اجابات اختبارات الأستاتيكا
الاختبار الأول

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) إذا كانت θ هى قياس الزاوية بين قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل المحصل فإن : معامل الاحتكاك السكونى يساوى ....

(أ) طا θ (ب) حا θ (حـ) حتا θ (ء) طتا θ

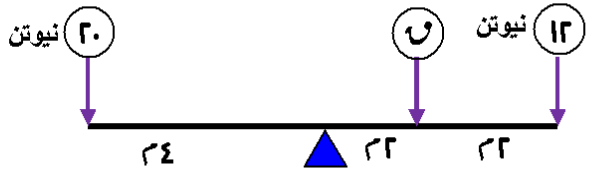
الحل

∵ θ قياس الزاوية بين قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل المحصل

∴ قياس زاوية الاحتكاك = ٩٠° − θ

∴ م$_س$ = طا (٩٠° − θ) = طتا θ

(٢) الشكل المقابل يمثل قضيب فى حالة اتزان فإن : ن = ...



(أ) ٢٨ نيوتن (ب) ١٦ نيوتن (حـ) ٢ نيوتن (ء) ٤ نيوتن

الحل

∵ القضيب متزن

∴ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول نقطو تأثير الحامل = صفر

∴ ٢٠ × ٤ − ١٢ × ٤ − ن × ٢ = صفر

و منها : ن = ١٦ نيوتن

(٣) إذا كانت القوة ق = ٣ س − ٥ ص تؤثر فى النقطة (− ١ ، ١) فإن : عزم القوة ق بالنسبة لنقطة الأصل يساوى ....

(أ) − ٢ ع (ب) ٢ ع (حـ) ٨ ع (ء) − ٨ ع

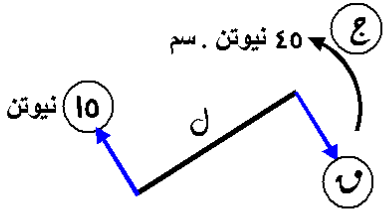
الحل

ع$_و$ = ر × ق = (− ١ ، ١) × (٣ ، − ٥) = ٢ ع

(٤) قوتان تكونان ازدواج ، مقدار احداهما ١٥ نيوتن و عزم الازدواج المحصل منهما ٤٥ نيوتن . سم فإن : البعد العمودى بينهما يساوى ....

(أ) ٦٧٥ سم (ب) ٦٠ سم (حـ) ٣ سم (ء) ٣٠ سم

الحل



بفرض أن :

البعد العمودى بين القوتين = ل سم

∵ القوتان تكونان ازدواجاً

∴ ن = ١٥ نيوتن

، ∵ عزم الازدواج المحصل = ٤٥ نيوتن . سم

∴ ١٥ × ل = ٤٥ و منها : ل = ٣ سم

(٥) إذا اتزنت مجموعة من القوى المستوية فإن مجموع عزومها حول أى نقطة فى المستوى يساوى ....

(أ) ثابت غير صفرى (ب) صفر

(حـ) محصلة هذه القوى (ء) الواحد الصحيح

الحل

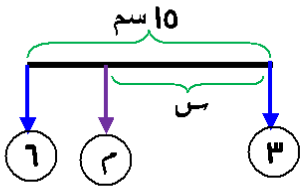
صفر

(٦) مركز ثقل جسمين ماديين كتل كل منهما ٣ نيوتن ، ٦ نيوتن و المسافة بينهما ١٥ سم يبعد عن الجسم ٣ نيوتن مسافة .... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (حـ) ٧,٥ (ء) ٩

أحمد الشنتورى

الحلـــ



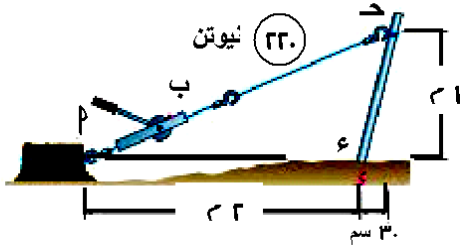
بفرض أن :
مركز الثقل يبعد عن الجسم ٣ نيوتن مسافة = س سم
∴ ٣ س = ٦ × (١٥ – س)
∴ ٣ س = ٩٠ – ٦ س
و منها : س = ١٠ سم

السؤال الثانى :

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

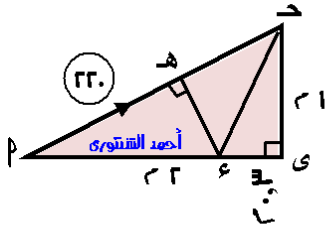
(أ) الشكل المقابل :

يوضح شداد م ب يؤثر على عمود مائل حـ ء
أوجد معيار عزم قوة الشد بالنسبة للنقطة ء



الحلـــ

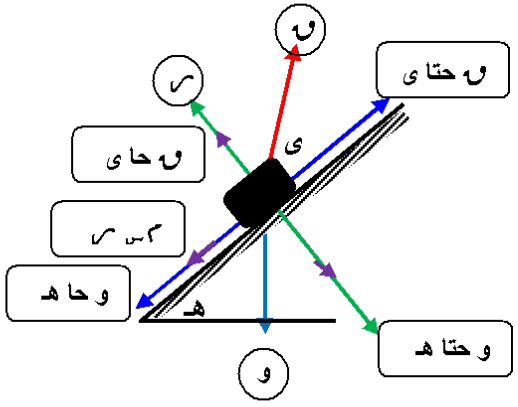
نرسم ء هـ ⊥ م حـ ، حـ ى ⊥ م ء
∴ من Δ م حـ ى القائم الزاوية فى ى



∴ (م حـ)^{٢} = (حـ ى)^{٢} + (م ى)^{٢}
= (١)^{٢} + (٢,٣)^{٢} = ٦,٢٩
∴ م حـ = ٢,٥٠٧٩٨ م ، حا م = ٠,٣٩٨٧
∴ من Δ م ء هـ القائم الزاوية فى هـ :
ء هـ = م ء × حا م = ٢ × ٠,٣٩٨٧ = ٠,٧٩٧٤
∴ ق$_{ء}$ = ٢٢٠ × ٠,٧٩٧٤ = ١٧٥,٤ نيوتن . م

(٢) وضع جسم وزنه (و) على مستوى خشن يميل على على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) فإذا كان قياس زاوية الاحتكاك هو (ل) فاوجد مقدار و اتجاه القوة التى تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى

الحلـــ



نفرض أن : ق تميل على المستوى بزاوية قياسها ى
∵ قياس زاوية الاحتكاك = ل
∴ ك س = ظا ل = $\frac{\text{حا ل}}{\text{حتا ل}}$
، ق$_{س}$ = ك س ر = $\frac{\text{ر حا ل}}{\text{حتا ل}}$
، ∵ الجسم على وشك الحركة
∴ معادلتا الانزان هما :
ق حتا ى = و حا هـ + ك س ر
= و حا هـ + $\frac{\text{ر حا ل}}{\text{حتا ل}}$ بالضرب × حتا ل ينتج :
ق حتا ى حتا ل = و حا هـ حتا ل + ر حا ل (١)
، ر + ق حا ى = و حتا هـ
∴ ر = و حتا هـ – ق حا ى بالتعويض من (١) ينتج :
ق حتا ى حتا ل = و حا هـ حتا ل + (و حتا هـ – ق حا ى) × حا ل
∴ ق حتا ى حتا ل = و حا هـ حتا ل + و حتا هـ حا ل – ق حا ى حا ل
∴ ق حتا ى حتا ل + ق حا ى حا ل = و حا هـ حتا ل + و حتا هـ حا ل
∴ ق حتا (ى – ل) = و (هـ + ل)
∴ ق = $\frac{\text{و (هـ + ل)}}{\text{حتا (ى – ل)}}$

و يكون مقدار ق أقل ما يمكن عندما يكون حتا (ى – ل) أكبر ما يمكن

أى عندما : حتا (ى – ل) = ١

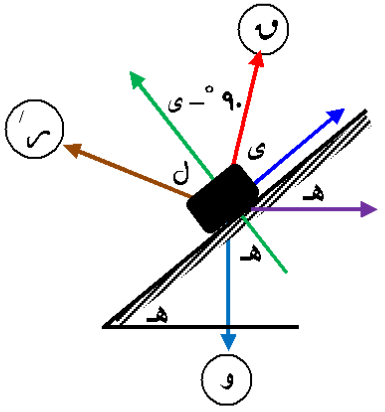
∴ ى – ل = ٠ أى : ى = ل

∴ مقدار القوة = و (هـ + ل) و خط عملها يصنع مع المستوى زاوية قياسها = قياس زاوية الاحتكاك

حل آخر

لايجاد مقدار القوة

من الشكل المقابل باستخدام قاعدة لامى ينتج :



$$\frac{ن}{\text{حا}[\,١٨٠^\circ - (هـ + ل)\,]} = \frac{و}{\text{حا}[\,٩٠^\circ - (ى - ل)\,]} = \frac{ر}{\text{حا}[\,٩٠^\circ + (ى + هـ)\,]}$$

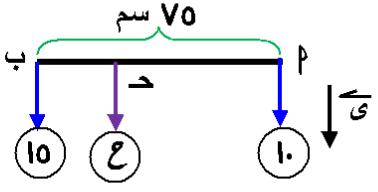
$$\therefore \frac{ن}{\text{حا}(هـ + ل)} = \frac{و}{\text{حتا}(ى - ل)}$$

$$\therefore ن = \frac{و\,(هـ + ل)}{\text{حتا}(ى - ل)}$$

السؤال الثالث :

(أ) قوتان متوازيتان و فى نفس الاتجاه مقدارهما ١٠ ، ١٥ نيوتن تؤثران فى النقطتين أ ، ب يؤثر حيث أ ب = ٧٥ سم

أوجد محصلة القوتين



الحل

نفرض $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه القوتين

∴ $\overrightarrow{ن_١} = ١٠\,\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ن_٢} = ١٥\,\overrightarrow{ى}$

مقدار المحصلة :

$\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ن_١} + \overrightarrow{ن_٢} = ١٠\,\overrightarrow{ى} + ١٥\,\overrightarrow{ى} = ٢٥\,\overrightarrow{ى}$

اتجاه المحصلة :

نفرض أن المحصلة تؤثر فى نقطة حـ ∈ $\overline{أ\,ب}$

∴ ١٠ × أ حـ = ١٥ × ب حـ

∴ ١٠ × أ حـ = ١٥ × (٧٥ – أ حـ)

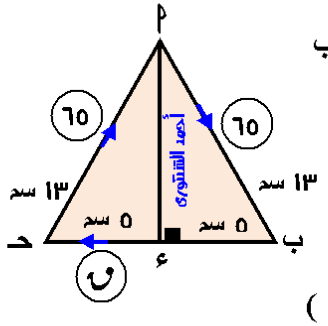
∴ ١٠ أ حـ = ١١٢٥ – ١٥ أ حـ

∴ ٢٥ أ حـ = ١١٢٥ ∴ أ حـ = ٤٥ سم

أى أن : مقدار المحصلة يساوى ٢٥ نيوتن و يعمل اتجاهها فى نفس اتجاه القوتين و تؤثر فى نقطة تبعد عن أ بمقدار ٤٥ سم

(٢) أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه أ ب = أ حـ = ١٣ سم ، ب حـ = ١٠ سم ، اثرت القوى ٦٥ ، ن ، ٦٥ نيوتن فى $\overleftarrow{أ\,ب}$ ، $\overleftarrow{ب\,حـ}$ ، $\overleftarrow{أ\,حـ}$ على الترتيب ، فإذا كانت مجموعة القوى تكافئ ازدواج فما قيمة ن ، و معيار عزم الازدواج

الحل



∵ القوى تؤثر فى أضلاع مثلث و مأخوذة فى ترتيب دورى واحد ، و تكافئ ازدواجاً

∴ م = مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال = $\frac{٦٥}{١٣}$ = ٥

∴ $\frac{ن}{١٠}$ = ٥ و منها : ن = ٥٠ نيوتن

، هندسة الشكل : أ ء = ١٢ سم (فيثاغورث)

، معيار عزم الازدواج = ٢ مـ (Δ أ ب حـ) × م

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × أ ب × أ حـ × حا أ × م

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × أ ب × أ حـ × ٢ حا $\frac{١}{٢}$ أ حتا $\frac{١}{٢}$ أ × م

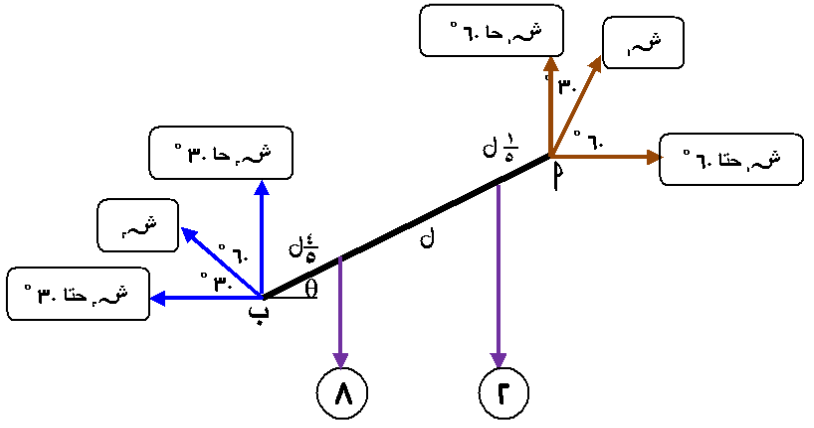
∴ معيار عزم الازدواج = ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ١٣ × ١٣ × ٢ × $\frac{٥}{١٣}$ × $\frac{١٢}{١٣}$ × ٥

= ٦٠٠ نيوتن . سم

السؤال الرابع :

(أ) أ ب قضيب رفيع خفيف طوله ٢ ل معلق فى مستوى رأسى من طرفيه أ ، ب يميلان على الرأسى بزاويتين ٣٠° ، ٦٠° على الترتيب ، علق فى القضيب الثقلان ٢ ، ٨ نيوتن على بعد من أ يساوى $\frac{١}{٥}$ ل ، $\frac{١}{٢}$ ل أوجد فى وضع التوازن مقدار الشد فى الخيطين و قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى

الحل



∵ القضيب متزن ∴ معادلات الاتزان هى :

شـ١ حتا ٦٠° = شـ٢ حا ٣٠°

∴ شـ١ × $\frac{١}{٢}$ = شـ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ شـ١ = $\sqrt{٣}$ شـ٢ (١)

، شـ١ حا ٦٠° + شـ٢ حتا ٣٠° = ٢ + ٨

∴ شـ١ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + شـ٢ × $\frac{١}{٢}$ = ١٠ بالتعويض من (١) ينتج :

∴ $\frac{٣}{٢}$ شـ٢ + $\frac{١}{٢}$ شـ٢ = ١٠ ∴ ٢ شـ٢ = ١٠

∴ شـ٢ = ٥ وحدة وزن

، بالتعويض فى (١) ينتج : شـ١ = ٥ $\sqrt{٣}$ وحدة وزن

، بفرض أن القضيب يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ

، ∵ ج ب = .

∴ شـ١ حا ٦٠° × ٢ ل حتا θ − شـ١ حتا ٦٠° × ٢ ل حا θ

− ٢ × (ل + $\frac{٤}{٥}$ ل) حتا θ − ٨ × $\frac{٤}{٥}$ ل حتا θ = .

∴ ٥ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ٢ ل حتا θ − ٥ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ × ٢ ل حا θ

− ٢ × $\frac{٩}{٥}$ ل حتا θ − ٨ × $\frac{٤}{٥}$ ل حتا θ = .

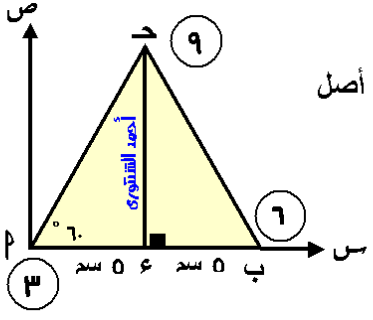
، بالقسمة ÷ ل حتا θ ينتج :

١٥ − ٥ $\sqrt{٣}$ طا θ − $\frac{١٨}{٥}$ − $\frac{٣٢}{٥}$ = .

∴ ٥ $\sqrt{٣}$ طا θ = ٥ ∴ طا θ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ∴ θ = ٣٠°

(٢) أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ سم ، اثرت الأوزان ٣ ، ٦ ، ٩ نيوتن فى رؤوسه ، عين موضع مركز ثقل المجموعة

الحل



نختار اتجاهين متعامدين أ س ، أ ص

كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة أ نقطة أصل

و من هندسة الشكل نجد :

حـ ء = ١٠ حا ٦٠° = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

فيكون : أ (٠ ، ٠) ، ب (١٠ ، ٠)

، حـ (٥ ، ٥ $\sqrt{٣}$)

و نكون جدول الأوزان و احداثياتها كما يلى :

	أ	ب	حـ
و	٣	٦	٩
س	٠	١٠	٥
ص	٠	٠	$٥\sqrt{٣}$

$\therefore$ $س_م = \frac{٣ \times ٠ + ١٠ \times ٦ + ٥ \times ٩}{٣ + ٦ + ٩} = \frac{٣٥}{٦}$ سم

، $ص_م = \frac{٣ \times ٠ + ٦ \times ٠ + ٩ \times ٥\sqrt{٣}}{٣ + ٦ + ٩} = \frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ سم

$\therefore$ احداثى مركز الثقل $= (\frac{٣٥}{٦} ، \frac{٥\sqrt{٣}}{٢})$ بالنسبة للنقطة أ

ملاحظات :

[١] لا يتغير مركز الثقل للنظام بتغير مواضع المحاور المتعامدة
حيث لا يتغير البعد بين موضع مركز الثقل و كل من موضع الأوزان بتغير مواضع المحاور المتعامدة
ففى الحل السابق نجد :

$أ م_م = \sqrt{(\frac{٣٥}{٦} - ٠)^٢ + (٠ - \frac{٥\sqrt{٣}}{٢})^٢} = \sqrt{٥٢,٧٧} = ٧,٣$ سم

بالمثل $ب م_م = ٣٦,١١ = ٦$ سم ، $حـ م_م = ١٩,٤٤ = ٤,٤$ سم

[٢] إذا أعتبرنا أ $(٥ ، ٥\sqrt{٣})$ ، ب $(٠ ، ٠)$ ، حـ $(١٠ ، ٠)$

فإن : احداثى مركز الثقل $= (\frac{٣٥}{٦} ، \frac{٥\sqrt{٣}}{٦})$ بالنسبة للنقطة ب

و يكون : $أ م_ب = ٧,٣$ سم ، $ب م_ب = ٦$ سم ، $حـ م_ب = ٤,٤$ سم

[٣] إذا أعتبرنا أ $(١٠ ، ٠)$ ، ب $(٥ ، ٥\sqrt{٣})$ ، حـ $(٠ ، ٠)$

فإن : احداثى مركز الثقل $= (\frac{١٠}{٣} ، \frac{٥\sqrt{٣}}{٣})$ بالنسبة للنقطة حـ

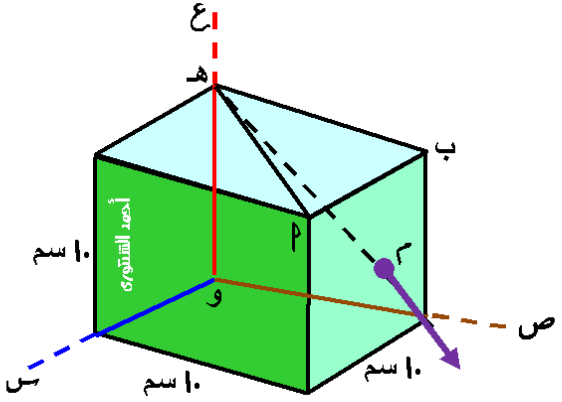
و يكون : $أ م_حـ = ٧,٣$ سم ، $ب م_حـ = ٦$ سم ، $حـ م_حـ = ٤,٤$ سم

السؤال الخامس :

(أ) فى الشكل المقابل :

قوة $٢٥\sqrt{٦}$ نيوتن تؤثر فى $\overleftarrow{هـ م}$

اوجد مركبات عزم القوة بالنسبة لمحاور الاحداثيات



الحل

من هندسة الشكل نجد أن :

هـ $(٠ ، ٠ ، ١٠)$ ، م $(٥ ، ١٠ ، ٥)$

$\therefore$ $\overleftarrow{هـ م} = \overleftarrow{م} - \overleftarrow{هـ} = (٥ ، ١٠ ، -٥)$

$\therefore$ $\| \overleftarrow{هـ م} \| = ٥\sqrt{٦}$

، $\overleftarrow{ق} = ق (\frac{\overleftarrow{هـ م}}{\| \overleftarrow{هـ م} \|})$

$= ٢٥\sqrt{٦} (\frac{(٥ ، ١٠ ، -٥)}{٥\sqrt{٦}})$

$= (٢٥ ، ٥٠ ، -٢٥)$ ص

، $\because$ $\overleftarrow{و هـ} = (٠ ، ٠ ، ١٠)$

$\therefore$ $\overleftarrow{ج} = \overleftarrow{و هـ} \times \overleftarrow{ق} = (٠ ، ٠ ، ١٠) \times (٢٥ ، ٥٠ ، -٢٥)$

$= \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ٠ & ٠ & ١٠ \\ ٢٥ & ٥٠ & -٢٥ \end{vmatrix} = -٥٠٠ \overleftarrow{س} + ٢٥٠ \overleftarrow{ص}$

$\therefore$ مركبة عزم $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة لمحور السينات $= -٥٠٠$

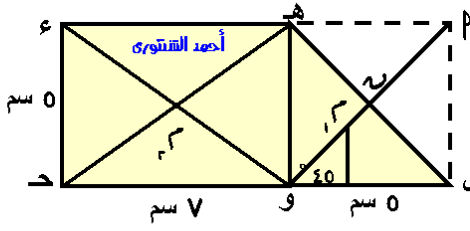
، مركبة عزم $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة لمحور الصادات $= ٢٥٠$

، مركبة عزم $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة لمحور السينات $=$ صفر

أحمد الشنتوى

(٢) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مستطيل أ ب حـ ء فيه :
أ ب = ٥ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، هـ ∈ أ ء بحيث أ هـ = ٥ سم
ثنى المثلث أ ب هـ حول الضلع ب هـ حتى أنطبق أ ب على ب حـ تماماً ، عين موضع مركز ثقل الصفيحة بعد ثنيها بالنسبة إلى : حـ ب ، حـ ء

الحل



مساحة المربع أ ب و هـ / مساحة المستطيل و حـ ء هـ = ٢٥/٣٥ = ٥/٧

∵ الصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة
∴ المساحات تتناسب مع الكتل
بفرض أن كتلة المربع أ ب و هـ = ٥ ك
∴ كتلة المستطيل و حـ ء هـ = ٧ ك
، ∵ الاتجاهين حـ ب ، حـ ء متعامدين
∴ كتلة المستطيل و حـ ء هـ تؤثر عند نقطة تلاقى قطريه م٢ (٧/٢ ، ٥/٢)
، كتلة المربع أ ب و هـ فى الوضع الجديد تؤثر عند تلاقى متوسطات △ و ب هـ
، من هندسة الشكل نجد : و ن = ١/٢ و أ = ١/٢ × ٥ √٢
∴ و م١ = ٢/٣ و ن = ٢/٣ × ١/٢ × ٥ √٢ = ٥/٣ √٢
∴ م١ = (٥/٣ √٢ × حتا ٤٥° + ٧ ، ٥/٣ √٢ × حا ٤٥°) = (٢٦/٣ ، ٥/٣)
و يكون جدول الاحداثيات كما يلى :

	المربع أ ب و هـ	المستطيل و حـ ء هـ
الكتلة	٥ ك	٧ ك
س	٢٦/٣	٧/٢
ص	٥/٣	٥/٢

∴ س م = (٥ ك × ٢٦/٣ + ٧ ك × ٧/٢) / (٥ ك + ٧ ك) = ٤٠٧/٧٢
، ص م = (٥ ك × ٥/٣ + ٧ ك × ٥/٢) / (٥ ك + ٧ ك) = ١٥٥/٧٢
∴ احداثى مركز الثقل = (٤٠٧/٧٢ ، ١٥٥/٧٢)

الاختبار الثانى

أولاً : أجب عن السؤال التالى :
السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة
(أ) يؤثر على الجسم ازدواجان الأول مقدار احدى قوتيه ٢٠ ث كجم و ذراع العزم ١/٢ متر و اتجاه دورانه فى عكس اتجاه دوران الساعة و الثانى مقدار احدى قوتيه ٣٠ ث كجم و ذراع العزم ١ متر و اتجاه دورانه فى اتجاه دوران الساعة
فإن : الازدواج المحصل يساوى ....
(أ) ٢٠ ث كجم . م و اتجاه دورانه فى اتجاه دوران الساعة
(ب) ٢٠ ث كجم . م و اتجاه دورانه فى عكس اتجاه دوران الساعة
(حـ) ٤٠ ث كجم . م و اتجاه دورانه فى اتجاه دوران الساعة
(ء) ٤٠ ث كجم . م و اتجاه دورانه فى عكس اتجاه دوران الساعة

الحل

الازدواج المحصل = ٢٠ × ١/٢ − ٣٠ × ١ = − ٢٠ ث كجم . م
∴ الازدواج المحصل = ٢٠ ث كجم . م و اتجاه دورانه فى اتجاه دوران الساعة

أحمد الشنتوى

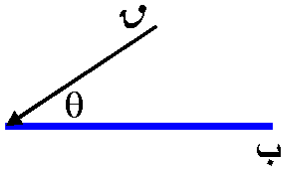
(٢) زاوية الاحتكاك هى ....

(أ) الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودى و رد الفعل المحصل
(ب) النسبة بين قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل العمودى
(حـ) النسبة بين معامل الاحتكاك السكونى و معامل الاحتكاك الحركى
(ء) الزاوية المحصورة بين قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل المحصل

الحل

الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودى و رد الفعل المحصل

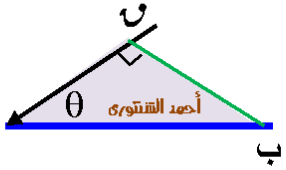
(٣) الشكل المقابل يوضح :



تأثير قوة مقدارها ق على طرف قضيب
قياس الزاوية θ التى تولد أكبر عزم حول النقطة ب هو ....

(أ) ٠° (ب) ٩٠° (حـ) ٤٥° (ء) ٣٠°

الحل



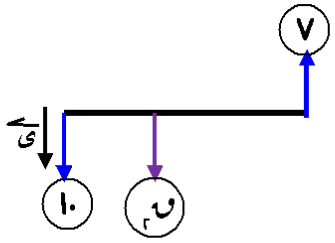
نفرض أن : طول القضيب = ل وحدة طول
∴ طول العمود الساقط من ب على خط عمل القوة = ل حا θ
∴ ع ب = ق ل حا θ
و يكون : ع ب أكبر ما يمكن عندما : حا θ = ١ أى عندما : θ = ٩٠°

(٤) قوتان متوازيتان و متضادتان فى الاتجاه مقدار احداهما ٧ نيوتن و مقدار محصلتهما ١٠ نيوتن
فإن : مقدار القوة الأخرى يساوى ....

(أ) ٣ نيوتن (ب) ١٧ نيوتن (حـ) ٢٧ نيوتن (ء) ٦ نيوتن

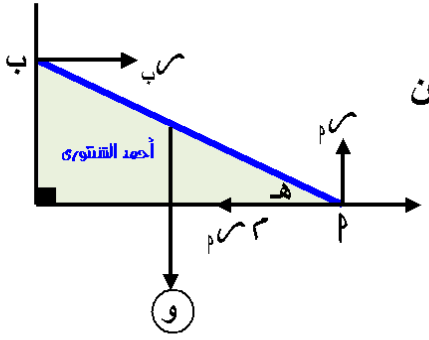
الحل

نفرض ق متجه وحدة فى اتجاه محصلة القوتين من الشكل المقابل :



١٠ ق = ق٢ ق − ٧ ق
و منها : ق٢ = ١٧ ق
أى أن : مقدار القوة الأخرى = ١٧ نيوتن

(٥) فى الشكل المقابل :



إذا كانت ل هى زاوية الاحتكاك بين الأرض و القضيب
فإن : طا هـ . طا ل = ...

(أ) ٢ (ب) ½
(حـ) ١ (ء) ٣

الحل

∵ القضيب متزن
∴ ر١ = و (١) ، ر ب = ٢ ر١ = طا ل ر١ = و طا ل (٢)
و بفرض أن : طول القضيب = س وحدة طول
، ∵ ع١ = ٠ ∴ و × ½ س حتا هـ − ر ب × س حا هـ = ٠
و بالقسمة على س حتا هـ ينتج : و = ٢ ر ب طا هـ ∴ من (٢) ينتج :
و = ٢ و طا ل . طا هـ ، ومنها ينتج : طا هـ . طا ل = ½

(٦) تؤثر الكتلة ٥ كجم فى النقطة (٢ ، −١) و تؤثر الكتلة ٧ كجم فى النقطة (١ ، ٢)
فإن : مركز ثقل الكتلتين يؤثر فى النقطة ....

(أ) (١٧ ، ٩)　　(ب) ($\frac{١٧}{١٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$)

(حـ) (١٩ ، ١٣)　　(ء) ($\frac{١٢}{١٣}$ ، $\frac{١}{٤}$)

الحل

الكتلة	٥	٧
س	٢	١
ص	−١	٢

$\therefore$ س$_م$ $= \frac{١ \times ٧ + ٢ \times ٥}{٧ + ٥} = \frac{١٧}{١٣}$

، ص$_م$ $= \frac{١ \times ٧ + (-١) \times ٥}{٧ + ٥} = \frac{٣}{٤}$

$\therefore$ احداثى مركز الثقل $= (\frac{١٧}{١٣} ، \frac{٣}{٤})$

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

السؤال الثانى :

(أ) إذا كانت القوة ق = ٥ س − ص + ٣ ع تؤثر فى النقطة (−١ ، ٢ ، ١) أوجد :

أولاً : عزم القوة بالنسبة لنقطة الأصل

ثانياً : طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل ق

الحل

و$\overrightarrow{أ}$ $= (-١ ، ٢ ، ١)$ ، $= (٥ ، -١ ، ٣)$

$$ج = \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ -١ & ٢ & ١ \\ ٥ & -١ & ٣ \end{vmatrix} = ٧ س + ٨ ص - ٩ ع$$

$(\| ج \|)^٢ = ٤٩ + ٦٤ + ٨١ = ١٩٤$ $\therefore$ $\| ج \| = \sqrt{١٩٤}$

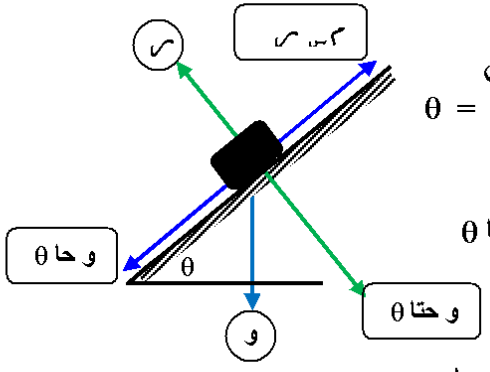
، $(\| ق \|)^٢ = ٢٥ + ١ + ٩ = ٣٥$ $\therefore$ $\| ق \| = \sqrt{٣٥}$

طول العمود $= \frac{\| ج \|}{\| ق \|} = \frac{\sqrt{١٩٤}}{\sqrt{٣٥}}$

أحمد الشنتورى

(٢) برهن أن : إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن و كان الجسم على وشك الانزلاق فإن : قياس زاوية الاحتكاك يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

الحل



بفرض أن : قياس زاوية الاحتكاك = ل

، قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى = θ

∵ الجسم على وشك الانزلاق

$\therefore$ معادلتا الاتزان هما :

م س ر = و حا θ ، ر = و حتا θ

$\therefore$ و حا θ = م س و حتا θ

= و ط ل حتا θ

و منها : ط θ = ط ل $\therefore$ θ = ل

أى أن : قياس زاوية الاحتكاك = قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

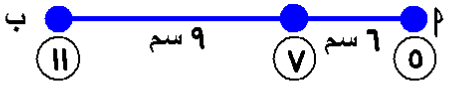
السؤال الثالث :

(أ) وضعت ثلاثة اجسام

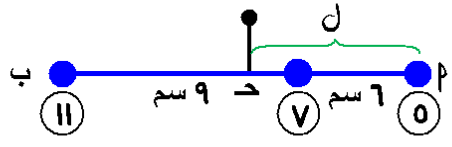
أوزانها ٥ ، ٧ ، ١١ ث كجم

على قضيب خفيف كما بالشكل

عين نقطة تعليق على القضيب بحيث يظل القضيب أفقياً



الحل



نفرض أن : القضيب يعلق من نقطة حـ

التى تبعد عن م مسافة = ل وحدة طول

$\therefore$ ج$_حـ$ = .

$\therefore$ − ٩ × ل − ٧ × (ل − ٦) + ١١ × (١٥ − ل) = .

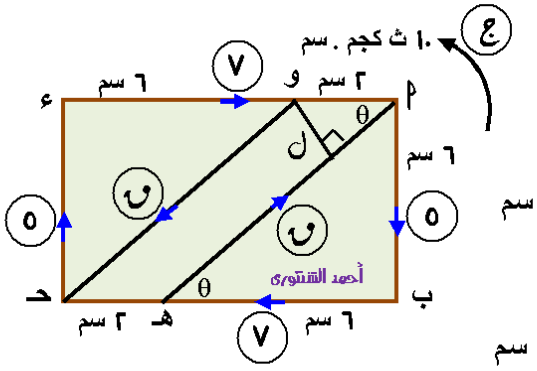
$\therefore$ − ٩ ل − ٧ ل + ٤٢ + ١٦٥ − ١١ ل = . ، و منها : ل = ٩

أى أن : القضيب يعلق من نقطة على بعد ٩ وحدة طول من نقطة م

أحمد الشنتورى

(٢) أ ب حـ ء مستطيل فيه أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ،
هـ ∈ ب حـ ، و ∈ أ ء بحيث ب هـ = ء و = ٦ سم أثرت قوى
مقاديرها ٥ ، ٥ ، ٧ ، ٧ ، ن ، ن ث كجم فى اتجاهات أ ب
، حـ ء ، ب حـ ، ء أ ، هـ أ ، و حـ على الترتيب فإذا كانت
المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه ١٠ ث كجم . سم فى اتجاه
حـ ب أ ء أوجد ن

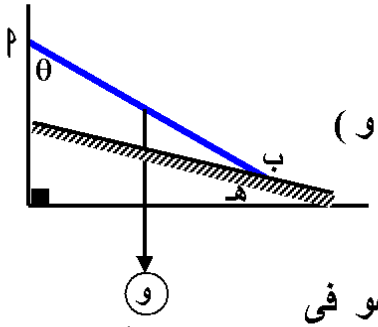
الحل



القوتان (٥ ، ٥) تكونان ازدواجاً
القياس الجبرى لعزمه
ج١ = – ٥ × ٨ = – ٤٠ ث كجم . سم
القوتان (٧ ، ٧) تكونان ازدواجاً
القياس الجبرى لعزمه
ج٢ = – ٧ × ٦ = – ٤٢ ث كجم . سم
القوتان (ن ، ن) تكونان ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه
ج٣ = ن × ل ث كجم . سم
من هندسة الشكل : ل = أ ء حتا θ = ٢ حتا ٤٥°
∴ ج٣ = ٢ ن حتا ٤٥°
∵ المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه = ١٠ ث كجم . سم ،
∴ ١٠ = ٢ ن حتا ٤٥° – ٤٠ – ٤٢
∴ ٩٢ = ٢ ن × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$
و منها : ن = ٤٦ $\sqrt{٢}$ ث كجم

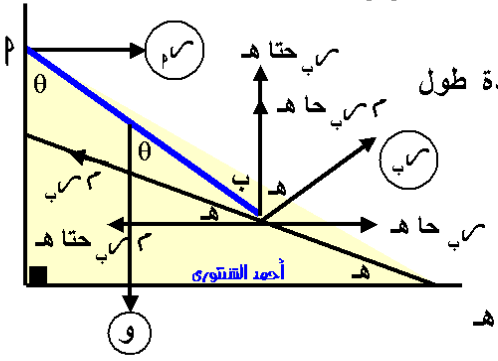
السؤال الرابع :

(أ) فى الشكل المقابل :



ترتكز احدى نهايتى سلم منتظم وزنه (و)
على حائط رأسى أملس و ترتكز النهاية
الأخرى على أرض خشنة تميل على
الأفقى بزاوية قياسها (هـ) لأعلى
فإذا كان السلم على وشك الانزلاق و هو فى
مستوى رأسى عمودى على على خط تقاطع الحائط مع الأرض
اثبت أن السلم يميل على الرأسى بزاوية قياسها θ حيث :
طا θ = ٢ طا (ى – هـ) حيث ى زاوية الاحتكاك

الحل



نفرض أن : طول القضيب = ل وحدة طول
، ∵ قياس زاوية الاحتكاك = ى
∴ م = $\frac{\text{حا ى}}{\text{حتا ى}}$
∵ السلم على وشك الانزلاق
∴ معادلات الاتزان هى :
ر ب حا هـ + ر أ = م ر ب حتا هـ
∴ ر ب حا هـ + ر أ = $\frac{\text{حا ى}}{\text{حتا ى}}$ × ر ب حتا هـ بالضرب × حتا ى ينتج :
ر أ حتا ى = ر ب حا ى حتا هـ – ر ب حتا ى حا هـ
∴ ر أ حتا ى = ر ب حا (ى – هـ) (١)
، و = ر ب حتا هـ + م ر ب حا هـ
∴ و = ر ب حتا هـ + $\frac{\text{حا ى}}{\text{حتا ى}}$ × ر ب حا هـ بالضرب × حتا ى ينتج :
و حتا ى = ر ب حتا ى حتا هـ – ر ب حا هـ حا ى
∴ و حتا ى = ر ب حتا (ى – هـ) (٢)

، ج$_{ب}$ = ٠

∴ و × $\frac{1}{2}$ ل حاθ − ر$_{م}$ × ل حتاθ = ٠ بالقسمة ÷ ل حتاθ ينتج :

و طاθ = ٢ ر$_{م}$ بالضرب × حتا ى ينتج :

و حتا ى طاθ = ٢ ر$_{م}$ حتا ى بالتعويض من (١) ، (٢) ينتج :

ر$_{ب}$ حتا (ى − هـ) طاθ = ٢ ر$_{ب}$ حا (ى − هـ)

بالقسمة ÷ ر$_{ب}$ حتا (ى − هـ) ينتج :

طاθ = ٢ طا (ى − هـ)

(٢) ثنى قضيب منتظم $\overline{أحـ}$ طوله ١٥ ل من نقطة ب حيث أب = ٥ ل
بحيث ق (∠أب حـ) = ٩٠° و علق القضيب من الطرف أ تعليقاً
حراً فاثبت أن $\overline{بحـ}$ يميل على الأفقى بزاوية θ حيث طاθ = $\frac{٤}{٥}$

الحل

∵ القضيب منتظم

∴ يمكن اعتباره مكون من القضيبين : $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$
كل منهما منتظم و من نفس المادة

، ∵ أب = ٥ ل ، أحـ = ١٥ ل ∴ بحـ = ١٠ ل

∴ أب : بحـ = ١ : ٢

، ∵ الأوزان تتناسب مع الأطوال

∴ بفرض أن كتلة من القضيبين هما ل ، ٢ ل على الترتيب
و مركز ثقل كل منهما يؤثر عند منتصفه أى ء ، ى كما بالشكل المقابل
و بأخذ الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{بحـ}$ ، $\overleftarrow{بأ}$ فيكون :

ى (٥ ل ، ٠) ، ء (٠ ، $\frac{٥}{٢}$ ل)

و نكون الجدول المقابل :

الكتلة	٢ ل	ل
س	٥ ل	٠
ص	٠	$\frac{٥}{٢}$ ل

∴ س$_{م}$ = $\frac{٢ل \times ٥ل}{٣ل}$ = $\frac{١٠}{٣}$ ل

، ص$_{م}$ = $\frac{ل \times \frac{٥}{٢} ل}{٣ل}$ = $\frac{٥}{٢}$ ل

∴ احداثى مركز الثقل = ($\frac{١٠}{٣}$ ل ، $\frac{٥}{٢}$ ل) بالنسبة لنقطة ب

أى أن : م ء = $\frac{١٠}{٣}$ ل ، م هـ = ب ء = $\frac{٥}{٢}$ ل

عند التعليق الحر من أ نجد أن $\overleftarrow{أم}$ هو الخط الرأسى

و بفرض أن : $\overline{بحـ}$ يصنع مع $\overleftarrow{أم}$ زاوية قياسها θ

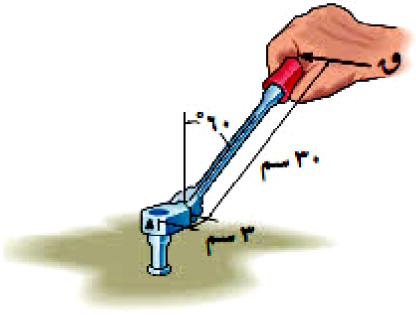
من هندسة الشكل نجد : أء = أب − ب ء = ٥ ل − $\frac{٥}{٢}$ ل = $\frac{٢٥}{٦}$ ل

∴ طاθ = $\frac{\frac{٢٥}{٦} ل}{\frac{١٠}{٣} ل}$ = $\frac{٤}{٥}$

∴ $\overline{بحـ}$ يميل على الأفقى بزاوية ظلها = طا (٩٠° − θ) = طتا θ = $\frac{٤}{٥}$

السؤال الخامس :

(أ) فى الشكل المقابل :
إذا كان عزم القوة ق العمودية
على ذراع الدوران بالنسبة لنقطة
أ يساوى ٦٢٠ نيوتن . سم
أوجد ق



الحل

∵ القوة عمودية على ذراع الدوران

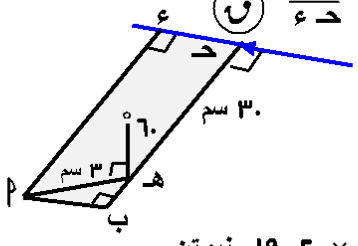
∴ من هندسة الشكل : $\overline{بحـ} \perp \overline{حـء}$ ، $\overline{أء} \perp \overline{حـء}$

، ق (∠أهـ ب) = ٣٠°

، أء = ب حـ = حـ هـ + هـ ب
= ٣٠ + ٣ حتا ٣٠° = ٣٢,٦

، ∵ ج$_{م}$ = ق × أء

∴ ٦٢٠ = ق × ٣٢,٦ و منها ينتج : ق × ١٩,٠٢ نيوتن



(٢) ﻡ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢٠ سم ، م نقطة تقاطع متوسطاته ، ء نقطة منتصف $\overline{ب حـ}$ ، ثبت كتل مقاديرها ١٥ ، ٣٠ ، ٧٥ ، ٤٥ ، ٤٥ فى النقط ﻡ ، ب ، ء ، حـ ، م على الترتيب عين مركز ثقل هذه المجموعة ، و إذا رفعت الكتلة الموجودة عن ب فأين يقع مركز ثق المجموعة المتبقية

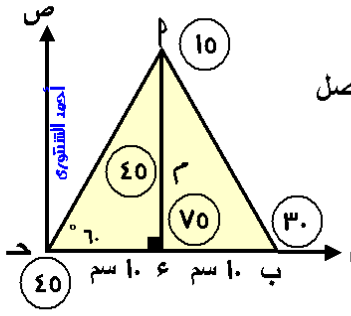
الحل

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{حـ س}$ ، $\overleftarrow{حـ ص}$ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة حـ نقطة أصل و من هندسة الشكل نجد :

ﻡ ء = ٢٠ جا ٦٠° = ١٠ $\sqrt{٣}$ سم

فيكون : حـ (٠ ، ٠) ، ء (١٠ ، ٠) ، ب (٢٠ ، ٠)

، ﻡ (١٠ ، ١٠ $\sqrt{٣}$) ، م (١٠ ، $\frac{١٠}{٣}\sqrt{٣}$)



و نكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

الكتلة	عند حـ	عند ء	عند ب	عند ﻡ	عند م
س	٠	١٠	٢٠	١٠	١٠
ص	٠	٠	٠	١٠ $\sqrt{٣}$	$\frac{١٠}{٣}\sqrt{٣}$

∴ $س_م = \frac{١٠ \times ٤٥ + ١٠ \times ١٥ + ٢٠ \times ٣٠ + ١٠ \times ٧٥ + ٠ \times ٤٥}{٤٥ + ١٥ + ٣٠ + ٧٥ + ٤٥} = \frac{٦٥}{٧}$

، $ص_م = \frac{٤٥ \times ٠ + ٤٥ \times ٠ + ٣٠ \times ٠ + ١٥ \times ١٠\sqrt{٣} + ٤٥ \times \frac{١٠}{٣}\sqrt{٣}}{٤٥ + ١٥ + ٣٠ + ٧٥ + ٤٥} = \frac{١٠\sqrt{٣}}{٧}$

∴ احداثى مركز الثقل = ($\frac{٦٥}{٧}$ ، $\frac{١٠\sqrt{٣}}{٧}$) بالنسبة للنقطة حـ

عند فصل الكتلة ٣٠ عند نقطة ب

نكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

الكتلة	عند حـ	عند ء	عند ﻡ	عند م
س	٠	١٠	١٠	١٠
ص	٠	٠	١٠ $\sqrt{٣}$	$\frac{١٠}{٣}\sqrt{٣}$

∴ $س_م = \frac{١٠ \times ٤٥ + ١٠ \times ١٥ + ١٠ \times ٧٥ + ٠ \times ٤٥}{٤٥ + ١٥ + ٧٥ + ٤٥} = \frac{١٥}{٢}$

، $ص_م = \frac{٤٥ \times ٠ + ٤٥ \times ٠ + ١٥ \times ١٠\sqrt{٣} + ٤٥ \times \frac{١٠}{٣}\sqrt{٣}}{٤٥ + ١٥ + ٧٥ + ٤٥} = \frac{٥\sqrt{٣}}{٧}$

∴ احداثى مركز الثقل = ($\frac{١٥}{٢}$ ، $\frac{٥\sqrt{٣}}{٧}$) بالنسبة للنقطة حـ

حل آخر للجزء الثانى :

نكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

الكتلة	٢١٠	٣٠ −
س	$\frac{٦٥}{٧}$	٢٠
ص	$\frac{١٠\sqrt{٣}}{٧}$	٠

∴ $س_م = \frac{٢١٠ \times \frac{٦٥}{٧} - ٣٠ \times ٢٠}{٢١٠ - ٣٠} = \frac{١٥}{٢}$

، $ص_م = \frac{٢١٠ \times \frac{١٠\sqrt{٣}}{٧} - ٣٠ \times ٠}{٢١٠ - ٣٠} = \frac{٥\sqrt{٣}}{٧}$

∴ احداثى مركز الثقل = ($\frac{١٥}{٢}$ ، $\frac{٥\sqrt{٣}}{٧}$) بالنسبة للنقطة حـ

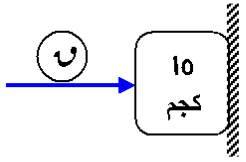
أحمد الشنتوى

الاختبار الثالث

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

السؤال الأول : أكمل ما يلى

(١) مقدار أقل قوة أفقية $\overleftarrow{ق}$ لازمة لاتزان جسم كتلته ١٥ كجم على حائط رأسى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه و بين الجسم $\frac{١}{٥}$ يساوى .... ث كجم



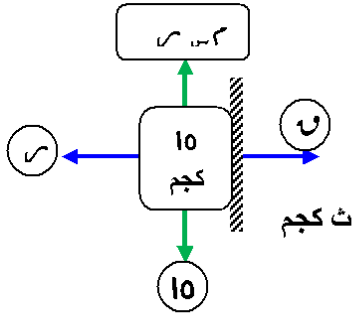
الحل

معادلتا الاتزان :

$ق = س$ ،　$م_{س} = ١٥$

$\therefore س = \frac{١}{٥} ١٥$　و منها : $ق = ٧٥$ ث كجم

$\therefore ق = ٧٥$ ث كجم



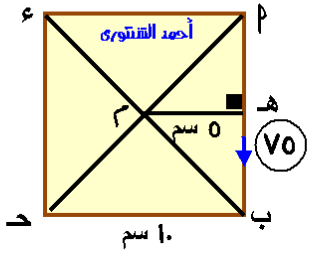
(٢) قوة مقدارها ٧٠ نيوتن تؤثر $\overleftarrow{ب}$ حيث ا ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم فإن : معيار عزم القوة بالنسبة لمركز المربع يساوى ....

الحل

من خواص المربع :

$م_{هـ} = ٥$ سم

$\therefore ج_{م} = ٧٠ \times ٥ = ٣٥٠$ نيوتن . سم



(٣) إذا كانت : $\overleftarrow{ق_١}$ // $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_١} = س \overleftarrow{س} - ٢ \overleftarrow{ص}$ ، $\| \overleftarrow{ق_٢} \| = ٤\sqrt{٥}$ وحدة فإن : $\overleftarrow{ق_٢} = ...$

الحل

$\because \overleftarrow{ق_١}$ // $\overleftarrow{ق_٢}$　$\therefore \overleftarrow{ق_٢} = ل \overleftarrow{ق_١} = (ل ، - ٢ ل)$

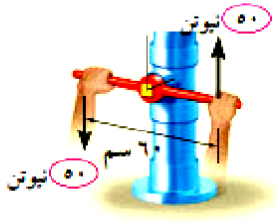
$\therefore \| \overleftarrow{ق_٢} \| = \| (ل ، - ٢ ل) \|$

$\therefore ٤\sqrt{٥} = | ل | \sqrt{٥}$　$\therefore | ل | = ٤$

$\therefore ل = \pm ٤$　$\therefore \overleftarrow{ق_٢} = \pm ٤ (١ ، - ٢)$

(٤) فى الشكل المقابل :

عزم الازدواج الناتج من القوتين ٥٠ ، ٥٠ نيوتن يساوى ....



الحل

ج = ٥٠ × ٦٠ = ٣٠٠٠ نيوتن . سم

(٥) عندما يوضع قضيب داخل أناء كروى أملس فإنه يتزن عندما يمر خط عمل الوزن ....

الحل

بمركز الأناء (الكرة)

(٦) مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المثلثة الشكل يقع عند ....

الحل

نقطة تقاطع المتوسطات

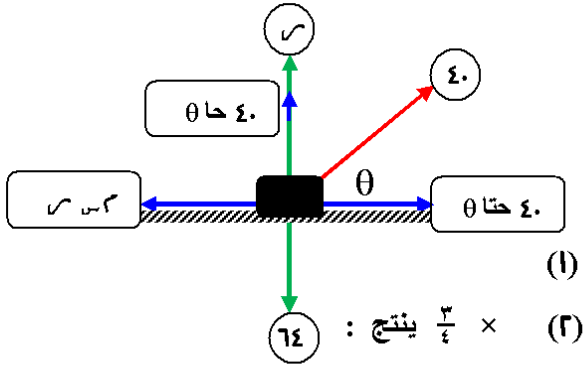
أحمد الشنتورى

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

السؤال الثانى :

(أ) وضع جسم وزنه ٦٤ نيوتن على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك بينهما يساوى $\frac{٣}{٤}$ ، أثرت على الجسم قوة مقدارها ٤٠ نيوتن و تميل على الأفقى بزاوية قياسها θ ، فإذا كان الجسم على وشك الحركة فما قيمة θ

الحل



∵ الجسم على وشك الحركة

∴ معادلتا الأتزان هما :

ر س = ٤٠ حتا θ

∴ $\frac{٣}{٤}$ ر = ٤٠ حتا θ (١)

، ر + ٤٠ حا θ = ٦٤ (٢) × $\frac{٣}{٤}$ ينتج :

$\frac{٣}{٤}$ ر + ٣٠ حا θ = ٤٨ ، بالتعويض من (١) ينتج :

٤٠ حتا θ + ٣٠ حا θ = ٤٨ ÷ ٢ ينتج : ٢٠ حتا θ + ١٥ حا θ = ٢٤

∴ ٢٠ حتا θ = ٢٤ − ١٥ حا θ بالتربيع ينتج :

٤٠٠ حتا^{٢} θ = ٥٧٦ − ٧٢٠ حا θ + ٢٢٥ حا^{٢} θ

٤٠٠ (١ − حا^{٢} θ) = ٥٧٦ − ٧٢٠ حا θ + ٢٢٥ حا^{٢} θ

∴ ٤٠٠ − ٤٠٠ حا^{٢} θ = ٥٧٦ − ٧٢٠ حا θ + ٢٢٥ حا^{٢} θ

∴ ٦٢٥ حا^{٢} θ − ٧٢٠ حا θ + ١٧٦ = ٠

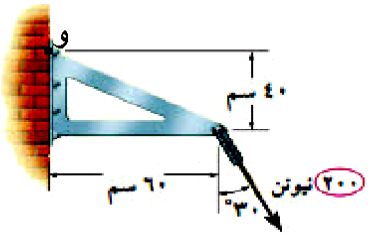
∴ (١٢٥ حا θ − ٤٤) (٥ حا θ − ٤) = ٠

∴ حا θ = $\frac{٤٤}{١٢٥}$ ∴ θ = ٢٠,٦١°

أ؛ حا θ = $\frac{٤}{٥}$ ∴ θ = ٥٣,١٣° (ملاحظة : توجد حلول أخرى)

(٢) فى الشكل المقابل :

أوجد عزم القوة ٢٠٠ نيوتن بالنسبة لنقطة و

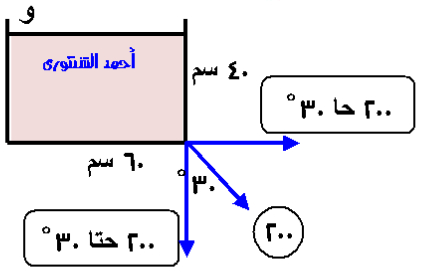


الحل

ع$_{و}$ = ٢٠٠ حا ٣٠° × ٤٠ −

٢٠٠ حتا ٣٠° × ٦٠

= − ٦٣٩٢,٣ نيوتن . سم



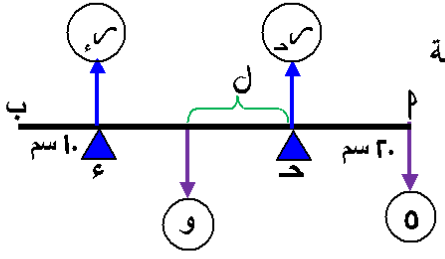
السؤال الثالث :

(أ) أ ب قضيب غير منتظم طوله ١ متر يرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند حـ ، ء حيث أ حـ = ٢٠ سم ، ب ء = ١٠ سم

إذا كان أكبر ثقل يمكن تعليقه من نقطة أ أو من نقطة ب دون أن يختل توزان القضيب هو ٥ ، ٤ ث كجم على الترتيب

اوجد وزن القضيب

الحل



نفرض أن : وزن القضيب يؤثر عند نقطة

تبعد عن حـ مسافة = ل سم

عند تعليق ثقل ٥ كجم من أ

فإن القضيب يصبح على وشك الدوران حول حـ

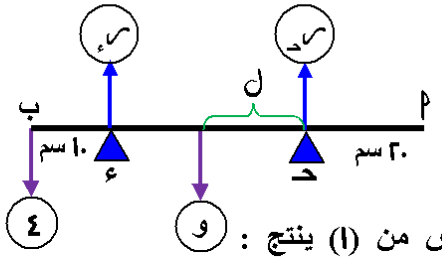
∴ ر$_{ء}$ = ٠ ، ∴ ع$_{حـ}$ = ٠

∴ ٥ × ٢٠ − و × ل = ٠

∴ و ل = ١٠٠ (١)

أحمد الشنتوى

عند تعليق ثقل ٤ كجم من ب
فإن القضيب يصبح على وشك الدوران
حول ء



∴ ك ء = ٠ ، ∴ ع حـ = ٠

∴ ٤ × ١٠ – و × (٧٠ – ل) = ٠

∴ ٤٠ – ٧٠ و + و ل = ٠　　بالتعويض من (١) ينتج :

∴ ٧٠ و = ٤٠ + ١٠٠　　و منها : و = ٢ ث كجم

، بالتعويض فى (١) ينتج : ل = ٥٠ سم

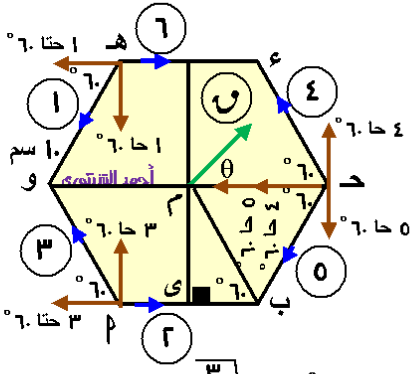
أى أن : وزن القضيب ٢ ث كجم معلق من نقطة على بعد ٧٠ سم من نقطة م

(٢) م ب حـ ء هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ٥ ، ٤ ، ٦ ، ١ ، ٣ نيوتن فى $\overleftarrow{م ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{هـ ء}$ ، $\overleftarrow{هـ و}$ ، $\overleftarrow{م و}$ على الترتيب اوجد مقدار و اتجاه القوة التى يجب أن تؤثر فى مركز المسدس حتى تؤول المجموعة إلى ازدواج ثم عين عزمه

الحل

نفرض $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة في اتجاه $\overleftarrow{م حـ}$ و العمودى عليه

و بتحليل القوى كما بالشكل المقابل ينتج :



$\overleftarrow{س}$ = ٢ + ٦ – ٣ حتا ٦٠° – ١ حتا ٦٠°

– ٤ حتا ٦٠° – ٥ حتا ٦٠°

= ٨ – ١٣ حتا ٦٠° = $\frac{٣}{٢}$

$\overleftarrow{ص}$ = ٣ حا ٦٠° – ١ حا ٦٠° – ٥ حا ٦٠° + ٤ حا ٦٠° = $\frac{٣\sqrt{}}{٢}$

∴ $\overleftarrow{ح}$ = $\frac{٣}{٢}$ $\overleftarrow{س}$ + $\frac{٣\sqrt{}}{٢}$ $\overleftarrow{ص}$ ، ∵ المجموعة تؤول إلى ازدواج

∴ $\overleftarrow{ق}$ = – $\overleftarrow{ح}$ = – $\frac{٣}{٢}$ $\overleftarrow{س}$ – $\frac{٣\sqrt{}}{٢}$ $\overleftarrow{ص}$

∴ ‖ $\overleftarrow{ق}$ ‖ = ٣ $\sqrt{}$ نيوتن ، ظا θ = $\frac{١}{٣\sqrt{}}$

، ∵ س < ٠ ، ص > ٠ ∴ θ = ١٨٠° – ٣٠° = ٢١٠°

، خواص المسدس المنتظم : ى م = $\frac{١}{٢}$ م ب ظا ٦٠° = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

∴ البعد العمودى بين مركز المسدس و أضلاعه = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

∴ ع م = (٢ – ٥ + ٤ – ٦ + ١ – ٣) × ٥ $\sqrt{٣}$

= – ٣٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن . سم

السؤال الرابع :

(أ) م ب قضيب منتظم وزنه (و) يرتكز باحدى طرفيه م على أرض أفقية ملساء و بطرفه الآخر ب على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها يساوى ضعف قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى فى وضع الاتزان حفظ اتزان القضيب بواسطة خيط مربوط فى طرف المستند على الأرض الأفقية و الطرف الآخر للخيط فى نقطة على خط تقاطع المستوى المائل مع المستوى الأفقى اوجد مقدار الشد فى الخيط و ردى الفعل عند طرفى القضيب عندما يميل القضيب على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°

الحل

نفرض أن : طول القضيب = ل وحدة طول

، ∵ القضيب متزن

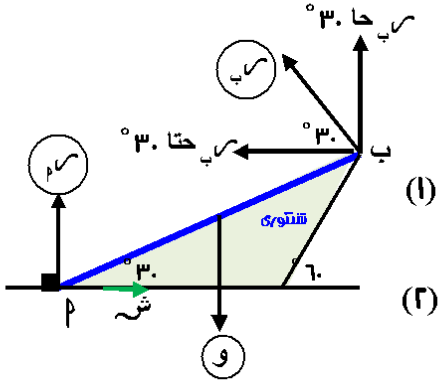
∴ ش$\overleftarrow{ب}$ = ش$\overleftarrow{ب}$ حتا ٣٠° = $\frac{٣\sqrt{}}{٢}$ (١)

، ش$\overleftarrow{م}$ + ش$\overleftarrow{ب}$ حا ٣٠° = و

∴ ش$\overleftarrow{م}$ + $\frac{١}{٢}$ ش$\overleftarrow{ب}$ = و (٢)

، ع م = ٠

∴ و × $\frac{١}{٢}$ ل حتا ٣٠° = ش$\overleftarrow{ب}$ حتا ٣٠° × ل حا ٣٠° + ش$\overleftarrow{م}$ حا ٣٠° × ل حتا ٣٠°



بالقسمة على ل حتا ٣٠° ينتج : $\frac{1}{2}$ و = $\frac{1}{2}$ $س_ب$ + $\frac{1}{2}$ $س_ب$

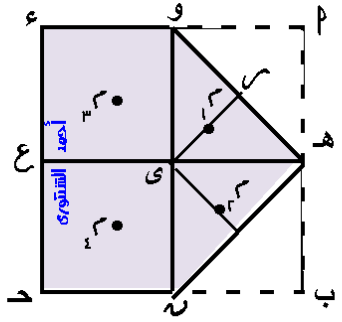
∴ $س_ب$ = $\frac{1}{2}$ و بالتعويض من (٢) ينتج :

$س_م$ + $\frac{1}{4}$ و = و و منها : $س_م$ = $\frac{3}{4}$ و

، بالتعويض من (١) ينتج : $ش_م$ = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ و

(٢) صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع طول ضلعه ل فإذا كان هـ ، و ، $ر_ه$ منتصفات $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ ء}$ ، $\overline{ب حـ}$ على الترتيب ، ثنى المثلث أ هـ و حول الضلع $\overline{هـ و}$ بحيث انطبقت أ على مركز المربع ى و ثنى المثلث ب هـ $ر_ه$ على الضلع $\overline{هـ ر_ه}$ بحيث أنطبق الرأس ب على مركز المربع ى ، عين مركز ثقل الصفيحة فى وضعها الجديد

الحل



نأخذ الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{ى هـ}$ ، $\overleftarrow{ى و}$

∵ الصفيحة رقيقة منتظمة

∴ يمكن اعتبارها مكونة من ٤ أجزاء كما بالشكل

من هندسة الشكل :

$ى م_١$ = $\frac{2}{3}$ $ى ر_ه$ = $\frac{2}{3}$ × $\frac{1}{2}$ $ى أ$

= $\frac{1}{3}$ × $\frac{1}{2}$ $\sqrt{2}$ ل = $\frac{1}{2}$ $\sqrt{2}$ ل

∴ $م_١$ = ($\frac{1}{2}$ $\sqrt{2}$ ل حتا ٤٥° ، $\frac{1}{2}$ $\sqrt{2}$ ل حا ٤٥°) = ($\frac{1}{2}$ ل ، $\frac{1}{2}$ ل)

، بالمثل : $م_٢$ = ($\frac{1}{2}$ ل ، − $\frac{1}{2}$ ل) ، $م_٣$ = (− $\frac{1}{2}$ ل ، $\frac{1}{2}$ ل)

، $م_٤$ = (− $\frac{1}{2}$ ل ، − $\frac{1}{2}$ ل) ، بفرض أن : كتلة الصفيحة = ٤ ل

∴ كتلة الصفيحة المثلثة و هـ ى المكونة من طبقتين = ل ، و مركزها $م_١$

، كتلة الصفيحة المثلثة $ر_ه$ هـ ى المكونة من طبقتين = ل ، و مركزها $م_٢$

، كتلة الصفيحة المربعة و ى ع ء = ل ، و مركزها $م_٣$

، كتلة الصفيحة المربعة ى $ر_ه$ حـ ع = ل ، و مركزها $م_٤$

و نكون الجدول التالى :

الكتلة	ل	ل	ل	ل
س	$\frac{1}{2}$ ل	$\frac{1}{2}$ ل	− $\frac{1}{4}$ ل	− $\frac{1}{4}$ ل
ص	$\frac{1}{2}$ ل	− $\frac{1}{2}$ ل	$\frac{1}{4}$ ل	− $\frac{1}{4}$ ل

∴ $س_م$ = $\frac{ل \times \frac{1}{2} ل + ل \times \frac{1}{2} ل - ل \times \frac{1}{4} ل - ل \times \frac{1}{4} ل}{٤ ل}$ = − $\frac{1}{24}$ ل

، $ص_م$ = $\frac{ل \times \frac{1}{2} ل - ل \times \frac{1}{2} ل + ل \times \frac{1}{4} ل - ل \times \frac{1}{4} ل}{٤ ل}$ = صفر

∴ احداثى مركز الثقل = (− $\frac{1}{24}$ ل ، ٠) بالنسبة لمركز الصفيحة

حل آخر :

يمكن اعتبار الصفيحة مكون من ٣ أجزاء

الصفيحة المثلثة و هـ ى المكونة من طبقتين و كتلتها = ل ، و مركزها $م_١$ ،

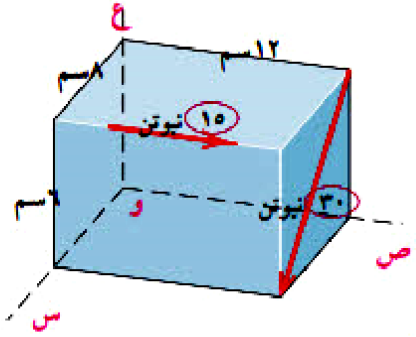
الصفيحة المثلثة ل هـ ى المكونة من طبقتين و كتلتها = ل ، و مركزها $م_٢$ ،

الصفيحة المستطيلة و ء حـ $ر_ه$ ، و كتلتها = ٢ ل ، و مركزها (٠ ، − $\frac{1}{4}$ ل)

السؤال الخامس :

(أ) فى الشكل المقابل :

اوجد مجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة و

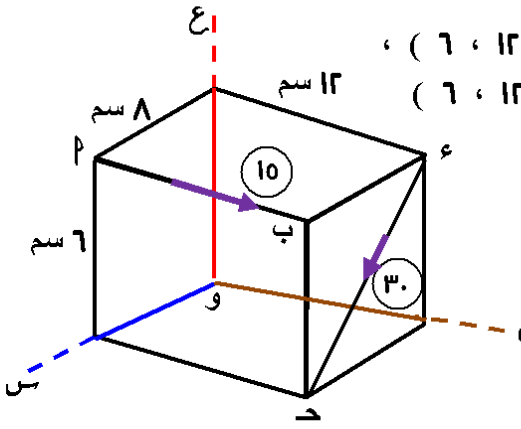


الحل

من هندسة الشكل نجد أن :

أ (٨ ، ٠ ، ٦) ، ب (٨ ، ١٢ ، ٦) ،

حـ (٨ ، ١٢ ، ٠) ، ء (٠ ، ١٢ ، ٦)



$\therefore \overrightarrow{أب} = (٨ ، ١٢ ، ٦) - (٨ ، ٠ ، ٦)$

$= (٠ ، ١٢ ، ٠)$

$\therefore \| \overrightarrow{أب} \| = ١٢$

، $\overrightarrow{ق_١} = ق_١ \left(\frac{\overrightarrow{أب}}{\| \overrightarrow{أب} \|} \right)$

$= ١٥ \times \left(\frac{(٠ ، ١٢ ، ٠)}{١٢} \right) = (٠ ، ١٥ ، ٠)$

، $\overrightarrow{ء حـ} = (٨ ، ١٢ ، ٠) - (٠ ، ١٢ ، ٦) = (٨ ، ٠ ، -٦)$

$\therefore \| \overrightarrow{ء حـ} \| = ١٠$

، $\overrightarrow{ق_٢} = ق_٢ \left(\frac{\overrightarrow{ء حـ}}{\| \overrightarrow{ء حـ} \|} \right)$

$= ٣٠ \times \left(\frac{(٨ ، ٠ ، -٦)}{١٠} \right) = (٢٤ ، ٠ ، -١٨)$

$\therefore \overrightarrow{ع ج} = \overrightarrow{و أ} \times \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{و ء} \times \overrightarrow{ق_٢}$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٨ & ٠ & ٦ \\ ٠ & ١٥ & ٠ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٠ & ١٢ & ٦ \\ ٢٤ & ٤ & -١٨ \end{vmatrix}$$

$= -٩٠ \overrightarrow{س} + ١٢٠ \overrightarrow{ع} - ٢١٦ \overrightarrow{س} - ١٤٤ \overrightarrow{ص} - ٢٨٨ \overrightarrow{ع}$

$= -٣٠٦ \overrightarrow{س} - ١٤٤ \overrightarrow{ص} - ١٦٨ \overrightarrow{ع}$

(٢) اوجد مركز ثقل التوزيع التالى :

$و_١ = ٢٠$ نيوتن و يؤثر فى (٢ ، ١) ،

$و_٢ = ١٥$ نيوتن و يؤثر فى (– ٣ ، ١)

$و_٣ = ٢٥$ نيوتن و يؤثر فى (١ ، – ١)

الحل

الكتلة	$و_١$	$و_٢$	$و_٣$
س	٢	– ٣	١
ص	١	١	– ١

$\therefore$ س$_م$ $= \frac{٢٠ \times ٢ - ١٥ \times ٣ + ٢٥ \times ١}{٢٠ + ١٥ + ٢٥}$

$= \frac{١}{٣}$

، ص$_م$ $= \frac{٢٠ \times ١ - ١٥ \times ١ + ٢٥ \times ١}{٢٠ + ١٥ + ٢٥} = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ احداثى مركز الثقل $= \left(\frac{١}{٣} ، \frac{١}{٢} \right)$

احداثى مركز الثقل $= \left(\frac{٤٠٧}{٧٢} ، \frac{١٥٥}{٧٢} \right)$

الاختبار الرابع

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(ا) معامل الاحتكاك يتوقف على ....

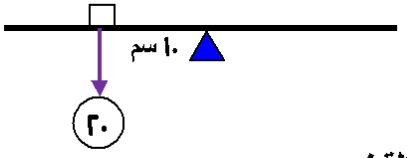
(أ) مساحة سطح التلامس بين الجسمين　(ب) شكل الجسمين

(حـ) طبيعة الجسمي　(ء) كل ما سبق

الحل

طبيعة الجسمين

(٢) الشكل المقابل يمثل قضيب منتظم يرتكز على حامل عند منتصفه وضع عليه جسم كما بالشكل



أى من القوى الآتية تحدث توازن القضيب

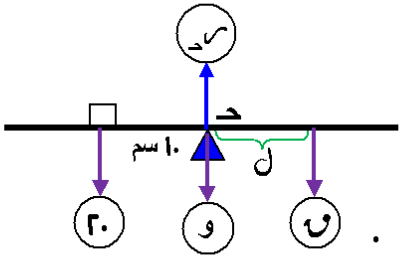
(أ) قوة مقدارها ١٠ نيوتن لأعلى تؤثر على بعد ٢٠ سم على يمين منتصف القضيب

(ب) قوة مقدارها ١٠ نيوتن لأسفل تؤثر على بعد ٢٠ سم على يمين منتصف القضيب

(حـ) قوة مقدارها ٣٠ نيوتن لأعلى تؤثر على بعد ٥ سم على يسار منتصف القضيب

(ء) قوة مقدارها ٣٠ نيوتن لأسفل تؤثر على بعد ٥ سم على يسار منتصف القضيب

الحل



بفرض أن : قوة مقدارها و نيوتن لأسفل تؤثر على على بعد ل سم على يمين منتصف القضيب ، ∵ القضيب متزن

∴ ج حـ = ٠ ∴ ٢٠ × ١٠ − و × ل = ٠

∴ و × ل = ٢٠٠ و لكى يتحقق ذلك يجب أن يكون مقدار القوة ١٠ نيوتن و تؤثر لأسفل على بعد ٢٠ سم على يمين منتصف القضيب

(٣) أثرت قوة $\overleftarrow{و}$ = و$_{س}$ $\overleftarrow{س}$ + و$_{ص}$ $\overleftarrow{ص}$ + و$_{ع}$ $\overleftarrow{ع}$ فى نقطة م متجه موضعها بالنسبة لنقطة الأصل هو م$_{س}$ $\overleftarrow{س}$ + م$_{ص}$ $\overleftarrow{ص}$ − م$_{ع}$ $\overleftarrow{ع}$ فإن مركبة عزم $\overleftarrow{و}$ حول محور س هى .....

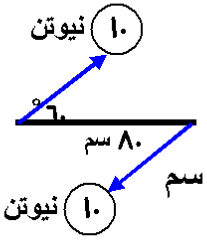
(أ) و$_{س}$ × م$_{ع}$ − و$_{ع}$ × م$_{س}$ (ب) و$_{ع}$ × م$_{ص}$ + و$_{ص}$ × م$_{ع}$

(حـ) و$_{س}$ × م$_{ص}$ + و$_{ص}$ × م$_{س}$ (ء) و$_{ص}$ × م$_{ع}$ + و$_{ع}$ × م$_{ص}$

الحل

و$_{ع}$ × م$_{ص}$ + و$_{ص}$ × م$_{ع}$

(٤) عزم الازدواج المقابل يساوى ....



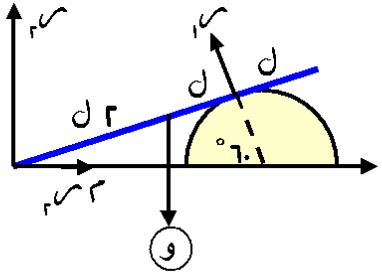
(أ) ٨٠٠ نيوتن . سم (ب) ٨٠ نيوتن . سم

(حـ) ٤٠٠ √٣ نيوتن . سم (ء) ٤٠ √٣ نيوتن . سم

الحل

ج = ١٠ × ٨٠ حا ٦٠° = ٤٠٠ √٣ نيوتن . سم

(٥) فى الشكل المقابل :
إذا كان القضيب على وشك الانزلاق فإن :



م$_{١}$ = ... ، م$_{٢}$ = ...

(أ) ٢ و (ب) ½ و

(حـ) √٣/٢ و (ء) √٣/٣ و

الحل

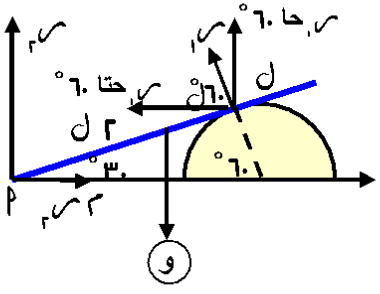
∵ القضيب متزن

∴ م$_{١}$ حا ٦٠° + م$_{٢}$ = و

∴ √٣/٢ م$_{١}$ حا ٦٠° + م$_{٢}$ = و (١)

، م$_{٢}$ = م$_{١}$ حتا ٦٠°

∴ م$_{٢}$ = ½ م$_{١}$ (٢)



، $ع_م = ٠$

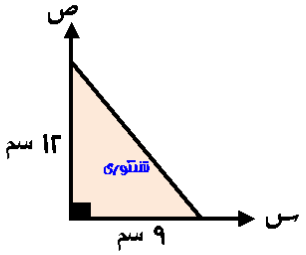
$\therefore ر_١$ حا ٦٠° × ٣ ل حتا ٣٠° + $ر_١$ حتا ٦٠° × ٣ ل حا ٣٠° − و × ٢ ل حا ٣٠° = ٠　　و منها : $ر_١ = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$ و

بالتعويض فى (١) ينتج : $ر_١ = \frac{١}{٢}$ و

(٦) مركز ثقل الصفيحة المظللة فى الشكل المقابل هو ....

(أ) (٣ ، ٤)　　(ب) (٤ ، ٣)

(حـ) (٦ ، ٨)　　(ء) (٨ ، ٦)



الحل

من الشكل تكون احداثيات رؤوس الصفيحة هى :

(٠ ، ٠) ، (٩ ، ٠) ، (٠ ، ١٢)　　∵ الصفيحة مثلثة الشكل

∴ مركز ثقل الصفيحة يقع عند نقطة تلاقى المتوسطات

∴ احداثى مركز الثقل = ($\frac{٠ + ٩ + ٠}{٣}$ ، $\frac{١٢ + ٠ + ٠}{٣}$) = (٣ ، ٤)

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

السؤال الثانى :

(أ) وضع جسم وزنه ١٦ ث كجم على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° و معامل الاحتكاك بينه و بين الجسم يساوى $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ اثرت على الجسم قوة تعمل فى خط أكبر ميل للمستوى و لأعلى مقدارها ١٠ ث كجم فإذا كان الجسم متزناً عين قوة الاحتكاك و بين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أو لا ؟

الحل

∴ القضيب متزن　　∴ معادلات اتزان هى :

١٠ = ع + ١٦ حا ٣٠°

∴ ١٠ = ع + ١٦ × $\frac{١}{٢}$

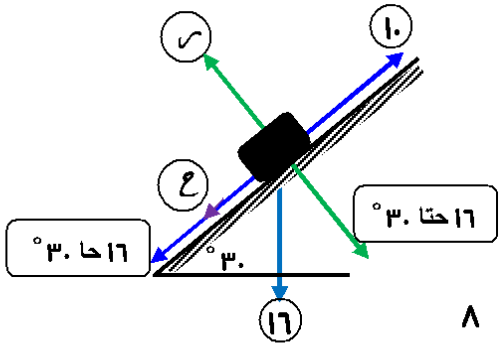
و منها : ع = ٢

، $ر$ = ١٦ حتا ٣٠°

∴ $ر = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ١٦ = ٨\sqrt{٣}$

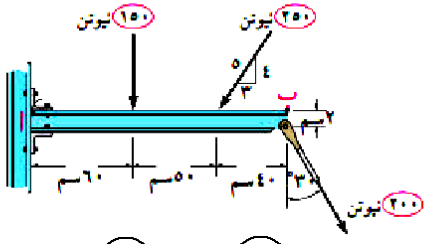
∴ $ر_م = \frac{١}{\sqrt{٣}} \times ٨\sqrt{٣} = ٨$

∴ $ر_م$ > ع　　∴ الجسم متزن و ليس على وشك الحركة



(٢) فى الشكل المقابل :

ثلاث قوى مستوية تؤثر فى القضيب أ ب اوجد القياسات الجبرية لمجموع عزوم القوى بالنسبة لكل من النقطتين أ ، ب



الحل

$ع_م$ = − ١٥٠ × ٦٠ − ٢٥٠ حا θ × ١١٠

− ٢٠٠ حتا ٣٠° × ١٥٠

+ ٢٠٠ حا ٣٠° × ٢

= − ٩٠٠٠ − $\frac{٤}{٥}$ × ٢٥٠ × ١١٠

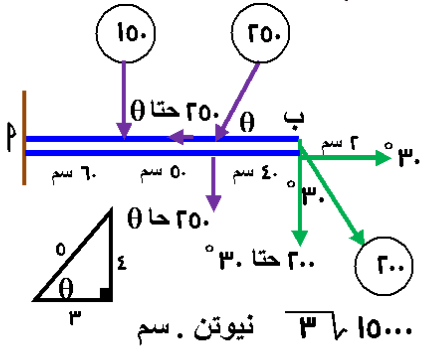
− ٢٠٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ١٥٠

+ ٢٠٠ × $\frac{١}{٢}$ × ٢ = − ٣٠٨٠٠ − $١٥٠٠٠\sqrt{٣}$ نيوتن . سم

$ع_ب$ = ١٥٠ × ٩٠ + ٢٥٠ حا θ × ٤٠ + ٢٠٠ حا ٣٠° × ٢

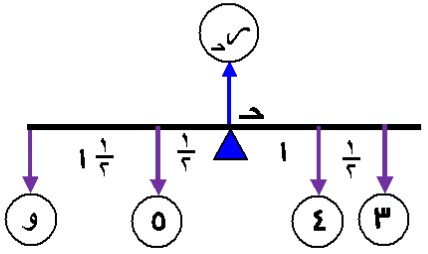
= ١٥٠ × ٩٠ + $\frac{٤}{٥}$ × ٢٥٠ × ٤٠ + ٢٠٠ × $\frac{١}{٢}$ × ٢

= ٢١٧٠٠ نيوتن . سم



السؤال الثالث :

(أ) قضيب منتظم طوله ٤ متر يرتكز على نقطة ارتكاز عند منتصفه علق ثقلان ٤ ، ٣ ث كجم فى احدى نصفيه و على بعد ١ ، ١,٥ متر من منتصفه على الترتيب و علق ثقلان ٥ ، و ث كجم فى النصف الآخر و على بعد $\frac{١}{٢}$ ، ٢ متر من منتصفه على الترتيب فإذا اتزن القضيب اوجد قيمة و



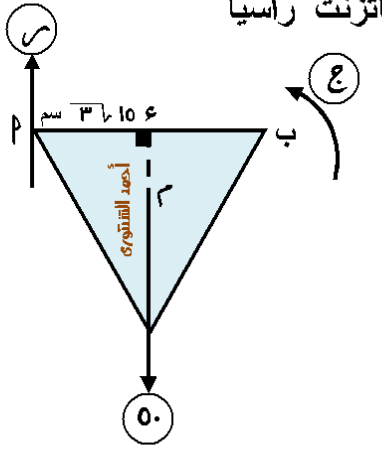
الحل

∵ القضيب متزن

∴ $ج_{حـ}$ = ٠

∴ ٣ × $\frac{٣}{٢}$ + ٤ × ١ − ٥ × $\frac{١}{٢}$ − و × ٥ = ٠ و منها : و = ٣ ث كجم

(ب) أ ب حـ صفيحة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٣٠ $\sqrt{٣}$ سم ، و وزنها ٥٠ ث جم علقت الصفيحة من مسمار أفقى من بالقرب من الرأس أ فاتزنت رأسياً اثر على الصفيحة ازدواج عمودى على مستوى الصفيحة فاتزنت الصفيحة فى وضع يكون فيه أ ب أفقياً اوجد عزم الازدواج المؤثر و رد الفعل على المسمار



الحل

∵ الصفيحة متزنة تحت تأثير ج ، ر ، ٥٠

∴ القوتان (ر ، ٥٠) تكونان ازدواجاً

، ∵ (٥٠) يؤثر رأسياً لأسفل

∴ ر = ٥٠ ث جم و يؤثر رأسياً لأعلى

، ج = ٥٠ × أ ء = ٥٠ × ١٥ $\sqrt{٣}$ = ٧٥٠ $\sqrt{٣}$ ث جم . سم

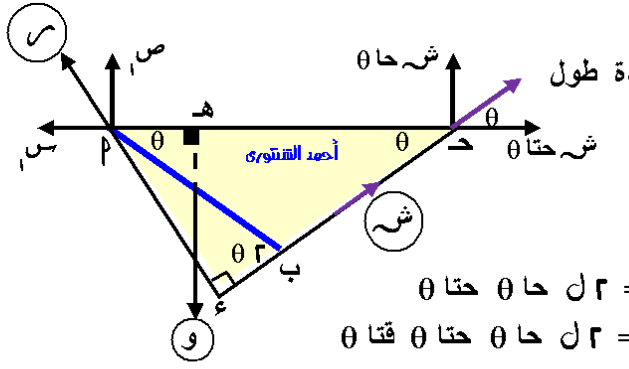
السؤال الرابع :

(أ) أ ب قضيب منتظم طرفه أ مثبت فى مفصل فى حائط رأسى و طرفه الآخر ب مربوط بأحد طرفى خيط ، و ربط الطرف الآخر للخيط فى نقطة فى المستوى الأفقى المار بالمفصل بحيث يميل كل من القضيب و الخيط على الأفقى بنفس الزاوية θ فإذا كان (و) وزن القضيب ، بين أن رد فعل المفصل عند أ يساوى $\frac{١}{٤}$ و $\sqrt{٨ + \text{قتا}^{٢}\theta}$

الحل

نفرض أن :

طول القضيب = ل وحدة طول ، مقدار مركبتى رد فعل المفصل عند أ هما : $س_{١}$ ، $ص_{١}$



من هندسة الشكل :

أ ء = أ ب حا θ ٢ = ل حا θ حتا θ

∴ أ حـ = أ ء قتا θ = ٢ ل حا θ حتا θ قتا θ

= ٢ ل حتا θ ، أ هـ = $\frac{١}{٢}$ ل حتا θ

∴ معادلات الاتزان هى :

$س_{١}$ = ش حتا θ (١)

$ص_{١}$ = و − ش حا θ (٢)

، $ج_{أ}$ = ٠ ∴ ش حا θ × أ حـ − و × أ هـ = ٠

∴ ش حا θ × ٢ ل حتا θ − و × $\frac{١}{٢}$ ل حتا θ = ٠

أحمد الشنتوى

و منها : شـ = $\frac{1}{4}$ و قتا θ ، بالتعويض فى (١) ، (٢) ينتج :

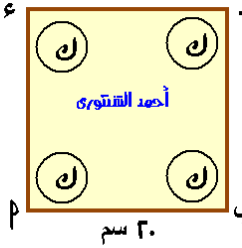
س١ = $\frac{1}{4}$ و طتا θ ، ص١ = $\frac{3}{4}$ و

∴ (ر)^{2} = (س١)^{2} + (ص١)^{2} = $\frac{1}{16}$ و^{2} طتا^{2}θ + $\frac{9}{16}$ و^{2}

= $\frac{1}{16}$ و^{2} (طتا^{2}θ + ٩) = $\frac{1}{16}$ و^{2} (طتا^{2}θ + ١ + ٨)

= $\frac{1}{16}$ و^{2} (قتا^{2}θ + ٨) ∴ ر = $\frac{1}{4}$ و $\sqrt{٨ + قتا^{2}θ}$

(٢) أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٢٠ سم ، وضعت كتل متساوية المقدار عند رؤوسه ، أولاً : عين مركز ثقل المجموعة
ثانياً : إذا رفعت الكتلة الموجودة عند أحد رؤوسه فأين يقع مركز المجموعة المتبقية



الحل

باخذ الاتجاهين المتعامدين $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ ء}$

و بفرض أن كل كتلة عند كل رأس = ك فيكون :

أ (٠ ، ٠) ، ب (٢٠ ، ٠) ، حـ (٢٠ ، ٢٠) ، ء (٠ ، ٢٠)

أولاً : جدول الكتل كما يلى :

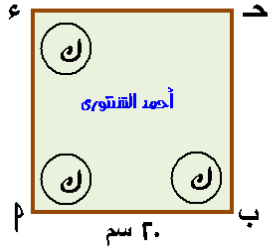
الكتلة	عند أ	عند ب	عند حـ	عند ء
	ك	ك	ك	ك
س	٠	٢٠	٢٠	٠
ص	٠	٠	٢٠	٢٠

س$_م$ = $\frac{ك \times ٠ + ك \times ٢٠ + ك \times ٢٠ + ك \times ٠}{٤ ك}$ = ١٠

، ص$_م$ = $\frac{ك \times ٠ + ك \times ٠ + ك \times ٢٠ + ك \times ٢٠}{٤ ك}$ = ١٠

∴ احداثى مركز الثقل = (١٠ ، ١٠) بالنسبة لنقطة أ

ثانياً : عند رفع الكتلة عند الرأس حـ يكون :



الكتلة	عند أ	عند ب	عند ء
	ك	ك	ك
س	٠	٢٠	٠
ص	٠	٠	٢٠

س$_م$ = $\frac{ك \times ٠ + ك \times ٢٠ + ك \times ٠}{٣ ك}$ = $\frac{٢٠}{٣}$

، ص$_م$ = $\frac{ك \times ٠ + ك \times ٠ + ك \times ٢٠}{٤ ك}$ = $\frac{٢٠}{٣}$

∴ احداثى مركز الثقل = ($\frac{٢٠}{٣}$ ، $\frac{٢٠}{٣}$) بالنسبة لنقطة أ

حل آخر لثانياً :

مركز ثقل المجموعة المكونة من ٤ كتل عند كل رأس من رؤوس المربع يؤثر عند مركز المربع (نقطة تقاطع القطرين) و كتلته = ٤ ك

حيث احداثيات المركز (١٠ ، ١٠)

و الكتلة التى رفعت من الرأس حـ (٢٠ ، ٢٠) = − ك (اكمل بنفسك)

السؤال الخامس :

(أ) أ ب حـ صفيحة مثلثة الشكل متساوية الأضلاع كتلتها ٣ كجم ، م مركز ثقلها وضعت كتل مقاديرها ٢ ، ٢ ، ١١ كجم عند الرؤوس أ ، ب ، حـ على الترتيب برهن أن مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف $\overline{م حـ}$

الحل

نفرض أن : طول ضلع الصفيحة = ل

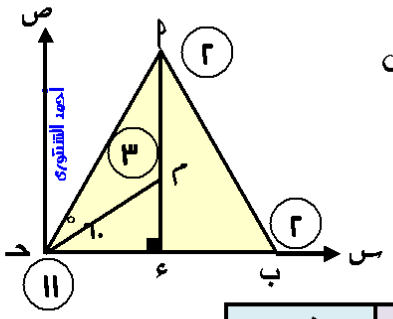
من هندسة الشكل :

$م ء = ل$ حا $٦٠°$ ،

$م ء = \frac{١}{٣} م ء = \frac{١}{٣} ل$ حا $٦٠° = \frac{\sqrt{٣}}{٦} ل$

، $حـ ء = \frac{١}{٢} ل$

و بأخذ الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{حـ س}$ ، $\overleftarrow{حـ ص}$ فيكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :



الكتلة	عند حـ	عند ب	عند م	عند م
	١١	٢	٢	٣
س	٠	ل	$\frac{١}{٢} ل$	$\frac{١}{٢} ل$
ص	٠	٠	$\frac{\sqrt{٣}}{٢} ل$	$\frac{\sqrt{٣}}{٦} ل$

$\therefore س_م = \frac{١١ \times ٠ + ٢ \times ل + ٢ \times \frac{١}{٢} ل + ٣ \times \frac{١}{٢} ل}{١١ + ٢ + ٢ + ٣} = \frac{١}{٤} ل$

، $ص_م = \frac{١١ \times ٠ + ٢ \times ٠ + ٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} ل + ٣ \times \frac{\sqrt{٣}}{٦} ل}{١١ + ٢ + ٢ + ٣} = \frac{\sqrt{٣}}{١٢} ل$

، ∵ احداثى منتصف $\overline{م حـ}$ $= (\frac{١}{٤} ل ، \frac{\sqrt{٣}}{١٢} ل)$

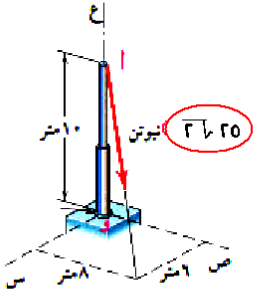
∴ مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف $\overline{م حـ}$

(٢) فى الشكل المقابل :

تؤثر قوة مقدارها ٥٠ نيوتن

فى نقطة م

اوجد عزم القوة بالنسبة للنقطة و



الحل

من هندسة الشكل نجد أن :

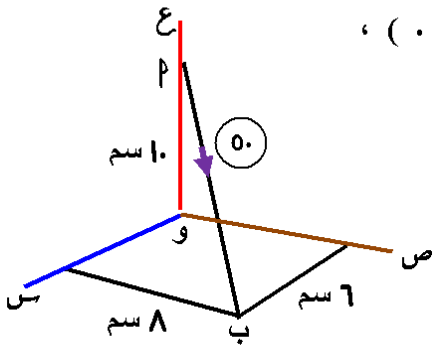
م (٠ ، ٠ ، ١٠) ، ب (٦ ، ٨ ، ٠) ،

$\therefore \overrightarrow{م ب} = (٦ ، ٨ ، ٠) - (٠ ، ٠ ، ١٠)$

$= (٦ ، ٨ ، -١٠)$

$\therefore \| \overrightarrow{م ب} \| = ١٠ \sqrt{٢}$

، $ق = ٢٥ \sqrt{٢} \times \frac{(٦ ، ٨ ، -١٠)}{١٠ \sqrt{٢}} = (١٥ ، ٢٠ ، -٢٥)$



$\therefore ع_و = و م \times ق = \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ٠ & ٠ & ١٠ \\ ١٥ & ٢٠ & -٢٥ \end{vmatrix} = ٢٠٠ س + ١٢٠ ص$

أحمد الشنتورى

الاختبار الخامس

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

السؤال الأول : أكمل ما يلى :

(أ) معامل الاحتكاك السكونى هو النسبة بين ....

الحل

قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل العمودى

(٢) إذا اثرت القوة $ق = ٢ س - ص + ٥ ع$ فى النقطة م متجه موضعها $س - ٣ ع$ فإن عزم $ق$ بالنسبة للنقطة ب متجه

موضعها $\vec{س} + ٣\vec{ع}$ يساوى ....

الحل

$\overrightarrow{ب م} = \vec{س} - \vec{ص} - ٦\vec{ع}$

$\vec{ع} = \overrightarrow{ب م} \times \vec{ق} = \begin{vmatrix} \vec{س} & \vec{ص} & \vec{ع} \\ ١ & -١ & -٦ \\ ٢ & -١ & ٥ \end{vmatrix} = -١١\vec{س} - ١٧\vec{ص} + \vec{ع}$

(٣) قوتان متوازيتان متحدا الاتجاه مقدار احداهما ضعف مقدار الأخرى و مقدار محصلتهما ٣٩ نيوتن فإن مقدار اصغرهما يساوى ....

الحل

بفرض أن : مقدار الصغرى = ق ∴ مقدار القوة الكبرى = ٢ ق

∵ القوتان متوازيتان متحدا الاتجاه ،

∴ ح = ق + ٢ ق ∴ ٣٩ = ٣ ق و منها : ق = ١٣ نيوتن

(٤) إذا كونت القوتان $\vec{ق_١} = أ\vec{س} + ٥\vec{ص}$ ، $\vec{ق_٢} = ٣\vec{س} - ب\vec{ص}$ ازدواج فإن : أ + ب = ...

الحل

∵ $\vec{ق_١}$ ، $\vec{ق_٢}$ تكونان ازدواج ∴ $\vec{ق_١} = -\vec{ق_٢}$

∴ $أ\vec{س} + ٥\vec{ص} = -٣\vec{س} + ب\vec{ص}$

∴ أ = -٣ ، ب = ٥ ∴ أ + ب = ٢

(٥) الشرط اللازم و الكافى لاتزان مجموعة من القوى المستوية هو ....

الحل

ينعدم متجه مجموع القوى ، ينعدم عزم المجموعة بالنسبة لنقطة واحدة

(٦) يقع مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقاً حراً على الخط المستقيم الرأسى المار بـ ....

الحل

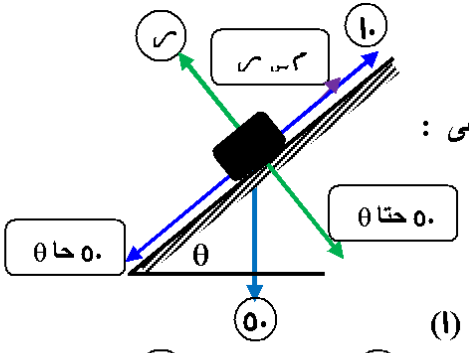
نقطة التعليق

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

السؤال الثانى :

(أ) وضع جسم وزنه ٥٠ نيوتن على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ ، فإذا كان أقل و أكبر قوة موازية لخط أكبر ميل و تجعل الجسم متزناً على المستوى هما ١٠ ، ٤٠ نيوتن على الترتيب اوجد معامل الاحتكاك و قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

الحل



فى الحالة الأولى (أقل قوة)

القضيب يكون على وشك الحركة لأسفل

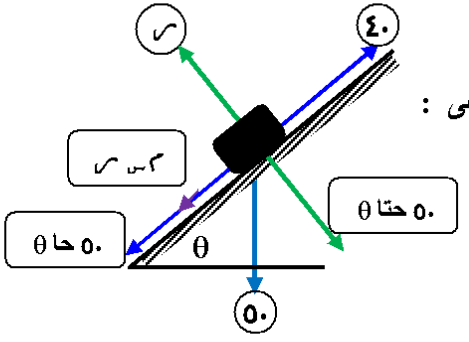
∴ من الشكل المقابل معادلات الاتزان هى :

١٠ + ك ر ∩ ر = ٥٠ حا θ

، ر = ٥٠ حتا θ

∴ ١٠ + ٥٠ ك ر حتا θ = ٥٠ حا θ

∴ ٥٠ ك ر حتا θ = ٥٠ حا θ - ١٠ (١)



فى الحالة الثانية (أكبر قوة)

القضيب يكون على وشك الحركة لأعلى

∴ من الشكل المقابل معادلات الاتزان هى :

٤٠ = ك ر ∩ ر + ٥٠ حا θ

، ر = ٥٠ حتا θ

∴ ٤٠ = ٥٠ ك ر حتا θ + ٥٠ حا θ

بالتعويض من (١) ينتج :

٤٠ = ٥٠ حا θ − ١٠ + ٥٠ حا θ و منها ينتج :

∴ ٥٠ = ١٠٠ حا θ ∴ حا θ = $\frac{١}{٢}$ ∴ θ = ٣٠°

∴ ر = ٥٠ حتا ٣٠° = ٥٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٢٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن ،

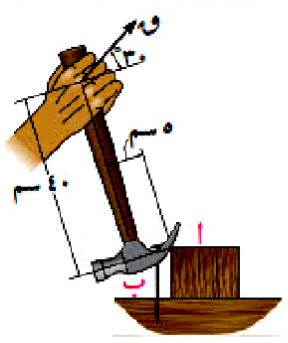
م س × ٢٥ $\sqrt{٣}$ = ٥٠ × $\frac{١}{٢}$ − ١٠

∴ م س × ٢٥ $\sqrt{٣}$ = ١٥ و منها : م س = $\frac{١}{٥}$ $\sqrt{٣}$

(٢) الشكل المقابل :

يوضح القوة ق اللازمة لنزع مسمار عند ب ، إذا كان معيار عزم القوة حول نقطة أ اللازمة لنزع المسمار يساوى ٢٠٠ نيوتن . سم

اوجد معيار القوة ق



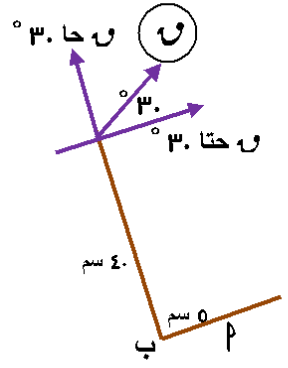
الحل

∵ ع$_{أ}$ = ق حتا ٣٠° × ٤٠ + ق حا ٣٠° × ٥

∴ ٢٠٠ = ق × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ٤٠ + ق × $\frac{١}{٢}$ × ٥

∴ ٢٠٠ = ق (٢٠ $\sqrt{٣}$ + ٥)

و منها : ق = ٥,٤ نيوتن

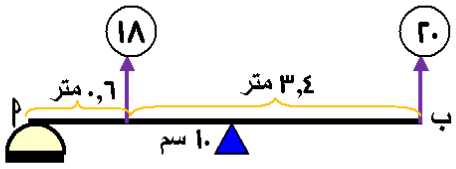


السؤال الثالث :

(أ) إذا كانت محصلة ثلاث قوى تؤثر على القضيب أ ب مهمل الوزن فى الشكل المقابل هى ١٣,٦ ث كجم و تؤثر لأعلى فى نقطة تبعد ٣ متر على يمين أ

اوجد مقدار و اتجاه و نقطة تأثير القوة الثالثة

فإذا اتزن القضيب اوجد قيمة و



الحل

نفرض أن : مقدار القوة الثالثة = و

و تؤثر لأسفل فى نقطة تقع على يمين أ

أ مسافة = ل متر

، ى متجه وحدة فى اتجاه و

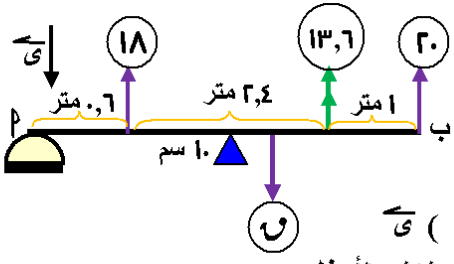
∴ − ١٣,٦ ى = (و − ١٨ − ٢٠) ى

و منها ينتج : و = ٢٤,٤ ث كجم و تؤثر لأسفل

، ∵ ع$_{أ}$ = عزم المحصلة حول أ

∴ ٢٠ × ٤ + ١٨ × ٠,٦ − ٢٤,٤ × ل = ١٣,٦ × ٣

و منها ينتج : ل = ٢,٠٥ متر



(ب) أ ب حـ ء مستطيل فيه أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ٩ سم ،

م ∈ $\overline{ب حـ}$ بحيث ب م = ٤ سم أثرت قوى مقاديرها $و_{١}$ ، ٥ $\sqrt{١٠}$ ، ٢٦ ، $و_{٢}$ ، ١٨ نيوتن فى اتجاهات $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{أ م}$ ، $\overleftarrow{م ء}$ ، $\overleftarrow{ء حـ}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$ على الترتيب فإذا كانت مجموعة القوى متزنة أوجد قيمتى $و_{١}$ ، $و_{٢}$

الحل

أحمد الشنتوى

من هندسة الشكل : ب ء = ١٣ سم

∵ مجموعة القوى متزنة

∴ ج$_م$ = ٠

∴ ن$_م$ × ٩ − ٢٦ × ق هـ = ٠

∴ ن$_م$ × ٩ = ٢٦ × ٩ حا θ

∴ ن$_م$ × ٩ = ٢٦ × ٩ × $\frac{١٢}{١٣}$

و منها : ن$_م$ = ٢٤ نيوتن

، ج$_م$ = ٠ ∴ ١٨ × ١٢ − ن$_١$ × ٤ − ن$_م$ × ٥ = ٠

∴ ١٨ × ١٢ − ٢٤ × ٤ − ن$_م$ × ٥ = ٠ و منها : ن$_١$ = ٢٤ نيوتن

السؤال الرابع :

(أ) ق ب سلم منتظم طوله ٥ متر و وزنه ٢٠ ث كجم يستند بطرفه ق على حائط رأسى أملس و بطرفه ب على أرض أفقية خشنة معامل الاحتكاك بينهما $\frac{١}{٤}$ ، و كان الطرف ب على بعد ٣ متر من الحائط ، اثبت أن السلم لا يمكن أن يتزن في هذه الحالة ثم اوجد اصغر وزن لجسم معامل الاحتكاك بينه و بين الأرض $\frac{١}{٥}$ بحيث إذا وضع عند الطرف ب للسلم يمنعه من الانزلاق

الحل

من هندسة الشكل : ق حـ = ٣ سم

بفرض أن السلم متزن :

∴ ر$_م$ = ع ، ر$_ب$ = ٢٠

، ج$_ق$ = ٠

∴ ٢٠ × ١,٥ − ر$_م$ × ٤ = ٠

و منها : ر$_م$ = ٧,٥ ∴ ع = ٧,٥

، ∵ مقدار ع$_س$ عند ب = ق ر$_ب$ = $\frac{١}{٤}$ × ٢٠ = ٥

∴ ع < ع$_س$ و بالتالى لا يمكن أن يتزن السلم فى هذه الحالة

بعد وضع الجسم الذى وزنه (و) عند ب

بالنسبة للجسم :

ض = $\frac{١}{٥}$ ر

، و = ر

∴ ض = $\frac{١}{٥}$ و

بالنسبة للسلم :

ر$_م$ = $\frac{١}{٤}$ ر$_ب$ + $\frac{١}{٥}$ و ، ر$_ب$ = ٢٠

، ج$_ق$ = ٠ ∴ ٢٠ × ١,٥ − ر$_م$ × ٤ = ٠ ∴ ر$_م$ = ٧,٥

∴ ٧,٥ = $\frac{١}{٤}$ × ٢٠ + $\frac{١}{٥}$ و و منها : و = ١٢,٥ ث كجم

(٢) سلك منتظم طوله ١٠٠ سم ثنى على هئية خمسة أضلاع من مسدس منتظم ق ب حـ ء هـ و بدأ من نقطة ق ، عين بعد مركز ثقله عن مركز المسدس ، و إذا علق السلك تعليقاً حراً من طرفه ق عين قياس زاوية ميل $\overline{ق ب}$ على الرأسى فى وضع التوازن

الحل

طول كل ضلع = ١٠٠ ÷ ٥ = ٢٠ سم

بأخذ الاتجاهين المتعامدين ى س ، ى ص

و بفرض أن كل كتلة عند كل ضلع = ٢ ك و تؤثر فى منتصف كل منها

و توزع عند كل رأس

فتكون الكتل و احداثياتها كما بالجدول التالى :

الكتلة	عند أ	عند ب	عند حـ	عند هـ	عند و
	ك	٢ ك	٢ ك	٢ ك	ك
س	١٠	٢٠	١٠	٢٠ −	١٠ −
ص	١٠ √٣	٠	− ١٠ √٣	٠	١٠ √٣

و من الجدول نجد :

$$س_م = \frac{ك \times ١٠ + ٢ك \times ٢٠ + ٢ك \times ١٠ - ٢ك \times ١٠ - ٢ك \times ٢٠ - ك \times ١٠}{١٠ ك} = ٠$$

$$ص_م = \frac{ك \times ١٠\sqrt{٣} - ٢ك \times ١٠\sqrt{٣} - ٢ك \times ١٠\sqrt{٣} \times ٠ - ك \times ١٠\sqrt{٣}}{١٠ ك} = -٢\sqrt{٣}$$

∴ احداثى مركز الثقل = (٠ ، − ٢ √٣) بالنسبة لنقطة ى (مركز المسدس)

، ∵ مركز المسدس ى (٠ ، ٠)

∴ مركز ثقل السسك يبعد ٢ √٣ عن مركز المسدس عند التعليق من أ

و يكون $\overleftarrow{أم}$ هو الخط الرأسى المار بنقطة التعليق أ

من الرسم نجد : ظا (∠ ب أ م) = $\frac{١٢\sqrt{٣}}{١٠} = \frac{٦\sqrt{٣}}{٥}$

∴ ق (∠ ب أ م) = ٦٤° ١٨′

، ∵ قياس زاوية رأس المسدس = ١٢٠°

∴ ق (∠ θ) = ١٢٠° − ٦٤° ١٨′ = ٥٥° ٤٢′

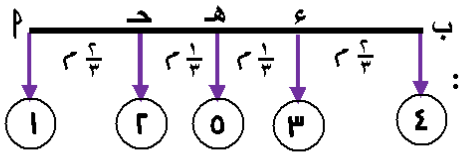
السؤال الخامس :

(أ) أ ب قضيب منتظم طوله ٢ متر و وزنه ٥ نيوتن ، حـ ، ء نقطتى تثليثه من جهة أ ، علق اوزان مقدارها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ نيوتن فى النقط أ ، حـ ، ء ، ب على الترتيب عين مركز ثقل المجموعة

الحل

بأخذ الاتجاهين المتعامدين $\overleftarrow{أب}$ و العمودى عليه

فيكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :



الكتلة	عند أ	عند حـ	عند هـ	عند ء	عند ب
س	٠	٢/٣	١	٣/٤	٢

$$\therefore س_م = \frac{١ \times ٠ + ٢ \times \frac{٢}{٣} + ٥ \times ١ + ٣ \times \frac{٣}{٤} + ٤ \times ٢}{١ + ٢ + ٥ + ٣ + ٤} = \frac{١١}{٩}$$

∴ مركز ثقل المجموعة = ($\frac{١١}{٩}$ ، ٠) بالنسبة لنقطة أ

(٢) قوتان $\overleftarrow{ق_١} = ٢\overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = \overleftarrow{س} - ٢\overleftarrow{ص}$ تؤثران فى النقطتين أ (١ ، ١) ، ب (٠ ، − ٤) على الترتيب

اوجد عزم المجموعة حول أى نقطة فى المستوى

الحل

∵ $\overleftarrow{ق_١} = (٢ ، -١)$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = (-٢ ، ١)$ ∴ $\overleftarrow{ق_١} = -\overleftarrow{ق_٢}$

∴ $\overleftarrow{ق_١}$ // $\overleftarrow{ق_٢}$ و تضادها فى الاتجاه ، $\| \overleftarrow{ق_١} \| = \| \overleftarrow{ق_٢} \|$

∴ المجموعة تكون ازدواج

، $\overleftarrow{ع_و} = \overleftarrow{و أ} \times \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{و ب} \times \overleftarrow{ق_٢}$

$= (١ ، ١) \times (٢ ، -١) + (٠ ، -٤) \times (-٢ ، ١)$

$= -٣ \overleftarrow{ع} - ٨ \overleftarrow{ع} = -١١ \overleftarrow{ع}$

أحمد الشنتورى