الحجوم الدورانية

* الحجم الدوراني ينتج عن دوران شكل ثنائي الأبعاد حول محور.
المحور هو أي مستقيم يدور حوله الشكل

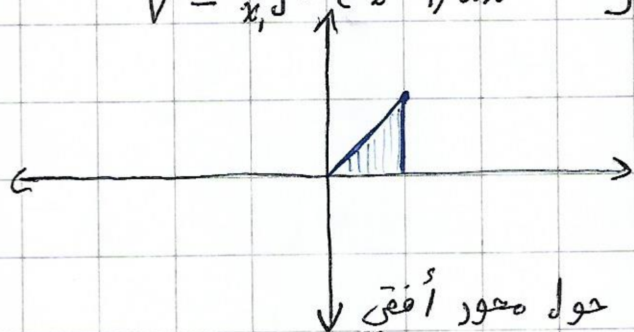
* يمكن إيجاد الحجم الدوراني باستخدام التكامل المحدود:

① نرسم المساحة التي تدور ، و نحدد جزءًا داخل المساحة على شكل دائرة قطرها r

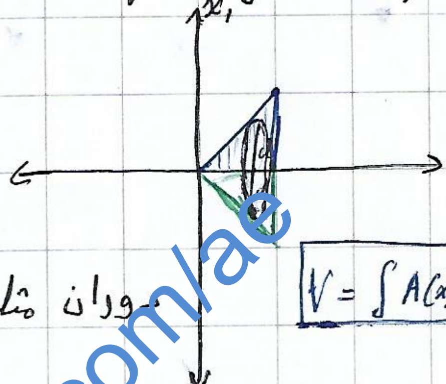
② نحدد حدود التكامل و المتغير في التكامل

مثال: إذا كان الدوران حول محور x يكون التكامل كالتالي:

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \pi (x_2 - x_1)^2 \, dx$$ أو $$V = \int_{x_1}^{x_2} \pi (f(x) - x_1)^2 \, dx$$



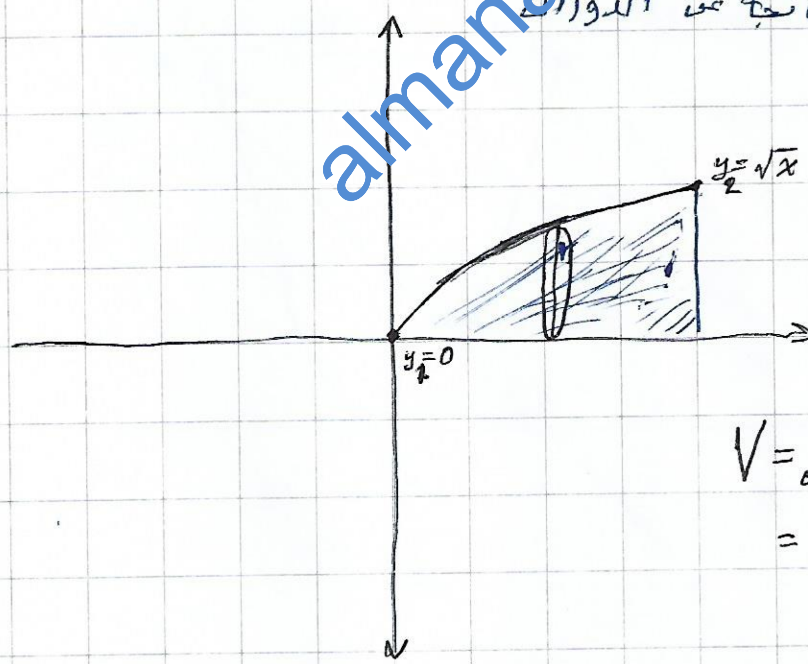
دوران مثلث حول محور أفقي



$d_{circle_1} = r$

لاحظ أن: $\boxed{V = \int A(x)\, dx}$

① قم بتدوير المنطقة تحت المنحنى $y = \sqrt{x}$ على $[0, 4]$ حول محور x و أوجد حجم المنطقة الناتجة من الدوران

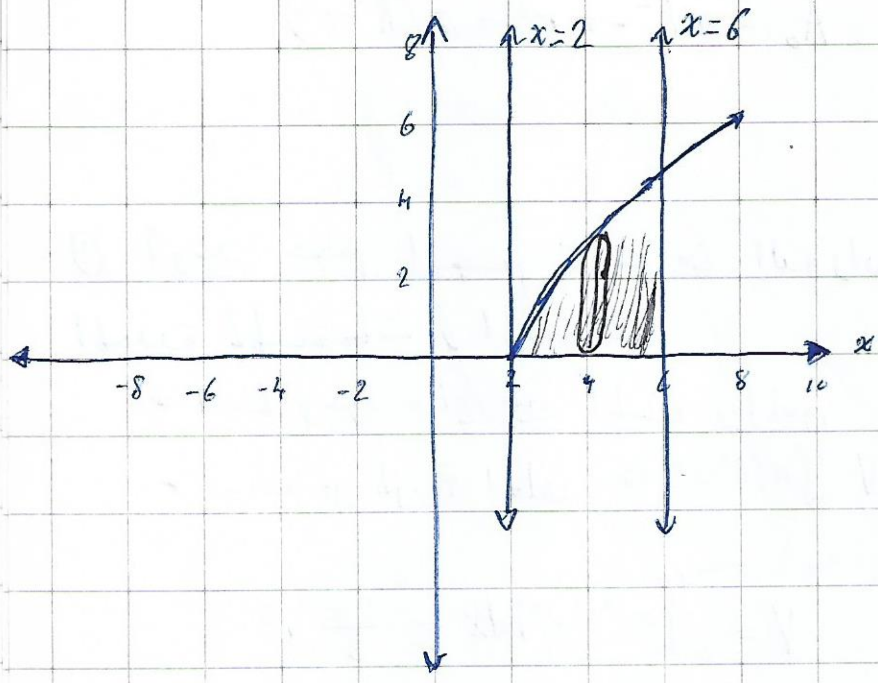


$r = y_2 - y_1$
$= \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}$

$a = 0 \quad b = 4$

$$V = \int_0^4 \pi (\sqrt{x})^2 \, dx$$
$$= \int_0^4 \pi x \, dx = 8\pi \ u^3$$

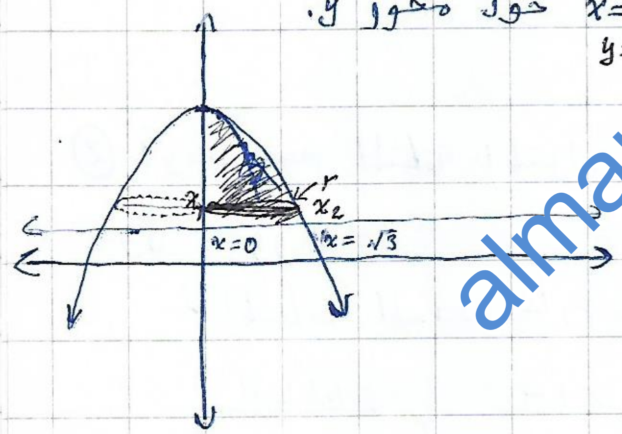
② المنطقة المحصورة بين $x=2$ و $x=6$ و محور السينات و منحنى الدالة $y=2\sqrt{x-2}$ تم تدويرها دورة كاملة حول محور السينات. أوجد حجم المجسم الذي نحصل عليه.



$$r = 2\sqrt{x-2} - 0$$
$$r^2 = 4(x-2)$$
$$V = \int_2^6 \pi[4(x-2)]\,dx = 32\pi\ u^3$$

③ أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بين المنحنيين $y=1$ و $y=4-x^2$ من $x=0$ إلى $x=\sqrt{3}$ حول محور y.

$y=1$ $\quad$ $y=4$



$r = x_2 - x_1$ *

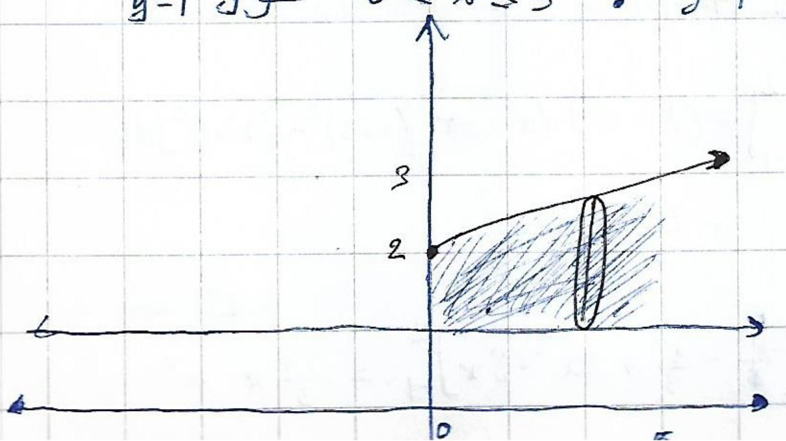
$\Rightarrow x^2 = 4-y \Rightarrow x = \pm\sqrt{4-y}$

* نتعامل مع الطرف الموجب

$r = \sqrt{4-y} - 0 \Rightarrow r^2 = 4-y$

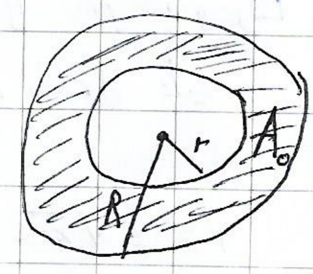
$$V = \int_1^4 \pi(4-y)\,dy = \frac{9\pi}{2}\ u^3$$

④ أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة من أعلى بالمنحنى $y=\sqrt{x+4}$ و من أسفل المستقيم $y=1$ ، $0 \le x \le 5$ حول $y=1$



$$r = \sqrt{x+4} - 1$$
$$(y_2 - y_1)$$
$$r^2 = (\sqrt{x+4} - 1)^2$$
$$V = \int_0^5 \pi(\sqrt{x+4} - 1)^2\,dx$$
$$V = \pi\int_0^5 ((x+4) - 2\sqrt{x+4} + 1)\,dx = \frac{73\pi}{6}$$

* الحجوم الدورانية بالحلقات نتعامل بها عندما يكون الجسم الذي يدور بينه و بين محور الدوران فراغ.

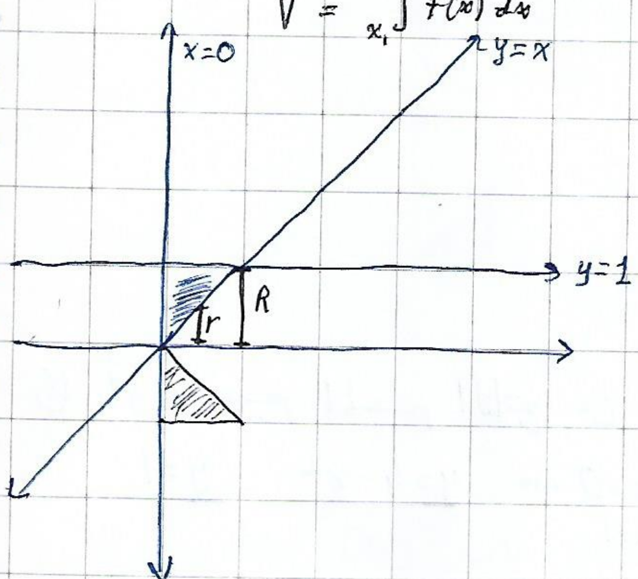


$$A_0 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)$$

① أوجد حجم المجسم الناتج من الدوران حول محور السينات للمنطقة المحددة بالمستقيمات و المنحنيات.

$x = 0 \quad y = 1 \quad y = x$

$$V = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$



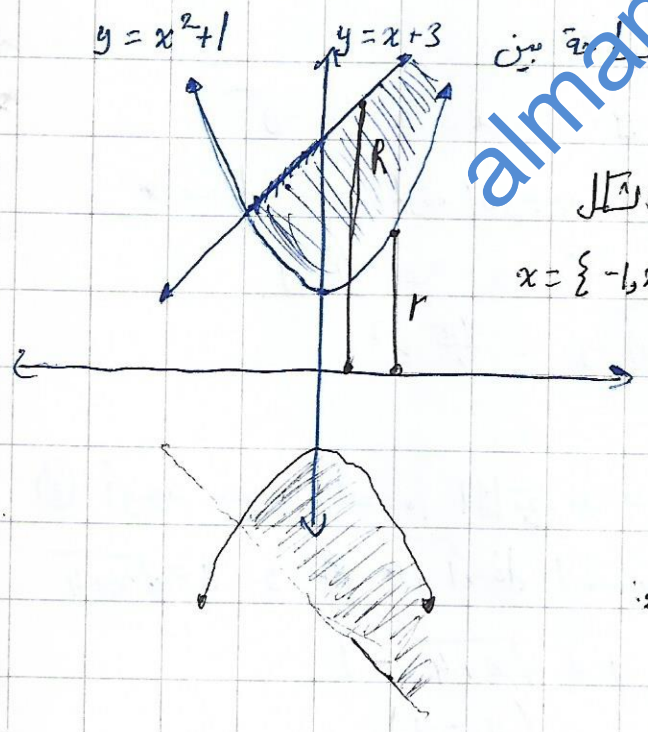
* نلاحظ وجود فراغ بين المنطقة و المحور

* نستخدم طريقة الحلقة $V = \int_a^b \pi (R^2 - r^2)\,dx$

$$V = \int_0^1 \pi (1^2 - x^2)\,dx = \frac{2\pi}{3} u^3$$

$R = 1 \quad r = (x)$

② أوجد حجم المنطقة المتولدة من دوران المنطقة بين حول محور x



* المساحة المحددة خارج نطاق النافذة في الشكل

* التقاطعات: $x^2 + 1 = x + 3$ $\quad x = \{-1, 2\}$

$R = (x+3) - 0 \quad (y_2 - y_1)$

$= x + 3$

$r = (x^2 + 1) - 0 = x^2 + 1$

* الدوران حول محور x 6 التكامل بالنسبة لـ x:

$$V = \int_{-1}^{2} \pi (R^2 - r^2)\,dx = \pi \int_{-1}^{2} \left[(x+3)^2 - (x^2+1)^2\right] dx$$

$$= \frac{117}{5} \pi u^3$$

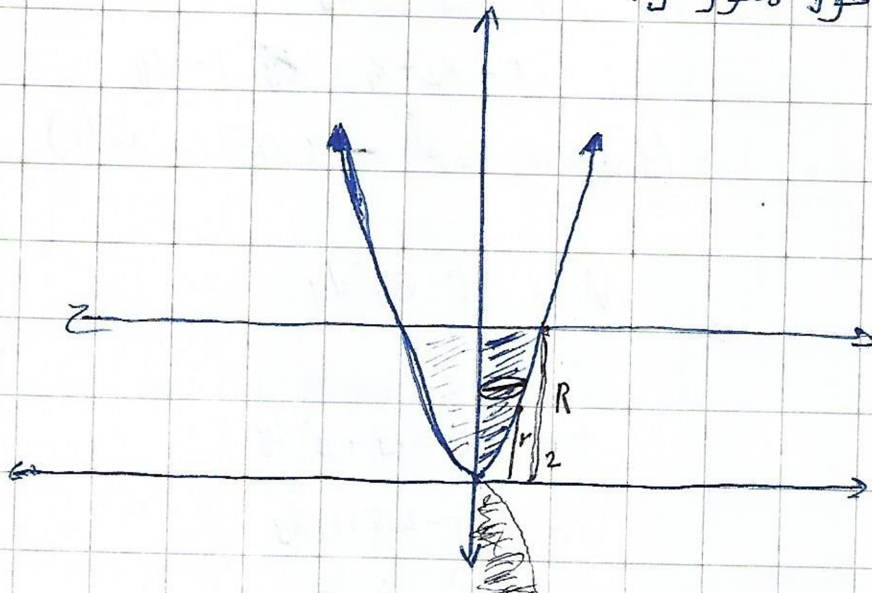
⇐ التكامل

$$V = \pi \int_{-1}^{2} (x^2 + 6x + 9 - x^4 - 2x^2 - 1)\,dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} (-x^4 - x^2 + 6x + 8)\,dx = \pi \left[\frac{-x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x\right]_{-1}^{2} = \frac{117}{5} \pi u^3$$

③ لتكن R المنطقة المحدودة بالتمثيلين $x=0$ ، $y=\frac{1}{4}x^2$ ، $y=1$

① احسب حجم الجسم عندما يدور حول محور y.



$$V=\int_0^1 \pi r^2\,dy$$

$$r=x_2-x_1$$

$$=2\sqrt{y}-0 \Rightarrow r^2=4y$$

$$V=\int_0^1 \pi(4y)\,dy=\underline{\underline{2\pi\ u^3}}$$

② احسب حجم الجسم عندما يدور حول محور x

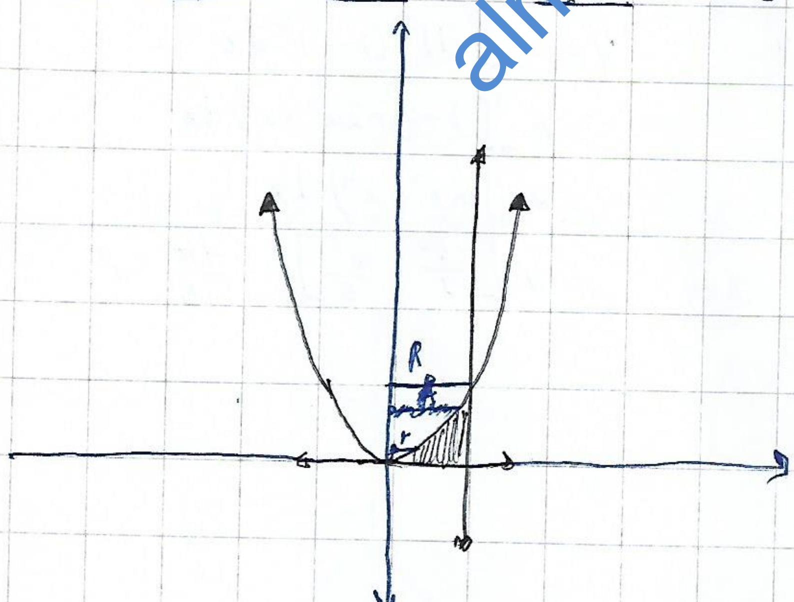
$$V=\int_0^2 \pi\left(1^2-\frac{1}{16}x^4\right)dx=\frac{8\pi}{5}\ u^3$$

$R=1 \qquad r=\frac{1}{4}x^2$

④ أوجد حجم المنطقة المحدودة بواسطة $\underline{y=x^2}$ $\underline{y=0}$ $\underline{x=1}$

وذلك بالدوران حول:

① __المحور y__



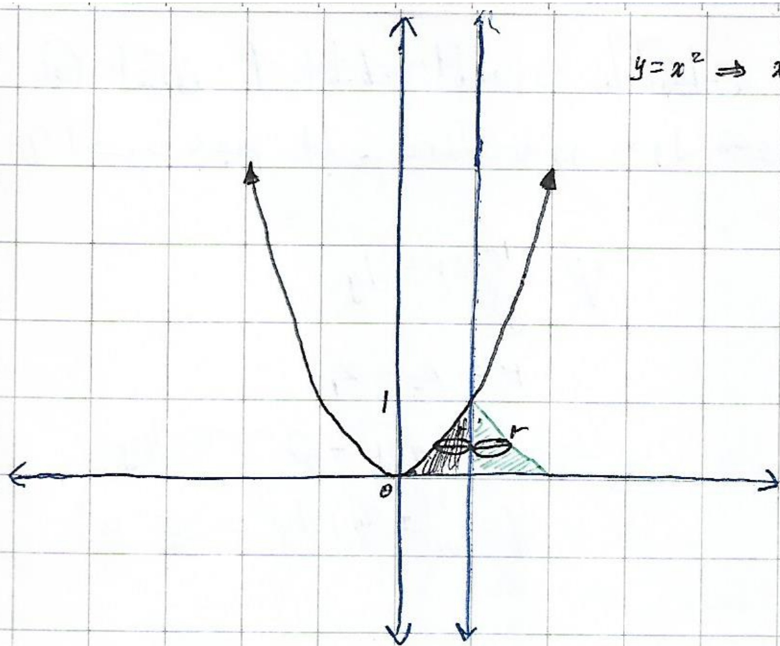
$$V=\pi\int_a^b (R^2-r^2)\,dy$$

$$R=x_2-x_1=1-0=1$$

$$r=\sqrt{y}-0=\sqrt{y}$$

$$V=\pi\int_0^1 1^2-(\sqrt{y})^2\,dy$$

$$=\pi\int_0^1 (1-y)\,dy=\frac{\pi}{2}\ u^3$$



$y=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{y}$

② حول $x=1$

$$V={}_a\int^b \pi r^2\,dy$$

$$r=x_2-x_1=1-\sqrt{y}$$

(البعيد عن محور y − القريب من محور y)

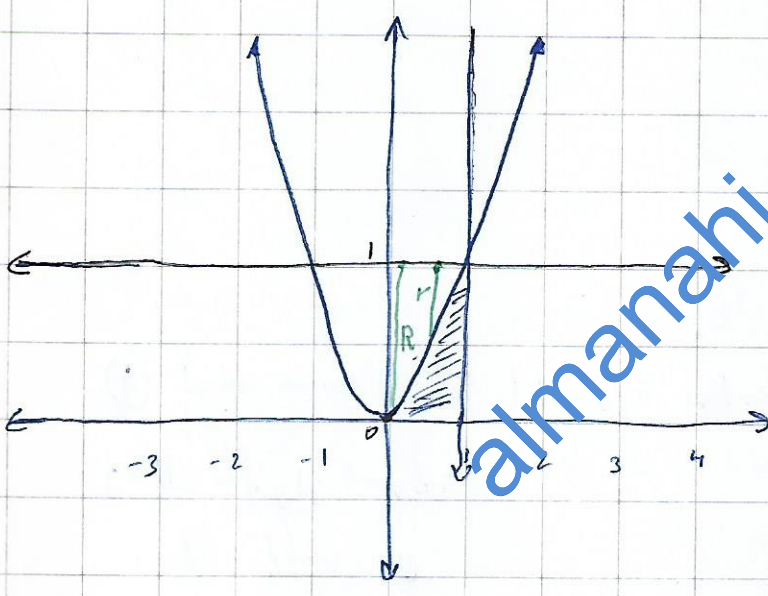
$$V=\pi\int_0^1 (1-\sqrt{y})^2\,dy$$

$$=\pi\int_0^1 (1-2\sqrt{y}+y)\,dy$$

$$=\pi\int_0^1 (y-2\sqrt{y}+1)\,dy$$

$$=\pi\left[\frac{y^2}{2}-\frac{4}{3}y^{3/2}+y\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{6}\ u^3$$



③ حول $y=1$

$$V=\pi\int_0^1 (R^2-r^2)\,dx$$

$$R=y_2-y_1=1-0=1$$

$$r=y_2-y_1=1-x^2$$

$$V=\pi\int_0^1 (1)-(1-x^2)^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^1 1-(1-2x^2+x^4)\,dx$$

$$=\pi\int_0^1 (2x^2-x^4)\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{7\pi}{15}\ u^3$$

* الدوران باستخدام الأصداف الاسطوانية :

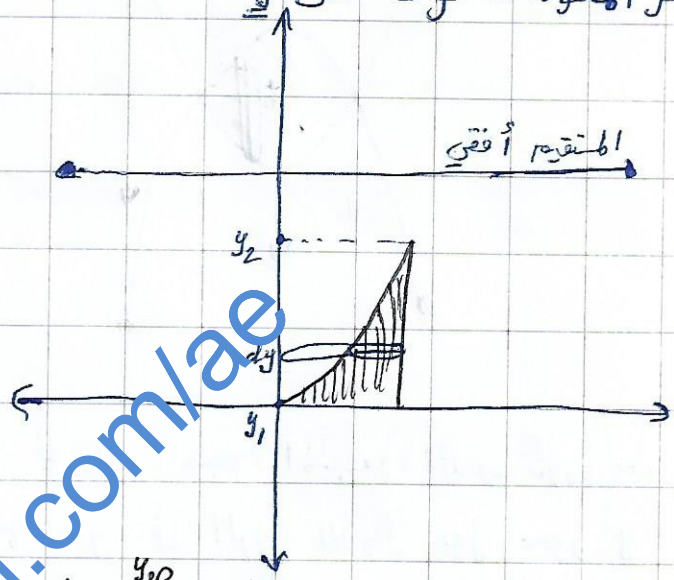
* الشريحة تكون موازية لمحور الدوران وليست عمودية

الصدفة : شريحة اسطوانية

الدوران

حول محور أفقي

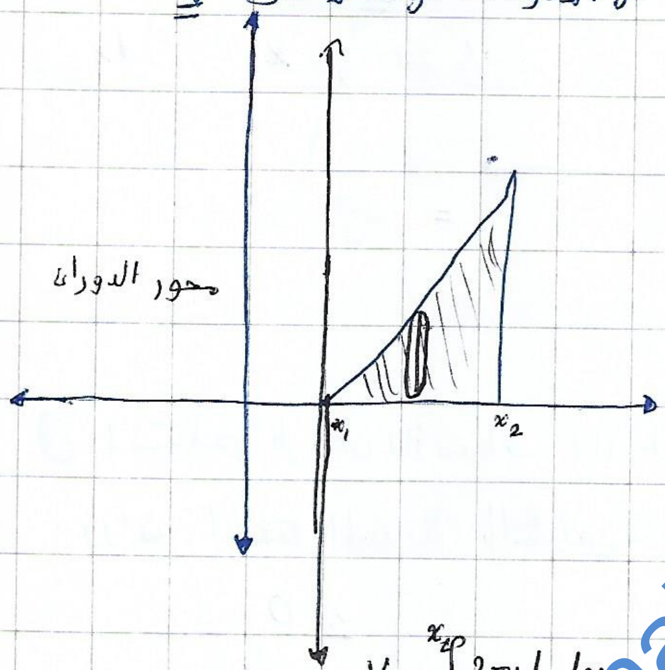
كل المعلومات تؤخذ على y



$$V = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi r h \, dy$$

حول محور رأسي

كل المعلومات تؤخذ على x



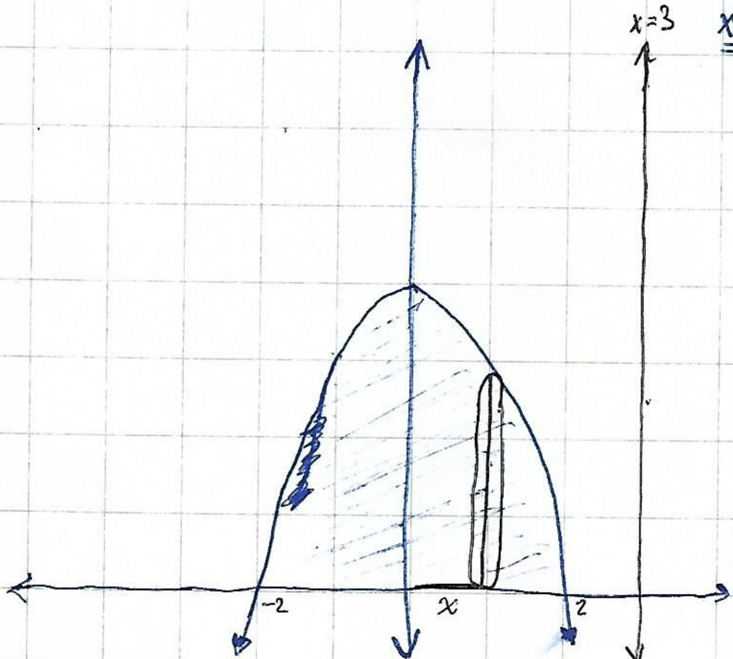
$$V = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi r h \, dx$$

r : بعد الصدفة عن محور الدوران

h : المسافة المحددة في الدائرة

① باستخدام الأصداف الاسطوانية ، أوجد الحجم الدوراني للدالة

$y = 4 - x^2$ و محور x حول $x=3$



$r = 3 - x$

$h = 4 - x^2 - (0)$

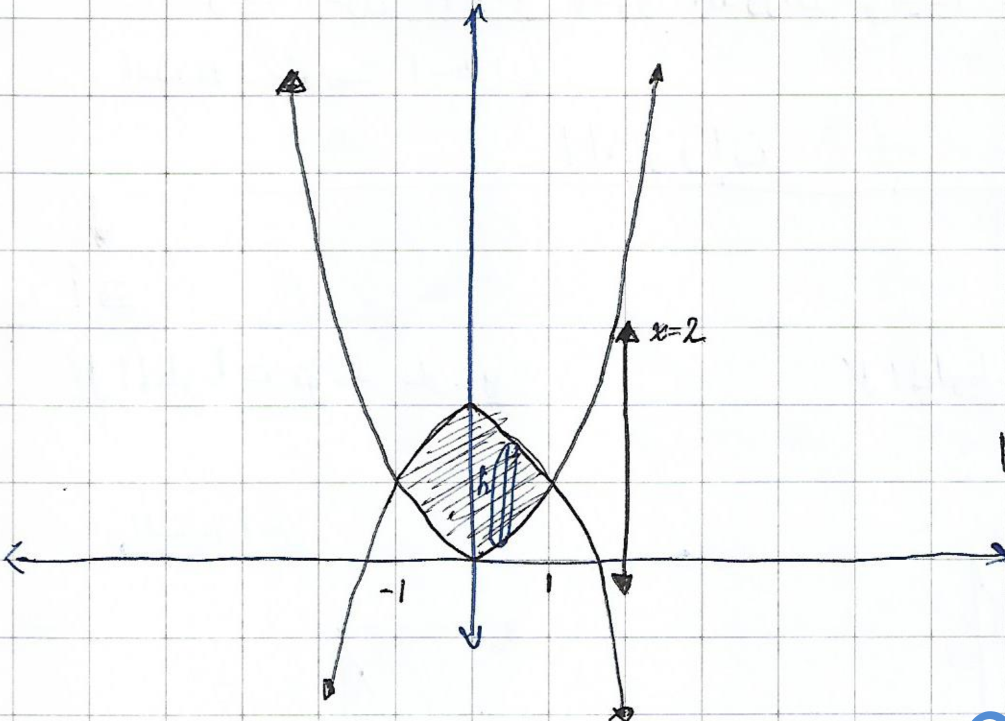
$$V = \int_{-2}^{2} 2\pi (3-x)(4-x^2)\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{2} (12 - 3x^2 - 4x + x^3)\, dx$$

$$= 2\pi \left[12x - x^3 - 2x^2 + \frac{x^4}{4} \right]_{-2}^{2}$$

$$= 64\pi \; u^3$$

② باستخدام الأصداف الاسطوانية أوجد حجم المنطقة المحددة بواسطة $y=x^2$ و $y=2-x^2$ حول $x=2$



$$V=\int_{x=a}^{x=b} 2\pi r h\,dx$$

$$r = 2-x$$

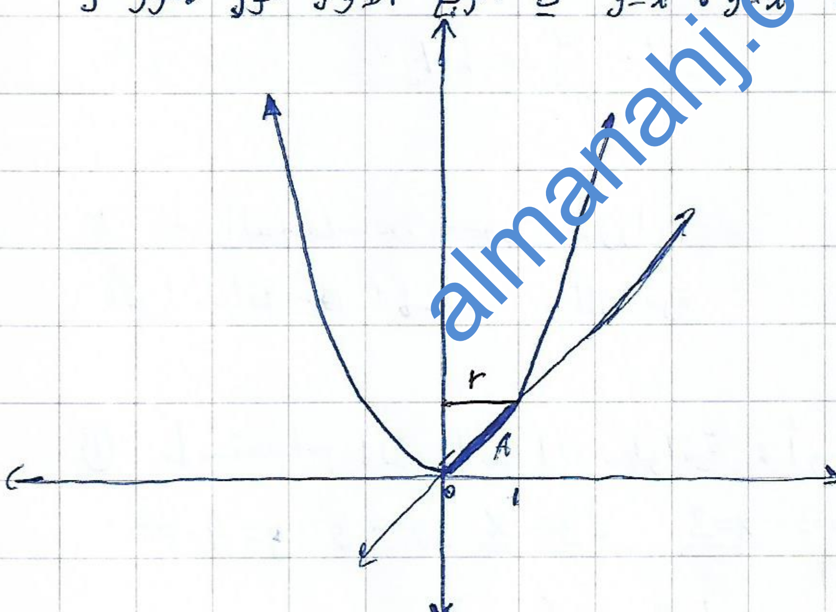
$$h = (2-x^2)-(x^2)$$

$$= 2-2x^2$$

$$V = 2\pi \int_{-1}^{1} (2-x)(2-2x^2)\,dx$$

$$= \frac{32\pi}{3}\ u^3$$

③ استخدم طريقة الأصداف الاسطوانية لإيجاد حجم المجسم الذي تكون من دوران المنطقة المحددة بالتمثيلين $y=x^2$ ، $y=x$ في الربع الأول حول محور y



حول $x=0$

$$r=x$$

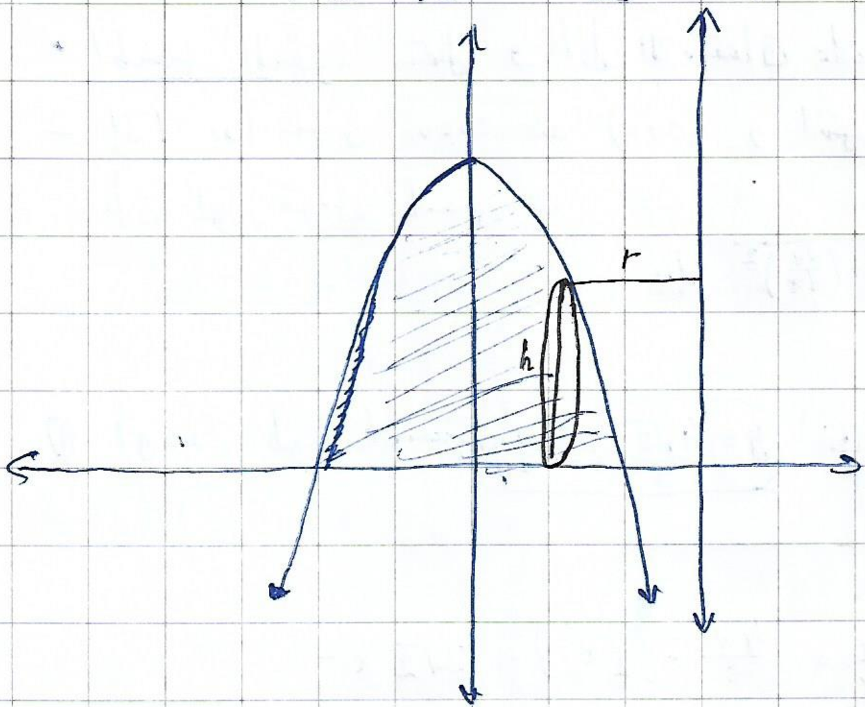
$$h=x-x^2$$

$$V=\int_0^1 2\pi r h\,dx$$

$$=2\pi\int_0^1 x(x-x^2)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{6}$$

④ أوجد حجم المجسم الذي تكوّن بدوران المنطقة المحدودة بالتمثيل البياني $y=4-x^2$ و المحور x حول المستقيم $x=3$



$$V=2\pi\int_{x=a}^{x=b} r h \, dx$$

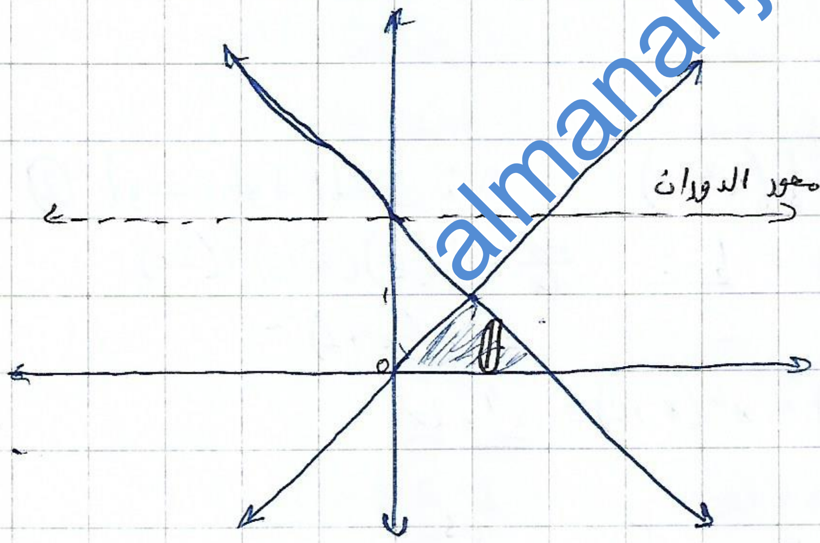
$$r = 3-x$$

$$h=(4-x^2)-0$$

$$V=2\pi\int_{-2}^{2}(3-x)(4-x^2)\,dx = 64\pi \ u^3$$

⑤ لتكن R المنطقة المحدودة بين $y=x$ ، $y=2-x$ ، $y=0$. احسب حجم المجسم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم $y=2$

~~$y=2$~~



الدوران حول مستقيم أفقي:

التكامل بالنسبة لـ x

(طريقة الأصداف)

$$V=\int_{y=a}^{y=b} 2\pi r h \, dy$$

$$r = 2-y$$

$$h = \cancel{f(y)-f_1(y)} \quad x_{\text{يمين}} - x_{\text{يسار}}$$

$$=(2-y)-(y) = 2-2y$$

$$V=2\pi\int_0^1 (2-y)(2-2y)\,dy = 2\pi\int_0^1 (4-6y+2y^2)\,dy = \frac{10\pi}{3}$$