كل ما يحتاجه الطالب في جميع الصفوف من أوراق عمل واختبارات ومذكرات، يجده هنا في الروابط التالية لأفضل مواقع تعليمي إماراتي 100 %

تطبيق المناهج الإماراتية	الاجتماعيات	الرياضيات
الصفحة الرسمية على التلغرام	الاسلامية	العلوم
الصفحة الرسمية على الفيسبوك	الانجليزية	
التربية الاخلاقية لجميع الصفوف	اللغة العربية	
التربية الرياضية		

مجموعات التلغرام.	مجموعات الفيسبوك	قنوات تلغرام	قنوات الفيسبوك
الصف الأول	الصف الأول	الصف الأول	الصف الأول
الصف الثاني	الصف الثاني	الصف الثاني	الصف الثاني
الصف الثالث	الصف الثالث	الصف الثالث	الصف الثالث
الصف الرابع	الصف الرابع	الصف الرابع	الصف الرابع
الصف الخامس	الصف الخامس	الصف الخامس	الصف الخامس
الصف السادس	الصف السادس	الصف السادس	الصف السادس
الصف السابع	الصف السابع	الصف السابع	الصف السابع
الصف الثامن	الصف الثامن	الصف الثامن	الصف الثامن
الصف التاسع عام	الصف التاسع عام	الصف التاسع عام	الصف التاسع عام
الصف التاسع متقدم	الصف التاسع متقدم	الصف التاسع متقدم	تاسع متقدم
الصف العاشر عام	الصف العاشر عام	الصف العاشر عام	عاشر عام
الصف العاشر متقدم	الصف العاشر متقدم	الصف العاشر متقدم	عاشر متقدم
الحادي عشر عام	الحادي عشر عام	الحادي عشر عام	حادي عشر عام
الحادي عشر متقدم	الحادي عشر متقدم	الحادي عشر متقدم	حادي عشر متقدم
ثاني عشر عام	الثاني عشر عام	الثاني عشر عام	الثاني عشر عام
ثاني عشر متقدم	الثاني عشر متقدم	ثاني عشر متقدم	ثاني عشر متقدم

(4-1) المشتقة العكسية و التكامل الغير المحدود

إذا كانت الدالة : $F(x)=x^3 \ , \ G(x) = 3x^2$

$F'(X) = 3x^2 \quad \therefore \ F'(X) = G(x)$

فأننا نقول أن الدالة $F(X)$ هي المشتقة العكسية للدالة $G(x)$

تمرين : إذا كان

$F(x) = \sin x \qquad ; G(x) = \cos x$

أثبت أن الدالة $F(x)$ **هي المشتقة العكسية للدالة** $G(X)$

....

....

ملاحظة : إذا كانت الدالة $F(x)$ **هي المشتقة العكسية للدالة** $G(X)$ فأن كل دالة على النمط $F(X) + C$ تكون أيضا مشتقة عكسية للدالة $G(X)$

نظرية (1)

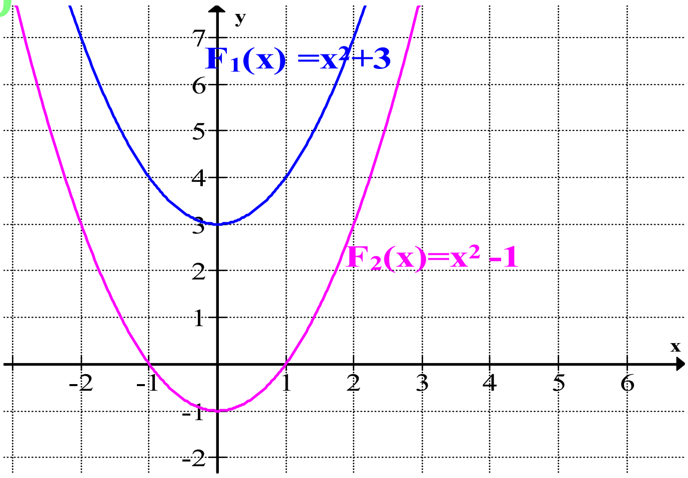
إذا كانت الدالتان : $G(x)$, $F(x)$ هما المشتقة العكسية للدالة $H(X)$ فأن الدالتان $F(x)$ $G(x)$ لا يختلفان إلا في الثابت أي

$$F'(x) = H(X) \ , \ G'(x) = H(X) \Rightarrow F(x) - G(x) = c$$

= = == == == = = = = = = = = = = = = = = = =

في الشكل المقابل الدالتان : $F_1(x) = x^2-1$; $F2(x) = x^2+3$

$$F_1'(X) = F_2'(X) = 2X \Rightarrow F_1(X) - F_2(X) = C$$



تمارين

(1) لتكن الدالتان $F(x) = x^2 -4x +1$ ، $G(x) = (x-2)^2$ كل منهما تمثل المشتقة العكسية للدالة $f(x)$. أوجد

(أ) قيمة الثابت C الذي تختلف به الدالتان $F(x) ; G(x)$

....

....

....

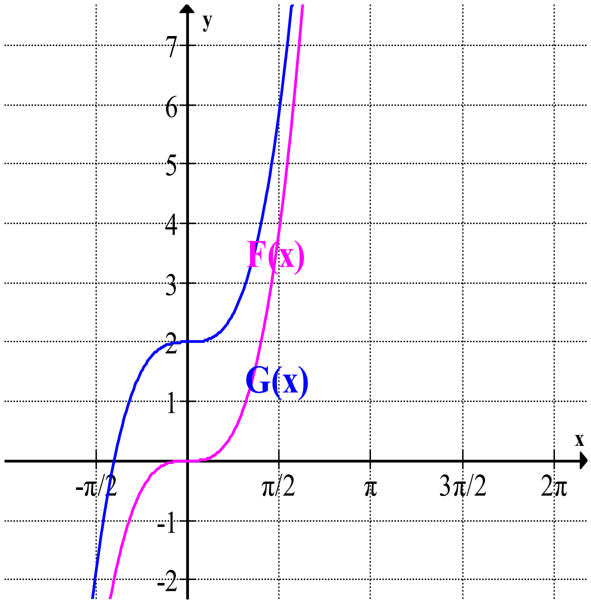
(ب) أوجد الدالة $f(x)$

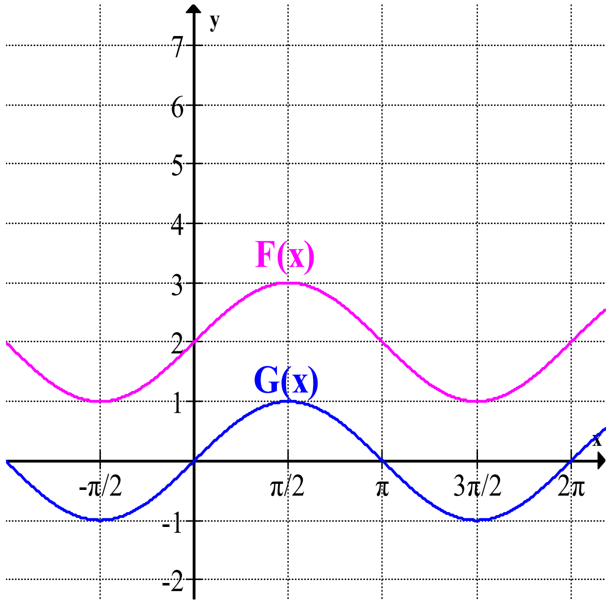
....

....

 * ممدوح أمين *

(2) الشكل المقابل : يمثل الدالتان : F(X) , G(X) . أثبت أن الدالتان F(X) , G(X) كل منهما المشتقة العكسية لدالة و لتكن f (x)





= =

التكامل الغير محدد :

قاعدة :

$$\int X^{n} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

وهذه القاعدة لجميع قيم n الحقيقية ماعدا (n=-1)

أحسب التكاملات التالية

$(1)\int x^{2}dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;\int x^{3}dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;\int x^{4}dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(2)\int x^{-2}dx = \ldots\ldots\ldots$

$(3)\int (x^{3} + x - 2)dx = \ldots\ldots\ldots$

$(4)\int (5x^{4} - 6x^{2} + 4x)dx = \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots$

$(5)\int (12x^{3} + \frac{1}{x^{2}} + \pi)dx = \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots$

$(6)\int (\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}})dx = \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots$

$(7)\int (\sqrt[3]{x^{2}} + \sqrt[3]{x})dx = \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots$

* ممدوح أمين *

$$(8)\int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^4}\right)dx = \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots$$

$$(9)\int (x+3)(x-3)dx = \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots$$

$$(10)\int (x^2-4)^2 dx = \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots$$

$$(11)\int \frac{x^2-1}{x+1}dx = \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots$$

$$(11)\int \frac{x^3+8}{x+2}dx = \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots$$

$$(12)\int \left(4x^3 + - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right) dx$$

....

....

....

$$(13)\int \left(2x^3 + \frac{1}{x^5} - \sqrt[3]{x} - 2\right) dx$$

....

....

....

....

$$(14)\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\, dx$$

....

....

....

....

$$(15)\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx = \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots$$

....

....

....

$$(16)\int (\sqrt{x}-x)^2 dx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

....
....
....

$$(17)\int \left(\frac{x+4}{\sqrt{x}}\right)dx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

....
....
....
....
....
....
....

تكامل الدوال المثلثية :

أولا بعض قواعد حساب المثلثات الشهيرة التي يحتاجها الطالب

(1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$; $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

(2) $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

(3) $\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

$$(4)\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} ; \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

(5) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$\text{Cos } 2x = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

$$(6)\sec x = \frac{1}{\cos x} ; \csc x = \frac{1}{\sin x} ; \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$(7)\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} ; \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

فيما يلي بعض التكاملات الشهيرة للدوال المثلثية :

$$(1)\int \sin x dx = -\cos x + c ; \int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + c$$

$$(2)\int \cos x dx = \sin x + c ; \int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + c$$

$$(3)\int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$(4)\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

$$(5)\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$$

$$(6)\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$$

احسب ما يلي

$(1) \int \sec x (\tan x + \cos x) dx$

....

....

....

....

$$(2)\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

....

....

....

....

$$(3)\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

....

....

....

$$(4)\int \frac{1}{1-\cos 2x} dx$$

....

....

....

$$(5)\int \frac{3+\sin x}{1-\sin^2 x} \ dx$$

....

....

....

$$(6)\int \frac{\cos x \sin x - 4}{\sin^2 x} \ dx$$

....

....

....

(7) $\int$ **csc x (sec x tan x – cot x) dx**

....

....

....

(8) $\int \frac{1}{1+\cos 2x}$ **dx**

....

....

....

....

(9) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}$ **dx**

....

....

....

....

(10) $\int (\frac{\cos x - 2}{1-\cos^2 x})$ dx

....

....

....

** (11) $\int$ csc x ($4\pi^2$ + sin x cos x) dx

....

....

....

***(12)** $\int \frac{1}{1+\cos x}$ **dx**

....

....

....

....

*(13) $\int \frac{1}{1-\sin x}$ **dx**

....

....

....

....

* (14) $\int (\tan^2 x + \tan^4 x)\ dx$

………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

ملاحظة هامة

$$(1)\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$

أمثلة و تمارين

$f(x) = \frac{d}{dx}(\sin x^2)$; $g(x) = \frac{d}{dx}(x\cos\frac{1}{x})$

اوجد

$(1)\int g(x)dx =$.......... ....

……………………………………………………………………………………………

$(2)\int (f(x) + \cos x)dx =$.......... ....

……………………………………………………………………………………………

المعادلات التفاضلية

حل المعادلات التفاضلية التالية

$(1)\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{\sec x}$; $y(\pi) = 5$

………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………

(2)

- التطبيقات الفيزيائية للتكامل :-
- (ا) تتحرك نقطة على خط مستقيم مبتدئة من السكون $(v(0)=0\ \ m/sec)$ – بعجلة مقدراها $a = 6t-8\ \ m/sec^2$.أوجد

(أ) السرعة المتجهة v و المسافة كدالة في t .

....

....

(ب) بعد الجسم عن نقطة البدء بعد 5 ثواني من بدء الحركة .

....

....

....

(2) سقط حجر من قمة برج ارتفاعه 490 m وكانت قوة الجاذبية الأرضية هي القوة الوحيدة المؤثرة عليه $(\ a = -9.8\ m\ /\ sec^2\ )$ أوجد

(أ) السرعة المتجهة و المسافة كدالة في الزمن t .

....

....

....

....

....

(ت) أوجد السرعة عند اصطدام الحجر بالأرض .

....

....

....

....

....

الحركة **(10)**

التوافقية البسيطة : يتحرك جسم حركة توافقية بسيطة بعجلة تعطي بالعلاقة التالية :

$$a = -\sin t - \cos t \quad ;\ v(0) = 1 \quad ,\ s(0) = 1$$

أوجد

(أ) السرعة المتجهة v و دالة الموضع s كدالة في الزمن t .

....

....

....

....

(ب) أوجد أكبر و اصغر قيمة لــ s .

....

(4-2)الدالة اللوغارتمية الطبيعية و الدالة الآسية الطبيعية

أولا الدالة اللوغارتيمية

تذكر قواعد اللوغارتيميات السابق دراستها في العام التالي

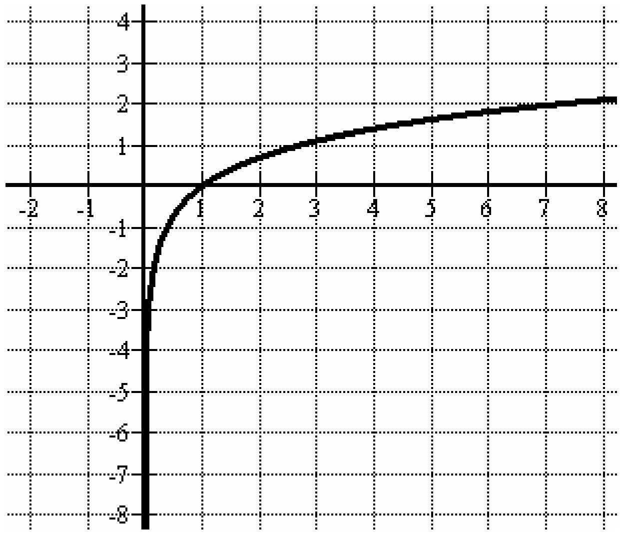
(1) $\ln x y = \ln x + \ln y$

(2) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

(3) $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$

(4) $\ln x^{r} = r \ln x$

(5) $e^{\ln x} = x$



نظرية (دون برهان)

(1) $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

نتيجة :

$g(x) = \ln f(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

تمارين : أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي :

(1) $f(x) = \ln (x^2 + x +1)$

....

....

(2) $f(x) = \ln (\sin x)$

....

....

....

(3) $f(x) = \ln \sqrt{x}$

....

....

....

....

* ممدوح أمين *

(4) $f(x) = \ln \frac{1}{x}$

....
....
....
....

(5) $f(x) = \ln\ (\ln x)$

....
....
....

(6) $f(x) = \log x$

....
....
....

(7) $f(x) = \frac{\ln 2}{\ln x}$

....
....
....

(8) $f(x) = x^{\ln e^2}$

....
....
....

(9) $f(x) = (\ln x)^3$

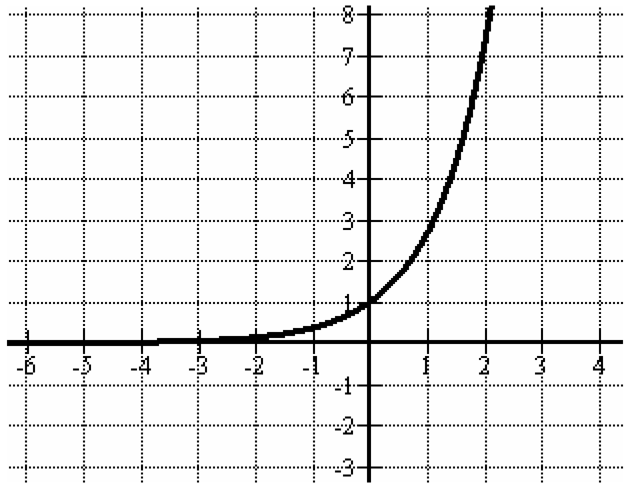
....
....
....

(10) $f(x) = x \ln x$

....
....
....

ثانياً : الدالة الآسية : $f(x) = e^{x}$

خواص الدالة الآسية



$$(1)\ e^{x} \times e^{y} = e^{x+y}$$

$$(2)\ \frac{e^{x}}{e^{y}} = e^{x-y}$$

$$(3)\ e^{0} = 1$$

$$(4)\ a^{x} = e^{x \ln a}$$

نظرية ☹

$$(1)\quad f(x) = e^{x} \Rightarrow f'(x) = e^{x}$$

$$(2)\quad f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = g'(x)\ e^{g(x)}$$

تمارين أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية :

(1) $y = e^{2x}$

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

(2) $y = e^{x^2-3x+1}$

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

(3) $y = e^{\sin x}$

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

(4) $y = x^2 e^{x}$

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

(5) $y = e^{\tan x} \ln x$

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

(6) $y = x^{e}$

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

(7) $y = 2^x$

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

(8) $y = e^{\ln x}$

………………………………………………………………………………………………

(9) $y = \sqrt{e^x}$

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

(10) $y = e^{\sqrt{x}}$

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

ثانيا : التكامل

(1) $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c$

(2) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + c$

(3) $\int e^x dx = e^x + c$; (4) $\int e^{f(x)} f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$

تمارين : احسب ما يلي : -

(1) $\int \cot x \; dx$

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

(2) $\int \tan x \; dx$

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

(3) $\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

* ممدوح أمين *

(4) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

....

....

(5) $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$

....

....

(6) $\int \frac{1}{ax+b} \, dx$

....

....

(7) $\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan x} dx$

....

....

(8) $\int \frac{x^{-1}}{x^{-1}+2} \, dx$

....

....

(9) $\int \frac{2}{3x-1} \, dx$

....

....

(10) $\int \frac{x}{x+1} dx$

....

....

(11) $\int e^{-x} \, dx$

....

....

(12) $\int x \, e^{x^2+1} \, dx$

....

....

(13) $\int \frac{e^{x^{-2}}}{x^{3}}\,dx$

....

....

(14) $\int \sin x \;\; e^{\cos x}\, dx$

....

....

(15) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\, dx$

....

....

(16) $\int e^{x^2 + \ln x}\, dx$

....

....

(17) $\int \ln (e^{x})\, dx$

....

....

(18) $\int 2^{x}\, dx$

....

....

(19) $\int e^{2}\, dx$

....

....

(20) $\int e^{e^{-x}}\, dx$

....

....

....

(21) حل المعادلات التفاضلية :

$$(a)\ \frac{dy}{dx} = e^{x+y}$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....

$$(b)\ \frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 x \qquad ; \quad y'(\frac{\pi}{4}) = 1, \qquad y(0) = 1$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....

(22) أوجد معادلة المماس ومعادلة الخط العمودي على منحني الدالة $y = e^{-x}$ والذي يمر
(أ) بالنقطة $(0\ ,1)$ (ب) بنقطة الأصل .

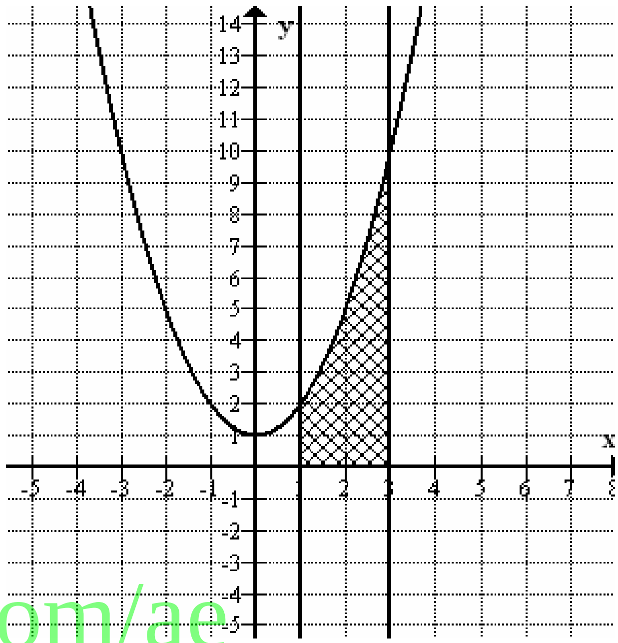
....
....
....
....
....
....
....

حساب المساحة بين المنحنيات بطريقة التقريب بالمستطيلات :

تمرين :

لتكن الدالة : $f(x) = x^2 + 1$ - أوجد المساحة تحت منحني الدالة $f(x)$ وبين محور السينات و المستقيمات $x= 3$, $x=1$ بتقسيم الفترة [1 , 3] إلي 5 فترات جزئية متساوية مستخدماً

(أ) طريقة التقريب اليميني (ب) طريقة التقريب اليساري (ج) طريقة التقريب المنتصفي



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تعريف التكامل المحدد

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $[a, b]$ وكانت

$\lim_{\|p\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = I$ **مهما كانت طريقة التجزئة P و الأعداد C_k فأن**

النهاية السابقة تسمي تكامل الدالة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ و يرمز لها بالرمز $\int_a^b f(x)\,dx$ **أي**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|p\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

ويسمي a الحد الأدنى للتكامل و b الحد الأعلى للتكامل .

أولا: احسب التكاملات المحددة التالية (مستعيناً بالرسم)

$(1)\int_{-1}^{5} 3\,dx$

$(2)\int_{1}^{4} -2\,dx$

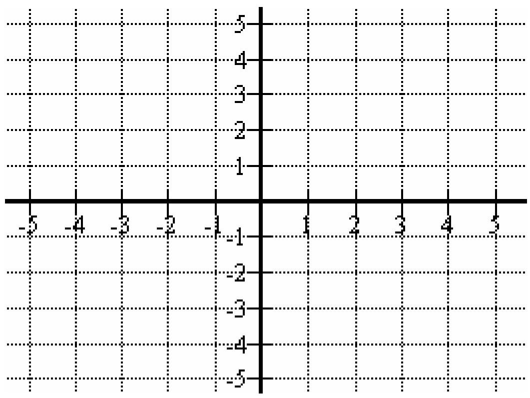
$(3)\int_{2}^{5} x\,dx$

$(4)\int_{-3}^{3} x\,dx$

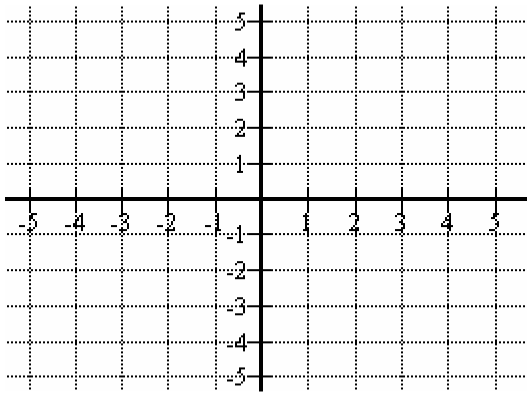
$(5)\int_{1}^{4} (x+1)\,dx$

ثانياً : ارسم بيانياً الدالة على الفترة المعطاه ثم أوجد تكامل الدالة على الفترة

(a) $y = |x|$; $[-1, 3]$

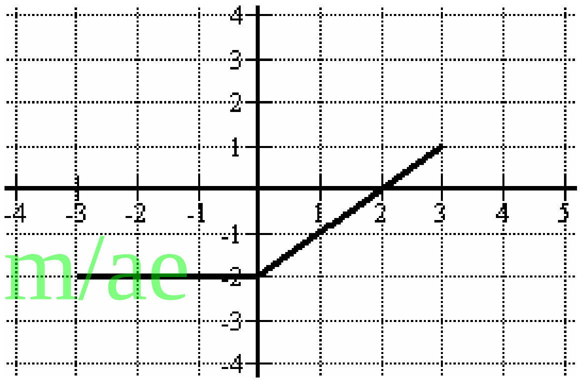


(b) y = 2 x + 2   **; ; [-2,]**

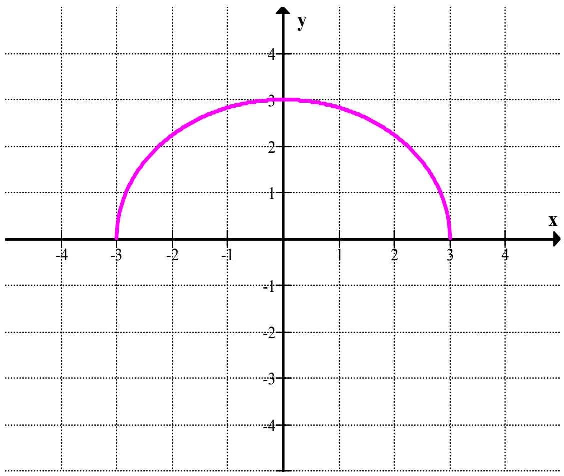


ثانيا مستعينا بالسم احسب التكاملات المحددة التالية

(1) $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$

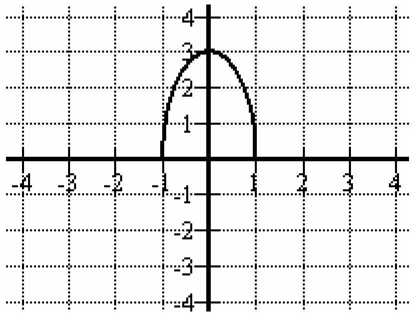


(2) $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx$

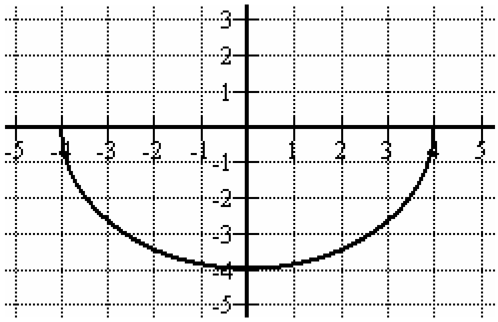


                    * ممدوح أمين *

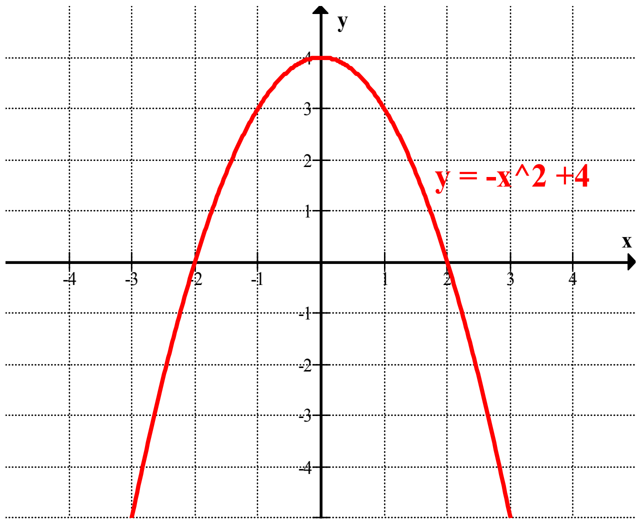
(3) $\int_{-1}^{1} \sqrt{9-9x^2}\,dx$



(4) $\int_{-4}^{4} -\sqrt{16-x^2}\,dx$



(5) $\int_{-2}^{2} -x^2+4$



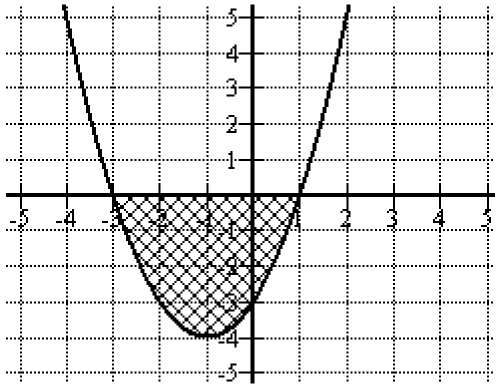
(c) (b) $y = x^2 + 2x - 3$; [-3,1]

(إرشاد : قانون أرشميدس ا لمساحة تحت قوس القطع المكافئ هي A= 2/3 b h ، b طول القاعدة ، hالارتفاع)

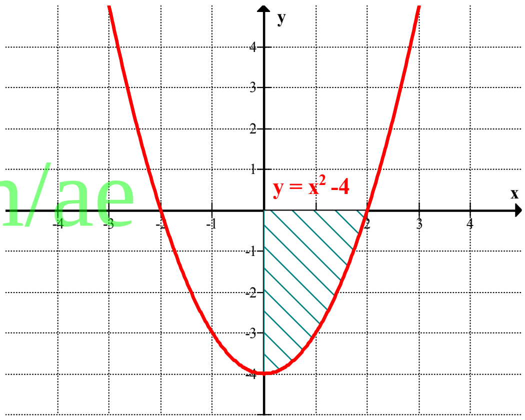
في الشكل المقابل :لإيجاد مساحة المنطقة المظللة باستخدام قاعدة أرشميدس : نلاحظ أن b=4 , h =4

$$A = \tfrac{2}{3} \times 4 \times 4 = 10\tfrac{2}{3}$$

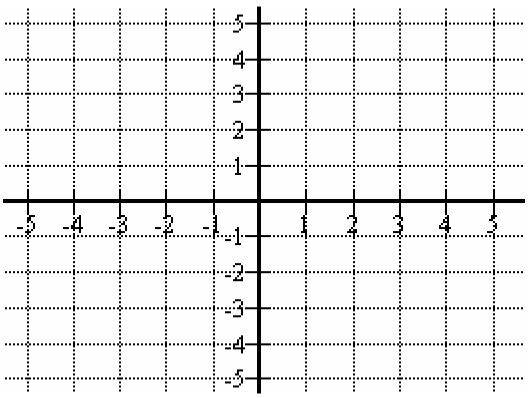
$$\int_{-3}^{1} (x^2 + 2x - 3)dx = -10\,\tfrac{2}{3}$$



$$(6)\int_{0}^{2} (x^2 - 4)\,dx$$



(d) $y = 3x - x^2$; [1 , 4]



قواعد التكاملات المحدودة:

$$(1)\quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$(2)\quad \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$(3)\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$(4)\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$(5)\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

(6) If: $\min f \leq f(x) \leq \max f \ , \forall \ x \in [a , b$ $\min f(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx < \max f(b-a)$

(7) If : $f(x) \leq g(x) , \forall \ x \in [a , b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

(8) If : $f(x) \geq 0 \ , \forall \ x \in [a , b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

تمارين :-

أولا:

(1) أوجد قيمة c إذا علم :

$$(a)\int_\pi^x f(y)dy = \cos^2 x + c$$

....

....

$$(b)\int_1^x f(y)dy = \ln x + c$$

....

....

(ثانياً) في التمارين A , B أوجد لكل من التكاملات التالية $\max f , \min f$ دون حساب التكامل :

$$(A)\int_1^{10} \frac{1}{x}dx$$

$$(B) \int_{0}^{1} \frac{1}{1 + X^{2}} dx$$

....

....

ثالثاً) أجب عن الأسئلة الآتية)

$$(1) \int_{a}^{2} 4\, dx = 12 \Rightarrow a = ..$$

$$(2) \int_{-2}^{2} k dx = 8 \qquad \therefore k = ...$$

(3) $f(x)$ $\int_{-1}^{1} x^{n}\, dx = 2 \int_{0}^{1} x^{n}\, dx \qquad \therefore n = \{ \qquad \}$

(4) $\int_{-1}^{1} x^{n}\, dx = 0 \qquad \therefore n = \{ \qquad \}$

(5) $f(x)$ دالة فردية , $\int_{-2}^{b} f(x)\, dx = 0$

فأن مجموعة قيم b هي : { } مع التفسير.

(6) $f(x) > 0 \; ; \; \vee \; x \in [a, b]$, **دالة تزايدية f(x)**

فسر لماذا $\int_{b}^{a} f(x)\, dx < 0$

....

....

(رابعاً) دون حساب التكامل بين لماذا

$$(1) \int_{0}^{1} x^{2} dx < \int_{0}^{1} x dx$$

....

$$(2) \int_{1}^{2} x^{2} dx > \int_{1}^{2} x dx$$

....

(خامساً) أحسب $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

$$(1)\ y = \int_1^2 f(x)dx$$

$$(2)\ y = \int \sin x^2\, dx$$

(سادساً) : إذا كان : $\int_1^5 f(x)dx = 4$; $\int_1^6 2f(x)dx = 10$

فأوجد $\int_6^5 f(x)dx$

....

....

سابعاً (أ) الإزاحة الأفقية و الرأسية : إذا كانت $\int_a^b f(x)dx = k$ فأن

$$(1)\int_a^b (f(x)+c)dx = k + c(b-a) \quad ; \quad (1)\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx = k$$

تمارين إذا كان $\int_1^3 f(x)dx = 4$ فأوجد

$$(a)\int_2^4 f(x-1)dx$$

$$(b)\int_0^2 f(x+1)dx$$

$$(c)\int_1^3 (f(x)+1)dx$$

$$(d)\int_5^3 (f(x-2)+2)dx$$

(ب) (الاتساع – التضييق) إذا كان $\int_a^b f(x)dx = k$ فأن $\int_{ac}^{cb} f(x/c)dx = ck$

فمثلا : $\int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}$ نجد أن $\int_2^4 (x/2)^2 dx = \frac{14}{3}$ ، $\int_{0.5}^1 (2x)^2 dx = \frac{7}{6}$

تمرين : إذا كان $\int_0^1 f(x)dx = 4$ فأوجد

$(a)\int_0^3 f(x/3)dx$

$(b)\int_0^{0.5} f(2x)dx$

تاسعاً : أحسب كلاً من المجاميع التالية

(1) $\sum_{r=1}^{15} r$

(2) $\sum_{r=1}^{10} r^2$

أثبت أن

(3) $\sum_{r=1}^{n} (6r^2 + 2r + 5) = 2n^3 + 4n^2 + 7n$

نظرية القيمة الوسطي في التكامل :

إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة متصلة على $[a\ ,\ b\ ]$ فأن القيمة المتوسطة على الفترة $[a\ ,b]$ هي

$$av(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

ويوجد عدد c بحيث: $a < c < b$ بحيث يكون :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

تمارين :

(1) أوجد القيمة المتوسطة للدالة في الفترة المعطاة عند أي النقاط في الفترة تأخذ الدالة هذه القيمة المتوسطة .

(A) $f(x) = x^2 + 1 \ ;\ x \in \ [\ 1\ ,\ 3\ ]$

...

....

....

....

(B) $f(x) = \sin x \ ;\ x \in \ [\ 0\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ]$

....

....

....

(c) $f(x) = 0.5x^2 - 1 \ ;\ x \in \ [0,\ 2\ ]$

....

....

....

(d) $f(x) = e^x \ ;\ x \in \ [0,\ 1]$

....

....

....

....

....

....

$(e)\ y = \sqrt{x}$; $[1\ ,\ 9]$

....

....

....

....

....

....

(4-4) النظرية الأساسية للتفاضل و التكامل

النظرية الأساسية (الجزء 1)

إذا كانت f دالة متصلة على [a , b] والدالة F معرفة كما يلي $F(X)=\int_A^X f(t)dt$ فأن $\frac{dF}{dx}=f(x)$

تمارين : أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كلاً مما يلي :

$(1)\ y=\int_\pi^X \sin\ t dt$

....

....

$(2)\ y=\int_0^{X^2} \cos\ t dt$

....

....

$(3)\ y=\int_x^1 \sqrt{t}\, dt$

....

....

$(4)\ y=\int_x^{2x} \frac{t}{1+t} dt$

....

....

ملاحظة: إذا كانت $f'(x)=0$ فأن الدالة $f(x)$ ثابتة

(5) أثبت أن الدالة $f(x)$ ثابتة و أوجد قيمة الثابت حيث

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{1/x}\frac{1}{1+t^2}dt$$

....

....

....

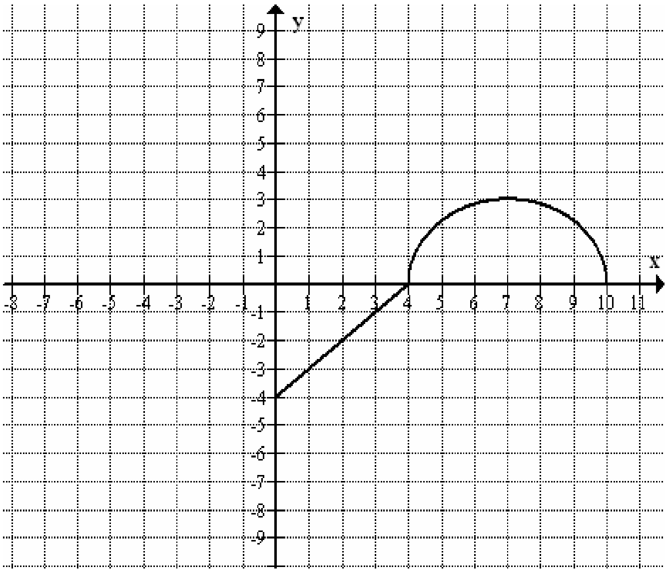
....

....

$(6)\int_1^x f(y)dy = x\sin\ \pi x$

فأوجد $f(2)$

(7) بفرض أن $G(X)=\int_0^x f(t)dt+8$ ، حيث f دالة متصلة على الفترة [0,10] و المبين رسمها البياني كما يلي . أوجد كلاً من



(أ) g(0) ، g(4) ، g(7)

....

....

....

(ب) هل منحني g(x) يمر بنقطة الأصل.

....

(ت) عند أي قيمة لـ x تكون g اكبر ما يمكن و أصغر ما يمكن مع التعليل.

....

....

(ث) أحسب $\int_0^{10} f(x)\,dx$ ، g(10)

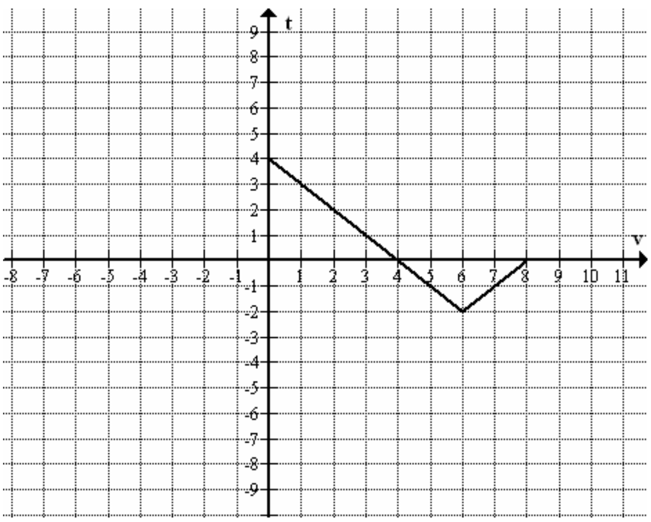
....

....

هل النتيجتين متساويتان ؟ فسر .

(8) دالة الموضع s لجسم يتحرك على محور إحداثيات عند الزمن t(بالثواني) يعطي بالعلاقة التالية

$s(t)=\int_0^t v(t)dt-6$ والرسم البياني للدالة v كما هو موضح بالرسم . أجب عن الأسئلة التالية



(أ) ما موقع الجسيم عند t = 2, t =8

....

....

(ب) أحسب المسافة التي تحركها الجسيم خلال الثواني الثمانية الأولي .

....

....

(ج) متي يمر الجسيم بنقطة الأصل .

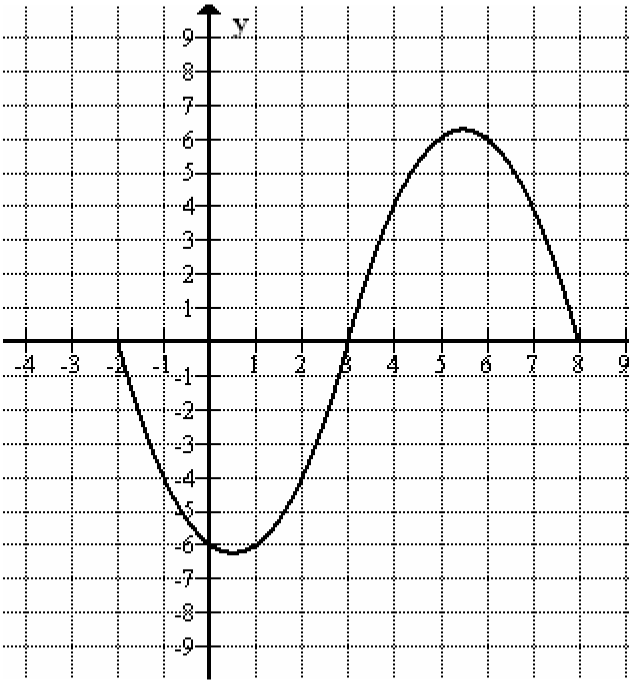
....

....

(د) حدد الفترات التي يتحرك فيها الجسيم نحو نقطة الأصل ، والفترات التي يتحرك بعيداً عن نقطة الأصل .

....

(9) ليكن $G(X)=\int_{-2}^{X} f(t)dt-1$ ، f دالة متصلة مجالها [8 , 2-] و المبين رسمها البياني .



(أ) أوجد G(-2) , G(8)

....

....

....

....

(ب)عين أكبر قيمة للدالةG .

....

....

(ج) عين قيم x التي تكون عندها G أكبر ما يمكن و أصغر ما يمكن .

....

....

(10) أوجد قيمة k إذا كان: f (x) = sec x tan x ،

$$\int_0^x f(t)dt+k=\int_x^{\pi} f(t)dt$$

....

....

....

....

(11) أوجد قيمة k إذا كان: f (x) = cos x csc x ،

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} f(t)dt+k=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt$$

....

....

....

....

النظرية الأساسية الجزء (2) : إذا كانت الدالة f متصلة على [a , b] و كانت الدالة F هي المشتقة العكسية للدالة(تكامل) f في الفترة [a , b] فأن

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

باستخدام النظرية الأساسية (الجزء 2)

$(1)\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx$

....
....
....
....

$(2)\int_{1}^{9}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)dx$

....
....
....
....

$(3)\int_{0}^{4}(\sqrt{x}+2x)dx$

....
....
....
....

$(4)\int_{0}^{2\pi}(\sin x)dx$

....
....
....
....

$(5)\int_{-1}^{1}(e^{2x})dx$

....
....
....

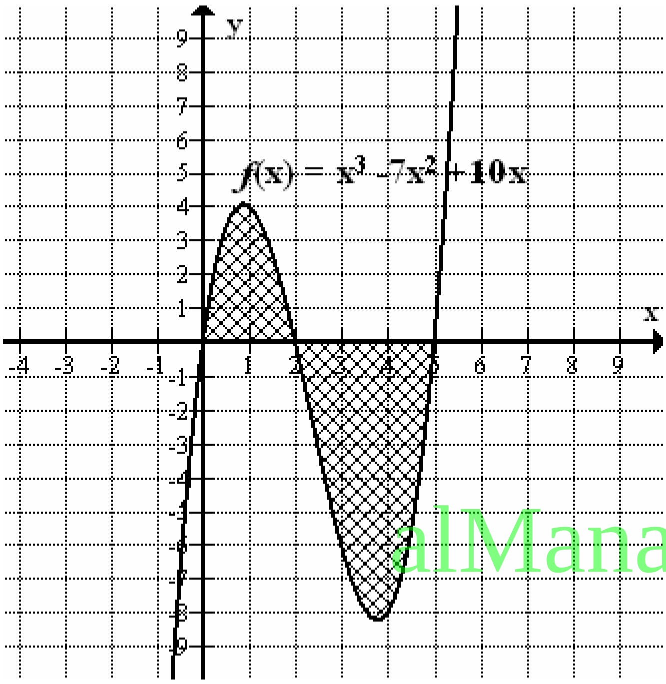
$(6)\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\sec x \tan x)dx$

....
....

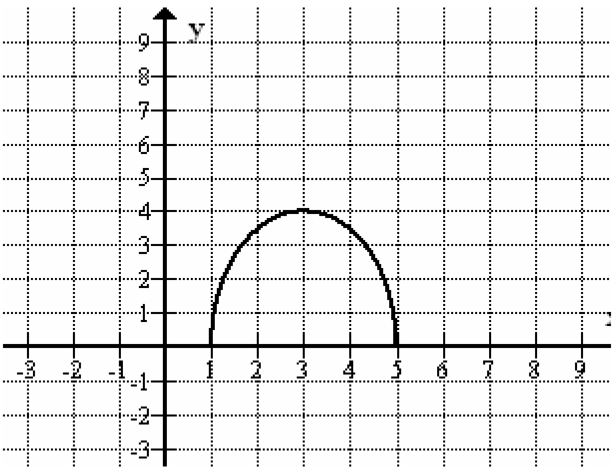
$(7)\int_{-1}^{2} |x|\, dx$

(8) أوجد المساحة الكلية للمنطقة المحصورة بين المنحني و محور السينات .

(a) $f(x) = -x^3 - 7x^2 + 10x$



(b) $y = \sqrt{16 - 4(x-3)^2}$



أحسب التكاملات التالية :

(1) $\int (2x+1)^9 \, dx$

أرشاد ضع $u = 2x+1$

....
....
....
....

(2) $\int \frac{dx}{(1-3x)^9}$

....
....
....
....

(3) $\int \sqrt[3]{(x-4)} \, dx$

....
....
....
....

(4) $\int (x^2 - 3)^5 \, x \, dx$

(أرشاد ضع $u = x^2 - 3$)

....
....
....
....

(5) $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right)^5 \frac{dx}{x^2}$

إرشاد : ضع $u = 1 - \frac{1}{x}$

....
....
....
....
....

 * ممدوح أمين *

(6) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

إرشاد : ضع $u = \cos x$

....

....

....

.

(7) $\int \sin^7 x \, dx$

(أرشاد ضع $u = \cos x$)

....

....

....

....

(8) $\int \frac{\cos \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} \, dx$

(أرشاد ضع $u = \sqrt{1-x}$)

....

....

....

....

....

(9) $\int \sin^2 (\sin x) \cos x \, dx$

....

....

....

....

(11) $\int \frac{x^3}{(x^2-1)^2 (x^2+1)^2} \, dx$

....

....

....

....

(12) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + \cos x - 2} \, dx$

....

....

....

....

(13) $\int \sqrt[3]{x^3 + x^5}\ \mathbf{dx}$

(أرشاد ضع $u = x^2+1$)

....

....

....

....

(14) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x}\, dx$

....

....

....

(15) $\int x(x-5)^7\, dx$

....

....

....

(16) $\int (x+3)(2-x)^5\, dx$

إرشاد ضع $u = 2-x$

....

....

....

(17) $\int (x-3)(x^2-4x+7)^{3/2}\, dx$

....

....

....

....

(18) $\int x^2(x^2-3)^4\, dx$

....

....

....

....

(19) $\int (x-2)\sqrt{x^2-4x+1}\ dx$

....

....

....

....

(20) $\int \frac{2}{x^2}(3 - \frac{4}{x})^3\, dx$

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

(21) $\int x^7(1 + \frac{3}{x})^7\, dx$

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

(22) $\int (x^2 - 6x + 9)^4\, dx$

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

(23) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(2\sqrt{x} + 1)^2}\, dx$

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

(24) $\int x^{10}(1 - \frac{3}{x})^9\, dx$

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

(25) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \sec^2 x dx$

....
....
....
....

(26) $\int \cot^2 x \csc^2 x \; dx$

....
....
....
....

(27) $\int (\cot^3 x \csc x)^2 dx$

....
....
....
....

(28) $\int \frac{x \sin\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}} dx$

....
....
....
....

(29) $\int \frac{\csc^2 (1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \quad dx$

....
....
....
....

(30) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \quad dx$

....
....
....
....

(31) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}}\,dx$

....
....
....
....

(32) $\int_{1}^{4} (4x^2 - 4x + 1)\,dx$

....
....
....
....

(33) $\int \frac{1}{x^{10} + x}\,dx$

(إرشاد : ضع $u = \frac{1}{x}$)

....
....
....
....
....
....

ملاحظة هامة :

$$(1)\int f(x)\times f'(x)dx = \frac{f^2(x)}{2} + c$$

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x \times \frac{1}{x}dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

$$(2)\int f^n(x)\times f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$$

$$\int \sin^5 x \cos x\, dx = \frac{\sin^6 x}{6} + c$$

حل المعادلة التفاضلية التالية

$(2x + 1)\,dy + (3y + 2)\,dx = 0$

....
....
....
....

(4-6)التكامل بالتجزئ

أولا : اوجد

$\int (x-2)(x+3)\,dx$

....

....

$\int x \sin x^2\,dx$

....

....

في ضوء معلوماتك السابقة هل يمكن إيجاد

$\int x \sin x\,dx$

....

....

قاعدة : $\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$

تمارين :أوجد التكاملات التالية بالتجزئ

(1) $\int x \cos x\,dx$

Let $u = x$; $dv = \cos x\,dx$

$du = dx$; $v = \sin x$

$\therefore \int x \cos x\,dx =$ .... $- \int$ ....

$=$.................... - .... $+ c$

(2) $\int x e^x\,dx$

Let $u =$ .... ; $dv =$ ...... dx

$du =$ .... ; $v =$ ....

$\therefore \int x e^x\,dx =$ .... $- \int$ ....

$=$.................. - .... $+ c$

ملاحظة: إذا احتوت الدالة على جزء كثيرة حدود فنرمز له بالرمز u وللجزء الأخر بالرمز dv

(3) $\int x^2 \sin x\,dx$

....

....

....

....

(4) $\int x^2 \sqrt{1-x}\,dx$

....

....

....

....

* ممدوح أمين *

(5) $\int \frac{3x}{\sqrt[3]{2x+1}}$ **dx**

....

....

....

....

(6) $\int$ **e^{x} sin x dx**

....

....

....

....

(7) $\int \frac{3\,x+2}{\sec(4x-1)}$ **dx**

....

....

....

....

(8) $\int \frac{x^2}{\csc(4x-1\,)}$ **dx**

....

....

....

....

(9) $\int_{0}^{\pi}$ **cos x sin x dx**

....

....

....

....

....

(10) $\int_{1}^{e}$ **ln x dx**

....

....

....

....

التكامل الجدولي :

مثال : استخدم التكامل الجدولي في إيجاد $\int x^2 \cos x dx$

الإشارات	f (x) و مشتقاتها	g (x) وتكاملاتها
+	x^2	cos x
-	2x	sin x
+	2	-cos x
-	0	- sin x

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2x(-\cos x) + 2(-\sin x) + c$$

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$$

باستخدام التكامل الجدولي : أحسب

(11) $\int x^2 \sin x \, dx$

....
....
....
....
....
....
....
....

(12) إذا كان $f''(0) = 2$, $f''(2) = 3$, $f'(0) = -2$, $f'(2) = 1$, $f(0) = 2$, $f(2) = 5$ فاوجد قيمة

$$\int_0^2 x^2 f'''(x) dx$$

....
....
....
....
....
....

(13) $\int e^x \sin x \, dx$

....
....
....
....
....

(4-7) تمارين على تكامل الدالة النسبية

أحسب التكاملات التالية :- (أولا : درجة البسط أقل من درجة المقام)

$$(1)\int \frac{x}{1+{}^{2}x}\, dx$$

....
....

$$(2)\int \frac{x}{x^2+4x-5}\, dx$$

....
....
....
....
....
....

$$(3)\int \frac{4}{x^2-2x-3}\, dx$$

....
....
....
....
....
....
....
....

$$(4)\int \frac{x-1}{x^2-4}\, dx$$

....
....
....
....
....
....

$$(5)\int \frac{x+2}{x^2+7x+12}\, dx$$

....
....
....
....

ملاحظة إذا احتوي المقام على عامل مكرر (x-a)

$$(6)\int \frac{x+2}{x(x-1)^2}\,dx$$

$$\frac{x+2}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$x+2=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$$

$$x=0 \therefore 0+2=A(0-1)^2 \Rightarrow A=1$$

$$x=1 \therefore 1+2=C\times 1 \Rightarrow C=3$$

$$x=2 \therefore 2+2=1(2-1)^2+B\times 2(2-1)+3\times 2 \Rightarrow 4-7=2B \Rightarrow B=\frac{-3}{2}$$

ونترك للطالب إكمال الحل

....

....

....

....

....

$$(7)\int \frac{2}{x(x+1)^2}\,dx$$

....

....

....

....

....

....

....

....

$$(8)\int \frac{x-1}{x^2(x-2)}\,dx$$

....

....

....

....

....

....

....

....

ثانياً   إذا كانت درجة البسط أكبر أو يساوي درجة المقام

نكتب الدالة $f(x)$ على الصورة $q(x)+\frac{r(x)}{h(x)}$ حيث درجة $r(x)$ أصغر من درجة $h(x)$

نوجد الكسور الجزئية المكافئة للكسر المركب $\frac{r(x)}{h(x)}$ - نوجد التكامل كما سبق

$$(9)\int \frac{x^2}{x^2+x-2}\,dx$$

....
....
....
....
....
....
....
....

$$(10)\int \frac{x^2-x}{x^2-9}\,dx$$

....

....
....
....
....
....
....
....

$$(11)\int \frac{x^3+x-2}{x^2+x-2}\,dx$$

....
....
....
....
....
....
....
....

(12) $\int \dfrac{2x^3 - 4x^2 + 8}{x^3 - 4x}\,dx$

....
....
....
....
....
....
....
....
....

(13) $\int \dfrac{x^2 + 2}{x + 2}\,dx$

....
....
....
....
....
....
....

14) $\int \dfrac{6x^2 + 5x - 3}{x^3 + 2x^2 - 3x}\,dx$

....
....
....
....
....

15) $\int \dfrac{x^3}{x^2 - 3x + 2}\,dx$

....
....
....
....
....

(16) $\int \frac{x^2dx}{x^2+2x+1}$

....
....
....
....

(17) $\int \frac{(x+1)}{x^2+4x-5}dx$

....
....
....
....
....
....

(18) $\int \frac{(1+x^2)}{x(x^2-1)}\,dx$

....
....
....

....
....
....
....
....
....

أوجد الكسور الجزئية المكافئة للكسر المركب

(1) $\frac{x^2+3x+1}{x^3+1}$

.

(2) $\frac{x^2-1}{x^3-4x^2+4x}$