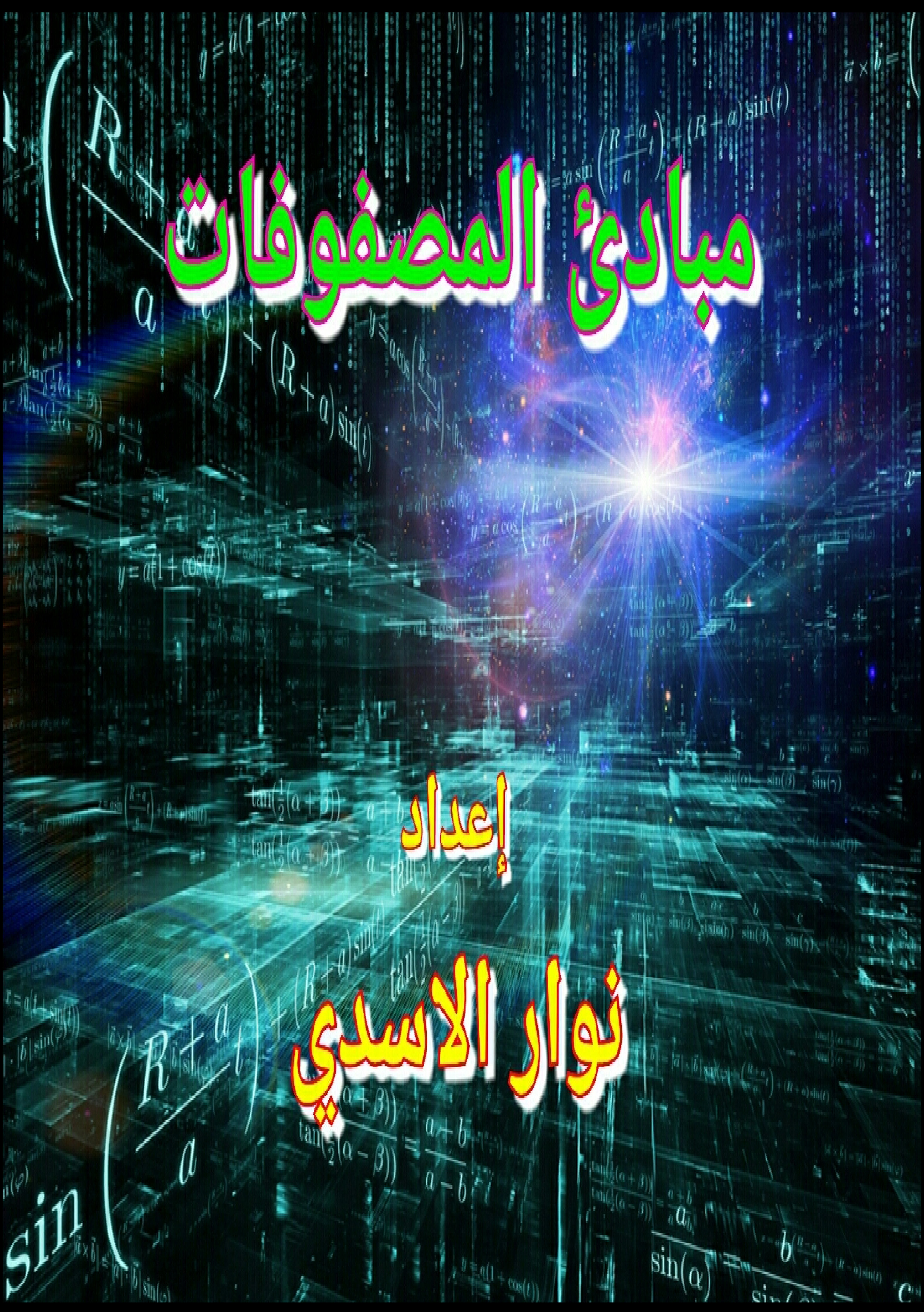

مبادئ المصفوفات

إعداد

نوار الاسدي

المصفوفات Matrix

تنظيم لعرض العناصر (الاعداد) بشكل صفوف وأعمدة مرتبة في جدول مستطيل أو مربع محصور بين قوسين أما بالشكل [ ] أو بالشكل ( ).

* يقال للمصفوفة انها من درجة $(m \times n)$ حيث (m) يمثل عدد الصفوف و(n) يمثل عدد الأعمدة.

* يرمز لكل عنصر (element) من عناصر المصفوفة بالرمز (a_{ij}) حيث:
 i يمثل رقم الصف (row) الذي يقع ضمنه العنصر
 j يمثل رقم العمود (column) الذي يقع ضمنه العنصر

مثال:

أذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ مصفوفة فعيّن درجة المصفوفة ثم عيّن جميع العناصر في A

الحل: درجة المصفوفة هي 3×2 (اي ان $m=3$ ، $n=2$)

اما قيم العناصر هي كما يلي:

$a_{11} = 3$ و $a_{12} = 1$ و $a_{21} = -1$ و $a_{22} = 5$ و $a_{31} = 0$ و $a_{32} = 2$

أنواع المصفوفات :-

1) المصفوفة المستطيلة: وهي مصفوفة من درجة $m \times n$ ، $m \neq n$

* اذا كانت $m=1$ فأن المصفوفة تسمى (row matrix) أي مصفوفة الصف
* اذا كانت $n=1$ فأن المصفوفة تسمى (column matrix) أي مصفوفة العمود

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$ درجة المصفوفة 2×4 ، $m \neq n$

و $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}$ درجة المصفوفة 4×2 ، $m \neq n$

و $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$ مصفوفة (row matrix) درجة المصفوفة 1×3 ، $m \neq n$

$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix}$ مصفوفة (column matrix) درجة المصفوفة 4×1 ، $m \neq n$

2) المصفوفة المربعة: هي المصفوفة التي فيها $m=n$ مثل:

$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة درجتها 3×3 :

قطرها الاساسي العناصر 6 و 2 و 3

قطرها (الثانوي) الآخر العناصر 1 و 2 و 5

من هنا يبدأ القراءة

٣) المصفوفة القطرية : وهي مصفوفة مربعة $(m = n)$ وجميع عناصرها اصفار عدا عناصر قطرها فيكون احدها على الأقل لا يساوي صفراً .

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة مربعة درجتها 3×3 عناصر قطرها ١ و ١- و ٢ وباقي عناصرها اصفار فهي مصفوفة قطرية

٤) مصفوفة الوحدة (Identity matrix) :
هي مصفوفة قطرية جميع عناصر قطرها يساوي واحد ويرمز لها بالرمز (I)
مثل :

$$I_1 = [1] \quad , \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

٥) المصفوفة الصفرية : وهي مصفوفة من درجة $m \times n$ وجميع عناصرها أصفار
مثل :

$$[0] \; , \; [0 \;\; 0] \; , \; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; , \; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; , \; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

* اذا كانت A مصفوفة بدرجة $m \times n$ وكان (c) ثابت حيث $(c \in R)$ فان $c \cdot A$ يساوي حاصل ضرب كل عنصر من عناصر A بالثابت (c) وكما يلي :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad \text{ف} \quad c \cdot A = \begin{bmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} \\ c \cdot a_{21} & c \cdot a_{22} \\ c \cdot a_{31} & c \cdot a_{32} \end{bmatrix}$$

مثال : أذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة $c \cdot A$ عندما تكون :

1) $c = 2$ 2) $c = \frac{1}{3}$ 3) $c = -1$

الحل :

1) $2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -6 & 8 & -2 \end{bmatrix}$, 2) $\frac{1}{3} A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -1 & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$

3) $-1 \cdot A = -A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

Mathematics
Matrix المصفوفات

* المصفوفة (A^T) : هي مصفوفة درجتها على درجة المصفوفة A Transpos matrix حيث ان صفوفها أعمدة A

$$A = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \Rightarrow (A^T)^T = A$$

مثال: اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Leftarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

حيث أن درجة مصفوفة A هي $3X2$ بينما درجة مصفوفة A^T هي $2X3$

* المصفوفة المتناظرة (Symmetrical matrix) :
هي المصفوفة المربعة التي تحقق الشرط : $A^T = A$

مثال: اثبت ان المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة متناظرة

الحل : نجد المصفوفة A^T وكما يلي :

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} = A \Longrightarrow A \text{ symmetrical matrix}$$

مصفوفة متناظرة

* المصفوفة شبه المتناظرة (skew symmetrical matrix) :
هي المصفوفة المربعة التي تحقق الشرط : $A^T = -A$

مثال : اثبت ان المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة شبه متناظرة

الحل : نجد المصفوفة A^T وكما يلي :

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix} = -A \Longrightarrow A \text{ skew symmetrical matrix}$$

مصفوفة شبه متناظرة

العمليات الحسابية على المصفوفات :

1) تساوي مصفوفتين : تتساوى المصفوفتان اذا كانتا من نفس الدرجة وكانت العناصر المتناظرة في كل منهما متساوية .

مثال (1): عيّن جميع عناصر المصفوفة $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}$ اذا كانت ان المصفوفة A تساوي المصفوفة B وكانت $B=\begin{bmatrix}-3&0&-4\\2&-1&6\end{bmatrix}$

الحل: بما ان $A=B \Leftarrow$

$a_{11}=-3\ ,\ a_{12}=0\ ,\ a_{13}=-4\ ,\ a_{21}=2\ ,\ a_{22}=-1\ ,\ a_{23}=6$

تمرين: جد قيم a، b، c اذا كان : $\begin{bmatrix}2a-1&-3\\a-b&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&b+c\\14&a+5\end{bmatrix}$

الجواب : $a=3\ ;\ b=-11\ ;\ c=8$

2) جمع وطرح مصفوفتين :

يجب ان تكون المصفوفتان من نفس الدرجة ويتم جمع العناصر المتناظرة فيهما فيكون الناتج مصفوفة تمتلك نفس درجة المصفوفتين.

فاذا كانت $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}_{2\times3}$ وكانت $B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\end{bmatrix}_{2\times3}$ فإن

$$A+B=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&a_{13}+b_{13}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&a_{23}+b_{23}\end{bmatrix}_{2\times3}$$

اما $A-B$ فهو يساوي $A+(-1)B$

مثال (2):

اذا كانت $A=\begin{bmatrix}1&3&0\\-1&5&1\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}0&-1&1\\3&1&1\end{bmatrix}$ فأوجد $A+B$ و $A-B$

الحل:

$$A+B=\underset{2\times3}{\begin{bmatrix}1&3&0\\-1&5&1\end{bmatrix}}+\underset{2\times3}{\begin{bmatrix}0&-1&1\\3&1&1\end{bmatrix}}=\underset{2\times3}{\begin{bmatrix}1&2&1\\2&6&2\end{bmatrix}}$$

$$A-B=A+(-1)B=\begin{bmatrix}1&3&0\\-1&5&1\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}0&-1&1\\3&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&3&0\\-1&5&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&-1\\-3&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&4&-1\\-4&4&0\end{bmatrix}$$

ملاحظة: $A+B=B+A$ ولكن $A-B\neq B-A$ فالجمع أبدالي وتحقق من ذلك

Mathematics
Matrix المصفوفات

٢) ضرب المصفوفتين : عند ضرب مصفوفتين يجب ان يكون عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى يساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية ودرجة المصفوفة الناتجة تتحدد من عدد صفوف الأولى وعدد اعمدة الثانية .

فاذا كانت درجة الاولى $m \times L$ وكانت درجة الثانية $L \times n$ فأن درجة حاصل الضرب ستكون $m \times n$

اذا كان $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$ فأن

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{bmatrix}$$

مثال (3) : أجر عملية الضرب فيما يأتي ان أمكن واذكر السبب في حالة تعذر ذلك .

1) $\underset{1\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -4 + (-6) + (-5) \end{bmatrix} = \underset{1\times 1}{\begin{bmatrix} -15 \end{bmatrix}}$

2) $\underset{1\times 2}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}} \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -2+12 & 0+15 \end{bmatrix} = \underset{1\times 2}{\begin{bmatrix} 10 & 15 \end{bmatrix}}$

3) $\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 + 1 + (-1)(-1) \\ 0 + 2 + 1(-1) \end{bmatrix} = \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$

4) $\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}} \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -10 + 0 - 3 & 2+3+4 \\ 0+0-6 & 0+4+8 \end{bmatrix} = \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} -13 & 9 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}}$

4) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}_{3\times 1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 12 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 4} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 & 5 \\ 9 & 4 & 11 & 15 \\ -3 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}_{3\times 4}$

6) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 6 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

لا يمكن ايجادها لأن عدد اعمدة المصفوفة الاولى لا يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية أي ان $3 \neq 2$

7) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 7 \end{bmatrix}_{1\times 3}$

لا يمكن ايجادها لأن عدد اعمدة المصفوفة الأولى لا يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية أي ان $3 \neq 1$

<u>تمرين</u>: جد ان امكن ما يلي وإن أمكن ذلك فبين هل ان عملية الضرب هنا ابدالية؟ لماذا؟

1) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

المحددات (Determinants)

ان المحدد للمصفوفة $n\times n$ وهي $A=a_{ij}$ والذي يرمز له بالرمز $\det A$ أو $|A|$ هو عدد يقابل المصفوفة المشكلة من هذا النظام من الأعداد.

ليكن D محدد ثنائي الترتيب فيحسب كما يلي:

The value of $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

for example $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 3(5) - 7(2) = 15 - 14 = 1$

and $D = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 4(-6) - 2(-3) = -24 + 6 = -18$

Mathematics
Matrix المصفوفات

اما اذا كان D محدد ثلاثي الترتيب فيحسب كما يلي :

Method (1)

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

or we can be using the following rule: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Method (2)

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right.$$

$- \quad - \quad -$

$+ \quad + \quad +$

مثال : احسب قيمة المحدد الآتي بطريقتين :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Sol.

Method (1) $D = -(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (6+1)+0 + (-2-6) = -1$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right. =$$

$- \quad - \quad -$

$+ \quad + \quad +$

$= [2(0)(3) + 2(-1)(3) + 1(-1)(-1)] - [3(0)(1) + (-1)(-1)(2) + 3(-1)(2)] = -5 - (-4) = -1$

معكوس المصفوفة (Inverse of the Matrix)

اذا كانت A مصفوفة مربعة محددها $\Delta(A) = |A|$ لا يساوي صفر فلها معكوس هو A^{-1} حيث $A^{-1}.A = I$

<u>Ex.:</u> For the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ find A^{-1}.

Sol.

١) نجد محدد المصفوفة $|A|$

$$|A| = \Delta(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right.$$

$- \quad - \quad -$

$+ \quad + \quad +$

$= [1(1)(0) + 2(2)(-1) + 0(2)(3)] - [(-1)(1)(0) + 3(2)(1) + 0(2)(2)]$

$= (0 - 4 + 0) - (0 + 6 + 0) = -10 \neq 0$

Mathematics
Matrix المصفوفات

٢) نجد Minor لكل عنصر حيث:

$$Min(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \left| \begin{matrix} \text{محدد المصفوفة} \\ \text{بعد حذف الصف } i \\ \text{وحذف العمود } j \end{matrix} \right|$$

$$Min(a_{11}) = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = +1(0-6) = -6$$

$$Min(a_{12}) = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1(0+2) = -2$$

$$Min(a_{13}) = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = +1(6+1) = 7$$

$$Min(a_{21}) = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -1(0-0) = 0$$

$$Min(a_{22}) = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = +1(0-0) = 0$$

$$Min(a_{23}) = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1(3+2) = -5$$

$$Min(a_{31}) = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +1(4-0) = 4$$

$$Min(a_{32}) = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -1(2-0) = -2$$

$$min(a_{33}) = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = +1(1-4) = -3$$

Hint:

$$\begin{vmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{vmatrix}$$

or

$$\begin{vmatrix} +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \end{vmatrix}$$

٣) نجد مصفوفة $\underbrace{Cof(A)}_{\text{تقرأ كوفاكتور } A}$ حيث

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} -6 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & -5 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

٤) نجد مصفوفة $adj(A)$ حيث

$$adj(A) = \left(Cof(A)\right)^T = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 7 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

٥) نجد A^{-1} حيث:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot adj(A) = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -6 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 7 & -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{-2}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{-7}{10} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

للتأكد من صحة الحل يجب أن يكون $A^{-1}\cdot A = I$

$$A^{-1}\cdot A=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & 0 & \frac{-2}{5}\\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5}\\ \frac{-7}{10} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

H. w

If $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$ find the inverse of the matrix AB and check your answer.

تلميح: جد حاصل ضرب A في B ثم جد $(AB)^{-1}$ بنفس خطوات المثال السابق

الجواب

Ans. $(AB)^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ \frac{-3}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$

حل المعادلات الخطيه بطريقة المعكوس (Inverse Method)

١) نعيّن مصفوفة المعاملات A ونجد معكوسها A^{-1}

٢) نعيّن مصفوفة عمود المجاهيل X

٣) نعيّن مصفوفة عمود الأعداد B

٤) نطبق العلاقة $X=A^{-1}\cdot B$

Ex.

Solve the following equations $X+2y=1$, $2X+y+2Z=3$, $-X+3y=4$ by Inverse matrix method.

الحل

Sol.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 0\end{bmatrix} ,\quad X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} ,\quad B=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & 0 & \frac{-2}{5}\\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5}\\ \frac{-7}{10} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10}\end{bmatrix}$$

تلميح: طريقة أيجاد A^{-1} لنفس المصفوفة A تجدها ص 6 وهو مثال محلول

$$X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{-2}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{-7}{10} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$3 \times 3 \qquad 3 \times 1$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{5} \\ \frac{5}{5} \\ \frac{20}{10} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{array}$$

H.W

Solve the following equations $2x + 4y + 3z = 2$, $2x + 4y + 2z = 1$, $5x + 12y + 8z = \frac{-1}{2}$ by Inverse matrix method.

الجواب

Ans. $x = \frac{11}{2}$, $y = -3$, $z = 1$

تلميح: استعن بحل السؤال الواجب البيتي H.w ص 9 لإيجاد A^{-1}

Eigen value and eigen vector:

تعريف: القيم الذاتية للمصفوفة A هي قيم λ التي تحقق المعادلة:

$$|A - \lambda I| = 0$$

$\lambda \rightarrow$ eigen value

تعريف: المتجه الذاتي المرتبط مع كل قيمة ذاتية هو المتجه الذي يحقق العلاقة:

$$[A - \lambda I] X = 0$$

$X \rightarrow$ eigen vector

Ex.: Find eigen values and eigen vector for the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 4 & -1 & -5 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Sol. $|A-\lambda I|=0 \Rightarrow$

$$\left|\begin{bmatrix}3&-2&-5\\4&-1&-5\\-2&-1&-3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right|=0$$

$$\left|\begin{bmatrix}3&-2&-5\\4&-1&-5\\-2&-1&-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}\right|=0$$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & - & - \quad - \\ 3-\lambda & -2 & -5 & 3-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda & -5 & 4 & -1-\lambda \\ -2 & -1 & -3-\lambda & -2 & -1 \end{array} = 0$$

$$(3-\lambda)(-1-\lambda)(-3-\lambda)-\cancel{20}+\cancel{20}-(-10-10\lambda+15-5\lambda+24+8\lambda)=0$$

$$(3-\lambda)(3+\lambda)(1+\lambda)+10+10\lambda-15+5\lambda-24-8\lambda=0$$

$$(9-\lambda^2)(1+\lambda)-29+7\lambda=0$$

$$9+9\lambda-\lambda^2-\lambda^3-29+7\lambda=0$$

$$(-\lambda^3-\lambda^2+16\lambda-20=0)\cdot(-1)$$

$$\lambda^3+\lambda^2-16\lambda+20=0$$

2	1	1	-16	20
		2	6	-20
	1	3	-10	0

مبرهنة حل المعادلة هي مجموعة قيم λ التي تحقق المعادلة والتي تقبل العدد (20) القسمة على كل منها بدون باقي

$$\pm1,\ \pm2,\ \pm4,\ \pm5\ \pm10\ \pm20$$

$\lambda=1 \Rightarrow 1+1-16+20\neq0$

$\lambda=-1 \Rightarrow -1+1+16+20\neq0$

$\lambda=2 \Rightarrow 8+4-32+20=0$

$(\lambda-2)(\lambda^2+3\lambda-10)=0$

$(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda+5)=0$

$\lambda=2,2,-5$ القيم الذاتية هي $\therefore$

$$\begin{array}{r|l} & \lambda^2+3\lambda-10 \\ \hline \lambda-2 & \lambda^3+\lambda^2-16\lambda+20 \\ & \mp\cancel{\lambda^3}\pm2\lambda^2 \\ \hline & \cancel{3\lambda^2}-16\lambda+20 \\ & \cancel{\mp3\lambda^2}\pm6\lambda \\ \hline & \cancel{-10\lambda+20} \\ & \cancel{\pm10\lambda\mp20} \\ \hline & 0 \quad 0 \end{array}$$

When ① $\lambda=2 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix}3-\lambda&-2&-5\\4&-1-\lambda&-5\\-2&-1&-3-\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&-5\\4&-3&-5\\-2&-1&-5\end{bmatrix}=[A-\lambda I]$$

Matrix المصفوفات

$$[A-\lambda I]X=0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 4 & -3 & -5 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x-2y-5z=0 \text{ ——— } (1)$$
$$4x-3y-5z=0 \text{ ——— } (2)$$
$$-2x-y-5z=0 \text{ ——— } (3)$$

المعادلة (1) − المعادلة (2) ينتج :

$$-3x+y=0 \Rightarrow y=3x$$

نعوض عن قيمة $y=3x$ في المعادلة (3) ينتج :

$$-2x-3x-5z=0 \Rightarrow -5x-5z=0 \Rightarrow -x-z=0 \Rightarrow$$
$$z=-x$$

$$\therefore X=\begin{bmatrix} x \\ 3x \\ -x \end{bmatrix}=x\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}=\text{eigen vector}$$

when (2) $\lambda=-5 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & -5 \\ 4 & -1-\lambda & -5 \\ -2 & -1 & -3-\lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & -2 & -5 \\ 4 & 4 & -5 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}=[A-\lambda I]$$

$$[A-\lambda I]X=0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & -5 \\ 4 & 4 & -5 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$8x-2y-5z=0 \text{ ——— } (1)$$
$$4x+4y-5z=0$$
$$-2x-y+2z=0$$

المعادلة (1) − المعادلة (2) ينتج :

$$[4x-6y=0]\div 2 \Rightarrow 2x=3y \Rightarrow y=\frac{2}{3}x$$

نعوض عن قيمة $y = \frac{2}{3}x$ في المعادلة (3) ينتج :

$$\left[-2x - \frac{2}{3}x + 2z = 0\right] \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow$$

$$-3x - x + 3z = 0 \Rightarrow -4x + 3z = 0 \Rightarrow \boxed{z = \frac{4}{3}x}$$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} x \\ \frac{2}{3}x \\ \frac{4}{3}x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \text{eigen vector}$$

H.W Find eigen values and eigen vector for the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Ans. $\lambda = 1, -2, 3$ القيم الذاتية ;

المتجهات الذاتية :

① $x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ② $x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ③ $x \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Cramer's Rule

If the determinat D of the coefficients in a system of n linear equations in n unknowns is not zero, then the equations have a unique solution. In the solution, each unknown may be expresed as a fraction of two determinats with denominator D and with numerator obtained from D by replacing the column of coefficients of the unknown in question by the constants $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Let the linear equations are:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \,,\quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \text{ and } a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \,,\; x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D} \,,\; y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D} \,,\; z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}}{D}$$

Ex.: Solve the following systems of simultaneous equations by Cramer's rule:

1)
$$x + y + z = 1$$
$$2x - y + z = 0$$
$$x + 2y - z = 4$$

Sol.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore D = 1(1-2) - 1(-2-1) + 1(4+1) = -1 + 3 + 5 = 7 \neq 0$$

$$x = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right.}{D} = \frac{(1+4+0)-(-4+2+0)}{7} = \frac{5+2}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

$$y = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right.}{D} = \frac{(0+1+8)-(0+4-2)}{7} = \frac{9-2}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

$$z = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right.}{D} = \frac{(-4+0+4)-(-1+0+8)}{7} = \frac{0-7}{7} = \frac{-7}{7} = -1$$

$\therefore$ $x = y = 1$ and $z = -1$

2)
$$2x + y - z = 0$$
$$x - y + z = 6$$
$$x + 2y + z = 3$$

Sol.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore D = -3(0+3) + 0(0+3) - 0(6-3) = -9 + 0 - 0 = -9 \neq 0$$

$$X=\frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right|}{D}=\frac{(0+3-12)-(3+0+6)}{-9}=\frac{-9-9}{-9}=\frac{-18}{-9}=2$$

$$y=\frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right|}{D}=\frac{(12+0-3)-(-6+6+0)}{-9}=\frac{9-0}{-9}=\frac{9}{-9}=-1$$

$$Z=\frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right|}{D}=\frac{(-6+6+0)-(0+24+3)}{-9}=\frac{0-27}{-9}=\frac{-27}{-9}=3$$

$\therefore$ $X=2$, $y=-1$ and $Z=3$

3) $2X-y+Z=4$

$X+3y+2Z=12$

$3X+2y+3Z=16$

Sol. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right|=(6-9+6)-(6+6-9)=0$

$\therefore$ Cramer's rule can not be using. In any case where $D=0$ one should attempt to solve the system of equations by method of "successive elimination"

Hint: When $D=0$ the set of equations fail to have a unique solution.

H.W

Q1: Solve the following system of simultaneous equations by Cramer's rule

$2X+y-Z=2$, $X-y+Z=7$, $X+2y+Z=4$ ans. $X=Z=3$, $y=-1$

Q2: For what value of K may the following set of equations fail to have a unique solution? $X+y-Z=3$, $KX-y+2Z=5$, $X+2y-Z=4$

ans. $K=-2$