3}\text{س} + \text{ث}$ (د) $\frac{1}{2}\text{طا}^{2}\text{س} + \text{ث}$

$$\int \text{قا}^{4}\text{س}\ \text{ظا س}\ \text{ء س}$$

$$= \int (\text{قا س})^{3} \times (\text{قا س طا س})\ \text{ء س}$$

$$= \frac{1}{4}\ \text{قا}^{4}\text{س} + \text{ث}$$

---

(٦) $\int (4 - \text{قتا س ظتا س})\ \text{ء س} = \dots\dots$

(أ) $4\text{س} - \text{قتا س} + \text{ث}$ (ب) $4\text{س} + \text{قتا س} + \text{ث}$ (ج) $4\text{س} - \text{ظتا س} + \text{ث}$ (د) $4\text{س} + \text{ظتا س} + \text{ث}$

$$\int (4 - \text{قتا س ظتا س})\ \text{ء س}$$

$$= 4\text{س} + \text{قتا س} + \text{ث}$$

---

(٧) $\int (\text{قتا}^{4}\text{س} - \text{قتا}^{2}\text{س ظتا}^{2}\text{س})\ \text{ء س} = \dots\dots$

(أ) $\frac{1}{3}\text{قتا}^{3}\text{س} - \frac{1}{3}\text{ظتا}^{3}\text{س} + \text{ث}$ (ب) $-\text{طا س} + \text{ث}$

(ج) $-\text{ظتا س} + \text{ث}$ (د) $\frac{1}{3}\text{قتا}^{3}\text{س} + \text{ث}$

$$\int (\text{قتا}^{4}\text{س} - \text{قتا}^{2}\text{س ظتا}^{2}\text{س})\ \text{ء س}$$

$$= \int \text{قتا}^{2}\text{س}(\text{قتا}^{2}\text{س} - \text{ظتا}^{2}\text{س})\ \text{ء س}$$

$$= \int \text{قتا}^{2}\text{س} \cdot \text{ء س} \qquad \boxed{\text{قتا}^{2}\text{س} - \text{ظتا}^{2}\text{س} = 1}$$

$$= -\ \text{ظتا س} + \text{ث}$$

---

(٨) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} - 3}\ \text{ء س} = \dots\dots$

(أ) $\frac{1}{2}(\text{هـ}^{\text{س}} - 3) + \text{ث}$ (ب) $-\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}} - 3| + \text{ث}$

(ج) $\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}} - 3| + \text{ث}$ (د) $\frac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}} - 3| + \text{ث}$

$$\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}} - 3}\ \text{ء س}$$ البسط مشتقة للمقام

$$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}} - 3| + \text{ث}$$

قل أستغفر الله

(٩) إذا كانت $\int (\text{٢س} - ١)\,\text{هـ}^{\text{٢س}+٣}\,\text{دس} = \text{ص ع} - \int \text{ع دص}$ فإن $\int \text{ع دص} =$ ....

أ) $\text{هـ}^{\text{٢س}+٣} + \text{ث}$ ب) $\frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{٢س}+٣} + \text{ث}$ ج) $-\text{هـ}^{\text{٢س}+٣} + \text{ث}$ د) $-\frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{٢س}+٣} + \text{ث}$

$\text{ص} = (\text{٢س} - ١)$ $\text{دع} = \text{هـ}^{\text{٢س}+٣}\,\text{دس}$

$\text{دص} = ٢$ $\text{ع} = \frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{٢س}+٣}$

$\therefore \int \text{ع دص} = \int \text{هـ}^{\text{٢س}+٣} \times ٢\,\text{دس}$

$= ٢ \times \frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{٢س}+٣} + \text{ث}$

$= \text{هـ}^{\text{٢س}+٣} + \text{ث}$

---

(١٠) إذا كانت $\int (\text{٢س} + ٣)\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس} = \text{ص ع} - \int \text{ع دس}$ فإن ص ع = ...

أ) $\text{٢س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ب) $(\text{٢س}+٣)\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ج) $\frac{١}{٢}(\text{٢س}+٣)\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ د) $\text{س}(\text{س}+٣)\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ $\text{دع} = (\text{٢س}+٣)\,\text{دس}$

$\text{دص} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس}$ $\text{ع} = \text{س}^٢ + \text{٣س}$

$\therefore \text{ص ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times (\text{س}^٢ + \text{٣س})$

$= \text{س}(\text{س}+٣)\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$

---

(١١) إذا كانت $\text{د(س)} = \text{هـ}^{\text{س}+\text{هـ}^{\text{س}}}$ فإن المشتقة العكسية للدالة د(س) يمكن أن تكون هي ....

أ) $\frac{\text{هـ}^{١+\text{هـ}^{\text{س}}}}{١+\text{هـ}^{\text{س}}}$ ب) $(١+\text{هـ}^{\text{س}})\,\text{هـ}^{\text{س}+\text{هـ}^{\text{س}}}$ ج) $\text{هـ}^{١+\text{هـ}^{\text{س}}}$ د) $\text{هـ}^{\text{هـ}^{\text{س}}}$

المشتقة العكسية للدالة $\text{د(س)} = \text{هـ}^{\text{س}+\text{هـ}^{\text{س}}}$ تساوي

$= \int \text{هـ}^{\text{س}+\text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{دس}$

$= \int \text{هـ}^{\text{س}} \cdot \text{هـ}^{\text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{دس} = \text{هـ}^{\text{هـ}^{\text{س}}} + \text{ث}$

---

(١٢) إذا كان $\int \text{د(س)}\,\text{جاس}\,\text{دس} = -\text{د(س)}\,\text{جتاس} + \int \text{٣س}^٢\,\text{جتاس}\,\text{دس}$ فإن د(س) = ...

أ) $\text{٣س}^٢$ ب) $\text{س}^٣$ ج) $-\text{س}^٣$ د) جاس

$\therefore \int \text{د(س)}\,\text{جاس}\,\text{دس} = -\text{د(س)}\,\text{جتاس} + \int \text{دَ(س)}\,\text{جتاس}\,\text{دس}$

د(س)	جاس
دَ(س)	− جتاس

بالمقارنة بالمعطى $\therefore \text{دَ(س)} = \text{٣س}^٢$ $\therefore \text{د(س)} = \frac{\text{٣س}^٣}{٣} = \text{س}^٣$

(١٣) $\int_{0}^{2} (٢-|س|)\, ءس =$ ....

أ ٤ ب ٢ ج صفر د ١

$\int_{0}^{2} ٢-|س|\, ءس$

$٢+س \quad ٠ \quad ٢-س$

$= \int_{0}^{2} (٢-س)\, ءس$

$= \left(٢س - \frac{١}{٢}س^{٢}\right)_{0}^{2}$

$= (٤-٢) - (صفر) = ٢$

(١٤) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (جاس + جتاس)\, ءس =$ ....

أ ٤ ب ٢ ج صفر د π

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (جاس + جتاس) \cdot ءس$

الحمد لله

$= \left[- جتاس + جاس\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= (- جتا ٩٠ + جا ٩٠) - (- جتا(-٩٠) + جا(-٩٠))$

$= (٠ + ١) - (٠ - ١) = ٢$

(١٥) إذا كان $\int_{-2}^{5} د(س)\, ءس = ١٦$ ، $\int_{-2}^{2} د(س)\, ءس = ١٢$ فإن $\int_{2}^{5} د(س)\, ءس =$ ....

أ -٢٨ ب -٤ ج ٤ د ٢٨

$\because \int_{-2}^{5} د(س)\, ءس = \int_{-2}^{2} د(س)\, ءس + \int_{2}^{5} د(س)\, ءس$

$\therefore ١٦ = ١٢ + \int_{2}^{5} د(س)\, ءس$

$\therefore \int_{2}^{5} د(س)\, ءس = ١٦ - ١٢ = ٤$

(١٦) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} س+١ , & س < ٠ \\ جا\pi س , & س \geq ٠ \end{cases}$ فإن $\int_{-1}^{1} د(س)\, ءس =$ ....

أ $\frac{١}{٢} + \frac{١}{\pi}$ ب $\frac{-١}{٢}$ ج $\frac{١}{٢} - \frac{١}{\pi}$ د $\frac{١}{٢}$

$-1 \xrightarrow{\ 1+س\ } 0 \xrightarrow{\ جتا\,\pi س\ } 1$

$\int_{-1}^{1} د(س)\, دس = \text{-----}$

$= \int_{-1}^{0} (1+س)\, دس + \int_{0}^{1} (جتا\, \pi س)\, دس$

$= \left[س + \frac{1}{2} س^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{\pi} حا\, \pi س\right]_{0}^{1}$

$= (0) - (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{\pi} حا\, \pi) - (\frac{1}{\pi} حا\, 0)$

$= 0 + \frac{1}{2} + صفر = \frac{1}{2}$

---

(١٧) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{هـ^{ظاس}}{جتا^2 س}\, دس = ...$

أ) هـ − ١ ب) هـ + ١ ج) هـ د) ١

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{هـ^{ظاس}}{جتا^2 س}\, دس$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} هـ^{ظاس} \times قا^2 س\, دس$

$= \left[هـ^{ظاس}\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = هـ^{ظا\frac{\pi}{4}} - هـ^{ظا 0} = هـ - 1$

---

(١٨) إذا كان $\int_{-1}^{1} هـ^{-س^2} دس = ل$ فإن $\int_{-1}^{0} هـ^{-س^2} دس = ...$

أ) ل ب) ٢ل ج) $\frac{1}{2}$ل د) $-\frac{1}{2}$ل

$\int_{-1}^{1} هـ^{-س^2} دس = ل$

الدالة دالة زوجية $\therefore \int_{-1}^{1} هـ^{-س^2} دس = 2 \int_{-1}^{0} هـ^{-س^2} دس = ل$

$\therefore \int_{-1}^{0} هـ^{-س^2} دس = \frac{1}{2}$ ل بالقسمة على ٢ للطرفين

أ/ محمد عبد العظيم

ثانياً:

(١) إذا كانت $\frac{دص}{دس} = قتا^2 س$ ، ص = ٢ عندما س = $\frac{\pi}{4}$ فإن ص = ...

(أ) $-(٢ + ظتا س)$ (ب) $-(٣ + ظتا س)$ (ج) $٢ - ظتا س$ (د) $٣ - ظتا س$

$\because \frac{دص}{دس} = قتا^2 س$

$\therefore ص = \int قتا^2 س \, دس$

$ص = - ظتا س + ث$ $\because ص = ٢$ عندما $س = \frac{\pi}{4}$

$٢ = - ظتا \left(\frac{\pi}{4}\right) + ث$

$٢ = -١ + ث$ $ث = ٣$

$\therefore ص = - ظتا س + ٣$ أي $ص = ٣ - ظتا س$

---

(٢) إذا كانت $\frac{دص}{دس} = س + \frac{١}{س}$ ، ص = $\frac{١}{٢}$ عندما س = ١ فإن ص = ... عندما س = هـ

(أ) $هـ^2 - هـ$ (ب) $\frac{هـ^2 - ١}{٢}$ (ج) $\frac{هـ^2 + ١}{٤}$ (د) $\frac{هـ^2}{٢} + ١$

$\because \frac{دص}{دس} = س + \frac{١}{س}$

$\therefore ص = \int \left(س + \frac{١}{س}\right) دس$

$ص = \frac{١}{٢} س^2 + لو_{هـ} |س| + ث$ $\because ص = \frac{١}{٢}$ عندما $س = ١$

$\therefore \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} + لو_{هـ} ١ + ث$ $\therefore ث = صفر$

$\therefore ص = \frac{١}{٢} س^2 + لو_{هـ} |س|$

وعند $س = هـ$ ← $\therefore ص = \frac{١}{٢} هـ^2 + ١$

---

(٣) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه يساوى $\frac{١}{س - ٢}$ وكان المنحنى يمر بالنقطة عند (٣ ، ٠) فإن

$د(هـ^2 + ٢) =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) $لو_{هـ} ٢$ (د) $لو_{هـ} ٣$

$\because \frac{دص}{دس} = \frac{١}{س - ٢}$

$\therefore ص = \int \frac{١}{س - ٢} دس$

$\therefore ص = لو_{هـ} |س - ٢| + ث$ $\because$ المنحنى يمر بالنقطة (٣ ، ٠) $\therefore$ تحققه.

$\therefore$ ٠ = لوهـ |١| + ث $\quad \therefore$ ث = صفر

$\therefore$ ص = لوهـ |س − ٢|

$\therefore$ د(هـ^٢ + ٢) = لوهـ |هـ^٢ + ٢ − ٢|

= لوهـ هـ^٢ = ٢ لوهـ هـ = ٢ × ١ = **٢**

---

(٤) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\frac{1}{س}$ ، المستقيمين ص = ١ ، ص = ٢ و محور الصادات دورة كاملة حول محور الصادات = ...

Ⓐ $\frac{\pi}{4}$ Ⓑ $\frac{\pi}{2}$ Ⓒ π Ⓓ 2π

الدوران حول محور الصادات

$\therefore$ ح = $\pi \int_1^2$ س^٢ دص

= $\pi \int_1^2 \frac{1}{ص^2}$ دص = $\pi \left[\frac{-1}{ص}\right]_1^2$

= $\pi \left[\left(\frac{-1}{2}\right) - (-1)\right] = \frac{1}{2}\pi$

---

(٥) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س^٣ و المستقيمين ص = ٠ ، س = ٢ تساوي ....

Ⓐ ١ Ⓑ ٢ Ⓒ ٤ Ⓓ ٨

عند ص = ٠ ← $\therefore$ س = ٠

$\therefore$ م = $\int_0^2$ س^٣ دس = $\left[\frac{1}{4}\text{س}^4\right]_0^2$ = ٤ − ٠ = **٤**

---

(٦) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\sqrt{٤ - س^2}$ و محور السينات مقدرة بالوحدات المربعة تساوي .....

Ⓐ ٢ Ⓑ ٤ Ⓒ 2π Ⓓ 4π

م = $\int_{-2}^{2} \sqrt{٤ - س^2}$ دس

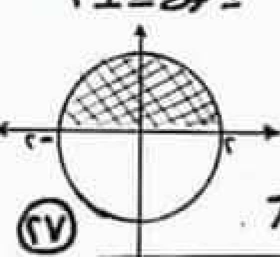
لإيجاد نقط التقاطع مع السينات

ص = ٠ $\therefore$ ٤ − س^٢ = ٠

$\therefore$ س^٢ = ٤ $\therefore$ س = ± ٢

بوضع ص = $\sqrt{٤ - س^2}$ بالتربيع

$\therefore$ س^٢ + ص^٢ = ٤ ←

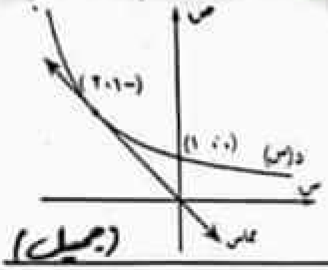


تمثل معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ، نق = $\sqrt{٤}$ = ٢

والمساحة المطلوبة تمثل $\frac{1}{2}$ مساحة سطح الدائرة

= $\frac{1}{2}\pi$ نق^٢ = $\frac{1}{2}\pi \times (٢)^2 = 2\pi$

(٧) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة د(س) ورسم لها مماس عند النقطة (−١ ، ٢) فإن $\int_{-1}^{0} س\,[د''(س)]\; ءس = \dots\dots$



(أ) ٤ (ب) ٣
(ج) ١ (د) −١

(جميل)

س الرسم المعطى نجد أن

د(٠) = ١ لأن المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ١)

د(−١) = ٢ 〃 〃 〃 〃 (−١ ، ٢)

د̄(−١) = −٢

ميل المماس = $\frac{٢ - ٠}{-١ - ٠} = -٢$

عند (س = −١)

$\int_{-1}^{0} س\,[\,د''(س)\,]\; ءس$

س ← د''(س)

١ ← د̄(س)

$= \left[\,س\,د̄(س) - \int د̄(س)\; ءس\,\right]_{-1}^{0}$

$= \left[\,س\,د̄(س)\,\right]_{-1}^{0} - \left[\,د(س)\,\right]_{-1}^{0}$

$= \left[\,٠ - (-١) \times د̄(-١)\,\right] - \left[\,د(٠) - د(-١)\,\right]$

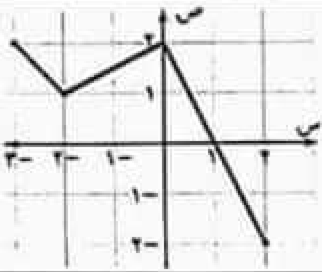
$= د̄(-١) - د(٠) + د(-١)$

$= -٢ - ١ + ٢ = -١$

محمد عبد العظيم

---

(٨) إذا كان المنحنى المجاور يمثل منحنى الدالة الخطية د(س) معرفة بأكثر من قاعدة و كانت ر(س) = $\int_{-2}^{س} د(ن)\; ءن$ فإن العدد الذي له أكبر قيمة هو ....



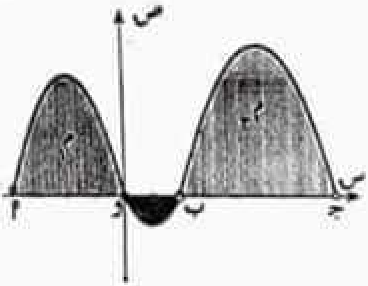
(أ) ر(٢) (ب) ر(−٢)
(ج) ر(٠) (د) ر(١)

نعلم أن التكامل المحدد يعني المساحة الواقعة تحت منحنى الدالة ومحور السينات

ومن الرسم المعطى نجد أنه عند س = ١ تكون أكبر مساحة

(لاحظ المساحة أسفل المنحنى سالبة أي تقلل المساحة)

∴ العدد الذي له أكبر قيمة هو ر(١)



(٩) في الشكل المقابل إذا كان $\int_{\text{د}}^{\text{جـ}} \text{د(س)}\,\text{ءس} = 8 \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{د(س)}\,\text{ءس}$

وكان م١ + م٢ + م٣ = ٣٠ وحدة مربعة فإن

م٢ = ... وحدة مربعة.

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) ٤

نعلم أن ← التكامل أعلى محور السينات يعطي + المساحة

التكامل أسفل محور السينات يعطي − المساحة

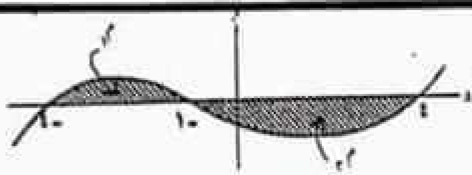
$\because \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د(س)}\,\text{ءس} = 8 \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{د(س)}\,\text{ءس}$

$\therefore \text{م}_1 - \text{م}_2 + \text{م}_3 = 8\,\text{م}_2$ ← $\int_{\text{د}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\,\text{ءس} = -\text{م}_2$ ، $\because \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{د(س)}\,\text{ءس} = \text{م}_3$

$\therefore \text{م}_1 + \text{م}_3 = 9\,\text{م}_2$

$\therefore 30 - \text{م}_2 = 9\,\text{م}_2$

$30 = 10\,\text{م}_2 \quad \therefore \text{م}_2 = 3$



(١٠) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة د(س) وكانت

م١ ، م٢ عددان موجبان يمثلان مساحتي المنطقتين المظللتين

فإن $\int_{-4}^{4} \text{د(س)}\,\text{ءس} - 2\int_{-1}^{4} \text{د(س)}\,\text{ءس} = \text{......}$

(أ) م١ + م٢ (ب) م١ − م٢ (جـ) ٢م١ − م٢ (د) م١ + ٢م٢

من الرسم المعطى نجد أن $\int_{-4}^{-1} \text{د(س)}\,\text{ءس} = \text{م}_1$ ، $\int_{-1}^{4} \text{د(س)}\,\text{ءس} = -\text{م}_2$

$\therefore \int_{-4}^{4} \text{د(س)}\,\text{ءس} - 2\int_{-1}^{4} \text{د(س)}\,\text{ءس}$

$= \left[\int_{-4}^{-1} \text{د(س)}\,\text{ءس} + \int_{-1}^{4} \text{د(س)}\,\text{ءس}\right] - 2\left[\int_{-1}^{4} \text{د(س)}\,\text{ءس}\right]$

$= (\text{م}_1 - \text{م}_2) - 2(-\text{م}_2) = \text{م}_1 + \text{م}_2$

انتهت الأسئلة مع أطيب أمنياتي أ/ محمد