الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

رؤية
VISION
2021

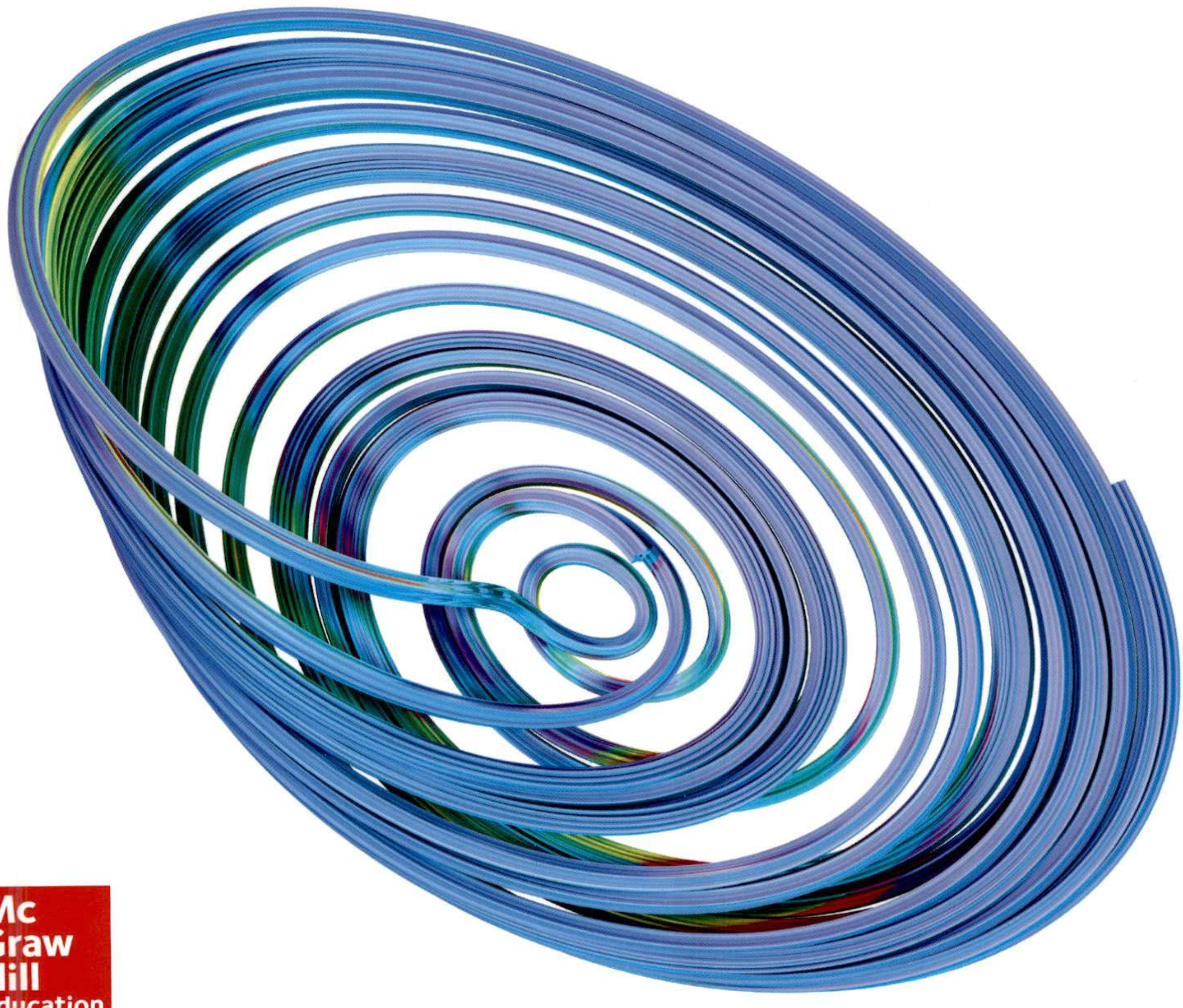
الرياضيات

12

McGraw-Hill Education

الرياضيات المتقدّمة

نسخة الإمارات العربية المتحدة



Mc Graw Hill Education

الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

رؤية VISION 2021

McGraw-Hill Education

الرياضيات المتقدّمة

نسخة الإمارات العربية المتحدة

للصف 12 مجلد 3

Mc Graw Hill Education

صورة الغلاف: Idea Studio/Shutterstock.com

mheducation.com/prek-12

طُبع في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 3-681079-52-1-978 (نسخة الطالب)
MHID: 1-52-681079-4 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 5-681851-52-1-978 (نسخة المعلم)
MHID: 1-52-681851-5 (نسخة المعلم)

XXX 17 16 15 14 13 12 9 8 7 6 5 4 3 2 1

صاحب السّمو الشّيخ خليفة بن زايد آل نهيان
رئيس دولة الإمارات العربيّة المتّحدة، حفظه الله

"يجب التزوُّد بالعلوم الحديثة والمعارفِ الواسعة، والإقبال عليها
بروح عالية ورغبة صادقة؛ حتى تتمكّن دولة الإمارات خلال
الألفيّة الثّالثة من تحقيق نقلة حضاريّة واسعة."

من أقوال صاحب السّمو الشّيخ خليفة بن زايد آل نهيان

ملخص المحتويات

كتيب الطالب

المؤلفون

يضمن مؤلفونا الرواد أن برامج McGraw-Hill الخاصة بالرياضيات منظمة بشكل رأسي حقيقي بواسطة البداية مع النهاية في النجاح العقلي في الجبر 1 وما بعده. بواسطة "التخطيط الخلفي" للمحتوى من برامج المدارس الثانوية، فإن جميع برامجنا الرياضية موضحة بشكل جيد في نطاقها وتسلسلها.

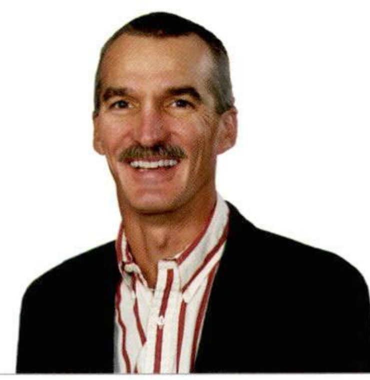
المؤلفون الرواد

ج. أ. كارتر حاصل على درجة الدكتوراه.
مدير مساعد التدريس والتعليم
مدرسة أدلاي إي ستيفنسون الثانوية
لينكولنشاير، إلينوي

جوانب الخبرة: استخدام التكنولوجيا والوسائل التعليمية لتصوير المفاهيم، تحقيق فهم الرياضيات لدى المتعلمين باللغة الإنجليزية

جلبرت جاي كويفاس، حاصل على درجة الدكتوراه.
أستاذ تعليم الرياضيات
جامعة ولاية تكساس - سان ماركوس
سان ماركوس، تكساس

جوانب الخبرة: تطبيق المفاهيم والمهارات في سياقات رياضية ثرية، عمليات تمثيلية رياضية



روجر داي، حاصل على درجة الدكتوراه في التعليم من المجلس الوطني
رئيس قسم الرياضيات
مدرسة بونتياك تاون شيب الثانوية
بونتياك، إلينوي

جوانب الخبرة: فهم وتطبيق الاحتمالية، والإحصائيات، وتعليم مدرس الرياضيات

كارول مالوي حاصلة على درجة الدكتوراه.
أستاذ مساعد
جامعة نورث كارولينا في تشابيل هيل
تشابيل هيل، نورث كارولينا

جوانب الخبرة: عمليات التمثيل والتفكير النقدي ونجاح الطالب في الجبر 1

مؤلفو البرامج

لواجين براين

مدرس رياضيات
أفضل معلم بولاية تينيسي لعام 2009
مدرسة ووكر فالي الثانوية
كليفلاند، تينيسي

جوانب الخبرة: المشاريع الهادفة التي تسعى إلى جعل التفاضل والتكامل ومقدمته أقرب إلى الواقع بالنسبة إلى الطلاب

الدكتورة بيرتشي هوليدي، أستاذ التعليم.

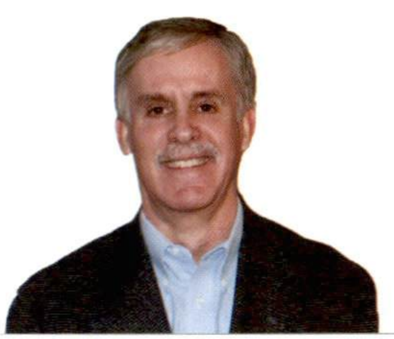
المستشار القومي للرياضيات
سيلفر سبرينج، ماريلاند

جوانب الخبرة: استخدام الرياضيات لصياغة وفهم بيانات العالم الفعلي، وتأثير الرسومات على الفهم الرياضي

فايكن هوفيسبيان

أستاذ الرياضيات
كلية ريو هوندو
وايتيه، كاليفورنيا

مؤلف مشارك



جاي مكتاي

مؤلف ومستشار تعليمي
كولومبيا، ميريلاند

الوحدة 8 تطبيقات على التكامل المحدود

الوحدة 9 طرائق التكامل

كتيب الطالب

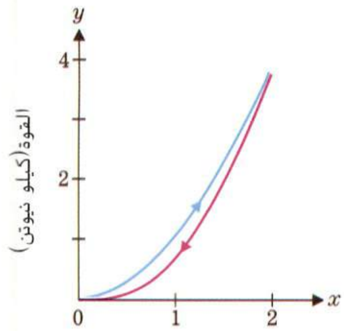
المراجع

الوحدة 8

تطبيقات التكامل المحدود

غالبًا ما يُقال إنّ الرياضيين الذين يمكنهم القفز عاليًا لديهم "نوابض في أرجلهم". فقد اتضح أنّ الأوتار والأقواس في قدميك تعمل إلى حد كبير مثل النوابض، من حيث تخزين الطاقة وإطلاقها. على سبيل المثال، يتمدّد وتر العرقوب لديك عندما تخطو خطوات واسعة أثناء المشي ثم ينقبض عندما تلامس قدمك الأرض. على غرار النابض الذي يتمدّد ومن ثم يُطلق، يخزّن الوتر الطاقة أثناء مرحلة التمدّد ومن ثم يُطلقها عند الانقباض.

يقيس علماء الفسيولوجيا كفاءة آلية عمل الأوتار التي تشبه النابض بطريقة حساب النسبة المئوية للطاقة المنطلقة أثناء الانقباض إلى الطاقة المخزّنة أثناء التمدّد. يُظهر منحنى الإجهاد والانفعال المعروض هنا القوة كدالة للتمدّد أثناء التمدّد (المنحنى العلوي) والارتداد (المنحنى السفلي) لقوس القدم البشرية. (أعيدت طباعة الشكل من *Exploring Biomechanics* بقلم ر. ماكنيل ألكسندر بعد الحصول على تصريح). إذا لم تُفقد أي طاقة، يكون المنحنيان متطابقين. المساحة بين المنحنيين هي قياس الطاقة المفقودة.



انتقال المحرّك
(مللمتر)

يُظهر المنحنى المناظر لقدم الكانجارو (انظر ألكسندر) عدم وجود أي مساحة تقريبًا بين المنحنيين. تعني كفاءة أرجل الكانجارو أنّه يلزم قدر قليل للغاية من الطاقة للقفز. في الواقع، وجد عالم الأحياء تيري داوسون في اختبارات جهاز الجري أنّه، كلما زادت سرعة جري حيوانات الكانجارو، تقل الطاقة التي تحرقها (إلى حد الاختبار الذي يبلغ 32 km/h). وينطبق المبدأ نفسه على الرياضيين من البشر، من حيث إنّه كلما تمدّدت أوتار العرقوب، تصبح عملية الجري أكثر كفاءة. لهذا السبب، يقضي الرياضيون قدرًا كبيرًا من الزمن في تمديد وتقوية أوتار العرقوب لديهم.

توضّح هذه الوحدة تنوّع استخدامات التكامل من خلال استكشاف العديد من التطبيقات. ونبدأ مع حساب المساحات بين منحنيين. يمكن رؤية التكامل من منظورات مختلفة: بيانيًا (المساحات) وعدديًا (التقديرات التقريبية لمجموع ريمان) ورمزيًا (النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل). بينما تقوم بدراسة كل تطبيق جديد، انتبه لكيفية قيامنا بتطوير التكامل (التكاملات) لقياس كمية ما.

الدرس 8-1 المساحة بين منحنيين

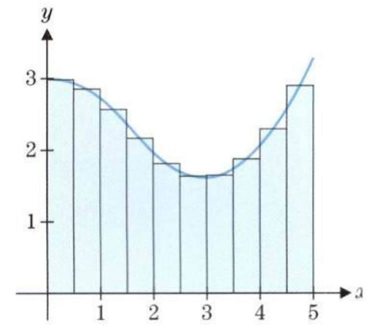
في البدء طوّرنا التكامل المحدود لحساب المساحة تحت منحنى. على وجه الخصوص، لتكن f دالة متصلة معرّفة على $[a, b]$، حيث $f(x) \geq 0$ على $[a, b]$. لإيجاد المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ على الفترة $[a, b]$، نبدأ بتجزئة $[a, b]$ إلى n فترات جزئية متساوية

فيكون، $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. والنقاط في التجزئة عندئذٍ هي $x_0 = a, x_1 = x_0 + \Delta x, x_2 = x_1 + \Delta x$ وهكذا. أي إنّ،

$$x_i = a + i\Delta x \qquad \text{لكل} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

على كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$، نقوم بإنشاء مستطيل له الارتفاع $f(c_i)$، لبعض $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. كما هو مبيّن في الشكل 8.1 وحساب مجموع مساحات n مستطيلًا كقيمة تقريبية للمساحة A تحت المنحنى:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x$$



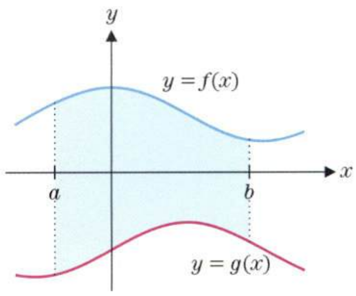
الشكل 8.1

القيمة التقريبية للمساحة

بينما نأخذ المزيد من المستطيلات، يقترب هذا المجموع من القيمة الدقيقة للمساحة، وهي

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x = \int_a^b f(x)\, dx$$

نحن الآن نوسّع هذا المفهوم لإيجاد المساحة المحدودة بين المنحنيين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ على الفترة $[a, b]$ (انظر الشكل 8.2)، حيث f و g متصلتان و $f(x) \geq g(x)$ على $[a, b]$. نقوم أولًا باستخدام مستطيلات لتقريب المساحة. في هذه الحالة، على كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$، يتم إنشاء مستطيل، يمتد من المنحنى الأدنى $y = g(x)$ إلى المنحنى الأعلى $y = f(x)$، على النحو المبيّن في الشكل 8.3a. بالرجوع إلى الشكل 8.3b، نجد أن المستطيل عند الحد i له ارتفاع $h_i = f(c_i) - g(c_i)$، لبعض $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

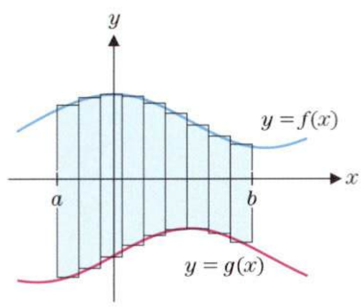


الشكل 8.2

المساحة بين منحنيين

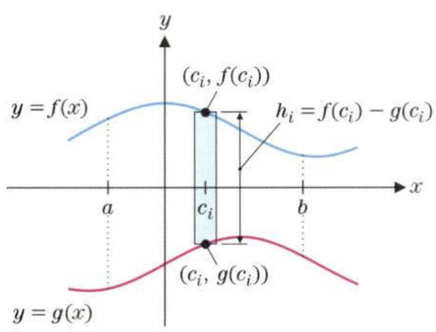
لذا، فإن مساحة المستطيل عند الحد i هي

$$\text{المساحة} = \text{العرض} \times \text{الطول} = [f(c_i) - g(c_i)]\, \Delta x = h_i \Delta x$$



الشكل 8.3a

القيمة التقريبية للمساحة



الشكل 8.3b

مساحة المستطيل عند الحد i

وتكون المساحة الكلية عندئذٍ مساوية تقريبًا لمجموع مساحات n مستطيلًا محددًا.

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)]\,\Delta x$$

وأخيرًا، لاحظ أنّه إذا كانت النهاية عندما $n \to \infty$ موجودة، فسوف نحصل على المساحة الدقيقة، والتي نتعرف عليه باعتباره تكاملًا محدودًا:

مساحة منطقة بين منحنيين

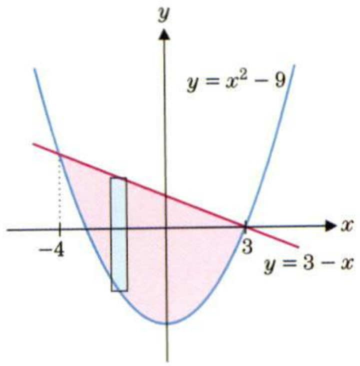
$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)]\,\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \qquad (1.1)$$

ملحوظة 1.1

الصيغة (1.1) صحيحة عندما تكون $f(x) \ge g(x)$ على الفترة $[a, b]$. بشكلٍ عام، تُعطى المساحة بين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ لأجل $a \le x \le b$ بالعلاقة $\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$. لاحظ أنّه لإيجاد قيمة هذا التكامل، يجب عليك إيجاد قيمة $\int_c^d [f(x) - g(x)]\,dx$ على جميع الفترات الجزئية حيث $f(x) \ge g(x)$، ثم إيجاد قيمة $\int_c^d [g(x) - f(x)]\,dx$ على جميع الفترات الجزئية حيث $g(x) \ge f(x)$ وأخيرًا، اجمع التكاملات.

المثال 1.1 **إيجاد مساحة منطقة بين منحنيين**

أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = 3 - x$ و $y = x^2 - 9$. (انظر الشكل 8.4).



الشكل 8.4

$y = x^2 - 9$ و $y = 3 - x$

الحل لاحظ أنّ حدود التكامل تناظر الإحداثيات **x** لنقاط تقاطع المنحنيين. بالمساواة بين قيم الدالتين، يكون لدينا

$$3 - x = x^2 - 9 \quad \text{أو} \quad 0 = x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)$$

لذا، يتقاطع المنحنيان عند $x = -4$ و $x = 3$. مع العلم أنّ الحد الأعلى للمنطقة يتكوّن من $y = 3 - x$ والحد الأدنى يتكوّن من $y = x^2 - 9$ لذا، لكل قيمة ثابتة من x، يبلغ ارتفاع أي مستطيل (مثل ذلك المبيّن في الشكل 8.4)

$$h(x) = (3 - x) - (x^2 - 9)$$

من (1.1)، المساحة بين المنحنيين هي عندئذٍ

$$A = \int_{-4}^{3} [(3 - x) - (x^2 - 9)]\, dx$$

$$= \int_{-4}^{3} (-x^2 - x + 12) = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x\right]_{-4}^{3}$$

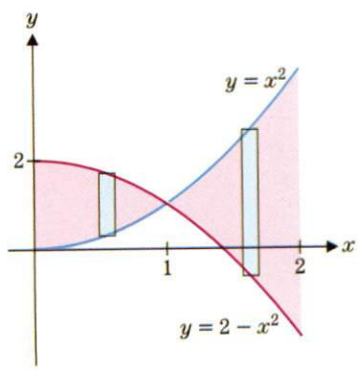
$$= \left[-\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 12(3)\right] - \left[-\frac{(-4)^3}{3} - \frac{(-4)^2}{2} + 12(-4)\right] = \frac{343}{6}$$

في بعض الأحيان، لا يتم تعريف الحد الأعلى أو الأدنى بدالة واحدة، كما في الحالة التالية من التمثيلات البيانية المتقاطعة.

المثال 1.2 **إيجاد مساحة منطقة بين منحنيين متقاطعين**

أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$ لأجل $0 \le x \le 2$.

الحل لاحظ من الشكل 8.5 أنّه، بما أنّ المنحنيين يتقاطعان في منتصف الفترة، فسنحتاج لحساب تكاملين، واحد على الفترة حيث $2 - x^2 \ge x^2$ والآخر على الفترة حيث $x^2 \ge 2 - x^2$. لإيجاد نقطة التقاطع، نحل المعادلة: $x^2 = 2 - x^2$، بحيث تكون $2x^2 = 2$ أو $x^2 = 1$ أو $x = \pm 1$. نظرًا إلى أنّ $x = -1$ تقع خارج الفترة من المجال، فإنّ التقاطع الوحيد المقبول يقع عند $x = 1$. من (1.1)، تكون المساحة



الشكل 8.5

$y = x^2$ و $y = 2 - x^2$

$$A = \int_0^1 [(2 - x^2) - x^2]\, dx + \int_1^2 [x^2 - (2 - x^2)]\, dx$$

$$= \int_0^1 (2 - 2x^2)\, dx + \int_1^2 (2x^2 - 2)\, dx = \left[2x - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{2x^3}{3} - 2x\right]_1^2$$

$$= \left(2 - \frac{2}{3}\right) - (0 - 0) + \left(\frac{16}{3} - 4\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4$$

في المثال 1.3، يجب تقريب نقاط التقاطع عدديًا.

المثال 1.3 حالة تكون فيها نقاط التقاطع معروفة تقريبيًا فقط

أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = \cos x$ و $y = x^2$.

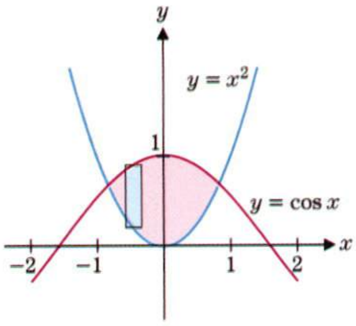
الحل التمثيل البياني $y = \cos x$ و $y = x^2$ في الشكل 8.6 يشير إلى التقاطعات عند حوالي $x = -1$ و $x = 1$، حيث $\cos x = x^2$. ومع ذلك، لا يمكن حل هذه المعادلة تمامًا. بدلًا من ذلك، نستخدم طريقة إيجاد الجذر للحصول على الحلول التقريبية $x = \pm 0.824132$. [على سبيل المثال، يمكنك استخدام طريقة نيوتن للبحث عن قيم x التي يكون عندها $f(x) = \cos x - x^2 = 0$] من التمثيل البياني، يمكننا أن نرى أنّ ما بين قيمتا x هذه، $\cos x \geq x^2$ وهكذا، تُعطى المساحة المطلوبة كما يأتي:

$$A \approx \int_{-0.824132}^{0.824132} (\cos x - x^2)\, dx = \left[\sin x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-0.824132}^{0.824132}$$

$$= \sin 0.824132 - \frac{1}{3}(0.824132)^3 - \left[\sin(-0.824132) - \frac{1}{3}(-0.824132)^3\right]$$

$$\approx 1.09475.$$

لاحظ أنّنا قمنا بتقريب كلٍ من حدَّيْ التكامل والحسابات النهائية.



الشكل 8.6

$y = \cos x$ و $y = x^2$

قد يتطلب إيجاد مساحة بعض المناطق تقطيعها إلى عدة أجزاء، بحيث يكون لكل منها حد أعلى وحد أدنى مختلفة عن بعضها.

المثال 1.4 مساحة منطقة تحدّدها ثلاثة منحنيات

أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = x^2$، $y = 2 - x$ و $y = 0$.

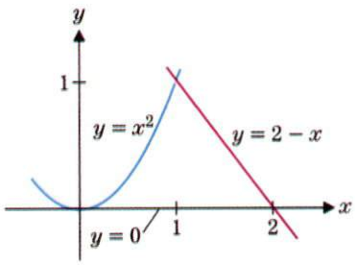
الحل يظهر رسم للمنحنيات الثلاثة المحدّدة في الشكل 8.7a. لاحظ أنّ الحد الأعلى للمنطقة هو المنحنى $y = x^2$ في الجزء الأول من الفترة والمستقيم $y = 2 - x$ في الجزء الثاني. لتحديد نقطة التقاطع، نحل المعادلة

$$2 - x = x^2 \quad \text{أو} \quad 0 = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

نظرًا إلى أنّ $x = -2$ يقع إلى يسار المحور y، يحدث التقاطع المطلوب عند $x = 1$. نقوم عندئذٍ بتقطيع المنطقة إلى جزأين، كما هو مبيّن في الشكل 8.7b وإيجاد مساحة كل جزء على حدة. تكون المساحة الكلية عندئذٍ

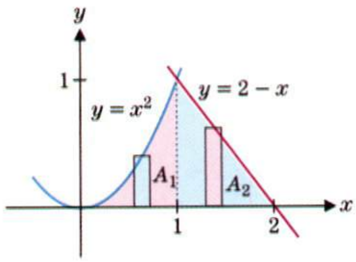
$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 (x^2 - 0)\, dx + \int_1^2 [(2 - x) - 0]\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{5}{6}$$



الشكل 8.7a

$y = x^2$ و $y = 2 - x$



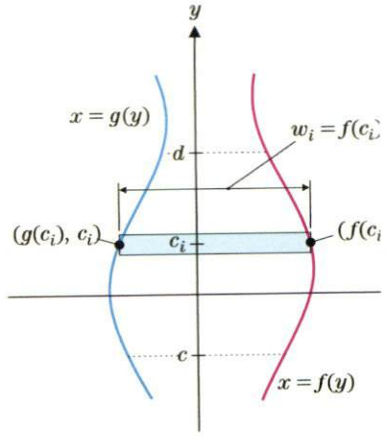
الشكل 8.7b

$y = x^2$ و $y = 2 - x$

على الرغم من أنّه بالتأكيد لا صعوبة في تقطيع المنطقة الى عدّة أجزاء في المثال 1.4، إلا أنّنا نريد أن نقترح بديلًا من شأنه أن يثبت أنّه مفيد بشكل مدهش. لاحظ أنّه إذا قلبت الصفحة على الجانب، فسيبدو الشكل 8.7a وكأنّه منطقة ذات منحنى واحد يحدّد كلا من الحدين الأعلى والأدنى. وبطبيعة الحال، عند قلب الصفحة على الجانب، فإنّك تعكس بشكل أساسي أدوار x و y.

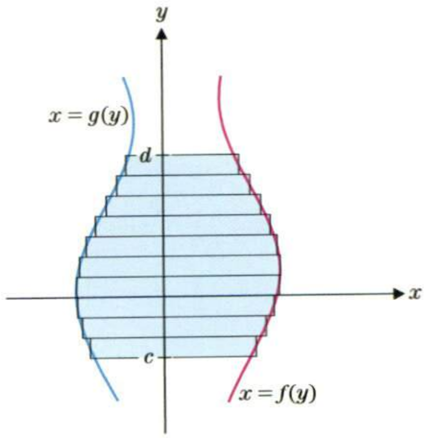
وعمومًا، لدالتين متصلتين، f و g، حيث $f(y) \geq g(y)$ لكل y على الفترة $c \leq y \leq d$، لإيجاد مساحة المنطقة المحدودة بين المنحنيين $x = f(y)$ و $x = g(y)$، علينا أولًا تقطيع الفترة $[c, d]$ إلى n فترات جزئية متساوية، يكون عرض كل منها $\Delta y = \dfrac{d - c}{n}$. (انظر الشكل 8.8a). نرمز للنقاط في التجزئة بـ $y_1 = y_0 + \Delta y,\ y_2 = y_1 + \Delta y$ وهكذا. أي إنّ،

$$y_i = c + i\Delta y \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$



الشكل 8.8b

مساحة المستطيل عند الحد i



الشكل 8.8a

المساحة بين $x=g(y)$ و $x=f(y)$

على كل فترة جزئية $[y_{i-1}, y_i]$ (لكل $i=1,2,\ldots,n$)، نقوم بإنشاء مستطيل له العرض $w_i=[f(c_i)-g(c_i)]$. لبعض $c_i \in [y_{i-1}, y_i]$. كما هو مبيّن في الشكل 8.8b. تُعطى مساحة المستطيل عند الحد i بالعلاقة

$$\text{المساحة} = \text{العرض} \times \text{الطول} = [f(c_i)-g(c_i)]\,\Delta y$$

تُعطى المساحة الإجمالية بين المنحنيين عندئذٍ تقريبيًا بالعلاقة

$$A \approx \sum_{i=1}^{n}[f(c_i)-g(c_i)]\,\Delta y$$

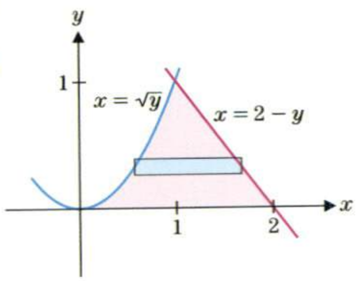
نحصل على المساحة المحدّدة من خلال النهاية عندما $n\to\infty$ والتعرف على النهاية على أنّها تكاملًا محدودًا. لدينا

المساحة بين منحنيين

$$\boxed{A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(c_i)-g(c_i)]\,\Delta y=\int_c^d [f(y)-g(y)]\,dy.} \tag{1.2}$$

المثال 1.5 مساحة منطقة محسوبة كتكامل بمعلومية y

كرّر المثال 1.4. ولكن التكامل بمعلومية y بدلًا من ذلك.



الشكل 8.9

المساحة بين $y=x^2$ و $y=2-x$

الحل من الشكل 8.9. لاحظ أنّ الحد الأيسر للمنطقة يتكوّن من التمثيل البياني $y=x^2$ أو $x=\sqrt{y}$ (نظرًا إلى أنّ النصف الأيمن للقطع المكافئ فقط هو ما يشكل الحد الأيسر). يتكوّن الحد الأيمن للمنطقة من المستقيم $y=2-x$ أو $x=2-y$. يتقاطع هذان المنحنيان اللذان يشكّلان الحدود حيث $\sqrt{y}=2-y$؛ ويعطيانا مربّع الجانبين

$$y=(2-y)^2=4-4y+y^2$$

أو

$$0=y^2-5y+4=(y-1)(y-4)$$

لذا، يتقاطع المنحنيان عند $y=1$ و $y=4$. بحسب الشكل 8.9. فمن الواضح أنّ $y=1$ هو الحل الذي نحتاجه. (مع ماذا يتقابل الحل $y=4$ ؟) بحسب (1.2). تُعطى المساحة من العلاقة

$$A=\int_0^1[(2-y)-\sqrt{y}]\,dy=\left[2y-\frac{1}{2}y^2-\frac{2}{3}y^{3/2}\right]_0^1=2-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$$

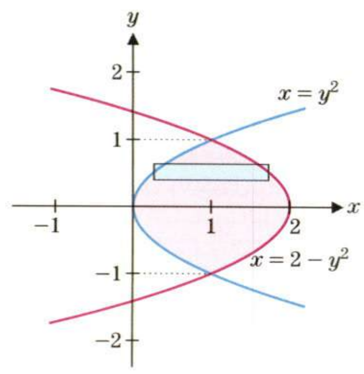
المثال 1.6 مساحة منطقة محدودة بدوال y

أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $x = y^2$ و $x = 2 - y^2$.

الحل من الشكل 8.10، لاحظ أنّه من الأسهل حساب هذه المساحة بالتكامل في ما يتعلق بـ y. نظرًا إلى أنّ التكامل في ما يتعلق بـ x يتطلب منا تقطيع المنطقة إلى جزأين. يحدث تقاطعا المنحنيين عندما $y^2 = 2 - y^2$، أو $1 = y^2$، بحيث تكون $y = \pm 1$. على الفترة $[-1, 1]$، لاحظ أنّ $x = 2 - y^2$ يظل على يمين المنحنى $x = y^2$ (نظرًا إلى أنّ المنحنى $2 - y^2 \geq y^2$). لذا، من (1.2)، تُعطى المساحة من العلاقة

$$A = \int_{-1}^{1} [(2 - y^2) - y^2]\, dy = \int_{-1}^{1} (2 - 2y^2)\, dy$$

$$= \left[2y - \frac{2}{3}y^3\right]_{-1}^{1} = \left(2 - \frac{2}{3}\right) - \left(-2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}$$



الشكل 8.10

$x = y^2$ و $x = 2 - y^2$

عند حدوث اصطدام بين مضرب التنس والكرة، يتغيّر شكل الكرة. تنكمش أولًا ومن ثم تتمدّد. لتكن x تمثّل مدى انكماش الكرة، حيث $0 \leq x \leq m$. ولتكن $f(x)$ تمثّل القوة التي بذلت على الكرة بواسطة المضرب. إذًا تتناسب الطاقة المنقولة مع المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$. على فرض أنّ $f_c(x)$ هي القوة أثناء انكماش الكرة و $f_e(x)$ هي القوة أثناء تمدّد الكرة. يتم نقل الطاقة إلى الكرة أثناء الإنكماش ونقلها بعيدًا عن الكرة أثناء التمدّد، بحيث تتناسب الطاقة المفقودة بواسطة الكرة أثناء الاصطدام (بسبب الاحتكاك) مع $\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)]\, dx$. تُعطى نسبة الطاقة المفقودة أثناء الاصطدام عندئذٍ بالعلاقة

$$100\, \frac{\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)]\, dx}{\int_0^m f_c(x)\, dx}$$

المثال 1.7 تقدير الطاقة المفقودة بواسطة كرة التنس

على فرض أنّ قياسات الاختبار توفر البيانات التالية أثناء اصطدام كرة التنس بالمضرب. قدّر نسبة الطاقة المفقودة أثناء الاصطدام.

x (cm)	0.0	0.25	0.50	0.75	1
$f_c(x)$ (N)	0	110	220	400	700
$f_e(x)$ (N)	0	100	200	300	700

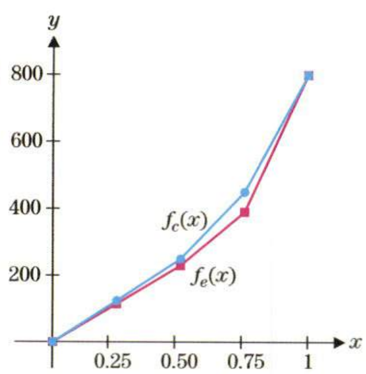
الحل يتم رسم البيانات في الشكل 8.11، مرتبطة بقطع مستقيمة.

نحتاج لتقدير المساحة بين المنحنيات والمساحة تحت المنحنى العلوي. بما أنّه ليس لدينا صيغة لأي دالة، يجب علينا أن نستخدم طريقة عددية مثل قاعدة سمبسون. لأجل $\int_0^1 f_c(x)\, dx$، نحصل على

$$\int_0^1 f_c(x)\, dx \approx \frac{0.25}{3}\, [0 + 4(110) + 2(220) + 4(400) + 700] = 265$$

لاستخدام قاعدة سمبسون لتقريب $\int_0^1 [f_c(x) - f_e(x)]\, dx$، نحتاج إلى جدول لقيم الدالة لـ $f_c(x) - f_e(x)$. يعطينا الطرح

x	0.0	0.25	0.50	0.75	1
$f_c(x) - f_e(x)$	0	10	20	100	0



الشكل 8.11

القوة المبذولة على كرة تنس

ومنه، تعطينا قاعدة سمبسون

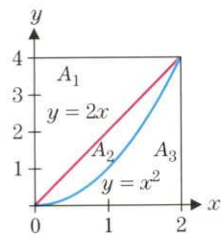
$$\int_0^1 [f_c(x) - f_e(x)]\, dx \approx \frac{0.25}{3} [0 + 4(10) + 2(20) + 4(100) + 0] = 40$$

تكون نسبة الطاقة المفقودة عندئذٍ $\frac{100 \times 40}{265} \approx 15\%$. مع الاحتفاظ بأكثر من 85% من طاقتها أثناء الاصطدام، فإنّ هذه كرة تنس ديناميكية.

.39 بدلالة A_1، A_2 و A_3. حدّد المساحة المُعطاة بكل تكامل.

(a) $\int_0^2 (2x - x^2)\,dx$ (b) $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$

(c) $\int_0^4 (2 - \sqrt{y})\,dy$ (d) $\int_0^4 (\sqrt{y} - \frac{y}{2})\,dy$



.40 أعط تكاملًا مساويًا لكل مساحة.

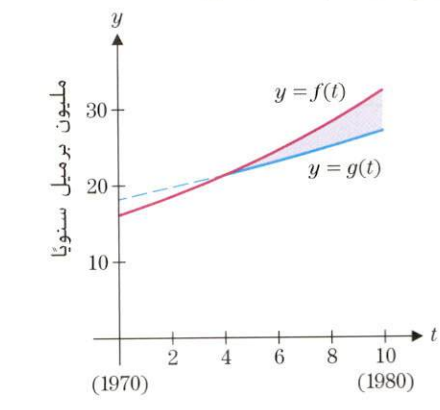
(a) $A_2 + A_3$ (b) $A_1 + A_2$ (c) A_1 (d) A_3

.41 لتكن $f(t)$ المساحة بين $y = \sin^2 x$ و $y = 1$ لكل $0 \le x \le t$. أوجد كل النقاط الحرجة والقيم القصوى المحلية ونقاط الانعطاف للدالة $f(t)$ لكل $t \ge 0$.

.42 لتكن g دالة متصلة معرّفة لكل $x \ge 0$ مع $|g(x)| \le 1$ لكل $x \ge 0$. لتكن $f(t)$ المساحة بين $y = g(x)$ و $y = 1$ لكل $0 \le x \le t$. إذا كانت g لها قيمة عظمى محلية عند $x = a$. فهل يوجد لـ f نقطة حرجة عند a ؟ نقطة انعطاف عند a ؟ ماذا إذا كان يوجد قيمة صغرى محلية عند $x = a$ ؟

التطبيقات

.43 كان استهلاك الولايات المتحدة من النفط على مدى الأعوام 1970–1974 يساوي تقريبًا $f(t) = 16.1e^{0.07t}$ مليون برميل سنويًا، حيث يوافق $t = 0$ عام 1970. ولكن بعد حدوث نقص في النفط عام 1974، تغيّر استهلاك البلاد وكان ممثلًا بشكل أفضل من خلال $g(t) = 21.3e^{0.04(t-4)}$ مليون برميل سنويًا، لأجل $t \ge 4$. بيّن أنّ $f(4) \approx g(4)$ واشرح ما يمثّله هذا العدد. احسب المساحة بين $f(t)$ و $g(t)$ لكل $4 \le t \le 10$. استخدم هذا العدد لتقدير عدد براميل النفط التي تم توفيرها بسبب الاستهلاك المخفض للشعب الأمريكي من عام 1974 وحتى 1980.



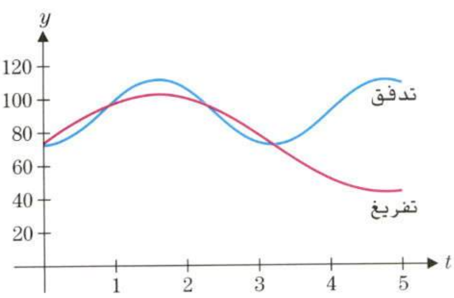
.44 على فرض أنّ استهلاك أخشاب الوقود لدولة ما يُعطى بالصيغة $76e^{0.03t}$ m³/yr ومعدل نمو الأشجار الجديدة هو $50 - 6e^{0.09t}$ m³/yr. احسب وفسّر المساحة بين المنحنيين لكل $0 \le t \le 10$.

.45 على فرض أنّ معدل المواليد لتعداد سكاني معيّن هو $b(t) = 2e^{0.04t}$ مليون نسمة سنويًا ومعدل الوفيات للتعداد السكاني نفسه هو $d(t) = 2e^{0.02t}$ مليون شخص سنويًا. بيّن أنّ $b(t) \ge d(t)$ لكل $t \ge 0$ واشرح سبب تمثيل المساحة بين المنحنيين الزيادة في التعداد السكاني. احسب الزيادة في التعداد السكاني لكل $0 \le t \le 10$.

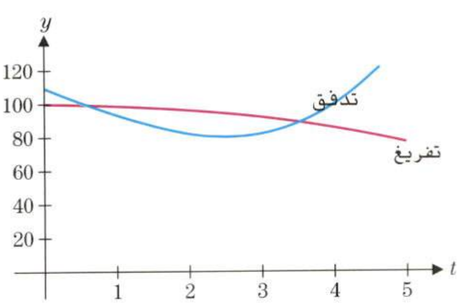
.46 على فرض أنّ معدل المواليد لتعداد سكاني هو $b(t) = 2e^{0.04t}$ مليون نسمة سنويًا ومعدل الوفيات للتعداد السكاني نفسه هو $d(t) = 3e^{0.02t}$ مليون شخص سنويًا. أوجد التقاطع T للمنحنيين $(T > 0)$. فسّر المساحة بين المنحنيين لكل $0 \le t \le T$ والمساحة بين المنحنيين لكل $T \le t \le 30$. احسب صافي التغيّر في التعداد السكاني لكل $0 \le t \le 30$.

في التمرينين 47 و 48، يُظهر التمثيل البياني معدل تدفق وتفريغ الماء باللتر في الساعة إلى الخزان ومنه. بافتراض أنّ الخزان يبدأ بسعة 400 لترًا، قدّر كمية الماء الموجودة في الخزان عند الساعات 1، 2، 3، 4 و 5 وارسم تمثيلًا بيانيًا لكمية الماء داخل الخزان.

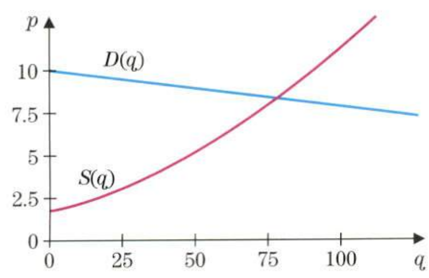
.47



.48

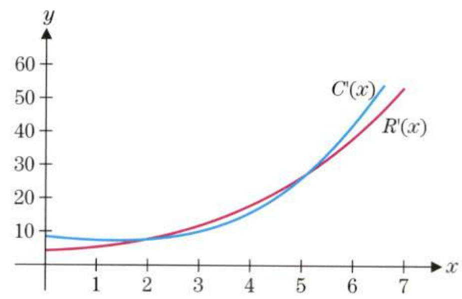


.49 يُظهر التمثيل البياني منحنى العرض ومنحنى الطلب لأحد المنتجات. تعطي نقطة التقاطع (q^*, p^*) كمية التوازن وسعر التوازن للمنتج. يتم تعريف **فائض المستهلك** بأنّه $\text{CS} = \int_0^{q^*} D(q)\,dq - p^*q^*$. ظلّل مساحة التمثيل البياني التي تمثّل فائض المستهلك، واحسب ذلك في حال كانت $D(q) = 10 - \frac{1}{40}q$ و $S(q) = 2 + \frac{1}{120}q + \frac{1}{1200}q^2$.



.50 كرّر التمرين 49 **لفائض المنتج** المعرّف بواسطة $\text{PS} = p^*q^* - \int_0^{q^*} S(q)\,dq$.

.51 لتكن $C'(x)$ هي التكلفة الحديّة لإنتاج x ألف نسخة من منتج ما وأنّ $R'(x)$ هي الإيرادات الحديّة من بيع هذا المنتج، مع التمثيلات البيانية كما هو مبيّن. افترض أنّ $R'(x) = C'(x)$ عند $x = 2$ و $x = 5$. فسّر المساحة بين المنحنيين لكل فترة: (a) $0 \le x \le 2$، (b) $2 \le x \le 5$، (c) $0 \le x \le 5$ و (d) $5 \le x \le 6$.



.52 أحد المبادئ الأساسية للاقتصاد هو أنّ الأرباح تحقق القيمة العظمى عند مساواة التكلفة الحديّة مع الإيرادات الحديّة. عند أي تقاطع يحقق الربح القيمة العظمى في التمرين 51؟ اشرح إجابتك. من حيث الربح، ما الذي تمثّله نقطة التقاطع الأخرى؟

تمارين استكشافية

.1 أوجد المساحة بين $y = x^2$ و $y = mx$ لأي ثابت $m > 0$. بدون إجراء المزيد من العمليات الحسابية، استخدم هذه المساحة لإيجاد المساحة بين $y = \sqrt{x}$ و $y = mx$.

.2 لكل $x > 0$. لتكن $f(x)$ المساحة بين $y = 1$ و $y = \sin^2 t$ لكل $0 \le t \le x$. بدون حساب $f(x)$. أوجد أكبر قدر ممكن من العلاقات بين الخصائص البيانية (الأصفار، القيم القصوى، نقاط الانعطاف) لـ $y = f(x)$ والخصائص البيانية لـ $y = \sin^2 x$.

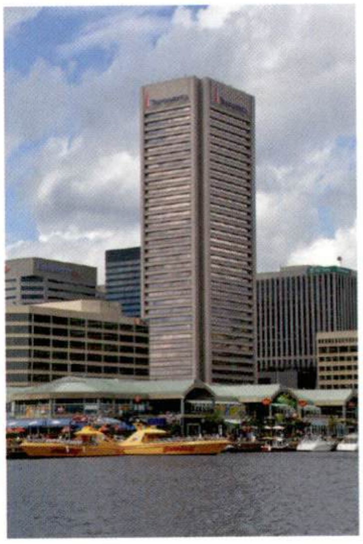
الدرس

8-2 الحجم: شرائح وأقراص وحلقات

كما سنرى في هذه الوحدة، فإنّ التكامل هو أداة متعددة الاستخدامات بشكل مدهش. في هذا الدرس، نستخدم التكاملات لحساب حجم مجسّم ثلاثي الأبعاد. ونبدأ بمسألة بسيطة.

عند تصميم أحد المباني، يجب على المهندسين المعماريين إجراء العديد من الحسابات المفصلة. على سبيل المثال، من أجل تحليل أنظمة التدفئة والتبريد في المباني، يجب على المهندسين حساب حجم الهواء الذي تتم معالجته.

لا يوجد غالبًا سوى بضعة مجسّمات تعرف كيفية حساب أحجامها. على سبيل المثال، البناء المبيّن في الشكل 8.12a هو أساسًا صندوق متوازي المستطيلات، ويُعطى حجمه بالقاعدة lwh. حيث l هو الطول و w هو العرض و h هو الارتفاع. إنّ الأسطوانات الدائرية القائمة التي يمكن رؤيتها في المباني في الشكل 8.12b لها حجم يُعطى القاعدة $\pi r^2 h$. حيث h هو الارتفاع و r هو نصف قطر المقطع العرضي الدائري. لاحظ في كل حالة أنّ المبنى يحتوي على مقطع عرضي مألوف (مستطيل في الشكل 8.12a ودائرة في الشكل 8.12b) يمتد عموديًا.



الشكل 8.12a

الشكل 8.12b

نحن نطلق على أيٍ من هذه المجسّمات اسم **أسطوانة** (أي مجسّمات لها مقاطع عرضية عمودية على جزء من المحور المار عبر المجسّم تكون جميعها متماثلة). ثمة علاقة بين قانونيَ الحجم لهذين الأسطوانتين. حجم أسطوانة دائرية قائمة هو

$$V = \underbrace{(\pi r^2)}_{\text{مساحة مقطع عرضي}} \times \underbrace{h}_{\text{ارتفاع}},$$

بينما حجم الصندوق هو

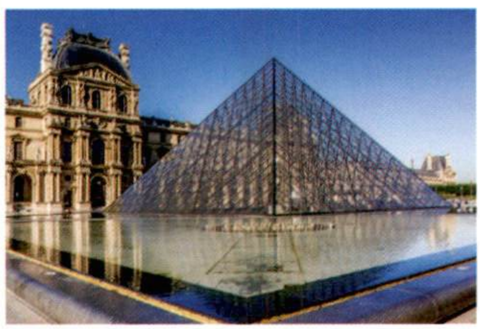
$$V = \underbrace{(\text{الطول} \times \text{العرض})}_{\text{مساحة مقطع عرضي}} \times \text{الارتفاع}$$

بشكلٍ عام، يمكن إيجاد حجم أي أسطوانة من الصيغة

$$V = (\text{مساحة مقطع عرضي}) \times (\text{الارتفاع})$$

الأحجام بالتقطيع

حتى المجسّمات السهلة نسبيًا، مثل الأهرامات والقباب، ليس لها مساحة مقطع عرضي ثابت، حسبما هو مبيّن في الشكلين 8.13a و 8.13b. لإيجاد الحجم في مثل هذه الحالة، نتبع النهج الذي استخدمناه عددًا من المرات حتى الآن: أولًا نقوم بتقريب الحجم ومن ثم نحسّن التقريب.



الشكل 8.13a
مدخل هرم متحف اللوفر بباريس

الشكل 8.13b
مبنى الكابيتول الأمريكي

وعمومًا للمجسّمات التي تمتد من $x = a$ إلى $x = b$. نبدأ بتجزئة الفترة $[a, b]$ على المحور x إلى n فترات جزئية، يكون عرض كلٍ منها $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. وكالمعتاد، نرمز إلى $x_0 = a, x_1 = a + \Delta x$ وهكذا، بحيث تكون

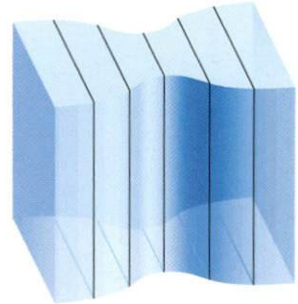
$$x_i = a + i\Delta x, \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

بعد ذلك نجزيء المجسّم إلى شرائح عمودية على المحور x عند كل $(n-1)$ من نقاط. $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (انظر الشكل 8.14a في الصفحة التالية.) لاحظ أنّه إذا كانت n كبيرة، فستكون كل شريحة من المجسّم رقيقة، مع مساحة مقطع عرضي ثابتة تقريبًا. على فرض أنّ مساحة المقطع العرضي المناظر لأي قيمة محدّدة لـ x تُعطى بالرمز $A(x)$. لاحظ أنّ الشريحة الواقعة بين $x = x_{i-1}$ و $x = x_i$ هي أسطوانة تقريبًا. (انظر الشكل 8.14b). لذا، فلأي نقطة c_i في الفترة $[x_{i-1}, x_i]$، تكون جميع مساحات المقاطع العرضية على تلك الفترة $A(c_i)$ تقريبًا.

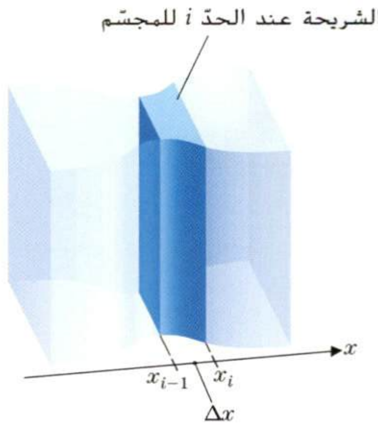
الملاحظات التاريخية

أرخميدس
(حوالي 212–287 ق.م.)

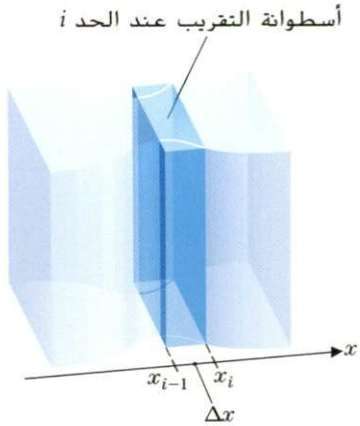
هو خبير في الرياضيات وعالم يوناني كان من بين أول من اشتقوا الصيغ للأحجام والمساحات. اشتهر أرخميدس باكتشافه القوانين الأساسية للروافع وإستاتيكا الموائع (حيث يقال إنّه قفز من حوض الاستحمام، وهو يهتف "أوريكا!" وركض إلى الشوارع لمشاركة اكتشافه). كذلك، هو مهندس عبقري، ساهمت اختراعاته بدايةً من المنجنيق ورافعات التصدي والمرايا العاكسة في بث الرعب في قلب الجيش الروماني الضخم الذي غزا في نهاية المطاف مسقط رأسه في سيراكيوز. كان أرخميدس فخورًا بصفة خاصة ببرهانه أنّ حجم كرة مرسومة داخل أسطوانة هو 2/3 من حجم الأسطوانة (انظر التمارين 31–34)، وطلب أن يُنقش هذا الأمر على شاهد قبره. وقد كان العديد من أساليبه مشابهة إلى حدٍ كبير لتلك التي نستخدمها في حساب التفاضل والتكامل اليوم، ولكن فُقد العديد من كتاباته في العصور الوسطى. تُروى القصة المذهلة للاكتشاف الأخير لكتابه *The Method* في *The Archimedes Codex* بقلم نيتز ونويل.



الشكل 8.14a
قطعة مجسّم



الشكل 8.14b
الشريحة عند الحد i للمجسّم



الشكل 8.14c
أسطوانة التقريب عند الحد i

يكون الحجم V_i للشريحة عند الحد i هو تقريبًا حجم الأسطوانة الواقعة بطول الفترة $[x_{i-1}, x_i]$، مع مساحة مقطع عرضي ثابتة $A(c_i)$ (انظر الشكل 8.14c). بحيث يكون

$$V_i \approx \underbrace{A(c_i)}_{\text{مساحة مقطع عرضي}} \quad \underbrace{\Delta x}_{\text{العرض}}$$

بتكرار هذه العملية لكلٍ من الـ n شرائح، نجد أنّ الحجم الكلي V للمجسّم هو تقريبًا

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\,\Delta x$$

لاحظ أنّه كلما زادت الشرائح، ينبغي أن يتحسّن تقريب الحجم ونحصل على الحجم الدقيق بحساب النهاية

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\,\Delta x$$

بافتراض وجود النهاية. يجب عليك التعرّف على هذه النهاية على أنّها تكامل محدود

حجم مجسّم له
مساحة مقطع عرضي $A(x)$

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx.} \tag{2.1}$$

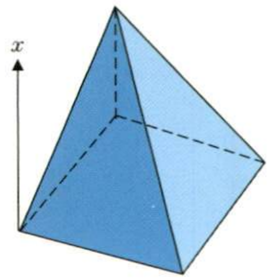
ملحوظة 2.1

نستخدم الطريقة نفسها المتبعة هنا لنشتق العديد من القوانين المهمة. في كل حالة، نجزىء مجسّم إلى n أجزاء أصغر ثم نقرّب الكمية المطلوبة لكل جزء من الأجزاء الصغيرة ونجمع القيم التقريبية ومن ثم نأخذ النهاية. حيث نتعرّف في نهاية المطاف أنّنا قمنا بإيجاد تكامل محدود. لهذا السبب من الضروري أن تستوعب المفهوم وراء الصيغة (2.1). ولن يساعدك الحفظ في هذه الحالة. إلا أنّه إذا كنت تفهم كيفية تلاؤم الأجزاء المختلفة من هذا اللغز مع بعضها البعض، فسيسهل عليك استيعاب بقية هذه الوحدة بشكل جيد.

مثال 2.1 حساب الحجم من مساحات المقاطع العرضية

للهرم في ممفيس قاعدة مربعة يبلغ طول ضلعها 180 مترًا وارتفاعها 100 مترًا تقريبًا. أوجِد حجم الهرم باستخدام هذه القياسات.

الحل بما أنّ الهرم له مقاطع عرضية أفقية مربعة، فلن نحتاج سوى لإيجاد صيغة لمساحة المربع عند كل ارتفاع. لتكن x تمثّل الارتفاع عن الأرض. عند $x = 0$، يكون المقطع العرضي هو مربع طول ضلعه 180 مترًا. عند $x = 100$، يمكن النظر إلى المقطع العرضي على أنّه مربع طول ضلعه 0 مترًا. إذا كان $f(x)$ يُمثّل طول ضلع المقطع العرضي المربع عند ارتفاع x، فإنّنا نعلم أنّ $f(0) = 180, f(100) = 0$ و $f(x)$ يجب أن تكون دالة خطية. (فكّر في الآتي؛ جوانب الهرم لا تنحني.) ميل المستقيم هو $m = \frac{180-0}{0-100} = -\frac{9}{5}$ ونحن نستخدم التقاطع y قدره 180 للحصول على



هرم

$$f(x) = -\frac{9}{5}x + 180$$

إنّ مساحة المقطع العرضي هي ببساطة مربع $f(x)$. لذا فمن (2.1)، نحصل على

$$V = \int_0^{100} A(x)\,dx = \int_0^{100} \left(-\frac{9}{5}x + 180\right)^2 dx$$

لاحظ أنّه يمكننا إيجاد قيمة هذا التكامل باستخدام التعويض. بأخذ $u = -\frac{9}{5}x + 180$، فيكون $du = -\frac{9}{5}\,dx$. هذا يعطينا:

$$V = \int_0^{100} \left(-\frac{9}{5}x + 180\right)^2 dx = -\frac{5}{9}\int_{180}^{0} u^2\,du$$

$$= \frac{5}{9}\int_0^{180} u^2\,du = \frac{5}{9}\,\frac{u^3}{3}\bigg|_0^{180} = 1{,}080{,}000\text{ m}^3$$

في العديد من التطبيقات الهامة، تكون مساحة المقطع العرضي غير معروفة على وجه التحديد، ولكن يجب تقريبها باستخدام القياسات. في مثل هذه الحالات، يمكننا تقريب الحجم باستخدام التكامل العددي.

مثال 2.2 تقدير الحجم من بيانات المقطع العرضي

في التصوير الطبي، مثل التصوير المقطعي بالحاسوب (CT) والتصوير بالرنين المغناطيسي (MRI)، يؤخذ العديد من القياسات وتتم معالجتها بواسطة حاسوب لإنشاء صورة ثلاثية الأبعاد للأنسجة التي يرغب الطبيب في دراستها. تشبه هذه العملية عملية التجزئة إلى شرائح التي استخدمناها لإيجاد حجم مجسّم. ولكن، في هذه الحالة، يتم دمج التمثيلات في الرياضيات للشرائح المختلفة من الأنسجة لإنتاج صورة ثلاثية الأبعاد يقوم الأطباء باستعراضها لتحديد مدى صحة الأنسجة. على فرض أنّ التصوير بالرنين المغناطيسي أظهر أنّ مساحات المقطع العرضي لشرائح متجاورة لورم ما مُعطاة بالقيم المذكورة في الجدول.

x (cm)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$A(x)$ (cm^2)	0.0	0.1	0.4	0.3	0.6	0.9	1.2	0.8	0.6	0.2	0.1

قدّر حجم الورم.

الحل لإيجاد حجم الورم، سنقوم بالحساب [باتباع (2.1)]

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx$$

إلا أنّنا لا نعرف سوى $A(x)$ عند عدد محدود من النقاط. وعلى الرغم من أنّنا لا نستطيع حساب هذا بشكلٍ دقيق، يمكننا استخدام قاعدة سمبسون مع $\Delta x = 0.1$ لتقدير قيمة هذا التكامل:

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx$$

$$\approx \frac{b-a}{3n}\left[\begin{array}{c} A(0) + 4A(0.1) + 2A(0.2) + 4A(0.3) + 2A(0.4) + 4A(0.5) \\ + 2A(0.6) + 4A(0.7) + 2A(0.8) + 4A(0.9) + A(1) \end{array}\right]$$

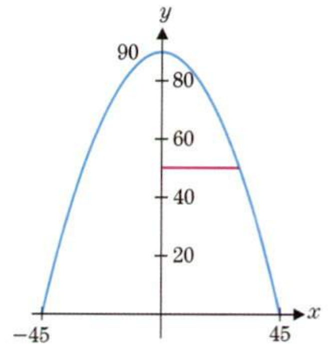
$$= \frac{0.1}{3}(0 + 0.4 + 0.8 + 1.2 + 1.2 + 3.6 + 2.4 + 3.2 + 1.2 + 0.8 + 0.1)$$

$$\approx 0.49667\text{ cm}^3$$

ننتقل الآن إلى مسألة إيجاد حجم القبة في الشكل 8.13b. بما أنّ المقاطع العرضية الأفقية هي دوائر، فلن نحتاج سوى لتحديد نصف قطر كل دائرة.

مثال 2.3 حساب حجم قبة

على فرض أنّ للقبّة مقاطع عرضية دائرية، لها رسم تخطيطي يُعطى بالعلاقة $y = -\frac{2}{45}x^2 + 90$ لكل $-45 \le x \le 45$ (بالسنتيمترات، يعطي هذا الأمر أبعادًا مشابهة لقبة المبنى في الشكل 8.13b.) يوضّح الشكل 8.15 تمثيلًا بيانيًا. أوجد حجم القبة.



الشكل 8.15
$y = -\frac{2}{45}x^2 + 90$

الحل حسبما هو مبيّن في الشكل 8.15، تحدث المقاطع العرضية الدائرية عند كل قيمة لـ y، مع $0 \le y \le 90$. لقيمة y مُعطاة، يمتد نصف القطر من $x = 0$ إلى $x = \sqrt{\frac{45}{2}(90-y)}$. يُعطى نصف القطر لهذه القيمة لـ y بالعلاقة $r(y) = \sqrt{\frac{45}{2}(90-y)}$، بحيث تُعطى مساحات المقاطع العرضية بالعلاقة

$$A(y) = \pi\left(\sqrt{\frac{45}{2}(90-y)}\right)^2$$

لكل $0 \le y \le 90$. يُعطى الحجم عندئذٍ بالعلاقة

$$V = \int_0^{90} A(y)\,dy = \int_0^{90} \pi\left(\sqrt{\frac{45}{2}(90-y)}\right)^2 dy = \int_0^{90} \pi\left(2025 - \frac{45}{2}y\right)dy$$

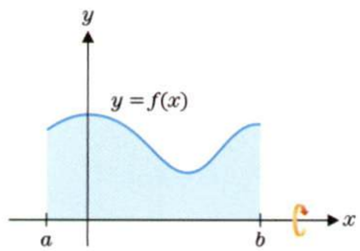
$$= \pi\left[2025y - \frac{45}{4}y^2\right]_0^{90} = 91{,}125\pi \approx 286{,}278 \text{ cm}^3$$

نلاحظ أنّ طريقة بديلة لذكر المسألة في المثال 2.3 هي أن نقول: أوجد الحجم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بين المنحنى $x = \sqrt{\frac{45}{2}(90-y)}$ والمحور y، حيث $0 \le y \le 90$، حول المحور y.

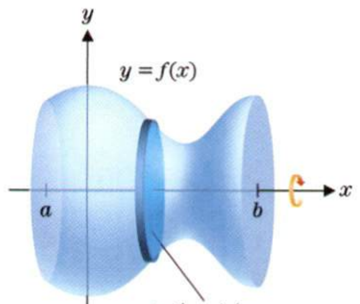
يمكن تعميم مثال 2.3 على طريقة الأقراص المستخدمة لحساب حجم مجسّم يتكوّن من دوران منطقة ثنائية الأبعاد حول مستقيم أفقي أو رأسي. وسنفكّر في هذه الطريقة العامة في ما يلي.

طريقة الأقراص

على فرض أنّ $f(x) \ge 0$ و f متصلة على الفترة $[a, b]$. نأخذ المنطقة المحدودة بين المنحنى $y = f(x)$ والمحور x، لكل $a \le x \le b$، ونقوم بتدويرها حول المحور x، لإنشاء مجسّم. (انظر الشكلين 8.16a و8.16b). يمكننا إيجاد حجم هذا المجسّم بتجزئته إلى شرائح عمودية على المحور x والتعرف على أنّ كل مقطع عرضي هو قرص دائري له نصف القطر $r = f(x)$. (انظر الشكل 8.16b). من (2.1)، نعلم أنّ حجم المجسّم عندئذ هو



الشكل 8.16a
$y = f(x) \ge 0$



الشكل 8.16b
المجسّم الناتج عن التدوير

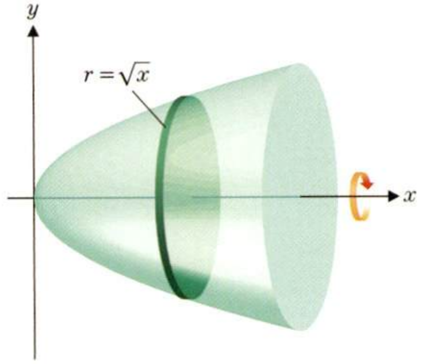
حجم مجسّم ناتج عن التدوير (طريقة الأقراص)

$$V = \int_a^b \underbrace{\pi[f(x)]^2}_{\text{مساحة مقطع عرضي} = \pi r^2} \, dx. \tag{2.2}$$

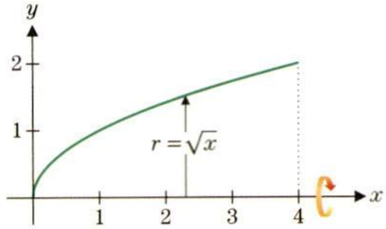
بما أنّ كل المقاطع العرضية لمثل هذا المجسّم الناتج عن الدوران هي أقراص، نشير إلى طريقة إيجاد الحجم هذه باسم **طريقة الأقراص**.

مثال 2.4 استخدام طريقة الأقراص لحساب الحجم

قم بتدوير المنطقة تحت المنحنى $y = \sqrt{x}$ على الفترة $[0, 4]$ حول المحور x وأوجد حجم المجسّم الناتج عن الدوران.



الشكل 8.17b
المجسّم الناتج عن التدوير

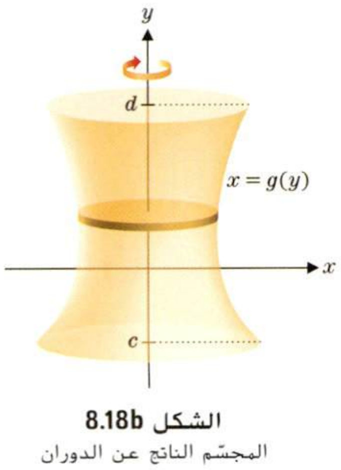


الشكل 8.17a
$y = \sqrt{x}$

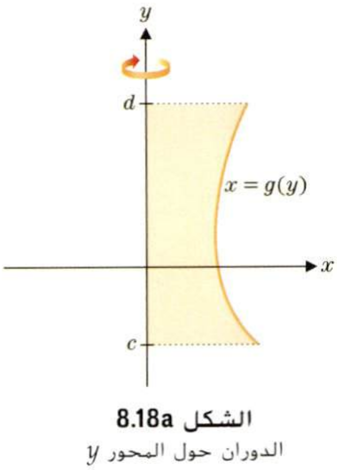
الحل من المهم جدًا رسم صورة للمنطقة والمجسّم الناتج عن الدوران، بحيث يمكنك الحصول على فكرة واضحة عن أنصاف أقطار المقاطع العرضية الدائرية. يمكنك أن ترى من الأشكال 8.17a و 8.17b أنّ نصف قطر كل مقطع عرضي يُعطى بالعلاقة $r = \sqrt{x}$. من (2.2)، نحصل عندئذٍ على الحجم:

$$V = \int_0^4 \underbrace{\pi\left[\sqrt{x}\right]^2}_{\text{مساحة مقطع عرضي} = \pi r^2} dx = \pi \int_0^4 x\, dx = \pi \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4 = 8\pi$$

بالطريقة ذاتها، على فرض أنّ $g(y) \geq 0$ و g متصلة على الفترة $[c, d]$. ثم ينتج عن تدوير المنطقة المحدودة بين المنحنى $x = g(y)$ والمحور y، لكل $c \leq y \leq d$، حول المحور y تولّد مجسّم. (انظر الشكلين 8.18a و 8.18b). مرة أخرى، نلاحظ من الشكل 8.18b أنّ المقاطع



الشكل 8.18b
المجسّم الناتج عن الدوران



الشكل 8.18a
الدوران حول المحور y

العرضية للمجسّم الناتج عن الدوران هي أقراص دائرية بنصف قطر $r = g(y)$. كل ما تغيّر هنا هو أنّنا قمنا بتبديل أدوار المتغيّرين x وy. يُعطى حجم المجسّم عندئذٍ بالعلاقة

حجم مجسّم ناتج عن التدوير (طريقة الأقراص)

$$V = \int_c^d \underbrace{\pi[g(y)]^2}_{\pi r^2 = \text{مساحة مقطع عرضي}} dy. \tag{2.3}$$

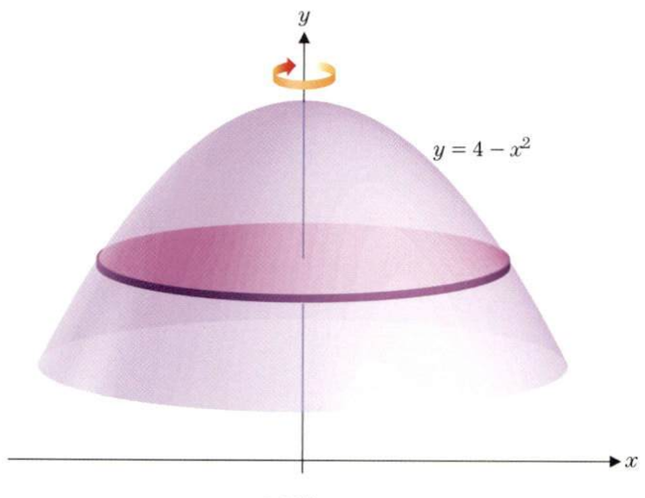
ملحوظة 2.2

عند استخدام طريقة الأقراص، يعتمد متغيّر التكامل فقط على المحور الذي تقوم بتدوير المنطقة ثنائية الأبعاد حوله؛ يتطلب التدوير حول المحور x تكاملًا بمعلومية x، بينما يتطلب التدوير حول المحور y تكاملًا بمعلومية y. يتم تحديد هذا الأمر بسهولة من خلال النظر إلى رسم للمجسّم. لا ترتكب خطأ التفكير في النقاط وأماكن وضعها فقط. فسيقودك ذلك إلى الإخفاق، حيث إنّ بقية هذه الوحدة ستتطلب منك اتخاذ خيارات مشابهة، يعتمد كل منها على المتطلبات المميزة للمسألة المطروحة.

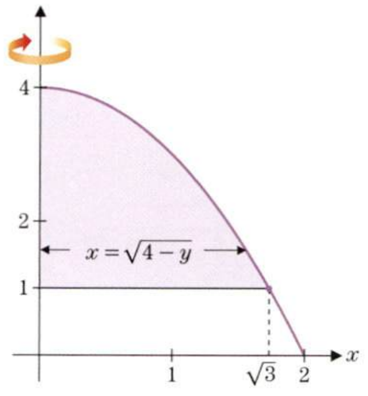
مثال 2.5 استخدام طريقة الأقراص مع y كمتغيّر مستقل

أوجِد حجم المجسّم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بين المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = 1$ من $x = 0$ إلى $x = \sqrt{3}$ حول المحور y.

الحل ستجد تمثيلًا بيانيًا للمنحنى في الشكل 8.19a وللمجسّم في الشكل 8.19b.



الشكل 8 19b
المجسّم الناتج عن التدوير



الشكل 8.19a
$y = 4 - x^2$

لاحظ في الأشكال: 8.19a و 8.19b أنّ نصف القطر لأي مقاطع عرضية تعطى بـ x. لذا يجب حل المعادلة $y = 4 - x^2$ لكل x لنحصل على $x = \sqrt{4-y}$ بما أنّ المساحة تتوسّع من $y = 1$ الى $y = 4$ يعطى الحجم من (2.3) فيكون:

$$V = \int_1^4 \underbrace{\pi\left(\sqrt{4-y}\right)^2}_{\pi r^2} dy = \int_1^4 \pi(4-y)\,dy$$

$$= \pi\left[4y - \frac{y^2}{2}\right]_1^4 = \pi\left[(16-8) - \left(4 - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{9\pi}{2}$$

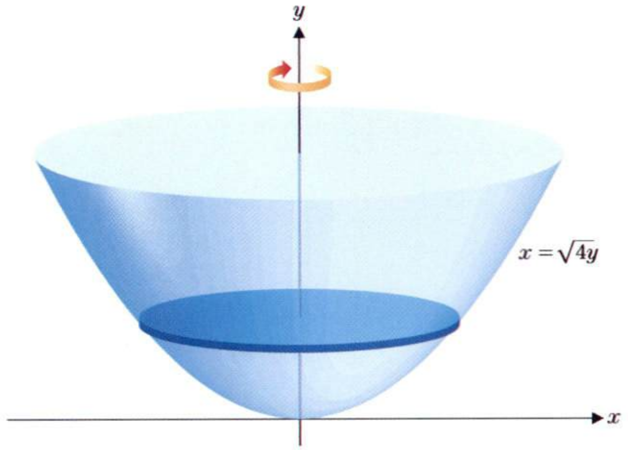
طريقة الحلقات

إنّ أحد التعقيدات التي تحدث عند حساب الأحجام هو أنه قد يحتوي المجسّم على تجويف أو "ثقب". ويحدث تعقيد آخر عندما تدور منطقة حول مستقيم بخلاف المحور x أو المحور y. لن تشكل لك الحالتين صعوبات كبيرة، إذا نظرت بتمعن إلى الأشكال. وسنوضّح تلك الأفكار في المثالين 2.6 و 2.7.

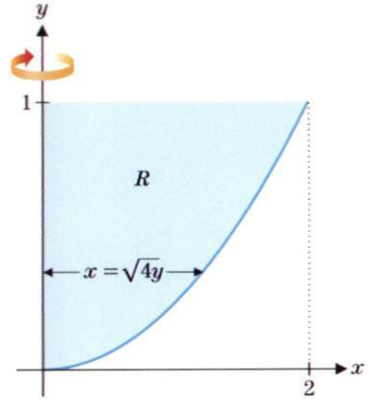
مثال 2.6 حساب أحجام المجسّمات المجوفة وغير المجوفة

لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = \frac{1}{4}x^2, x = 0$ و $y = 1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول (a) المحور y و(b) المحور x و(c) المستقيم $y = 2$.

الحل (a) تبدو المنطقة R في الشكل 8.20a ويبدو المجسّم الذي تكوّن من دورانه حول المحور y في الشكل 8.20b. لاحظ أنّ هذا الجزء من المسألة مشابه للمثال 2.5.



الشكل 8.20b
المجسّم الناتج عن التدوير



الشكل 8 20a
$x = \sqrt{4y}$

من (2.3)، يتم إعطاء الحجم بالصيغة

$$V = \int_0^1 \underbrace{\pi \left(\sqrt{4y}\right)^2}_{\pi r^2} dy = \pi \frac{4}{2} y^2 \Big|_0^1 = 2\pi.$$

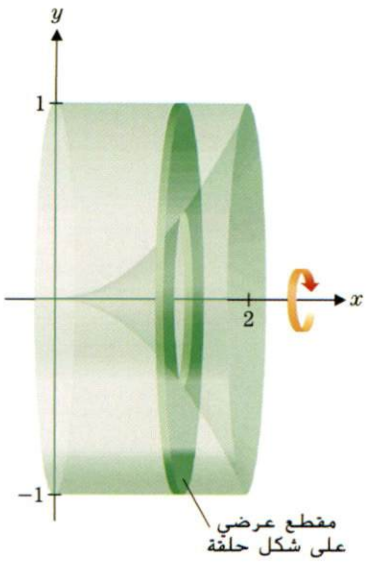
(b) دوران المنطقة R حول المحور x ينشأ عنه تجويف في وسط المجسّم. انظر الشكل 8.21a لتمثيل بياني للمنطقة R والشكل 8.21b (في الصفحة التالية) لصورة المجسّم. إنّ استراتيجيتنا هي حساب حجم الجزء الخارجي للمجسّم (كما لو كان مجسّمًا) ثم طرح حجم التجويف. قبل الخوض في عملية حساب، تأكد من تصور الشكل الهندسي وراء هذا. هنا، يتكوّن الجزء الخارجي لسطح مجسّم من دوران المستقيم $y = 1$ حول المحور x. ينشأ التجويف من دوران المنحنى $y = \frac{1}{4}x^2$ حول المحور x. انظر بتمعن إلى الشكلين 8.21a 8.21b وتأكد أنك ترى هذا. إنّ نصف القطر الخارجي، r_O، هو المسافة من المحور x إلى المستقيم $y = 1$ أو $r_O = 1$. إنّ نصف القطر الخارجي، r_I، هو المسافة من المحور x إلى المنحنى $y = \frac{1}{4}x^2$ أو $r_I = \frac{1}{4}x^2$. عند تطبيق (2.2) مرتين، نرى أنه يتم إعطاء الحجم بالصيغة

الشكل 8.21a
$y = \frac{1}{4}x^2$

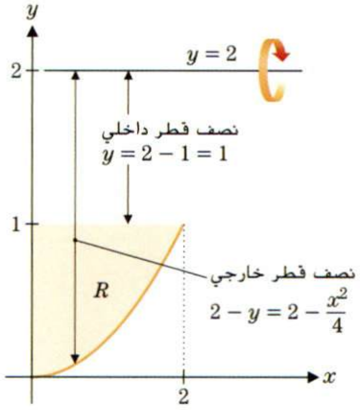
$$V = \int_0^2 \underbrace{\pi(1)^2}_{\pi\,(\text{نصف القطر الخارجي})^2} dx - \int_0^2 \underbrace{\pi\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2}_{\pi\,(\text{نصف القطر الداخلي})^2} dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left(1 - \frac{x^4}{16}\right) dx = \pi\left(x - \frac{1}{80}x^5\right)\Big|_0^2 = \pi\left(2 - \frac{32}{80}\right) = \frac{8}{5}\pi$$

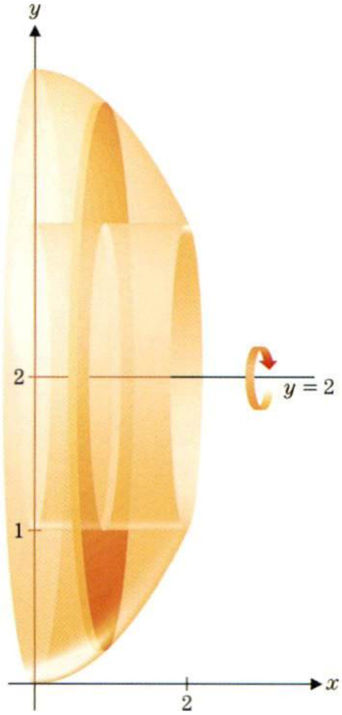
(c) إنّ دوران المنطقة R حول المستقيم $y = 2$ ينتج مجسّمًا يشبه الحلقة وفيه ثقب أسطواني في الوسط. (a) تبدو المنطقة R في الشكل 8.22a ويبدو المجسّم في الشكل 8.22b.



الشكل 8.21b
المجسّم المجوف



الشكل 8 22a
التدوير حول $y = 2$



الشكل 8.22b
المجسّم الناتج عن التدوير

يتم حساب الحجم بالطريقة نفسها المستخدمة في الجزء (b)، بطرح حجم التجويف من حجم الجزء الخارجي للمجسّم. من الشكلين 5.22a و 5.22b. لاحظ أنّ نصف قطر السطح الخارجي هو المسافة من المستقيم $y = 2$ إلى المنحنى $y = \frac{1}{4}x^2$ أو $r_O = 2 - \frac{1}{4}x^2$. ونصف قطر الثقب الداخلي هو المسافة من المستقيم $y = 2$ إلى المستقيم $y = 1$ أو $r_I = 2 - 1 = 1$. من (2.2)، يعطى الحجم بالصيغة

$$V = \int_0^2 \underbrace{\pi\left(2 - \frac{1}{4}x^2\right)^2}_{\pi(\text{نصف قطر خارجي})^2} dx - \int_0^2 \underbrace{\pi(2-1)^2}_{\pi(\text{نصف قطر داخلي})^2} dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left[\left(4 - x^2 + \frac{x^4}{16}\right) - 1\right] dx = \pi \left[3x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{80}x^5\right]_0^2$$

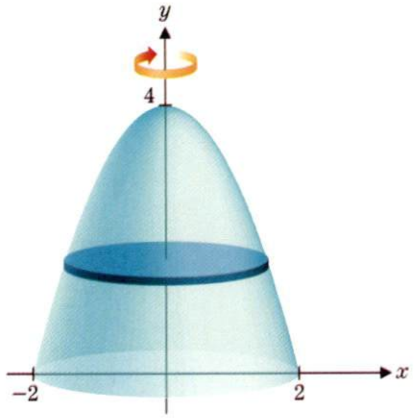
$$= \pi\left(6 - \frac{8}{3} + \frac{32}{80}\right) = \frac{56}{15}\pi$$

في الجزأين (b) و(c) في المثال 2.6، تم حساب الحجم بطرح حجم داخلي من حجم خارجي للتعويض عن وجود تجويف داخل المجسّم. يُعدّ هذا الأسلوب تعميمًا بسيطًا لطريقة الأقراص ويشار إليه باسم **طريقة الحلقات**، نظرًا إلى أنّ المقاطع العرضية للمجسّم تبدو مثل الحلقات.

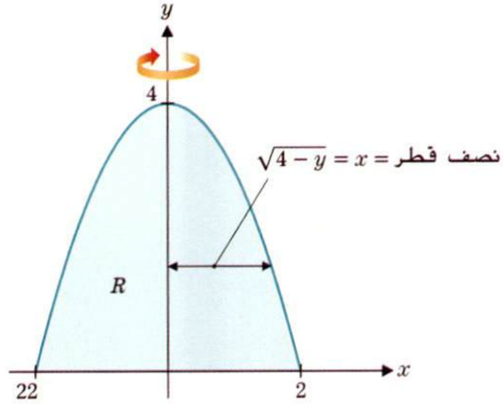
مثال 2.7 دوران منطقة حول مستقيمات مختلفة

لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - x^2$ و $y = 0$. أوجد أحجام المجسّمات التي تم الحصول عليها من دوران R حول كل من التالي: (a) المحور y و (b) المستقيم $y = -3$ و (c) المستقيم $y = 7$ و (d) المستقيم $x = 3$.

الحل للجزء (a)، نرسم المنطقة R في الشكل 8.23a والمجسّم الناتج عن الدوران في الشكل 8.23b.



الشكل 8.23b
المجسّم الناتج عن الدوران



الشكل 8.23a
الدوران حول المحور y

من الشكل 8.23b، لاحظ أنّ كل مقطع عرضي للمجسّم يكون قرصًا دائريًا يبلغ نصف قطره بشكل مبسط x. الحل من أجل x نأخذ: $x = \sqrt{4-y}$، حيث نختار x لتكون موجبة، بما أنّه في هذا السياق x تمثّل مسافة. من (2.3)، يعطى حجم المجسّم الناتج عن الدوران بالصيغة

$$V = \int_0^4 \underbrace{\pi\left(\sqrt{4-y}\right)^2}_{(\text{نصف قطر})^2} dy = \pi \int_0^4 (4-y)\, dy = \pi \left[4y - \frac{y^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$$

للجزء (b)، رسمنا المنطقة R في الشكل 8.24a والمجسّم الناتج عن الدوران في الشكل 8.24b. لاحظ من الشكل 8.24b أنّ المقاطع العرضية للمجسّم على شكل حلقات وأنّ نصف القطر الخارجي r_O هو المسافة من محور التدوير $y = -3$ إلى المنحنى $y = 4 - x^2$. والذي هو،

$$r_O = y - (-3) = (4 - x^2) - (-3) = 7 - x^2$$

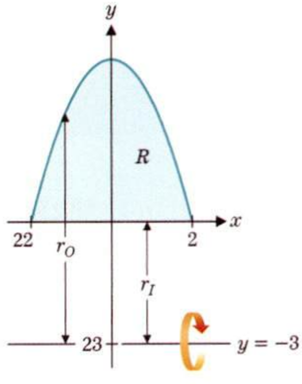
بينما يكون نصف القطر الداخلي هو المسافة من المحور x إلى المستقيم $y = -3$. والذي هو،

$$r_I = 0 - (-3) = 3$$

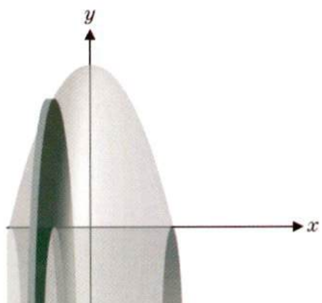
من (2.2)، يكون الحجم

$$V = \int_{-2}^{2} \underbrace{\pi(7-x^2)^2}_{\pi(\text{نصف قطر خارجي})^2} dx - \int_{-2}^{2} \underbrace{\pi(3)^2}_{\pi(\text{نصف قطر داخلي})^2} dx = \frac{1472}{15}\pi$$

حيث قمنا بترك تفاصيل عملية الحساب كتمرين.



الشكل 8.24a
التدوير حول $y = -3$



الشكل 8.24b
المجسّم الناتج عن التدوير

الجزء (c) (إنّ الدوران حول المستقيم $y = 7$) مشابه تماماً للجزء (b). يمكنك رؤية المنطقة R في الشكل 8.25a والمجسّم في الشكل 8.25b (موجودان في الصفحة التالية).

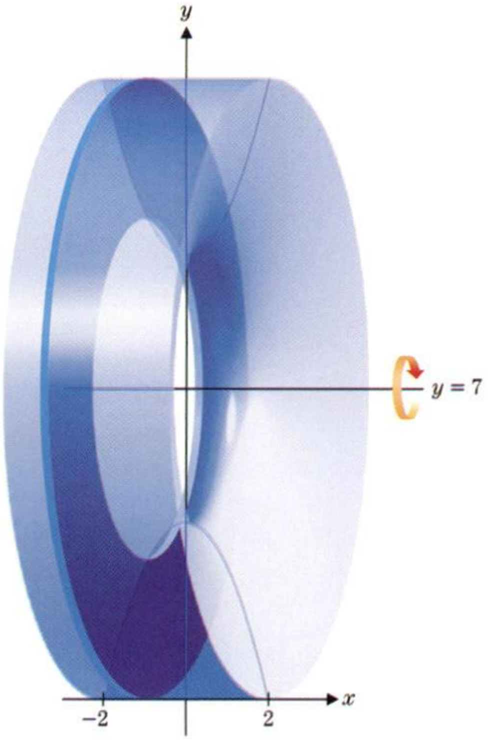
إنّ المقاطع العرضية للمجسّم على شكل حلقات مجددًا، لكن هذه المرة، يكون نصف القطر الخارجي هو المسافة من المستقيم $y = 7$ إلى المحور x. والذي هو، $r_O = 7$. ونصف القطر الداخلي هو المسافة من المستقيم $y = 7$ إلى المنحنى $y = 4 - x^2$.

$$r_I = 7 - (4 - x^2) = 3 + x^2$$

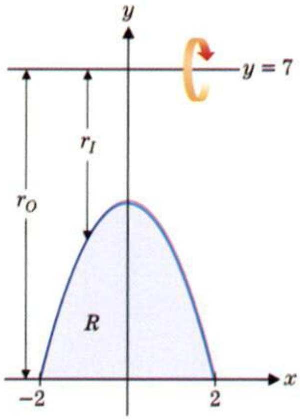
من (2.2)، يكون عندئذ حجم المجسّم

$$V = \int_{-2}^{2} \underbrace{\pi(7)^2}_{\pi(\text{نصف قطر خارجي})^2} dx - \int_{-2}^{2} \underbrace{\pi(3+x^2)^2}_{\pi(\text{نصف قطر داخلي})^2} dx = \frac{576}{5}\pi,$$

حيث نترك مجددًا تفاصيل عملية الحساب كتمرين.

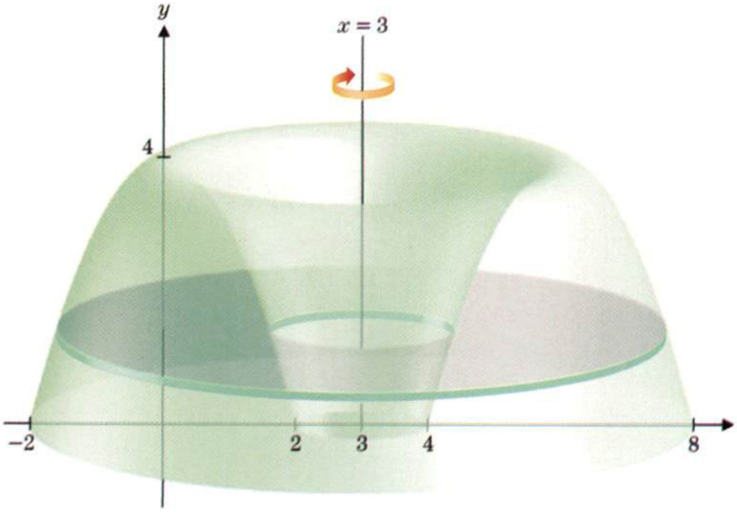


الشكل 8.25b
المجسّم الناتج عن الدوران

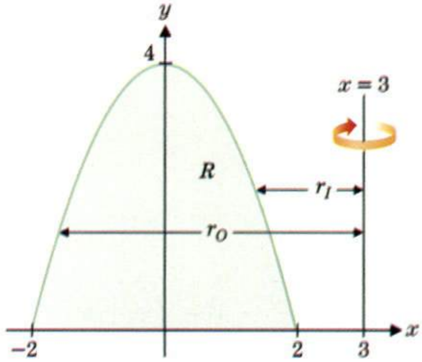


الشكل 8.25a
الدوران حول $y = 7$

أخيرًا، للجزء (d) (الدوران حول المستقيم $x = 3$)، تبدو المنطقة R في الشكل 8.26a ويبدو المجسّم الناتج عن الدوران في الشكل 8.26b. في هذه الحالة، تكون المقاطع العرضية للمجسّم حلقات، ولكن يشكل نصفا القطر الداخلي والخارجي صعوبة أكبر في تحديدهما عن الأجزاء السابقة. إنّ نصف القطر الخارجي هو المسافة بين المستقيم $x = 3$ والنصف الأيسر للقطع المكافئ، بينما نصف القطر الداخلي هو المسافة بين المستقيم $x = 3$ والنصف الأيمن للقطع المكافئ. يعطى القطع المكافئ بالمعادلة $y = 4 - x^2$، بحيث يكون $x = \pm\sqrt{4 - y}$.



الشكل 8.26b
المجسّم الناتج عن الدوران



الشكل 8 26a
الدوران حول $x = 3$

لاحظ أنّ $x = \sqrt{4-y}$ تناظر النصف الأيمن للقطع المكافئ، بينما تصف $x = -\sqrt{4-y}$ النصف الأيسر للقطع المكافئ. ذلك يعطينا

$$r_O = 3 - \left(-\sqrt{4-y}\right) = 3 + \sqrt{4-y} \quad \text{and} \quad r_I = 3 - \sqrt{4-y}$$

وبناءً عليه، نحصل على الحجم

$$V = \int_0^4 \underbrace{\pi\left(3 + \sqrt{4-y}\right)^2}_{\pi(\text{نصف قطر خارجي})^2} dy - \int_0^4 \underbrace{\pi\left(3 - \sqrt{4-y}\right)^2}_{\pi(\text{نصف قطر داخلي})^2} dy = 64\pi$$

حيث نترك تفاصيل عملية الحساب غير المرتبة نوعًا ما هذه إليك. في الدرس 8.3، نقدم طريقة بديلة لإيجاد حجم مجسّم ناتج عن التدوير، التي، في المسألة الحالية، ستنتج تكاملات مبسطة بشكل أكبر. ■

ملحوظة 2.3

ستحقق النجاح الأكبر في إيجاد أحجام المجسّمات الناتجة عن التدوير إذا رسمت أشكالًا معقولة وسميتها بحرص. لا تفكّر فقط في النقاط وأماكن وضعها. فأنت لا تحتاج سوى أن تتذكر طريقة إيجاد مساحة المقطع العرضي للمجسّم. يتكفل أسلوب التكامل بما تبقى.

تمارين 8.2

تمارين كتابية

1. ناقش العلاقات (مثل العمودية أو المتوازية) مع المحورين x و y للأقراص في المثالين 2.4 و2.5. اشرح الطريقة التي تمكنك بها هذه العلاقة من تحديد متغيّر التكامل بشكل صحيح.

2. تم تطوير طريقة الأقراص والحلقات بشكل منفصل في ما يتعلق بالنص ولكن تُعدّ كل منها حالة خاصة للقانون العام للحجم. ناقش فوائد تعلم قوانين منفصلة في مقابل اشتقاق كل مثال بشكل منفصل من القانون العام. على سبيل المثال، هل تفضل تعلم قوانين إضافية أو حل كل مسألة من خلال المبادئ الأساسية؟ كم عدد القوانين الذي يُعدّ أكثر من القدرة على التعلم؟

3. لإيجاد منطقة مثلث من الشكل Δ في الدرس 8.1، اشرح سبب رغبتك في استخدام التكامل y. في هذا الدرس، هل سيكون من الأسهل حساب حجم المجسّم الذي تكوّن عن طريق دوران هذا المثلث حول المحور x أو y؟ اشرح تفضيلك.

4. في الجزء (a) من المثال 2.7، يمتد الشكل 8.23a من $x = -\sqrt{4-y}$ إلى $x = \sqrt{4-y}$. لكننا استخدمنا $\sqrt{4-y}$ بمثابة نصف القطر. اشرح سبب كون هذا نصف القطر صحيحاً وليس $2\sqrt{4-y}$.

في التمارين 4–1، أوجد حجم المجسّم مع مساحة المقطع العرضي $A(x)$.

1. $A(x) = x + 2, -1 \le x \le 3$
2. $A(x) = 10e^{0.01x}, 0 \le x \le 10$
3. $A(x) = \pi(4 - x)^2, 0 \le x \le 2$
4. $A(x) = 2(x + 1)^2, 1 \le x \le 4$

في التمارين 12–5، قم بإعداد تكامل و حساب الحجم.

5. (a) يبلغ ارتفاع الهرم الأكبر في الجيزة 152 مترًا، و يرتفع من قاعدة مربعة طول ضلعها 230 مترًا. احسب حجمه باستخدام التكامل.

(b) على فرض أنّه بدلًا من إكمال الهرم، توقف عمال البناء في الجيزة عند ارتفاع 70 مترًا (بهضبة علوية مربعة طول ضلعها 115 مترًا). احسب حجم هذا البناء. اشرح سبب كون الحجم أكبر من نصف حجم الهرم في الجزء (a).

6. أوجد حجم هرم ارتفاعه 50 مترًا قدمًا بقاعدة مربعة طول ضلعها 90 مترًا. تبلغ هذه الأبعاد نصف تلك الخاصة بالهرم في مثال 2.1. كيف تتم مقارنة الحجم؟

7. يبلغ طول قبة كنيسة 10 أمتار بمقاطع عرضية مربعة. طول ضلع المربع الموجود في القاعد 1 متر، و طول ضلع المربع في الجزء العلوي 15 سنتيمتر و يتغيّر الضلع خطيًا بينهما. احسب الحجم.

8. تحتوي علية منزل على مقاطع عرضية مستطيلة موازية للأرض و مقاطع عرضية مثلثة متعامدة على الأرض. إبعاد المستطيل 10 أمتار في 20 متر عند الجزء السفلي للعلية و تبلغ قاعدة المثلثات 10 أمتار و ارتفاع 3 أمتار. احسب حجم العلية.

9. يتم إعطاء الرسم التخطيطي لقبة $y = 20 - \frac{x^2}{60}$ لكل $-20 \le x \le 20$ (بالأمتار)، بمقاطع عرضية دائرية متعامدة على المحور y. أوجد حجمه.

10. الرسم التخطيطي لقبة حجمها "ضعف" حجم تمرين 9 هو $y = 40 - \frac{x^2}{40}$ لكل $-40 \le x \le 40$ (بالأمتار). أوجد حجمه.

11. لإناء فخاري مقاطع عرضية دائرية بنصف قطر $4 + \sin\frac{x}{2}$ سنتيمتر لكل $0 \le x \le 2\pi$. ارسم صورة للإناء و احسب حجمه.

12. لإناء فخاري مقاطع عرضية دائرية بنصف قطر $4 - \sin\frac{x}{2}$ سنتيمتر لكل $0 \le x \le 2\pi$. ارسم صورة للإناء و احسب حجمه.

1. على فرض أنّ فحص تصوير MRI يبين أنّ مساحات المقطع العرضي لشرائح متجاورة لورم كما هو مذكور في الجدول. استخدم قاعدة سمبسون لتقدير الحجم.

x (cm)	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$A(x)$ (cm^2)	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.4

x (cm)	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$A(x)$ (cm^2)	0.3	0.2	0.2	0.1	0.0

2. على فرض أنّ فحص تصوير MRI يبيّن أنّ مساحات المقطع العرضي لشرائح متجاورة لورم كما هو مذكور في الجدول. استخدم قاعدة سمبسون لتقدير الحجم.

x (cm)	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$A(x)$ (cm^2)	0.0	0.2	0.3	0.2	0.4	0.2	0.0

3. قدّر الحجم من مساحات المقطع العرضي.

x (m)	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$A(x)$ (m^2)	1.0	1.2	1.4	1.3	1.2

4. قدّر الحجم من مساحات المقطع العرضي.

x (m)	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
$A(x)$ (m^2)	2.0	1.8	1.7	1.6	1.8

x (m)	0.5	0.6	0.7	0.8
$A(x)$ (m^2)	2.0	2.1	2.2	2.4

في التمارين 20–17، احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران المنطقة المذكورة حول المستقيم المذكور.

5. المنطقة المحدودة بواسطة $y = 2 - x, y = 0$ و $x = 0$ حول (a) المحور x؛ (b) $y = 3$

6. المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2, y = 4 - x^2$ حول (a) المحور x؛ (b) $y = 4$

7. المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sqrt{x}, y = 2$ و $x = 0$ حول (a) المحور y؛ (b) $y = 4$

20. المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sqrt{x}, y = 2$ و $x = 0$ حول (a) المحور y؛ (b) $x = 4$

في التمارين 24–21. يتكوّن مجسّم من دوران المنطقة المذكورة حول المستقيم المذكور. احسب الحجم بالضبط إن أمكن و قدّره إذا لزم الأمر.

21. المساحة المحدودة بواسطة $y = e^x, x = 0, x = 2$ و $y = 0$ حول (a) المحور y؛ (b) $y = -2$

22. المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sec x, y = 0, x = -\pi/4$ و $x = \pi/4$ حول (a) $y = 2$؛ (b) المحور x

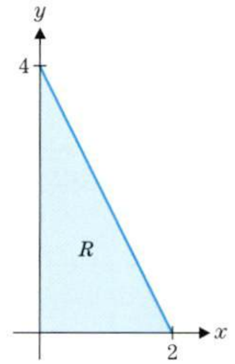
23. المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sqrt{\frac{x}{x^2+2}}$ و المحور x و $x = 1$ حول (a) المحور x؛ (b) $y = 3$

24. المنطقة المحدودة بواسطة $y = e^{-x^2}$ و $y = x^2$ حول (a) المحور x؛ (b) $y = -1$

25. لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - 2x$ والمحور x والمحور y. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(a) المحور y (b) المحور x (c) $y = 4$

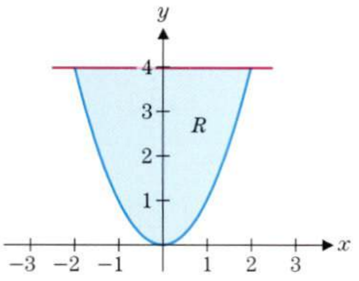
(d) $y = -4$ (e) $x = 2$ (f) $x = -2$



26. لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 4$. أحسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(a) $y = 4$ (b) المحور y (c) $y = 6$

(d) $y = -4$ (e) $y = -2$ (f) $x = -4$



27. لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2, y = 0$ و $x = 1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(a) المحور y (b) المحور x (c) $x = 1$

(d) $y = 1$ (e) $x = -1$ (f) $y = -1$

28. لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x, y = -x$ و $x = 1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(a) المحور x (b) المحور y

(c) $y = 1$ (d) $y = -1$

29. لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = ax^2, y = h$ والمحور y (حيث a و h ثوابت موجبة). احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران هذه المنطقة حول y. أثبت أن إجابتك تساوي نصف حجم الأسطوانة ذات الارتفاع h و نصف القطر $\sqrt{h/a}$. ارسم صورة لتوضيح هذا.

30. استخدم نتيجة تمرين 29 لكتابة مباشرة حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = ax^2, x = \sqrt{h/a}$ و المحور x حول المحور y.

31. على فرض أنّه يتم دوران المربع المكوّن من كل نقاط (x, y) مع $-1 \le x \le 1$ و $-1 \le y \le 1$ حول المحور y. أثبت أنّ حجم المجسّم الناتج هو 2π.

32. على فرض يتم تدوير الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ حول المحور y. أثبت أنّ حجم المجسّم الناتج هو $\frac{4}{3}\pi$.

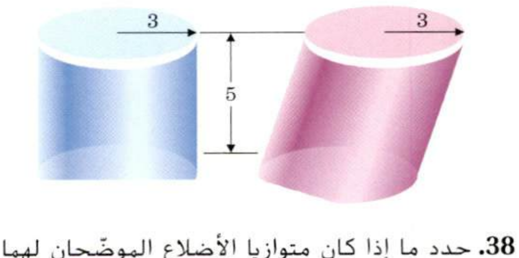
33. على فرض يتم دوران المثلث رؤوسه $(-1, -1)$ و $(0, 1)$ و $(1, -1)$ حول المحور y. أثبت أنّ حجم المجسّم الناتج هو $\frac{2}{3}\pi$.

34. ارسم المربع و الدائرة و المثلث في التمارين 31–33 على المحاور نفسها. بيّن أنّ الأحجام النسبية للمناطق التي تم تدويرها (أسطوانية و كروية و مخروطية، على التوالي) تكون 3:2:1.

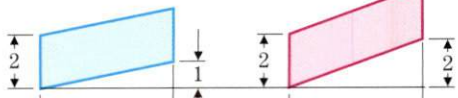
35. أثبت قانون حجم الكرة بدوران الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ حول المحور y.

36. أثبت قانون حجم المخروط بدوران القطعة المستقيمة $y = -\frac{h}{r}x + h, 0 \le x \le r$، حول المحور y.

37. لتكن A هي الأسطوانة الدائرية القائمة نصف قطرها 3 و ارتفاعها 5. لتكن B هي الأسطوانة الدائرية المائلة نصف قطرها 3 وارتفاعها 5. حدد ما إذا كانت A وB لهما الحجم نفسه.



38. حدد ما إذا كان متوازيا الأضلاع الموضّحان لهما المساحة نفسها. (التمرينان 37 و 38 وضّح نظرية كافالييري).



39. إنّ قاعدة المجسّم V هي الدائرة $x^2 + y^2 = 1$. أوجد الحجم إذا كان لدى V مقاطع (a) عرضية مربّعة و (b) مقاطع عرضية على شكل نصف دائرة متعامدة على المحور x.

40. قاعدة المجسّم V هي مثلث رؤوسه $(-1, 0)$ و $(0, 1)$ و $(1, 0)$. أوجد الحجم إذا كان لدى V (a) مقاطع عرضية مربّعة و (b) مقاطع عرضية نصف دائرة متعامدة على المحور x.

41. قاعدة المجسّم V هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$. أوجد الحجم إذا كان لدى V (a) مقاطع عرضية مربّعة و (b) و مقاطع عرضية على شكل نصف دائرة و (c) مقاطع عرضية مثلثات متساوية الأضلاع متعامدة على المحور x.

42. قاعدة المجسّم V هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = \ln x, x = 2$ و $y = 0$. أوجد الحجم إذا كان لدى V (a) مقاطع عرضية مربّعة و (b) مقاطع عرضية نصف دائرة و (c) مقاطع عرضية على مثلثة متساوية الأضلاع متعامدة على المحور x.

43. قاعدة المجسّم V هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = e^{-2x}, y = 0, x = 0$ و $x = \ln 5$. أوجد الحجم إذا كان لدى V (a) مقاطع عرضية مربّعة و (b) مقاطع عرضية نصف دائرة متعامدة على المحور x.

44. قاعدة المجسّم V هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$. أوجد الحجم إذا كان لدى V (a) مقاطع عرضية مربّعة و (b) ومقاطع عرضية على شكل نصف دائرة متعامدة على المحور x.

45. أوجد حجم تقاطعات الكرتين، تكوّنت إحداهما بدوران الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ حول المحور y والأخرى تكوّنت بدوران الدائرة $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ حول $x = 1$.

46. لتكن S هي الكرة التي تكوّنت بتدوير $x^2 + y^2 = 4$ حول المحور y وأنّ C هي الأسطوانة التي تكوّنت بدوران $-4 \le y \le 4$، حول المحور y. أوجد حجم تقاطع S مع C.

التطبيقات

47. استخدم جدول القيم المعطى لتقدير حجم المجسّم الذي تكوّن بدوران $y = f(x), 0 \le x \le 3$، حول المحور x.

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$f(x)$	2.0	1.2	0.9	0.4	1.0	1.4	1.6

48. استخدم جدول القيم المعطى لتقدير حجم المجسّم الذي تكوّن بدوران $y = f(x), 0 \le x \le 2$، حول المحور x.

x	0	0.25	0.50	0.75	1.0	1.25	1.50	1.75	2.0
$f(x)$	4.0	3.6	3.4	3.2	3.5	3.8	4.2	4.6	5.0

49. يتم سكب الماء بمعدل ثابت في الأصيص برسم تخطيطي كما يبدو في الشكل و مقاطع عرضية دائرية. ارسم تمثيلًا بيانيًا لارتفاع الماء في الأصيص كدالة للزمن.

50. ارسم تمثيل بياني لمعدل التدفق في مقابل الزمن إذا قمت بسكب الماء في الأصيص الموجودة في التمرين 49 بمثل تلك الطريقة التي يتزايد من خلالها ارتفاع الماء في الأصيص بمعدل ثابت.

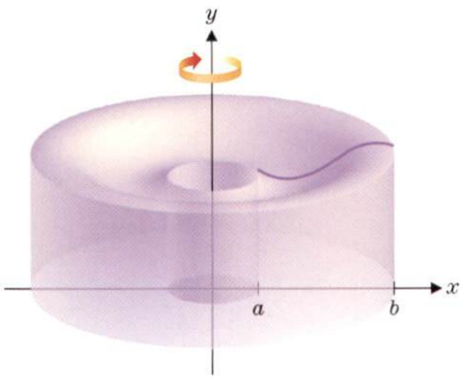
تمارين استكشافية

1. قم بتعميم نتيجة التمرين 34 على أي مستطيل. والذي هو. ارسم المستطيل مع $-a \leq x \leq a$ و $-b \leq y \leq b$، والقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ والمثلث رؤوسه $(-a, -b)$ و $(0, b)$ و $(a, -b)$. أثبت أنّ الأحجام النسبية للمجسّم الذي تكوّن بدوران هذه المناطق حول المحور y تكون 3:2:1.

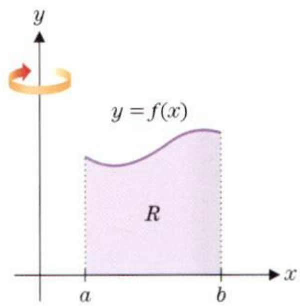
2. قم بتدوير الدائرة $(x-2)^2 + y^2 = 1$ حول المحور y. يطلق على المجسّم الناتج الشبيه بكعكة حلقية محلاة اسم **حلقة دورانية**. احسب حجمها. بيّن أنّ الحجم يساوي مساحة الدائرة مضروبة في المسافة التي قطعها مركز الدائرة. وهذا مثال على **نظرية بابوس**، التي يرجع تاريخها إلى القرن الرابع قبل الميلاد. تحقق من أنّ النتيجة تنطبق على المثلث الموجود في التمرين 25، الأجزاء (c) و(d).

الدرس 8-3 الأحجام بالأصداف الأسطوانية

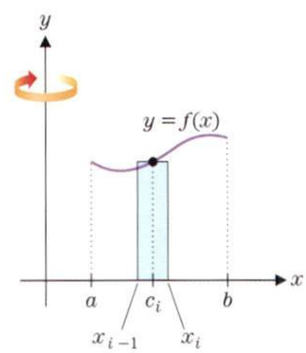
في هذا الدرس، نقدم بديلًا لطريقة الحلقات التي تمت مناقشتها في الدرس 8.2. لتكن R ترمز إلى المنطقة المحدودة بالتمثيل البياني $y = f(x)$ والمحور -x على الفترة $[a, b]$، حيث $0 < a < b$ و $f(x) \geq 0$ على $[a, b]$. (أنظر الشكل 8.27a). إذا قمنا بدوران هذه المنطقة حول المحور y، نحصل على المجسّم المبيّن في الشكل 8.27b. إنّ إيجاد حجم هذا المجسّم بطريقة الحلقات صعب، حيث إننا سنحتاج إلى تقطيع المنطقة إلى عدة أجزاء.



الشكل 8.27b
المجسّم الناتج عن الدوران



الشكل 8.27a
الدوران حول المحور y



الشكل 8.28
مستطيل الحد i

وبدلًا من ذلك، نجزّىء الفترة $[a, b]$ إلى n فترات جزئية متساوية $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. عند كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$، اختر نقطة c_i وقم بإنشاء المستطيل ارتفاعه $f(c_i)$ كما هو موضّح في الشكل 8.28. إنّ تدوير هذا المستطيل حول المحور y يشكّل صدفة أسطوانية رفيعة (أي، أسطوانة مجوفة، مثل أنبوب) كما في الشكل 8.29a.

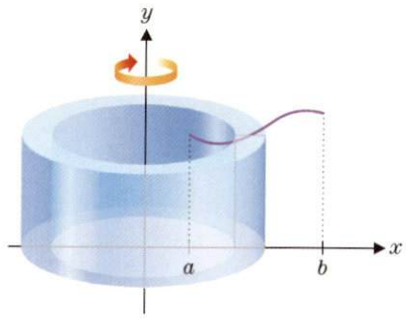
لإيجاد حجم هذه الصدفة، تخيل أنّك تقطعها من أعلى لأسفل ثم تقوم بتسوية صدفتها. بعد إجراء هذا، ينبغي أن تحصل بشكل أساسي على لوحة مستطيلة رفيعة، كما يظهر في الشكل 8.29b.

لاحظ أنّ طول مثل هذه اللوحة الرفيعة يناظر محيط الصدفة الأسطوانية، وهو 2π x نصف القطر $\approx 2\pi c_i$. لذلك، فإنّ حجم V_i للصدفة الأسطوانية عند الحد i يبلغ بشكل تقريبي

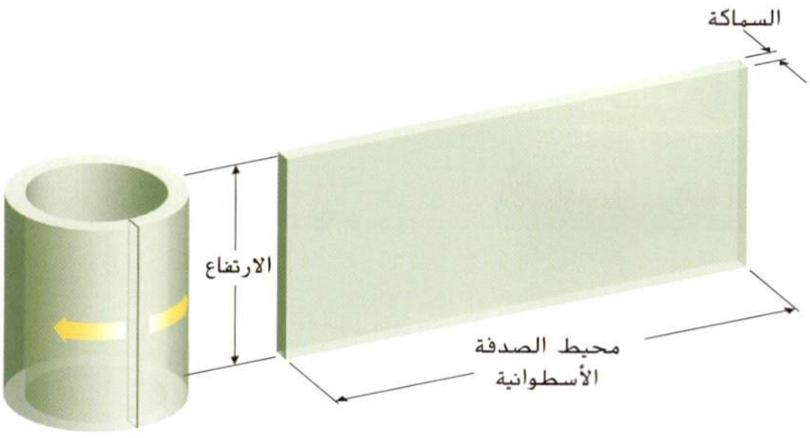
$$\begin{aligned} V_i &\approx \text{الطول} \times \text{السماكة} \times \text{الارتفاع} \\ &= (2\pi \times \text{نصف القطر}) \times \text{العرض} \times \text{الارتفاع} \\ &\approx (2\pi c_i)\,\Delta x f(c_i). \end{aligned}$$

يمكن عندئذ تقريب إجمالي حجم V المجسّم بإيجاد ناتج جمع أحجام الصدفات الأسطوانيات n:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi \underbrace{c_i}_{\text{نصف القطر}} \underbrace{f(c_i)}_{\text{الارتفاع}} \underbrace{\Delta x}_{\text{السماكة}}$$



الشكل 8.29a
صدفة أسطوانية



الشكل 8.29b
صدفة أسطوانية مستوية

وكما قمنا بذلك عدة مرات الآن، يمكننا الحصول على الحجم الدقيق للمجسّم بأخذ النهاية عندما $n \to \infty$ والتعرف على التكامل المحدود الناتج. لدينا

حجم مجسّم ناتج عن الدوران (أصداف أسطوانية)

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi c_i f(c_i)\,\Delta x = \int_a^b 2\pi \underbrace{x}_{\text{نصف القطر}} \underbrace{f(x)}_{\text{الارتفاع}} \underbrace{dx.}_{\text{السماكة}} \qquad (3.1)$$

لأسباب واضحة، يمكننا تسمية هذا طريقة الأصداف الأسطوانية.

ملحوظة 3.1

لا تعتمد فقط على حفظ الصيغة (3.1). يجب أن تسعى لفهم معنى المركبات. يسهل إجراء الأمر إذا فكرت فقط في تناظرها مع حجم الصدفة الأسطوانية:

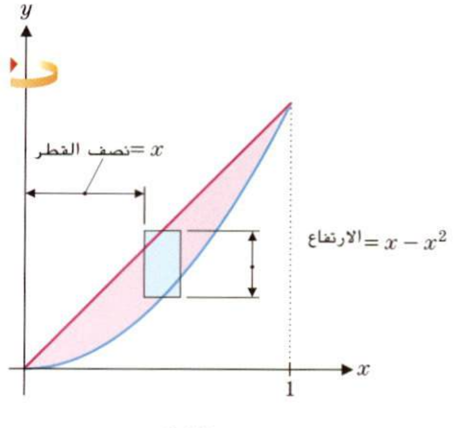
2π (نصف القطر) (الارتفاع) (السماكة)

إذا فكرت في الأحجام بهذه الطريقة، فلن تجد صعوبة مع طريقة الأصداف الأسطوانية.

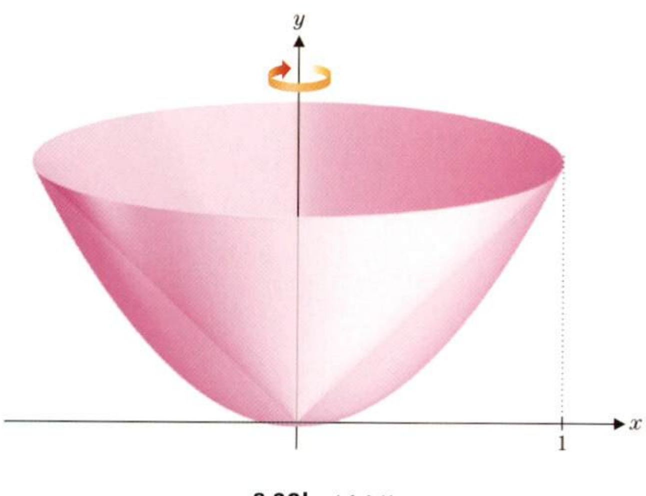
المثال 3.1 استخدام طريقة الأصداف الأسطوانية

استخدم طريقة الأصداف الأسطوانية لإيجاد حجم المجسّم الذي تكوّن بدوران المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = x$ و $y = x^2$ في الربع الأول حول المحور y.

الحل من الشكل 8.30a، لاحظ أنّ للمنطقة حد أعلى عند $y = x$ وحد أدنى عند $y = x^2$ وتمتد من $x = 0$ إلى $x = 1$. هنا، لقد رسمنا مستطيلاً بسيطاً يولّد صدفة أسطوانية. يمكن رؤية المجسّم الناتج عن الدوران في الشكل 8.30b. يمكننا كتابة تكامل



الشكل 8.30a
مستطيل بسيط يولد صدفة أسطوانية



الشكل 8.30b
المجسّم الناتج عن الدوران

للحجم بتحليل المركبات المتنوعة للمجسّم في الشكلين 8.30a و 8.30b. من (3.1)، لدينا

$$V = \int_0^1 2\pi \underbrace{x}_{\text{نصف القطر}} \underbrace{(x - x^2)}_{\text{الارتفاع}} \underbrace{dx}_{\text{السماكة}}$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx = 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

يمكننا تعميم هذه الطريقة لحل المسألة في المثال 2.7 الجزء (d) بأسلوب مبسط وأكبر.

المثال 3.2 الحجم حيث الصدفات أبسط من الحلقات

أوجد حجم المجسّم الذي تكوّن بدوران المنطقة المحدودة بالتمثيل البياني $y = 4 - x^2$ والمحور -x حول المستقيم $x = 3$.

الحل أنظر بتمعن إلى الشكل 8.31a، حيث رسمنا مستطيلاً بسيطاً يولّد صدفة أسطوانية وإلى المجسّم الموضّح في الشكل 8.31b. لاحظ أنّ نصف قطر الصدفة الأسطوانية هو المسافة من المستقيم $x = 3$ إلى الصدفة:

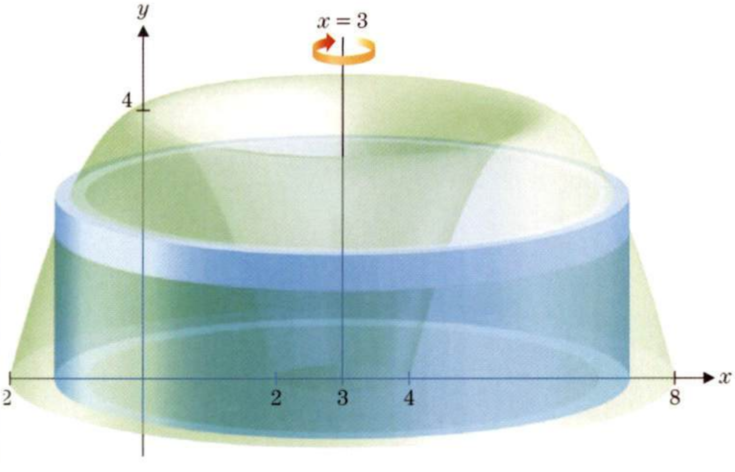
$$r = 3 - x$$

يعطينا هذا الحجم

$$V = \int_{-2}^{2} 2\pi \underbrace{(3 - x)}_{\text{نصف القطر}} \underbrace{(4 - x^2)}_{\text{الارتفاع}} \underbrace{dx}_{\text{السماكة}}$$

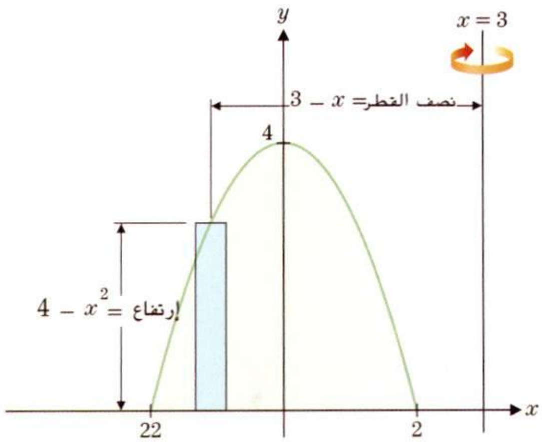
$$= 2\pi \int_{-2}^{2} (x^3 - 3x^2 - 4x + 12)\, dx = 64\pi,$$

حيث نترك التفاصيل الروتينية لعملية حساب التكامل إلى القارئ.



الشكل 8.31b

المجسّم الناتج عن الدوران



الشكل 8.31a

مستطيل بسيط يولّد صدفة أسطوانية

ينبغي أن تكون الخطوة الأولى التي تتخذها في عملية حساب الحجم هي تحليل الشكل الهندسي للمجسّم وإتخاذ قرار بشأن إذا كان من الأسهل إجراء تكامل بمعلومية x أو y.
لاحظ أنّه لأجل مجسّم معطى، يكون متغير التكامل في طريقة الأصداف الأسطوانية عكس تمامًا لتلك الخاصة بطريقة الحلقات. لذا، سيحدد اختيارك لمتغيّر التكامل الطريقة التي تستخدمها.

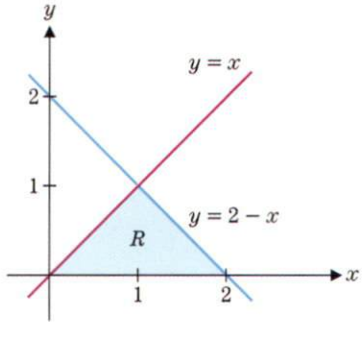
المثال 3.3 حساب الأحجام باستخدام الأصداف والحلقات

لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = x$، $y = 2 - x$ و $y = 0$.
احسب حجم المجسّم الذي تكوّن بتدوير R حول المستقيمات (a) $y = 2$ (b) $y = -1$ و (c) $x = 3$.

الحل تبدو المنطقة R في الشكل 8.32a. يشير الشكل الهندسي للمنطقة إلى أنه يجب التفكير في y باعتبارها متغيّر التكامل. أنظر بتمعن للاختلافات بين الأحجام الثلاثة التالية.

(a) عند تدوير R حول المستقيم $y = 2$. لاحظ أنّ نصف قطر الصدفة الأسطوانية هو المسافة من المستقيم $y = 2$ إلى الصدفة: $r = 2 - y$. لكل $0 \le y \le 1$. (أنظر الشكل 8.32b). يُعتبَر الارتفاع الفرق في قيم x على المنحنيين: عند إجراء الحل لإيجاد x، نحصل على $x = y$ و $x = 2 - y$. باتباع (3.1)، نحصل على الحجم

$$V = \int_0^1 2\pi \underbrace{(2-y)}_{\text{نصف القطر}} \underbrace{[(2-y)-y]}_{\text{الارتفاع}} \underbrace{dy}_{\text{السماكة}} = \frac{10}{3}\pi$$

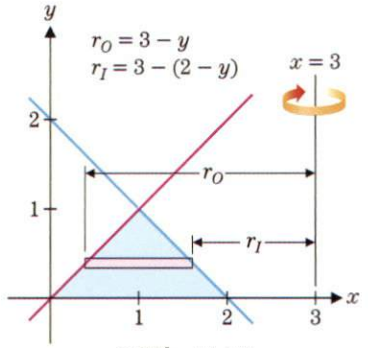


الشكل 8.32a
$y = x$ و $y = 2 - x$

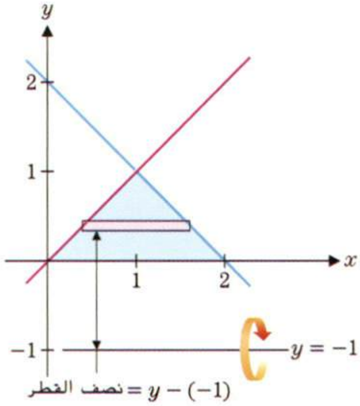
حيث نترك التفاصيل الروتينية لعملية الحساب إليك.

(b) عند تدوير R حول المستقيم $y = -1$. لاحظ أنّ ارتفاع الأصداف الأسطوانية هو مماثل للموجود في الجزء (a). ولكن نصف القطر r هو المسافة من المستقيم $y = -1$ إلى الصدفة: $r = y - (-1) = y + 1$. (أنظر الشكل 8.32c). يعطينا هذا الحجم

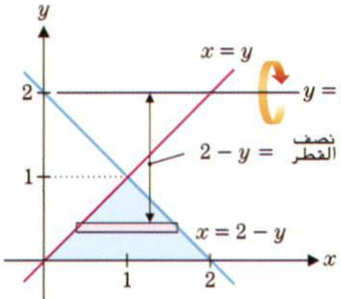
$$V = \int_0^1 2\pi \underbrace{[y-(-1)]}_{\text{نصف القطر}} \underbrace{[(2-y)-y]}_{\text{الارتفاع}} \underbrace{dy}_{\text{السماكة}} = \frac{8}{3}\pi$$



الشكل 8.32b
التدوير حول $y = 2$



الشكل 8.32c
الدوران حول $y = -1$



الشكل 8.32d
الدوران حول $x = 3$

(c) في النهاية، عند تدوير R حول المستقيم $x = 3$. لاحظ أنّه لإيجاد الحجم باستخدام الأصداف الأسطوانية، سنحتاج إلى تقسيم عملية الحساب إلى جزأين، حيث إنّ ارتفاع الأصداف الأسطوانية سيكون مختلفًا بالنسبة لـ $x \in [0, 1]$ عن $x \in [1, 2]$. (فكر في هذا الأمر بعض الشيء). على الجانب الآخر، يمكن إجراء هذا بسهولة بواسطة طريقة الحلقات. لاحظ أنّ نصف القطر الخارجي هو المسافة من المستقيم $x = 3$ إلى المستقيم $x = y$: $r_O = 3 - y$، بينما نصف القطر الداخلي هو المسافة من المستقيم $x = 3$ إلى المستقيم $x = 2 - y$: $r_I = 3 - (2 - y)$. (أنظر الشكل 8.32d). يعطينا هذا الحجم

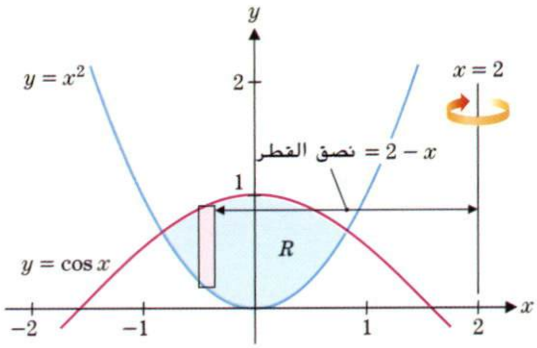
$$V = \int_0^1 \pi \left\{ \underbrace{(3-y)^2}_{\text{مربع نصف قطر خارجي}} - \underbrace{[3-(2-y)]^2}_{\text{مربع نصف قطر داخلي}} \right\} dy = 4\pi$$

مرة أخرى، ينبغي ملاحظة أهمية رسم المنطقة وتسميتها بعناية. سيسهل إجراء ذلك من إعداد التكامل بشكل صحيح. في النهاية، قم بكل ما يلزم لتقدير التكامل. إذا كنت لا تعرف طريقة تقديره، يمكنك المحاولة من خلال CAS الخاص بك أو قم بتقريبه عدديًا (مثال بواسطة قاعدة سمبسون).

المثال 3.4 تقريب الأحجام باستخدام الأصداف والحلقات

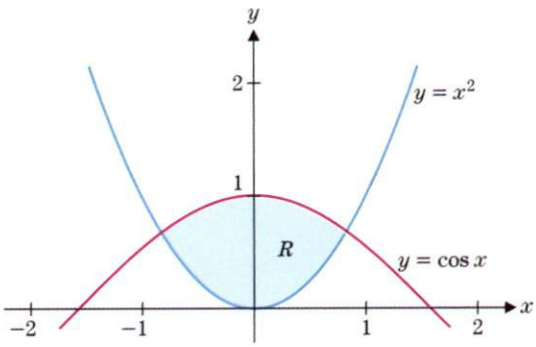
لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = \cos x$ و $y = x^2$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن بدوران R حول المستقيمين $x = 2$ (a) و $y = 2$ (b).

الحل أولًا، نرسم المنطقة R. (أنظر الشكل 8.33a) بما أنّه يتم تحديد كل من الجزء الأعلى والأدنى لـ R بواسطة منحنى بالشكل $y = f(x)$، سنرغب في إجراء تكامل بمعلومية x. نبحث تاليًا عن نقاط تقاطع المنحنيين، بحل المعادلة $\cos x = x^2$. نظرًا إلى أنّه لا يمكننا حل هذا بالضبط، يجب أن نستخدم طريقة تقريبية (مثال طريقة نيوتن) للحصول على التقاطعات التقريبية عند $x = \pm 0.824132$.



الشكل 8.33a

$y = \cos x, y = x^2$



الشكل 8.33b

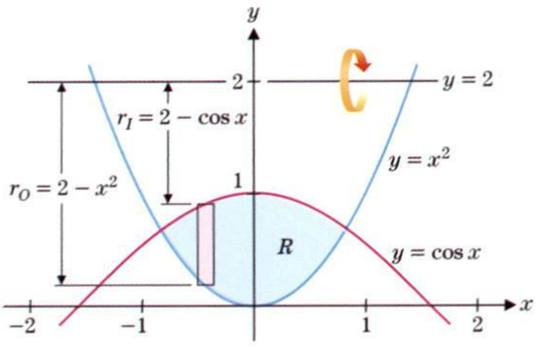
التدوير حول $x = 2$

(a) بدوران المنطقة حول المستقيم $x = 2$. ينبغي أن نستخدم أصداف أسطوانية. (أنظر الشكل 8.33b). في هذه الحالة، لاحظ أنّ نصف القطر r للصدفة الأسطوانية هو المسافة من المستقيم $x = 2$ إلى الصدفة: $r = 2 - x$. بينما ارتفاع الصدفة هو $\cos x - x^2$. نحصل على الحجم

$$V \approx \int_{-0.824132}^{0.824132} 2\pi \underbrace{(2 - x)}_{\text{نصف القطر}} \underbrace{(\cos x - x^2)}_{\text{الارتفاع}} dx \approx 13.757$$

حيث قربنا قيمة التكامل عدديًا. (سنرى طريقة إيجاد دالة اصلية لهذا التكامل في الوحدة 9).

(b) بدوران المنطقة حول المستقيم $y = 2$ (أنظر الشكل 8.33c). نستخدم طريقة الحلقات. في هذه الحالة، لاحظ أنّ نصف القطر الخارجي لحلقة هو المسافة من المستقيم $y = 2$ إلى المنحنى $y = x^2$: $r_O = 2 - x^2$. بينما نصف القطر الداخلي هو المسافة من المستقيم $y = 2$ إلى المنحنى $y = \cos x$: $r_I = 2 - \cos x$. (مرة أخرى، أنظر



الشكل 8.33c

الدوران حول $y = 2$

الشكل 8.33c). يعطينا هذا الحجم

$$V \approx \int_{-0.824132}^{0.824132} \pi \left[\underbrace{(2-x^2)^2}_{\text{مربع نصف قطر اخر}} - \underbrace{(2-\cos x)^2}_{\text{مربع نصف قطر داخلي}} \right] dx \approx 10.08$$

حيث قرّبنا قيمة التكامل عدديًا. ■

نختم هذا الدرس بملخص لاستراتيجيات حساب أحجام المجسّمات الناتجة عن الدوران.

حجم مجسّم ناتج عن الدوران

- ارسم المنطقة التي سيتم دورانها ومحور الدوران.
- حدد متغيّر التكامل (x إذا كان في المنطقة حد أعلى وحد أدنى معرّفان جيداً. y إذا كان في المنطقة حد أيسر وأيمن معرّفان جيدًا).
- استنادًا إلى محور الدوران ومتغير التكامل، حدد الطريقة (الأقراص أو الحلقات لتكامل -x حول محور أفقي أو تكامل y حول محور رأسي. الأصداف لتكامل x حول محور رأسي أو تكامل y حول محور أفقي).
- عيّن على الرسم نصف القطر الداخلي ونصف القطر الخارجي للأقراص وللحلقات وعيّن نصف القطر والارتفاع للأصداف الأسطوانية.
- قم بإعداد التكامل (التكاملات) وجد القيمة.

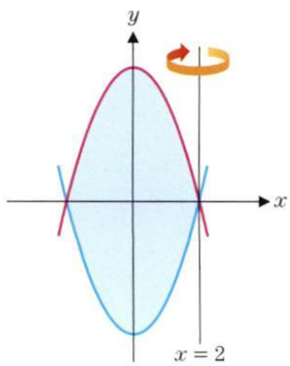
تمارين 8.3

تمارين كتابية

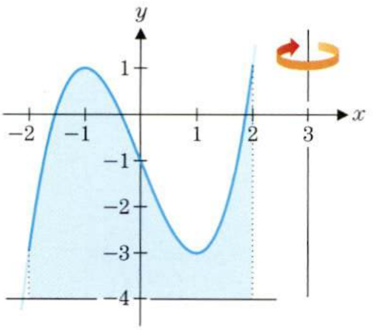
1. اشرح السبب في أنّ طريقة الأصداف الأسطوانية تنتج تكاملًا حيث يُعتبَر x متغيّر التكامل عند التدوير حول محور رأسي. (قم بوصف موقع الأصداف والاتجاه الذي سوف تأخذه عندما تتحرّك من صدفة الى صدفة).

2. اشرح لمَ طريقة الأصداف الأسطوانية لها الشكل نفسه سواء كان للمجسّم ثقب أو تجويف. أي إنّه ما من حاجة لطرائق منفصلة مماثلة للأقراص والحلقات.

3. على فرض أنّ المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2 - 4$ و $y = 4 - x^2$ يتم تدويرها حول المستقيم $x = 2$. اشرح بدقة الطريقة (الأقراص أو الحلقات أو الأصداف) التي ستكون الأسهل في الاستخدام لحساب الحجم.



4. على فرض أنّ المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^3 - 3x - 1$ و $y = -4$، $-2 \le x \le 2$. يتم دورانها حول $x = 3$. اشرح ما سيلزم لحساب الحجم باستخدام طريقة الحلقات وما سيلزم لاستخدام طريقة الأصداف الأسطوانية. أي طريقة تفضل ولماذا؟



في التمارين 1–8، ارسم المنطقة وارسم صدفة نوعية وحدد نصف قطر وارتفاع كل صدفة واحسب الحجم.

1. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ والمحورx. $-1 \le x \le 1$. حول $x = 2$

2. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ والمحورx. $-1 \le x \le 1$. حول $x = -2$

3. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x$، $y = -x$ و $x = 1$ حول المحور y

4. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x$، $y = -x$ و $x = 1$ حول $x = 1$

5. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sqrt{x^2 + 1}$ ، $y = 0$ و $0 \le x \le 4$ حول $x = 0$

6. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 0$، $-1 \le x \le 1$ حول $x = 2$

7. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x^2 + y^2 = 1$ حول $y = 2$

8. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x^2 + y^2 = 2y$ حول $y = 4$

في التمارين 9–16، استخدم الأصداف الأسطوانية لحساب الحجم.

9. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$. حول $x = -2$

10. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$. حول $x = 2$

11. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x = y^2$ و $x = 4$. حول $y = -2$

12. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x = y^2$ و $x = 4$. حول $y = 2$

13. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2 + 2$، $y = x + 1$، $x = 0$ و $x = 2$. حول $x = 3$

14. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x$ و $y = x^2 - 2$. حول $x = 3$

15. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x = (y - 1)^2$ و $x = 9$. حول $y = 5$

16. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x = (y - 1)^2$ و $x = 9$. حول $y = -3$

في التمارين 17–26، استخدم أفضل طريقة مناسبة لإيجاد كل حجم.

17. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - x$، $y = 4$ و $y = x$ حول

(a) المحور x (b) المحور y (c) $x = 4$ (d) $y = 4$

18. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x + 2$، $y = -x - 2$ و $x = 0$ حول

(a) $y = -2$ (b) $x = -2$ (c) المحور y (d) المحور x

19. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x$ و $y = x^2 - 6$ حول

(a) $x = 3$ (b) $y = 3$ (c) $x = -3$ (d) $y = -6$

20. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x = y^2$ و $x = 2 + y$ حول

(a) $x = -1$ (b) $y = -1$ (c) $x = -2$ (d) $y = -2$

21. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2\ (x \ge 0)$، $y = 2 - x$ و $x = 0$ حول

(a) المحور x (b) المحور y (c) $x = 1$ (d) $y = 2$

22. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = 2 - x^2$، $y = x\,(x > 0)$ و المحور y حول

(a) المحور x (b) المحور y (c) $x = -1$ (d) $y = -1$

23. يتم دوران المنطقة على يمين $x = y^2$ وعلى شمال $y = 2 - x$ و $y = x - 2$ حول

(a) المحور x (b) المحور y

24. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = e^x - 1$، $y = 2 - x$ والمحور x حول

(a) المحور x (b) المحور y

25. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = \cos x$ و $y = x^4$ حول

(a) $x = 2$ (b) $y = 2$ (c) المحور x (d) المحور y

26. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sin x$ و $y = x^2$ حول

(a) $y = 1$ (b) $x = 1$ (c) المحور y (d) المحور x

في التمارين 27–30، يمثل التكامل حجم مجسّم. ارسم المنطقة ومحور الدوران اللذين ينتج عنهما المجسّم.

27. $\int_0^1 \pi[(\sqrt{y})^2 - y^2]\,dy$

28. $\int_0^2 \pi(4 - y^2)^2 dy$

29. $\int_0^1 2\pi x(x - x^2)\,dx$

30. $\int_0^2 2\pi(4 - y)(y + y)\,dy$

31. استخدم طريقة مشابهة لاشتقاقنا للمعادلة (3.1) لاشتقاق الحقيقة التالية حول دائرة نصف قطرها R. $\int_0^R c(r)\,dr = \pi R^2 =$ المساحة، حيث $c(r) = 2\pi r$ هو محيط دائرة نصف قطرها r.

32. لقد لاحظت على الأرجح أنّ محيط دائرة $(2\pi r)$ يساوي الاشتقاق بمعلومية r مساحة الدائرة (πr^2). استخدم التمرين 31 لشرح سبب أن هذا ليس مصادفة.

التطبيقات

33. تتكوّن خرزة مجوهرات باحداث ثقب طول نصف قطره $\frac{1}{2}$-cm من مركز كرة طول نصف قطرها 1-cm. اشرح سبب إعطاء الحجم بواسطة $\int_{1/2}^1 4\pi x\sqrt{1 - x^2}\,dx$. أوجد قيمة هذا التكامل أو احسب الحجم في طريقة أسهل بعض الشيء.

34. أوجد حجم الثقب في التمرين 33 بحيث يكون قد تمت إزالة نصف الحجم بالضبط.

35. إنّ كثيب نمل شبيه بالشكل الذي تكوّن عند تدوير المنطقة المحدودة بواسطة $y = 1 - x^2$ والمحور x حول المحور -y. يزيل باحث نواة أسطوانية من مركز الكثيب. كم ينبغي أن يكون طول نصف القطر لإعطاء الباحث 10% من التربة؟

36. الرسم التخطيطي لكرة رجبي على شكل $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{16} = 1$. تُعدّ الكرة نفسها ناتج تدوير هذا القطع الناقص حول المحور -x. أوجد حجم الكرة.

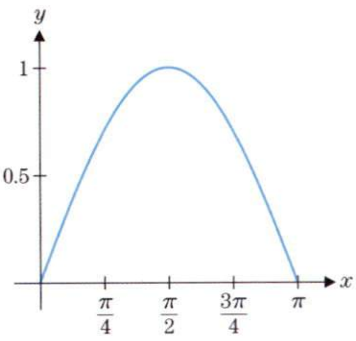
تمارين استكشافية

1. يتم إحداث ثقب طول نصف قطره r في مركز كرة طول نصف قطرها R. احسب الحجم الذي تمت إزالته بدلالة R و r. احسب طول L للثقب بدلالة R و r. أعد كتابة الحجم بدلالة L. هل من المعقول اعتبار أنّ الحجم الذي تمت إزالته يعتمد على L وليس R؟

2. في كل حالة، ارسم المجسّم وأوجد الحجم الذي تكوّن بدوران المنطقة حول (i) المحور x و (ii) المحور y. احسب الحجم بالضبط إن أمكن وقدّره عدديًا إذا لزم الأمر. (a) منطقة محدودة بواسطة $y = \sec x\sqrt{\tan x + 1}$، $y = 0, x = -\frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{\pi}{4}$. (b) منطقة محدودة بواسطة $x = \sqrt{y^2 + 1}$، $x = 0$، $y = -1$ و $y = 1$. (c) منطقة محدودة بواسطة $y = \frac{\sin x}{x}$، $y = 0$، $x = 0$ و $x = \pi$. (d) منطقة محدودة بواسطة $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ و $y = 0$. (e) منطقة محدودة بواسطة $y = e^{-x^2}$ و $y = (x-1)^2$.

الدرس 8-4 طول القوس ومساحة السطح

في هذا الدرس، سنحسب طول منحنى في بعدين ومساحة سطح في ثلاثة أبعاد. كما هو الحال دائمًا، انتبه بصورة خاصّة للمشتقات.



الشكل 8.34a

$y = \sin x$

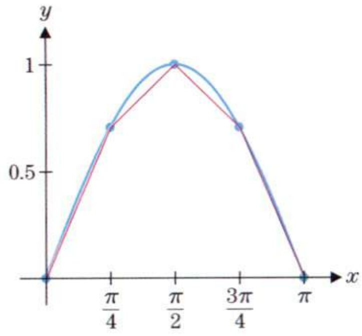
طول القوس

كيف يمكننا إيجاد طول جزء من منحنى sine الموضّح في الشكل 8.34a؟ (نطلق على طول منحنى اسم **طول القوس** الخاص به). إذا كان المنحنى بالفعل قطعة من الخيط، يمكنك جعل الخيط مستقيمًا ثم القيام بقياس طوله بمسطرة. مع وضع هذا في الاعتبار، نبدأ بتقريب.

نقوم أولًا بتقريب المنحنى مع عدّة قطع مستقيمة متصلة ببعضها البعض. في الشكل 8.34b، تربط القطع المستقيمة النقاط $(0, 0)$، $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$، $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$، $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ و $(\pi, 0)$ على المنحنى $y = \sin x$. يعطى تقريب لطول القوس s للمنحنى من ناتج جمع أطوال هذه القطع المستقيمة:

$$s \approx \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$+ \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \approx 3.79$$



الشكل 8.34b

تقريب أربع قطع مستقيمة

$y = \sin x$

الطول	n
3.8125	8
3.8183	16
3.8197	32
3.8201	64
3.8202	128

يمكن أن نلاحظ أنّ هذا التقدير صغير جدًا. (ما السبب وراء هذا؟) سنقوم بتحسين التقريب الذي نجريه بطريقة استخدام أكثر من أربع قطع مستقيمة. في الجدول الموجود على اليسار، نعرض تقديرات لطول المنحنى باستخدام n قطع مستقيمة للقيم الأكبر لـ n. كما تتوقع، ستقترب قيمة التقريب من طول المنحنى الفعلي بازدياد عدد القطع المستقيمة. من المفترض أن تبدو هذه الفكرة العامة مألوفة.

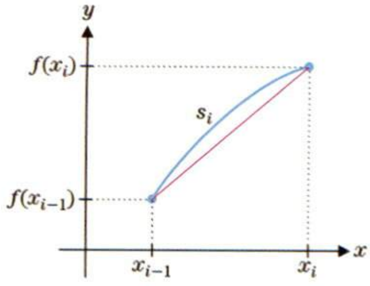
نقوم بمزيد من التطوير لهذا المفهوم للمسائل العامة بشكل أكبر لإيجاد طول قوس المنحنى $y = f(x)$ على الفترة $[a, b]$. وهنا، سوف نفترض أنّ f متصلة على $[a, b]$ وقابلة للإشتقاق على (a, b). (أين رأيت مثل هذه الفرضيات من قبل؟) كالعادة، بدأنا بتجزئة الفترة $[a, b]$ إلى n أجزاء متساوية: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$، حيث $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$، لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

بين كل زوج من النقاط المتجاورة على المنحنى، $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ و $(x_i, f(x_i))$، نقرّب طول القوس s_i من مسافة المستقيم بين النقطتين. (انظر الشكل 8.35 في الصفحة التالية). من قانون المسافة المستخدم، يوجد لدينا

$$s_i \approx d\{(x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i))\} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

حيث إنّ f متصلة لكل القيم على $[a, b]$ وقابلة للإشتقاق على (a, b)، f متصلة أيضًا على الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ وقابلة للإشتقاق على (x_{i-1}, x_i). بواسطة نظرية القيمة المتوسطة، يوجد لدينا إذًا

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$$



الشكل 8.35

تقريب المستقيم لطول القوس

لبعض الأعداد $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$. يعطينا ذلك التقريب

$$s_i \approx \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$
$$= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)(x_i - x_{i-1})]^2}$$
$$= \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x} = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x$$

بجمع أطوال قطع مستقيمة عددها n، نحصل على تقريب بالطول الكلي للقوس،

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x$$

لاحظ أنّه كلما كبرت قيمة n، ينبغي أن يبلغ هذا التقريب طول القوس بالضبط، وهو،

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x$$

يجب عليك التعرف على هذا الأمر باعتباره النهاية لمجموع ريمان لـ $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$، بحيث يتم إعطاء طول القوس بالضبط من التكامل المحدود:

طول قوس $y = f(x)$
على الفترة $[a, b]$

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx} \qquad (4.1)$$

حيثما توجد النهاية.

ملحوظة 4.1

قانون طول القوس بسيط للغاية. للأسف، عدد قليل جدًا من الدوال ينتج تكاملات لطول القوس يمكن إيجاد قيمته بالضبط. ينبغي أن تتوقع استخدام أسلوب تكامل عددي على آلتك الحاسبة أو الحاسوب الخاص بك لحساب معظم أطوال الأقواس.

المثال 4.1 استخدام قانون طول القوس

أوجد طول القوس الخاص بجزء من منحنى $y = \sin x$ مع $0 \le x \le \pi$. (لقد قدّرنا ذلك في المثال 3.79 بعد المقدّمة).

الحل من (4.1)، طول القوس

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + (\cos x)^2}\,dx$$

حاول إيجاد دالة أصلية لـ $\sqrt{1 + \cos^2 x}$، لكن لا تحاول ذلك لفترة طويلة. (إنّ أفضل ما يمكن أن يقوم به CAS الخاص بنا هو $\sqrt{2}\,\text{EllipticE}[x, \frac{1}{2}]$، والذي لا يبدو مفيدًا بشكل خاص). باستخدام أسلوب تكامل عددي، يكون طول القوس

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + (\cos x)^2}\,dx \approx 3.8202$$ ■

وحتى لأي منحنيات بسيطة للغاية، يمكن أن يمثّل إيجاد قيمة تكامل طول القوس بالضبط تحديًا كبيرًا.

المثال 4.2 تقدير طول قوس

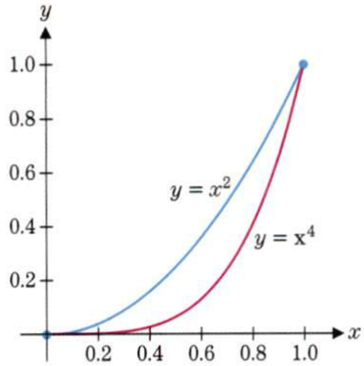
أوجد طول قوس لجزء من منحنى $y = x^2$ مع $0 \le x \le 1$.

الحل باستخدام قانون طول القوس (4.1)، نجد أنّ

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\,dx \approx 1.4789$$

حيث أوجدنا قيمة التكامل عدديًا مرة أخرى. (في هذه الحالة، يمكنك إيجاد دالة أصلية باستخدام تقنية متطورةفي الدرس 6.3 وإيجاد قيمة التكامل بالضبط باعتبارها $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{5}+2)}{4}$). ■

يبدو التمثيلان البيانيان لـ $y = x^2$ و $y = x^4$ متماثلين بشكل يثير الدهشة على الفترة [0, 1]. (انظر الشكل 8.36). يربط كلاهما النقطتين (0, 0) و (1, 1) وتتزايد قيمتهما ويصبحان مقعرين لأعلى. إذا قمت بتمثيلهما على التوازي، ستلاحظ أنّ $y = x^4$ تبدأ بشكل أكثر تسطيحًا ثم تصبح أكثر انحدارًا بدايةً من حوالي $x = 0.7$ فما فوق. (حاول إثبات أنّ هذا صحيح!) يقدّم لنا طول القوس طريقة واحدة لتحديد أوجه الاختلاف بين التمثيلين البيانيين.



الشكل 8.36

$y = x^4$ و $y = x^2$

المثال 4.3 مقارنة أطوال القوس لدوال القوة

أوجد طول القوس لجزء من المنحنى $y = x^4$ مع $0 \le x \le 1$ وقارنه بطول قوس جزء من المنحنى $y = x^2$ على الفترة نفسها.

الحل من (4.1)، يعطى طول القوس لـ $y = x^4$ بالصيغة:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (4x^3)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 16x^6}\, dx \approx 1.6002$$

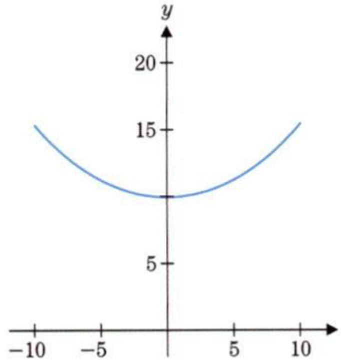
لاحظ أنّ طول القوس هذه تزيد بنسبة 8% عن طول القوس على منحنى $y = x^2$، كما وجدناها في المثال 4.2. ■

في التمارين، سيُطلب منك استكشاف هذا التوجه في أطوال جزء من المنحنيات $y = x^6$ ، $y = x^8$ وما إلى ذلك، على الفترة [0, 1]. هل يمكنك الآن أن تخمّن ماذا يحدث لطول القوس لجزء من منحنى $y = x^n$، على الفترة [0, 1]، عندما $n \to \infty$ ؟

يمكن أن يكون الاستخدام اليومي لكلمات مثل الطول غامضة ومضللة. على سبيل المثال، يشير طول رمية قرص هوائي عادةً إلى المسافة الأفقية المقطوعة، وليس طول قوس المسار الذي قطعه القرص الهوائي. من ناحية أخرى، على فرض أنّك تحتاج إلى تعليق لافتة بين عمودين البعد بينهما 20 مترًا. في هذه الحالة، ستحتاج إلى أكثر من 20 مترًا من الحبال حيث إنّ طول الحبل المطلوب محدّد من خلال طول القوس، بدلًا من المسافة الأفقية.

المثال 4.4 حساب طول كابل معلق بين عمودين

لربط كابل بين عمودين متساويين في الارتفاع والبعد بينهما 20 مترًا. يمكن توضيح أنّ مثل هذا الكابل المعلق معادلته سلسلة، وعمومًا معادلته $y = a\cosh x/a = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$. في هذه الحالة، على فرض أنّ الكابل يتخذ شكل $y = 5(e^{x/10} + e^{-x/10})$، لأجل $-10 \le x \le 10$، كما هو ظاهر في الشكل 8.37. كم يبلغ طول هذا الكابل؟



الشكل 8.37

$y = 5(e^{x/10} + e^{-x/10})$

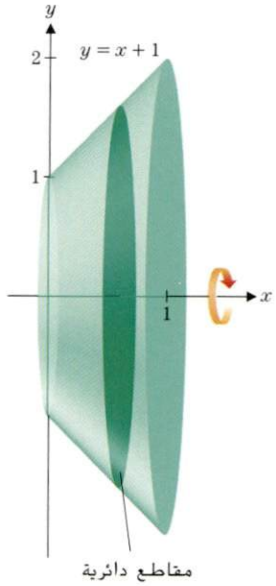
الحل من (4.1)، يعطى طول القوس من المنحنى بالصيغة:

$$\begin{aligned} s &= \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + \left(\frac{e^{x/10}}{2} - \frac{e^{-x/10}}{2}\right)^2}\, dx \\ &= \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{x/5} - 2 + e^{-x/5})}\, dx \\ &= \int_{-10}^{10} \sqrt{\frac{1}{4}(e^{x/5} + 2 + e^{-x/5})}\, dx \\ &= \int_{-10}^{10} \sqrt{\frac{1}{4}(e^{x/10} + e^{-x/10})^2}\, dx \\ &= \int_{-10}^{10} \frac{1}{2}(e^{x/10} + e^{-x/10})\, dx \\ &= 5(e^{x/10} - e^{-x/10})\Big|_{x=-10}^{x=10} \\ &= 10(e - e^{-1}) \\ &\approx 23.504 \text{ m} \end{aligned}$$

والذي يقابل المسافة الأفقية 20 مترًا بالإضافة إلى حوالي 3.5 مترًا من الطول المرتخي■

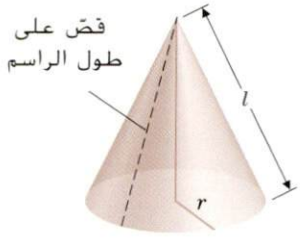
مساحة السطح

في الدرسين 8.2 و 8.3، تعلمنا كيفية حساب حجم مجسّم بتدوير منطقة ثنائية الأبعاد حول محور ثابت. بالإضافة إلى ذلك، نود في العادة تحديد مساحة السطح الذي يتكوّن بالدوران. على سبيل المثال، عند تدوير المستقيم $y = x + 1$، لكل $0 \le x \le 1$، حول المحور x، السطح المكوّن هو الجزء الأدنى من مخروط دائري قائم حيث يقطع الجزء الأعلى منه بمستوى مواز للقاعدة، كما هو موضّح في الشكل 8.38.



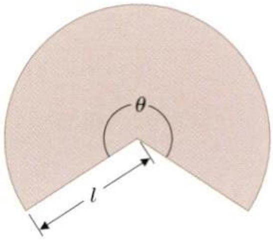
الشكل 8.38

$y = x^4$ و $y = x^2$



الشكل 8.39a

مخروط دائري قائم



الشكل 8.39b

مخروط مسطح

سطح الدوران

نجد أولًا مساحة السطح المنحني لمخروط دائري قائم. في الشكل 8.39a، نبيّن مخروطًا دائريًا قائمًا لنصف قطر القاعدة r **والراسم** l. (كما سترى لاحقًا، يُعد أكثر ملاءمة في هذا السياق تحديد الإختلاف بين الراسم والارتفاع). إذا قصينا المخروط على طول الراسم وقمنا بتسطيحه، نحصل على القطاع الدائري الموضّح في الشكل 8.39b. لاحظ أنّ مساحة السطح المنحني للمخروط هي نفسها مساحة A للقطاع الدائري. هذه مساحة دائرة بنصف قطر l مضروبة في كسر الدائرة الذي يتضمن: θ من 2π راديان ممكنة أو

$$A = \pi(\overset{\text{نصف قطر}}{\qquad\qquad})^2 \frac{\theta}{2\pi} = \pi l^2 \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{2} l^2 \tag{4.2}$$

المشكلة الوحيدة في هذه الحالة هو أننا لا نعرف قيمة θ. مع ذلك، لاحظ أنّه بالطريقة التي أنشأنا بها القطاع (أي من خلال تسطيح المخروط)، كان محيط القطاع هو نفسه محيط قاعدة المخروط. أي إنّ،

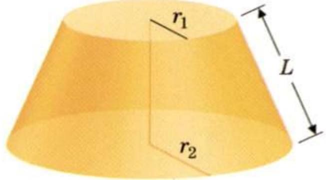
$$2\pi r = 2\pi l \frac{\theta}{2\pi} = l\theta$$

وبالقسمة على l يعطي

$$\theta = \frac{2\pi r}{l}$$

من (4.2)، تكون إذًا مساحة السطح المنحني للمخروط

$$A = \frac{\theta}{2} l^2 = \frac{\pi r}{l} l^2 = \pi r l$$



الشكل 8.40

مقطع من مخروط

تذكّر أنّنا كنا مهتمين في الأصل بإيجاد مساحة السطح لجزء فقط من مخروط دائري قائم. (راجع الشكل 8.38). لأجل مقطع من مخروط موضّح في الشكل 8.40، تعطى مساحة السطح المنحني بالصيغة :

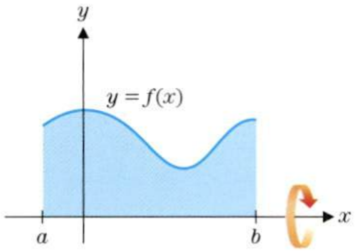
$$A = \pi(r_1 + r_2)L$$

يمكنك إثبات ذلك بطرح مساحة السطح المنحني لمخروطين، حيث يجب عليك استخدام مثلثات مشابهة لإيجاد ارتفاع المخروط الأكبر الذي يتم قصّ المخروط الناقص منه. نترك تفاصيل ذلك كتمرين.

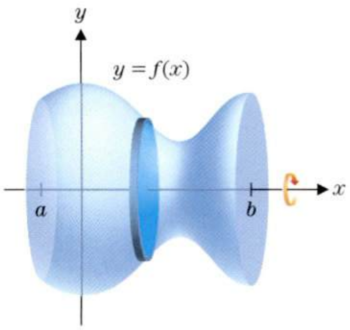
بالعودة إلى المسألة الأصلية لدوران المستقيم $y = x + 1$ على الفترة $[0, 1]$ حول المحور x (الظاهر في الشكل 8.38)، يوجد لدينا $r_1 = 1$، $r_2 = 2$ و $L = \sqrt{2}$ (نظرية فيثاغورس). تكون قيمة مساحة السطح المنحني إذًا

$$A = \pi(1 + 2)\sqrt{2} = 3\pi\sqrt{2} \approx 13.329$$

للمسألة العامة عند إيجاد مساحة السطح المنحني لدوران مساحة، لنأخذ الحالة حيث $f(x) \geq 0$ وحيث تكون f متصلة على الفترة $[a, b]$ وقابلة للإشتقاق على (a, b). إذا قمنا بدوران التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ حول المحور x على الفترة $[a, b]$ (انظر الشكل 8.41a)، نحصل على سطح الدوران الظاهر في الشكل 8.41b.

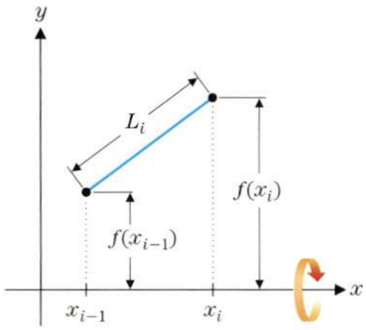


الشكل **8.41a**



الدوران حول المحور x

الشكل **8.41b**



الشكل **8.42**

الدوران حول المحور x

سطح الدوران

وكما فعلنا في العديد من المرات الى الآن، نجزّىء الفترة $[a, b]$ إلى n أجزاء متساوية الحجم: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$، حيث $\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$، لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. على كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$، يمكننا تقريب المنحنى بالقطعة المستقيمة التي تربط النقطتين $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ و $(x_i, f(x_i))$، كما يوجد في الشكل 8.42. لاحظ أنّ دوران هذه القطعة المستقيمة حول المحور x ينشأ عنه مقطع لمخروط. ستعطينا مساحة سطح مقطع المخروط تقريبًا لمساحة السطح على الفترة $[x_{i-1}, x_i]$. أولًا، لاحظ أنّ الراسم لمقطع المخروط هو

$$L_i = d\{(x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i))\} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

من قانون المسافة المستخدم. نظرًا لفرضياتنا على f، يمكننا تطبيق نظرية القيمة المتوسطة للحصول على:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

لبعض الأعداد $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$. يعطينا ذلك

$$L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x}$$

قيمة المساحة S_i لهذا الجزء من السطح على الفترة $[x_{i-1}, x_i]$ هي تقريبًا مساحة سطح قطع المخروط،

$$S_i \approx \pi[f(x_i) + f(x_{i-1})]\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x$$
$$\approx 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x$$

بما أنّ Δx هي صغيرة

$$f(x_i) + f(x_{i-1}) \approx 2f(c_i)$$

بتكرار هذا البرهان لكل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$، $i = 1, 2, \ldots, n$، يعطينا تقريبًا لمساحة السطح الكلية S،

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x$$

كلما كبرت n، يقترب هذا التقريب إلى مساحة السطح الفعلية،

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x$$

إنّ التعرف على هذا باعتباره النهاية لمجموع ريمان يعطينا التكامل

مساحة سطح مجسّم ناتج عن التدوير

$$\boxed{S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx,} \qquad (4.3)$$

حيثما يوجد التكامل.

يجب عليك ملاحظة أنّ العامل $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$ في المكامل الموجود في (4.3) يناظر طول قوس الجزء الصغير من منحنى $y = f(x)$، بينما العامل $2\pi f(x)$ يناظر محيط المجسّم الناتج عن التدوير. ينبغي أن يكون لذلك معنى إليك، كما يأتي لأي قطعة صغيرة من المنحنى، إذا قرّبنا مساحة السطح بتدوير القطعة المستقيمة الصغيرة من المنحنى لنصف القطر $f(x)$ حول المحور x، تكون مساحة السطح المتولّد هي ببساطة مساحة سطح أسطوانة

$$S = 2\pi rh = 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

وفيما يبلغ نصف قطر مثل هذه القطعة الأسطوانية الصغيرة $f(x)$، يكون إرتفاع الأسطوانة $h = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$. لا شك في أنّه من الأفضل التفكير في قانون مساحة السطح بهذه الطريقة بدلًا من مجرد حفظ القانون.

ملحوظة 4.2

يوجد عدد قليل بشكل استثنائي من الدوال f حيث يمكن حساب التكامل في (4.3) بالضبط. لا تقلق؛ يوجد لدينا تكامل عددي لمثل تلك الحالات فقط.

المثال 4.5 حساب مساحة السطح

أوجد مساحة سطح متولّد من تدوير منحنى $y = x^4$، لكل $0 \le x \le 1$، حول المحور -x.

الحل باستخدام قانون مساحة السطح (4.3)، لدينا:

$$S = \int_0^1 2\pi x^4 \sqrt{1 + (4x^3)^2}\, dx = \int_0^1 2\pi x^4 \sqrt{1 + 16x^6}\, dx \approx 3.4365$$

حيث استخدمنا طريقة عددية لتقريب قيمة التكامل. ■

التمارين 8.4

تمارين كتابية

1. اشرح لفظياً كيفية اشتقاق تكامل طول القوس من تقريب أطوال قطع مستقيمة قاطعة.

2. اشرح لمَ ناتج جمع أطوال القطع المستقيمة في الشكل 8.34b أصغر من طول قوس المنحنى في الشكل 8.34a.

3. ناقش إذا كان تكامل طول القوس يُطلق عليه قانون أو تعريف بشكل أكثر دقة (أي، هل يمكنك تعريف طول المنحنى بالضبط بدون استخدام التكامل؟).

4. على فرض أنّك قمت بالتمثيل البياني لشبه المنحرف المحدّد بـ $y = x + 1$، $y = -x - 1$، $x = 0$ و $x = 1$ ثم قمت بتقطيعه ولفه. اشرح سبب عدم حصولك على الشكل 8.38. (إرشاد: قارن بين المساحات وفكّر بتمعن في الشكلين 8.39a و 8.39b).

في التمارين 4–1، قرّب طول المنحنى باستخدام n قطع مستقيمة قاطعة حيث $n = 2$ ؛ $n = 4$.

1. $y = x^2, 0 \le x \le 1$ **2.** $y = x^4, 0 \le x \le 1$

3. $y = \cos x, 0 \le x \le \pi$ **4.** $y = \ln x, 1 \le x \le 3$

في التمارين 14–5، احسب طول المنحنى بدقة.

5. $y = 2x + 1, 0 \le x \le 2$

6. $y = \sqrt{1 - x^2}, -1 \le x \le 1$

7. $y = 4x^{3/2} + 1, 1 \le x \le 2$

8. $y = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x}), 0 \le x \le 1$

9. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, 1 \le x \le 2$

10. $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}, 1 \le x \le 3$

11. $x = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{4y^2}, -2 \le y \le -1$

12. $x = e^{y/2} + e^{-y/2}, -1 \le y \le 1$

13. $y = \frac{1}{3}x^{3/2} - x^{1/2}, 1 \le x \le 4$

14. $y = 2\ln(4 - x^2), 0 \le x \le 1$

في التمارين 22–15، ضع تكامل طول المنحنى ثم قرّب التكامل باستخدام طريقة عددية.

15. $y = x^3, -1 \le x \le 1$ **16.** $y = x^3, -2 \le x \le 2$

17. $y = 2x - x^2, 0 \le x \le 2$

18. $y = \tan x, 0 \le x \le \pi/4$

19. $y = \cos x, 0 \le x \le \pi$

20. $y = \ln x, 1 \le x \le 3$

21. $y = \int_0^x u \sin u \, du, 0 \le x \le \pi$

22. $y = \int_0^x e^{-u} \sin u \, du, 0 \le x \le \pi$

.23 عند تعليق حبل بين عمودين البعد بينهما 40 مترًا. إذا كان الحبل يبدو أنّه يتخذ شكل سلسلة معادلته $y = 10(e^{x/20} + e^{-x/20})$، $-20 \le x \le 20$ فاحسب طول الحبل.

.24 عند تعليق حبل بين عمودين البعد بينهما 60 مترًا. إذا كان الحبل يبدو أنّه يتخذ شكل سلسلة معادلته $y = 15(e^{x/30} + e^{-x/30})$، $-30 \le x \le 30$ فاحسب طول الحبل.

.25 في المثال 4.4، احسب قيمة "الارتخاء" الموجودة في الكابل- التي تشكّل الفرق بين قيم y في الوسط $(x = 0)$ وعند العمودين $(x = 10)$. على أساس ذلك، هل كان حساب طول المنحنى مثيرًا للدهشة؟

.26 ارسم واحسب طول شكل **نجمي** معرف بالمعادلة $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

.27 لأجل $y = x^6$، $y = x^8$ و $y = x^{10}$، احسب طول القوس لكل $0 \le x \le 1$. باستخدام النتائج من المثالين 4.2 و 4.3، حدّد نمط طول $y = x^n$، $0 \le x \le 1$، عندما تتزايد قيمة n. خمّن النهاية عندما $n \to \infty$.

.28 (a) للمساعدة في فهم نتيجة التمرين 27، حدّد $\lim_{n\to\infty} x^n$ لكل $0 \le x < 1$. احسب طول هذا المنحنى عند النهاية. أربط هذا المنحنى بنقطة النهاية $(1, 1)$، ما هو الطول الكلي؟

(b) أثبت أنّ $y = x^4$ مسطّحة اكثر من $y = x^2$ لكل $0 < x < \sqrt{1/2}$وأكثر انحدارًا لكل $x > \sqrt{1/2}$. قارن بين سطح وانحدار كلاً من $y = x^6$ و $y = x^4$.

في التمارين 29–36، ضع التكامل لمساحة السطح الناتج من التدوير وقرّب التكامل باستخدام طريقة عددية.

.29 $y = x^2$، $0 \le x \le 1$، تم دورانها حول المحور x

.30 $y = \sin x$، $0 \le x \le \pi$، تم دورانها حول المحور x

.31 $y = 2x - x^2$، $0 \le x \le 2$، تم دورانها حول المحور x

.32 $y = x^3 - 4x$، $-2 \le x \le 0$، تم دورانها حول المحور x

.33 $y = e^x$، $0 \le x \le 1$، تم دورانها حول المحور x

.34 $y = \ln x$، $1 \le x \le 2$، تم دورانها حول المحور x

.35 $y = \cos x$، $0 \le x \le \pi/2$، تم دورانها حول المحور x

.36 $y = \sqrt{x}$، $1 \le x \le 2$، تم دورانها حول المحور x

في التمرينين 37 و 38، احسب طول القوس L_1 للمنحنى وطول L_2 للمستقيم القاطع الذي يربط نقاط النهاية بالمنحنى. احسب النسبة L_2/L_1؛ كلما كان هذا العدد قريبًا من 1، يقترب المنحنى من ان يكون خطأ مستقيماً.

37. (a) $y = \sin x, -\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{6}$ (b) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

38. (a) $y = e^x, 3 \le x \le 5$ (b) $-5 \le x \le -3$

.39 (a) على فرض أنّه تم دوران المربع المكون من جميع (x, y) مع $-1 \le x \le 1$ و $-1 \le y \le 1$ حول المحور y. احسب مساحة السطح.

(b) على فرض أنّه تمّ تدوير الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ حول المحور y. احسب مساحة السطح.

(c) على فرض أنّه تمّ تدوير المثلث رؤوسه $(-1, -1)$ و $(0, 1)$ و $(1, -1)$ حول المحور y احسب مساحة السطح.

(d) ارسم المربع والدائرة والمثلث في الأجزاء (a)-(c) على المحاور نفسها. أثبت أنّ مساحات السطح النسبية للمجسّمات التي تم تدويرها (الأسطوانية والكروية والمخروطية، على الترتيب) تكون τ:2:3، حيث يكون **المتوسط الحسابي الذهبي** المعرَّف بواسطة $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

.40 إشتق القوانين العامة لمساحة السطح لـ (a) أسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها r وارتفاعها h و (b) كرة نصف قطرها r و (c) مخروط نصف قطره r وارتفاعه h.

التطبيقات

.41 يسير شخصان في مسارين مختلفين بدءًا من نقطة الأصل. ويكون لهما الإحداثي x الموجب نفسه عند كل زمن. يتبع أحدهما المحور x الموجب ويتبع الآخر $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$. (a) أوجد النقطة التي بلغت فيها المسافة التي اجتازها أحدهما ضعف المسافة التي اجتازها الآخر. (b) لتكن $f(t)$ هي المسافة التي اجتازها على طول $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ لكل $0 \le x \le t$. احسب $f'(t)$ واستخدمه لتحديد في أي نقطة تساوي نسبة سرعات السائرين 2. (اقترح ذلك تيم بينينجز).

.42 (a) تم تحديد **التكامل الناقص من النوع الثاني** بواسطة $\text{EllipticE}(\phi, m) = \int_0^\phi \sqrt{1 - m\sin^2 u}\, du$. بالعودة إلى المثال 4.1، أشارت العديد من CAS أنّ $\sqrt{2}\,\text{EllipticE}(x, \frac{1}{2})$ تُعتبر دالة أصلية لـ $\sqrt{1 + \cos^2 x}$. تحقق من كون هذا هو دالة أصلية.

(b) أشارت العديد من CASs إلى الدالة الأصلية الآتية:

$$\int \sqrt{1 + 16x^6}\, dx = \frac{1}{4}x\sqrt{1 + 16x^6} + \int \frac{3/4}{\sqrt{1 + 16x^6}}\, dx.$$

تحقق من كون هذا هي دالة اصلية.

.43 يتبع ركل كرة وإسقاطها مسار $y = \frac{1}{15}x(60 - x)$ مترًا.. ارسم تمثيلًا بيانيًا. كم بلغت المسافة التي قطعتها ركلة الكرة أفقيًا؟ كم بلغ ارتفاعها؟ احسب طول القوس. إذا استمر مكوث الكرة في الهواء لمدة 4 ثوان، كم بلغ متوسط السرعة المتجهة للكرة؟

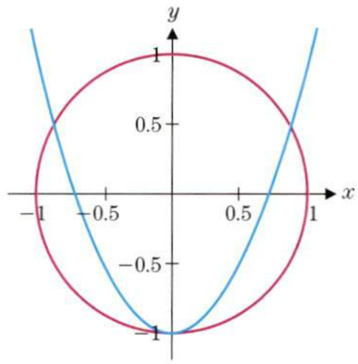
.44 يتبع رمي لاعب دفاع لكرة بيسبول مسار $y = \frac{1}{300}x(100 - x)$ مترًا. ارسم تمثيلًا بيانيًا. كم بلغت المسافة التي قطعتها الكرة أفقيًا؟ كم بلغ ارتفاعها؟ احسب طول القوس. اشرح سبب احتياج لاعب البيسبول إلى طول قوس صغير، بينما يحتاج لاعب كرة القدم في التمرين 43 طول قوس كبير.

تمارين استكشافية

.1 في هذا التمرين، سوف تستكشف مفارقة شهيرة (تُسمى عادةً بوق جبريل). على فرض أنّ المنحنى $y = 1/x$، لكل $1 \le x \le R$ (حيث R عدد ثابت موجب كبير)، يتم تدويره حول المحور x. احسب الحجم ومساحة السطح الداخليين للسطح الناتج.

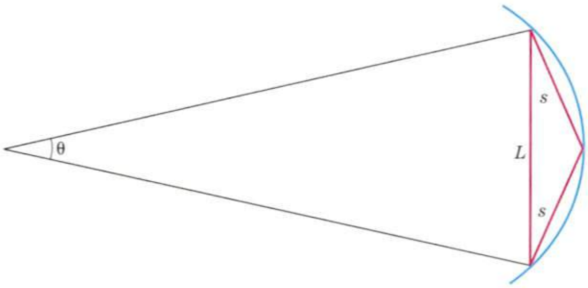
(في كلتا الحالتين، يمكن إيجاد دوال أصلية، على الرغم من إمكانية احتياجك لمساعدة من CAS الخاصة بك للحصول على مساحة السطح). أوجد النهاية للحجم ومساحة السطح عندما $R \to \infty$. والآن لأجل المفارقة. استنادًا إلى إجاباتك، ينبغي أن يكون لديك مجسّم له حجم منتهي، لكن له مساحة سطح غير منتهية وبالتالي، قد يكون المجسّم ثلاثي الأبعاد ممتلئًا بالكامل بكمية منتهية من الطلاء ولكن السطح الخارجي لا يمكن طلاؤه بالكامل على الإطلاق.

2. لتكن C هو جزء القطع المكافئ $y = ax^2 - 1$ داخل الدائرة $x^2 + y^2 = 1$.



أوجد قيمة $a > 0$ التي تحقق قيمة عظمى لطول القوس C.

3. يوضّح الشكل قوس دائرة تحصره زاوية θ، بوتر طوله L ووترين طولهما s. بيّن أنّ $2s = \dfrac{L}{\cos(\theta/4)}$.



ابدأ بربع دائرة واستخدم هذه الصيغة بشكل متكرر لاشتقاق الناتج غير المحدود

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\cdots = \frac{2}{\pi}$$

حيث يمثّل الجانب الأيسر $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}\ldots\cos\frac{\pi}{4}\right)$.

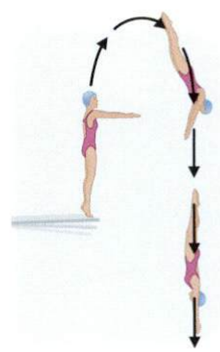
الدرس 8-5 حركة المقذوفات

في الدروس 2.1 و 2.3 و 4.1، ناقشنا مظاهر حركة جسم يتحرك في مسار مستقيم (حركة مستقيمة). ورأينا أنّه إذا علمنا بدالة تصف موقع جسم في أي زمن t إذًا يمكننا تحديد سرعته المتجهة وتسارعه بالإشتقاق. وهناك مسألة أكثر أهمية وهي الرجوع إلى الخلف. وهذا، لإيجاد الموقع والسرعة المتجهة لجسم ما، إذا كان التسارع معطى. في الرياضيات، يعني هذا أنّه، بدءًا من مشتقة دالة، يجب علينا أن نجد الدالة الأصلية. والآن بعد أن أصبح لدينا تكامل في حوزتنا، يمكننا تحقيق ذلك بكل سهولة.

قد تكون على دراية **بقانون نيوتن الثاني للحركة** والذي ينص على

$$F = ma$$

حيث يكون F هو مجموع القوى المؤثرة على جسم ما و m هو كتلة الجسم و a هو تسارع الجسم.



ابدأ بأن تتخيل أنّك تغوص. القوى الأساسية المؤثرة عليك خلال عملية الغوص هي الجاذبية. القوة الناتجة عن الجاذبية هي الوزن الخاص بك، والذي يرتبط بالكتلة بواسطة $W = mg$، حيث g هي ثابت الجاذبية. (قيم التقريب الشائعة لـ g، الدقيقة بالقرب من مستوى سطح البحر، هي 9.8 m/s^2). للإبقاء على بساطة المسألة في الرياضيات، سوف نتجاهل أي قوى أخرى، مثل مقاومة الهواء.

لتكن $h(t)$ تمثّل ارتفاعك فوق المياه بعد t ثوان من بدء غوصك. إذًا القوة الناتجة عن الجاذبية هي $F = -mg$، حيث تدل إشارة السالب إلى أنّ القوة تؤثر لأسفل على الجسم، في الاتجاه السالب. من عملنا السابق، نعلم أنّ التسارع هو $a(t) = h''(t)$. يعطينا قانون نيوتن الثاني إذًا $-mg = mh''(t)$ أو

$$h''(t) = -g$$

لاحظ أنّ دالة الموقع الخاصة بأي جسم (بغض النظر عن كتلته) تخضع للجاذبية ولن تلائم أي قوى

أخرى المعادلة نفسها. تُعد الاختلافات الوحيدة من موقف لآخر هي الشروط الابتدائية (السرعة المتجهة الابتدائية والموقع الابتدائي) والأسئلة التي يتم طرحها.

المثال 5.1 إيجاد السرعة المتجهة لغواص عند الاصطدام

إذا كان ارتفاع لوح الغطس 4.5 مترًا فوق مستوى سطح المياه وبدأ الغواص بسرعة متجهة ابتدائية 2.4 m/s (في اتجاه لأعلى). كم بلغت السرعة المتجهة للغواص عند الاصطدام (بافتراض عدم وجود مقاومة هواء)؟

الحل إذا أعطي الارتفاع (بالمتر) عند الزمن t بالدالة $h(t)$. يعطينا قانون نيوتن الثاني $h''(t) = -9.8$.
بما ان الغوّاص انطلق من ارتفاع 4.5 مترًا فوق سطح المياه بسرعة ابتدائية 2.4 m/s. يوجد لدينا الشروط الابتدائية $h(0) = 4.5$ و $h'(0) = 2.4$. إيجاد $h(t)$ يتطلب الآن أكثر قليلًا من تكامل أولي. لدينا

$$\int h''(t)\,dt = \int -9.8\,dt$$

أو

$$h'(t) = -9.8t + c$$

من السرعة المتجهة الابتدائية ، لدينا

$$2.4 = h'(0) = -9.8(0) + c = c$$

حيث إنّ $c = 2.4$ والسرعة المتجهة في أي زمن t تعطى بالصيغة:

$$h'(t) = -9.8t + 2.4$$

لإيجاد السرعة المتجهة عند التصادم، تحتاج أولًا إلى إيجاد زمن التصادم. لاحظ أنّ الغواص سيصطدم بالمياه عند $h(t) = 0$ (أي، عندما يكون الارتفاع فوق المياه قيمته 0).

يعطينا تكامل دالة السرعة المتجهة دالة الارتفاع:

$$\int h'(t)\,dt = \int (-9.8t + 2.4)\,dt$$

أو

$$h(t) = -4.9t^2 + 2.4t + c$$

من الارتفاع الابتدائي، لدينا

$$4.5 = h(0) = -4.9(0)^2 + 2.4(0) + c = c$$

حيث إنّ $c = 4.5$ والارتفاع فوق مستوى المياه في أي زمن t يعطى بالصيغة:

$$h(t) = -4.9t^2 + 2.4t + 4.5$$

يحدث الإصطدام حينذاك عندما

$$0 = h(t) = -4.9t^2 + 2.4t + 4.5$$

حيث إنّ $t = 1.2$ هو زمن الأصطدام. (تجاهل الحل الدخيل $t = -0.7$). عندما يكون $t = 1.2$، تكون السرعة المتجهة $h'(1.2) = -9.36(1.2) + 2.4 = -9.36$ m/s (السرعة المتجهة عند الاصطدام). لوضع تلك القيم في وحدات متعارف عليها بشكل أكبر للسرعة المتجهة، اضرب في 3600/1000 للتحويل لوحدة كيلومترات في الساعة. في هذه الحالة، تبلغ السرعة المتجهة عند الاصطدام حوالي 34 km/h. (أنت غالبًا لا ترغب في الغوص في موقع خاطئ بتلك السرعة!) ■

في المثال 5.1، تدل إشارة سالب للسرعة المتجهة إلى أنّ الغواص كان يغوص لأسفل. في العديد من المواقف، تُعد الحركات إلى الأعلى وإلى الأسفل مهمة.

المثال 5.2 معادلة الحركة الرأسية لكرة

تم قذف كرة للأعلى بشكل مستقيم من الأرض بسرعة متجهة ابتدائية 19.6 m/s. بتجاهل مقاومة الهواء، أوجد معادلة لارتفاع الكرة عند أي زمن t. وأيضًا حدّد القيمة العظمى للإرتفاع ومقدار الزمن الذي قطعته الكرة في الهواء.

الحل مع الجاذبية على انّها القوة الوحيدة، الارتفاع $h(t)$ يحقق $h''(t) = -9.8$. الشروط الابتدائية هي $h'(0) = 64$ و $h(0) = 0$. لدينا إذًا

$$\int h''(t)\,dt = \int -9.8\,dt$$

أو

$$h'(t) = -9.8t + c$$

من السرعة المتجهة الابتدائية ، لدينا

$$19.6 = h'(0) = -9.8(0) + c = c$$

ومنه،

$$h'(t) = 19.6 - 9.8t$$

التكامل مرة أخرى يعطينا

$$\int h'(t)\,dt = \int (19.6 - 9.8t)\,dt$$

أو

$$h(t) = 19.6t - 4.9t^2 + c$$

من الارتفاع الابتدائي لدينا

$$0 = h(0) = 19.6(0) - 4.9(0)^2 + c = c$$

لذا،

$$h(t) = 19.6t - 4.9t^2$$

بما أنّ دالة الارتفاع هي تربيعية، تحدث القيمة العظمى عند الزمن حيث $h'(t) = 0$. [يجب أيضًا إعتبار الفيزياء في الموقف، ماذا يحدث فيزيائيًا عندما تكون $h'(t) = 0$] حل $19.6 - 9.8t = 0$ يعطي $t = 2$ (الزمن عندما تتحقق القيمة العظمى للارتفاع) والارتفاع المناظر هو مترًا $h(2) = 19.6(2) - 4.9(2)^2 = 19.6$. مرة أخرى، تلامس الكرة الأرض عندما تكون $h(t) = 0$. نحل

$$0 = h(t) = 19.6t - 4.9t^2 = 4.9t(4 - t)$$

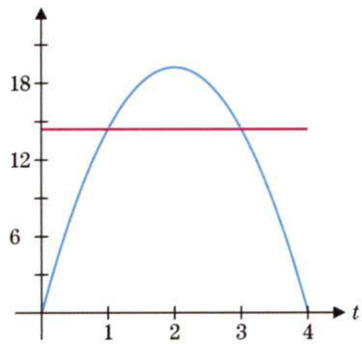
يعطي $t = 0$ (زمن قذف الكرة) و $t = 4$ (زمن ملامسة الكرة للأرض). بالتالي يبلغ زمن انطلاق الكرة في الهواء 4 ثوان. ■

اليوم في الرياضيات

فلاديمير أرنولد (1937 –)

عالم رياضيات روسي له مساهمات مهمة في العديد من مجالات علم الرياضيات، على صعيد كل من مجال البحث والتفسير الرائج. يمكن أن يقاس التقدير الذي يكنّه له زملاؤه بالمؤتمر الدولي المعروف باسم "أرنولد فيست" الذي عقد في تورونتو تكريمًا لعيد ميلاده الـ60. يتم استخدام العديد من كتبه على نطاق واسع الآن، بما في ذلك مجموعة من التحديات بعنوان مسائل أرنولد.

يمكنك ملاحظة خاصيّة مثيرة للاهتمام لحركة المقذوفات من خلال التمثيل البياني لدالة الارتفاع من المثال 5.2 بالإضافة إلى المستقيم $y = 14.4$ (انظر الشكل 8.43). لاحظ أنّ التمثيلات البيانية تتقاطع عند $t = 1$ و $t = 3$. بالإضافة لذلك، تقابل الفترة الزمنية $[1, 3]$ مع نصف الفترة المستغرقة في الهواء بالضبط. لاحظ أنّ ذلك يشير إلى أنّ الكرة استقرت على أعلى ربع من ارتفاعها لنصف المدة التي استغرقتها في الهواء. قد تكون أصبت بالدهشة من كيفية قيام بعض الرياضيين بالقفز بارتفاع عال للغاية بحيث يبدو أنّهم "معلقون في الهواء". وكما تشير هذه الحسابات، يبدو أنّ جميع الأجسام تعلق في الهواء.



الشكل 8.43

ارتفاع الكرة عند الزمن t

المثال 5.3 إيجاد السرعة المتجهة الابتدائية المطلوبة لبلوغ ارتفاع معين

لقد أفادت التقارير أنّ نجم كرة السلة السابق مايكل جوردان كانت له قفزة عمودية بلغت 135 cm. بتجاهل مقاومة الهواء، ما هي السرعة المتجهة الابتدائية المطلوبة للقفز بهذا الارتفاع؟

الحل مرة أخرى، يقودنا قانون نيوتن الثاني إلى المعادلة $h''(t) = -9.8$ للارتفاع $h(t)$. نحن نطلق على السرعة المتجهة الابتدائية v_0، بحيث يكون $h'(0) = v_0$ ونبحث عن قيمة v_0 التي ستعطي قيمة عظمى لارتفاع 135 cm وكما سبق، قمنا بإجراء تكامل للحصول على

$$h'(t) = -9.8t + c$$

باستخدام السرعة المتجهة الابتدائية ، نحصل على

$$v_0 = h'(0) = -9.8(0) + c = c$$

يعطينا هذا دالة السرعة المتجهة

$$h'(t) = v_0 - 9.8t$$

بالقيام بالتكامل مرة أخرى واستخدام الموْقع الابتدائي $h(0) = 0$، نحصل على

$$h(t) = v_0 t - 4.9t^2$$

يتم تحقيق القيمة العظمى للارتفاع عندما تكون $h'(t) = 0$. (لماذا؟) إعداد

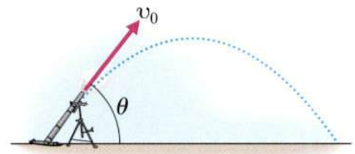
$$0 = h'(t) = v_0 - 9.8t$$

يعطينا $t = \dfrac{v_0}{9.8}$. يبلغ الارتفاع عند هذا الزمن (أي، القيمة العظمى للارتفاع) إذًا

$$h\left(\frac{v_0}{9.8}\right) = v_0\left(\frac{v_0}{9.8}\right) - 4.9\left(\frac{v_0}{9.8}\right)^2 = \frac{v_0^2}{9.8} - \frac{v_0^2}{19.6} = \frac{v_0^2}{19.6}$$

إذًا، قفزة بارتفاع $1.35\,\text{m} = 135\,\text{cm}$ تتطلب $\dfrac{v_0^2}{19.6} = 1.35$ أو $v_0^2 = 26.46$، بحيث يكون

$v_0 = \sqrt{26.46} \approx 5\text{ m/s}$ (يساوي حوالي 18.5 km/h). ■



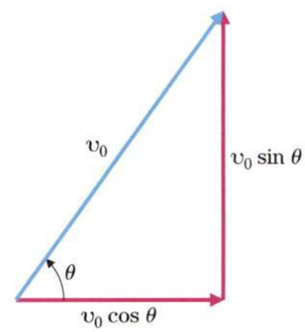
الشكل 8.44a

مسار المقذوفات

حتى الآن، لقد درسنا فقط المقذوفات التي تتحرك رأسيًا. في الواقع، يجب علينا أيضًا التفكير في الحركة في الاتجاه الأفقي. بتجاهل مقاومة الهواء، تُعتبر هذه الحسابات أيضًا واضحة نسبيًا. والفكرة هي تطبيق قانون نيوتن الثاني منفصلاً على المركّبات الأفقية والرأسية للحركة. إذا كان $y(t)$ يمثّل الموْقع الرأسي، فإذًا يوجد لدينا $y''(t) = -g$، كما سبق. بتجاهل مقاومة الهواء، لا توجد قوى مؤثرة أفقيًا على المقذوف. لذا، إذا كان $x(t)$ يمثّل الموْقع الأفقي، يعطينا قانون نيوتن الثاني $x''(t) = 0$.

تعتبر الشروط الابتدائية أكثر تعقيداً هنا. وبشكل عام، نرغب في التعامل مع المقذوفات التي يتم إطلاقها بسرعة ابتدائية v_0 بزاوية θ من المركّبة الأفقية. يبيّن الشكل 8.44a مقذوفًا تم إطلاقه بزاوية $\theta > 0$. لاحظ أنّ زاوية ابتدائية لـ $\theta < 0$ ستشير إلى سرعة متجهة ابتدائية هبوطاً.

كما هو مبيّن في الشكل 8.44b، يمكن فصل السرعة المتجهة الابتدائية إلى مركّبات أفقية ورأسية. من حساب المثلثات الأولية، تكون المركّبة الأفقية للسرعة المتجهة الابتدائية هي $v_x = v_0 \cos\theta$ والمركّبة الرأسية هي $v_y = v_0 \sin\theta$.



الشكل 8.44b

المركّبات الرأسية والأفقية للسرعة المتجهة

المثال 5.4 حركة مقذوف في بُعدين

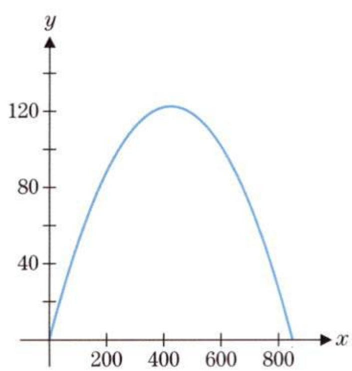
يتم إطلاق جسم أفقيًا بزاوية $\theta = \pi/6$ حيث سرعته الابتدائية $v_0 = 98\text{ m/s}$. حدّد زمن الانطلاق ومدى المقذوف (الأفقي).

الحل بدءًا بالمركّبة الرأسية للحركة (ومرة أخرى بتجاهل مقاومة الهواء). لدينا $y''(t) = -9.8$ (حيث تعطى السرعة الابتدائية بدلالة متر في الثانية). بالعودة إلى الشكل 8.44b، لاحظ أنّ المركّبة الرأسية للسرعة المتجهة الابتدائية هي $y'(0) = 98 \sin\pi/6 = 49$ والارتفاع الابتدائي هو $y(0) = 0$. تعطينا اثنان من عمليات التكامل البسيطة دالة السرعة المتجهة $y'(t) = -9.8t + 49$ ودالة الموْقع $y(t) = -4.9t^2 + 49t$. يرتطم الجسم بالأرض عندما يكون $y(t) = 0$ (أي، عندما يكون ارتفاعه فوق الأرض قيمته 0). حل

$$0 = y(t) = -4.9t^2 + 49t = 49t(1 - 0.1t)$$

يعطي $t = 0$ (زمن قذف الجسم) و $t = 10$ (زمن ملامسة الأرض). إذًا يبلغ زمن الانطلاق في الهواء 10 ثوانٍ. يتم تحديد المركّبة الأفقية للحركة من المعادلة $x''(t) = 0$ بسرعة متجهة ابتدائية $x'(0) = 98\cos\pi/6 = 49\sqrt{3}$ وموقع ابتدائي $x(0) = 0$. يعطينا التكامل $x'(t) = 49\sqrt{3}$ و $x(t) = (49\sqrt{3})t$. في الشكل 8.45، نقوم بتخطيط مسار الكرة. [يمكنك القيام بذلك باستخدام وضع التخطيط الوسيطي على حاسبة تمثيل بياني أو CAS، بإدخال معادلات حيث $x(t)$ و $y(t)$ وإعداد مدى قيم t- لتكون $0 \le t \le 10$. وبدلًا من ذلك، يمكنك بسهولة حل لـ t، للحصول على $t = \dfrac{1}{49\sqrt{3}}x$. لنجد أنّ المنحنى ببساطة هو قطع مكافئ.] يكون المدى الأفقي عندئذ هو قيمة $x(t)$ عند $t = 10$ (زمن ملامسة الأرض).

$x(10) = (49\sqrt{3})(10) = 490\sqrt{3} \approx 849$ مترًا ■



الشكل 8.55

مسار الكرة

ملحوظة 5.1

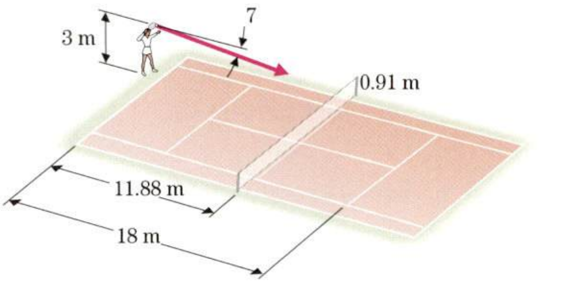
ينبغي عليك مقاومة إغراء تصغير هذا الدرس إلى بضع صيغ محفوظة. إنها حقيقة أنك إذا تجاهلت مقاومة الهواء، ستكون قيمة المركّبة الرأسية للموقع دائمًا

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t + y(0)$$

ومع ذلك، سيتحسن فهمك للعملية وفرصك في إيجاد الحل الصحيح بشكل كبير إذا بدأت كل مسألة بقانون نيوتن الثاني وقمت بإجراء التكاملات (التي ليست صعبة).

المثال 5.5 حركة ضربة تنس

فينوس وليامز واحدة من أسرع الضربات في تنس السيدات. على فرض أنّها سددت ضربة من ارتفاع 3 أمتار بسرعة ابتدائية $190\ \text{km/h}$ وبزاوية $7°$ تحت المركّبة الأفقية. تكون الضربة موجهة "داخل الحد" إذا مرت الكرة على شبكة ارتفاعها $0.91\,\text{m}$ وتبعد مسافة $11.7\ \text{m}$ وترتطم بالأرض أمام خط التسديد على بُعد $18\,\text{m}$. (نوضّح ذلك الموقف في الشكل 8.46). حدّد ما إذا كانت الضربة داخل أو خارج الحد.



الشكل 8.46

ارتفاع ضربة تنس

الحل كما في المثال 8.4، نبدأ بالحركة الرأسية للكرة. حيث تعطى المسافة بالمتر، معادلة الحركة هي $y''(t) = -9.8$. يجب تحويل السرعة الابتدائية الى متر في الثانية: $190\ \frac{1000}{3600}\ \text{m/s} = 53\ \text{m/s}$. السرعة المتجهة الابتدائية للمركّبة الرأسية إذًا $y'(0) = 53\ \ \sin(-7°) \approx -6.45\ \text{m/s}$. يعطينا التكامل إذًا

$$y'(t) = -9.8t - 6.45$$

الارتفاع الابتدائي $y(0) = 3\ \text{m}$. لذا يعطينا تكاملًا آخر

$$y(t) = -4.9t^2 - 6.45t + 3$$

تحدّد المركّبة الأفقية للحركة من $x''(t) = 0$. بسرعة متجهة ابتدائية $x'(0) = 176\cos(-7°) \approx 52.6\ \text{m/s}$ وموقع إبتدائي $x(0) = 0$. تعطينا التكاملات $x'(t) = 52.6\ \text{m/s}$ و $x(t) = 52.6\ \text{m}$. إيجازًا، لدينا

$$x(t) = 52.6t$$

$$y(t) = -4.9t^2 - 6.45t + 3$$

كي لا تصطدم الكرة بالشبكة، يجب أن تكون قيمة y على الأقل 0.91 عند $x = 11.88$. لدينا $x(t) = 11.88$ عندما تكون $52.6t = 11.88$ أو $t \approx 0.2233$. في هذا الزمن، $y(0.2233) \approx 1.3$. مما يبيّن أنّ الكرة مرتفعة بما يكفي لكي لا ترتطم بالشبكة. المطلوب ثانياً هو الحاجة إلى وجود $x \leq 18$ عند ملامسة الكرة للأرض $(y = 0)$. لدينا $y(t) = 0$ عندما تكون $-4.9t^2 - 6.45t + 3 = 0$. من الصيغة التربيعية، نحصل على $t \approx -1.7$ و $t \approx 0.3662$. بتجاهل الحل السالب، نحسب $x(0.3662) \approx 19.2$، بحيث تلامس الكرة الأرض بعد حد التسديد بحوالي 1.2 مترًا. الضربة ليست داخل الحد. ■

أحد الأسباب التي تجعلك تبدأ كل مسألة بقانون نيوتن الثاني هو أن يتسنى لك التوقف برهة للتفكير في القوى التي يتم (ولا يتم) التفكير فيها. على سبيل المثال، نكون بذلك قد تجاهلنا حتى مقاومة الهواء، كتبسيط للواقع. تكون بعض العمليات الحسابية باستخدام هذه المعادلات المبسطة دقيقة إلى حد معقول. البعض الآخر، كما هو الحال في المثال 5.6، ليست كذلك.

المثال 5.6 مثال حيث لا يمكن تجاهل مقاومة الهواء

على فرض أنّ قطرات المطر تسقط من غيمة على ارتفاع 900 مترًا فوق سطح الأرض. بتجاهل مقاومة الهواء، ما هي سرعة سقوط قطرة المطر عند ارتطامها بالأرض؟

الحل إذا أعطينا ارتفاع قطرة المطر في الزمن t بالدالة $y(t)$، من قانون نيوتن الثاني للحركة أنّ $y''(t) = -9.8$. بالإضافة إلى ذلك، لدينا السرعة المتجهة الابتدائية $y'(0) = 0$ (بما أنّ قطرة المطر تسقط كما لو أنّ تمّ قذفها) والارتفاع الابتدائي $y(0) = 900$. يعطينا التكامل واستخدام الشروط الابتدائية $y'(t) = -9.8t$ و $y(t) = 900 - 4.9t^2$. تصطدم قطرة الماء بالأرض عندما تكون $y(t) = 0$. لنضع

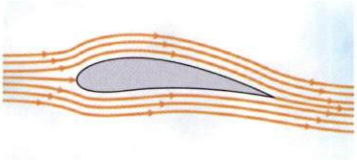
$$0 = y(t) = 900 - 4.9t^2$$

يعطينا $t = \sqrt{900/4.9} \approx 13.693$ ثوان. تكون السرعة المتجهة في هذا الزمن إذًا

$$y'(\sqrt{900/4.9}) = -9.8\sqrt{900/4.9} \approx -131.45\,\text{m/s}$$

يناظر حوالي 480 km/h ! لحسن الحظ، تلعب مقاومة الهواء هنا دورًا هامًا في سقوط قطرات المطر، التي لديها سرعة هبوط فعلية تقديرها حوالي 16 km/h.

الدرس الواضح المستفاد من المثال 5.6 هو أنّه ليس من المعقول دائمًا تجاهل مقاومة الهواء. سوف نطوّر بعض الأدوات الضرورية في الرياضيات لتحليل أكثر اكتمالًا لحركة المقذوف مع مقاومة الهواء في الوحدة 7.



الشكل 8.47

المقطع العرضي لجناح

إن مقاومة الهواء (على نحو أدق، سحب الهواء) التي تبطئ من سرعة سقوط قطرات المطر ليست سوى واحدة من الطرائق التي يمكن للهواء أن يؤثر بها على حركة أحد الأجسام. يمكن أن تتسبب **قوة ماغنوس**، الناتجة عن دوران جسم ما أو عدم تماثل شكل جسم ما، في تغيّر اتجاهات ومنحنى الجسم. ولعل المثال الأكثر شيوعًا لقوة ماغنوس يحدث على متن طائرة. يعد جانب واحد من جناحي الطائرة منحنياً والجانب الآخر مسطحًا نسبيًا. (انظر الشكل 8.47). يسبب عدم التماثل يتحرّك الهواء فوق أعلى الجناح بسرعة اكثر من تحركه أسفل الجناح. وهذا ينتج قوة ماغنوس في الاتجاه إلى الأعلى (الصعود)، ارتفاع الطائرة في الهواء.

وهناك مثال أكثر بساطة لقوة ماغنوس يحدث في رمية بيسبول غير عادية تسمى قذيفة الكرة الجنونية. لإلقاء هذه الرمية، يمسك الرامي الكرة بأنامله ويلقي الكرة بأقل قدر ممكن من الدوران. يزعم لاعبو البيسبول بأنّ قذيفة الكرة الجنونية "تدور" بشكل لا يمكن التنبؤ به ومن الصعب للغاية تسديدها أو التقاطها. لا يوجد اتفاق كامل حتى الآن على سبب تحرك قذيفة الكرة الجنونية بشكل كبير، لكننا سنقدم نظرية حالية واحدة لعالمي الفيزياء روبرت واتس وتيري باهيل.

تنظيم كرة البيسبول.
الخياطة الظاهرة

تمت خياطة غطاء كرة البيسبول بغرز مرتفعة قليلًا عن بقية الكرة. تعمل هذه الغرز المنحنية كجناح طائرة، مما يشكل قوة ماغنوس التي تؤثر على الكرة. يعتمد اتجاه قوة ماغنوس على التوجه الدقيق لغرز الكرة. تشير قياسات واتس وباهيل إلى أنّ القوة الجانبية (اليسار/اليمين من وجهة نظر الرامي) هي حوالي $F_m = -0.45\sin(4\theta)$ N. حيث θ هي زاوية (بالراديان) موقع الكرة عند دورانها من موقع انطلاق محدّد.

بما أنّ الجاذبية لا تؤثر على الحركة الجانبية للكرة، القوة الوحيدة المؤثرة على الكرة جانبيًا هي قوة ماغنوس. يعطي قانون نيوتن الثاني المطبق على الحركة الجانبية لقذيفة الكرة الجنونية $mx''(t) = -0.45\sin(4\theta)$. تبلغ كتلة كرة البيسبول حوالي 0.098 kg. لدينا الآن

$$x''(t) = -4.5\sin(4\theta)$$

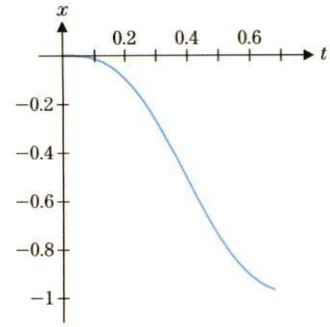
تدور الكرة بمعدل ω راديان في الثانية. إذًا $4\theta = 4\omega t + \theta_0$، حيث تعتمد الزاوية الابتدائية θ_0 على أين سيمسك الرامي بالكرة. لدينا إذًا

$$x''(t) = -4.5\sin(4\omega t + \theta_0) \tag{5.1}$$

مع شروط ابتدائية $x'(0) = 0$ و $x(0) = 0$. للحصول على سرعة قذيفة كرة جنونية عادية تبلغ 96 km/h، يستغرق الأمر 0.68 ثانية للرمية لتصل إلى اللوحة الرئيسة..

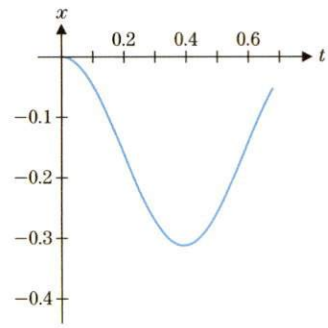
المثال 5.7 معادلة لحركة قذيفة جنونية

لمعدل دوران $\omega = 2$ راديان في الثانية مع $\theta_0 = 0$، أوجد معادلة الحركة الجانبية لقذيفة جنونية ومثّلها بيانيًا لكل $0 \le t \le 0.68$. كرّر ذلك لأجل $\theta_0 = \pi/2$.



الشكل 8.48a

الحركة الجانبية لقذيفة كرة جنونية حيث $\theta_0 = 0$



الشكل 8.48b

الحركة الجانبية لقذيفة كرة جنونية حيث $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

الحل لأجل $\theta_0 = 0$. يعطينا قانون نيوتن الثاني $x''(t) = -10 \sin 8t$. من (5.1). يعطينا التكامل واستخدام الشرط الابتدائي $x'(0) = 0$

$$x'(t) = -\frac{10}{8}[-\cos 8t - (-\cos 0)] = 1.25(\cos 8t - 1)$$

وبالتكامل مرة أخرى واستخدام الشرط الثاني $x(0) = 0$. نحصل على

$$x(t) = 1.25\left(\frac{1}{8}\right)(\sin 8t - 0) - 1.25t = 0.15625 \sin 8t - 1.25t$$

يبيّن تمثيل بياني لهذه الدالة الحركة الجانبية للكرة. (انظر الشكل 8.48a). يبيّن التمثيل البياني مسار الرمية كما تظهر من أعلى. لاحظ أنّ بعد الانطلاق بشكل مستقيم، تخرج هذه الرمية عن الخط المستقيم على بُعد حوالي متر من مركز اللوحة الرئيسة!!

لأجل $\theta_0 = \pi/2$. لدينا من (5.1) أنّ

$$x''(t) = -10 \sin\left(8t + \frac{\pi}{2}\right)$$

تكامل هذا واستخدام الشرط الأول الابتدائي يعطينا

$$x'(t) = -\frac{10}{8}\left\{-\cos\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) - \left[-\cos\left(0 + \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} = 1.25 \cos\left(8t + \frac{\pi}{2}\right)$$

التكامل مرة ثانية يعطينا الناتج

$$x(t) = 1.25\left(\frac{1}{8}\right)\left[\sin\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 0.15625\left[\sin\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) - 1\right]$$

ويوضّح الشكل 8.48b تمثيلًا بيانيًا للحركة الجانبية في هذه الحالة. لاحظ أنّ رمية الكرة هذه تخترق ما يقارب 4 سنتمترات إلى يمين الضارب ومن ثم تنحني إلى الوراء فوق القاعدة لتسجيل ضربة! يمكنك أن ترى أنه، من الناحية النظرية، إنّ قذيفة الكرة الجنونية حساسة جدًا للدوران والموقع الابتدائي، وقد يكون من الصعب جدًا ضربها إذا ألقيت بشكل صحيح. ■

تمارين 8.5

تمارين كتابية

.1 في المثال 5.6، يتضح أنّ الفرضية الذي يشير إلى أنّه يمكن تجاهل مقاومة الهواء غير صحيح. ناقش صحة هذه الفرضية في المثالين 5.1 و 5.3.

.2 في المناقشة التي تسبق المثال 5.3، وضّحنا أنّ مايكل جوردان (وأي إنسان آخر) يقضي نصف الزمن الذي يقضيه في الهواء في الربع الأعلى من الارتفاع. قارن سرعاته المتجهة عند نقاط مختلفة أثناء القفز لشرح سبب قضاء زمن أكبر نسبيًا في الجزء الأعلى منه في الجزء الأدنى.

.3 في المثال 5.4، قمنا بإشتقاق معادلات منفصلة للمكوّنات الأفقية والرأسية للموقع. لاكتشاف إحدى نتائج هذا الانفصال، فكّر في الموقف التالي. شخصان يقفان بجانب بعضهما البعض وأيديهما مرفوعة إلى الارتفاع نفسه. أطلق أحدهما رصاصة أفقيًا من بندقية. وفي الزمن نفسه، أسقط الآخر رصاصة. اشرح سبب (مع تجاهل مقاومة الهواء) وصول الرصاصتين إلى الأرض في الزمن نفسه.

.4 لأجل قطرة المطر المنهمرة في المثال 5.6، إنّ نموذج أكثر دقة سيكون $y''(t) = -32 + f(t)$، حيث $f(t)$ تمثّل القوة المؤثرة من مقاومة الهواء (مقسومة على كتلة). إذا كانت $v(t)$ هي سرعة هبوط قطرة المطر، اشرح لماذا هذه المعادلة تكافئ $v'(t) = 32 - f(t)$. اشرح في حدود فيزيائية لماذا $v(t)$ هي أكبر، و $f(t)$ هي أكبر. لذا فإن نموذجًا مثل $f(t) = v(t)$ أو $f(t) = [v(t)]^2$ سيكون معقولًا. (في أغلب الحالات، اتّضح أنّ $[v(t)]^2$ يطابق البيانات التجريبية على نحو أفضل).

في التمارين 4–1، حدد الشروط الابتدائية $y(0)$ و $y'(0)$

.1 أُسقِط جسم من ارتفاع 24 مترًا.

.2 أُسقِط جسم من ارتفاع 30 مترًا.

.3 أطلق جسم من ارتفاع 18 مترًا مع سرعة متجهة صعوداً 3 m/s.

.4 أطلق جسم من ارتفاع 6 أمتار مع سرعة متجهة نزولاً 1.2 m/s.

في التمارين 56–5، تجاهل مقاومة الهواء.

.5 يسقط غطاس من ارتفاع 9 أمتار فوق الماء (ارتفاع منصة الغطس الأولمبية نفسه تقريبًا). ما السرعة المتجهة للغطاس لحظة الاصطدام؟

.6 يسقط غطاس من ارتفاع 36 مترًا فوق الماء (ارتفاع منصة الغطس في مسابقة Acapulco Cliff Diving نفسه تقريبًا). ما السرعة المتجهة للغطاس لحظة الاصطدام؟

.7 قارن السرعات المتجهة لحظة الاصطدام للأجسام الساقطة من ارتفاع 9 أمتار (تمرين 5) و 36 مترًا (تمرين 6) و 900 مترًا (مثال 5.6). إذا زاد الارتفاع بعامل مقداره h بأي عامل تزيد السرعة المتجهة لحظة الاصطدام؟

8. ارتفاع نصب واشنطن 167 مترًا. في تجربة شهيرة، أُسقطت كرة بيسبول من أعلى النصب التذكاري لمعرفة إذا ما كان اللاعب يمكنه الإمساك بها. ما مدى سرعة انطلاق الكرة؟

9. اكتشف ذئب بري أنه قد خطا خارج حافة جرف. بعد أربع ثوانٍ، اصطدم بالأرض في سحابة من الغبار. ما ارتفاع الجرف بالأمتار؟

10. سقطت صخرة كبيرة انزاحت بسبب سقوط الذئب البري في التمرين 9 وذلك 3 ثوان قبل أن تلامس الذئب البري. إلى أي مدى سقطت الصخرة بالأمتار؟ ما سرعتها المتجهة بـ m/s عندما لامست الأرض مع الذئب البري؟

11. يتضمّن المخطط التالي للذئب البري إطلاق نفسه في الهواء باستخدام منجنيق. إذا تم دفع الذئب البري رأسيًا من الأرض بسرعة متجهة ابتدائية 19.6 m/s أوجِد معادلة لارتفاع الذئب في أي زمن t. أوجِد أقصى ارتفاع له ومقدار الزمن الذي يمضيه في الهواء وسرعته المتجهة عندما يرتد بقوة مرة أخرى إلى داخل المنجنيق.

12. عند الارتداد، تم دفع الذئب في التمرين 11 إلى ارتفاع يبلغ 78.4 m. ما هي السرعة المتجهة الابتدائية الضرورية للوصول إلى هذا الارتفاع؟

13. أحد المؤلفين له "قفزة" رأسية تبلغ 50 سنتمترًا. ما السرعة المتجهة الابتدائية الضرورية للقفز بهذا الارتفاع؟ كيف يمكن مقارنة هذا بالسرعة المتجهة لمايكل جوردان المذكورة في المثال 5.3؟

14. إذا خضع المؤلف لبرنامج تدريبي وتزايدت سرعته المتجهة الابتدائية بنسبة 10%، بأي نسبة مئوية ستتزايد قفزته الرأسية؟

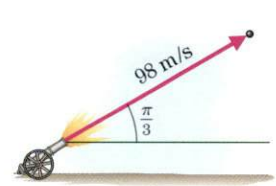
15. (a) أثبت أنّ جسمًا ما يسقط من ارتفاع H متر سيصطدم بالأرض عند الزمن $T = \frac{1}{4}\sqrt{H}$ ثانية مع سرعة متجهة لحظة الاصطدام تبلغ $V = -8\sqrt{H}$ m/s.

(b) أثبت أنّ جسم ما مدفوع من الأرض بسرعة متجهة ابتدائية تبلغ v_0 m/s يحقق قيمة عظمى للارتفاع $v_0^2/19$ m.

16. (a) وفقًا للأسطورة، أسقط جاليليو كرتين من برج بيزا المائل. عندما ضربت كل من كرة الرصاص الثقيلة والكرة الخشبية الخفيفة الأرض في الزمن نفسه، عرف جاليليو أنّ تسارع الجاذبية هو نفسه لكل الأجسام. ستؤثر مقاومة الهواء على مثل هذه التجربة. بوضع مقاومة الهواء في الحسبان، ستسقط كرة خشبية مقاس 6 مسافة $f(t) = \frac{7225}{8}\ln\left[\cosh\left(\frac{16}{85}t\right)\right]$ متر في t ثانية، بينما ستسقط كرة رصاص مقاس 6 مسافة $g(t) = 12{,}800\ln\left[\cosh\left(\frac{1}{20}t\right)\right]$ متر، حيث $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. من ارتفاع يبلغ 179 مترًا. أوجِد ارتفاع الكرة الخشبية عندما تصطدم كرة الرصاص بالأرض.

(b) إذا كان منتج مسرحي يرغب في أن يبيّن أنّ كرتي الجزء (a) تصلان في الزمن نفسه، فكم من الزمن يلزم أن يتم إطلاق الكرة الخشبية بشكلٍ مبكر؟

17. يطلق جسم ما بزاوية $\theta = \pi/3$ راديان من الأفق مع سرعة ابتدائية 98 m/s. حدّد زمن التحليق والمدى الأفقي. قارن مع المثال 5.4.

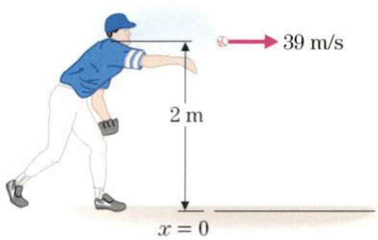


18. أوجِد زمن التحليق والمدى الأفقي لجسم أطلق بزاوية 30° مع سرعة ابتدائية 40 m/s. كرر العملية مع زاوية 60°.

19. كرر المثال 5.5 مع زاوية ابتدائية 6°. باستخدام التجربة والخطأ، أوجِد أصغر وأكبر زاوية ستكون عندها رمية الإرسال.

20. كرر المثال 5.5 مع سرعة ابتدائية 51 m/s. باستخدام التجربة والخطأ، أوجِد أصغر وأكبر سرعة ابتدائية ستكون عندها رمية الإرسال.

21. يُطلق ضارب كرة بيسبول الكرة أفقيًا من ارتفاع 2 m مع سرعة ابتدائية 39 m/s. أوجِد ارتفاع الكرة عندما تصل إلى القاعدة الرئيسة على بعد 18 مترًا. (إرشاد: حدد زمن التحليق من المعادلة -x، ثم استخدم المعادلة -y لتحديد الارتفاع).



22. كرر التمرين 21 مع سرعة ابتدائية 24 m/s. (إرشاد: فسّر الإجابة السالبة بعناية).

23. يرمي لاعب بيسبول كرة باتجاه القاعدة الأولى على بعد 36 مترًا. يطلق الكرة من ارتفاع 1.5 مترًا مع سرعة ابتدائية 36 m/s بزاوية 5° أعلى الأفق. أوجِد ارتفاع الكرة عندما تصل إلى القاعدة الأولى.

24. باستخدام التجربة والخطأ، أوجِد الزاوية التي ستصل إليها الكرة في التمرين 23 إلى القاعدة الأولى يمكنه الإمساك بها على ارتفاع 1.5 مترًا. عند هذه الزاوية، ما مقدار المسافة أعلى رأس لاعب القاعدة الأولى التي يهدف إليها الرامي؟

25. 25. يخطط مخاطر للقفز فوق 25 سيارة. إذا كانت السيارات كلها سيارات مدمجة بعرض 1.5 مترًا وزاوية الانحدار هي 30°، حدّد السرعة المتجهة الابتدائية الضرورية لإتمام القفزة بنجاح. كرر العملية مع زاوية انطلاق تبلغ 45°. على الرغم من مطلب تصغير السرعة المتجهة الابتدائية ، لماذا قد يفضل المُخاطر زاوية 30° على 45° ؟

26. تريد طائرة على ارتفاع 77 m إسقاط إمدادات إلى موقع معيّن على الأرض. إذا كان للطائرة سرعة أفقية 30 m/s، فما المسافة التي ينبغي أن تبعدها الطائرة عن الهدف عند إطلاق الإمدادات من أجل أن تسقط في الموقع المستهدف؟ (إرشاد: استخدم المعادلة -y لتحديد زمن التحليق، ثم استخدم المعادلة -x لتحديد إلى المدى الذي ستنجرف إليه الإمدادات).

27. لتأخذ قذيفة كرة جنونية (انظر المثال 5.7) لها حركة جانبية تحقق مسألة القيمة الابتدائية $x''(t) = -25\sin(4\omega t + \theta_0)$، $x'(0) = x(0) = 0$. مع $\omega = 1$، أوجِد معادلة لـ $x(t)$ ومثّل الحل بيانيًا حيث $0 \le t \le 0.68$ مع $\theta_0 = 0$ (a) و $\theta_0 = \pi/2$ (b).

28. كرر التمرين 27 لأجل $\theta_0 = \pi/4$ و $\omega = 2$ (a) و $\omega = 1$ (b).

التطبيقات

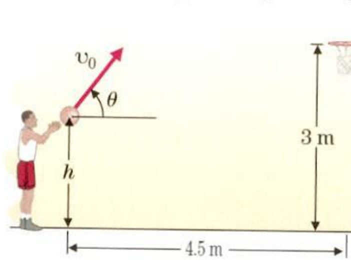
29. يمكنك قياس مدة رد فعلك باستخدام مسطرة. ثبت إصبعي الإبهام والسبابة على جانبي عصا قياس بطول متر. دع صديقًا لك يُسقط عصا القياس وأمسكها بأسرع ما يمكنك. خذ المسافة d التي سقطتها عصا القياس واحسب طول مدة سقوط المسطرة. بيّن أنه إذا تم قياس d بالـ cm، فإن زمن ردّة فعلك حوالي $t \approx 0.045\sqrt{d}$. لأهداف مقارنة، يكون لأحد كبار الرياضيين زمن ردّة فعل حوالي 0.15 s.

30. يقيس معامل الارتداد للكرة مدى كون الارتداد "نابض بالحيوية". وفقًا للتعريف $\frac{v_2}{v_1}$، حيث v_1 هي سرعة (هبوط) الكرة عندما تصطدم بالأرض و v_2 هي سرعة انطلاق (صعود) الكرة بعد أن تصطدم بالأرض. إذا تم إسقاط كرة من ارتفاع H متر وارتدت إلى ارتفاع cH لعدد ثابت c مع $0 < c < 1$. احسب معامل الارتداد.

31. للغطاس الأوليمبي في التمرين 5. كم ستبلغ السرعة للزاوية المتوسطة (التي تم قياسها بالراديان في الثانية) الضرورية لإكمال $2\frac{1}{2}$ دورة؟

32. في عرض قذيفة المدفع البشرية في سيرك Flying Zucchini Circus. يتم إطلاق أحد اللاعبين من المدفع من ارتفاع 3 m بزاوية 45° مع سرعة ابتدائية 48 m/s. إذا كانت شبكة الأمان تمتد على مسافة 1.5 أمتار فوق سطح الأرض، فما هي المسافة التي ينبغي أن تبعدها شبكة الأمان عن المدفع؟ إذا كان باستطاعة شبكة الأمان تحمّل سرعة متجهة لحظة الاصطدام 48 m/s، فهل سيسقط Flying Zucchini بأمان أم سيُسحق؟

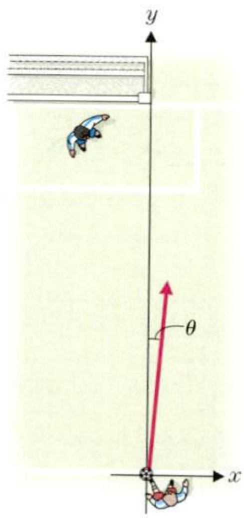
33. في رمية حرة في لعبة كرة السلة، تم رمي كرة من ارتفاع يبلغ h مترًا باتجاه سلة ارتفاعها 3 أمتار عن سطح الأرض مع مسافة أفقية 4.5 أمتار. (انظر الشكل أدناه). إذا كان $h = 6$، $\theta = 52°$ و $v_0 = 7.5$ m/s. بيّن أنّ الرمية الحرة جيدة. بما أنّ السلة أكبر من الكرة، يكون للرمية الحرة هامش خطأ يبلغ عدة سنتيمترات. إذا وُجد أنّ أي رمية تمر عبر ارتفاع 3 أمتار مع $4.4 \leq x \leq 15.354$ تكون جيدة، فبيّن أنه للسرعة الابتدائية المُعطاة التي تبلغ v_0، يكون هامش الخطأ هو $48° \leq \theta \leq 57°$. ارسم تمثيلات بيانية وسيطية لإظهار عدد من هذه الرميات الحرة.



34. تم رمي كرة سلة من ارتفاع 2.4 أمتار عند مسافة أفقية 4.5 أمتار من السلة. السرعة الابتدائية هي 8.1 m/s والزاوية الابتدائية هي 30° فوق الأفق. تتواجد السلة على ارتفاع 3 أمتار وتمتد من $x = 4.2$ m إلى $x = 4.8$ m. (a) أثبت أنّ مركز الكرة يمرّ عبر السلة. (b) حدد أصغر مسافة بين مركز الكرة والجزء الأمامي من الحافة عند (4.2, 3) وبين مركز الكرة والجزء الخلفي من الحافة عند (15.75, 10). (c) إذا كان قطر الكرة هو 23 cm بيّن أن الكرة تصطدم بالحافة. (راجع مقال هوارد بينس في *Mathematics and Sports*).

35. يشتهر لاعب كرة القدم روبرتو كارلوس البرازيلي بركلاته المنحنية. على فرض أنّ لديه ركلة حرة من مسافة 30 مترًا. بتحديد اتجاه x والمحور y كما هو مبيّن في الشكل. على فرض أنّ للركلة سرعة ابتدائية 30 m/s بزاوية 5° من محور y الموجب. فرضاً أنّ القوة الوحيدة على الكرة هي قوة ماغنوس إلى اليسار بسبب دوران الكرة.

(a) مع $x''(t) = -20$ و $y''(t) = 0$. حدد إذا ما كانت الكرة ستدخل المرمى عند $y = 90$ و $-24 \leq x \leq 0$.



(b) اصطف حائط من اللاعبين على بعد 10 أمتار، امتد من $x = -10$ إلى $x = 1$. حدد إذا ما كانت الركلة ستلتف حول الحائط.

36. لتدريب رواد الفضاء على العمل في بيئة من انعدام الجاذبية، ترسلهم وكالة ناسا في تدريب على طائرة خاصة (تُلقّب بمذنب القيء). لتمكين الركاب من تجربة انعدام الجاذبية، يجب أن يتطابق التسارع العمودي للطائرة بشكل تام مع تسارع الجاذبية. إذا كان $y''(t)$ التسارع العمودي للطائرة، تكون عندئذٍ $y''(t) = -g$. أثبت أنّ الطائرة تتبع مسارًا على شكل قطع مكافئ، لسرعة متجهة أفقية ثابتة. تحلّق طائرة NASA في مسارات على شكل قطع مكافئ لارتفاع حوالي 750 متر (750 متر لأعلى و 750 متر لأسفل). والزمن المستغرق لإكمال مثل هذا المسار هو مدة انعدام الجاذبية للركاب. احسب هذا الزمن.

في التمارين 42–37، نستكشف جانبين من جوانب ألعاب الخفة. ويمكن العثور على المزيد من المعلومات في The Mathematics of Juggling بقلم بوركارد بولستر.

37. يتفق لاعبي الخفة المحترفون بشكل عام على أنّ 10 هو القيمة العظمى لعدد الكرات التي يمكن للإنسان الاحتفاظ بها بنجاح. للحصول على سبب الفكرة، على فرض أنّ الأمر يستغرق $\frac{1}{2}$ ثانية لالتقاط وإلقاء الكرة. (وبعبارة أخرى، يستطيع لاعب الخفة التعامل مع أربع كرات في الثانية، وذلك باستخدام كلتا يديه). للعب بـ 10 كرات، يجب أن تبقى كل كرة في الهواء لمدة 2.5 ثانية. بتجاهل مقاومة الهواء، إلى أي ارتفاع يتعين إلقاء الكرة لتبقى في الهواء لهذه المدة؟ إلى أي ارتفاع يتعين إلقاء الكرات للتمكن من اللعب بـ 11 كرة؟

38. تُعتبَر الدقة الجانب الآخر من جوانب اللعب بالكرات. يجب أن تجتاز الكرة التي يتم اللعب بها من اليد اليمنى إلى اليد اليسرى المسافة الأفقية الصحيحة ليصبح من الممكن الإمساك بها. على فرض أنّه تم إلقاء كرة بسرعة متجهة أفقية ابتدائية v_{0x} وسرعة رأسية ابتدائية v_{0y}. فرضاً أنّه تم الإمساك بالكرة عند الارتفاع الذي أُلقيت عنده. أثبت أنّ المسافة الأفقية المجتازة هي $w = \frac{v_{0x}v_{0y}}{16}$ متر. (إرشاد: هذه مسألة أساسية في المقذوفات، مشابه للمثال 5.4).

39. بالعودة إلى التمرين 38. على فرض أنّه قد تم قذف الكرة بزاوية α من الخط الرأسي. أثبت أنّ $\tan\alpha = \frac{v_{0x}}{v_{0y}}$. بدمج هذه النتيجة مع التمرينين 15(b) و 38. أثبت أنّ $w = 4h\tan\alpha$. حيث h هي القيمة العظمى لارتفاع الرمية.

40. أوجِد التقريب الخطي لـ $\tan^{-1}x$ عند $x = 0$. استخدم التقريب والتمرين 39 لتثبت أنّ $\alpha \approx \frac{w}{4h}$. إذا كانت زاوية بمقدار α تُنتج مسافة قدرها w وزاوية بمقدار $\alpha + \Delta\alpha$ تُنتج مسافة قدرها $w + \Delta w$. فاثبت أنّ $\Delta\alpha \approx \frac{\Delta w}{4h}$.

41. على فرض أنّ Δw هو الفرق بين المسافة الأفقية المثالية لرمية والمسافة الأفقية الفعلية للرمية. لأي لاعب خفّة عادي، فإنّ خطأ يبلغ $\Delta w = 0.3$ مترًا يكون مقدورًا عليه. ليكن $\Delta\alpha$ هو الخطأ المناظر في زاوية الرمية. إذا كان h هو الارتفاع المطلوب للعب بـ 10 كرات (انظر التمرين 37). أوجِد القيمة العظمى للخطأ في زاوية الرمي.

42. كرر التمرين 41 باستخدام الارتفاع المطلوب للعب بـ 11 كرة. ما مقدار الدقة التي يحتاجها لاعب الخفة للعب بـ 11 كرة؟

43. قام رائد الفضاء آلان شيبرد بتعديل بعض معدات العمل على سطح القمر وأصبح هو الشخص الوحيد الذي ضرب كرة جولف على سطح القمر. فرضاً أنّه قد تم ضرب الكرة بسرعة 18 m/s بزاوية 25° أعلى الأفق. بافتراض عدم وجود مقاومة هواء، أوجِد المسافة التي كانت ستقطعها الكرة على الأرض. ثم أوجِد المسافة التي ستقطعها على القمر، حيث لا يوجد فعلًا أي مقاومة هواء (استخدم $g = 1.7\ \text{m/s}^2$). تبلغ قوّة الجاذبيّة للقمر سدس قوة جاذبية الأرض. قد يكون تخمين بسيط هو أنّ كرة جولف ستنطلق على القمر بارتفاع أكبر بستة أضعاف ومسافة أبعد بستة أضعاف مقارنةً بالأرض. حدد ما إذا كان هذا صحيحًا.

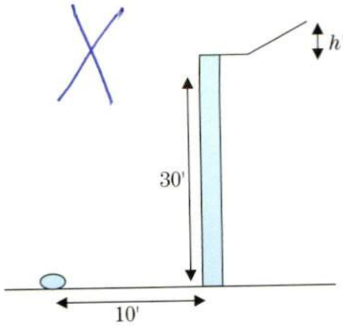
44. على فرض أنّ أحد رجال الإطفاء يحمل خرطوم الماء بميل m والماء يتدفّق من الخرطوم بسرعة v m/s. أثبت أنّ الماء يتبع المسار $y = -4.9\left(\frac{1+m^2}{v^2}\right)x^2 + mx$. إذا كان رجل الإطفاء يقف على مسافة 6 أمتار من حائط لسرعة مُعطاة تبلغ v. فما هي القيمة العظمى للارتفاع على الحائط الذي يمكن للماء أن يصل إليه؟

45. على فرض أنّ إسقاط هدف رأسيًا على مسافة أفقية تبعد 6 أمتار منك. إذا أطلقت كرة طلاء أفقيًا مباشرةً على الهدف، أثبت أنك ستصطدم به (بافتراض عدم وجود مقاومة هواء وبافتراض أنّ كرة الطلاء تبلغ الهدف قبل أن يصطدم أي منهما بالأرض).

46. أُسقِط جسم من ارتفاع 30 مترًا. يتم إطلاق جسم آخر تحت الجسم الأول مباشرةً رأسيًا من الأرض مع سرعة متجهة ابتدائية 12 m/s. حدد متى وكيف سيصطدم الجسمان ومدى الارتفاع الذي سيصطدمان عنده.

47. ما مدى سرعة لاعب تزلج عمودي مثل توني هوك وهو ينطلق أسفل منحدر؟ بتجاهل الاحتكاك ومقاومة الهواء، تأتي الإجابة من قانون حفظ الطاقة، والذي ينص على أن مجموع طاقة الحركة $\frac{1}{2}mv^2$ زائد طاقة الوضع mgy يبقى ثابتًا. على فرض أنّ الطاقة في أعلى المسار عند الارتفاع H هي كلها طاقة وضع والطاقة في أسفل المنحدر هي كلها طاقة حركة. (a) أوجد السرعة في الأسفل كدالة H. (b) احسب السرعة إذا كان $H = 16$ مترًا. (c) أوجِد السرعة في منتصف المسافة لأسفل ($y = 8$). (d) إذا كان للمنحدر شكل $y = x^2$ حيث $-4 \le x \le 4$. أوجِد المركّبين الأفقي والرأسي للسرعة في منتصف المسافة عند $y = 8$.

التمرين 47



التمرين 48

48. يقوم أحد الصفوف الدراسية في مادة العلوم ببناء منحدر لدحرجة كرة بولينج خارج نافذة ترتفع مسافة 9 أمتار عن الأرض. وهدفهم هو أن تهبط الكرة على بطيخة تبعد عن المبنى بمسافة 3 أمتار. بافتراض عدم وجود احتكاك أو مقاومة هواء، حدد ارتفاع المنحدر اللازم لتحطيم البطيخة

تمارين استكشافية

1. في النص والتمرينين 27 و 28، ناقشنا المعادلة التفاضلية $x''(t) = -25\sin(4\omega t + \theta_0)$ للحركة الجانبية لقذيفة كرة جنونية. استخدم التكامل وطبق الشرطين الابتدائيين $x'(0) = 0$ و $x(0) = 0$ لإشتقاق المعادلة العامة

$$x(t) = \frac{25}{16\omega^2}\sin(4\omega t + \theta_0) - \left(\frac{25}{4\omega}\cos\theta_0\right)t - \frac{25}{16\omega^2}\sin\theta_0.$$

إذا كنت تستطيع الوصول إلى تمثيلات بيانية ثلاثية الأبعاد، مثّل $x(t, \omega)$ بيانيًا لأجل $\theta_0 = 0$ مع $0 \le t \le 0.68$ و $0.01 \le \omega \le 10$. (ملحوظة: سيواجه بعض المخططين صعوبة مع $\omega = 0$) كرر مع $\theta_0 = \pi/4, \theta_0 = \pi/2$ وخيارين من نفسك حيث θ_0. يريد أحد الضاربين أن تتحرّك الكرة أكبر قدر ممكن ذهابًا وإيابًا ولكن أن ينتهي بها الأمر بالقرب من القاعدة الرئيسية ($x = 0$). بناءً على هذه المعايير، اختر تركيبات من θ_0 و ω تنتج أفضل أربع ضربات. مثِّل هذه الضربات بيانيًا باستخدام بعدين مع $x = x(t)$ كما هو مبيّن في الشكلين 8.48a و 8.48b.

2. على الرغم من أننا قد علّقنا على بعض أوجه القصور في نموذج الجاذبية فقط لحركة المقذوفات، إلا أننا لم نقدم بدائل. تميل مثل هذه النماذج إلى أن تكون إلى حد ما أكثر تعقيدًا من الناحية الحسابية. يأخذ النموذج المستكشف في هذا التمرين في الاعتبار مقاومة الهواء بطريقة يتم التعامل معها وحلها من الناحية الحسابية ولكن لا تزال غير واقعية تمامًا. فرضًا أنّ قوة مقاومة الهواء تتناسب مع السرعة وتعمل في الاتجاه المعاكس للسرعة. لأجل حركة أفقية (مع عدم وجود جاذبية)، لدينا $a(t) = F(t)/m = -cv(t)$ لعدد ثابت c. اشرح إلى ماذا تدل اشارة رمز ناقص. بما أنّ $a(t) = v'(t)$، فإنّ النموذج هو $v'(t) = -cv(t)$. أثبت أنّ الدالة $v(t) = v_0e^{-ct}$ تحقق المعادلة $v'(t) = -cv(t)$ والشرط الابتدائي $v(0) = v_0$. إذا بدأ جسم عند $x(0) = a$. فقم بتكامل $v(t) = v_0e^{-ct}$ لإيجاد موقعه في أي زمن t. أثبت أنّ مقدار الزمن المطلوب للوصول إلى $x = b$ (حيث $a < b$) يُعطى بالعلاقة $T = -\frac{1}{c}\ln\left(1 - c\frac{b-a}{v_0}\right)$. لأجل كرة بيسبول ($c = 0.15$) تم رميها بسرعة 38 m/s من $a = 0$، حدد الفترة الزمنية التي تستغرقها للوصول إلى $b = 60$ واحسب سرعتها المتجهة عند تلك النقطة. بأي نسبة قد انخفضت سرعتها المتجهة؟ في لعبة

البيسبول، يُستخدم نوعان مختلفان من بنادق الرادار لقياس سرعة الرمية. يقيس أحدهما سرعة الكرة بمجرد أن تترك يد الرامي مباشرةً. بينما يقيس الآخر سرعة الكرة في الطريق إلى القاعدة الرئيسية. إذا سجلت البندقية الأولى 150 km/h وسجلت الثانية 142 km/h فما هي المسافة التي تأخذ عندها البندقية الثانية قياسها؟

3. إنّ الهدف في لعبة الكمبيوتر القديمة "الغوريلا" هو إدخال سرعة وزاوية لإطلاق موز متفجر في محاولة لضرب الغوريلا في مكان آخر. على فرض أنّ موضعك هو عند نقطة الأصل والغوريلا عند $(40, 20)$. (a) أوجد تركيبتين من السرعة/الزاوية التي ستصطدم بالغوريلا. (b) قدّر أصغر سرعة يمكن استخدامها للاصطدام بالهدف. (c) كرر الجزأين (a) و (b) إذا كان يوجد مبنى في الطريق يشغل $30 \le x \le 20$ و $30 \le y \le 0$.

الدرس 8-6
تطبيقات التكامل على الفيزياء والهندسة

في هذا الدرس، نستكشف العديد من تطبيقات التكامل في الفيزياء. في كل حالة، سنُعرّف مفهومًا أساسيًا ومن ثم نستخدم التكامل المحدود لتعميم المفهوم وحل نطاق أوسع من المسائل.

تخيل أنك في أسفل تل تكسوه الثلوج مع مزلجة. للحصول على جولة تزلج جيدة، يجب أن تدفع المزلجة إلى أعلى التل إلى أقصى حد ممكن. سيقول أي فيزيائي أنه كلما ارتفعت أكثر، زادت طاقة الجهد الذي لديك. يحوّل التزلج لأسفل التل طاقة الجهد إلى طاقة حركة. (هذا هو الجزء الممتع!) ولكن دفع المزلجة أعلى التل يتطلّب منك بذل بعض الشغل: يجب عليك بذل قوة على مسافة طويلة.

تتمثّل مهمتنا الأولى بتحديد مقدار الشغل. بالتأكيد، إذا كنت تدفع مثليّ الوزن (أي تبذل مثليّ القوة)، فأنت تبذل مثليّ الشغل. وعلاوةً على ذلك، إذا كنت تدفع المزلجة لمثليّ المسافة، فإنك تبذل مثليّ الشغل. في ضوء تلك الملاحظات، لأي قوة ثابتة F مبذولة لمسافة d، نعرّف **الشغل** W المبذول على أنّه

$$W = Fd$$

نوسع مفهوم الشغل هذا إلى حالة القوة غير الثابتة $F(x)$ المبذولة على الفترة $[a, b]$ كما يأتي: أولًا، نجزّىء الفترة $[a, b]$ إلى n فترات جزئية متساوية، عرض كلٍ منها $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ونأخذ الشغل المبذول على كل فترة جزئية. إذا كان Δx صغيرًا، يمكن عندئذٍ تقريب القوة $F(x)$ المبذولة على الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ باستخدام القوة الثابتة $F(c_i)$ لبعض النقاط $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. يبلغ الشغل المبذول لتحريك الجسم على طول الفترة الجزئية عندئذٍ تقريبًا $F(c_i)\,\Delta x$. يكون مقدار الشغل الكلي W هو تقريبًا

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\,\Delta x$$

يجب عليك التعرّف على هذا باعتباره مجموع ريمان، والذي، عندما تصبح n أكبر، يقترب من مقدار الشغل الفعلي.

الشغل

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\,\Delta x = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{6.1}$$

نأخذ (6.1) بوصفه تعريفنا للشغل.

لقد لاحظت على الأرجح أنّه كلما إنكمش (أو تمدد) نابض عن طوله الطبيعي، زادت القوة المطلوبة لإنكماش (أو لتمدد) النابض بشكلٍ أكبر. وفقًا **لقانون هوك**، إنّ القوة المطلوبة للحفاظ على النابض في وضع معيّن تتناسب مع المسافة التي إنكمش (أو تمدد) إليها.

بمعنى أنّ، إذا كانت x هي المسافة التي ينكمش (أو يتمدد) إليها نابض من طوله الطبيعي، تُعطى القوة $F(x)$ المبذولة من النابض بالعلاقة

$$F(x) = kx \tag{6.2}$$

لعدد ثابت k (**ثابت النابض**)

مثال 6.1 حساب الشغل المبذول لتمدد نابض

تعمل قوة قدرها 10 نيوتن على تمدّد نابض 0.08 متر من طوله الطبيعي. (انظر الشكل 8.49). أوجِد الشغل المبذول في تمدد النابض 0.16 مترًا أكثر من طوله الطبيعي.

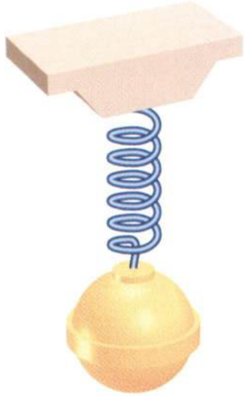
الحل أولًا، نحدد قيمة ثابت النابض. ومن قانون هوك (6.2)، لدينا

$$10 = F(0.08) = k(0.08)$$

بحيث يكون $k = 125$ و $F(x) = 125x$. من (6.1)، يكون الشغل المبذول في تمدد النابض 0.16 مترًا عندئذٍ هو

$$W = \int_0^{0.16} F(x)\,dx = \int_0^{0.16} 125x\,dx = 1536 \text{ نيوتن-أمتار}$$

في هذه الحالة، لاحظ أنّ تمدّد النابض ينقل طاقة جهد إلى النابض. (إذا أُطلق النابض في وقتٍ لاحق، فإنه يرتد مرة أخرى إلى طوله الطبيعي محولًا طاقة الجهد إلى طاقة حركة). ■



الشكل 8.49
نابض متمدد

مثال 6.2 حساب الشغل المبذول من حامل أثقال

يرفع حامل أثقال كتلة حديدية تزن 800 نيوتن مسافة 1 متر فقط. ما هو مقدار الشغل المبذول؟ حدد أيضًا الشغل الذي يبذله حامل الأثقال إذا رفع الوزن 1.2 متر فوق الأرض ومن ثم أعاده إلى مكانه مرة أخرى.

الحل بما أنّ القوة (الوزن) هو ثابت هنا، يكون لدينا ببساطة

$$W = Fd = 800 \times 1 = 800 \text{ نيوتن-أمتار}$$

قد يبدو الأمر غريبًا، ولكن إذا كان حامل الأثقال يرفع الوزن نفسه 1.2 متر عن الأرض ثم يعيده إلى موقعه مرة أخرى، فعندئذٍ بما أنّ الثقل الحديدي ينتهي في الموقع نفسه حيث بدأ، تكون المسافة الصافية المقطوعة هي صفرًا والشغل المبذول هو صفرًا. بطبيعة الحال، سيشعر حامل الأثقال أنّه بذل شغلًا، ولكن كما سبق أن عرفناه، يتم حساب الشغل حسب تغيّر الطاقة في الجسم. وبما أنّ الثقل الحديدي لديه الطاقة الحركية وطاقة الجهد نفسها التي بدأت بها، يكون مقدار الشغل الكلي المبذول عليه هو صفرًا. ■

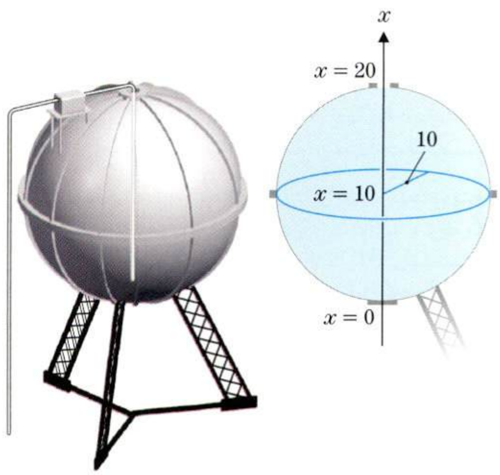
في المثال 6.3، كل من القوة والمسافة كميات غير ثابتة. يُمثّل هذا بعض التحديات الفريدة من نوعها وسنحتاج أولًا إلى تقريب الشغل ومن ثم نتعرف على التكامل المحدود الذي تولده عملية التقريب هذه.

مثال 6.3 حساب الشغل المطلوب لضخ ماء من خزان

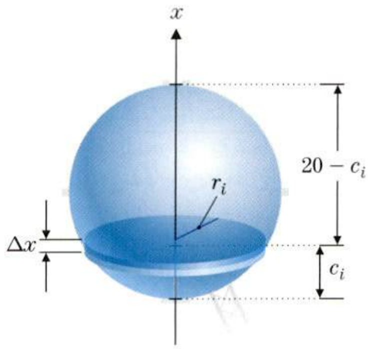
يبلغ نصف قطر خزان كروي الشكل 10 أمتار مملوء بالماء. أوجِد الشغل المبذول في ضخ كل كمية الماء للخارج من خلال الجزء العلوي من الخزان.

الحل لا تنطبق الصيغة الأساسية $W = Fd$ مباشرةً هنا، لعدة أسباب. والسبب الأكثر وضوحًا من هذه الأسباب هو اختلاف المسافة التي يقطعها الماء في كل جزء من الخزان. حيث إنّ الماء باتجاه الجزء السفلي من الخزان يجب أن يُضخ على طول المسافة إلى الأعلى، في حين أنّ الماء بالقرب من أعلى الخزان يجب أن يُضخ فقط لمسافة قصيرة. لتكن x تُمثل المسافة التي تم قياسها من الجزء السفلي من الخزان. كما هو مبيّن في الشكل 8.50a، يناظر الخزان بأكمله الفترة $0 \le x \le 20$، والتي نجزّئها إلى

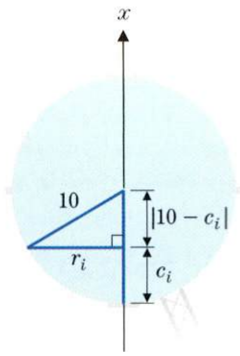
$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 20$$



الشكل 8.50a
خزان دائري



الشكل 8.50b
الشريحة عند الحد i من الماء



الشكل 8.50c
مقطع عرضي للخزان

حيث $\Delta x = \frac{20}{n}$ = $x_i - x_{i-1}$. لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. يقوم هذا على تجزئة الخزان إلى n طبقات رفيعة، يناظر كل منها فترة $[x_{i-1}, x_i]$. (انظر الشكل 8.50b). يمكنك التفكير في الماء الموجود في الطبقة المناظرة لـ $[x_{i-1}, x_i]$ بأنها أسطوانية تقريبًا، ارتفاعها Δx. يجب ضخ هذه الطبقة إلى مسافة تبلغ تقريبًا $20 - c_i$، لبعض $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. لاحظ من الشكل 8.50b أنّ نصف قطر الطبقة عند الحد i يعتمد على قيمة x. من الشكل 8.50c (حيث نبيّن مقطعًا عرضيًا للخزان). نصف القطر r_i الذي يقابل عمقًا يبلغ $x = c_i$ هو قاعدة مثلث قائم الزاوية له وتر يبلغ 10 وارتفاع يبلغ $|10 - c_i|$. من نظرية فيثاغورس، لدينا الآن

$$(10 - c_i)^2 + r_i^2 = 10^2$$

بحل هذا لـ r_i^2، لدينا

$$\begin{aligned} r_i^2 &= 10^2 - (10 - c_i)^2 = 100 - \left(100 - 20c_i + c_i^2\right) \\ &= 20c_i - c_i^2 \end{aligned}$$

إنّ القوة F_i المطلوبة لتحريك الطبقة عند الحد i هي عندئذٍ ببساطة القوة المبذولة على الماء بواسطة الجاذبية (أي، وزنها). بما أنّ كثافة وزن الماء هي 1000 kg/m^3. لدينا الآن

$$\begin{aligned} F_i &\approx (\text{ حجم الشريحة الأسطوانية }) (\text{ وزن الماء في وحدة الحجم }) \\ &= \left(\pi r_i^2 h\right)(1000 \text{ kg/m}^3) \\ &= 1000\pi\left(20c_i - c_i^2\right)\Delta x \end{aligned}$$

يُعطى الشغل المطلوب لضخ الشريحة عند الحد i للخارج عندئذٍ بصورة تقريبية بالعلاقة

$$\begin{aligned} W_i &\approx (\text{ القوة }) (\text{ المسافة }) \\ &= 1000\pi\left(20c_i - c_i^2\right)\Delta x(20 - c_i) \\ &= 1000\pi c_i(20 - c_i)^2\Delta x \end{aligned}$$

ويكون الشغل المطلوب لضخ كل كمية الماء للخارج هو عندئذٍ مجموع الشغل المطلوب لكلٍ من الـ n شرائح:

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} 1000\pi c_i(20 - c_i)^2\Delta x$$

أخيرًا، بأخذ النهاية عندما $n \to \infty$ يعطي المقدار الدقيق للشغل، والذي ينبغي أن تتعرف عليه باعتباره التكامل المحدود:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 62.4\pi c_i(20 - c_i)^2 \Delta x = \int_0^{20} 1000\pi x(20 - x)^2\, dx$$

الدفع هو كمية

$$= 1000\pi \int_0^{20} (400x - 40x^2 + x^3)\, dx$$

$$= 1000\pi \left[400\frac{x^2}{2} - 40\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^{20}$$

$$= 1000\pi\left(\frac{40{,}000}{3}\right) \approx 4.18\times 10^7 \text{ نيوتن-أمتار}$$

فيزيائية ترتبط ارتباطًا وثيقا بالشغل. فبدلًا من الربط بين القوة والمسافة لحساب التغيّرات في الطاقة، يربط الدفع بين القوة والزمن لحساب التغيرات في السرعة المتجهة. أولًا، على فرض أنّه تم بذل قوة ثابتة F على جسم من الزمن $t = 0$ إلى الزمن $t = T$. إذا أُعطي موقع الجسم عند الزمن t بالعلاقة $x(t)$، ينص قانون نيوتن الثاني على أنّ $F = ma = mx''(t)$ تكامل هذه المعادلة مرة واحدة بمعلومية t يعطينا

$$\int_0^T F dt = m \int_0^T x''(t)\, dt,$$

أو

$$F(T - 0) = m[x'(T) - x'(0)]$$

تذكر أنّ $x'(t)$ هي السرعة المتجهة $v(t)$، بحيث يكون

$$FT = m[v(T) - v(0)]$$

أو $FT = m\Delta v$، حيث $\Delta v = v(T) - v(0)$ هو التغيّر في السرعة المتجهة. يُطلق على الكمية FT اسم **الدفع**، و $mv(t)$ هو **الزخم** عند الزمن t والمعادلة التي تربط بين الدفع والتغيّر في السرعة المتجهة تسمّى **معادلة الدفع والزخم**.

مثلما توسّعنا بمفهوم الشغل ليتضمّن قوى غير ثابتة، يجب أن نعمم مفهوم الدفع. فكّر في الآتي وحاول أن تخمن ما ينبغي أن يكون عليه التعريف.

نُعرّف **الدفع** J لقوة $F(t)$ مبذولة على الفترة الزمنية $[a, b]$ بأنّه

الدفع

$$\boxed{J = \int_a^b F(t)\, dt}$$

نترك مشتقات هذا كتمرين. تُعمَّم معادلة الدفع والزخم على الشكل الآتي:

معادلة الدفع والزخم

$$\boxed{J = m[v(b) - v(a)]}$$

مثال 6.4 تقدير الزخم لكرة بيسبول

على فرض أنّ كرة بيسبول تنطلق بسرعة 130 m/s تصطدم بمضرب. تبيّن البيانات التالية (مقتبسة من *The Physics of Baseball* بقلم روبرت أدير) القوة المبذولة من المضرب على الكرة عند فترات تبلغ 0.0001 ثانية.

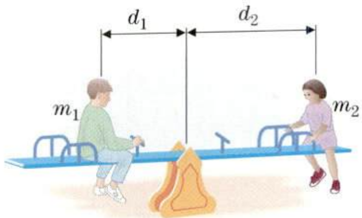
t (s)	0	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007
$F(t)$ (N)	0	1250	4250	7500	9000	5500	1250	0

قدّر دفع المضرب على الكرة و(باستخدام $m = 0.01$ kg) وسرعة الكرة بعد التصادم.

الحل في هذه الحالة، يُعطى الدفع J بالعلاقة $\int_0^{0.0007} F(t)\,dt$. بما أننا لم نُعط سوى عدد ثابت من القياسات $F(t)$، فإنّ أفضل ما يمكننا القيام به هو تقريب التكامل عدديًا (على سبيل المثال، باستخدام قاعدة سمبسون). تذكر أنّ قاعدة سمبسون تتطلب عددًا زوجيًا n من الفترات الجزئية، مما يعني أنك تحتاج عددًا فرديًا $n+1$ من النقاط في التقسيم. باستخدام $n = 8$ وبإضافة قيمة دالة صفرية عند $t = 0.0008$ (لماذا يُعقل القيام بهذا؟)، تعطينا قاعدة سمبسون

$$\begin{aligned} J &\approx [0 + 4(1250) + 2(4250) + 4(7500) + 2(9000) + 4(5500) \\ &\quad + 2(1250) + 4(0) + 0]\frac{0.0001}{3} \\ &\approx 2.867 \end{aligned}$$

في هذه الحالة، إنّ معادلة الدفع والزخم $J = m\,\Delta v$ تصبح $2.867 = 0.01\,\Delta v$ أو $\Delta v = 286.7$ m/s. بما أنّ الكرة قد بدأت بسرعة 130 m/s في اتجاه واحد وانتهى بها الأمر بالتحرّك في الاتجاه المعاكس، تكون السرعة بعد التصادم هي 156.7 m/s. ■

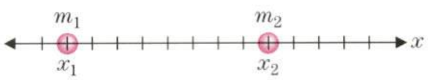


الشكل 8.51a
الموازنة بين كتلتين

لنأخذ طفلين على أرجوحة في ملعب (أو أرجوحة توازن). على فرض أنّ الطفل الموجود على اليسار في الشكل 5.51a أثقل (أي، له كتلة أكبر) من الطفل الموجود على اليمين. إذا كان الطفلان يجلسان على مسافة متساوية من النقطة المحورية، فأنت تعرف ما سيحدث؛ سيُسحب الجانب الأيسر إلى أسفل. غير أنّه يمكن للطفلين موازنة بعضهما البعض إذا تحرك الطفل الأثقل إلى موقع أقرب من النقطة المحورية. بمعنى أنّه، يتم تحديد الموازنة بالوزن (القوة) والمسافة من النقطة المحورية على حدٍ سواء. إذا كان للطفلين كتلتان m_1 و m_2 ويجلسان على مسافتي d_1 و d_2، على التوالي، من النقطة المحورية، فإنهما يوازنان بعضهما البعض إذا وفقط إذا

$$m_1 d_1 = m_2 d_2 \tag{6.3}$$

بقلب المسألة قليلًا، على فرض أنّ هناك جسمين، كتلتاهما m_1 و m_2، ويقعان عند x_1 و x_2، على الترتيب، مع $x_1 < x_2$. لنعتبر أنّ الجسمين **كتل نقطية**. بمعنى أنّه، يتم التعامل مع كلٍ منهما كنقطة افرادية، مع تركيز كل الكتلة في تلك النقطة. (انظر الشكل 5.51b).



الشكل 8.51b

اثنان من الكتل النقطية

نريد إيجاد **مركز الكتلة** $\bar{x}$، والّذي هو الموقع الذي يمكننا أن نضع عنده النقطة المحورية للأرجوحة ونوازن بين الجسمين. من معادلة التوازن (6.3)، سنحتاج $m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x})$. إنّ حلّ هذه المعادلة من أجل $\bar{x}$ يعطينا

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

لاحظ أنّ المقام في هذه المعادلة هو كتلة "النظام" الإجمالية (أي، الكتلة الكلية للجسمين). يُطلق على بسط هذا التعبير اسم **العزم الأول** للنظام.

وعموماً، لنظام من n كتلة $m_1, m_2, \ldots, m_n$، تقع عند $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$، على الترتيب، يُعطى مركز الكتلة $\bar{x}$ من العزم الأول مقسومًا على الكتلة الإجمالية، أي أنّ

مركز الكتلة

$$\boxed{\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}}$$

الآن، على فرض أننا نرغب في إيجاد الكتلة ومركز الكتلة لجسم له كثافة متغيّرة $\rho(x)$ (تقاس بوحدات الكتلة لكل وحدة طول) ويمتد من $x = a$ إلى $x = b$. لاحظ أنّه إذا كانت الكثافة ثابتة ρ، فإنّ كتلة الجسم تُعطى ببساطة بالعلاقة $m = \rho L$، حيث $L = b - a$ هو طول الجسم. من ناحية أخرى، إذا كانت الكثافة تتغير في كل أنحاء الجسم، يمكننا تقريب الكتلة بتجزيئ الفترة $[a, b]$ إلى n أجزاء متساوية العرض $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. على كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$، تكون القيمة التقريبية للكتلة $\rho(c_i)\Delta x$، حيث c_i هي نقطة في الفترة الجزئية. تكون الكتلة الإجمالية تقريبًا

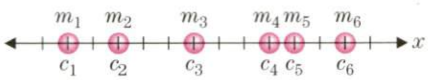
$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i)\,\Delta x$$

عليك معرفة أنّ هذا هو مجموع ريمان، والذي يقترب من الكتلة الإجمالية عندما $n \to \infty$.

الكتلة

$$\boxed{m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i)\,\Delta x = \int_a^b \rho(x)\,dx} \qquad (6.4)$$

لحساب العزم الأول لجسم ما له كثافة غير ثابتة $\rho(x)$ يمتد من $x = a$ إلى $x = b$، نجزّىء الفترة إلى n أجزاء متساوية. من برهاننا السابق، لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ تكون كتلة الشريحة عند الحد i من الجسم هي تقريبًا $\rho(c_i)\,\Delta x$، لاختيار من $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. نمثّل الشريحة عند الحد i من الجسم الذي له جسيم كتلته $m_i = \rho(c_i)\,\Delta x$ ويقع عند $x = c_i$. يمكننا الآن التفكير في الجسم الأصلي بأنه قد تم تقريبه بواسطة n كتل نقطية مميزة، كما هو مبيّن في الشكل 8.52.



الشكل 8.52
ست كتل نقطية

لاحظ أنّ العزم الأول M_n لهذا النظام التقريبي هو

$$\begin{aligned} M_n &= [\rho(c_1)\,\Delta x]c_1 + [\rho(c_2)\,\Delta x]c_2 + \cdots + [\rho(c_n)\,\Delta x]c_n \\ &= [c_1\rho(c_1) + c_2\rho(c_2) + \cdots + c_n\rho(c_n)]\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} c_i\rho(c_i)\Delta x \end{aligned}$$

بأخذ النهاية عندما $n \to \infty$، يقترب ناتج الجمع إلى العزم الأول

العزم الأول

$$\boxed{M = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i\rho(c_i)\,\Delta x = \int_a^b x\rho(x)\,dx} \qquad (6.5)$$

يُعطى مركز كتلة الجسم عندئذٍ بالعلاقة

مركز الكتلة

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{\int_a^b x\rho(x)\,dx}{\int_a^b \rho(x)\,dx} \tag{6.6}$$

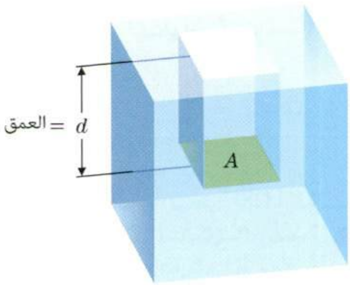
سد هوفر

لتطبيقنا النهائي للتكامل في هذا الدرس، نفكر في القوة الهيدروستاتيكية. تخيل سد يحجم بحيرة مليئة بالمياه. ما هي القوة التي يجب أن يصمد أمامها السد؟

كالعادة، نقوم بحل المسائل الأبسط أولًا. إذا كانت لديك لوحة مستطيلة مسطحة موجّهة أفقيًا تحت المياه، لاحظ أنّ القوة التي تمارسها المياه على اللوحة (**القوة الهيدروستاتيكية**) هي ببساطة وزن المياه فوق اللوحة. هذا ناتج حجم المياه فوق اللوحة وكثافة وزن المياه ($1,000\ \text{kg/m}^3$). إذا كانت مساحة اللوحة تبلغ $A\ \text{m}^2$ وتقع d m أسفل السطح (انظر الشكل 8.53). إذًا تبلغ القوة المؤثرة على اللوحة

$$F = 1,000Ad$$

وفقًا لمبدأ باسكال، يكون الضغط في عمق معطى d في سائل هو نفسه في جميع الاتجاهات. يشير هذا الأمر إلى أنّه، إذا غمرنا لوحة مسطحة في سائل، يكون الضغط إذًا على جانب واحد من اللوحة عند نقطة معطاة هو $\rho \cdot d$، حيث ρ هو كثافة وزن السائل وd هو العمق. وخصوصاً، يشير ذلك إلى ما إذا كانت اللوحة مغمورة رأسيًا أو أفقيًا أو غير ذلك. (انظر الشكل 8.54).



الشكل 8.53
لوحة مساحتها A مغمورة حتى عمق d

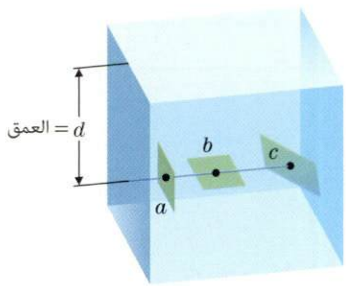
لنأخذ الآن جداراً رأسيًا يحجم بحيرة. من الملائم توجيه المحور x رأسيًا مع $x = 0$ تقع عند سطح المياه وأسفل الجدار عند $x = a > 0$. (انظر الشكل 8.55). بهذه الطريقة، x يقيس عمق جزء من السد. على فرض أنّ $w(x)$ هو عرض الجدار عند عمق x (حيث يتم حساب جميع المسافات بالأمتار).

نجزّئ الفترة $[0, a]$ إلى n فترات جزئية متساوية العرض $\Delta x = \frac{a}{n}$. مما يؤثّر على تجزئة السد إلى n شرائح، كل شريحة عرضها Δx. لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. لاحظ أنّ مساحة الشريحة عند الحد i هي حوالي $w(c_i)\,\Delta x$، حيث c_i هي بعض النقاط في الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$. بالإضافة إلى ذلك، يكون العمق في كل نقطة على هذه الشريحة حوالي c_i. يمكننا عندئذ تقريب القوة F_i المؤثرة على هذه الشريحة من السد من وزن المياه الواقع فوق لوحة بحجم هذا الجزء لكن موجهة أفقيًا:

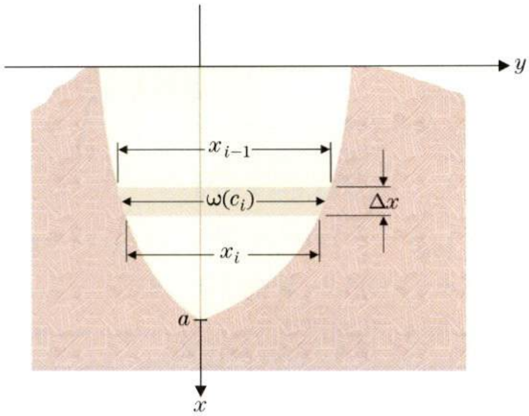
$$F_i \approx \underbrace{1,000}_{\text{كثافة الوزن}}\ \underbrace{w(c_i)}_{\text{الطول}}\ \underbrace{\Delta x}_{\text{العرض}}\ \underbrace{c_i}_{\text{العمق}} = 1,000\, c_i w(c_i)\, \Delta x$$

بإضافة القوى المؤثرة على كل شريحة معًا، تكون القوة الإجمالية F على السد حوالي

$$F \approx \sum_{i=1}^{n} 1,000 c_i w(c_i)\, \Delta x$$



الشكل 8.54
الضغط عند عمق معطى هو نفسه بغض النظر عن الإتجاه



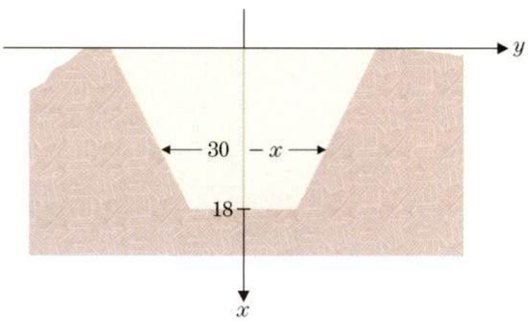
الشكل 8.55
القوة المؤثرة على سد

بالتعرف على هذا كونه مجموع ريمان وبأخذ النهاية عندما $n \to \infty$. نحصل على القوة الهيدروستاتيكية الإجمالية على السد.

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1{,}000 c_i w(c_i)\ \Delta x = \int_0^a 1{,}000\, xw(x)\, dx \tag{6.7}$$

مثال 6.7 إيجاد القوة الهيدروستاتيكية على سد

يتخذ السد شكلًا لشبه منحرف بارتفاع 18 مترًا. يبلغ العرض في الجزء العلوي 30 مترًا والعرض في الجزء السفلي 12 مترًا. (انظر الشكل 8.56). أوجد القيمة العظمى للقوة الهيدروستاتيكية التي سيحتاج إليها السد كي يصمد. أوجد القوة الهيدروستاتيكية إذا أدّى الجفاف إلى خفض منسوب مستوى المياه إلى 3 أمتار.



الشكل 8 56
سد على شكل شبه منحرف

الحل لاحظ أنّ دالة العرض هي دالة خطية للعمق حيث $w(0) = 30$ و $w(18) = 12$. يكون الميل عندئذٍ $\frac{18}{-18} = -1$ وهكذا، $w(x) = 30 - x$. من (6.7)، تكون القوة الهيدروستاتيكية عندئذ

$$F = \int_0^{18} \underbrace{1{,}000}_{\text{كثافة الوزن}}\ \underbrace{x}_{\text{العمق}}\ \underbrace{(30 - x)}_{\text{العرض}}\, dx$$

$$= 500{,}000x^2 - 1{,}000\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{18} = 29{,}989{,}440 \text{ N}$$

إذا انخفض مستوى المياه 3 أمتار، سيبلغ عرض السد عند مستوى المياه 27 مترًا. وبإنخفاض نقطة الأصل بقيمة 3 أمتار، تحقق دالة العرض الجديدة $w(0) = 27$ و $w(15) = 12$. يبقى

الميل يساوي 1–. ولذلك، يعطى العرض بالصيغة $w(x) = 27 - x$. من (6.7)، تكون القوة الهيدروستاتيكية الآن

$$F = \int_0^{15} \underbrace{1{,}000}_{\text{كثافة الوزن}} \; \underbrace{x}_{\text{العمق}} \; \underbrace{(27-x)}_{\text{العرض}} \, dx$$

$$= 450{,}000x^2 - 1{,}000\,\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{15} = 19{,}669{,}000 \text{ N}$$

لاحظ أنّ هذا يمثّل تصغيراً للقوّة بنسبة تزيد عن 34%. ■

تمارين 8.6

تمارين كتابية

1. لكل شغل ودفع وعزم أول: حدّد الكميات الموجودة في التعريف (مثال، القوة والمسافة) والحسابات التي تُستخدم لها (مثال، تغيّر في السرعة المتجهة).

2. لا يكون مركز الكتلة دائمًا هو المكان الذي يكون فيه نصف الكتلة على جانب والنصف الثاني من الكتلة على الجانب الآخر. أعط مثالًا حيث يوجد أكثر من نصف الكتلة على أحد الجانبين (راجع المثالين 6.5 و 6.6) واشرح سبب توازن الجسم عند مركز الكتلة.

3. يتمتع الأشخاص الذين يلعبون دور الالتقاط بطريقة ما تبدو غريزية حيث يسحبون أيديهم للوراء عند قيامهم بالتقاط الكرة. لالتقاط كرة، يجب عليك تطبيق دفع يساوي الكتلة مضروبة في السرعة المتجهة للكرة. بسحب يدك للوراء، يتزايد مقدار الزمن الذي تقوم فيه بإبطاء الكرة. استخدم معادلة زخم الدفع لتفسير سبب تصغير هذا الأمر للقوة المتوسطة في يديك.

4. تنطلق كرة تنس نحوك بسرعة 160 km/h. بعد ضربك للكرة، تتحرّك مبتعدة عنك بسرعة 160 km/h. يقيس الشغل التغيّرات في الطاقة. اشرح سبب وجود شغل مبذول من مضرب التنس على الكرة على الرغم من أنّ الكرة لها السرعة نفسها قبل وبعد الضربة.

---

1. أحدثت قوة من 5 نيوتن تمدد على نابض 4 سنتيمتر. أوجد الشغل المبذول في تمدد هذا النابض 6 سنتيمترات أبعد من طوله الطبيعي.

2. أحدثت قوة من 10 نيوتن تمدد نابض 2 سنتيمتر. أوجد الشغل المبذول في تمدد هذا النابض 6 سنتيمترات أبعد من طوله الطبيعي.

3. رافع أثقال يرفع 112 كيلوجرام لمسافة 50 سنتيمترًا. أوجد الشغل المبذول (كما تم قياسه بالسنتيمتر-كيلوجرام).

4. مصارع يرفع منافسه الذي يزن 135 كيلوجرام من فوق رأسه، على ارتفاع 1.82 متر. أوجد الشغل المبذول (كما تم قياسه بالمتر-كيلوجرام).

5. يزن صاروخ ممتلئ بالوقود 4500 كيلوجرام عند الإطلاق. بعد الإطلاق، يحظى الصاروخ بارتفاع ويفقد وزنًا حيث يتم حرق الوقود. على فرض أنّ الصاروخ فقد 0.45 كيلوجرام من الوقود لكل 4.5 متر من الارتفاع المكتسب. اشرح سبب أنّ الشغل المبذول لإرتفاع الصاروخ إلى 9000 متر هو $\int_0^{9000}(4500 - x/4.5)\,dx$ واحسب التكامل.

6. بالعودة إلى التمرين 5. على فرض أنّ صاروخًا يزن 3600 كيلوجرام عند الإطلاق ويفقد 0.45 كيلوجرام من الوقود لكل 3 أمتار من الارتفاع المكتسب. أوجد الشغل المطلوب ليرتفع الصاروخ إلى 3000 متر.

7. تزن سلسلة طولها 12 مترًا 500 كيلوجرام ويتم سحبها لأعلى على سطح قارب. السلسلة موجهة رأسيًا والجزء العلوي من السلسلة يبدأ في المياه 9 أمتار أسفل السطح. احسب الشغل المبذول.

8. تم رفع دلو مسافة 24 مترًا بمعدل 1m/s يحتوي الدلو مبدئيًا على 45 كيلوجرام من الرمال لكن تتسرّب منه الرمال بمعدّل 0.9 كيلوجرام بالثانية. احسب الشغل المبذول.

9. (a) على فرض أنّ محرك سيارة بذل قوة $800x(1-x)$ نيوتن عندما تكون السيارة في الموقع x كيلومتر، $0 \le x \le 1$. احسب الشغل المبذول. (b) تقيس القوة بالأحصنة معدل الشغل المبذول كدالّة بالزمن. اشرح سبب كون ذلك لا يساوي $800x(1-x)$. إذا استغرقت السيارة 80 ثانية لتقطع مسافة كيلومتر، احسب متوسط القوة بالأحصنة $(1 \text{ hp} = 75 \text{ N-m/s})$.

10. (a) يوجد برج مائي كروي الشكل طول نصف قطره 15 مترًا، يمتد من 60 مترًا إلى 90 مترًا فوق سطح الأرض. احسب الشغل المبذول في ملء الخزان من الأرض. (b) احسب الشغل المبذول في ملء الخزان من نصف المسافة.

11. أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرها 1 m وارتفاعها 3 m ممتلئة بالماء. احسب الشغل المبذول عند ضخ كل الماء إلى الخارج انطلاقاً من الجزء العلوي للأسطوانة إذا (a) كانت الأسطوانة في وضع قائم (المقاطع العرضية الدائرية موازية للأرض) و(b) كانت الأسطوانة على جانبها (المقاطع العرضية الدائرية متعامدة على الأرض). تبلغ كثافة وزن الماء 9800 N/m^3.

12. خزّان ماء على شكل مخروط دائري قائم ارتفاعه 3 أمتار وطول نصف قطر قاعدته 1.5 مترًا، حيث أنّ رأسه على الأرض. (فكر في مخروط مثلجات نقطته الرأسية مواجهة لأسفل). إذا كان الخزان ممتلئًا، فأوجد الشغل المبذول عند ضخ كل الماء إلى الخارج إنطلاقاً من الجزء العلوي للخزان.

13. يتشارك عاملان في مهمة حفر فجوة مستطيلة الشكل إلى عمق 3 أمتار. يقوم عمال آخرين بإزالة التراب الناتج من حفر الفجوة. بافتراض وجود كثافة ثابتة للتراب، ما العمق الذي ينبغي أن يصل إليه العامل الأول في الحفر للقيام بنصف الشغل؟ اشرح السبب أنّ 1.5 مترًا هي إجابة غير صحيحة.

14. سيتم حفر حوض على عمق 60 سنتيمترًا. المقاطع العرضية لها شكل _/ عرضها 20 سنتيمترًا في الجزء السفلي و50 سنتيمترًا في الجزء العلوي منها. أوجد العمق الذي تم فيه بذل نصف الشغل.

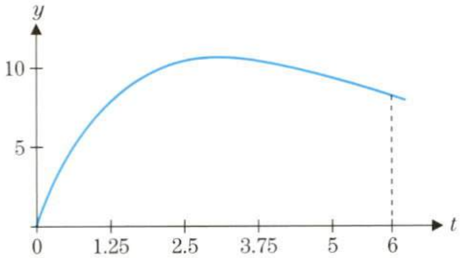
.15 في المثال 6.4، على فرض أنّ كرة البيسبول كانت تنطلق في سرعة 30 m/s. ستتغيّر القوة المبذولة من المضرب على الكرة إلى القيم الموجودة في الجدول. قدّر دفع وسرعة الكرة بعد الاصطدام.

t (s)	0	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008
F (N)	0	1000	2100	4000	5000	5200	2500	1000	0

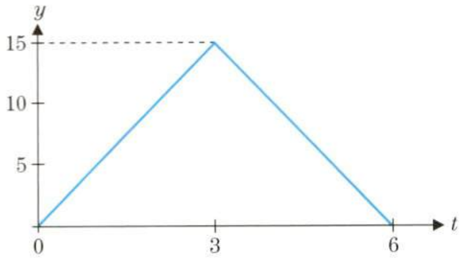
.16 تم إجراء فحص تصادم لسيارة ما. قوة الجدار على المصد الأمامي مبينة في الجدول. قدّر دفع وسرعة السيارة (استخدم صلاج $m = 200$). (إرشاد: 1 صلاج = 14.6 كيلوجرام تقريباً)

t (s)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
F (N)	0	8000	16,000	24,000	15,000	9000	0

.17 يبيّن أدناه **منحنى الضغط مع الزمن** $f(t) = 10te^{-t/3}$ لنموذج صاروخ. احسب القيمة العظمى للضغط. احسب الدفع.



.18 يبيّن أدناه منحنى الضغط مع الزمن لنموذج صاروخ. احسب الدفع. واستنادًا إلى إجاباتك في التمرينين 17 و18، أي صاروخ سيصل إلى ارتفاع أعلى؟



.19 احسب الكتلة ومركز الكتلة لجسم ما بكثافة تبلغ $\rho(x) = \frac{x}{6} + 2 \text{ kg/m}$، $0 \le x \le 6$. اشرح بإيجاز بدلالة دالة الكثافة السبب أنّ مركز الكتلة ليس عند $x = 3$.

.20 احسب الكتلة ومركز الكتلة لجسم ما بكثافة $\rho(x) = 3 - \frac{x}{6} \text{ kg/m}$، $0 \le x \le 6$. اشرح بإيجاز بدلالة دالة الكثافة السبب أنّ مركز الكتلة ليس عند $x = 3$.

.21 احسب الوزن بالجرامات لجسم يمتد من $x = -3$ إلى $x = 27$ له كثافة $\rho(x) = \left(\frac{1}{46} + \frac{x+3}{690}\right)^2$ صلاج/cm.

.22 احسب الوزن بالجرامات لجسم يمتد من $x = 0$ إلى $x = 32$ له كثافة $\rho(x) = \left(\frac{1}{46} + \frac{x+3}{690}\right)^2$ صلاج/cm.

.23 احسب مركز الكتلة للجسم المذكور في التمرين 21. ينمذج هذا الجسم مضرب البيسبول في المثال 6.5 وهو "ممسوك بإحكام" (ممسوك من مكان أعلى المقبض بـ 8 سنتيمترات). قارن بين الكتل ومراكز الكتل للمضربين.

.24 احسب مركز الكتلة للجسم المذكور في التمرين 22. ينمذج هذا الجسم مضرب بيسبول يزيد طوله 5 سنتيمترات عن المضرب المذكور في المثال 6.5. قارن بين الكتل ومراكز الكتل للمضربين.

.25 احسب الكتلة والوزن بالجرامات ومركز الكتلة لجسم يمتد من $x = 0$ إلى $x = 30$ كثافته $\rho(x) = 0.00468\left(\frac{3}{16} + \frac{x}{60}\right)$ صلاج/cm.

.26 ينمذج الجسم في التمرين 25 مضرب بيسبول من الألومنيوم (مجوف وسماكته 1 سنتيمتر). قارن الكتلة ومركز الكتلة بتلك الخاصة بالمضرب الخشبي المذكور في المثال 6.5. يزعم خبراء البيسبول أنّه من الأسهل تسديد رمية داخلية (قيمة x صغيرة) باستخدام مضرب من الألومنيوم. اشرح السبب أنّ حساباتك تشير إلى صحة ذلك.

.27 يبين الشكل أدناه الرسم التخطيطي لنموذج صاروخ. على فرض أنّ المقياس الرأسي يرتفع 3 وحدات والمقياس الأفقي عرضه 6 وحدات. استخدم الهندسة الأساسية لحساب مساحة كل من المناطق الثلاث من الرسم التخطيطي للصواريخ. على فرض أنّ كثافة ثابت ρ، حدّد موقع الإحداثي x لمركز كتلة كل منطقة. (إرشاد: يمكن التفكير في المنطقة الأولى باعتبارها تمتد من $x = 0$ إلى $x = 1$ بكثافة $\rho(3 - 2x)$. تمتد المنطقة الثالثة من $x = 5$ إلى $x = 6$ بكثافة $\rho(6 - x)$).

.28 لنموذج الصاروخ في التمرين 27، استبدل الصاروخ بـ 3 جسيمات، واحد لكل منطقة. على فرض أنّ كتلة كل جسيم تساوي مساحة المنطقة وأنّ موقع الجسيم الموجود على المحور x يساوي مركز كتلة المنطقة. أوجد مركز الكتلة للنظام من 3 جسيمات. [تم تصميم الصواريخ بزعانف سفلية كبيرة بما فيه الكفاية بحيث يتحرك مركز الكتلة بالقرب من الجزء السفلي (أو، في الشكل الموجود هنا، الجانب الأيسر) من الصاروخ. يحسّن هذا الأمر من استقرار انطلاق الصاروخ].

في التمارين 32–29، أوجد نقطة المركز لكل منطقة. نقطة المركز هي مركز الكتلة لمنطقة لها كثافة ثابتة. (إرشاد: بدّل في المثال (6.6) لإيجاد الإحداثي y $(\bar{y})$).

.29 المثلث رؤوسه $(0, 0)$ و $(4, 0)$ و $(4, 6)$

.30 المعيّن رؤوسه $(0, 0)$ و $(3, 4)$ و $(8, 4)$ و $(5, 0)$

.31 المنطقة محدودة بواسطة $y = 4 - x^2$ و $y = 0$.

.32 المنطقة محدودة بواسطة $y = x$ و $y = -x$ و $x = 4$.

33. يتخذ السد شكل شبه منحرف ارتفاعه 18 مترًا. وعرضه في الجزء العلوي 12 مترًا والعرض في الجزء السفلي 30 مترًا. أوجد القيمة العظمى للقوة الهيدروستاتيكية التي سيحتاج الجدار أن يصمد أمامها. اشرح السبب أنّ القوة أكبر بكثير من القوة المبذولة في المثال 6.7.

34. أوجد القيمة العظمى للقوة الهيدروستاتيكية في المثال 33 إذا حدث جفاف يخفّض منسوب مستوى المياه إلى 3 أمتار.

35. تم تثبيت نافذة رؤية تحت الماء في حوض للأسماك. طول نصف قطرها الدائري 1.5 مترًا. يقع مركز الدائرة 12 مترًا تحت مستوى الماء. أوجد القوة الهيدروستاتيكية المبذولة على النافذة.

36. توجد نافذة رؤية تحت الماء مستطيلة الشكل عرضها 12 مترًا. تمتد النافذة من سطح الماء حتى عمق 3 أمتار. أوجد القوة الهيدروستاتيكية المبذولة على النافذة.

37. نافذة آلة التصوير الموجودة في غواصة آلية تتخذ شكلًا دائريًا طول نصف قطرها 8 سنتيمترات. ما مقدار القوة الهيدروستاتيكية التي ستحتاج النافذة وقادرة على تحملها للوصول إلى عمق 300 متر؟

38. يحمل أحد الغواصين ساعة يد إلى عمق 18 مترًا. طول نصف قطر غطاء وجه الساعة دائري الشكل 2.5 سنتيمتر. ما مقدار القوة الهيدروستاتيكية التي سيحتاج غطاء وجه الساعة لتستمر الساعة في العمل؟

التطبيقات

39. علماً أنّ القدرة هي ناتج ضرب القوة والسرعة المتجهة، أحسب القوة بالأحصنة التي تحتاج إليها لرفع جسم وزنه 100 طن مثل حوت أزرق عند $30\ \text{km/h}$ $(1\ \text{hp} = 75\ \text{N-m/s})$. (لاحظ أنّ الحيتان الزرقاء تسبح بكفاءة بحيث تتمكن من الحفاظ على هذه السرعة بناتج يبلغ 60–70 hp).

40. لقوة ثابتة F مبذولة على طول فترة زمنية t، يعرّف الدفع بالصيغة $F\cdot t$. لأجل قوّة متغيّرة $F(t)$، اشتق صيغة الدفع $J=\int_a^b F(t)\,dt$.

41. العزم الأول لجسم صلب كثافته $\rho(x)$ هو $\int_a^b x\rho(x)\,dx$. يُعد العزم الثاني حول المحور y، المعرّف بالتكامل المحدود $\int_a^b x^2\rho(x)\,dx$، مهمًا أيضًا في التطبيقات. كلما كبر هذا العدد، زادت صعوبة تدوير المجسّم حول المحور y. احسب قيم العزم الثاني لمضارب البيسبول الموجودة في المثال 6.5 والتمرين 21. إنّ إمساك المضرب بإحكام يجعل من السهل أرجحته (والتحكم فيه). احسب النسبة المئوية التي يقل بها العزم الثاني من خلال إمساك المضرب بإحكام على بُعد 8 سنتيمتر.

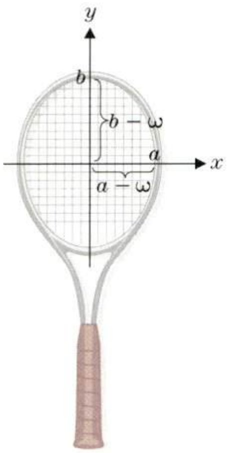
42. صدفةً. يقوم لاعبو البيسبول بشكل غير قانوني "بسد" مضاربهم عن طريق حفر جزء من الخشب من نهاية المضارب وحشو الثقب بمادة خفيفة مثل الفلين. إنّ ميزة هذا الإجراء هو أنّ العزم الثاني يصغر بشكل ملحوظ. لنمذجة هذا، استخدم المضرب من المثال 6.5 وقم بتغيير الكثافة إلى

$$\rho(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{46}+\dfrac{x}{690}\right)^2, & 0\le x\le 28\\[2ex] \left(\dfrac{1}{92}+\dfrac{x}{690}\right)^2, & 28<x\le 30\end{cases}$$

بتمثيل فجوة لنصف قطر $\frac{1}{4}''$ وطول $2''$ احسب الكتلة والعزم الثاني للمضرب المحشو بالفلين وقارنه بالمضرب الأصلي.

43. يعطى العزم الثاني (انظر التمرين 41) لقرص كثافته ρ له شكل القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بالتكامل المحدود $\int_{-a}^{a} 2\rho b x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$. استخدم CAS الخاص بك لإيجاد قيمة هذا التكامل.

44. استخدم النتيجة من التمرين 43 لتبيّن أنّ العزم الثاني لرأس مضرب التنس في الرسم التخطيطي (في الصفحة التالية) هو $M=\rho\frac{\pi}{4}[ba^3-(b-w)(a-w)^3]$.



45. لمضارب التنس، يعني عزم ثاني كبير (انظر التمرينين 43 و 44) تدوير أقل للمضرب عند تسديد الضربات خارج المركز. قارن العزم الثاني لمضرب خشبي $(a=9, b=12, w=0.5)$ ومضرب متوسط الحجم $(a=10, b=13, w=0.5)$ ومضرب كبير الحجم $(a=11, b=14, w=0.5)$.

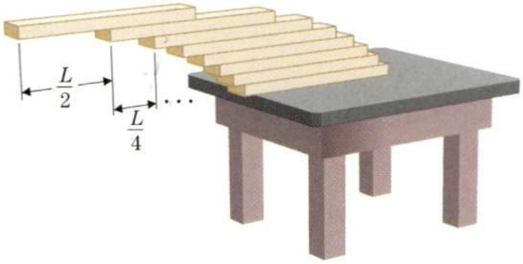
46. لتكن M هي العزم الثاني الموجود في التمرين 44. أثبت أنّ $\frac{dM}{da}>0$ واستنتج أنّ المضارب الأكبر حجمًا لها قيم عزم ثاني أكبر. وأيضًا، أثبت أنّ $\frac{dM}{dw}>0$ وفسّر هذه النتيجة.

تمارين استكشافية

1. حيث تحسّنت الأدوات، زادت مستويات الارتفاع التي يتم قطعها في القفز بالزانة. ويمكن استمداد تقدير أولي للقيمة العظمى الممكنة للقفز بالزانة والحفاظ على مبادئ القدرة. على فرض أنّ القيمة العظمى للسرعة التي يستطيع أن يجري بها لاعب قفز بالزانة حاملًا عصا طويلة هو $40\ \text{km/h}$. حوّل هذه السرعة إلى m/s. ستبلغ الطاقة الحركية للاعب القفز هذا $\frac{1}{2}mv^2$ (اترك m كقيمة مجهولة حالياً). ستساوي هذه الطاقة الحركية الأولية طاقة الجهد في الجزء العلوي من الزانة ناقص أي طاقة امتصتها العصا الطويلة (والتي سنقوم بتجاهلها). قم بإعداد طاقة الجهد، $32mh$ تساوي الطاقة الحركية وحل حيث h. يمثّل هذا القيمة العظمى التي يمكن أن ترتفع له مركز الكتلة الخاص بلاعب القفز. أضف 1 متر لارتفاع مركز الكتلة الخاص بلاعب القفز وستحصل على تقدير للقيمة العظمى الممكنة للقفز بالزانة. قارن هذا برقم سيرجي بوبكا القياسي للقفز بالزانة لعام 1994 لـ $20'1\frac{3}{4}''$

2. سيبقى جسم ما على طاولة طالما أنّ مركز كتلة الجسم يقع على الطاولة. على سبيل المثال، ستتوازن لوحة طول قياسها 1 إذا كان نصف اللوحة يقع على حافة الطاولة. أثبت أنّ

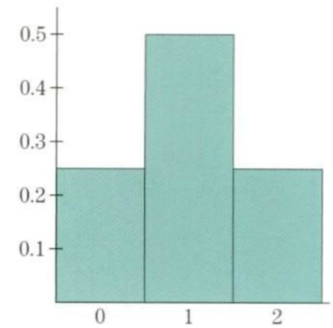
اللوحتين المتجانستين اللتين سيبلغ طولهما 1 ستتوازنان إذا كان $\frac{1}{4}$ اللوحة الأولى يقع على حافة الطاولة و $\frac{1}{2}$ اللوحة الثانية يقع على حافة اللوحة الأولى. أثبت أنّ اللوحات الثلاثة التي طول قياسها 1 ستتوازن إذا كان $\frac{1}{6}$ اللوحة الأولى يقع على حافة الطاولة و $\frac{1}{4}$ اللوحة الثانية يقع على حافة اللوحة الأولى و $\frac{1}{2}$ اللوحة الثالثة يقع على حافة اللوحة الثانية. قم بتعميم هذا على إجراء لتوازن n لوحة. كم لوحة تحتاج اليها بحيث تقع اللوحة الأخيرة بالكامل فوق حافة الطاولة؟



الدرس 8-7 الاحتمال

تركز مجالات الاحتمال والإحصاء في الرياضيات على تحليل العمليات العشوائية. في هذا الدرس، نعطي مقدمة مختصرة عن استخدام حساب التفاضل والتكامل في نظرية الاحتمال.

نبدأ بمثال بسيط يتضمّن رمي قطع نقود معدنية. على فرض أنّك رميت قطعتي نقود معدنية كل منهما لديها فرصة 50% أن تستقر على الصورة. نظرًا إلى أنّ الأمر عشوائيًا، لا يمكنك حساب عدد مرات حصولك على الصورة بالضبط عند رمي قطع النقود المعدنية لعدد محدّد من المرات. ولكن يمكنك حساب ترجيح لكل نتيجة ممكنة. إذا رمزنا إلى الصورة بواسطة H والكتابة بواسطة T، إذًا تكون الأربع نتائج الممكنة من رمي قطعتي نقود معدنية هي HH و HT و TH و TT. يُعد كل من هذه النتائج الأربع ترجيحاً بشكل متساوٍ، لذا يمكننا قول أنّه لكل منها احتمالًا $\frac{1}{4}$. هذا يعني أنّه، في المتوسط، سيقع كل من هذه الأحداث بمعدل يبلغ ربع المحاولات التي تقوم بها. ولقول هذا بطريقة أخرى، سيبلغ معدل **التكرار النسبي** الذي سيقع به كل حدث في عدد كبير من التجارب بشكل تقريبي $\frac{1}{4}$.



الشكل 8.57
مدرّج تكراري لرمي قطعتي نقود معدنية

لاحظ أنّه بناءً على عملياتنا الحسابية أعلاه، فإنّ احتمال الحصول على الصورتين مع بعضهما هو $\frac{1}{4}$ واحتمال الحصول على صورة واحدة هو $\frac{2}{4}$ (بما أنّه يوجد طريقتان لحدوث هذا: HT وTH) واحتمال عدم الحصول على أي صورة هو $\frac{1}{4}$. غالبًا ما نلخّص مثل تلك المعلومات بعرضها على **مدرّج تكراري**، تمثيل بياني بالأعمدة حيث تكون النتائج منظّمة على محور أفقي. (انظر الشكل 8.57).

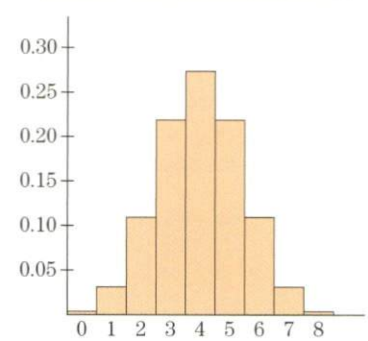
بدلاً من ذلك إذا رمينا 8 قطع نقود معدنية، فإنّ احتمالات الحصول على عدد معروف من الصور معطى في الجدول المرافق ويوضّح الشكل 8.58 المدرج التكراري المناظر. يتوجّب عليك ملاحظة أنّ مجموع جميع الاحتمالات هو 1 (أو 100% حيث إنّه من المؤكد أنّ واحدة من النتائج الممكنة ستحدث في محاولة معطاة). هذه هي واحدة من خصائص التعريف لنظرية الاحتمال. يطلق على خاصية أساسية أخرى اسم **مبدأ الجمع**: لحساب احتمال الحصول على 6 أو 7 أو 8 صور (أو أي نتائج متنافية أخرى)، ببساطة اجمع الاحتمالات الإفرادية مع بعضها البعض:

العدد	الاحتمال
0	1/256
1	8/256
2	28/256
3	56/256
4	70/256
5	56/256
6	28/256
7	8/256
8	1/256

$$P(\text{6 أو 7 أو 8 صور}) = \frac{28}{256} + \frac{8}{256} + \frac{1}{256} = \frac{37}{256} \approx 0.145$$

يكشف التفسير البياني لعملية الحساب هذه الكثير. في المدرّج التكراري الموجود في الشكل 8.58، لاحظ أنّ كل عمود هو مستطيل بعرض يبلغ 1. إذًا الاحتمال المرتبط بكل عمود يساوي مساحة المستطيل. بمصطلحات بيانية،

- المساحة الكلية في مثل ذلك المدرّج التكراري تساوي 1.
- يساوي احتمال الحصول على ما بين 6 و 8 صور (ضمناً) ناتج جمع مساحات المستطيلات التي تقع بين 6 و8 (ضمناً).

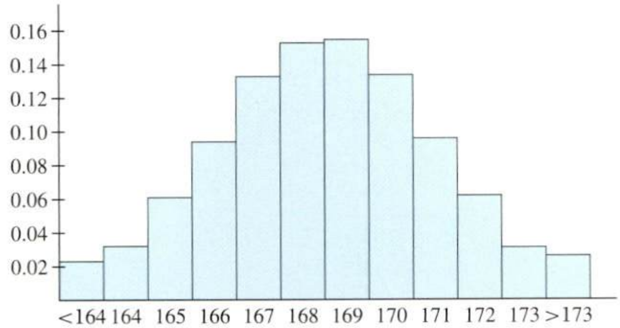


الشكل 8.58
مدرّج تكراري لرمي ثمانية قطع نقود معدنية

يُعد السؤال المعقد بشكل أكبر هو الاستفسار حول احتمال أن يكون طول شخص مختار بشكل عشوائي 175 cm أو 177 cm. لا توجد نظرية سهلة يمكننا استخدامها هنا لحساب الاحتمالات (حيث إنّ ليست جميع الأطوال مرجّح أن تتساوى). في هذه الحالة، نستخدم التناظر بين الاحتمال والتكرار النسبي. إذا جمّعنا معلومات حول أطوال عدد كبير من البالغين، يمكننا إيجاد ما يأتي:

الطول	<164 cm	164 cm	165 cm	166 cm	167 cm	168 cm	169 cm	170 cm	171 cm	172 cm	173 cm	>173 cm
عدد الأشخاص	23	32	61	94	133	153	155	134	96	62	31	26

بما أنّ العدد الإجمالي للأشخاص المشاركين في الاستبيان هو 1000، يكون التكرار النسبي للطول 175 cm هو $0.155 = \frac{155}{1000}$ والتكرار النسبي للطول 177 cm هو $0.134 = \frac{134}{1000}$. تقدير إحتمال 175 cm أو 177 cm هو $0.289 = 0.134 + 0.155$. يوضّح الشكل 8.59 مدرّج تكراري.



الشكل 8.59

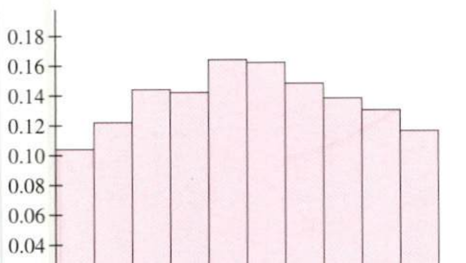
مدرّج تكراري للتكرار النسبي للأطوال

للإجابة عن سؤال أكثر تحديدًا، مثل ما احتمال أن يكون اختيار أحد الأشخاص عشوائياً طوله 174 cm أو 175 cm. سوف نحتاج الى تجزيئ بياناتنا كما هي التجزئة في الجدول الآتي:

166.5 cm	167 cm	167.5 cm	168 cm	168.5 cm	169 cm	169.5 cm	170 cm	170.5 cm	171 cm
52	61	72	71	82	81	74	69	65	58

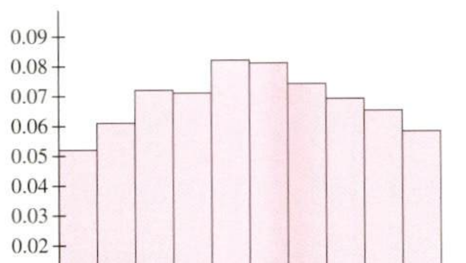
يمكن تقدير احتمال أن يكون شخص ما بطول 175 cm بواسطة معدل التكرار النسبي للأشخاص بطول 175 cm المشاركين في الاستبيان الخاص بنا، والذي هو $0.081 = \frac{81}{1000}$. وبالمثل، احتمال أن يكون شخص ما بطول 174 cm هو $0.082 = \frac{82}{1000}$ تقريبًا. إذًا يكون الاحتمال 174 cm أو 175 cm هو $0.163 = 0.081 + 0.082$ تقريبًا. يوضّح الشكل 8.60a مدرّج تكراري لهذا الجزء من البيانات.

لاحظ أنّه، بما أنّ كل عمود من المدرّج التكراري يمثّل الآن مدى نصف سنتيمتر من الطول، لم يعد بإمكاننا تفسير المساحة في المدرّج التكراري على أنّها الاحتمال. سنقوم بتعديل المدرّج التكراري لصنع ترابط مساحة بشكل أوضح. في الشكل 8.60b، لقد قمنا بتسمية الطول على المحور الأفقي بالسنتيمتر، بينما يبيّن الرأسي مثلي التكرار النسبي. طول العمود الواقع عند 169 cm هو 0.162 وعرضه $\frac{1}{2}$. وتناظر مساحته، $0.081 = (0.162)\frac{1}{2}$، التكرار النسبي (أو الاحتمال) للطول 175 cm.



الشكل 8.60b

مدرّج تكراري يبيّن مثلي التكرار النسبي



الشكل 8.60a

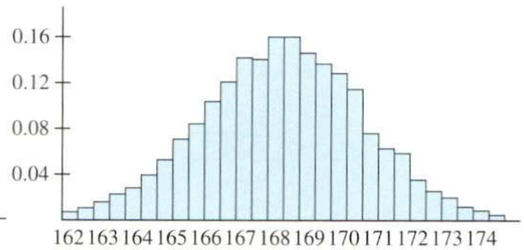
مدرّج تكراري للتكرار النسبي للأطوال

بالطبع، يمكننا الاستمرار في تجزئة فترات الطول إلى أجزاء أصغر وأصغر. فكر في إجراء ذلك بينما تقوم بتعديل المقياس الموجود على المحور الرأسي بحيث تعطي مساحة كل مستطيل (الطول مضروبًا في عرض الفترة) التكرار النسبي (الاحتمال) لفترة الطول تلك دائمًا. مثال ذلك: على فرض أنّ هناك n فترات طول بين 172 cm و 175 cm. لتكن x تمثّل الطول بالسنتيمترات و $f(x)$ تساوي

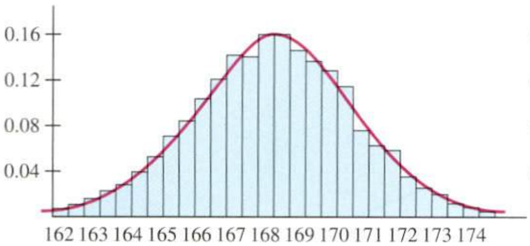
طول عمود المدرّج التكراري للفترة التي تحتوي على x. لتكن $x_1 = 68 + \frac{1}{n}$، $x_2 = 68 + \frac{2}{n}$ وهكذا. لتكون $x_i = 68 + \frac{i}{n}$. لكل $1 \le i \le n$ ولتكن $\Delta x = \frac{1}{n}$. يتم تقدير احتمال أن يكون طول شخص تم اختياره عشوائيًا بين 172 cm و 175 cm بواسطة مجموع مساحات مستطيلات المدرّج التكراري المتناظرة. المعطى بواسطة

$$P(168 \le x \le 169) \approx f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \qquad (7.1)$$

لاحظ أنّه يتزايد العدد n. "سيستوي" المدرّج التكراري الموجود في الشكل 8.61 ليقترب من شكل منحنى، كما يبدو في الشكل 8.62.



الشكل 8.61
مدرّج تكراري للأطوال



الشكل 8.62
دالة كثافة الاحتمال ومدرّج تكراري للأطوال

نطلق على هذه الدالة المنتهية $f(x)$ اسم **دالة كثافة الاحتمال (pdf)** للأطوال. لاحظ أنّه لأي معطى $i = 1, 2, \ldots, n$، $f(x_i)$ لا تعطى احتمال أن يساوي طول شخص ما x_i. بدلًا عن ذلك، لقيم Δx الصغيرة، تُعدّ الكمية $f(x_i)\,\Delta x$ تقريب لاحتمال أن يكون طول شخص تم اختياره عشوائيًا هو في مدى $[x_{i-1}, x_i]$.

لاحظ أنّه عندما $n \to \infty$، يجب أن يقترب مجموع ريمان في (7.1) من تكامل $\int_a^b f(x)\,dx$. هنا، تكون حدود التكامل 168 و 169. لدينا

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_{168}^{169} f(x)\,dx$$

لاحظ أنّه بتعديل قيم الدالة لكي يناظر الاحتمال المساحة، نكون قد عثرنا على أسلوب مألوف ومباشر لحساب الاحتمالات. نلخص الآن مناقشتنا ببعض التعريفات. تُعد الأمثلة السابقة خاصة **بتوزيعات احتمال متقطعة** (متقطعة انطلاقًا من فرضية أنّ الكمية التي يتم قياسها هي قيم من مجموعة معيّنة منتهية). على سبيل المثال، عند رمي قطع النقود المعدنية، يجب أن يكون عدد الصور عددًا صحيحًا. وعلى النقيض، تكون العديد من التوزيعات **متصلة**. أي إنّ، كميّة الفائدة (المتغيّر العشوائي) هي قيم فرضيّة من مدى متّصل للأعداد (فترة). على سبيل المثال، على الرغم من أنّه يتم تقريب الطول عادة إلى أقرب عدد صحيح من السنتمترات، يمكن أن يكون الطول الفعلي لأحد الأشخاص أي عدد.

يكون التمثيل البياني المناظر لمدرّج تكراري للتوزيعات المتصلة، هو التمثيل البياني لدالة كثافة احتمال (pdf). نقدم الآن تعريف دقيق لـ pdf.

التعريف 7.1

على فرض أنّ X هي متغيّر عشوائي له فرضيّة أي قيمة x لكل $a \le x \le b$. تكون دالة كثافة الاحتمال لـ X دالة $f(x)$ تحقق

(i) $f(x) \ge 0$ لكل $a \le x \le b$ — لا تكون دوال كثافة الاحتمال سالبة أبدًا.

و

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$. — الاحتمال الكلي 1.

يعطى الاحتمال الذي تقع فيه قيمة X (المرئيّة) بين c و d بالمساحة تحت التمثيل البياني لـ pdf على تلك الفترة. أي إنّ،

$$P(c \le X \le d) = \int_c^d f(x)\,dx$$ — يناظر الاحتمال المساحة تحت المنحنى.

الملاحظات التاريخية

بليز باسكال (1662–1623)
عالم رياضيات وفيزياء فرنسي كون فريقًا مع بيير فيرما لبدء دراسة نظامية للاحتمال. (انظر The Unfinished Game لكيث ديفلين للحصول على حساب حول هذا). يُنسب إلى باسكال فضل العديد من الاختراعات، بما في ذلك ساعة معصم ومقياس ضغط جوي ومكبس هيدروليكي ومحقنة ومجموعة متنوعة من آلات الحساب. واكتشف كذلك ما يُعرف الآن باسم مبدأ باسكال في إستاتيكا الموائع. (انظر القسم 5.6). من الممكن أن يكون قد أصبح باسكال واحد من مؤسسي حساب التفاضل والتكامل، ولكن قللت حالته الصحية السيئة والفترات الزمنية الكبيرة التي كرسها للتأملات الدينية والفلسفية من إنجازاته الرياضية.

لإثبات أنّ دالة تُعرف pdf من أجل متغيّر عشوائي ما (مجهول)، يجب إثبات أنّها تحقق الخاصيتين (i) و(ii) بالتعريف 7.1.

المثال 7.1 إثبات أنّ دالة هي pdf على فترة

أثبت أنّ $f(x) = 3x^2$ تعرّف pdf على الفترة $[0, 1]$ بإثبات الخاصيتين (i) و(ii) للتعريف 7.1.

الحل بشكل واضح، $f(x) \geq 0$. للخاصية (ii)، نقوم بتكامل pdf في مجالها. لدينا

$$\int_0^1 3x^2 dx = x^3 \Big|_0^1 = 1 \quad ■$$

المثال 7.2 استخدام pdf لتقدير الاحتمالات

على فرض أنّ $f(x) = \dfrac{0.4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.08(x-68)^2}$ هي دالة كثافة الاحتمال لأطوال ذكور بالغين بالسنتمتر. أوجد احتمال أن يكون طول ذكر بالغ تم اختياره عشوائيًا بين 172 cm و 175 cm. كذلك، أوجد احتمال أن يكون طول ذكر بالغ تم اختياره عشوائيًا بين 188 cm و 193 cm.

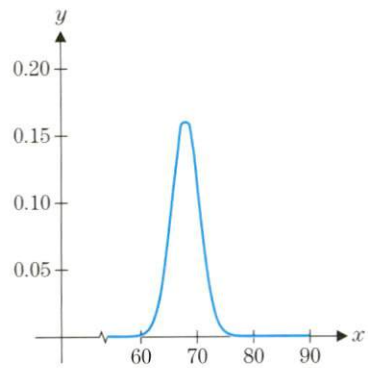
الحل لحساب الاحتمالات، تحتاج أولًا إلى تحويل الأطوال المحدّدة إلى سنتمترات (إذا كانت غير ذلك). الإحتمال أن يكون الطول بين 168 و 169 سنتمترًا هو

$$P(168 \leq X \leq 169) = \int_{168}^{169} \frac{0.4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.08(x-68)^2} dx \approx 0.15542$$

هنا، قمنا بتقريب قيمة التكامل عدديًا. (يمكنك استخدام قاعدة سمبسون أو طريقة التكامل العددي المدمجة في آلتك الحاسبة أو CAS). والإحتمال أن يكون الطول بين 174 و 176 سنتمترًا هو

$$P(174 \leq X \leq 176) = \int_{174}^{176} \frac{0.4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.08(x-68)^2} dx \approx 0.00751$$

حيث قربنا قيمة التكامل عدديًا مرة أخرى. ■



الشكل 8.63
أطوال الذكور البالغين

وفقًا للبيانات الموجودة في كتاب جيلز براندريث *Your Vital Statistics*، فإنّ pdf أطوال الذكور البالغين تبدو مثل التمثيل البياني لـ $f(x) = \dfrac{0.4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.08(x-68)^2}$ الموضّح في الشكل 8.63 والمستخدم في مثال 7.2. لقد رأيت على الأرجح منحنيات على شكل جرس مثل هذا من قبل. يشار إلى هذا التوزيع باسم **التوزيع الطبيعي**. إلى جانب التوزيع الطبيعي، توجد توزيعات احتمال عديدة أخرى مهمة في التطبيقات.

المثال 7.3 حساب احتمال مع pdf أسية

على فرض أنّ العمر الافتراضي بالأعوام لعلامة تجارية معينة لمصباح يتم توزيعه أسيًا بواسطة pdf $f(x) = 4e^{-4x}$. أوجد احتمال أن يدوم مصباح محدّد لمدة 3 أشهر أو أقل.

الحل أولًا، بما أنّ المتغيّر العشوائي يقيس العمر الافتراضي بالأعوام، حول 3 أشهر إلى $\frac{1}{4}$ عام. إذًا يكون الاحتمال

$$P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{4}\right) = \int_0^{1/4} 4e^{-4x} dx = 4\left(-\frac{1}{4}\right) e^{-4x}\Big|_0^{1/4}$$
$$= -e^{-1} + e^0 = 1 - e^{-1} \approx 0.63212 \quad ■$$

في بعض الحالات، من الممكن أن تكون هناك أسباب نظرية لافتراض أنّ لـ pdf لها صيغة معينة. في هذه الحالة، تكون المهمة الأولى هي تحديد قيم أي ثوابت للوصول إلى خصائص pdf.

المثال 7.4 تحديد معامل pdf

على فرض أنّ pdf لمتغيّر عشوائي صيغتها $f(x) = ce^{-3x}$ لبعض الثوابت c، مع $0 \le x \le 1$. أوجد قيمة c التي تجعل هذه الدالة pdf.

الحل لتكون pdf، نحتاج أولًا إلى أن تكون $f(x) = ce^{-3x} \ge 0$. لكل $x \in [0, 1]$. (ستكون هذه هي الحالة ما دام $c \ge 0$) كذلك، يجب أن يساوي التكامل في مجاله العدد 1. لذا، نضع

$$1 = \int_0^1 c\,e^{-3x}dx = c\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-3x}\bigg|_0^1 = \frac{c}{3}(1 - e^{-3})$$

فهي الآن تتبع أنّ $c = \dfrac{3}{1 - e^{-3}} \approx 3.1572$

عند pdf معطاة، يمكن حساب إحصاءات متعددة لإختصار خصائص المتغيّر العشوائي. يُعد الإحصاء الأكثر شيوعًا هو **الوسط**. أكثر وسيلة مشهورة لقياس القيمة المتوسطة. إذا رغبت في حساب متوسط درجات الاختبار 85، 89، 93، و 93، فستقوم على الأرجح بحساب الوسط، المعطاة كما يأتي: $\frac{85+89+93+93}{4} = 90$.

لاحظ هنا أنّه كان هناك ثلاثة من نتائج اختبار مختلفة مسجلة: 85، التي لديها تكرار نسبي $\frac{1}{4}$، وأيضاً 89، بتكرار نسبي $\frac{1}{4}$ وكذلك 93، بتكرار نسبي $\frac{2}{4}$. يمكننا كذلك حساب الوسط بضرب كل قيمة بالتكرار النسبي الخاص بها ثم إيجاد ناتج الجمع: $(85)\frac{1}{4} + (89)\frac{1}{4} + (93)\frac{2}{4} = 90$

الآن، على فرض أنّنا نرغب في حساب الوسط الخاص بطول الأشخاص في الجدول التالي.

الطول	163 cm	164 cm	165 cm	166 cm	167 cm	168 cm	169 cm	170 cm	171 cm	172 cm	173 cm	174 cm
العدد	23	32	61	94	133	153	155	134	96	62	31	26

سيكون من غير المنطقي كتابة أطوال الـ 1000 شخص جميعهم وإيجاد ناتج الجمع ثمّ القسمة على 1000. فمن الأسهل ضرب كل طول بالتكرار النسبي الخاص به وجمع النتائج. باتباع هذا الطريق، الوسط m تكون معطاة كما يأتي:

$$m = (163)\frac{23}{1000} + (164)\frac{32}{1000} + (165)\frac{61}{1000} + (166)\frac{94}{1000} + (167)\frac{133}{1000} + \cdots + (174)\frac{26}{1000}$$
$$= 168$$

إذا رمزنا إلى الأطوال بـ x_1، x_2 ..... x_n وافترضنا أنّ $f(x_i)$ هي معدل التكرار النسبي أو الاحتمال المناظر لـ $x = x_i$. إذًا يكون للوسط الصيغة

$$m = x_1f(x_1) + x_2f(x_2) + x_3f(x_3) + \cdots + x_{12}f(x_{12})$$

إذا كانت الأطوال معطاة في مجموعة البيانات الخاص بنا لكل نصف سنتمتر أو عُشر سنتمتر، سوف نحسب الوسط بضرب كل x في الاحتمال المناظر $f(x_i)\Delta x$. حيث Δx هي كسر سنتمتر بين نقاط البيانات. تكون للوسط الآن الصيغة

$$m = [x_1f(x_1) + x_2f(x_2) + x_3f(x_3) + \cdots + x_nf(x_n)]\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} x_if(x_i)\,\Delta x$$

حيث n هي عدد نقاط البيانات. لاحظ أنّه، بتزايد n واقتراب Δx من 0، يقترب مجموع ريمان من التكامل $\int_a^b xf(x)\,dx$. وهذا يعطينا التعريف التالي.

التعريف 7.2

يعطى **الوسط** μ لمتغيّر عشوائي له pdf $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ بالصيغة:

$$\mu = \int_a^b xf(x)\,dx \qquad (7.2)$$

على الرغم من أنّه يتم استخدام الوسط بشكل شائع لذكر القيم المتوسطة لمتغيّر عشوائي، من المهم إدراك أنّه ليس وسيلة القياس الوحيدة للمتوسط التي يستخدمها علماء الإحصاء. وسيلة قياس بديلة

اليوم في الرياضيات

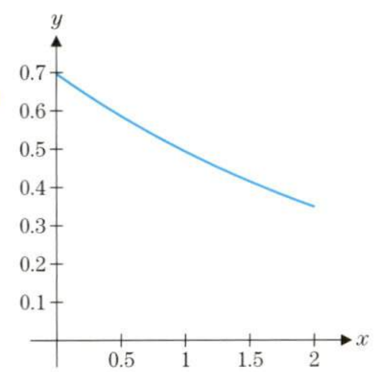
بيرسي دياكونيس (–1945)

عالم إحصاء أمريكي كان من أول الحاصلين على زمالة مؤسسة MacArthur المربحة، التي كثيرًا ما يطلق عليها اسم "منحة العبقرية". تدرب دياكونيس على الكمان في جوليارد حتى بلغ 14 عامًا، عندما غادر موطنه ليصبح موسيقي محترف لمدة 10 أعوام. عبّر عن اهتماماته المتنوّعة من خلال عمله، حيث يستخدم جميع مجالات الرياضيات والإحصاء في حل مسائل من جميع جوانب العلوم والهندسة.

للمتوسط هي **الوسيط**. قيمة -x التي تقسم الاحتمال إلى النصف. (أي إنّ، نصف جميع قيم المتغيّر العشوائي تقع عند أو تحت الوسيط ويقع النصف الآخر عند أو فوق الوسيط). في المثال 7.5 وفي التمارين، ستستكشف الحالات التي يقدم فيها كل قياس دليلاً مختلفاً عن متوسط متغيّرات عشوائية.

المثال 7.5 إيجاد الوسط والوسيط لعمر مجموعة من الخلايا

على فرض أنّ العمر بالأيام لكائن وحيد الخلية pdf له $f(x) = (\ln 2)e^{-kx}$. حيث $k = \frac{1}{2}\ln 2$. يكون المجال $0 \le x \le 2$ (الفرضيّة هنا أنّه عند الوصول لعمر يومين، تنقسم كل خلية إلى خليتين وليدتين). أوجد (a) الوسط الخاص بعمر الخلايا و (b) نسبة أعمار الخلايا الأصغر من الوسط و (c) الوسيط لعمر الخلايا.



الشكل 8.64
$y = (\ln 2)e^{-(\ln 2)x/2}$

الحل للجزء (a)، لدينا من (7.2) أنّه يعطى الوسط بالصيغة

$$\mu = \int_0^2 x(\ln 2)e^{-(\ln 2)x/2}dx \approx 0.88539 \text{ يوم}$$

حيث قرّبنا قيمة التكامل عدديًا. لاحظ أنّه، على الرغم من أنّ الخلايا تتراوح في العمر من 0 يوم إلى يومين، لا يبلغ الوسط 1. يوضّح التمثيل البياني لـ pdf في الشكل 8.64 أنّ صغار الأعمار على الأرجح أكثر من كبار الأعمار ويتسبّب هذا في أن يكون الوسط أقل من 1.

للجزء (b)، لاحظ أنّ نسبة الخلايا أعمارها أصغر من الوسط هي نفسها كإحتمال أن تكون خلية تم اختيارها عشوائيًا عمرها أصغر من الوسط. يتم إعطاء الاحتمال كما يأتي:

$$P(0 \le X \le \mu) \approx \int_0^{0.88539} (\ln 2)e^{-(\ln 2)x/2}dx \approx 0.52848$$

حيث قرّبنا قيمة التكامل عدديًا مرة أخرى. لذا، فإنّ نسبة أعمار الخلايا الأصغر من الوسط 53% تقريبًا. لاحظ أنّ في هذه الحالة لا يمثّل الوسط درجة 50% للاحتمالات. وبعبارة أخرى، لا يكون الوسط مماثل للوسيط.

لإيجاد الوسيط في الجزء (c)، يجب أن نحل لإيجاد قيمة العدد الثابت c بحيث تكون

$$0.5 = \int_0^c (\ln 2)e^{-(\ln 2)x/2}dx$$

بما أنّ الدالة الأصلية للدالة $e^{-(\ln 2)x/2}$ هي $-\frac{2}{\ln 2}e^{-(\ln 2)x/2}$، نحصل على

$$\begin{aligned} 0.5 &= \int_0^c \ln 2e^{-(\ln 2)x/2}dx \\ &= \ln 2\left[-\frac{2}{\ln 2}e^{-(\ln 2)x/2}\right]_0^c \\ &= -2e^{-(\ln 2)c/2} + 2 \end{aligned}$$

بطرح 2 من كلا الطرفين، نحصل على

$$-1.5 = -2e^{-(\ln 2)c/2}$$

بحيث تعطينا القسمة على -2 الناتج $0.75 = e^{-(\ln 2)c/2}$

وعند أخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الطرفين يعطينا

$$\ln 0.75 = -(\ln 2)c/2$$

في النهاية، الحل لإيجاد قيمة c يعطينا $c = \dfrac{-2\ln 0.75}{\ln 2}$

حيث يبلغ الوسيط $-2\ln 0.75/\ln 2 \approx 0.83$. يمكننا الآن استنتاج أنّ نصف الخلايا أعمارها أصغر من 0.83 يوم والنصف الآخر من الخلايا أعمارها أكبر من 0.83 يوم. ■

تمارين 8.7

تمارين كتابية

1. في النص، ذكرنا أنّ احتمال رمي قطعتي نقود معدنيتين عادلتين والحصول على صورتين هو $\frac{1}{4}$. إذا حاولت إجراء هذه التجربة أربع مرات، اشرح سبب عدم حصولك دائمًا على صورتين بالضبط في مرة من الأربع مرات. إذا كان الاحتمال لا يعطيك توقعات دقيقة، فما فائدته؟ للإجابة على هذا السؤال، ناقش المعلومات التي تم الوصول إليها بمعرفة أنّ احتمال الحصول على صورة واحدة وكتابة واحدة في التجربة الموجودة أعلاه هو $\frac{1}{2}$ (أي مثلي الكسر $\frac{1}{4}$).

2. على فرض أنك ترمي قطعتي نقود معدنيتين لعدة مرات (أو قم بمحاكاة هذا على آلتك الحاسبة أو الحاسوب الخاص بك). نظريًا، يكون احتمال الحصول على صورتين هو $\frac{1}{4}$. على المدى البعيد (عند رمي قطعتي نقود معدنيتين بمعدل أكبر وفي كثير من الأحيان)، كم ينبغي أن تكون النسبة لعدد مرّات الحصول على صورتين؟ حاول إجراء هذا وناقش كيفية مقارنة نتائجك بعملية الحساب النظرية.

3. وفقًا للشكلين 8.57 و8.58، صف الصورة التي تتوقّع أن يبدو عليها المدرّج التكراري لعدد أكبر من قطع النقود المعدنية. قارن مع الشكل 8.63.

4. يحدد طول الشخص بعوامل متعددة، وراثية وبيئية على حد سواء (مثال: النظام الغذائي). اشرح سبب إمكانية إنتاج مدرّج تكراري مشابه لذلك الناتج عن رمي عدد كبير من قطع النقود المعدنية.

في التمارين 6–1، أثبت أنّ الدالة المعطاة هي pdf على الفترة المعيّنة.

1. $f(x) = 4x^3, [0, 1]$
2. $f(x) = \frac{3}{8}x^2, [0, 2]$
3. $f(x) = x + 2x^3, [0, 1]$
4. $f(x) = \cos x, [0, \pi/2]$
5. $f(x) = \frac{1}{2}\sin x, [0, \pi]$
6. $f(x) = e^{-x/2}, [0, \ln 4]$

في التمارين 12–7، أوجد قيمة لـ c التي تكون عندها $f(x)$ pdf على الفترة المعيّنة.

7. $f(x) = cx^3, [0, 1]$
8. $f(x) = cx + x^2, [0, 1]$
9. $f(x) = ce^{-4x}, [0, 1]$
10. $f(x) = 2ce^{-cx}, [0, 2]$
11. $f(x) = \dfrac{c}{1 + x^2}, [0, 1]$
12. $f(x) = \dfrac{c}{\sqrt{1 - x^2}}, [0, 1]$

في التمارين 16–13، استخدم pdf الخاصة بمثال 7.2 لإيجاد احتمال أن يكون طول ذكر إماراتي تم اختياره عشوائيًا في المدى المعيّن.

13. بين 177 cm و 180 cm.
14. بين 195 cm و 205 cm.
15. بين 200 cm و 300 cm.
16. بين 60 cm و 150 cm.

في التمارين 20–17، أوجد الاحتمالات المعيّنة، إذا علمت أنّ العمر الافتراضي لمصباح يتم توزيعه أسيًا باستخدام pdf $f(x) = 6e^{-6x}$ (حيث يتم قياس x بالأعوام).

17. يدوم عمر المصباح لمدة أصغر من 3 أشهر.
18. يدوم عمر المصباح لمدة أصغر من 6 أشهر.
19. يدوم عمر المصباح لمدة تتراوح بين عام واحد وعامين.
20. يدوم عمر المصباح لمدة تتراوح بين 3 و 10 أعوام.

في التمارين 24–21، على فرض أنّ عمر كائن حي له pdf $f(x) = 4xe^{-2x}$ (حيث يتم قياس x بالأعوام).

21. أوجد احتمال أن يكون للكائن الحي عمر أصغر من عام واحد.
22. أوجد احتمال أن يكون للكائن الحي عمر يتراوح بين عام واحد وعامين.
23. أوجد وسط العمر ($0 \le x \le 10$).
24. مثّل pdf بيانيًا وقارن القيمة العظمى لـ pdf بالوسط.

في التمارين 30–25، أوجد (a) الوسط و (b) وسيط المتغيّر العشوائي من pdf المعطاة.

25. $f(x) = 3x^2, [0, 1]$
26. $f(x) = 4x^3, [0, 1]$
27. $f(x) = \dfrac{4/\pi}{1 + x^2}, [0, 1]$
28. $f(x) = \dfrac{2/\pi}{\sqrt{1 - x^2}}, [0, 1]$
29. $f(x) = \frac{1}{2}\sin x, [0, \pi]$
30. $f(x) = \cos x, [0, \pi/2]$

31. لكل $f(x) = ce^{-4x}$، أوجد c بحيث تكون $f(x)$ pdf على الفترة $[0, b]$ لكل $b > 0$. ماذا يحدث لـ c عندما $b \to \infty$؟
32. لأجل pdf من التمرين 31، أوجد الوسط بالضبط (استخدم CAS لدالّة أصلية). عندما تتزايد b، ما الذي يحدث للوسط؟
33. كرّر التمرينين 31 و 32 لأجل $f(x) = ce^{-6x}$.
34. وفقًا لنتائج التمارين 33–31، خمّن قيم c والوسط عندما $f(x) = ce^{-ax}$ لأجل $a \to \infty$. $a > 0$.

التطبيقات

35. في نسخة من نسخ لعبة كينو، تختار 10 أعداد تتراوح بين 1 و80. تسحب 20 عدداً بين 1 و 80. يعتمد ربحك على الأعداد الخاصة التي يتم اختيارها. استخدم الاحتمالات المعطاة (مقرّبة إلى 4 أرقام) لإيجاد احتمال كل حدث محدّد أدناه. (للفوز، يجب أن يتم اختيار 5 من أعدادك على الأقل. في مراهنة على AED2، تربح AED40 أو أكثر إذا تم اختيار 6 أو أكثر من أعدادك).

العدد الذي تم اختياره	0	1	2	3	4
الاحتمال	0.0458	0.1796	0.2953	0.2674	0.1473

العدد الذي تم اختياره	5	6	7	8	9	10
الاحتمال	0.0514	0.0115	0.0016	0.0001	0.0	0.0

(a) الربح (يتم اختيار 5 على الأقل)

(b) الخسارة (يتم اختيار 4 أو أقل)

(c) تحقيق ربح كبير (6 أو أكثر)

(d) يتم اختيار 3 أو 4 أعداد

36. على فرض أنّ لاعب كرة سلة يحرز نسبة 70% من رمياته الحرة. إذا صوّب ثلاث رميات حرة وكان احتمال إحراز كل منها 0.7. فتكون احتمالات العدد الإجمالي المحرز كما هو موضّح. أوجد احتمال كل حدث محدّد أدناه.

العدد المحرز	0	1	2	3
الاحتمال	0.027	0.189	0.441	0.343

(a) يحرز 2 أو 3 (b) يحرز 1 على الأقل

37. (a) على فرض أنّ لاعب بإحدى الألعاب ربح m دور من n. بنسبة مئوية للربح تبلغ $75 > \frac{m}{n}100$. إذا يربح اللاعب في عدة أدوار متتالية، بحيث تتخطى النسبة المئوية للربح 75%. وضّح أنّه في مرحلة ما في هذه العملية تبلغ النسبة المئوية لربح اللاعب 75% بالضبط.

(b) قم بتعميم هذا على نسبة مئوية للربح يمكن كتابتها بالصيغة $100\frac{k}{k+1}$ لعدد صحيح k.

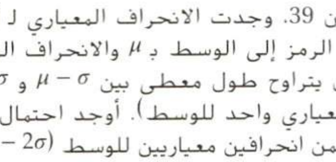
38. في المثال 7.5، وجدنا أنّ الوسيط (كذلك يطلق عليه اسم الربيع الثاني). الآن أوجد الربيعان الأول والثالث، الأعوام بحيث يكون احتمال أعمار الصغار 0.25 و0.75 على الترتيب.

39. pdf في المثال 7.2 هي pdf لمتغيّر عشوائي موزع طبيعيًا. يمكن قراءة الوسط بسهولة من $f(x)$ ؛ في المثال 7.2، يكون الوسط 68. يميز الوسط والعدد الذي يطلق عليه اسم **الانحراف المعياري** التوزيعات الطبيعية. كما يوضّح الشكل 8.63. لدى التمثيل البياني لـ pdf قيمة عظمى عند الوسط ونقطتي انعطاف تقعان على جوانب مقابلة للوسط. يساوي الانحراف المعياري المسافة من الوسط إلى نقطة انعطاف. أوجد الانحراف المعياري في المثال 7.2.

40. في التمرين 39، وجدت الانحراف المعياري لـ pdf في المثال 7.2. عند الرمز إلى الوسط بـ μ والانحراف المعياري بـ σ، أوجد احتمال أن يتراوح طول معطى بين $\mu - \sigma$ و $\mu + \sigma$ (أي إنّ ضمن انحراف معياري واحد للوسط). أوجد احتمال أن يكون طول معطى ضمن انحرافين معياريين للوسط ($\mu - 2\sigma$ إلى $\mu + 2\sigma$) وضمن ثلاثة انحرافات معيارية للوسط. تكون هذه الاحتمالات هي نفسها لأي توزيع طبيعي. لذا، إذا علمت الوسط والانحراف المعياري لمتغيّر عشوائي توزيعه طبيعي، فأنت تعلم تلقائيًا هذه الاحتمالات.

41. إذا كان احتمال حدث هو p فإنّ احتمال حدوثه m مرة في n محاولة هو $f(p) = \frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}$. أوجد قيمة p التي تحقق قيمة عظمى لـ $f(p)$. يطلق على هذا اسم مقدّر قيمة عظمى ترجيحية لـ p. اشرح بإيجاز سبب أنّ إجابتك منطقية.

42. **مسألة إبرة بوفون** هي واحدة من أقدم وأشهر مسائل الاحتمال. على فرض أنّ سلسلة من المستقيمات الأفقية تبعد وحدة واحدة عن بعضها البعض ويتم وضع إبرة طولها وحدة واحدة بشكل عشوائي. فما احتمال أن تتقاطع الإبرة مع واحد من المستقيمات الأفقية؟



في الشكل، y هي المسافة من مركز الإبرة إلى أقرب مستقيم و θ هي الزاوية الموجبة التي تشكلها الإبرة مع المركّبة الأفقية. أثبت أنّ الإبرة تتقاطع مع المستقيم إذا وفقط إذا $0 \le y \le \frac{1}{2}\sin\theta$. حيث $0 \le \theta \le \pi$ و $0 \le y \le \frac{1}{2}$. يكون الاحتمال المرغوب فيه $\frac{\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin\theta d\theta}{\int_0^\pi \frac{1}{2}d\theta}$. احسب هذا.

43. إنّ pdf ماكسويل-بولتزمان للسرعات الجزيئية في غاز عند حالة توازن هي $f(x) = ax^2e^{-b^2x^2}$ للوسيطات الموجبة a و b. أوجد أكثر السرعات شيوعًا [أي، أوجد x تحقق قيمة $f(x)$].

44. تكون pdf لفترات ذات ارتفاع حاد مشترك لإطلاق خلايا عصبية بنواة قوقعية لقطة هي $f(t) = kt^{-3/2}e^{bt-a/t}$، حيث يتم قياس t بالميكرو ثانية (انظر كتاب *From Clocks to Chaos* لماكي وجلاس). $a = 100$، $b = 0.38$ و استخدم CAS الخاص بك لإيجاد قيمة k التي تجعل f pdf على الفترة $[0, 40]$. ثم أوجد احتمال أن يتم إطلاق خلايا عصبية بين 20 و30 ميكرو ثانية.

45. على فرض أنّ لدى لاعب كرة قدم احتمال p إحراز الهدف التالي في مباراة. احتمال أن تنتهي مباراة مُحرز بها هدفين بالتعادل 1−1 هو $2p(1-p)$ واحتمال أن تنتهي مباراة مُحرز بها 4 أهداف بالتعادل 2−2 هو $\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}p^2(1-p)^2$ واحتمال أن تنتهي مباراة مُحرز بها 6 أهداف بالتعادل 3−3 هو $\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}p^3(1-p)^3$ وهكذا. فرضاً أنّه يتم إحراز عدد متساو من الأهداف. أثبت أنّ احتمال التعادل هو دالة متناقصة لعدد الأهداف المحرزة.

46. يقوم لاعبان برمي قطعة نقود معدنية عادلة حتى يتم الحصول على المتتالية HTT أو المتتالية HHT. يفوز اللاعب A إذا تم الحصول على HTT أولًا ويفوز اللاعب B إذا تم الحصول على HHT أولًا. أثبت أنّ احتمال أن يفوز اللاعب B يبلغ الضعف.

47. لتكن f هي دالة بحيث تكون كل من f و g pdf في $[0,1]$، حيث $g(x) = f(x^2)$.

(a) أوجد تلك الدالة للصيغة $f(x) = a + bx + cx^2$.

(b) أوجد وسط أي متغيّر عشوائي بـ pdf g.

تمارين استكشاف

1. تشير نظرية الفوضى في الرياضيات إلى أنّ الأعداد الناتجة باستخدام خوارزميات بسيطة جدًا يمكن أن تبدو عشوائية. ينظر الباحثون في نظرية الفوضى لمجموعة متنوعة من التمثيلات البيانية لمحاولة تمييز الفوضى العشوائية من الحتمية. على سبيل المثال، كرّر الدالة $f(x) = 4x(1-x)$ بدءًا من $x = 0.1$. هذا يعني، احسب $f(0.1) = 0.36$، $f(0.36) = 0.9216$، $f(0.9216) \approx 0.289$ وما إلى ذلك. كرّر الى 50 مرة وسجّل كم مرة كل عدد أول يحدث (حتى الآن، يوجد لدينا 1 و 3 و 9 و 2). إذا كانت العملية عشوائية حقًا، فإنّ الأعداد ستكرّر عدد المرات نفسه تقريبًا. هل يبدو أنّ هذا يحدث؟ للكشف عن هذه العملية بكونها غير عشوائية، يمكنك رسم **صورة للطور**. للقيام بذلك، اتخذ تكرارات متتالية كإحداثيات نقطة (x, y) وارسم النقاط. أول ثلاث نقاط هي $(0.1, 0.36)$، $(0.36, 0.9216)$ و $(0.9216, 0.289)$. صف النمط (غير العشوائي) الذي يظهر، مع تعريفه بأكبر قدر من الدقة.

2. على فرض أنّ نابض يتأرجح صعودًا وهبوطًا في وضع رأسي بالمعادلة $u(t) = \sin t$. إذا اخترت وقتًا عشوائيًا وألقيت نظرة

على موقع النابض. فهل سيكون من المرجّح بشكل أكبر أن تجد النابض بالقرب من موقع متطرف ($u = 1$ أو $u = -1$) أو بالقرب من الوسط ($u = 0$)؟ تتناسب pdf عكسيًا مع السرعة. (ما سبب كون هذا منطقيًا؟) أثبت أنّ السرعة مُعطاة بالمعادلة $|\cos t| = \sqrt{1 - u^2}$. إذًا تكون الـ pdf هي $f(u) = c/\sqrt{1 - u^2}$.

$-1 \le u \le 1$ لعدد ثابت c. أثبت أنّ $c = 1/\pi$. ثم مثّل بيانياً $f(x)$ وصف المواقع التي من المرجّح أن تجد عليها النابض. استخدم هذه النتيجة لشرح ما يلي. إذا كنت تقود السيارة في حي سكني، فمن المرجّح كثيرًا أن تتقاطع مع سيارة قادمة في الاتجاه الآخر عند مفترق طرق في منتصف المجمع السكني.

أسئلة مراجعة

تمارين كتابية

تتضمّن القائمة التالية المصطلحات التي تم تعريفها والنظريات التي تم توضيحها في هذه الوحدة. لكل مصطلح أو نظرية، (1) قدّم تعريفًا أو عبارةً دقيقةً، (2) اذكر ما تعنيه عمومًا (3) صف أنواع المسائل التي تقترن بذلك.

الحجم بالتجزيء	الحجم بالأقراص	الحجم بالحلقات
الحجم بالأصداف	طول القوس	مساحة السطح
قانون نيوتن الثاني	الشغل	الدفع
مركز الكتلة	دالة كثافة	الوسط
	الاحتمال	

صواب أم خطأ

اذكر ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة واشرح السبب بإيجاز. إذا كانت العبارة خاطئة، حاول "تصحيحها" بتعديل العبارة الموضّحة إلى العبارة الجديدة الصحيحة.

1. تُعطى المساحة بين f و g بالتكامل $\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$

2. تُعد طريقة الأقراص حالة خاصة للحجم بالتقسيم.

3. لمنطقة مذكورة، ستستخدم دائمًا طرائق الأقراص والأصداف متغيّرات جديدة للتكامل.

4. دائمًا ما يعطي مجموع ريمان لطول القوس تقريبًا كبيرًا للغاية.

5. لمعظم الدوال، يمكن إيجاد قيمة تكامل طول القوس بالضبط.

6. القوة الوحيدة المؤثرة على مقذوف هي الجاذبية.

7. لحركة المَقْذوفات ثنائية الأبعاد، يمكنك دائمًا إيجاد الحل لأجل $x(t)$ و $y(t)$ بشكل مستقل.

8. كلما حرّكت جسم ما، زاد الشغل المبذول من قبلك.

9. يكون وسط متغيّر عشوائي أكبر دائمًا من الوسيط.

في التمارين 1–8، أوجد المساحة المشار إليها بالضبط إن أمكن (قدّر إذا لزم الأمر).

1. المساحة بين $y = x^2 + 2$ و $y = \sin x$ لكل $0 \le x \le \pi$

2. المساحة بين $y = e^x$ و $y = e^{-x}$ لكل $0 \le x \le 1$

3. المساحة بين $y = x^3$ و $y = 2x^2 - x$

4. المساحة بين $y = x^2 - 3$ و $y = -x^2 + 5$

5. المساحة بين $y = e^{-x}$ و $y = 2 - x^2$

6. المساحة بين $x = y^2$ و $y = 1 - x$

7. مساحة المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$، $y = 2 - x$ و $y = 0$

8. مساحة المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$، $y = 0$ و $x = 2$

9. مدينة تعداد سكانها 10,000 لها معدل المواليد $10 + 2t$ شخص سنويًا ومعدل الوفيات $4 + t$ شخص سنويًا. احسب تعداد سكان المدينة بعد 6 سنوات.

10. من البيانات المعطاة، قدّر المساحة بين المنحنيات لكل $0 \le x \le 2$.

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	3.2	3.6	3.8	3.7	3.2	3.4
$g(x)$	1.2	1.5	1.6	2.2	2.0	2.4

x	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$f(x)$	3.0	2.8	2.4	2.9	3.4
$g(x)$	2.2	2.1	2.3	2.8	2.4

11. أوجد حجم المجسّم مساحة المقطع العرضي $A(x) = \pi(3 + x)^2$ لكل $0 \le x \le 2$.

12. يبدو حمام سباحة تتم مشاهدته من فوقه إطارًا معطى بالمعادلة $y = \pm(5 + x)$ لكل $0 \le x \le 2$. ويعطى العمق بالتعبير $4 + x$ (جميع القياسات بالمتر). احسب الحجم.

13. مساحات المقطع العرضي لجسم تحت الماء معطاة في الجدول أدناه. قدّر الحجم.

x	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2
$A(x)$	0.4	1.4	1.8	2.0	2.1	1.8	1.1	0.4	0

في التمارين 14–18، أوجد حجم المجسّم الناتج عن التدوير المشار إليه.

14. المنطقة المحدّدة من $y = x^2$، $y = 0$ و $x = 1$ التي يتم تدويرها حول (a) المحورx؛ (b) المحور y؛ (c) $x = 2$ ؛ (d) $y = -2$

15. المنطقة المحدّدة من $y = x^2$ و $y = 4$ التي يتم تدويرها حول (a) المحور x؛ (b) المحور y؛ (c) $x = 2$ ؛ (d) $y = -2$

16. المنطقة المحدّدة من $y = x$، $y = 2x$ و $x = 2$ التي يتم تدويرها حول (a) المحور x؛ (b) المحور y؛ (c) $x = -1$ ؛ (d) $y = 4$

17. المنطقة المحدّدة من $y = x$، $y = 2 - x$ و $y = 0$ التي يتم دورانها حول (a) المحور x؛ (b) المحور y؛ (c) $x = -1$ ؛ (d) $y = 4$

18. المنطقة المحدّدة من $x = 4 - y^2$ و $x = y^2 - 4$ التي يتم دورانها حول (a) المحور x؛ (b) المحور y؛ (c) $x = 4$ ؛ (d) $y = 4$

في التمارين 22–19، ضع تكامل لطول القوس وقرّب التكامل عدديًا.

19. الجزء من $y = x^4$ لكل $-1 \le x \le 1$

20. الجزء من $y = x^2 + x$ لكل $-1 \le x \le 0$

21. الجزء من $y = e^{x/2}$ لكل $-2 \le x \le 2$

22. الجزء من $y = \sin 2x$ لكل $0 \le x \le \pi$

في التمرينان 23 و24، ضع تكامل لمساحة السطح وقرّب التكامل عدديًا.

23. السطح الناتج عن التدوير $y = 1 - x^2$، $0 \le x \le 1$ حول المحور x

24. السطح الناتج عن التدوير $y = x^3$، $0 \le x \le 1$ حول المحور x

في التمارين 32–25، تجاهل مقاومة الهواء.

25. يقفز غواص من ارتفاع 20 مترًا. ما هي السرعة المتجهة لحظة الاصطدام؟

26. إذا كان الغواص في التمرين 25 له سرعة متجهة ابتدائية 1 m/s . كم ستكون السرعة المتجهة لحظة الاصطدام؟

27. يتم إطلاق جسم ما من الأرض بزاوية °20 بسرعة ابتدائية 15 m/s. أوجد زمن التحليق والمدى الأفقي.

28. أعد التمرين 27 لجسم تم إطلاقه من ارتفاع مترين.

29. يتم إطلاق كرة قدم من ارتفاع مترين مع سرعة ابتدائية 24 m/s بزاوية °8. يقف شخص ما على بُعد 35 مترًا آخر الملعب في اتجاه الرمية. هل من الممكن التقاط الكرة؟

30. كرّر التمرين 29 مع زاوية إطلاق °24. بالتجربة والخطأ، أوجد مدى الزوايا (مقرّبة إلى أقرب درجة) التي تشكل رمية قابلة للالتقاط.

31. أوجد السرعة الابتدائية المطلوبة لدفع جسم ما إلى ارتفاع 40 مترًا. حدّد السرعة المتجهة للجسم لحظة الاصطدام.

32. تقوم طائرة على ارتفاع 35 مترًا بإسقاط إمدادات إلى موقع على الأرض. إذا كان للطائرة سرعة متجهة أفقية 30 m/s. ما المسافة التي يجب أن يبعدها مكان إطلاق الإمدادات عن الموقع المستهدف؟

33. أحدثت قوة مقدارها 250 نيوتن تمدد على نابض 30 سنتمتر. أوجِد الشغل المبذول لتمدد النابض 20 سنتمترًا أكثر من طوله الطبيعي.

34. محرك سيارة بذل قوة $800 + 2x$ نيوتن عندما تكون السيارة في الموقع x كيلومترًا. أوجد الشغل المبذول عند انطلاق السيارة من $x = 0$ إلى $x = 8$.

35. احسب الكتلة ومركز الكتلة لجسم ما كثافته $\rho(x) = x^2 - 2x + 8$ لكل $0 \le x \le 4$. اشرح سبب عدم وجود مركز الكتلة عند $x = 2$.

36. احسب الكتلة ومركز الكتلة لجسم ما كثافته $\rho(x) = x^2 - 2x + 8$ لكل $0 \le x \le 2$. اشرح سبب وجود مركز الكتلة عند $x = 1$.

37. سدّ على شكل شبه منحرف إرتفاعه 25 مترًا، وعرضه في الجزء العلوي 20 مترًا وعرضه في الجزء السفلي 40 مترًا. أوجد القيمة العظمى للقوة الهيدروستاتيكية التي سيحتاج إليها السد كي يصمد أمامها.

38. توجد نافذة رؤية تحت الماء مستطيلة الشكل عرضها 6 أمتار تمتد من 1.5 مترًا تحت السطح إلى 3 أمتار تحت السطح. أوجد القيمة العظمى للقوة الهيدروستاتيكية التي ستحتاج اليها النافذة كي تصمد أمامها.

39. القوة المبذولة من مضرب على كرة على فترة زمنية مبيّنة في الجدول. استخدم البيانات لتقدير الدفع. إذا كان للكرة (كتلة $m = 0.01$ صلج) سرعة 120 m/s قبل الاصطدام، قدّر سرعتها بعد الاصطدام.

t (s)	0	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004
$F(t)$ (N)	0	800	1600	2400	3000

t (s)	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008
$F(t)$ (N)	3600	2200	1200	0

40. إذا مثّل الجدار قوة $f(t) = 3000t(2 - t)$ نيوتن على سيارة لكل $0 \le t \le 2$. فأوجد الدفع. إذا كانت حركة السيارة ساكنة (الكتلة $m = 100$ الصلج) بعد الاصطدام، احسب سرعتها قبل الاصطدام.

41. أثبت أنّ $f(x) = x + 2x^3$ هي pdf على الفترة $[0, 1]$.

42. أثبت أنّ $f(x) = \frac{8}{3}e^{-2x}$ هي pdf على الفترة $[0, \ln 2]$.

43. أوجد قيمة c بحيث تكون $f(x) = \frac{c}{x^2}$ هي pdf على الفترة $[1, 2]$.

44. أوجد قيمة c بحيث تكون $f(x) = ce^{-2x}$ هي pdf على الفترة $[0, 4]$.

45. العمر الافتراضي لمصباح له pdf $f(x) = 4e^{-4x}$ (x بالأعوام). أوجد احتمال استمرار المصباح صالحًا لمدة (a) أصغر من 6 أشهر؛ (b) بين 6 أشهر وعام واحد.

46. عمر الكائن الحي له pdf $f(x) = 9xe^{-3x}$ (x بالأعوام). أوجد احتمال استمرار الكائن الحي لمدة (a) أصغر من شهرين؛ (b) بين 3 أشهر وعام واحد.

47. أوجد (a) الوسط و (b) وسيط متغيّر عشوائي له pdf $f(x) = x + 2x^3$ على الفترة $[0, 1]$.

48. أوجد (a) الوسط و (b) وسيط متغيّر عشوائي له pdf $f(x) = \frac{8}{3}e^{-2x}$ على الفترة $[0, \ln 2]$.

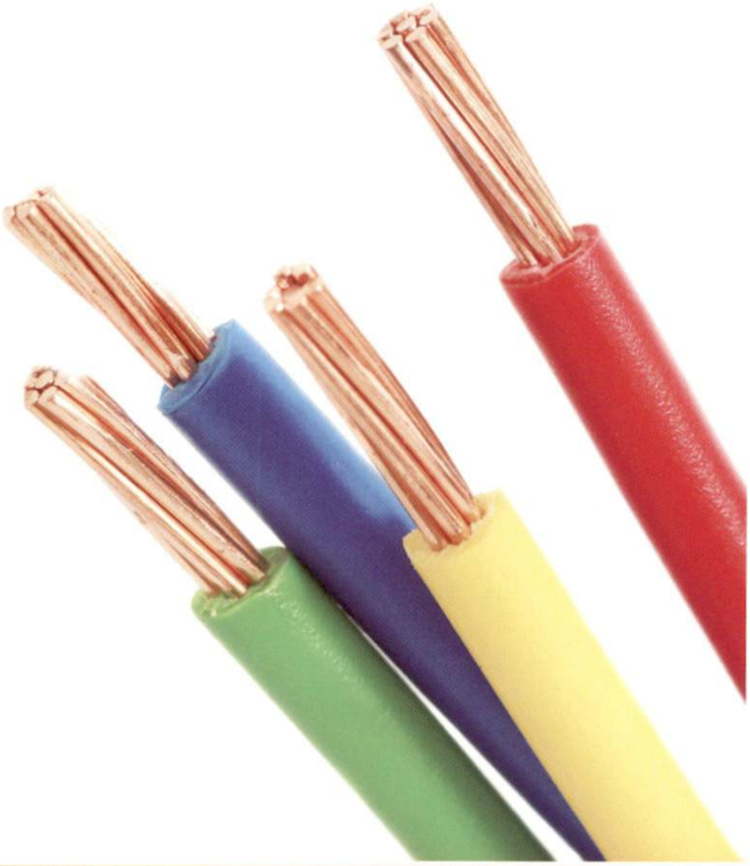
تمارين استكشافية

1. كما هو مشار إليه في الدرس 8.5، يمكن اشتقاق الصيغ العامة للعديد من الكميات المهمة في حركة المَقذوفات. لجسم تم إطلاقه من الأرض بزاوية θ_0 بسرعة ابتدائية v_0 m/s، أوجد المدى الأفقي R m واستخدم متطابقة حساب المثلثات $\sin(2\theta_0) = 2\sin\theta_0\cos\theta_0$ لتثبت أنّ $R = \dfrac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{32}$. استنتج أنّ القيمة العظمى للمدى يمكن تحقيقه من الزاوية $\theta_0 = \pi/4\ (45°)$.

2. لمتابعة التمرين الاستكشافي 1، على فرض أنّ الأرض تشكل زاوية $A°$ مع المركبة الأفقية. إذا $A > 0$ (أي، يتم إطلاق المقذوف لأعلى التل)، فاشرح سبب أنّ القيمة العظمى للمدى سيتم الوصول إليها من زاوية أكبر من $45°$. إذا $A < 0$ (يتم الإطلاق لأسفل التل)، فاشرح سبب أنّ القيمة العظمى للمدى سيتم الوصول إليه من زاوية أصغر من $45°$. لتحديد قيمة الزاوية المثلى بالضبط، أولًا أثبت أنّه يمكن تمثيل الأرض بالمستقيم $y = (\tan A)x$. أثبت أنّ المقذوف يلامس الأرض عند الزمن $t = v_0 \dfrac{\sin\theta_0 - \tan A\cos\theta_0}{16}$. احسب $x(t)$ لهذه القيمة لـ t واستخدم متطابقة حساب مثلثات لاستبدال الكمية $\sin\theta_0\cos A - \sin A\cos\theta_0$ بـ $\sin(\theta_0 - A)$. ثم استخدم متطابقة حساب مثلثات أخرى لاستبدال $\cos\theta_0\sin(\theta_0 - A)$ بـ $\sin(2\theta_0 - A) - \sin A$. في هذه المرحلة، سيكون الحد الوحيد الذي يتضمّن θ_0 هو $\sin(2\theta_0 - A)$. لإيجاد القيمة العظمى للمدى، جد القيمة العظمى لهذا الحد بأخذ $\theta_0 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}A$.

ملاحظات

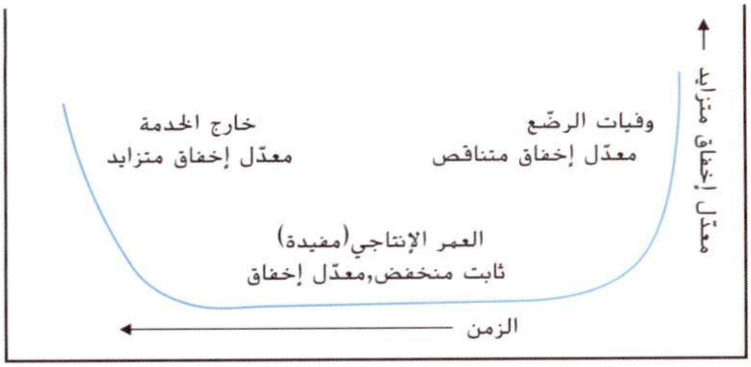
الوحدة 9 طرائق التكامل



تُجري شركات الإلكترونيات اختبارات على منتجاتها بشكل ثابت للتأكد من الوثوق بها. غالبًا ما يتم استعراض العمر الافتراضي لأحد المكوّنات الإلكترونية على أنّ لها ثلاث مراحل، كما هو موضّح من قِبل ما يسمّى معدل الإخفاق المبيّن في الشكل.

يشير هذا المنحنى إلى متوسط معدل الإخفاق لأحد المكوّنات بوصفها دالة عمرية. في المرحلة الأولى (التي يُطلق عليها **وفيات الرضّع**)، ينخفض معدل الإخفاق بشكل سريع حيث يحدث إخفاق في المكوّنات التالفة بسرعة. تدخل المكوّنات التي تمر بسلام من هذه المرحلة الأولية في مرحلة ثانية مطوّلة (**مرحلة العمر الإنتاجي**) من معدل الإخفاق الثابت. وتُظهر المرحلة الثالثة زيادة في معدل الإخفاق حيث تصل المكوّنات إلى النهاية الفيزيائية من دورة عمرها.

يحظى معدل الإخفاق الثابت لمرحلة العمر الإنتاجي بالعديد من النتائج المثيرة للاهتمام. أولًا، تُعد الإخفاقات "بدون ذاكرة"، بمعنى أنّ احتمال أنّ المكوّن يدوم ساعة أخرى، أمرًا مستقلًا عن عمر المكوّن. قد يكون المرجّح أن يستمر مكوّن عمره 40 ساعة لمدة ساعة أخرى مثل مكوّن عمره 10 ساعات فقط. تتمتع بهذه الخاصية غير العادية المكوّنات الإلكترونية مثل المصابيح، خلال مرحلة العمر الإنتاجي.



يشير معدل الإخفاق الثابت أيضًا إلى أنّ إخفاقات المكوّن تتبع ما يسمّى التوزيع الأسي. (انظر التمرين 73 في تمارين مراجعة في نهاية هذه الوحدة). يتطلّب حساب الإحصاءات للتوزيع الأسي طرائق تكامل أكثر تطورًا من تلك التي نوقشت حتى الآن. على سبيل المثال، يعطى وسط (متوسط) العمر الافتراضي لمكوّنات إلكترونية معيّنة بالتكامل $\int_0^\infty cxe^{-cx}dx$. لعدد ثابت ما $c > 0$. لإيجاد قيمته، سنحتاج أولًا إلى التوسّع في مفهومنا عن التكامل لتضمين التكاملات المعتلّة مثل تلك. حيث يكون حد واحد أو اثنان من حدود التكامل لانهائيّة. نعالج هذا في الدرس 6.6. ثمة تحدٍّ آخر أيضًا وهو أنّنا لا نعرف في الحاضر أي دالّة أصلية لـ $f(x) = xe^{-cx}$. في الدرس 6.2، نقدّم طريقة فعّالة تسمّى التكامل بالأجزاء والذي يمكن استخدامه لإيجاد دوال أصلية من مثل هذه الدوال.

تقدّم لنا طرائق التكامل الجديدة التي تم توضيحها في هذه الوحدة مجموعة واسعة من الأدوات المستخدمة في حل مسائل لا حصر لها تحظى باهتمام المهندسين والرياضيين والعلماء.

الدرس 9-1 مراجعة الصيغ وطرائق التكامل

في هذا الدرس الموجز، نعرض معًا جميع صيغ التكامل وطريقة تكامل واحدة (التكامل بالتعويض) الذي قمنا بتطويره سابقاً. نحن نستخدم هذه لتطوير بعض الصيغ العامة الأخرى. بالإضافة إلى حل مسائل التكامل الأكثر تعقيدًا. أولاً، تطلع إلى الجدول التالي لصيغ التكامل الأساسية المطوّرة في الوحدة 4.

$\int x^r\,dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c, \quad \text{for } r \neq -1$ (قاعدة القوّة)	$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c, \quad \text{for } x \neq 0$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$
$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$
$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c$
$\int e^x\,dx = e^x + c$	$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + c$
$\int \tan x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + c$
$\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + c$	$\int \dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1} x + c$

تذكّر أنّ كل واحدة من هذه تتبع قاعدة اشتقاق مناظرة لها. حتى الآن، توسّعنا بهذه القائمة قليلًا باستخدام طريقة التعويض، كما في المثال 1.1.

المثال 1.1 تعويض بسيط

أوجد قيمة $\int \sin(ax)\,dx$، حيث $a \neq 0$.

الحل يتمثّل الاختيار الأوضح هنا بأن تكن $u = ax$. حيث أنّ $du = a\,dx$. يعطينا ذلك

$$\int \sin(ax)\,dx = \frac{1}{a}\int \underbrace{\sin(ax)}_{\sin u}\,\underbrace{a\,dx}_{du} = \frac{1}{a}\int \sin u\,du$$

$$= -\frac{1}{a}\cos u + c = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c$$

لا توجد حاجة إلى حفظ القواعد العامة مثل تلك الواردة في المثالين 1.1 و 1.2. على الرغم من أنّه غالبًا ما يكون مناسبًا القيام بذلك. يمكنك إعادة إنتاج القواعد العامة في أي زمن كنت في حاجة إليها باستخدام التعويض.

المثال 1.2 **تعميم قاعدة تكامل أساسية**

أوجد قيمة $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$. حيث $a \neq 0$.

الحل لاحظ أنّ ذلك مماثلٌ تقريبًا لـ $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ ويمكننا كتابة

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx$$

الآن، لتكن $u = \frac{x}{a}$.فيكون $du = \frac{1}{a}\,dx$ وإذًا،

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\underbrace{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}_{1+u^2}}\underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{a}\tan^{-1}u + c = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

لن يحل التعويض جميع ما تواجه من صعوبات في التكامل. كما نري في المثال 1.3.

المثال 1.3 **مكامل يجب إيجاد مفكوكه**

أوجد قيمة $\int (x^2-5)^2\,dx$.

الحل قد يكون الدافع الأول هو تعويض $u = x^2 - 5$. مع ذلك، فشل هذا الأمر. حيث لا يوجد لدينا $du = 2x\,dx$ في التكامل. (يمكننا فرض الثابت 2 في التكامل. لكن لا يمكننا وضع x هناك). من ناحية أخرى، يمكنك دائمًا تفكيك ذات الحدّين للحصول على

$$\int (x^2-5)^2\,dx = \int (x^4 - 10x^2 + 25)\,dx = \frac{x^5}{5} - 10\frac{x^3}{3} + 25x + c$$

يتمثّل المغزى من المثال 1.3 بالتأكد من أنّك لم تغفل طرائق أبسط. القاعدة الأكثر عمومية في التكامل هي الاستمرار في المحاولة. في بعض الأحيان، ستحتاج إلى القيام ببعض العمليات الجبرية قبل أن تتمكّن من التعرّف على شكل المكامل.

المثال 1.4 **تكامل حيث يجب علينا إكمال المربع**

أوجد قيمة $\int \frac{1}{\sqrt{-5+6x-x^2}}\,dx$.

الحل قد لا يتبادر الكثير إلى الذهن هنا. لا يعمل التعويض إما للمقام بأكمله أو الكمية تحت الجذر التربيعي. (لم لا؟) إذًا، ما الذي تبقّى للقيام به؟ تذكّر أنّه ثمة أساسًا شيئين فقط يمكنك إجراؤهما على كثير الحدود التربيعي: إما تحليله إلى العوامل أو إكمال المربع. هنا، القيام بما سبق يلقي بعض الضوء على التكامل. لدينا

$$\int \frac{1}{\sqrt{-5+6x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{-5-(x^2-6x+9)+9}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-3)^2}}\,dx$$

لاحظ كيف يبدو ذلك مثل $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + c$. إذا قمنا بإخراج الـ 4 الموجودة في الجذر التربيعي كعامل مشترك، نحصل على

$$\int \frac{1}{\sqrt{-5+6x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-3)^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{2}\right)^2}}\,\frac{1}{2}\,dx$$

بأخذ $u = \frac{x-3}{2}$. لدينا $du = \frac{1}{2}\,dx$ ولذلك،

$$\int \frac{1}{\sqrt{-5+6x-x^2}}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{2}\right)^2}}}_{\sqrt{1-u^2}}\,\underbrace{\frac{1}{2}\,dx}_{du} = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$$= \sin^{-1} u + c = \sin^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right) + c$$

المثال 1.5 يوضّح قيمة المثابرة.

المثال 1.5 تكامل يتطلب بعض التخيّل

أوجد قيمة $\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10}\,dx$.

الحل كما هو الحال مع معظم التكاملات، لا يمكنك إيجاد قيمة ذلك كما هو موضّح. ومع ذلك، فإنّ البسط هو مشتقّة قريبة جدًا من المقام (ولكن ليس تمامًا). بإدراك أنّه يمكنك إكمال المربع في المقام، للحصول على

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10}\,dx = \int \frac{4x+1}{2(x^2+2x+1)-2+10}\,dx = \int \frac{4x+1}{2(x+1)^2+8}\,dx$$

الآن، يبدو المقام بالكاد مثل المقام في $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + c$. بإخراج 8 كعامل مشترك من المقام، نحصل على

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10}\,dx = \int \frac{4x+1}{2(x+1)^2+8}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{4x+1}{\frac{1}{4}(x+1)^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{4x+1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx$$

الآن، بأخذ $u = \frac{x+1}{2}$. لدينا $du = \frac{1}{2}\,dx$ و $x = 2u - 1$ ولذلك،

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{4x+1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{\overbrace{4x+1}^{4(2u-1)+1}}{\underbrace{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}_{u^2+1}}\,\underbrace{\frac{1}{2}\,dx}_{du}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{4(2u-1)+1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{4}\int \frac{8u-3}{u^2+1}\,du$$

$$= \frac{4}{4}\int \frac{2u}{u^2+1}\,du - \frac{3}{4}\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \ln(u^2+1) - \frac{3}{4}\tan^{-1} u + c$$

$$= \ln\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1\right] - \frac{3}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

كان المثال 1.5 مرهقًا، ولكن واضح إلى حد معقول. تتمثّل المشكلة في التكامل بالتعرّف على ماهية الأجزاء الموجودة في تكامل معيّن ومعرفة طريقة إعادة كتابة التكامل في صيغة أكثر انتشارًا.

تمارين 9.1

تمارين كتابية

1. في المثال 1.2، اشرح كيف ينبغي عليك معرفة كتابة المقام في صورة $a^2\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$. هل ستبقى هذه خطوة أولى جيدة إذا كان البسط x بدلًا من 1؟ ماذا ستفعل إذا كان المقام $\sqrt{a^2-x^2}$ ؟

2. في كلا المثالين 1.4 و 1.5، أكملنا المربع ووجدنا دوال أصلية تتضمّن $\sin^{-1} x$، $\tan^{-1} x$ و $\ln(x^2+1)$. صف بإيجاز كيف أنّ وجود x في البسط أو جذر تربيعي في المقام يؤثّر على كون أي من هذه الدوال سيكون في الدالة الأصلية.

في التمارين 1–40، أوجد قيمة التكامل.

1. $\int e^{ax}\,dx, a \neq 0$
2. $\int \cos(ax)\,dx, a \neq 0$
3. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx, a > 0$
4. $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}\,dx, a > 0$
5. $\int \sin 6t\,dt$
6. $\int \sec 2t \tan 2t\,dt$
7. $\int (x^2+4)^2\,dx$
8. $\int x(x^2+4)^2\,dx$
9. $\int \frac{3}{16+x^2}\,dx$
10. $\int \frac{2}{4+4x^2}\,dx$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$
12. $\int \frac{x+1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$
13. $\int \frac{4}{5+2x+x^2}\,dx$
14. $\int \frac{4x+4}{5+2x+x^2}\,dx$
15. $\int \frac{4t}{5+2t+t^2}\,dt$
16. $\int \frac{t+1}{t^2+2t+4}\,dt$
17. $\int e^{3-2x}\,dx$
18. $\int \frac{3}{e^{6x}}\,dx$
19. $\int \frac{4}{x^{1/3}(1+x^{2/3})}\,dx$
20. $\int \frac{2}{x^{1/4}+x}\,dx$
21. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
22. $\int \frac{\cos(1/x)}{x^2}\,dx$
23. $\int_0^{\pi} \cos x e^{\sin x}\,dx$
24. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x e^{\tan x}\,dx$
25. $\int_{-\pi/4}^{0} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt$
26. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 t}\,dt$
27. $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$
28. $\int \frac{x^5}{1+x^6}\,dx$
29. $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$
30. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$
31. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$
32. $\int \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$
33. $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$
34. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx$
35. $\int_{-2}^{-1} \frac{\ln x^2}{x}\,dx$
36. $\int_1^3 e^{2\ln x}\,dx$
37. $\int_3^4 x\sqrt{x-3}\,dx$
38. $\int_0^1 x(x-3)^2\,dx$
39. $\int_1^4 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\,dx$
40. $\int_{-2}^{0} xe^{-x^2}\,dx$

في التمارين 41–46، تم إعطاؤك زوجًا من التكاملات. أوجد قيمة التكامل الذي يمكن إجراؤه باستخدام الطرائق التي تمت تغطيتها حتى الآن (لا يمكن استخدام الأخرى).

41. $\int \frac{5}{3+x^2}\,dx$ and $\int \frac{5}{3+x^3}\,dx$
42. $\int \sin 3x\,dx$ and $\int \sin^3 x\,dx$
43. $\int \ln x\,dx$ and $\int \frac{\ln x}{2x}\,dx$
44. $\int \frac{x^3}{1+x^8}\,dx$ and $\int \frac{x^4}{1+x^8}\,dx$
45. $\int e^{-x^2}\,dx$ and $\int xe^{-x^2}\,dx$

46. $\int \sec x \, dx$ and $\int \sec^2 x \, dx$

47. أوجد $\int_0^2 f(x)\, dx$، حيث $f(x) = \begin{cases} x/(x^2+1) & \text{إذا كان } x \le 1 \\ x^2/(x^2+1) & \text{إذا كان } x > 1 \end{cases}$

48. أعِد العمل على المثال 1.5 من خلال إعادة كتابة التكامل في صورة $\int \frac{4x+4}{2x^2+4x+10}\, dx - \int \frac{3}{2x^2+4x+10}\, dx$ وإكمال المربع في التكامل الثاني.

49. أوجد $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx$، $\int \frac{x}{1+x^2}\, dx$، $\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$ و $\int \frac{x^3}{1+x^2}\, dx$. وعموماً أعط صيغة $\int \frac{x^n}{1+x^2}\, dx$ لأي عدد صحيح موجب n. تمامًا بقدر ما تستطيع.

50. أوجد $\int \frac{x}{1+x^4}\, dx$، $\int \frac{x^3}{1+x^4}\, dx$ و $\int \frac{x^5}{1+x^4}\, dx$. وعموماً أعط صيغة $\int \frac{x^n}{1+x^4}\, dx$ لأي عدد صحيح موجب فردي n. تمامًا بقدر ما تستطيع.

تمارين استكشافية

1. أوجد $\int xe^{-x^2} dx$، $\int x^3e^{-x^2} dx$ و $\int x^5e^{-x^2} dx$. وعموماً أعط صيغة $\int x^ne^{-x^2} dx$ لأي عدد صحيح موجب فردي n.

2. في العديد من الحالات، يجب التوسّع مع التكامل كما قمنا بتعريفه إلى **تكامل ريمان–شتيلتيز** الذي تم اعتباره في هذا التمرين. للدالتين f و g، لتكن P هي تجزئة عادية لـ $[a, b]$ بنقاط القيم $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ وعرّف المجاميع $R(f, g, P) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})]$. التكامل $\int_a^b f(x)\, dg(x)$ يساوي نهاية المجموع $R(f, g, P)$ عندما $n \to \infty$. إذا كانت النهاية موجودة وتساوي العدد نفسه لكل قيم النقاط c_i. (a) أثبت أنّه إذا كان g' موجودة، إذًا $\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\, dx$.
(b) إذا كانت $g(x) = \begin{cases} 1 & a \le x \le d \\ 2 & d < x \le b \end{cases}$ لعدد ثابت d حيث $a < d < b$.
أوجد قيمة $\int_a^b f(x)\, dg(x)$. (c) أوجد دالة $g(x)$ بحيث يكون $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dg(x)$ موجودًا.

9-2 التكامل بالأجزاء

إلى الآن، ستكون قد أدركت أنّ هناك العديد من التكاملات التي لا يمكن إيجاد قيمها باستخدام الصيغ الأساسية أو التكامل بالتعويض. فعلى سبيل المثال،

$$\int x \sin x \, dx$$

لا يمكن إيجاد قيمتها بما تعرفه حتى الآن.

وقد لاحظنا أنّ كل قاعدة إشتقاق تعطي قاعدة تكامل مناظرة لها. إذًا، لأجل قاعدة الضرب:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

يعطينا التكامل من الجانبين لهذه المعادلة

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] \, dx = \int f'(x)g(x) \, dx + \int f(x)g'(x) \, dx$$

بتجاهل ثابت التكامل، يكون التكامل على الجانب الأيسر من المعادلة ببساطة $f(x)g(x)$. يقدّم إذًا حل التكامل الثاني على الجانب الأيمن من المعادلة

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx$$

تسمّى هذه القاعدة **التكامل بالأجزاء**. باختصار، تسمح لنا هذه القاعدة الجديدة باستبدال تكامل معطى بآخر أسهل. سنترك للأمثلة مهمة إقناعك بفاعلية هذه الطريقة. أولًا، من المناسب دائمًا كتابة

الملاحظات التاريخية

بروك تايلور (1731–1685)

عالم رياضيات إنجليزي يرجع إليه الفضل في ابتكار التكامل بالأجزاء. قدّم تايلور مساهمات هامة في الاحتمال ونظرية المغناطيسية واستخدام خطوط التلاشي في المنظور الخطي. ومع ذلك، فقد اشتهر بنظرية تايلور (انظر القسم 8.7)، حيث قام بتعميم نتائج نيوتن وهالي وبيرنولي وغيرهم. إنّ المأساة في حياته الشخصية (كلتا زوجتيه توفيتا أثناء الولادة) واعتلال صحته عملت على الحد من الناتج الرياضي لعالم الرياضيات الرائع هذا.

هذا باستخدام المفهوم $u = f(x)$ و $v = g(x)$. إذًا،

$$du = f'(x)\,dx \qquad \text{و} \qquad dv = g'(x)\,dx$$

حيث تصبح خوارزمية التكامل بالأجزاء.

التكامل بالأجزاء

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{2.1}$$

لتطبيق التكامل بالأجزاء، تحتاج إلى القيام بخيار حكيم لـ u و dv بحيث يكون التكامل على الجانب الأيمن من (2.1) هو واحد تعرف كيفية إيجاد قيمته.

المثال 2.1 التكامل بالأجزاء

أوجد قيمة $\int x \sin x\,dx$.

الحل أولًا، لاحظ أنّ هذا ليس واحدًا من تكاملاتنا الأساسية ولا يوجد تعويض واضح سيفيد. لاستخدام التكامل بالأجزاء، ستحتاج إلى اختيار u (شيء للإشتقاق) و dv (شيء للتكامل). إذا أخذنا

$$u = x \qquad \text{و} \qquad dv = \sin x\,dx$$

إذًا $du = dx$ وتكامل dv، نحصل على

$$v = \int \sin x\,dx = -\cos x + k$$

عند إجراء التكامل بالأجزاء، نقوم بإسقاط ثابت التكامل هذا. (فكّر في سبب منطقية القيام بذلك.) أيضًا، عادةً نكتب هذه المعلومات باعتبارها كتلة:

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= \sin x\,dx \\ du &= dx & v &= -\cos x \end{aligned}$$

يعطينا ذلك

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{u}\ \underbrace{\sin x\,dx}_{dv} &= \int u\,dv = uv - \int v\,du \\ &= -x\cos x - \int (-\cos x)\,dx \\ &= -x\cos x + \sin x + c \end{aligned} \tag{2.2}$$

إنها مسألة بسيطة لإشتقاق التعبير على الجانب الأيمن من (2.2) والتحقق مباشرةً من أنّك قد وجدت في الواقع دالّة أصلية لـ $x \sin x$. ■

يتوجّب عليك سريعًا إدراك أنّ اختيار u و dv مهم. لاحظ النتيجة إذا قمنا بتبديل اختيار u و dv كما في المثال 2.2.

المثال 2.2 اختيار خطأ لـ u و dv

لنأخذ $\int x \sin x\,dx$ كما في المثال 2.1، لكن هذه المرة اعكس اختيار u و dv.

الحل هنا، لتكن

$$\begin{aligned} u &= \sin x & dv &= x\,dx \\ du &= \cos x\,dx & v &= \tfrac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

يعطينا ذلك

$$\int \underbrace{(\sin x)}_{u}\ \underbrace{x\,dx}_{dv} = uv - \int v\,du = \frac{1}{2}x^2 \sin x - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\,dx$$

الذي لاحظ أنّ التكامل الأخير لا نعرف كيف نقوم بحسابه بطريقة أفضل من الطريقة الأصلية. في الحقيقة، لقد جعلنا الموقف أسوأ حيث أنّ قوّة x في التكامل الجديد أعلى منها في التكامل الأصلي. ■

المثال 2.3 مكامل مع حد إفرادي

أوجد قيمة $\int \ln x\,dx$.

الحل قد يبدو هذا بسيطًا، ولكنه ليس واحدًا من التكاملات الأساسية، وليست هناك تعويضات واضحة من شأنها تبسيطه. يترك لنا هذا التكامل بالأجزاء. تذكر أنّه ينبغي عليك اختيار u (لإيجاد تفاضلها) و dv (ليتم تكاملها). من الواضح أنّه لا يمكنك الاختيار $dv = \ln x\,dx$. حيث أنّ المسألة هنا الهدف منها إيجاد طريقة لتكامل هذا الحد. لذلك، حاول

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = x$$

يعطينا التكامل بالأجزاء الآن

$$\int \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} = uv - \int v\,du = x\ln x - \int x\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + c$$
■

في كثير من الأحيان، ينتج عن التكامل بالأجزاء تكامل لا يمكننا إيجاد قيمته مباشرةً، ولكن بدلًا من ذلك، نستطيع إيجاد تكامل بتكرار التكامل بالأجزاء مرة واحدة أو أكثر.

المثال 2.4 التكامل بتكرار بالأجزاء

أوجد قيمة $\int x^2 \sin x\,dx$.

الحل بالتأكيد، لا يمكنك إيجاد قيمة هذا كما هو عليه ولا يوجد تبسيط أو تعويض واضح من شأنه أن يفيد. نختار

$$u = x^2 \qquad dv = \sin x\,dx$$
$$du = 2x\,dx \qquad v = -\cos x$$

بهذا الاختيار، يقدّم التكامل بالأجزاء

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{\sin x\,dx}_{dv} = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$$

بالطبع، لا يمكن إيجاد قيمة هذا التكامل الأخير كما هو عليه، ولكن يمكننا القيام بذلك باستخدام التكامل بالأجزاء. نختار الآن

$$u = x \qquad dv = \cos x\,dx$$
$$du = dx \qquad v = \sin x$$

بتطبيق التكامل بالأجزاء على التكامل الأخير، لدينا الآن

$$\int x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x + 2\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\cos x\,dx}_{dv}$$
$$= -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x\,dx\right)$$
$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$$
■

ملحوظة 2.1

عند استخدام التكامل بالأجزاء، ضع في اعتبارك أنّك تقوم بتقطيع المكامل إلى جزأين. إنّ واحدة من هذه الأجزاء، المناظرة مع u، تفاضلها والأخرى، المناظرة dv، سيتم تكاملها. بما أنّه يمكنك اشتقاق كل دالة تمر عليها، ينبغي عليك اختيار dv التي تعرف دالّتها الأصلية واختر الاثنين اللتين سينتج عنهما تكامل أسهل. إن أمكن، اختيار $u = x$ ينتج عنه $du = dx$ البسيط. ستتعلّم أفضل ما يمكن القيام به من خلال العمل على الكثير من المسائل. حتى وإن كنت لا تعلم كيفية انتهاء المسألة، حاول القيام بأي شيء!

ملحوظة 2.2

في التكامل بالأجزاء الثاني في المثال 2.4، إذا قمت باختيار $u = \cos x$ و $dv = x\,dx$، إذًا سيترك لك التكامل بالأجزاء فقط الاستنتاج الأقل من مذهل حيث يساوي التكامل الذي بدأت به نفسه. (قم بتجربة ذلك كتمرين).

استنادًا إلى عملنا في المثال 2.4، حاول معرفة عدد التكاملات بالأجزاء المطلوبة لإيجاد قيمة $\int x^n \sin x\,dx$، لكل عدد صحيح موجب n. (سيكون هناك المزيد من أجل ذلك، بما في ذلك اختصار، في التمارين.)

يعيدك تكرار التكامل بالأجزاء في بعض الأحيان إلى التكامل الذي بدأت به. يمكن أن يكون ذلك خبرًا سيئًا (انظر الملاحظة 2.2)، أو يمكن أن يقدّم لنا طريقة ذكية لإيجاد قيمة التكامل، كما في المثال 2.5.

المثال 2.5 تكرار التكامل بالأجزاء المتطور

أوجد قيمة $\int e^{2x}\sin x\,dx$.

الحل لا تعمل أي من الطرائق الأولى على هذا التكامل. للتكامل بالأجزاء، يوجد خياران قابلان للتطبيق لـ u و dv. نأخذ:

$$u = e^{2x} \qquad dv = \sin x\,dx$$
$$du = 2e^{2x}\,dx \qquad v = -\cos x$$

(الاختيار المقابل مناسب أيضًا. قم بتجربة ذلك كتمرين). يعطي التكامل بالأجزاء

$$\int \underbrace{e^{2x}}_{u}\underbrace{\sin x\,dx}_{dv} = -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x\,dx$$

يتطلب التكامل المتبقي مرة أخرى تكاملًا بالأجزاء. نختار

$$u = e^{2x} \qquad dv = \cos x\,dx$$
$$du = 2e^{2x}\,dx \qquad v = \sin x$$

فهي تتبع الآن

$$\int e^{2x}\sin x\,dx = -e^{2x}\cos x + 2\int \underbrace{e^{2x}}_{u}\underbrace{\cos x\,dx}_{dv}$$
$$= -e^{2x}\cos x + 2\left(e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x\,dx\right)$$
$$= -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4\int e^{2x}\sin x\,dx \qquad (2.3)$$

لاحظ أنّ السطر الأخير يتضمّن التكامل الذي بدأنا به. بالتعامل مع التكامل $\int e^{2x}\sin x\,dx$ باعتباره القيمة المجهولة، يمكننا إضافة $4\int e^{2x}\sin x\,dx$ إلى جانبي المعادلة (2.3)، مما يعطي

$$5\int e^{2x}\sin x\,dx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x + K$$

حيث أضفنا ثابت التكامل K إلى الجانب الأيمن. بقسمة كلا الجانبين على 5 إذًا نحصل على

$$\int e^{2x}\sin x\,dx = -\frac{1}{5}e^{2x}\cos x + \frac{2}{5}e^{2x}\sin x + c$$

حيث استبدلنا ثابت التكامل العشوائي $\frac{K}{5}$ بـ c. ■

لاحظ أنّه لأي عدد صحيح موجب n، سيتطلب التكامل $\int x^n e^x\,dx$ تكاملًا بالأجزاء. في هذه المرحلة، ينبغي ألا يكون مفاجئًا إذا أخذنا لـ

$$u = x^n \qquad dv = e^x\,dx$$
$$du = nx^{n-1}\,dx \qquad v = e^x$$

ملحوظة 2.3

للتكاملات مثل $\int e^{2x}\sin x\,dx$ (أو تكاملات ذات صلة مثل $\int e^{-3x}\cos 2x\,dx$)، سينتج عن تكرار التكامل بالأجزاء كما في المثال 2.5 دالّة أصلية. الاختيار الأول لـ u و dv يرجع لك (أي الاختيارين سيكون مناسبًا) لكن اختيارك لـ u و dv في التكامل بالأجزاء الثاني يجب أن يكون متسقًا مع اختيارك الأول. على سبيل المثال، في المثال 2.5، اختيارنا الأولي لـ $u = e^{2x}$ يلزمنا باستخدام $u = e^{2x}$ للتكامل بالأجزاء الثاني أيضًا. لمعرفة السبب، أعد العمل على التكامل الثاني حيث تأخذ $u = \cos x$ ولاحظ ما سيحدث!

إنّ تطبيق تكامل بالأجزاء يعطينا

$$\int \underbrace{x^n}_{u} \underbrace{e^x\,dx}_{dv} = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx \tag{2.4}$$

لاحظ أنّه إذا $n-1>0$، فسنحتاج إلى إجراء تكامل بالأجزاء مرة أخرى. في الواقع، سنحتاج إلى إجراء إجمالي n تكاملات بالأجزاء لإكمال العملية. يتمثّل الحل البديل بتطبيق الصيغة (2.4) (التي يُطلق عليها **صيغة الاختزال**) بشكل متكرّر لإيجاد قيمة تكامل معيّن. نوضّح ذلك في المثال 2.6.

المثال 2.6 استخدام صيغة اختزال

أوجد قيمة التكامل $\int x^4 e^x\,dx$.

الحل لإجراء أربعة تكاملات بالأجزاء هي مضيعة للوقت. ومع ذلك، يمكننا استخدام صيغة الاختزال (2.4) بشكل متكرّر لإيجاد قيمة التكامل بسهولة نسبية، على النحو التالي. من (2.4)، حيث $n=4$، نحصل على

$$\int x^4e^x\,dx = x^4e^x - 4\int x^{4-1}e^x\,dx = x^4e^x - 4\int x^3e^x\,dx$$

بتطبيق (2.4) مرة أخرى، حيث $n=3$، يعطينا

$$\int x^4e^x\,dx = x^4e^x - 4\left(x^3e^x - 3\int x^2e^x\,dx\right)$$

الأن، يجب عليك ملاحظة أنّه يمكننا الحل بتطبيق صيغة الاختزال مرتين أخريين. وبذلك نحصل على

$$\int x^4e^x\,dx = x^4e^x - 4x^3e^x + 12x^2e^x - 24xe^x + 24e^x + c$$

حيث نترك تفاصيل الحسابات المتبقية لك. ■

لاحظ أنّه لإيجاد قيمة التكامل المحدود، فمن الممكن دائمًا تطبيق التكامل بالأجزاء على التكامل المناظر غير المحدود ثم ببساطة إيجاد قيمة الدّالة الأصلية من الناتج بين حدود التكامل. مع ذلك، كلما كان الأمر ممكنًا (أي، عندما يتضمّن التكامل بشكل كبير)، يجب عليك تطبيق التكامل بالأجزاء مباشرةً على التكامل المحدود. لاحظ أنّ خوارزمية التكامل بالأجزاء للتكاملات المحدودة هي ببساطة

التكامل بالأجزاء لتكامل محدود

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} u\,dv = uv\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} v\,du}$$

حيث كتبنا حدود التكامل، علينا تذكيرك بأنّ هذه تشير إلى قيم x. (تذكّر أنّنا قمنا باشتقاق صيغة التكامل بالأجزاء من خلال أخذ u و v ليكون كلاهما دالتين لـ x).

المثال 2.7 التكامل بالأجزاء لتكامل محدود

أوجد قيمة $\int_1^2 x^3 \ln x\,dx$.

الحل مرة أخرى، بما أنّ استخدام الطرائق الأولى هو بدون فائدة، نجرّب التكامل بالأجزاء. بما أنّنا لا نعلم كيف نقوم بتكامل $\ln x$ (باستثناء التكامل بالأجزاء)، نختار:

$$u = \ln x \qquad dv = x^3\,dx$$
$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \frac{1}{4}x^4$$

ومنه، لدينا

$$\int_1^2 \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{x^3 dx}_{dv} = uv\Big|_1^2 - \int_1^2 v\, du = \frac{1}{4}x^4 \ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{4}\int_1^2 x^4\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}(2^4 \ln 2 - 1^4 \ln 1) - \frac{1}{4}\int_1^2 x^3 dx$$

$$= \frac{16 \ln 2}{4} - 0 - \frac{1}{16}x^4\Big|_1^2 = 4\ln 2 - \frac{1}{16}(2^4 - 1^4)$$

$$= 4\ln 2 - \frac{1}{16}(16-1) = 4\ln 2 - \frac{15}{16}$$

يُعد التكامل بالأجزاء أقوى أداة في مجموعة التكامل الخاصة بنا. من أجل إتقان استخدامه، ستحتاج إلى العمل على العديد من المسائل. نحن نقدّم تشكيلة واسعة من هذه المسائل في مجموعة التمارين التالية.

تمارين 9.2

تمارين كتابية

.1 ناقش أفضل استراتيجية خاصة بك لتحديد أي جزء من المكامل يجب أن يكون u وأي جزء يجب أن يكون dv.

.2 نحصل على التكامل بالأجزاء من قاعدة ناتج الضرب للمشتقات. قم باشتقاق طريقة تكامل يتم الحصول عليه من قاعدة ناتج القسمة. ناقش بإيجاز سبب عدم فائدة القاعدة.

في التمارين 28–1، أوجد قيمة التكاملات.

1. $\int x\cos x\, dx$
2. $\int x\sin 4x\, dx$
3. $\int xe^{2x} dx$
4. $\int x\ln x\, dx$
5. $\int x^2 \ln x\, dx$
6. $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$
7. $\int x^2 e^{-3x} dx$
8. $\int x^2 e^{x^3}\, dx$
9. $\int e^x \sin 4x\, dx$
10. $\int e^{2x}\cos x\, dx$
11. $\int \cos x\cos 2x\, dx$
12. $\int \sin x\sin 2x\, dx$
13. $\int x\sec^2 x\, dx$
14. $\int (\ln x)^2\, dx$
15. $\int x^3 e^{x^2} dx$
16. $\int \frac{x^3}{(4+x^2)^{3/2}}\, dx$
17. $\int \cos x\ln(\sin x)\, dx$
18. $\int x\sin x^2 dx$
19. $\int_0^1 x\sin 2x\, dx$
20. $\int_0^\pi 2x\cos x\, dx$
21. $\int_0^1 x^2\cos \pi x\, dx$
22. $\int_0^1 x^2 e^{3x} dx$
23. $\int_1^{10} \ln 2x\, dx$
24. $\int_1^2 x\ln x\, dx$
25. $\int e^{ax}x^2\, dx, a \neq 0$
26. $\int x\sin(ax)\, dx, a \neq 0$
27. $\int x^n \ln x\, dx, n \neq -1$
28. $\int \sin(ax)\cos(bx)\, dx, a \neq 0, b \neq 0$

.29 يستخدم عدة صيغ للتكامل (يُطلق عليها اسم صيغ الاختزال) لجعل عملية إجراء عدة تكاملات بالأجزاء آلية. أثبت أنّه لأي عدد صحيح موجب n.

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$$

(استخدم التكامل بالأجزاء مع $u = \cos^{n-1} x$ و $dv = \cos x\, dx$).

.30 استخدم التكامل بالأجزاء لتثبت أنّه لأي عدد صحيح موجب n

$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx$$

في التمارين 38–31، أوجد قيمة التكامل باستخدام صيغ الاختزال من التمارين 29 و 30 و (2.4).

31. $\int x^3 e^x\, dx$
32. $\int \cos^5 x\, dx$
33. $\int \cos^3 x\, dx$
34. $\int \sin^4 x\, dx$
35. $\int_0^1 x^4 e^x\, dx$
36. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\, dx$
37. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\, dx$
38. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\, dx$

39. وفقًا للتمارين 38-36 والتكاملات المشابهة، خمّن صيغة لـ $\int_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx$. (ملحوظة: ستحتاج إلى صيغ عديدة لـ m الفردية ولـ m الزوجية.)

40. خمّن صيغة لـ $\int_0^{\pi/2} \cos^m x\,dx$.

في التمارين 50–41، أوجد قيمة التكامل باستخدام التكامل بالأجزاء والتعويض. (كما أوصينا في النص، "قم بتجربة شيء ما!")

41. $\int \cos^{-1} x\,dx$ **42.** $\int \tan^{-1} x\,dx$

43. $\int \sin\sqrt{x}\,dx$ **44.** $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

45. $\int \sin(\ln x)\,dx$ **46.** $\int x\ln(4+x^2)\,dx$

47. $\int e^{6x}\sin(e^{2x})\,dx$ **48.** $\int \cos\sqrt[3]{x}\,dx$

49. $\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}}dx$ **50.** $\int_0^1 x\tan^{-1} x\,dx$

51. كم مرّة سيكون هناك حاجة إلى إجراء تكامل بالأجزاء لإيجاد قيمة $\int x^n \sin x\,dx$ (حيث n هي عدد صحيح موجب)؟

52. كم عدد المرات التي ستكون هناك حاجة إلى إجراء تكامل بالأجزاء لإيجاد قيمة $\int x^n \ln x\,dx$ (حيث n هي عدد صحيح موجب)؟

في التمرينين 53 و 54، اذكر اسم الطريقة من تحديد ما إذا كان يمكن استخدام التعويض أو التكامل بالأجزاء لإيجاد قيمة التكامل.

53. (a) $\int x\sin x^2\,dx$ (b) $\int x^2\sin x\,dx$

(c) $\int x\ln x\,dx$ (d) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

54. (a) $\int x^3e^{4x}\,dx$ (b) $\int x^3e^{x^4}\,dx$

(c) $\int x^{-2}e^{4/x}\,dx$ (d) $\int x^2e^{-4x}\,dx$

55. يروي فيلم *Stand and Deliver* قصة معلم الرياضيات جايمي إسكالانتي، الذي طوّر برنامج بارز للمستوى المتقدم من حساب التفاضل والتكامل في داخل مدينة لوس أنجلوس. في أحد المشاهد، يوضّح إسكالانتي لطالب كيفية إيجاد قيمة التكامل $\int x^2\sin x\,dx$. ويقوم بتكوين مخطط كالتالي:

	$\sin x$	
x^2	$-\cos x$	$+$
$2x$	$-\sin x$	$-$
2	$\cos x$	$+$

عند ضرب كل صف بكامله، تكون الدّالة الأصلية $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$. اشرح كيفية الحصول على نتائج كل عمود وسبب نجاح الطريقة في هذه المسألة.

في التمارين 61–56، استخدم الطريقة الموجودة بالتمرين 55 لإيجاد قيمة التكامل.

56. $\int x^4\sin x\,dx$ **57.** $\int x^4\cos x\,dx$

58. $\int x^4e^x\,dx$ **59.** $\int x^4e^{2x}dx$

60. $\int x^5\cos 2x\,dx$ **61.** $\int x^3e^{-3x}dx$

62. يجب أن تدرك أنّ الطريقة الموجودة في التمرين 55 لا تنجح دائمًا، خاصة إذا كان لكل من عمودي المشتقّة والدالة الأصلية قوّة x. وضّح أنّ الطريقة لا تنجح على $\int x^2\ln x\,dx$.

63. أثبت أنّ $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)\,dx = 0$ و $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\sin(nx)\,dx = 0$ للأعداد الصحيحة الموجبة $m \neq n$.

64. أثبت أنّ $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\sin(nx)\,dx = 0$ للأعداد الصحيحة الموجبة m و n و $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)\,dx = \pi$، لأي عدد صحيح موجب n.

65. أوجد جميع الأخطاء في محاولة الإثبات (غير الصحيحة) التالية $-1 = 0$. ابدأ بـ $\int e^xe^{-x}dx$ ثم طبق التكامل بالأجزاء مع $u = e^x$ و $dv = e^{-x}dx$. يُعطي هذا $\int e^xe^{-x}dx = -1 + \int e^xe^{-x}dx$. ثم اقسم على $\int e^xe^{-x}dx$ للحصول على $-1 = 0$.

66. أوجد حجم المجسّم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x\sqrt{\sin x}$ و $y = 0$ $(0 \le x \le \pi)$ حول المحور x.

67. أوجد قيمة $\int e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)dx$ باستخدام التكامل بالأجزاء على $\int e^x\ln x\,dx$.

68. عمّم الطريقة المستخدمة في التمرين 67 على أي تكامل من الصيغة $\int e^x[f(x) + f'(x)]\,dx$. أثبت نتيجتك بدون استخدام التكامل بالأجزاء.

69. على فرض أنّ f و g هي دوال تحقق $f(0) = g(0) = 0$. $f(1) = g(1) = 0$ ومشتقات من الرتبة الثانية متصلة f'' و g''. استخدم التكامل بالأجزاء مرتين لتوضيح أنّ

$$\int_0^1 f''(x)g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)g''(x)\,dx$$

70. على فرض أنّ f هي دالةلها مشتقّة متصلة من الرتبة الثانية. أثبت أنّ $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(x)(b-x)\,dx$. استخدم هذه النتيجة لتثبت أنّ $|\sin b - b| = |\int_a^b (b-x)\sin x\,dx|$ واستنتج أنّ الخطأ في التقريب $\sin x \approx x$ هو $\frac{1}{2}x^2$ على أقصى تقدير.

تمارين استكشافية

1. يمكن استخدام التكامل بالأجزاء لحساب معاملات دالة مهمة يطلق عليها اسم متسلسلة فوريية. نغطي متسلسلة فوريية بالتفصيل في الوحدة 8. هنا، ستكتشف ما وراء بعض من هذه الجلبة. ابدأ بحساب $a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx$ لعدد صحيح موجب غير محدّد n. اكتب القيم المحدّدة لـ a_1، a_2، a_3 و a_4 ثم كوّن الدالة

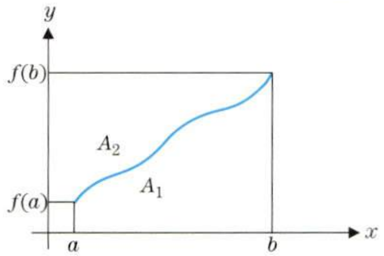
$$f(x) = a_1\sin x + a_2\sin 2x + a_3\sin 3x + a_4\sin 4x$$

قارن التمثيل البياني لـ $y = x$ و $y = f(x)$ على الفترة $[-\pi, \pi]$. من كتابة a_1 من خلال a_4، ينبغي أن تلاحظ نمطًا جيدًا. استخدمه لتكوّن الدالة.

$$g(x) = f(x) + a_5 \sin 5x + a_6 \sin 6x + a_7 \sin 7x + a_8 \sin 8x$$

قارن التمثيل البياني لـ $y = x$ و $y = g(x)$ على الفترة $[-\pi, \pi]$. هل من المدهش أنّه يمكنك جمع دوال sine مع بعضها البعض والحصول على ما يشابه خط مستقيم؟ يتضح أنّه يمكن استخدام متسلسلة فوريه لإيجاد تقريبين cosine و sine لأي دالة متصلة على فترة مغلقة.

2. فرضًا أنّ f هي دالة متزايدة متصلة على $[a, b]$ مع $0 \le a < b$ و $f(x) \ge 0$. لتكن A_1 هي المساحة تحت $y = f(x)$ من $x = a$ إلى $x = b$ ولتكن A_2 هي المساحة على يسار $y = f(x)$ من $f(a)$ إلى $f(b)$. أثبت أنّ $A_1 + A_2 = bf(b) - af(a)$ و $\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy$. استخدم هذه النتيجة لإيجاد قيمة $\int_0^{\pi/4} \tan^{-1} x\,dx$.



9-3 طرائق تكامل الدوال المثلثية

تكاملات تتضمّن قوى الدوال المثلثية

غالبًا ما يتضمّن إيجاد قيمة تكامل يحتوي مكامله على قوى دالة مثلثية واحدة أو أكثر إجراء تعويض ذكي. تُعدّ هذه التكاملات شائعةً بشكل كافٍ لتقديمها هنا كمجموعة.

أولًا نضع في الاعتبار التكاملات بالصيغة

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

حيث يكون m و n عددين صحيحين موجبين.

الحالة 1: m أو n هي عدد صحيح فردي موجب

إذا كان m عددًا فرديًا، إعزل أولاً واحد من عوامل $\sin x$. (ستحتاج ذلك من أجل du.) ثم إستبدل أي من عوامل $\sin^2 x$ باستخدام $1 - \cos^2 x$ وقم بإجراء التعويض $u = \cos x$. وبالمثل، إذا كان n عددًا فرديًا، قم أولًا بعزل واحد من عوامل $\cos x$. (ستحتاج ذلك من أجل du.) ثم استبدل أي من عوامل $\cos^2 x$ باستخدام $1 - \sin^2 x$ وقم بإجراء التعويض $u = \sin x$.

نوضّح هذا للحالة التي يكون فيها m عدد فردي في المثال 3.1.

المثال 3.1 تعويض نوعي

أوجد قيمة $\int \cos^4 x \sin x \, dx$.

الحل بما أنّه لا يمكنك إيجاد قيمة هذا التكامل كما هو، يجب إجراء تعويض. (إرشاد: ابحث عن حدود تكون مشتقات لحدود أخرى). هنا، لنأخذ $u = \cos x$. فتكون $du = -\sin x \, dx$. يعطينا

$$\int \cos^4 x \sin x \, dx = -\int \underbrace{\cos^4 x}_{u^4} \underbrace{(-\sin x) \, dx}_{du} = -\int u^4 \, du$$

$$= -\frac{u^5}{5} + c = -\frac{\cos^5 x}{5} + c \qquad \text{بما أن } u = \cos x$$

بينما لم يكن هذا المثال الأول تحديًا على وجه الخصوص، فسوف يعطيك فكرة عن كيفية تعاملك مع مثال 3.2.

المثال 3.2 مكامل مع قوّة فرديّة لـ Sine

أوجد قيمة $\int \cos^4 x \sin^3 x \, dx$.

الحل هنا، لنأخذ $u = \cos x$. فتكون $du = -\sin x \, dx$ بحيث أنّ:

$$\int \cos^4 x \sin^3 x \, dx = \int \cos^4 x \sin^2 x \sin x \, dx = -\int \cos^4 x \sin^2 x (-\sin x) \, dx$$

$$= -\int \underbrace{\cos^4 x (1-\cos^2 x)}_{u^4(1-u^2)} \underbrace{(-\sin x) \, dx}_{du} = -\int u^4 (1-u^2) \, du$$

بما أن $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$، $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$= -\int (u^4 - u^6) \, du = -\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7}\right) + c$$

$$= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + c$$

بما أن $u = \cos x$

يمكن تطبيق الأفكار المستخدمة في المثال 3.2 على أي تكامل بالصيغة المحدّدة.

المثال 3.3 مكامل مع قوّة فرديّة لـ Cosine

أوجد قيمة $\int \sqrt{\sin x} \cos^5 x \, dx$.

الحل لاحظ أنّه يمكننا إعادة كتابة ذلك في صورة

$$\int \sqrt{\sin x} \cos^5 x \, dx = \int \sqrt{\sin x} \cos^4 x \cos x \, dx = \int \sqrt{\sin x} (1-\sin^2 x)^2 \cos x \, dx$$

بتعويض $u = \sin x$. فتكون $du = \cos x \, dx$. لدينا

$$\int \sqrt{\sin x} \cos^5 x \, dx = \int \underbrace{\sqrt{\sin x} (1-\sin^2 x)^2}_{\sqrt{u}(1-u^2)^2} \underbrace{\cos x \, dx}_{du}$$

$$= \int \sqrt{u} (1-u^2)^2 \, du = \int u^{1/2} (1 - 2u^2 + u^4) \, du$$

$$= \int (u^{1/2} - 2u^{5/2} + u^{9/2}) \, du$$

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} - 2\left(\frac{2}{7}\right) u^{7/2} + \frac{2}{11} u^{11/2} + c$$

$$= \frac{2}{3} \sin^{3/2} x - \frac{4}{7} \sin^{7/2} x + \frac{2}{11} \sin^{11/2} x + c.$$

بما أن $u = \sin x$

بالنظر إلى أبعد من تفاصيل عملية الحساب الموجودة هنا، يجب أن تلاحظ النقطة الأساسية: أنّه يتم حساب جميع التكاملات من هذه الصيغة بالطريقة نفسها في الأساس.

الحالة 2: m و n عددان صحيحان زوجيان موجبان

في هذه الحالة، يمكننا استخدام صيغ نصف الزاوية لـ sine و cosine (موضّحة في الهامش) لاختصار الأسس في المكامل.

نوضّح هذه الحالة في المثال 3.4.

ملاحظات

صيغ نصف الزاوية

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

المثال 3.4 تكامل الدوال المثلثية لـ Sine

أوجد قيمة $\int \sin^2 x\,dx$.

الحل باستخدام صيغة نصف الزاوية، يمكننا إعادة كتابة التكامل في صورة

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx$$

يمكننا إيجاد قيمة هذا التكامل الأخير باستخدام التعويض $u = 2x$. فتكون $du = 2\,dx$. يعطينا ذلك

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\int \underbrace{(1-\cos 2x)}_{1-\cos u}\underbrace{2\,dx}_{du} = \frac{1}{4}\int (1-\cos u)\,du$$

$$= \frac{1}{4}(u-\sin u)+c = \frac{1}{4}(2x-\sin 2x)+c. \qquad \text{بما أن } u=2x$$

مع بعض التكاملات، تحتاج الى تطبيق صيغ نصف الزاوية عدة مرات، كما في المثال 3.5.

المثال 3.5 تكامل قوّة زوجيّة لـ Cosine

أوجد قيمة $\int \cos^4 x\,dx$.

الحل باستخدام صيغة نصف الزاوية لـ cosine، لدينا

$$\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx$$

باستخدام صيغة نصف الزاوية مرة أخرى، على الحد الأخير في المكامل، نحصل على

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\int \left[1+2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right]dx$$

$$= \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$$

حيث نترك تفاصيل التكامل الأخير كتمرين.

إنّ هدفنا التالي يقوم على وضع استراتيجية لإيجاد قيمة التكاملات بالصيغة

$$\int \tan^m x \sec^n x\,dx$$

حيث يكون m و n عددين صحيحين.

الحالة 1: m هي عدد صحيح فردي موجب

إعزل أولاً واحد من عوامل $\sec x \tan x$. (ستحتاج هذا من أجل du.) ثم إستبدل أي من عوامل $\tan^2 x$ باستخدام $\sec^2 x - 1$ وقم بإجراء التعويض $u = \sec x$.

نوضّح ذلك في المثال 3.6.

المثال 3.6 تكامل قوّة فرديّة لدالة الظل

أوجد قيمة $\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx$.

الحل عند البحث عن حدود هي مشتقات لحدود أخرى، نعيد كتابة التكامل في صورة

$$\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x (\sec x \tan x)\, dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1) \sec^2 x (\sec x \tan x)\, dx$$

حيث استخدمنا متطابقة فيثاغورس

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

يجب أن نلاحظ التعويض الآن. لنأخذ $u = \sec x$. فتكون $du = \sec x \tan x\, dx$ وبالتالي،

$$\int \tan^3 x \sec^3 x\, dx = \int \underbrace{(\sec^2 x - 1)\sec^2 x}_{(u^2-1)u^2} \underbrace{(\sec x \tan x)\, dx}_{du}$$

$$= \int (u^2 - 1)u^2 du = \int (u^4 - u^2)\, du$$

$$= \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{5}\sec^5 x - \frac{1}{3}\sec^3 x + c \quad \text{بما أن } u = \sec x$$

الحالة 2: n هي عدد صحيح زوجي موجب

أولًا، إعزل واحد من عوامل $\sec^2 x$. (ستحتاج هذا من أجل du). ثم إستبدل أي عوامل متبقية $\sec^2 x$ باستخدام $1 + \tan^2 x$ وقم بإجراء التعويض $u = \tan x$.

نوضّح ذلك في المثال 3.7.

المثال 3.7 تكامل قوّة زوجيّة للقاطع

أوجد قيمة $\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx$.

الحل حيث $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$. نعيد كتابة التكامل في صورة

$$\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x\, dx = \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x\, dx$$

نفترض الآن أنّ $u = \tan x$. فتكون $du = \sec^2 x\, dx$ و

$$\int \tan^2 x \sec^4 x\, dx = \int \underbrace{\tan^2 x (1 + \tan^2 x)}_{u^2(1+u^2)} \underbrace{\sec^2 x\, dx}_{du}$$

$$= \int u^2 (1 + u^2)\, du = \int (u^2 + u^4)\, du$$

$$= \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + c$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + c \quad \text{بما أن } u = \tan x$$

الحالة 3: m هو عدد صحيح زوجي موجب و n هو عدد صحيح فردي موجب

استبدل أيًا من عوامل $\tan^2 x$ بـ $\sec^2 x - 1$ ثم استخدم صيغة اختزال خاصة (معطاة في التمرين) لإيجاد قيمة التكاملات من الصيغة $\int \sec^n x\, dx$. ستتم تغطية هذه الحالة المعقّدة بإيجاز في التمارين. يعتمد الجزء الأكبر من هذا على المثال 3.8.

المثال 3.8 تكامل غير عادي

أوجد قيمة التكامل $\int \sec x\, dx$.

الحل يعتمد إيجاد دالة أصلية هنا على رؤية غير عادية. لاحظ أنّه إذا ضربنا المكامل بالكسر $\dfrac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$ (وهو بالطبع مساويًا لـ 1)، نحصل على

$$\int \sec x\, dx = \int \sec x \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\right) dx$$
$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$$

انظر إلى القيمة في البسط هي تمامًا مشتقّة المقام. أي إنّ.

$$\frac{d}{dx}(\sec x + \tan x) = \sec x \tan x + \sec^2 x$$

لنأخذ $u = \sec x + \tan x$ يعطينا

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx$$
$$= \int \frac{1}{u}\, du = \ln |u| + c$$
$$= \ln |\sec x + \tan x| + c \quad \text{بما أن } u = \sec x + \tan x$$

التعويض مع الدوال المثلثية

إذا كان تكامل يحتوي على حد بالصيغة $\sqrt{a^2 - x^2}$، $\sqrt{a^2 + x^2}$ أو $\sqrt{x^2 - a^2}$. لبعض $a > 0$. غالبًا ما يمكنك إيجاد قيمة التكامل بتعويض يتضمّن دالة مثلثية (ومن هنا جاءت تسمية التعويض مع الدوال المثلثية).

أولًا، على فرض أنّ مكامل يحتوي على حد بالصيغة $\sqrt{a^2 - x^2}$. لبعض $a > 0$. لتكن $x = a \sin \theta$. حيث $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. يمكننا حذف الجذر التربيعي، كالتالي:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a \sin \theta)^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta}$$
$$= a\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = a\sqrt{\cos^2 \theta} = a \cos \theta$$

بما أن لـ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$، $\cos \theta \ge 0$. يُعدّ المثال 3.9 نموذجيًا لكيفية استخدام هذه التعويضات.

ملاحظة

يمكن كذلك تبسيط الحدود بالصيغة $\sqrt{a^2 - x^2}$ عن طريق التعويض $x = a \cos \theta$، باستخدام قيد مختلف لـ θ.

المثال 3.9 تكامل يتضمّن $\sqrt{a^2 - x^2}$

أوجد قيمة $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{4 - x^2}}\, dx$.

الحل يجب عليك دائمًا التفكير أولًا إذا بالإمكان إجراء تكامل مباشرة بالتعويض أو بالأجزاء. بما أنّ أيًا من هذه الطرائق لا تقدّم مساعدة هنا. نأخذ التعويض مع الدوال المثلثية. تذكّر أنّ الهدف

المباشر هنا هو حذف الجذر التربيعي. إنّ التعويض الذي سيحقق هذا الأمر هو

$$x = 2\sin\theta. \qquad \text{لكل } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

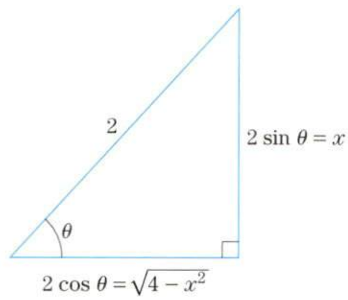
(لماذا نحتاج إلى متباينات تامة هنا؟) يعطينا ذلك

$$dx = 2\cos\theta\, d\theta$$

وبالتالي،

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{(2\sin\theta)^2\sqrt{4-(2\sin\theta)^2}}\,2\cos\theta\,d\theta\\ &= \int \frac{2\cos\theta}{4\sin^2\theta\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\,d\theta\\ &= \int \frac{\cos\theta}{(2\sin^2\theta)\,2\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,d\theta\\ &= \int \frac{\cos\theta}{4\sin^2\theta\cos\theta}\,d\theta && \text{بما أن } 1-\sin^2\theta=\cos^2\theta\\ &= \frac{1}{4}\int \csc^2\theta\,d\theta = -\frac{1}{4}\cot\theta + c && \text{بما أن } \frac{1}{\sin^2\theta}=\csc^2\theta\end{aligned}$$

تُعدّ المسألة الوحيدة المتبقية هنا كتابة الدالة الأصلية بدلالة المتغير θ. عند التحويل مجددًا إلى المتغيّر الأصلي $x = 2\sin\theta$. نحثّك على رسم مخطط، كما في الشكل 9.1. بما أنّ التعويض كان $x = 2\sin\theta$. لدينا $\sin\theta = \frac{x}{2} = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}$ ولهذا نقوم بتسمية الوتر 2. $2\sin\theta$ هو الضلع المقابل للزاوية θ. وفقًا لنظرية فيثاغورس، يكونّ الضلع المجاور $\sqrt{4-x^2}$، كما هو مشار إليه. لذا، لدينا



الشكل 9.1

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

ومنه

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\frac{1}{4}\cot\theta + c = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + c$$

بعد ذلك، على فرض أنّ مكامل يحتوي على حد بالصيغة $\sqrt{a^2+x^2}$. لبعض $a > 0$. بأخذ $x = a\tan\theta$. حيث $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. نحذف الجذر التربيعي، كالتالي:

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+x^2} &= \sqrt{a^2+(a\tan\theta)^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta}\\ &= a\sqrt{1+\tan^2\theta} = a\sqrt{\sec^2\theta} = a\sec\theta\end{aligned}$$

بما أنّ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$، $\sec\theta > 0$. يتسم المثال 3.10 بكونه نموذجيًا لكيفية استخدام هذه التعويضات.

المثال 3.10 تكامل يتضمّن $\sqrt{a^2+x^2}$

أوجد قيمة التكامل $\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$.

الحل يمكنك حذف الجذر التربيعي بأخذ أنّ $x = 3\tan\theta$. لكل $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. يعطينا ذلك $dx = 3\sec^2\theta d\theta$. بحيث تكون

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{9+(3\tan\theta)^2}}\,3\sec^2\,d\theta \\
&= \int \frac{3\sec^2\theta}{\sqrt{9+9\tan^2\theta}}\,d\theta \\
&= \int \frac{3\sec^2\theta}{3\sqrt{1+\tan^2\theta}}\,d\theta \\
&= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}\,d\theta \qquad \text{بما أن } 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta \\
&= \int \sec\theta\,d\theta \\
&= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c
\end{aligned}$$

من المثال 3.8. لم ننته هنا بعد نظرًا إلى أنّه لا يزال علينا التعبير عن التكامل بدلالة المتغيّر الأصلي x. لاحظ أنّه لدينا $x = 3\tan\theta$. بحيث تكون $\tan\theta = \frac{x}{3}$. يتبقى فقط الحل لإيجاد قيمة $\sec\theta$. على الرغم من أنّه يمكنك إجراء ذلك باستخدام مثلث. كما في المثال 3.9. فإنّ الطريقة الأبسط لهذا الإجراء هي التعرّف على ذلك لـ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

$$\sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}$$

ويترك هذا الأمر لنا

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx &= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c \\
&= \ln\left|\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} + \frac{x}{3}\right| + c
\end{aligned}$$

في النهاية،على فرض أن مكامل يحتوي على حد بالصيغة $\sqrt{x^2-a^2}$. لبعض $a > 0$. بأخذ $x = a\sec\theta$. حيث $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. نحذف الجذر التربيعي. كما يأتي:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2-a^2} &= \sqrt{(a\sec\theta)^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} \\
&= a\sqrt{\sec^2\theta - 1} = a\sqrt{\tan^2\theta} = a\,|\tan\theta|
\end{aligned}$$

لاحظ الحاجة إلى القيم المطلقة على فرض أن مكامل يحتوي. حيث $\tan\theta$ يمكن أن يكون موجبًا وسالبًا على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. يتسم المثال 3.11 بكونه نموذجيًا لكيفية استخدام هذه التعويضات.

المثال 3.11 تكامل يتضمّن $\sqrt{x^2-a^2}$

أوجد قيمة التكامل $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\,dx$. لكل $x \geq 5$.

الحل هنا. لتكن أنّ $x = 5\sec\theta$. لكل $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. حيث نختار النصف الأول من المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. بحيث تكون $x = 5\sec\theta > 5$. (إذا كان لدينا $x < -5$. فسوف نختار

$\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ يعطينا ذلك $dx = 5\sec\theta\tan\theta\, d\theta$ ويصبح التكامل عندئذ:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{(5\sec\theta)^2-25}}{5\sec\theta}(5\sec\theta\tan\theta)\,d\theta$$

$$= \int \sqrt{25\sec^2\theta - 25}\tan\theta\,d\theta$$

$$= \int 5\sqrt{\sec^2\theta - 1}\tan\theta\,d\theta$$

$$= 5\int \tan^2\theta\,d\theta$$ بما أن $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

$$= 5\int (\sec^2\theta - 1)\,d\theta$$

$$= 5(\tan\theta - \theta) + c$$

في النهاية، لاحظ بما أنّ $x = 5\sec\theta$. لكل $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$. لدينا

$$\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \sqrt{\left(\frac{x}{5}\right)^2 - 1} = \frac{1}{5}\sqrt{x^2-25}$$

و $\theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{5}\right)$. لدينا الآن

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\,dx = 5(\tan\theta - \theta) + c$$

$$= \sqrt{x^2-25} - 5\sec^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + c$$

ستجد عددًا من التكاملات الإضافية التي تتطلب التعويض مع الدوال المثلثية في التمارين. تتمثّل الفكرة الرئيسية هنا بملاحظة أنّه يمكنك حذف حدود معيّنة للجذر تربيعي في مكامل باستخدام تعويض مع الدوال المثلثية يتم اختياره بعناية.

نلخّص التعويضات مع الدوال المثلثية التي تم عرضها هنا في الجدول التالي.

التعبير	التعويض مع الدوال المثلثية	الفترة	المتطابقة
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\sin\theta$	$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$	$1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\tan\theta$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec\theta$	$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$	$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

التمارين 9.3

تمارين كتابية

1. على فرض أنّ أحد الأصدقاء أثناء دراسة حساب التفاضل والتكامل أخبرك انّه يوجد في هذا الدرس قواعد عديدة أكثر من القدرة على الحفظ. ساعد صديقك على إيضاح أنّ كل قاعدة تشير إلى الحالة التي ستنجح فيها تعويضات معيّنة. وبالتالي، ينجح تعويض $u(x)$ إذا كان التعبير $u'(x)$ يظهر في المكامل ويصبح التكامل الناتج أسهل في إجراء التكامل له. لكل من القواعد المغطاة في النص، حدّد $u'(x)$ ووضّح سبب أنّ n يجب أن يكون عددًا فرديًا (أو أيما تنص عليه القاعدة) لكي يكون المكامل المتبقي مقبولاً. بدون حفظ القواعد، يمكنك تذكّر عدد صغير من التعويضات المقبولة وترى أيًا منها تناسب مسألة معطاة.

2. في النص، نقترح أنّه عندما يحتوي المكامل على حد بالصيغة $\sqrt{4-x^2}$. يمكنك محاولة إجراء التعويض مع الدوال المثلثية

$x = 2\sin\theta$. يجب أن نعترف الآن بأنّ هذا لا ينجح دائمًا. بعد إجراء تعويض، كيف يسعك معرفة ما إذا كان التعويض قد نجح أم لا؟

في التمارين 1–44، أوجد قيمة التكاملات.

1. $\int \cos x \sin^4 x\,dx$
2. $\int \cos^3 x \sin^4 x\,dx$
3. $\int_0^{\pi/4} \cos 2x \sin^3 2x\,dx$
4. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^3 3x \sin^3 3x\,dx$
5. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin x\,dx$
6. $\int_{-\pi/2}^{0} \cos^3 x \sin x\,dx$
7. $\int \cos^2 (x+1)\,dx$
8. $\int \sin^4 (x-3)\,dx$
9. $\int \tan x \sec^3 x\,dx$
10. $\int \cot x \csc^4 x\,dx$
11. $\int x \tan^3 (x^2+1) \sec (x^2+1)\,dx$
12. $\int \tan (2x+1) \sec^3 (2x+1)\,dx$
13. $\int \cot^2 x \csc^4 x\,dx$
14. $\int \cot^2 x \csc^2 x\,dx$
15. $\int_0^{\pi/4} \tan^4 x \sec^4 x\,dx$
16. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^4 x \sec^2 x\,dx$
17. $\int \cos^2 x \sin^2 x\,dx$
18. $\int (\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx$
19. $\int_{-\pi/3}^{0} \sqrt{\cos x}\sin^3 x\,dx$
20. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^2 x \csc^4 x\,dx$
21. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx$
22. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx$
23. $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$
24. $\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$
25. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$
26. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$
27. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$
28. $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$
29. $\int \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$
30. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$
31. $\int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x}\,dx$
32. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\,dx$
33. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$
34. $\int x^3\sqrt{8+x^2}\,dx$
35. $\int \sqrt{16+x^2}\,dx$
36. $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$
37. $\int_0^1 x\sqrt{x^2+8}\,dx$
38. $\int_0^2 x^2\sqrt{x^2+9}\,dx$
39. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$
40. $\int \frac{x+1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$
41. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx$
42. $\int \frac{2}{\sqrt{x^2-6x}}\,dx$
43. $\int \frac{x}{\sqrt{10+2x+x^2}}\,dx$
44. $\int \frac{2}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$

في التمارين 45 و 46، أوجد قيمة التكامل باستخدام كل من التعويضان $u = \tan x$ و $u = \sec x$ وقارن النتائج.

45. $\int \tan x \sec^4 x\,dx$
46. $\int \tan^3 x \sec^4 x\,dx$

47. (a) أثبت أنّه لأيّ عدد صحيح $n > 1$. توجد لدينا صيغة الاختزال

$$\int \sec^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx$$

أوجد قيمة (b) $\int \sec^3 x\,dx$. (c) $\int \sec^4 x\,dx$ و (d) $\int \sec^5 x\,dx$.

48. تعطى مساحة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالتكامل $\frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$. احسب هذا التكامل.

49. أثبت أنّ $\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$ وأوجد قيمة $\int \csc^3 x\,dx$.

50. أثبت أنّ $\int \frac{1}{\cos x - 1}\,dx = \csc x + \cot x + c$ و $\int \frac{1}{\cos x + 1}\,dx = \csc x - \cot x + c$.

51. أوجد قيم الدوال الأصلية في الأمثلة 3.2، 3.3، 3.5، 3.6 و 3.7 باستخدام CAS الخاص بك. وفقًا لهذه الأمثلة، خمّن ما إذا كان CAS الخاص بك يستخدم طرائق التكامل نفسها التي نجريها أم لا. في الحالات التي يعطيك فيها CAS الخاص بك دالة أصلية عما نعطيه، أعط رأيك بأي دالة أصلية تبدو أبسط.

52. (a) يعطي CAS نتيجة $-\frac{1}{7}\sin^2 x\cos^5 x - \frac{2}{35}\cos^5 x$ كدالة أصلية في المثال 3.2. أوجد c بحيث يساوي هذا الدالة الأصلية $-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + c$.

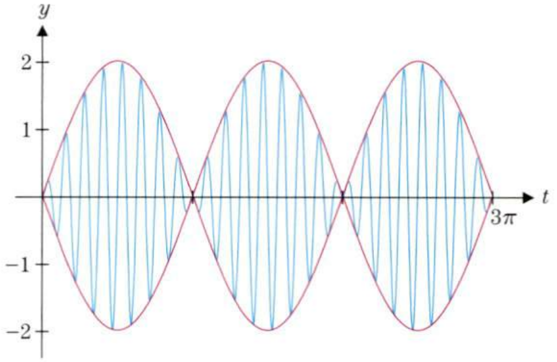
(b) يعطي CAS نتيج $-\frac{2}{15}\tan x - \frac{1}{15}\sec^2 x\tan x + \frac{1}{5}\sec^4 x\tan x$ كدالة أصلية في المثال 3.7. أوجد c بحيث يساوي هذا الدالة الأصلية الخاص بنا لـ $\frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + c$.

53. في دائرة المكيف، يكون للتردّد صيغة $i(t) = I\cos(\omega t)$ للعددين الثابتين I و ω. يتم تعريف الطاقة في صورة Ri^2 لعدد ثابت R. أوجد القيمة المتوسطة للطاقة بإجراء تكامل على الفترة $[0, 2\pi/\omega]$.

تمارين استكشافية

1. في الدرس 6.2، طُلب منك إيضاح أنّه للعددين الصحيحين الموجبين m و n حيث $m \neq n$،
$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = 0$ و $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = 0$.
وأيضًا، فإنّ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \pi$. في النهاية، $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,dx = 0$. لأي عددين صحيحين موجبين m و n. سنستخدم هذه الصيغ لشرح الطريقة التي يمكن من خلالها ضبط جهاز راديو على محطة AM.
يرسل جهاز راديو تعديل السعة الموجة (أو AM) إشارة (مثال: موسيقى) تُعدّل التردّد الخاص بمقدّم الخدمة. على سبيل المثال، إذا كانت الإشارة $2\sin t$ والتردد الخاص بمقدّم الخدمة

16. إذًا يرسل جهاز الراديو الإشارة المعدّلة $2\sin t \sin 16t$. يوضّح الشكل التمثيلين البيانيين $y = 2\sin t$ و $y = -2\sin t$ و $y = 2\sin t \sin 16t$.



يتذبذب التمثيل البياني $y = 2\sin t \sin 16t$ بسرعة مماثلة لـ $\sin 16t$ الخاصة بمقدم الخدمة. ولكن سعة الموجة تتغيّر بين $2\sin t$ و $-2\sin t$ (ومن هنا جاء المصطلح تعديل سعة الموجة). إنّ المسألة الخاصة بجهاز الراديو هي ضبط التردّد 16 واستعادة الإشارة $2\sin t$. تكمن الصعوبة في أنّ المحطات الإذاعية الأخرى تبثّ في زمن واحد. يتلقى جهاز الراديو جميع الإشارات مختلطة مع بعضها البعض. لرؤية الكيفية التي يعمل بها هذا. على فرض أنّ محطة ثانية تبثّ الإشارة $3\sin t$ بالتردّد 32. تكون الإشارة المجمّعة التي يتلقّاها جهاز الراديو $2\sin t \sin 16t + 3\sin t \sin 32t$.

سنقوم بتحليل هذه الإشارة. وتتمثّل الخطوة الأولى بإعادة كتابة الإشارة باستخدام المتطابقة

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}\cos(B - A) - \frac{1}{2}\cos(B + A)$$

إذًا تساوي الإشارة

$$f(t) = \cos 15t - \cos 17t + \frac{3}{2}\cos 31t - \frac{3}{2}\cos 33t$$

إذا كان جهاز الراديو "يدرك" أنّ الإشارة بالصيغة $c \sin t$. لبعض الأعداد الثابتة c. يمكنه تحديد العدد الثابت c بالتردّد 16 بحساب التكامل $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos 15t\,dt$ والضرب في $2/\pi$. أثبت أنّ $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos 15t\,dt = \pi$. بحيث يكون العدد الثابت الصحيح $c = \pi(2/\pi) = 2$. إذًا تكون الإشارة $2\sin t$. لاستعادة الإشارة المرسلة من قِبَل المحطة الثانية. احتسب $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos 31t\,dt$ واضرب في $2/\pi$. أثبت أنّك قمت باستعادة إشارة $3\sin t$ صحيحة وكاملة.

2. في هذا التمرين. نشتق نتيجة مهمة يطلق عليها اسم **ناتج ضرب واليس**. عرّف التكامل $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ لعدد صحيح موجب n. (a) أثبت أنّ $I_n = \frac{n}{n-1} I_{n-2}$. (b) أثبت أنّ $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2^2 4^2 \cdots (2n)^2 2}{3^2 5^2 \cdots (2n-1)^2 (2n+1)\pi}$. (c) بما أنّ $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$. استنتج $\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^2 4^2 \cdots (2n)^2}{3^2 5^2 \cdots (2n-1)^2 (2n+1)}$.

9-4 تكامل الدوال النسبية باستخدام الكسور الجزئية

في هذا الدرس، نقدّم طريقة لإعادة صياغة بعض الدوال النسبية يمكن أن تكون مفيدة للغاية في التكامل بالإضافة إلى تطبيقات أخرى. ونبدأ بنظرة بسيطة. لاحظ أنّ

$$\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-5} = \frac{3(x-5) - 2(x+2)}{(x+2)(x-5)} = \frac{x-19}{x^2-3x-10} \qquad (4.1)$$

لذلك، على فرض أنّك أردت إيجاد قيمة تكامل الدالة على الجانب الأيمن من (4.1). في حين أنّه ليس من الواضح كيفية إيجاد قيمة هذا التكامل. من السهل إيجاد قيمة تكامل الدالة (مكافئة) على الجانب الأيسر في (4.1). من (4.1)، لدينا

$$\int \frac{x-19}{x^2-3x-10}\,dx = \int \left(\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-5}\right)dx = 3\ln|x+2| - 2\ln|x-5| + c$$

المكامل. $\dfrac{3}{x+2} - \dfrac{2}{x-5}$

يسمّى :**تفكيك الكسور الجزئية** للمكامل الأول. وعموماً، إذا كانت العوامل الثلاثة a_1x+b_1، a_2x+b_2 و a_3x+b_3 جميعها واضحة (أي، لا يُعدّ أي منها مضاعف عدد ثابت للآخر). إذًا يمكننا أن نكتب

$$\boxed{\frac{a_1x+b_1}{(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)} = \frac{A}{a_2x+b_2} + \frac{B}{a_3x+b_3}}$$

وذلك لاختيار العددين الثابتين A و B وتحديدهما. لاحظ أنّه إذا أردت إيجاد تكامل هذا التعبير، سيكون من السهولة للغاية إيجاد تكامل الكسور الجزئية على الجانب الأيمن.

المثال 4.1 الكسور الجزئية: العوامل الخطية متمايزة

أوجد قيمة $\int \frac{1}{x^2+x-2}\,dx$.

الحل أولًا، لاحظ أنّه لا يمكنك إيجاد قيمة هذا كما هو عليه وكل الطرائق السابقة التي استخدمناها لا تساعد. (فكّر في كل واحدة من تلك لهذه المسألة). ومع ذلك، يمكننا إجراء تفكيك للكسور الجزئية، كما يأتي:

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

بضرب كلا جانبي هذه المعادلة في المقام المشترك $(x-1)(x+2)$،
نحصل على

$$1 = A(x+2) + B(x-1) \tag{4.2}$$

نود حل هذه المعادلة لأجل A و B. الفكرة الأساسية هي أن تحقق هذه المعادلة كل قيم x.
وخصوصاً لـ $x=1$. لاحظ أنّه من (4.2)، نحصل على

$$1 = A(1+2) + B(1-1) = 3A$$

لذلك $A = \frac{1}{3}$. بالمثل، بأخذ $x=-2$، نحصل على

$$1 = A(-2+2) + B(-2-1) = -3B$$

لذلك $B = -\frac{1}{3}$. وبالتالي، نحصل على

$$\int \frac{1}{x^2+x-2}\,dx = \int \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+2}\right)\right] dx$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + c$$

يمكننا إجراء الخطوات نفسها التي قمنا بها في المثال 4.1 كلما كان لتعبير نسبي مقام يتم تحليله إلى n من العوامل الخطية المتمايزة، على النحو التالي. إذا كانت درجة $P(x) < n$ وعوامل (a_ix+b_i)، حيث $i = 1, 2, \ldots, n$ جميعها متمايزة، إذًا يمكننا كتابة

الكسور الجزئية:
العوامل الخطية المتمايزة

$$\boxed{\frac{P(x)}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_nx+b_n)} = \frac{c_1}{a_1x+b_1} + \frac{c_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{c_n}{a_nx+b_n}}$$

لأجل بعض الأعداد الثابتة c_1، c_2، ....، c_n.

المثال 4.2 الكسور الجزئية: ثلاثة عوامل خطية متمايزة

أوجد قيمة $\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x}\,dx$.

الحل مرة أخرى، لا تساعدنا الطرائق السابقة، ولكن يمكننا إعادة كتابة المكامل باستخدام الكسور الجزئية. لدينا

$$\frac{3x^2-7x-2}{x^3-x} = \frac{3x^2-7x-2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

الضرب في المقام المشترك $x(x-1)(x+1)$، نحصل على

$$3x^2-7x-2 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1) \tag{4.3}$$

في هذه الحالة، لاحظ أنّه بأخذ $x = 0$، نحصل على

$$-2 = A(-1)(1) = -A$$

لذلك $A = 2$. وبالمثل، بأخذ $x = 1$، نجد أنّ $B = -3$ وبأخذ $x = -1$، نجد أنّ $C = 4$. وبالتالي، لدينا:

$$\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x}\,dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+1}\right) dx$$
$$= 2\ln|x| - 3\ln|x-1| + 4\ln|x+1| + c$$

المثال 4.3 الكسور الجزئية حيث يتطلب إجراء قسمة مطولة

أوجد التكامل غير المحدود لـ $f(x) = \dfrac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8}$ باستخدام تفكيك كسور جزئية.

الحل بما أنّ درجة البسط أكبر من درجة المقام، أقسم أولًا:

$$\begin{array}{r} 2x \\ x^2 - 2x - 8\overline{\big)\, 2x^3 - 4x^2 - 15x + 5} \\ \underline{2x^3 - 4x^2 - 16x } \\ x + 5 \end{array}$$

وبالتالي، نحصل على

$$f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8} = 2x + \frac{x+5}{x^2 - 2x - 8}$$

يمكن تفكيك الكسر العادي المتبقي كما يأتي:

$$\frac{x+5}{x^2 - 2x - 8} = \frac{x+5}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

من السهولة إيجاد: $A = \frac{3}{2}$ و $B = -\frac{1}{2}$. (يُترك هذا في شكل تمرين). لدينا الآن

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8}\,dx = \int \left[2x + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x-4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}\right)\right] dx$$
$$= x^2 + \frac{3}{2}\ln|x-4| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + c$$

ملحوظة 4.1

إذا كان البسط لتعبير نسبي له الدرجة نفسها أو أعلى من درجة المقام، يجب عليك أولًا إجراء قسمة مطولة وإتباع هذا بتحليل كسور جزئية للكسر (العادي) المتبقي.

إذا كان المقام الخاص بتعبير نسبي يحتوي على عوامل خطية مكررة، يكون التفكيك كما يأتي. إذا كانت درجة $P(x)$ أصغر من n، إذًا يمكننا كتابة

الكسور الجزئية: العوامل الخطية المكررة

$$\boxed{\frac{P(x)}{(ax+b)^n} = \frac{c_1}{ax+b} + \frac{c_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{c_n}{(ax+b)^n}}$$

للأعداد c_1، c_2،.....c_n تحدّد لاحقًا

المثال 4.4 مطابق

المثال 4.4 كسور جزئية تحتوي على عامل خطي مكرر

استخدم تفكيك الكسور الجزئية لإيجاد دالة أصلية لـ

$$f(x) = \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}$$

الحل أولًا، لاحظ أنّ هناك عاملًا خطيًا مكررًا في المقام. لدينا

$$\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}=\frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

بالضرب في المقام المشترك $x(x+1)^2$، نحصل على

$$5x^2+20x+6=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx$$

بأخذ $x=0$، نجد أنّ $A=6$. وبالمثل، بأخذ $x=-1$، نجد أنّ $C=9$. لتحديد قيمة B، نعوّض قيمة مناسبة لـ x، مثلًا $x=1$. (للأسف، لاحظ عدم وجود اختيار x من شأنه أن يجعل الحدين اللذين يحتويان على A و C قيمة كليهما صفر، بدون أن يجعل أيضًا الحد الذي يحتوي على B صفرًا). ينبغي عليك إيجاد أنّ $B=-1$. لذا، يوجد لدينا

$$\int\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx=\int\left[\frac{6}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}\right]dx$$

$$=6\ln|x|-\ln|x+1|-9(x+1)^{-1}+c$$

يمكننا التوسّع في تفكيك الكسور الجزئية إلى تعابير نسبية مقاماتها تحتوي على عوامل تربيعية غير قابلة للاختزال (أي عوامل تربيعية ليست لها تحليل حقيقي إلى العوامل). إذا كانت درجة $P(x)$ أصغر من n (درجة المقام) وكل العوامل في المقام متمايزة، إذًا يمكننا كتابة

الكسور الجزئية:
العوامل التربيعية غير القابلة للاختزال

$$\frac{P(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\cdots(a_nx^2+b_nx+c_n)}$$
$$=\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{a_nx^2+b_nx+c_n} \qquad (4.4)$$

فكّر في هذا بدلالة المقامات التربيعية غير القابلة للاختزال في تفكيك كسور جزئية للحصول على بسوط خطّية، في حين أنّ المقامات الخطية لها قيم بسط ثابت. إذا كنت تعتقد أنّ هذا يبدو فوضويًا، فأنت على حق. ولكن فقط في الجبر الأمر فوضوي (ويمكنك دائمًا استخدام CAS للقيام بعملية جبرية لك). ينبغي عليك ملاحظة أنّ الكسور الجزئية على الجانب الأيمن من (4.4) تم تكاملها بسهولة نسبيًا باستخدام التعويض جنبًا إلى جنب مع الإكمال الممكن للمربع.

المثال 4.5 **كسور جزئية مع عامل تربيعي**

استخدم تفكيك الكسور الجزئية لإيجاد دالة أصلية لـ $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+2}{x^3+x}$.

الحل أولًا، لاحظ أنّ

$$\frac{2x^2-5x+2}{x^3+x}=\frac{2x^2-5x+2}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

الضرب في المقام المشترك $x(x^2+1)$ يعطينا

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 2 &= A(x^2+1) + (Bx+C)x \\ &= (A+B)x^2 + Cx + A \end{aligned}$$

بدلًا من تعويض الأعداد لـ x (لاحظ أنه لا توجد قيم مناسبة لإدخالها، باستثناء $x = 0$).بدلًا من ذلك نطابق المعاملات المشابهه لقوى x:

$$\begin{aligned} 2 &= A + B \\ -5 &= C \\ 2 &= A \end{aligned}$$

ومنه نجد $B = 0$ ولذلك،

$$\int \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 + x}\,dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{5}{x^2+1}\right) dx = 2\ln|x| - 5\tan^{-1} x + c$$

وكثيرًا ما يؤدّي تفكيك الكسور الجزئية التي تتضمن حدود تربيعية غير قابلة للاختزال إلى تعابير تحتاج إلى مزيد من العمل (مثل إكمال المربع) قبل أن نتمكن من إيجاد دالّة أصلية. نوضّح ذلك في المثال 4.6.

المثال 4.6 كسور جزئية مع عامل تربيعي

استخدم تفكيك الكسور الجزئية لإيجاد دالة أصلية لـ

$$f(x) = \frac{5x^2 + 6x + 2}{(x+2)(x^2+2x+5)}$$

الحل أولًا، لاحظ أنّ العامل التربيعي في المقام لا يتحلل إلى العوامل ولذلك، التفكيك الصحيح هو

$$\frac{5x^2 + 6x + 2}{(x+2)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + C}{x^2+2x+5}$$

بالضرب في $(x+2)(x^2+2x+5)$، نحصل على

$$5x^2 + 6x + 2 = A(x^2+2x+5) + (Bx+C)(x+2)$$

بمطابقة المعاملات المشابهة لقوى x، نحصل على

$$\begin{aligned} 5 &= A + B \\ 6 &= 2A + 2B + C \\ 2 &= 5A + 2C \end{aligned}$$

ستحتاج إلى حل هذه بالحذف، ونتركها كتمرين لتثبت أن: $A = 2$، $B = 3$ و $C = -4$. بالتكامل، لدينا

$$\int \frac{5x^2 + 6x + 2}{(x+2)(x^2+2x+5)}\,dx = \int \left(\frac{2}{x+2} + \frac{3x - 4}{x^2+2x+5}\right) dx \tag{4.5}$$

تكامل الحد الأول ينفّذ بسهولة، ولكن ماذا عن الحد الثاني؟ بما أن المقام لا يتحلل إلى العوامل، لديك عدد قليل جدًا من الخيارات. حاول التعويض في المقام، لتكن $u = x^2 + 2x + 5$.

لذا $du = (2x+2)\,dx$. لاحظ أنّه يمكننا كتابة تكامل الحد الثاني كما يأتي:

$$\int \frac{3x-4}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{3(x+1)-7}{x^2+2x+5}\,dx = \int \left[\left(\frac{3}{2}\right)\frac{2(x+1)}{x^2+2x+5} - \frac{7}{x^2+2x+5}\right] dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+5}\,dx - \int \frac{7}{x^2+2x+5}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5) - \int \frac{7}{x^2+2x+5}\,dx. \tag{4.6}$$

بإكمال المربع في مقام التكامل المتبقية، نحصل على

$$\int \frac{7}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{7}{(x+1)^2+4}\,dx = \frac{7}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

(نترك تفاصيل هذا التكامل السابق كتمرين). بالنظر في هذا مع (4.5) و(4.6)، يوجد لدينا الآن

$$\int \frac{5x^2+6x+2}{(x+2)(x^2+2x+5)}\,dx = 2\ln|x+2| + \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{7}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

تم استكشاف التعابير النسبية بالعوامل التربيعية المتكررة غير القابلة للاختزال في المقام في التمارين. إنّ الفكرة هذه هي نفسها فكرة التفكيكات السابقة، ولكن العملية الجبرية فيها أكثر فوضوية.

باستخدام هذه التقنيات التي تمت تغطيتها في هذا الدرس، يجب أن تكون قادرًا على تفكيك الكسور الجزئية لدالة نسبية، حيث يمكن دائمًا تحليل كثيري الحدود إلى العوامل خطية وتربيعية، قد تكون بعضها مكررة.

ملحوظة 4.2

تتضمّن معظم Regular CAS أوامر لتفكيك كسور جزئية. ومع ذلك، فإننا ندعوكم إلى العمل على التمارين الموجودة في هذا الدرس يدوياً. بمجرد أن تكون لديك فكرة عن طريقة إجراء هذه التفكيكات، وبكل الوسائل، استخدم CAS الخاص بك للقيام بهذا العمل الكادح لك. حتى ذلك الوقت، تحلّى بالصبر واعمل بدقة يدوياً.

ملخص موجز لطرائق التكامل

الى الآن، نتوقّف لحظة لنلخّص بإيجاز ما تعلّمناه عن طرائق التكامل. في حين يمكنك إيجاد مشتقة لأي دالة يمكنك كتابتها، بالكاد حالفنا الحظ مع التكاملات. لا يمكن إيجاد قيم عدد كبير من التكامل بالضبط، في حين يمكن إيجاد قيم تكامل أخرى فقط بالتعرّف على الطريقة التي قد تؤدي إلى حل. مع أخذ هذه الأمور في الاعتبار، نقدم الآن بعض الإرشادات لإيجاد قيمة التكاملات.

التكامل بالتعويض:

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

ما الذي يجب أن تبحث عنه:

1. تركيب الصيغة $f(u(x))$، حيث يحتوي المكامل أيضًا على $u'(x)$ ؛ على سبيل المثال،

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \int \underbrace{\cos(x^2)}_{\cos u}\,\underbrace{2x\,dx}_{du} = \int \cos u\,du$$

2. تركيبات الصيغة $f(ax+b)$ ؛ على سبيل المثال.

$$\int \frac{\overbrace{x}^{u-1}}{\underbrace{\sqrt{x+1}}_{\sqrt{u}}}\underbrace{dx}_{du} = \int \frac{u-1}{\sqrt{u}}\,du$$

التكامل بالأجزاء: $\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$

ما الذي يجب أن تبحث عنه: نواتج لأنواع مختلفة من الدوال: x^n، $\cos x$، e^x ؛ على سبيل المثال.

$$\int 2x\cos x\,dx \qquad \begin{cases} u = x & dv = \cos x\,dx \\ du = dx & v = \sin x \end{cases}$$

$$= x\sin x - \int \sin x\,dx$$

التعويض مع الدوال المثلثية:

ما الذي يجب أن تبحث عنه:

1. حدود مثل $\sqrt{a^2 - x^2}$ ؛ لنأخذ $x = a\sin\theta\ (-\pi/2 \le \theta \le \pi/2)$ فيكون $dx = a\cos\theta\,d\theta$ و $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta} = a\cos\theta$ ؛ على سبيل المثال.

$$\int \frac{\overbrace{x^2}^{\sin^2\theta}}{\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\cos\theta}}\underbrace{dx}_{\cos\theta\,d\theta} = \int \sin^2\theta\,d\theta$$

2. حدود مثل $\sqrt{x^2 + a^2}$ ؛ لنأخذ $x = a\tan\theta\ (-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ فيكون $dx = a\sec^2\theta\,d\theta$ و $\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2\tan^2\theta + a^2} = a\sec\theta$ ؛ على سبيل المثال.

$$\int \frac{\overbrace{x^3}^{27\tan^3\theta}}{\underbrace{\sqrt{x^2+9}}_{3\sec\theta}}\underbrace{dx}_{3\sec^2\theta\,d\theta} = 27\int \tan^3\theta\sec\theta\,d\theta$$

3. حدود مثل $\sqrt{x^2 - a^2}$ ؛ لنأخذ $x = a\sec\theta$. حيث $\theta \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ فيكون $dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$ و $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} = a\tan\theta$ ؛ على سبيل المثال.

$$\int \underbrace{x^3}_{8\sec^3\theta}\underbrace{\sqrt{x^2-4}}_{2\tan\theta}\underbrace{dx}_{2\sec\theta\tan\theta\,d\theta} = 32\int \sec^4\theta\tan^2\theta\,d\theta$$

الكسور الجزئية:

ما الذي يجب أن تبحث عنه: الدوال النسبية؛ على سبيل المثال.

$$\int \frac{x+2}{x^2-4x+3}\,dx = \int \frac{x+2}{(x-1)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}\right)dx$$

تمارين 9.4

تمارين كتابية

1. هناك اختصار لتحديد الأعداد الثابتة للحدود الخطية في تفكيك الكسور الجزئية. على سبيل المثال، لنأخذ

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

لإكمال A، قم بأخذ الكسر الأصلي على الجانب الأيسر وتغطية $x+1$ في المقام وعوّض x بـ -1؛ $A = \dfrac{-1-1}{-1-2} = \dfrac{2}{3}$. وبالمثل، لحل B، قم بتغطية $x-2$ وعوّض x بـ 2؛ $B = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$. اشرح سبب صحّة هذه التقنية على هذا التفكيك وعدم صحّته في تفكيك: $\dfrac{x-1}{(x+1)^2(x-2)}$.

2. للكسور الجزئية، هناك فرق كبير بين الدوال التربيعية التي يمكن تحليلها إلى حدود خطية والدوال التربيعية غير القابلة للاختزال. تذكر أنّ الدوال التربيعية يمكن تحليلها إلى العوامل في صورة $(x-a)(x-b)$ فقط إذا كانت a و b أصفار الدالة. اشرح كيف يمكنك استخدام الصيغة التربيعية لتحديد ما إذا كانت دالة تربيعية معيّنة غير قابلة للاختزال.

في التمارين 20–1، أوجد تفكيك الكسور الجزئية والدالة الأصلية. إذا كان لديك CAS متاح، فاستخدمه للتحقق من إجابتك.

1. $\dfrac{x-5}{x^2-1}$
2. $\dfrac{5x-2}{x^2-4}$
3. $\dfrac{6x}{x^2-x-2}$
4. $\dfrac{3x}{x^2-3x-4}$
5. $\dfrac{-x+5}{x^3-x^2-2x}$
6. $\dfrac{3x+8}{x^3+5x^2+6x}$
7. $\dfrac{5x-23}{6x^2-11x-7}$
8. $\dfrac{3x+5}{5x^2-4x-1}$
9. $\dfrac{x-1}{x^3+4x^2+4x}$
10. $\dfrac{4x-5}{x^3-3x^2}$
11. $\dfrac{x+2}{x^3+x}$
12. $\dfrac{1}{x^3+4x}$
13. $\dfrac{4x^2-7x-17}{6x^2-11x-10}$
14. $\dfrac{x^3+x}{x^2-1}$
15. $\dfrac{2x+3}{x^2+2x+1}$
16. $\dfrac{2x}{x^2-6x+9}$
17. $\dfrac{x^3-4}{x^3+2x^2+2x}$
18. $\dfrac{4}{x^3-2x^2+4x}$
19. $\dfrac{3x^3+1}{x^3-x^2+x-1}$
20. $\dfrac{2x^4+9x^2+x-4}{x^3+4x}$

في التمارين 36–21، أوجد قيمة التكامل.

21. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+2}{x^2+2x-8}\,dx$
22. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-5x-6}\,dx$
23. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^3+3x^2+2x}\,dx$
24. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$
25. $\displaystyle\int \frac{4x^3-1}{x^4-x}\,dx$
26. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+1}\,dx$
27. $\displaystyle\int \frac{4x-2}{16x^4-1}\,dx$
28. $\displaystyle\int \frac{3x+7}{x^4-16}\,dx$
29. $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{3x^2+2x+1}\,dx$
30. $\displaystyle\int \frac{x^3-2x}{2x^2-3x+2}\,dx$
31. $\displaystyle\int \frac{4x^2+3}{x^3+x^2+x}\,dx$
32. $\displaystyle\int \frac{4x+4}{x^4+x^3+2x^2}\,dx$
33. $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx$
34. $\displaystyle\int xe^{2x}\,dx$
35. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x-4}\,dx$
36. $\displaystyle\int \frac{2e^x}{e^{3x}+e^x}\,dx$

37. في هذا التمرين، نجد تفكيك الكسور الجزئية لـ $\dfrac{4x^2+2}{(x^2+1)^2}$. إنّ صيغة هذا التفكيك هي

$$\frac{4x^2+2}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

بالضرب في $(x^2+1)^2$، نحصل على

$$\begin{aligned} 4x^2+2 &= (Ax+B)(x^2+1)+Cx+D \\ &= Ax^3+Bx^2+Ax+B+Cx+D \end{aligned}$$

كما في المثال 4.5، نطابق المعاملات المشابهة لقوى x. لأجل x^3، نحصل على $A=0$. لأجل x^2، نحصل على $B=4$. ونطابق معاملات x والثوابت لإنهاء التفكيك.

في التمارين 40–38، أوجد تفكيك الكسور الجزئية. (راجع التمرين 37).

38. $\dfrac{x^3+2}{(x^2+1)^2}$
39. $\dfrac{4x^2+3}{(x^2+x+1)^2}$
40. $\dfrac{x^4+x^3}{(x^2+4)^2}$

41. في كثير من الأحيان، يمكن تطبيق أكثر من طريقة تكامل. أوجد قيمة $\displaystyle\int \frac{3}{x^4+x}\,dx$ في الطرائق الآتية. أولًا، استخدم التعويض $u=x^3+1$ والكسور الجزئية. ثانيًا، استخدم التعويض $u=\dfrac{1}{x}$ وأوجد قيمة التكامل الناتج. أثبت أنّ الإجابتين متساويتان.

42. أوجد قيمة $\displaystyle\int \frac{2}{x^3+x}\,dx$ في الطرائق الآتية. أولًا، استخدم التعويض $u=x^2+1$ والكسور الجزئية. ثانيًا، استخدم التعويض $u=\dfrac{1}{x}$ وأوجد قيمة التكامل الناتج. أثبت أنّ الإجابتين متساويتان.

في التمرينين 43 و 44 اذكر الطريقة بتحديد ما إذا كان يمكن إيجاد قيمة التكامل باستخدام التعويض أو التكامل بالأجزاء أو الكسور الجزئية.

43. (a) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$
(c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-1}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+1}\,dx$

44. (a) $\displaystyle\int \frac{2}{(x+1)^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{2x+2}{(x+1)^2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x^2+1)^2}\,dx$

.45 أوجد قيمة $\int \sec^3 x\,dx$ بإعادة كتابة المكامل في صورة $\dfrac{\cos x}{\cos^4 x}$ بالقيام بالتعويض $u = \sin x$ واستخدام الكسور الجزئية.

تمارين استكشافية

.1 عند تطوير التكامل المحدود، أخذنا في اعتبارنا نواتج جمع مثل $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i^2+i}$. لنواتج جمع مشابهة، نهتم بشكل خاص بالنهاية عندما $n \to \infty$. اكتب عدة حدود للمجموع وحاول تخمين قيمة النهاية. تبين أنّ هذا هو واحد من نواتج الجمع القليلة التي يوجد لها صيغة دقيقة، لأنّ هذا **ناتج جمع تلسكوبي**. لمعرفة معنى هذا، اكتب تفكيك الكسور الجزئية لـ $\dfrac{2}{i^2+i}$. باستخدام صيغة الكسور الجزئية، اكتب عدة حدود للمجموع ولاحظ كم الإلغاء الموجود. صِف بإيجاز سبب كون المصطلح تلسكوبي ملائمًا وحدد $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i^2+i}$. ثم أوجد النهاية عندما $n \to \infty$. أعد هذه العمليةلناتج الجمع التلسكوبي $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{4}{i^2-1}$.

.2 استخدم التعويض $u = x^{1/4}$ لإيجاد قيمة $\displaystyle\int \frac{1}{x^{5/4}+x}\,dx$. استخدم تعويضات مشابهة لإيجاد قيمة $\displaystyle\int \frac{1}{x^{1/4}+x^{1/3}}\,dx$، $\displaystyle\int \frac{1}{x^{1/4}+x^{1/6}}\,dx$ و $\displaystyle\int \frac{1}{x^{1/5}+x^{1/7}}\,dx$. أوجد صيغة التعويض للتكامل العام $\displaystyle\int \frac{1}{x^p+x^q}\,dx$.

الدرس 9-5 جداول التكامل وأنظمة الحاسوب الجبرية

اسأل أي شخص بحاجة إلى إيجاد قيم عدد أكبر من التكاملات كجزء من عملهم (وهذا يشمل المهندسين وعلماء الرياضيات والفيزياء وغيرهم) وسيخبرونك بأنهم قد قاموا بشكل واسع باستخدام جداول التكامل و/أو وأنظمة الحاسوب الجبرية. تُعتبَر هذه أدوات فعالة للغاية لمستخدمي الرياضيات المحترفين. مع ذلك، فهي لا تحل محل تعلم كافّة طرائق التكامل الأساسية. لاستخدام جدول، يجب عليك أولًا في كثير من الأحيان إعادة كتابة التكامل بصيغة واحد من التكاملات في الجدول. قد يتطلب منك هذا إجراء بعض العمليات الجبرية أو إجراء تعويض. في حين سيخبر CAS عن وجود دالة أصلية، سيقدمها أحيانًا بصيغة غير ملائمة. الأهم من ذلك، سيخبر CAS من وقت لآخر عن إجابة (على الأقل من الناحية الطريقة) غير صحيحة. وسنشير إلى بعض من هذه العيوب في الأمثلة الآتية.

استخدام جداول التكامل

لقد قمنا بتضمين جدول صغير للتكاملات غير المحدودة في الجزء الأخير من الكتاب.

المثال 5.1 استخدام جدول تكامل

استخدم جدول لإيجاد قيمة $\int \frac{\sqrt{3+4x^2}}{x}\,dx$.

الحل بالتأكيد، يمكنك إيجاد قيمة هذا التكامل باستخدام تعويض مع الدوال المثلثية. مع ذلك، إذا نظرت في جدول التكامل الخاص بنا، ستجد

$$\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + c \qquad (5.1)$$

وللأسف، فإنّ التكامل في السؤال ليس تمامًا بالصيغة (5.1). مع ذلك، يمكننا إثبات هذا بالتعويض $u = 2x$. فيكون $du = 2\,dx$. ذلك يعطينا

$$\int \frac{\sqrt{3+4x^2}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{3+(2x)^2}}{2x}(2)\,dx = \int \frac{\sqrt{3+u^2}}{u}\,du$$
$$= \sqrt{3+u^2} - \sqrt{3}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3+u^2}}{u}\right| + c$$
$$= \sqrt{3+4x^2} - \sqrt{3}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3+4x^2}}{2x}\right| + c$$

يُسمى عدد من الصيغ الموجودة في الجدول **صيغ الاختزال**. تأخذ هذه الصيغ الصورة

$$\int f(u)\,du = g(u) + \int h(u)\,du$$

حيث يكون التكامل الثاني أبسط من الأول. يتم كثيرًا تطبيقها بشكل متكرر، كما في المثال 5.2.

المثال 5.2 استخدام صيغة اختزال

استخدم صيغة اختزال لإيجاد قيمة $\int \sin^6 x\,dx$.

الحل يجب أن تدرك أنّه يمكن إيجاد قيمة هذا التكامل باستخدام طرائق تكامل تعرفها مسبقًا. (كيف؟) مع ذلك، لأي عدد صحيح $n \geq 1$، توجد لدينا صيغة الاختزال

$$\int \sin^n u\,du = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} u\cos u + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} u\,du \qquad (5.2)$$

(انظر العدد 59 في جدول التكاملات الموجود على الغلاف الأخير للكتاب). إذا طبّقنا (5.2) حيث $n = 6$، نحصل على

$$\int \sin^6 x\,dx = -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x + \frac{5}{6}\int \sin^4 x\,dx$$

بتطبيق صيغة الاختزال نفسها (هذه المرة مع $n = 4$) لإيجاد قيمة $\int \sin^4 x\,dx$، نحصل على

$$\int \sin^6 x\,dx = -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x + \frac{5}{6}\int \sin^4 x\,dx$$
$$= -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx\right)$$

وأخيرًا، لأجل $\int \sin^2 x\,dx$، يمكننا استخدام (5.2) مرة أخرى (مع $n = 2$) أو إيجاد قيمة التكامل باستخدام صيغة نصف الزاوية. نختار السابق هنا ونحصل على

$$\int \sin^6 x\,dx = -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx\right)$$
$$= -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x\cos x + \frac{5}{8}\left(-\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}\int dx\right)$$
$$= -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x\cos x - \frac{5}{16}\sin x\cos x + \frac{5}{16}x + c$$

يجب أن نذكّرك في هذه المرحلة أنّ هناك العديد من الطرائق المختلفة لإيجاد دالة أصلية. إنّ الدوال الأصلية التي يتم إيجادها باستخدام وسائل متعددة قد تبدو مختلفة تمامًا، على الرغم من أنها متكافئة. على سبيل المثال، لاحظ أنّه إذا كان لدالة أصلية الصيغة $\sin^2 x + c$، إذًا تكون الدالة الأصلية المكافئة هي $-\cos^2 x + c$، حيث يمكننا كتابة

$$\sin^2 x + c = 1 - \cos^2 x + c = -\cos^2 x + (1+c)$$

وأخيرًا، حيث إنّ c هو عدد ثابت عشوائي، وهكذا $c + 1$. في المثال 5.2، لاحظ أنّ أول ثلاثة حدود لها جميعًا عوامل $\sin x\cos x$، والتي تساوي $\frac{1}{2}\sin 2x$. باستخدام هذا ومتطابقات أخرى، يمكنك

أن تثبت أنّ الحل الذي قدّمناه في المثال 5.2 يكافئ الحلّ التالي الذي تم الحصول عليه من CAS مشهور:

$$\int \sin^6 x\,dx = \frac{5}{16}x - \frac{15}{64}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{192}\sin 6x + c$$

لذلك، لا داعي لأن تُصاب بالذعر إذا كانت إجابتك تختلف عن الإجابة الموجودة في الجزء الأخير من الكتاب. قد تكون كلتا الإجابتين صحيحتين. إذا كنت غير متأكد، أوجد مشتقة إجابتك. إذا حصلت على المكامل، تكون إجابتك صحيحة.

سترغب في بعض الأحيان في تطبيق صيغ اختزال مختلفة عند نقاط مختلفة في مسألة معطاة.

المثال 5.3 إجراء تعويض قبل استخدام صيغة اختزال

أوجد قيمة $\int x^3 \sin 2x\,dx$.

الحل من جدولنا (انظر العدد 63)، لدينا صيغة الاختزال

$$\int u^n \sin u\,du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\,du \tag{5.3}$$

من أجل استخدام (5.3)، يجب علينا أولًا إجراء التعويض $u = 2x$. فيكون $du = 2\,dx$، مما يعطينا

$$\begin{aligned}\int x^3 \sin 2x\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{(2x)^3}{2^3}\sin 2x(2)\,dx = \frac{1}{16}\int u^3 \sin u\,du\\ &= \frac{1}{16}\left(-u^3\cos u + 3\int u^2\cos u\,du\right)\end{aligned}$$

حيث استخدمنا صيغة الاختزال (5.3) مع $n = 3$. الآن، لإيجاد قيمة هذا التكامل الأخير، نستخدم صيغة الاختزال (العدد 64 في الجدول الخاص بنا)

$$\int u^n \cos u\,du = u^n \sin u - n\int u^{n-1}\sin u\,du$$

مع $n = 2$ للحصول على

$$\begin{aligned}\int x^3 \sin 2x\,dx &= -\frac{1}{16}u^3\cos u + \frac{3}{16}\int u^2\cos u\,du\\ &= -\frac{1}{16}u^3\cos u + \frac{3}{16}\left(u^2\sin u - 2\int u\sin u\,du\right)\end{aligned}$$

بتطبيق صيغة الاختزال الأولى (5.3) مرة أخرى (هذه المرة، مع $n = 1$)، نحصل على

$$\begin{aligned}\int x^3 \sin 2x\,dx &= -\frac{1}{16}u^3\cos u + \frac{3}{16}u^2\sin u - \frac{3}{8}\int u\sin u\,du\\ &= -\frac{1}{16}u^3\cos u + \frac{3}{16}u^2\sin u - \frac{3}{8}\left(-u\cos u + \int u^0\cos u\,du\right)\\ &= -\frac{1}{16}u^3\cos u + \frac{3}{16}u^2\sin u + \frac{3}{8}u\cos u - \frac{3}{8}\sin u + c\\ &= -\frac{1}{16}(2x)^3\cos 2x + \frac{3}{16}(2x)^2\sin 2x + \frac{3}{8}(2x)\cos 2x - \frac{3}{8}\sin 2x + c\\ &= -\frac{1}{2}x^3\cos 2x + \frac{3}{4}x^2\sin 2x + \frac{3}{4}x\cos 2x - \frac{3}{8}\sin 2x + c \;\blacksquare\end{aligned}$$

كما سنرى في المثال 5.4، تتطلب بعض التكاملات تبصّرًا قبل استخدام جدول تكامل.

المثال 5.4 إجراء تعويض قبل استخدام جدول تكامل

أوجد قيمة $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4\cos x - 1}}\,dx$

الحل لن تجد هذا التكامل أو مقارب له على وجه الخصوص في جدول التكامل الخاص بنا. ومع ذلك، مع قليل من المحاولات، يمكننا إعادة كتابة هذا بصيغة أبسط. أولًا، استخدم صيغة ضعف الزاوية لإعادة كتابة بسط المكامل. نحصل على

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4\cos x - 1}}\,dx = 2\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{4\cos x - 1}}\,dx$$

تذكر أن تكون دائمًا ملماً بالحدود التي هي مشتقات من حدود أخرى. هنا، لنأخذ $u = \cos x$. فيكون $du = -\sin x\,dx$ وإذًا،

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4\cos x - 1}}\,dx = 2\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{4\cos x - 1}}\,dx = -2\int \frac{u}{\sqrt{4u-1}}\,du$$

من جدولنا (انظر العدد 18)، لاحظ أنّ

$$\int \frac{u}{\sqrt{a+bu}}\,du = \frac{2}{3b^2}(bu-2a)\sqrt{a+bu} + c \qquad (5.4)$$

لنأخذ $a = -1$ و $b = 4$ في (5.4)، لدينا

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4\cos x - 1}}\,dx = -2\int \frac{u}{\sqrt{4u-1}}\,du = (-2)\frac{2}{3(4^2)}(4u+2)\sqrt{4u-1} + c$$
$$= -\frac{1}{12}(4\cos x + 2)\sqrt{4\cos x - 1} + c$$

التكامل باستخدام نظام حاسوب جبري

تُعدّ أنظمة الحاسوب الجبرية بعضًا من الأدوات الجديدة الأقوى التي ظهرت على مسرح الرياضيات في السنوات الـ 25 الماضية. وهي تدير السلسلة انطلاقاً من الآلات الحاسبة المحمولة إلى أنظمة البرمجيات القوية.

تركز الأمثلة التالية على بعض المشاكل النادرة التي قد تواجهها عند استخدام CAS. نحن نعترف بأننا تعمدّنا البحث عن أخطاء CAS. والخبر السار هو أنّ الأخطاء لم تكن شائعة جدًا وأن CAS الذي تستخدمه لن يقوم بالضرورة بأيٍ منها. كن على علم أنّ هذه عيوب في البرامج والإصدار التالي من CAS الخاص بك قد يقضيَ عليها تمامًا. كمستخدم ذكي للتكنولوجيا، تحتاج إلى أن تكون على دراية بالأخطاء الشائعة ولديك مهارات حساب التفاضل والتكامل للتعرف على الأخطاء عند حدوثها.

أول شيء تلاحظه عند استخدام CAS لإيجاد قيمة تكامل غير محدود هو أنه يقدم عادةً دالة أصلية، بدلًا من الأكثر عمومية (التكامل غير المحدود) من خلال ترك ثابت التكامل (عيب صغير في هذا البرنامج القوي للغاية).

المثال 5.5 عيب في بعض أنظمة الحاسوب الجبرية

استخدم نظام حاسوب جبري لإيجاد قيمة $\int \frac{1}{x}\,dx$.

الحل العديد من CAS تعمل على إيجاد قيمة

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$$

(في الواقع، يخبر أحد أنظمة CAS بشأن التكامل بوصفه اللوغاريتم x. (حيث يستخدم $\log x$ ليرمز إلى اللوغاريتم الطبيعي). ولا يعمل ذلك فقط على إغفال ثابت التكامل. لكن

لاحظ أن الدالة الأصلية هذه صالحة فقط لـ $x > 0$. تعطي آلة حاسبة شهيرة دالة أصلية الأكثر عمومًا

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$

والذي بالرغم من إستمراره في إغفال ثابت التكامل، يكون صالحًا على الأقل لكل $x \neq 0$. ومن ناحية أخرى، تقوم بشكل صحيح جميع CAS التي اختبرناها بإيجاد قيمة

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = -\ln 2$$

بالرغم من أنّ الدالة الأصلية المعلنة $\ln x$ لم يتم تعريفها في حدود التكامل. ■

في بعض الأحيان تكون الدالة الأصلية المبلَّغ عنه بواسطة CAS غير صالحة، كما هو مكتوب، لأي قيم حقيقية لـ x، كما في المثال 5.6. (في بعض الحالات، تقدّم CAS دالة أصلية صحيحة للحالة الأكثر تقدّمًا لدالة متغيّر مركب).

المثال 5.6 دالة أصلية غير صحيحة

إستخدم نظام حاسوب جبري لإيجاد قيمة $\int \frac{\cos x}{\sin x - 2}\,dx$.

الحل يعرض أحد أنظمة CAS الدوال الأصلية غير الصحيحة

$$\int \frac{\cos x}{\sin x - 2}\,dx = \ln(\sin x - 2)$$

للوهلة الأولى، قد لا يبدو أنّ هذا الأمر خطأ، لا سيما وأنّ قاعدة السلسلة تشير إلى أنّها صحيحة على الأرجح:

$$\frac{d}{dx}\ln(\sin x - 2) = \frac{\cos x}{\sin x - 2} \qquad \text{هذا خطأ}$$

يُعدّ الخطأ أكثر أهمية (وغير ملحوظ) من إساءة استخدام قاعدة السلسلة. لاحظ أنّ التعبير $\ln(\sin x - 2)$ غير معرّف لجميع القيم الحقيقية لـ x، حيث $\sin x - 2 < 0$ لكل x. إنّ القاعدة العامة للدالة الأصلية التي تنطبق هنا هي

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$$

حيث تكون القيمة المطلقة مهمة. الدالة الأصلية الصحيحة هي $\ln|\sin x - 2| + c$، الذي يمكن أيضًا كتابته في صورة عندما $\ln(2 - \sin x) + c$ بما أنّ $2 - \sin x > 0$ لكل قيم x. ■

ربما أكثر الأخطاء شيوعًا التي ستواجهك هي في الواقع أخطاؤك الخاصة. إذا كنت أدخلت على CAS الخاص بك مسألة في صيغة خاطئة، فقد يحلّ مسألة مختلفة عما كنت تقصدها. تم في المثال 5.7 توضيح خطأ بسيط لكن شائع.

المثال 5.7 مشكلة يخطئ فيها CAS في فهم ما تدخله

إستخدم نظام حاسوب جبري لإيجاد قيمة $\int 4x\,8x\,dx$.

الحل بعد إدخال المكامل في صورة $4x8x$. قدّم أحد أنظمة CAS الإجابة الفردية

$$\int 4x8x\,dx = 4x8xx$$

يمكنك إيجاد قيمة التكامل بسهولة (أولًا، أعِد كتابة المكامل في صورة $32x^2$) لتبيّن أنّ ذلك غير صحيح. لكن أين كان الخطأ؟ نظرًا إلى الطريقة الغريبة التي استخدمناها لكتابة المكامل، فسّرها CAS باعتبارها أربعة أمثال متغيّر اسمه $x8x$، وهو غير مرتبط بمتغيّر التكامل x. إنّ صيغة إجابته هي على الشكل $\int 4c\,dx = 4cx$. ■

لن تكون صيغة دالة أصلية المعلن عنها بواسطة CAS دائمًا هي الأكثر ملاءمة.

المثال 5.8 صيغة غير ملائمة لدالّة أصليّة

استخدم نظام حاسوب جبري لإيجاد قيمة $\int x(x^2+3)^5\,dx$.

الحل العديد من CAS تعمل على إيجاد قيمة

$$\int x(x^2+3)^5\,dx = \frac{1}{12}x^{12} + \frac{3}{2}x^{10} + \frac{45}{4}x^8 + 45x^6 + \frac{405}{4}x^4 + \frac{243}{2}x^2$$

بينما يقدّم آخرون التعبير الأبسط من ذلك بكثير

$$\int x(x^2+3)^5\,dx = \frac{(x^2+3)^6}{12}$$

تُعَدّ الإجابتان متكافئتين، على الرغم من اختلافهما بثابت. ■

سيقوم CAS عادةً بإجراء حتى التكاملات المطوّلة بسهولة.

اليوم في الرياضيات

جان سي يوكوز (–1957)
عالم رياضيات فرنسي حصل على ميدالية فيلدز لإسهاماته في الأنظمة الديناميكية.

المثال 5.9 بعض التكاملات الجيدة لاستخدام CAS

استخدم نظام حاسوب جبري لإيجاد قيمة $\int x^3 \sin 2x\,dx$ و $\int x^{10} \sin 2x\,dx$.

الحل باستخدام CAS، يمكنك الحصول بخطوة واحدة

$$\int x^3 \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}x^3\cos 2x + \frac{3}{4}x^2\sin 2x + \frac{3}{4}x\cos 2x - \frac{3}{8}\sin 2x + c$$

بنفس الجهد الذي يمكنك الحصول فيه على

$$\begin{aligned}\int x^{10}\sin 2x\,dx = &-\frac{1}{2}x^{10}\cos 2x + \frac{5}{2}x^9\sin 2x + \frac{45}{4}x^8\cos 2x - 45x^7\sin 2x\\ &-\frac{315}{2}x^6\cos 2x + \frac{945}{2}x^5\sin 2x + \frac{4725}{4}x^4\cos 2x\\ &-\frac{4725}{2}x^3\sin 2x - \frac{14{,}175}{4}x^2\cos 2x + \frac{14{,}175}{4}x\sin 2x\\ &+\frac{14{,}175}{8}\cos 2x + c\end{aligned}$$

إذا أردت، يمكنك حتى إيجاد قيمة

$$\int x^{100}\sin 2x\,dx$$

على الرغم من أنّ عددًا كبيرًا من الحدود يجعل عرض النتيجة محظورًا. فكّر في القيام بذلك يدويًا، باستخدام 100 تكاملٍ بالأجزاء أو من خلال تطبيق صيغة اختزال 100 مرة. ■

يجب أن تكون قد فهمت الفكرة الآن: يمكن لنظام CAS إجراء عمليات حسابية متكرّرة (عددية أو رمزية) لا يمكن تصوّر إجرائك لها يدوياً على الإطلاق. من الصعب العثور على دالة لها دالة أصلية أولى لا يمكن لنظام CAS الخاص بك العثور عليها. لنأخذ المثال التالي لتكاملٍ صعب.

المثال 5.10 تكامل صعب للغاية

أوجد قيمة $\int x^7 e^x \sin x\,dx$.

الحل فكّر في ما الذي ستحتاج إليه لإيجاد قيمة هذا التكامل يدوياً ثم استخدم نظام حاسوب جبري. على سبيل المثال، يقوم أحد أنظمة CAS بعرض دالة أصلية كما يأتي:

$$\begin{aligned}\int x^7 e^x \sin x\,dx = &\left(-\frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{2}x^6 - \frac{21}{2}x^5 + 105x^3 - 315x^2 + 315x\right)e^x\cos x\\ &+\left(\frac{1}{2}x^7 - \frac{21}{2}x^5 + \frac{105}{2}x^4 - 105x^3 + 315x - 315\right)e^x\sin x\end{aligned}$$

لا تحاول إجراء ذلك يدويًا إلا إذا كان لديك الكثير من الوقت والصبر. ومع ذلك، بناء على تجربتك، لاحظ أنّ صيغة الدالة الأصلية غير مثيرة للدهشة. (على كل حال، أي نوع من الدوال يمكن أن يكون له $x^7 e^x \sin x$ كدالة أصلية خاصة بها؟) ■

ما وراء الصيغ

قد تتساءل لماذا أضعنا الكثير من الزمن في العمل على طرائق التكامل في الزمن الذي يمكنك أن تدع CAS دائمًا القيام بالعمل نيابةً عنك. لا. إنها ليست لتحضيرك في حال غرقت سفينتك على ضفاف جزيرة مهجورة بدون وجود CAS معك. يمكن لنظام CAS الخاص بك حلّ تقريبًا جميع المسائل الحسابية التي تبدو في هذا الدرس. إنّما وفي حالات نادرة، قد تكون الإجابة الناتجة بواسطة CAS غير صحيحة أو مضلّلة وتحتاج إلى أن تكون مستعدًا لذلك. الأهم من ذلك، يتطلّب العديد من الأفكار الهامة في العلوم والهندسة فهمًا لأساليب التكامل الأساسية.

تمارين 9.5

تمارين كتابية

1. على فرض أنّه قد تم تعيينك من قبل شركة لتطوير نظام CAS جديد. ضع الخطوط العريضة لاستراتيجية تكامل رمزي. قم بتضمين أحكام تتعلّق بالصيغ في جدول التكاملات في الجزء الأخير من الكتاب وطرائق التكامل المتنوّعة التي درستها.

2. ناقشنا في الدرس أهمية معرفة القواعد العامة للتكامل. فكّر في التكامل في المثال 5.4. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{4\cos x - 1}}\,dx$. هل يمكن لنظام CAS الخاص بك إيجاد قيمة هذا التكامل؟ العديد من التكاملات مثل هذه والتي تظهر في التطبيقات (يوجد أصعب منها في التمارين الاستكشافية)، يجب عليك القيام ببعض العمل قبل أن تدَعَ التكنولوجيا تنهي مهمتك. لهذا الغرض، ناقش أهمية التعرّف على الصيغ الأساسية وفهم طريقة عمل التعويض.

في التمارين 28–1، استخدم جدول التكاملات في الجزء الأخير من الكتاب لإيجاد دالة أصلية. ملاحظة: عند التحقّق من الجزء الأخير من الكتاب أو CAS للحصول على إجابات، احذر من الدوال التي تبدو مختلفة للغاية ولكنها متكافئة (من خلال متطابقات الدوال المثلثية، على سبيل المثال).

1. $\int \frac{x}{(2+4x)^2}\,dx$

2. $\int \frac{x^2}{(2+4x)^2}\,dx$

3. $\int e^{2x}\sqrt{1+e^x}\,dx$

4. $\int e^{3x}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$

5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx$

6. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x(3+2\sin x)}\,dx$

7. $\int_0^1 t^8\sqrt{4-t^6}\,dt$

8. $\int_0^{\ln 4} \sqrt{16-e^{2t}}\,dt$

9. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+4}}\,dx$

10. $\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{x\sqrt{x^4-9}}{x^2}\,dx$

11. $\int \frac{\sqrt{6x-x^2}}{(x-3)^2}\,dx$

12. $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x\sqrt{8\tan x - \tan^2 x}}\,dx$

13. $\int \tan^6 u\,du$

14. $\int \csc^4 u\,du$

15. $\int \frac{\cos x}{\sin x\sqrt{4+\sin x}}\,dx$

16. $\int \frac{x^5}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$

17. $\int x^3\cos x^2\,dx$

18. $\int x\sin 3x^2\cos 4x^2\,dx$

19. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx$

20. $\int \frac{x\sqrt{1+4x^2}}{x^4}\,dx$

21. $\int \frac{\sin^2 t\cos t}{\sqrt{\sin^2 t+4}}\,dt$

22. $\int \frac{\ln\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$

23. $\int \frac{e^{-2/x^2}}{x^3}\,dx$

24. $\int x^3 e^{2x^2}\,dx$

25. $\int \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$

26. $\int e^{5x}\cos 3x\,dx$

27. $\int e^x\tan^{-1}(e^x)\,dx$

28. $\int (\ln 4x)^3\,dx$

29. تحقّق من CAS الخاص بك مقابل جميع الأمثلة الموجودة في هذا الدرس. ناقش أي أخطاء يقوم بها CAS، إن وجدت.

30. اعرف كيف يقوم CAS الخاص بك بإيجاد قيمة $\int x\sin x\,dx$ إذا لم تتمكّن من ترك مسافة بين x و $\sin x$.

31. اجعل CAS الخاص يقوم بإيجاد قيمة $\int(\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1})\,dx$. إذا حصلت على إجابة، اشرح سبب كونها خاطئة.

32. لمعرفة ما إذا كان نظام CAS الخاص بك "يعرف" التكامل بالأجزاء، قم بتجربة $\int x^3\cos 3x\,dx$ و $\int x^3 e^{5x}\cos 3x\,dx$. لمعرفة ما إذا كان "يعرف" صيغ الاختزال، قم بتجربة $\int \sec^5 x\,dx$.

33. لإيجاد عدد طرائق تكامل الدوال المثلثية التي "يعرفها" نظام CAS الخاص بك، قم بتجربة $\int \sin^6 x\,dx$، $\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx$ و $\int \tan^4 x\sec^3 x\,dx$.

34. اعرف إذا كان نظام CAS الخاص بك لديه أوامر خاصة (مثل، APART in Mathematica) لتفكيك كسور جزئية. أيضًا، قم بتجربة $\int \frac{x^2+2x-1}{(x-1)^2(x^2+4)}\,dx$ و $\int \frac{3x}{(x^2+x+2)^2}\,dx$

35. لمعرفة ما إذا كان نظام CAS الخاص بك "يعرف" طريقة التعويض، قم بتجربة $\int \frac{1}{x^2(3+2x)}\,dx$ و $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x(3+2\sin x)}\,dx$. حاول معرفة الأمور التي لا يستطيع CAS الخاص بك القيام بها: ابدأ بصيغة أساسية مثل $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1}x + c$ وقم بتعويض دالتك المفضلة. مع $x = e^u$، يصبح التكامل السابق $\int \frac{e^u}{e^u\sqrt{e^{2u}-1}}\,du$. الذي يمكنك استخدامه لاختبار نظام CAS الخاص بك.

36. لحساب مساحة القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$، لاحظ أنّ الربع الأيمن العلوي من القطع الناقص معطى بالصيغة

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

لكل $0 \le x \le a$. لذلك، مساحة القطع الناقص هي $4b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx$. قم بتجربة هذا التكامل على CAS الخاص بك. إنّ الفرضيّة (الضمنية) التي نقوم بها عادةً هي $a > 0$. لكن ينبغي ألا يقوم نظام CAS الخاص بك بهذه الفرضيّة نيابةً عنك. هل يقدّم لك نظام CAS الخاص بك πab أو $\pi b|a|$ ؟

37. اشرح بإيجاز معنى قيام CAS الخاص بك بإعادة $\int f(x)\,dx$ عند طلب إيجاد قيمة $\int f(x)\,dx$.

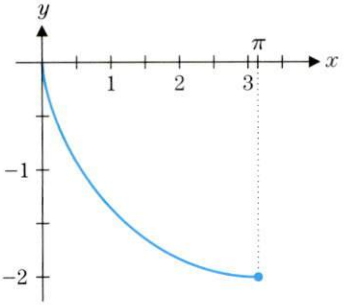
تمارين استكشافية

1. يستكشف هذا التمرين جانبين من مسألة مشهورة للغاية تدعى مسألة منحنى الزمن الأقصر. تخيّل خرزة تنزلق إلى أسفل في سلك رفيع يمتد في شكل ما من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة $(\pi, -2)$. فرضًا أنّ الجاذبية تسحب الخرزة لأسفل ولكن لا يوجد أي احتكاك أو قوة أخرى تؤثر على الخرزة. يكون من السهل تحليل هذا الموقف باستخدام **المعادلات الوسيطية** حيث لدينا دوال $x(u)$ و $y(u)$ مع الأخذ في الاعتبار موقع الخرزة الأفقي والرأسي بدلالة المتغيّر u. إنّ أمثلة المسارات التي قد تتبعها الخرزة هي $\begin{cases} x(u) = \pi u \\ y(u) = -2u \end{cases}$ و $\begin{cases} x(u) = \pi u \\ y(u) = 2(u-1)^2 - 2 \end{cases}$ و $\begin{cases} x(u) = \pi u - \sin \pi u \\ y(u) = \cos \pi u - 1 \end{cases}$ في كل الحالات، تنطلق الخرزة من نقطة الأصل $(0, 0)$ لـ $u = 0$ وتنتهي عند $(\pi, -2)$ لأجل $u = 1$. مثّل كل مسار بيانيًا على حاسبة بيانية. المسار الأول هو مستقيم والثاني قطع مكافئ والثالث منحنى خاص يسمى دويري. يبلغ الزمن الذي تستغرقه خرزة للانتقال في مسار معيّن

$$T = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^1 \sqrt{\frac{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2}{-2y(u)}}\,du$$

حيث g هو ثابت الجاذبية. احسب هذه الكمية للمستقيم والقطع المكافئ. اشرح سبب اعتبار القطع المكافئ بمثابة مسار أسرع للخرزة لتنزلق، على الرغم من أنّ المستقيم أقصر في المسافة. (فكّر في أي تلّ سيكون أسرع للتزلج عليه نزولًا). يمكن إثبات أنّ الدويري هو أسرع مسار ممكن. حاول إحضار CAS الخاص بك لحساب الزمن الأمثل. بمقارنة التمثيلات البيانية للقطع المكافئ والدويري، ما هي الميزة المهمة الموجودة لدى الدويري في بداية المسار؟

2. اتضح أنّ الدويري المذكور في التمرين الاستكشافي 1 له ميزة مدهشة. بالإضافة إلى توفيره أسرع زمن (والذي هو أساسًا ما يعنيه المصطلح منحنى الزمن الأقصر). المسار موضّح في الشكل.



على فرض أنّه بدلًا من بدء انتقال الخرزة من النقطة $(0, 0)$، يبدأ انزلاق الخرزة من المنتصف لأسفل المسار عند $x = c$. كيف ستتم مقارنة زمن بلوغ الجزء السفلي من $x = c$ بالزمن الكلي من $x = 0$ ؟ لاحظ أنّ الإجابة ليست واضحة. حيث إنّ كلما بدأت من أسفل، ستقل السرعة التي ستكتسبها الخرزة. إذا كانت $x = c$ مقابلة لـ $u = a$. يتم إعطاء زمن بلوغ الجزء السفلي بالصيغة $\frac{\pi}{\sqrt{g}} \int_a^1 \sqrt{\frac{1 - \cos \pi u}{\cos a\pi - \cos \pi u}}\,du$. إذا $a = 0$ (وهي أنّ الخرزة تبدأ من الجزء العلوي). يكون الزمن $\pi/\sqrt{g}$ (التكامل يساوي 1). إذا كان لديك نظام CAS جيد للغاية، حاول إيجاد قيمة التكامل للعديد من قيم a بين 0 و 1. إذا لم يتمكّن نظام CAS الخاص بك التعامل معه، قم بتقريب التكامل عدديًا. ينبغي أن تكتشف الحقيقة المدهشة حول أنّ التكامل دائمًا يساوي ١. يقوم أيضًا الدويري بحل مسألة **الزمن المتشابه**.

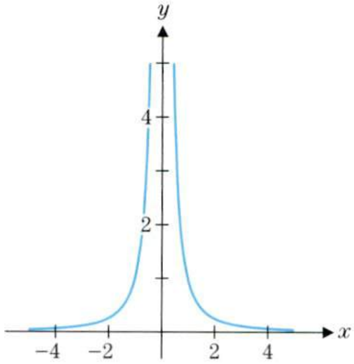
الدرس 9-6 التكاملات المعتلة

التكاملات المعتلة لمكامل يتضمّن نقاط انفصال

إنّ المقولة "كلما زاد الفهم قلّت الصعوبة" لها صلة خاصة لنا في هذا الدرس. لقد كنت تستخدم النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل لفترة ليست بالقصيرة حتى الآن. ولكن هل دائمًا ما كنت تتحقّق من استيفاء الفرضيات؟ حاول معرفة ماهية الخطأ في الحساب الخاطئ التالي.

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}\, dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_{-1}^{2} = -\frac{3}{2}$$ هذا غير صحيح

ثمة خطأ في الأساس لهذا "الحساب". لاحظ أنّ $f(x) = 1/x^2$ ليست متصلة على فترة التكامل. (انظر الشكل 6.2). بما إنّ النظرية الأساسية تفترض مكامل متصل، يصبح استخدامنا للنظرية غير صالح وإجابتنا غير صحيحة. وعلاوة على ذلك، لاحظ أنّ إجابة $-\frac{3}{2}$ تُعَدّ مشكوكًا في أمرها بشكل خاص حيث إنّ المكامل $\frac{1}{x^2}$ موجب دائمًا.



الشكل 9.2
$y = \frac{1}{x^2}$

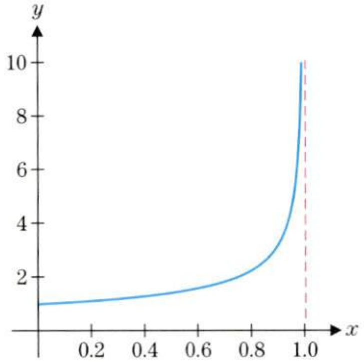
تذكّر من الوحدة 4 أنّنا حدّدنا التكامل المحدود كما يأتي:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x$$

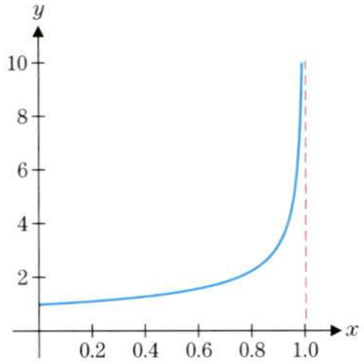
حيث c_i مأخوذة على أنّها أي نقطة على $[x_{i-1}, x_i]$، لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ وحيث يجب أن تكون النهاية نفسها لأي خيار لهذه c_i. لذا، إذا $f(x) \to \infty$ [أو $f(x) \to -\infty$] عند نقطة ما على $[a, b]$، إذًا النهاية التي تعرّف $\int_a^b f(x)\, dx$ ليس لها معنى. [كيف نضيف $f(c_i)$ إلى المجموع، إذا $f(x) \to \infty$ عندما $x \to c_i$؟] في هذه الحالة، نطلق على مثل هذا التكامل **تكاملًا معتلًا** وسنحتاج إلى تعريف ما نعنيه بذلك بدقة. أولًا، نستكشف حالة أبسط نوعًا ما.

فكّر في $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$. لاحظ أنّ هذا ليس تكاملًا محدوداً صحيحًا، حيث إنّ المكامل غير معرّف عند $x = 1$. في الشكل 9.3a، لاحظ أنّ المكامل يظهر في ∞ عندما $x \to 1^-$. على الرغم من هذا، هل يمكن أن نجد المنطقة تحت المنحنى على الفترة $[0, 1]$؟ فرضًا أنّ المساحة معرّفة نهائية، لاحظ من الشكل 9.3b أنّه لكل $0 < R < 1$. يمكننا تقريبها بواسطة $\int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$. هذا تكامل محدود صحيح، لكل $0 \le x \le R < 1$. f متصلة. وعلاوة على ذلك، كلما اقتربت قيمة R من 1، زادت جودة التقريب. في الجدول المرفق، نحسب بعض القيم المتقاربة لـ $\int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$. لمتتالية من قيم R تقترب من 1.

R	$\int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$
0.9	1.367544
0.99	1.8
0.999	1.936754
0.9999	1.98
0.99999	1.993675
0.999999	1.998
0.9999999	1.999368
0.99999999	1.9998



الشكل 9.3b
$y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$



الشكل 9.3a
$y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

من الجدول، يبدو أنّ متتاليات قيم التكامل تقترب من 2، عندما $R \to 1^-$.

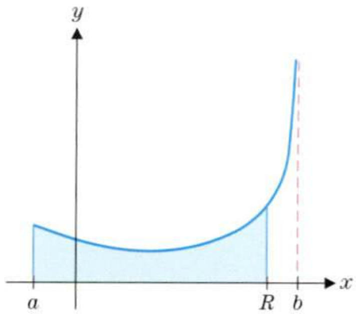
لاحظ أنّه، بما أنّنا نعرف كيفية حساب $\int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ لأي $0 < R < 1$. يمكننا حساب قيمة نهاية هذه بالضبط. لدينا

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to 1^-} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx &= \lim_{R\to 1^-} \left[-2(1-x)^{1/2}\right]_0^R \\
&= \lim_{R\to 1^-} \left[-2(1-R)^{1/2} + 2(1-0)^{1/2}\right] = 2
\end{aligned}$$

من هذا الحساب، يمكننا أن نرى أنّ المنطقة تحت المنحنى هي قيمة النهاية، 2.

بشكل عام، على فرض أنّ f متصلة على الفترة $[a, b)$ و $|f(x)| \to \infty$. عندما $x \to b^-$ (أي، عندما x تقترب من b من اليسار). إذًا يمكننا تقريب $\int_a^b f(x)\,dx$ بواسطة $\int_a^R f(x)\,dx$. لبعض $R < b$ لكن قريبة من b. [تذكّر ذلك بما أن f متصلة على $[a, R]$. لأي $a < R < b, \int_a^R f(x)\,dx$ معرفة.] وعلاوة على ذلك، كما ذكرنا في مثال المقدمة، كلما اقتربت قيمة R من b، زادت جودة التقريب. راجع الشكل 9.4 للتمثيل البياني لهذا التقريب.

وأخيرًا، لتكن $R \to b^-$ ؛ إذا $\int_a^R f(x)\,dx$ تقترب من قيمة، L، لذا نعرّف **التكامل المعتل** $\int_a^b f(x)\,dx$ لتكون قيمة هذه النهاية. لدينا التعريف الآتي:



الشكل 9.4

$\int_a^R f(x)\,dx$

التعريف 6.1

إذا كانت f متصلة على الفترة $[a, b)$ و $|f(x)| \to \infty$ عندما $x \to b^-$. نعرّف التكامل المعتل لـ f على $[a, b]$ كما يأتي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{R\to b^-} \int_a^R f(x)\,dx$$

وبالمثل، إذا كانت f متصلة على $(a, b]$ و $|f(x)| \to \infty$ عندما $x \to a^+$. نعرّف التكامل المعتل كما يأتي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{R\to a^+} \int_R^b f(x)\,dx$$

في كلتا الحالتين، إذا كانت النهاية موجودة (ومساوية لقيمة ما L)، نقول إنّ التكامل المعتل **متقارب** (من L). إذا كانت النهاية غير موجودة، نقول إنّ التكامل المعتل **متباعد**.

المثال 6.1 مكامل متقارب في نقطة النهاية اليمنى

حدّد ما إذا كان $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ متقارب أم متباعد.

الحل استنادًا إلى العمل الذي أكملناه،

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{R\to 1^-} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = 2$$

وبالتالي، التكامل المعتل متقارب إلى 2. ■

في المثال 6.2، نوضّح تكامل معتل متباعد يرتبط ارتباطًا وثيقًا بمثال المقدمة لهذا الدرس.

المثال 6.2 تكامل معتل متباعد

حدّد ما إذا كان التكامل المعتل $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx$ متقارب أم متباعد.

الحل من التعريف 6.1، يوجد لدينا

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to 0^-} \int_{-1}^R \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to 0^-} \left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)_{-1}^R$$

$$= \lim_{R\to 0^-} \left(-\frac{1}{R} - \frac{1}{1}\right) = \infty$$

بما أن النهاية غير موجودة، نقول إنّ التكامل المعتل متباعد. ■

في المثال 6.3، يكون المكامل غير متّصل عند حد التكامل الأدنى.

المثال 6.3 تكامل معتل متقارب

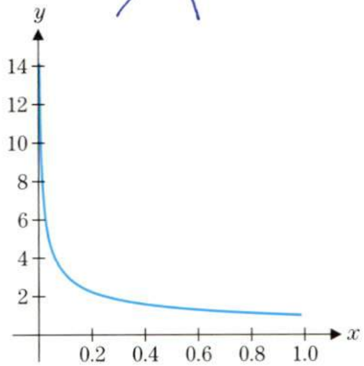
حدّد ما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ متقارب أم متباعد.

الحل نبيّن تمثيلًا بيانيًا للمكامل على الفترة في السؤال في الشكل 9.5. لاحظ أنّه في هذه الحالة تكون $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ متصلة على $(0, 1]$ و $f(x) \to \infty$ عندما $x \to 0^+$.

من القيم المبيّنة في الجدول، يبدو أنّ التكاملات تقترب من 2 عندما $R \to 0^+$. بما أننا نعرف دالة أصلية للمكامل، يمكننا أن نحسب هذه التكاملات بالضبط، لأي $0 < R < 1$ ثابتة. لدينا من التعريف 6.1 أنّ

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{R\to 0^+} \int_R^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{R\to 0^+} \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\bigg|_R^1 = \lim_{R\to 0^+} 2(1^{1/2} - R^{1/2}) = 2$$

وبالتالي، التكامل المعتل متقارب إلى 2. ■



الشكل 9.5

$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

R	$\int_R^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$
0.1	1.367544
0.01	1.8
0.001	1.936754
0.0001	1.98
0.00001	1.993675
0.000001	1.998
0.0000001	1.999368
0.00000001	1.9998

يمثّل مثال المقدمة في هذا الدرس نوعًا ثالثًا من التكامل المعتل، حيث يوجد إنفصال في المكامل عند نقطة في الجزء الداخلي للفترة (a, b). يمكننا تعريف مثل هذا التكامل كما يلي.

التعريف 6.2

على فرض أنّ f متصلة على الفترة $[a, b]$، باستثناء في بعض $c \in (a, b)$ و $|f(x)| \to \infty$ عندما $x \to c$. ومرة أخرى، التكامل معتل ونكتب

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

إذا كان كلًا من $\int_a^c f(x)\,dx$ و $\int_c^b f(x)\,dx$ متقارب (إلى L_1 و L_2، على الترتيب)، نقول إنّ التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\,dx$ **متقارب**، وأيضًا (إلى $L_1 + L_2$). إذا كان أي من التكاملات المعتلة $\int_a^c f(x)\,dx$ أو $\int_c^b f(x)\,dx$ متباعد، إذًا نقول إنّ التكامل المعتل $\int_a^b f(x)\,dx$ **متباعد**، أيضًا.

الملاحظات التاريخية

بيير سيمون لابلاس (1749–1827)

عالم رياضيات فرنسي استخدم التكاملات المعتلة لتطوير تحويل لابلاس وغيرها من تقنيات الرياضيات المهمة. قام لابلاس بمساهمات عديدة في الاحتمال والميكانيكا السماوية ونظرية الحرارة ومجموعة متنوّعة من مواضيع الرياضيات الأخرى. وحيث كان بارعًا في المكائد السياسية، عمل لابلاس على تقويم جديد للثورة الفرنسية وعمل مستشارًا لنابليون وتم منحه لقب ماركيز بواسطة البوربون.

يمكننا الآن العودة إلى مثال المقدمة.

المثال 6.4 انفصال على المكامل في وسط الفترة

حدّد ما إذا كان التكامل المعتل $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}\,dx$ متقارب أم متباعد.

الحل من التعريف 6.2، لدينا

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_0^2 \frac{1}{x^2}\,dx$$

في المثال 6.2، حدّدنا أنّ $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx$ متباعد. وبالتالي، $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}\,dx$ متباعد أيضًا. لاحظ أنّك لا تحتاج للتفكير $\int_0^2 \frac{1}{x^2}\,dx$ (على الرغم من أنّه تمرين سهل لإظهار أنّ هذا أيضًا، متباعد). ضع في اعتبارك أنّه، إذا كان أي من التكاملين المعتلين المعرّفين لهذا النوع من التكامل المعتل متباعدان، إذًا التكامل الأصلي متباعد أيضاً. ■

تكاملات معتلة لها حد تكامل لانهائي

يوجد نوع آخر من التكامل المعتل الذي كثيرًا ما نواجهه في التطبيقات وهو التكامل حيث يكون واحد أو كلا حدَّيْ التكامل لانهائيين. على سبيل المثال، تُعَدّ $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ ذات أهمية أساسية في الاحتمال والإحصاء.

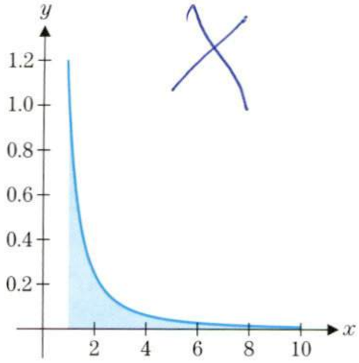
لذا، عند إعطاء دالة متصلة f مُعرّفة على $[a, \infty)$، فما الذي قد نعنيه بواسطة $\int_a^\infty f(x)\,dx$ ؟ لاحظ أنّ التعريف المعتاد للتكامل المحدود:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

حيث $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$، لا معنى لها عندما $b = \infty$. ينبغي أن نُعرّف $\int_a^\infty f(x)\,dx$ بطريقة متسقة مع ما نعلَمه بالفعل بشأن التكاملات.

بما أنّ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ موجبة ومتصلة على الفترة $[1, \infty)$، ينبغي أن تناظر المساحة تحت المنحنى. فرضًا أنّ هذه المساحة هي، في الواقع، نهائية (الأمر الذي يكون معقولًا على الأقل، وفقًا للتمثيل البياني في الشكل 9.6). $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

فرضًا أنّ المساحة نهائية، يمكنك تقريبها بـ $\int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx$، لقيمة ما كبيرة R. (لاحظ أنّ هذا يكون تكاملًا محدوداً صحيحًا ما دامت R نهائية). نعرض متتالية قيم هذا التكامل للقيم الكبيرة المتزايدة للمتغير R في الجدول.



الشكل 9.6
$y = \dfrac{1}{x^2}$

R	$\int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx$
10	0.9
100	0.99
1000	0.999
10,000	0.9999
100,000	0.99999
1,000,000	0.999999

يبدو أنّ متتالية تقريب التكاملات المحدودة تقترب من 1، عندما $R \to \infty$. وكما اتضح ذلك، يمكننا حساب هذه النهاية بالضبط. لدينا

$$\lim_{R\to\infty}\int_1^R x^{-2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^R = \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{R}+1\right) = 1$$

لذا، يتضح أنّ المساحة تحت المنحنى على الفترة $[1, \infty)$ تبلغ 1، على الرغم من أنّ طول الفترة لا نهائي.

وبشكل أشمل، لدينا التعريف 6.3.

التعريف 6.3

إذا كانت f متصلة على الفترة $[a, \infty)$، نُعرّف **التكامل المعتل** $\int_a^\infty f(x)\,dx$ بأنّه

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx$$

وبالمثل، إذا كانت f متصلة على $(-\infty, a]$، نُعرّف

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{R\to-\infty}\int_R^a f(x)\,dx$$

في كلتا الحالتين، إذا كانت النهاية موجودة (ومساوية لقيمة ما L)، نقول أنّ التكامل المعتل **متقارب** (من L). إذا كانت النهاية غير موجودة، نقول إنّ التكامل المعتل **متباعد**.

قد تكون لاحظت بالفعل أنّه في دالة متناقصة f، لكي يكون $\int_a^\infty f(x)\,dx$ متقارب، يجب أن تكون الحالة $f(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$. (فكّر في ذلك من حيث المساحة). مع ذلك، لا يحتاج العكس إلى أن يكون صحيحًا. أي أنّه، على الرغم من $f(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$، قد يكون التكامل المعتل متباعدًا كما يتضح لنا في المثال 6.5.

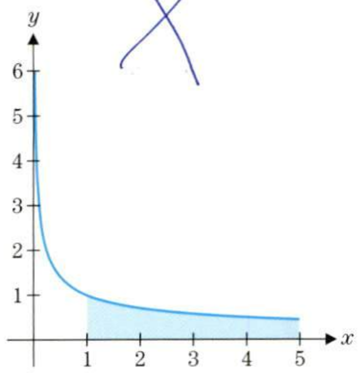
المثال 6.5 تكامل معتل متباعد

حدّد ما إذا كان $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ متقارب أم متباعد.

الحل لاحظ أنّ $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ عندما $x \to \infty$. بالإضافة إلى ذلك، بالنظر إلى التمثيل البياني في الشكل 9.7، ينبغي أن يبدو معقولاً على الأقل أنّ المساحة تحت المنحنى نهائية. مع ذلك، بالنظر إلى التعريف 6.3، يكون لدينا

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R x^{-1/2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left.\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right|_1^R = \lim_{R\to\infty} (2R^{1/2} - 2) = \infty$$

يعبّر ذلك عن أنّ التكامل المعتل متباعد. ■



الشكل 9.7
$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

لاحظ أنّ مثال المقدمة والمثال 6.5 هما حالات خاصة لـ $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$. مناظرة لـ $p = 2$ و $p = 1/2$، على الترتيب. في التمارين، ستثبت أنّ هذا التكامل متقارب أينما $p > 1$ ومتباعد لـ $p \le 1$.

قد تحتاج إلى استخدام قاعدة لوبيتال لإيجاد قيمة النهاية المعرّفة، كما في المثال 6.6.

المثال 6.6 تكامل معتل متقارب

حدّد ما إذا كان $\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$ متقارب أم متباعد.

الحل إنّ التمثيل البياني $y = xe^x$ في الشكل 9.8 يجعل وجود مساحة نهائية محتمَلة تحت التمثيل البياني يبدو معقولاً. بالنظر إلى التعريف 6.3، لدينا

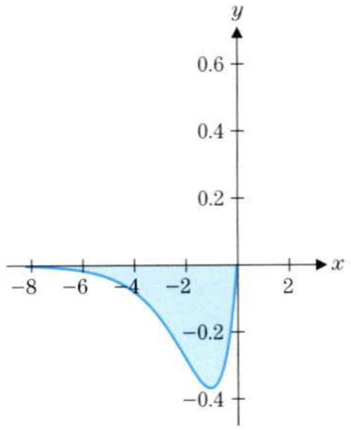
$$\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^0 xe^x\,dx$$

لإيجاد قيمة آخر تكامل، ستحتاج إلى التكامل بالتجزيئ. لتكن

$$\begin{aligned} u &= x \qquad & dv &= e^x\,dx \\ du &= dx \qquad & v &= e^x \end{aligned}$$

لدينا إذًا

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 xe^x\,dx &= \lim_{R\to-\infty} \int_R^0 xe^x\,dx = \lim_{R\to-\infty} \left(\left. xe^x \right|_R^0 - \int_R^0 e^x\,dx \right) \\ &= \lim_{R\to-\infty} \left[(0 - Re^R) - \left. e^x \right|_R^0 \right] = \lim_{R\to-\infty} (-Re^R - e^0 + e^R) \end{aligned}$$



الشكل 9.8
$y = xe^x$

لاحظ أن النهاية $\lim_{R\to-\infty} Re^R$ لها صيغة غير محددة $\infty \cdot 0$. نجد الحل باستخدام قاعدة لوبيتال، كالتالي:

$$\begin{aligned} \lim_{R\to-\infty} Re^R &= \lim_{R\to-\infty} \frac{R}{e^{-R}} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\ &= \lim_{R\to-\infty} \frac{\frac{d}{dR}R}{\frac{d}{dR}e^{-R}} = \lim_{R\to-\infty} \frac{1}{-e^{-R}} = 0 \end{aligned}$$

بحسب قاعدة لوبيتال

بالعودة إلى التكامل المعتل، يكون لدينا الآن

$$\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx = \lim_{R\to-\infty} (-Re^R - e^0 + e^R) = 0 - 1 + 0 = -1$$

■

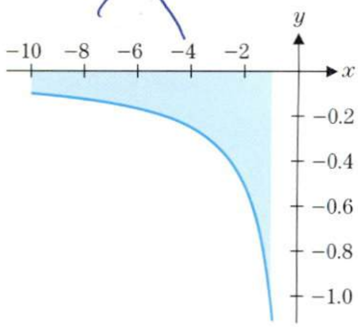
المثال 6.7 تكامل معتل متباعد

حدّد ما إذا كان $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\, dx$ متقارب أم متباعد.

الحل في الشكل 9.9، يبدو معقولًا أنّه قد تكون هناك مساحة نهائية محدودة بين التمثيل البياني $y = \frac{1}{x}$ والمحور x على الفترة $(-\infty, -1]$. مع ذلك، بالنظر إلى التعريف 6.3، لدينا

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{R\to-\infty} \int_{R}^{-1} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{R\to-\infty} \ln|x| \Big|_{R}^{-1} = \lim_{R\to-\infty} [\ln|-1| - \ln|R|] = -\infty$$

وبالتالي، يكون التكامل المعتل متباعد. ■



الشكل 9.9
$y = \frac{1}{x}$

النوع الأخير للتكامل المعتل هو $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$، مُعرّف كالتالي.

التعريف 6.4

إذا كانت f متصلة على $(-\infty, \infty)$، نكتب

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\, dx \quad \text{لأي عدد ثابت } a$$

حيث $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ متقارب إذا وفقط إذا كان كل من $\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$ و $\int_{a}^{\infty} f(x)\, dx$ متقارب. إذا تباعد أيٌّ منهما، يكون التكامل المعتل الأصل متباعد أيضًا.

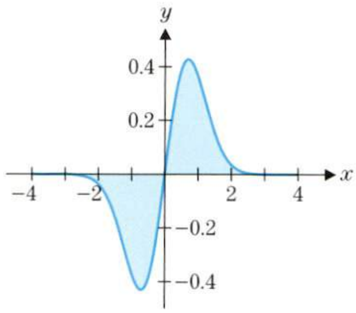
في التعريف 6.4، لاحظ أنّه يمكنك اختيار a ليكون أيّ عدد حقيقي. لذا، اختره ليكون عددًا مناسبًا (عادة 0).

المثال 6.8 تكامل مع حدَّيْ تكامل لا نهائيان

حدّد ما إذا كان $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\, dx$ متقارب أم متباعد.

الحل لاحظ من التمثيل البياني للمكامل في الشكل 9.10 أنّه، بينما تتحرك الدالة نحو 0 بشكل سريع نسبيًا (في الحالتين عندما $x \to \infty$ وعندما $x \to -\infty$)، يبدو معقولًا أنّه يوجد مساحة نهائية محدودة بواسطة التمثيل البياني للدالة والمحور -x. بالنظر إلى التعريف 6.4، لدينا

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}\, dx \qquad (6.1)$$



الشكل 9.10
$y = xe^{-x^2}$

يجب عليك إيجاد قيمة كل تكامل معتل على الجانب الأيمن من (6.1) بشكل منفصل. أولًا، لدينا

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\, dx = \lim_{R\to-\infty} \int_{R}^{0} xe^{-x^2}\, dx$$

لنأخذ $u = -x^2$. فيكون $du = -2x\, dx$ ولذا، عند تغيير حدود التكامل لتطابق المتغيّر الجديد، يوجد لدينا

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2} \lim_{R\to-\infty} \int_{R}^{0} e^{-x^2}(-2x)\, dx = -\frac{1}{2} \lim_{R\to-\infty} \int_{-R^2}^{0} e^{u}\, du$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{R\to-\infty} e^{u} \Big|_{-R^2}^{0} = -\frac{1}{2} \lim_{R\to-\infty} \left(e^{0} - e^{-R^2}\right) = -\frac{1}{2}$$

وبالمثل، نحصل على (ينبغي عليك ملء التفاصيل)

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} xe^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} e^{u} \Big|_{0}^{-R^2} = -\frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} (e^{-R^2} - e^{0}) = \frac{1}{2}$$

بما أنّ كلاً من التكاملات المعتلة السابقة هي متقاربة، نحصل من (6.1) على أنّ التكامل الأصلي متقارب ايضاً من

$$\int_{\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \int_{\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$ ■

المثال 6.9 تكامل مع حدَّيْ تكامل لا نهائيان

حدّد ما إذا كان $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,dx$ متقارب أم متباعد.

الحل من التعريف 6.4، نكتب

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx$$

من السهولة إثبات أنّ $\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx$ هو متقارب. (يُترك ذلك ليكون بمثابة تمرين). مع ذلك،

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx = \lim_{R\to-\infty}\int_{R}^{0} e^{-x}\,dx = \lim_{R\to-\infty} -e^{-x}\Big|_{R}^{0} = \lim_{R\to-\infty}(-e^{0}+e^{-R}) = \infty$$

يشير ذلك إلى أنّ $\int_{\infty}^{0} e^{-x}\,dx$ هو متباعد وبالتالي، يكون $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,dx$ متباعد أيضًا. على الرغم من أنّ $\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx$ متقارب.■

تنبيه

لا تكتب

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

يبدو الأمر مغريًا بالطبع أن تكتب هذا، خاصة بما أنّ ذلك سيعطي إجابة صحيحة غالبًا، بنصف المجهود تقريبًا. للأسف، غالبًا ما ستكون الإجابات غير صحيحة، حيث كثيرًا ما توجد النهاية على الجانب الأيمن للتكاملات المتباعدة. نستكشف هذه المشكلة بشكل أكبر في التمارين.

لا يمكننا التأكيد بشكل كافٍ على أنّه يجب عليك إثبات اتصال المكامل لكل تكامل تقوم بإيجاد قيمته. في المثال 6.10، نلاحظ تذكيرًا آخر بسبب توجّب قيامك بذلك.

المثال 6.10 تكامل معتل لسببين

حدّد تقارب أو تباعد التكامل المعتل $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$.

الحل حاول أولًا معرفة ماهية الخطأ بعملية الحساب غير الصحيحة التالية:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$ هذا غير صحيح

انظر بتمعّن إلى دالّة المكامل ولاحظ أنّها غير متصلة على $[0,\infty)$. في الواقع، للمكامل نقطة إنفصال عند $x = 1$، والتي تقع على الفترة التي تحاول إجراء تكامل لها. لذا فإنّ هذا التكامل معتل لعدة أسباب مختلفة. لكي تتعامل مع الإنفصال عند $x = 1$، يجب أن نقسم التكامل إلى عدة أجزاء، كما في التعريف 6.2. نكتب

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx \tag{6.2}$$

يجب تقطيع التكامل الثاني على الجانب الأيمن من (6.2) إلى جزأين. بما أنّه معتل عند نقطة النهاية اليسرى ولوجود حد لا نهائي للتكامل. يمكنك اختيار أي نقطة على $(1,\infty)$ تقوم عندها بتقطيع الفترة. سنختار بكل بساطة $x = 2$. لدينا الآن

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int_{2}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

يجب إيجاد قيمة كل من التكاملات المعتلة الثلاثة بشكل منفصل. باستخدام تعريفات النهايات المناسبة، ونتركها كتمرين لإثبات أنّ أول تكاملَيْن هما متباعدان، بينما التكامل الثالث، هو متقارب يشير ذلك إلى أنّ التكامل المعتل الأصلي هو متباعد (استنتاج لن تحصل عليه إذا لم تلاحظ أنّ المكامل له انفصال عند $x = 1$). ■

اختبار مقارنة

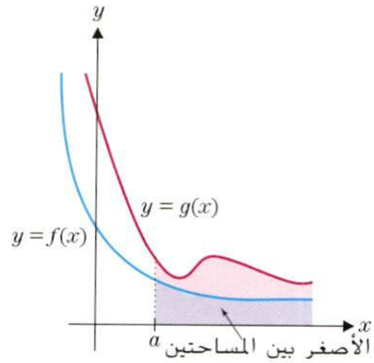
عند حساب النهاية (النهايات) التي تُعرّف تكاملًا معتلًا، نحتاج أولًا إلى إيجاد دالة أصلية. مع ذلك، بما أنّه لا يوجد دالة أصلية لـ e^{-x^2}. فكيف سنتعرّف تقارب أو تباعد $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ ؟ توجد إجابة في النتيجة الآتية.

معطى أنّ الدالتين f وg متصلتان على الفترة $[a, \infty)$. على فرض أنّ

$0 \le f(x) \le g(x)$. لكل $x \ge a$

نوضّح هذه الموقف في الشكل 9.11. في هذه الحالة، $\int_a^\infty f(x)\,dx$ و $\int_a^\infty g(x)\,dx$ يناظران المساحات تحت المنحنيات بالتتابع. لاحظ أنّه إذا كان $\int_a^\infty g(x)\,dx$ (الذي يقابل المساحة الأكبر) متقارب، يشير ذلك إذًا إلى أنّ يوجد مساحة نهائية تحت المنحنى $y = g(x)$ على الفترة $[a, \infty)$. بما أنّ $y = f(x)$ تقع تحت $y = g(x)$. يمكن أن توجد فقط مساحة نهائية تحت المنحنى $y = f(x)$. لذا، $\int_a^\infty f(x)\,dx$ متقارب أيضًا.

من ناحية أخرى، إذا كان $\int_a^\infty f(x)\,dx$ (الذي يناظر المساحة الأصغر) متباعد، تكون المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ لا نهائية. بما أنّ $y = g(x)$ تقع أعلى $y = f(x)$. فلا بد من أنّه يوجد مساحة لانهائية تحت المنحنى $y = g(x)$ أيضًا، بحيث $\int_a^\infty g(x)\,dx$ هو متباعد، كذلك. يُطلَق على هذه المقارنة للتكاملات المعتلة وفقًا للحجم النسبي للمكاملات الخاصة بها اسم **اختبار المقارنة** (واحد من العديد) ويوضّح في النظرية 6.1.



الشكل 9.11

اختبار المقارنة

النظرية 6.1 (اختبار المقارنة)

على فرض أنّ f وg متصلتان على $[a, \infty)$ و $0 \le f(x) \le g(x)$. لكل $x \in [a, \infty)$.

(i) إذا تقارب $\int_a^\infty g(x)\,dx$، إذًا يتقارب $\int_a^\infty f(x)\,dx$. أيضًا.

(ii) إذا تباعد $\int_a^\infty f(x)\,dx$، إذًا يتباعد $\int_a^\infty g(x)\,dx$. أيضًا.

نحذف إثبات النظرية 6.1. لنتركها تستند إلى الحجة البديهية التي سبق أن تم تقديمها.

تكمن الفكرة وراء اختبار المقارنة في مقارنة تكامل معتل معيّن بتكامل معتل آخر يكون تقاربه أو تباعده معروفًا بالفعل (أو يمكن تحديده بطريقة أكثر سهولة)، كما نوضّح في المثال 6.11.

ملحوظة 6.1

يمكننا ذكر اختبارات مقارنة مناظرة للتكاملات المعتلة من الصيغة $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$، حيث f متصلة على $(-\infty, a]$، بالإضافة إلى التكاملات التي تكون معتلة بفضل وجود عدم اتصال في المكامل.

المثال 6.11 استخدام اختبار مقارنة لتكامل معتل

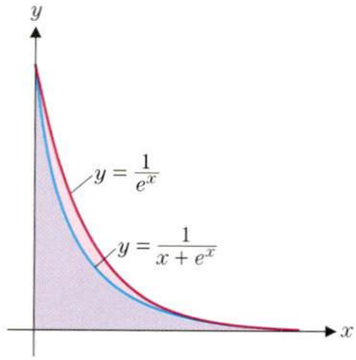
حدّد تقارب أو تباعد $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x+e^x}\,dx$.

الحل أولًا، لاحظ أنّك لا تعلم دالة أصلية لـ $\dfrac{1}{x+e^x}$ لذلك، لا توجد طريقة لحساب التكامل المعتل مباشرة. مع ذلك، لاحظ أنّه لـ $x \ge 0$.

$$0 \le \frac{1}{x+e^x} \le \frac{1}{e^x}$$

(انظر الشكل 9.12). يُعَدّ إثبات أنّ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x}\,dx$ متقارب (من 1) تمرينًا سهلًا. من النظرية 6.1. يلي ذلك الآن أنّ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x+e^x}\,dx$ متقارب أيضاً. بينما نعلم أنّ التكامل متقارب، لا يساعد اختبار المقارنة في إيجاد قيمة التكامل. يمكننا، مع ذلك، استخدام تكامل عددي (مثال: قاعدة سمبسون) لتقريب $\displaystyle\int_0^R \frac{1}{x+e^x}\,dx$. لقيم متتالية R. يوضّح الجدول المرافق بعض القيم التقريبية لـ $\displaystyle\int_0^R \frac{1}{x+e^x}\,dx$. التي تنتج باستخدام حزمة التكامل العددي المدمجة في CAS الخاص بنا.

[إذا استخدمت قاعدة سمبسون لهذا الأمر، لاحظ أنّك ستحتاج إلى تزايد قيمة n (عدد الفترات الجزئية في التجزيئ) بتزايد R]. لاحظ أنّه، بتزايد R أكثر وأكثر، يبدو أنّ القيم التقريبية للتكاملات



الشكل 9.12

مقارنة $y = \dfrac{1}{e^x}$ و $y = \dfrac{1}{x+e^x}$

المقابلة تقترب من 0.8063956. لذا نعتبر هذا العدد قيمة تقريبية للتكامل المعتل.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x+e^x}\,dx \approx 0.8063956$$

R	$\int_0^R \frac{1}{x+e^x}\,dx$
10	0.8063502
20	0.8063956
30	0.8063956
40	0.8063956

ينبغي أن تحسب القيم التقريبية حتى للقيم الأكبر لـ R لإقناع نفسك بأنّ هذا التقدير دقيق. ■

في المثال 6.12. نفحص تكاملًا له تطبيقات مهمة في الاحتمال والإحصاء.

المثال 6.12 استخدام اختبار مقارنة لتكامل معتل

حدّد تقارب أو تباعد $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$.

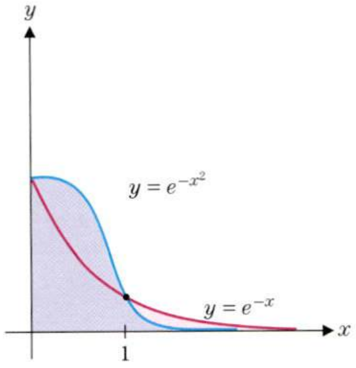
الحل مرة أخرى، لاحظ أنّك لا تعرف دالة أصلية للمكامل e^{-x^2}. مع ذلك، لاحظ أنّه لـ $x > 1$، $e^{-x^2} < e^{-x}$. (انظر الشكل 9.13). يمكننا إعادة كتابة التكامل في صورة

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$$

حيث إنّ أول تكامل على الجانب الأيمن هو تكامل صحيح محدود. لا يكون معتلًا سوى التكامل الثاني. يُعَدّ توضيح أنّ $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ متقارب أمرًا سهلًا. بواسطة اختبار المقارنة، يلي ذلك أنّ $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ متقارب أيضًا. ونتركها كتمرين لتوضيح أنّ

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx \approx 0.8862269$$

باستخدام أساليب تكامل أكثر تقدّمًا، من الممكن إثبات النتيجة المذهلة أنّ $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ■



الشكل 9.13

$y = e^{-x^2}$ و $y = e^{-x}$

يمكن استخدام اختبار المقارنة بسهولة متماثلة لتوضيح أنّ أحد التكاملات المعتلة متباعد.

المثال 6.13 استخدام اختبار المقارنة: تكامل متباعد

حدّد تقارب أو تباعد $\int_1^\infty \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$.

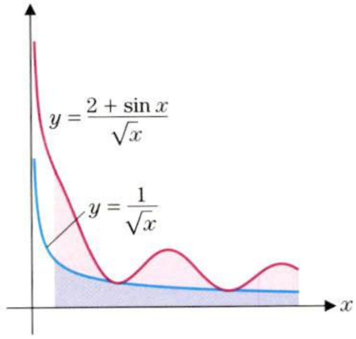
الحل كما في المثالين 6.11 و6.12، لا تعلم الدالة الأصلية للمكامل ولذا فإنّ أملك الوحيد لتحديد ما إذا كان التكامل متقارب أم لا هو المقارنة. أولًا، تذكّر أنّ

$$-1 \le \sin x \le 1, \quad \text{لكل } x$$

لدينا إذًا

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2-1}{\sqrt{x}} \le \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}, \quad \text{لكل } 1 \le x < \infty$$

(انظر الشكل 9.14 لتطّلع على تمثيل بيانيّ للدالتين). تذكّر أنّنا وضّحنا في المثال 6.5 أنّ $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ هو متباعد. يخبرنا اختبار المقارنة الآن أنّ $\int_1^\infty \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ يجب أن يكون متباعد أيضًا. ■



الشكل 9.14

مقارنة $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ و $y = \frac{2+\sin x}{\sqrt{x}}$

يتمثّل السؤال الأهم هنا بطريقة إيجاد تكامل معتل لمقارنته بتكامل معيّن. أنظر بتمعّن إلى المكامل لترى إذا كان يمثّل أيّ من دواله الأصلية (أو كان لديك على الأقل أملًا في إيجادها باستخدام تقنيّات التكامل المتنوّعة). في إطار آخر، تكون أفضل إجابة لدينا أنّ هذا الأمر يرتبط بالخبرة. عادةً ما يتم إجراء المقارنات بديهيًا باستخدام خبرتك. نقدّم تمارين كافية على هذا الموضوع لإعطاء بعض من الخبرة في ما يتعلق بإيجاد المقارنات المناسبة. ابحث بجد عن المقارنات ولا تستسلم بسهولة.

ما وراء الصيغ

قد يبدو أنّ هذا الدرس يقدّم عددًا جمًا من الصيغ الجديدة ليتم حفظها. في الواقع، جميع التكاملات التي تم تقديمها في هذا الدرس تتبع نمطًا متشابهًا. في كل حالة، نقرّب التكامل المعيّن بإجراء تكامل على فترة مختلفة. يتم في ما بعد إيجاد القيمة بالضبط باحتساب نهاية مع اقتراب الفترة التقريبية من الفترة المرغوبة. أجِب عن التالي لنفسك. كيف يتلائم كل مثال من الأمثلة في هذا الدرس مع هذا النمط؟

تمارين 9.6

تمارين كتابية

1. قد يبدو تأكيدنا على العمل من خلال النهاية لتكامل معتل لعديد من الطلاب حرصًا غير ضروري. اشرح، باستخدام الأمثلة في هذا الدرس، سبب أنّه من المهم الحصول على تعريفات دقيقة واستخدامها.

2. حدّد ما إذا كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة (مما يعني أنّها ليست صحيحة دائمًا) واشرح السبب: إذا كان المكامل $f(x) \to \infty$ عندما $x \to a^+$ أو عندما $x \to b^-$. تكون المساحة $\int_a^b f(x)\,dx$ لانهائية إذًا؛ يعني ذلك أنّ $\int_a^b f(x)\,dx$ متباعد.

في التمرينين 1 و2، حدّد ما إذا كان التكامل معتلًا أم لا. إذا كان معتلًا، اشرح السبب

1. (a) $\int_0^2 x^{-2/5}\,dx$ (b) $\int_1^2 x^{-2/5}\,dx$ (c) $\int_0^2 x^{2/5}\,dx$

2. (a) $\int_0^\infty x^{2/5}\,dx$ (b) $\int_{-2}^2 \frac{3}{x}\,dx$ (c) $\int_2^\infty \frac{3}{x}\,dx$

في التمارين 3–18، حدّد ما إذا كان التكامل متقارب أم متباعد. أوجد قيمة التكامل إذا كان متقارب.

3. (a) $\int_0^1 x^{-1/3}\,dx$ (b) $\int_0^1 x^{-4/3}\,dx$

4. (a) $\int_1^\infty x^{-4/5}\,dx$ (b) $\int_1^\infty x^{-6/5}\,dx$

5. (a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ (b) $\int_1^5 \frac{2}{\sqrt{5-x}}\,dx$

6. (a) $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (b) $\int_0^1 \frac{2}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$

7. (a) $\int_0^\infty xe^x\,dx$ (b) $\int_1^\infty x^2e^{-2x}\,dx$

8. (a) $\int_{-\infty}^1 x^2e^{3x}\,dx$ (b) $\int_{-\infty}^0 xe^{-4x}\,dx$

9. (a) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ (b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

10. (a) $\int_0^\infty \cos x\,dx$ (b) $\int_0^\infty \cos x e^{-\sin x}\,dx$

11. (a) $\int_0^1 \ln x\,dx$ (b) $\int_0^\pi \sec^2 x\,dx$

12. (a) $\int_0^\pi \cot x\,dx$ (b) $\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx$

13. (a) $\int_0^3 \frac{2}{x^2-1}\,dx$ (b) $\int_{-4}^4 \frac{2x}{x^2-1}\,dx$

14. (a) $\int_0^\pi x\sec^2 x\,dx$ (b) $\int_0^2 \frac{2}{x^3-1}\,dx$

15. (a) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ (b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2-1}\,dx$

16. (a) $\int_0^2 \frac{x}{x^2-1}\,dx$ (b) $\int_0^\infty \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$

17. (a) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}\,dx$ (b) $\int_0^\infty \tan x\,dx$

18. (a) $\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ (b) $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

19. (a) أوجد جميع قيم p التي يتقارب عندها $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$.

(b) أوجد جميع قيم p التي يتقارب عندها $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$.

(c) أثبت أنّ $\int_{-\infty}^{\infty} x^p\,dx$ هو متباعد لكل p.

20. (a) أوجد جميع قيم r التي يتقارب عندها $\int_0^\infty xe^{rx}\,dx$.

(b) أوجد جميع قيم r التي يتقارب عندها $\int_{-\infty}^0 xe^{rx}\,dx$.

في التمارين 30–21، استخدم مقارنة لتحديد ما إذا كان التكامل متقارب أم متباعد.

21. $\int_1^\infty \frac{x}{1+x^3}\,dx$

22. $\int_1^\infty \frac{x^2-2}{x^4+3}\,dx$

23. $\int_2^\infty \frac{x}{x^{3/2}-1}\,dx$

24. $\int_1^\infty \frac{2+\sec^2 x}{x}\,dx$

25. $\int_0^\infty \frac{3}{x+e^x}\,dx$

26. $\int_1^\infty e^{-x^3}\,dx$

27. $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+e^x}\,dx$

28. $\int_2^\infty \frac{\ln x}{e^x+1}\,dx$

29. $\int_2^\infty \frac{x^2 e^x}{\ln x}\,dx$

30. $\int_1^\infty e^{x^2+x+1}\,dx$

في التمرينين 31 و 32، استخدم التكامل بالتجزيئ وقاعدة لوبيتال.

31. $\int_0^1 x\ln 4x\,dx$

32. $\int_0^\infty xe^{-2x}\,dx$

33. في هذا التمرين، ستنظر إلى زوجين من العمليات الحسابية المثيرة للاهتمام يُعرَفان باسم بوق جبريل. يتم تكوين البوق بأخذ المنحنى $y = 1/x$ لـ $x \geq 1$ وتدويره حول المحور x. أثبت أنّ الحجم نهائي (أي أنّ التكامل متقارب)، ولكن مساحة السطح لانهائية (أي أن التكامل متباعد). يكمن التناقض في أنّ ذلك قد يبدو أنّه يشير إلى أنّ البوق يمكن ملوه بكمية نهائية من الطلاء ولكن لا يمكن تغطية الجزء الخارجي للبوق بأي كميات نهائية من الطلاء.

34. أثبت أنّ $\int_{-\infty}^{\infty} x^3\,dx$ متباعد ولكن $\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} x^3\,dx = 0$.

في التمارين 38–35، حدّد ما إذا كانت العبارة صحيحة أم خاطئة (ليست صحيحة دائمًا).

35. إذا كان $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$، إذًا $\int_0^\infty f(x)\,dx$ متباعد.

36. إذا كان $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ إذًا $\int_0^\infty f(x)\,dx$ متقارب.

37. إذا كان $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$، إذًا $\int_0^1 f(x)\,dx$ متباعد.

38. إذا كان $f(-x) = -f(x)$ لكل x، إذًا $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0$.

39. (a) إذا علمت أنّ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$. أوجد قيمة $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2}\,dx$ لأجل $k > 0$.

(b) إذا علمت أنّ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$. أوجد قيمة $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-kx^2}\,dx$ لأجل $k > 0$.

40. إذا علمت أنّ $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$، أوجد قيمة $\int_0^\infty \frac{\sin kx}{x}\,dx$ لأجل (a) $k > 0$ (b) $k < 0$. إذا علمت أنّ $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$، أوجد قيمة $\int_0^\infty \frac{\sin^2 kx}{x^2}\,dx$ لأجل (c) $k > 0$. (d) $k < 0$.

41. بملاحظة أنّ $\frac{x}{x^5+1} \approx \frac{1}{x^4}$ للقيم الكبيرة لـ x. اشرح سبب توقّعك أنّ $\int_0^\infty \frac{x}{x^5+1}\,dx$ متقارب. استخدم اختبار مقارنة لإثبات أنّ هذا الأمر يحدث بالفعل.

42. كما في التمرين 41. خمّن ما إذا كان التكامل متقارب أم متباعد بسرعة.

(a) $\int_2^\infty \frac{x}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$ (b) $\int_2^\infty \frac{x}{\sqrt{x^5-1}}\,dx$

(c) $\int_2^\infty \frac{x}{\sqrt{x^5+x-1}}\,dx$

43. استخدم التعويض $u = \frac{\pi}{2} - x$ لتثبت أنّ (a) $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\,dx$. إجمع $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx$ لجانبيْ المعادلة كليهما وبسط الجانب الأيمن بالمتطابقة $\sin 2x = 2\sin x\cos x$. (b) استخدم هذه النتيجة لتثبت أنّ $2\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\,dx$. (c) أثبت أنّ $\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx$. (d) استخدم الجزأين (b) و(c) لإيجاد قيمة $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\,dx$.

44. أثبت أنّه لأيّ عدد صحيح موجب n. $\int_0^1 (\ln x)^n\,dx$ يساوي $n!$ إذا كان n زوجيًا و $-n!$ إذا كان n فرديًا. [إرشاد: $\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^n = 0$].

45. اشرح سبب أنّ $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\tan x}\,dx$ تكامل معتل. فرضًا أنّه متقارب، اشرح سبب أنّه يساوي $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$، حيث

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\tan x} & , \ 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \ x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

وبالمثل، أوجد دالة $g(x)$ يكون فيها التكامل المعتل $\int_0^{\pi/2} \frac{\tan x}{1+\tan x}\,dx$ مساويًا للتكامل الصحيح $\int_0^{\pi/2} g(x)\,dx$. استخدم التعويض $u = x - \frac{\pi}{2}$ لتثبت أنّ $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\tan x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan x}{1+\tan x}\,dx$. بجمع التكامل الأول مع جانبي المعادلة كليهما، أوجد قيمة $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\tan x}\,dx$.

46. عمّم التمرين 45 لإيجاد قيمة $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\tan^k x}\,dx$ لأي عدد حقيقي k.

47. فرضًا أنّ جميع التكاملات في هذا التمرين متقاربة. استخدم التكامل بالتجزيئ لكتابة $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2}\,dx$ بدلالة $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$ ثم بدلالة $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$. بالإستقراء الرياضي، أثبت أنّ $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2}\,dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi}$، لأي عدد صحيح موجب n.

48. أثبت أنّ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$، لأي ثابت موجب $a \neq 0$. سابقًا، (أي عندما يكون التباين تحت رمز التكامل) احسب n مشتقّة بمعلوميّة a للمعادلة. ضع $a = 1$ وقارن النتيجة بتلك الخاصة بالتمرين 47.

التطبيقات

.49 إنّ دالة $f(x) \geq 0$ هي دالة كثافة احتمال (pdf) على الفترة $[0, \infty)$ إذا كان $\int_0^\infty f(x)\,dx = 1$. أوجد قيمة العدد الثابت k ليكون كل من ما يأتي هو pdf على الفترة $[0, \infty)$.

(a) ke^{-2x} (b) ke^{-4x} (c) $ke^{-rx}, r > 0$

.50 أوجد قيمة العدد الثابت k ليكون كل من ما يأتي هو pdf على الفترة $[0, \infty)$. (انظر التمرين 49).

(a) kxe^{-2x} (b) kxe^{-4x} (c) $kxe^{-rx}, r > 0$

.51 **الوسط** μ (أحد قياسات المتوسط) متغيّر عشوائي لـ pdf $f(x)$ على الفترة $[0, \infty)$ هو $\mu = \int_0^\infty xf(x)\,dx$. أوجد وسط التوزيع الأسي $f(x) = re^{-rx}, r > 0$.

.52 أوجد وسط متغيّر عشوائي من pdf $f(x) = r^2xe^{-rx}$.

.53 تتضمّن معظم أسئلة الاحتمال **احتمالات مشروطة**. على سبيل المثال، إذا علمت أنّ مصباحًا احترق بالفعل لمدة 30 ساعة، فما احتمال أن يستمر لمدة 5 ساعات أكثر على الأقل؟ يكون ذلك "احتمال أنّ $x > 35$ إذا علمت أنّ $x > 30$" وتتم كتابته في صيغة $P(x > 35 | x > 30)$. بشكل عام، للحدثَين A و B،
$P(A|B) = \dfrac{P(A \text{ و } B)}{P(B)}$ والذي في هذه الحالة ينخفض إلى
$P(x > 35 | x > 30) = \dfrac{P(x > 35)}{P(x > 30)}$. لـ pdf $f(x) = \frac{1}{40}e^{-x/40}$ (بالساعات)، احتسب $P(x > 35 | x > 30)$. كذلك، احتسب $P(x > 40 | x > 35)$ و $P(x > 45 | x > 40)$. (إرشاد: $P(x > 35) = 1 - P(x \leq 35)$).

.54 يوضّح التمرين 53 أنّ "خاصية فقدان الذاكرة" للتوزيعات الأسية. إنّ احتمال أن يدوم مصباح m ساعة أكثر مع اعتبار أنّه سبق أن دام لمدة n من الساعات يعتمد فقط على m وليس على n. (a) أثبت هذا لـ pdf $f(x) = \frac{1}{40}e^{-x/40}$. (b) أثبت أنّه لدى أي pdf أسية $f(x) = ce^{-cx}$ خاصية فقدان الذاكرة، حيث $c > 0$.

.55 تستخدم **دالة أوميجا** لتحليل المخاطرة/المكافآت للاستثمارات المالية. على فرض أنّ $f(x)$ هي pdf على $(-\infty, \infty)$ وتعطي التوزيع للعائدات على استثمار. (إذًا $\int_a^b f(x)\,dx$ هو احتمال أنّ عائدات الاستثمار تتراوح بين a AED و b AED). لتكن $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt$ هي **دالة توزيع تراكمي** للعائدات. إذًا $\Omega(r) = \dfrac{\int_r^\infty [1 - F(x)]\,dx}{\int_{-\infty}^r F(x)\,dx}$ هي دالة أوميجا للاستثمار.

(a) أحسب $\Omega_1(r)$ للتوزيع الأسي $f_1(x) = 2e^{-2x}$، $0 \leq x < \infty$. لاحظ أنّ $\Omega_1(r)$ ستكون غير معرّفة (∞) لأجل $r \leq 0$.

(b) أحسب $\Omega_2(r)$ لأجل $f_2(x) = 1, 0 \leq x \leq 1$.

(c) أثبت أنّ وسطي $f_1(x)$ و $f_2(x)$ هما متساويان وأنّ $\Omega(r) = 1$ عندما تساوي r الوسط.

(d) على الرغم من أنّ الوسطين متساويان، فإنّ استثمارات التوزيعين $f_1(x)$ و $f_2(x)$ ليست متكافئة. استخدم التمثيل البياني لـ $f_1(x)$ و $f_2(x)$ لشرح سبب أنّ $f_1(x)$ تقابل استثمار أكثر خطورة من $f_2(x)$.

(e) أثبت أنّه لبعض القيمة c، $\Omega_2(r) > \Omega_1(r)$ لأجل $r < c$ و $\Omega_2(r) < \Omega_1(r)$ لأجل $r > c$. بشكل عام، كلما كبرت $\Omega(r)$ كان الاستثمار أفضل. اشرح ذلك في إطار هذا المثال.

.56 تعطي **دالة الموثوقية** $R(t)$ احتمال أنّ $x > t$. لـ pdf خاصة بمصباح، يكون هذا احتمال أنّ المصباح يدوم t ساعة على الأقل. احتسب $R(t)$ لـ pdf أسية عامة $f(x) = ce^{-cx}$.

.57 ما يسمّى **بتكامل بولتزمان**

$$I(p) = \int_0^1 p(x) \ln p(x)\,dx$$

من المهم في مجال الرياضيات لـ **نظرية المعلومات**. تشكّل $p(x)$ pdf على الفترة $[0, 1]$. مثّل الـ pdf بيانيًا $p_1(x) = 1$ و

$$p_2(x) = \begin{cases} 4x & , \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ 4 - 4x & , \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

واحسب التكاملَين $\int_0^1 p_1(x)\,dx$ و $\int_0^1 p_2(x)\,dx$ لإثبات أنّهما pdf. ثم احسب تكاملات بولتزمان $I(p_1)$ و $I(p_2)$. على فرض أنّك تحاول تحديد قيمة كمية تعلم أنّها تتراوح بين 0 و1. إذا كان الـ pdf الخاص بهذه الكمية $p_1(x)$، إذًا جميع القيم متشابهة بالتساوي. ما الذي قد تُشير إليه pdf $p_2(x)$ ؟ بملاحظة أنّ $I(p_2) > I(p_1)$،اشرح سبب أنّه من الإنصاف قول أنّ تكامل بولتزمان يقيس كمية المعلومات المتاحة. على أساس هذا التكامل، ارسم pdf $p_3(x)$ سيكون بها تكامل بولتزمان أكبر من $p_2(x)$.

تمارين استكشافية

.1 إنّ **تحويل لابلاس** هو أداة لا تُقدَّر بثمن في العديد من التخصّصات الهندسية. كما يشير الاسم، يغيّر التحويل دالة $f(t)$ إلى دالة مختلفة $F(s)$. وفقًا للتعريف، يكون تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ هو

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

لإيجاد تحويل لابلاس لـ $f(t) = 1$. أحسب

$$\int_0^\infty (1)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\,dt$$

أثبت أنّ التكامل يساوي $1/s$، لأجل $s > 0$. نكتب $L\{1\} = 1/s$. أثبت أنّ

$$L\{t\} = \int_0^\infty te^{-st}\,dt = \frac{1}{s^2}$$

لأجل $s > 0$. أحسب $L\{t^2\}$ و $L\{t^3\}$ وخمّن الصيغة العامة لـ $L\{t^n\}$. ثم، أوجد $L\{e^{at}\}$ لأجل $s > a$.

.2 تعرّف **دالة جاما** بواسطة $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$. إذا كان التكامل متقارب. لدالة معقّدة الشكل، تتميّز دالة جاما بخصائص مذهلة. أولًا، أثبت أنّ $\Gamma(1) = 1$. ثم استخدم قاعدة لوبيتال لتثبت أنّ $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$، لأي $n > 0$. استخدم هذه الخاصية والاستقراء الرياضي لتثبت أنّ $\Gamma(n+1) = n!$، لأي عدد صحيح موجب n. (لاحظ أنّ ذلك يتضمّن القيمة $0! = 1$).

قرّب $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ و $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ عدديًا. هل من المعقول تعريف هذه في صورة $\left(\frac{1}{2}\right)!$ و $\left(\frac{3}{2}\right)!$، على التوالي؟ من هذا المنطلق. أثبت

أنّ $\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \left(\frac{1}{2}\right)!$. في النهاية، لكل $x > 1$، يكون التكامل المعرف لـ $\Gamma(x)$ معتلًا بطريقتين. استخدم اختبار مقارنة لتوضيح تقارب $\int_1^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$. يترك هذا $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$. حدّد معدل

قيم p التي يتقارب عندها $\int_0^1 t^p e^{-t}\,dt$ ثم حدّد مجموعة x التي يتم تعريف $\Gamma(x)$ عندها.

أسئلة المراجعة

تمارين كتابية

تتضمّن القائمة التالية المصطلحات التي تم تعريفها والنظريات التي تم توضيحها في هذه الوحدة. لكل مصطلح أو نظرية، (1) قدّم تعريفًا أو عبارةً دقيقةً و(2) اذكر ما تعنيه بمصطلحات عامة و(3) صِفْ أنواع المسائل التي تقترن بذلك.

التكامل بالتجزيئ	صيغة الاختزال
تفكيك الكسور الجزئية	CAS
التكامل المعتل	تكامل متقارب
تكامل متباعد	اختبار مقارنة

صواب أم خطأ

اذكر ما إذا كانت كل عبارة صوابًا أم خطأً واشرح السبب بإيجاز. إذا كانت العبارة خطأً، حاول "تصحيحها" بتعديل العبارة الموضّحة إلى العبارة الجديدة الصحيحة.

1. ينجح التكامل بالأجزاء فقط للتكاملات بالصيغة $\int f(x)g(x)\,dx$.

2. لتكامل بالصيغة $\int xf(x)\,dx$، استخدم التكامل بالأجزاء دائمًا مع $u = x$.

3. إنّ التقنيات مع الدوال المثلثية في الدرس 6.3 هي أدوات للتعويض.

4. إذا احتوى مكامل على عامل $\sqrt{1-x^2}$، ينبغي أن تقوم بإجراء التعويض $x = \sin\theta$.

5. إذا كانت p و q كثيرتَيْ حدود، يمكن إذًا إيجاد قيمة أي تكامل من الصيغة $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$.

6. من جدول تكامل واسع، لا تحتاج إلى معرفة أي تقنيّة تكامل.

7. إذا كان لدى $f(x)$ مقارب عند $x = a$، يتباعد إذًا $\int_a^b f(x)\,dx$ لأي b.

8. إذا كانت $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \neq 0$، إذًا يتباعد $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

في التمارين 1–44، أوجد قيمة التكامل.

1. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ **2.** $\int \frac{\sin(1/x)}{x^2}\,dx$

3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **4.** $\int \frac{2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

5. $\int x^2e^{-3x}\,dx$ **6.** $\int x^2e^{-x^3}\,dx$

7. $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$ **8.** $\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$

9. $\int \frac{x^3}{4+x^4}\,dx$ **10.** $\int \frac{x}{4+x^4}\,dx$

11. $\int e^{2\ln x}\,dx$ **12.** $\int \cos 4x\,dx$

13. $\int_0^1 x\sin 3x\,dx$ **14.** $\int_0^1 x\sin 4x^2\,dx$

15. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx$ **16.** $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$

17. $\int_{-1}^1 x\sin \pi x\,dx$ **18.** $\int_0^1 x^2\cos \pi x\,dx$

19. $\int_1^2 x^3\ln x\,dx$ **20.** $\int_0^{\pi/4} \sin x\cos x\,dx$

21. $\int \cos x\sin^2 x\,dx$ **22.** $\int \cos x\sin^3 x\,dx$

23. $\int \cos^3 x\sin^3 x\,dx$ **24.** $\int \cos^4 x\sin^3 x\,dx$

25. $\int \tan^2 x\sec^4 x\,dx$ **26.** $\int \tan^3 x\sec^2 x\,dx$

27. $\int \sqrt{\sin x}\cos^3 x\,dx$ **28.** $\int \tan^3 x\sec^3 x\,dx$

29. $\int \frac{2}{8+4x+x^2}\,dx$ **30.** $\int \frac{3}{\sqrt{-2x-x^2}}\,dx$

31. $\int \frac{2}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx$ **32.** $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

33. $\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ **34.** $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$

35. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$ **36.** $\int \frac{4}{\sqrt{x+9}}\,dx$

37. $\int \frac{x+4}{x^2+3x+2}\,dx$ **38.** $\int \frac{5x+6}{x^2+x-12}\,dx$

39. $\int \frac{4x^2+6x-12}{x^3-4x}\,dx$ **40.** $\int \frac{5x^2+2}{x^3+x}\,dx$

41. $\int e^x \cos 2x\, dx$

42. $\int x^3 \sin x^2\, dx$

43. $\int x\sqrt{x^2+1}\, dx$

44. $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$

في التمارين 50–45، أوجد تفكيك الكسور الجزئية.

45. $\dfrac{4}{x^2-3x-4}$

46. $\dfrac{2x}{x^2+x-6}$

47. $\dfrac{-6}{x^3+x^2-2x}$

48. $\dfrac{x^2-2x-2}{x^3+x}$

49. $\dfrac{x-2}{x^2+4x+4}$

50. $\dfrac{x^2-2}{(x^2+1)^2}$

في التمارين 60–51، استخدم جدول التكاملات لإيجاد التكامل.

51. $\int e^{3x}\sqrt{4+e^{2x}}\, dx$

52. $\int x\sqrt{x^4-4}\, dx$

53. $\int \sec^4 x\, dx$

54. $\int \tan^5 x\, dx$

55. $\int \dfrac{4}{x(3-x)^2}\, dx$

56. $\int \dfrac{\cos x}{\sin^2 x(3+4\sin x)}\, dx$

57. $\int \dfrac{\sqrt{9+4x^2}}{x^2}\, dx$

58. $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{4-9x^2}}\, dx$

59. $\int \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}\, dx$

60. $\int \dfrac{x^2}{(x^6-4)^{3/2}}\, dx$

في التمارين 68–61، حدّد ما إذا كان التكامل متقارب أم متباعد. إذا كان متقارب، فأوجد النهاية.

61. $\int_0^1 \dfrac{x}{x^2-1}\, dx$

62. $\int_4^{10} \dfrac{2}{\sqrt{x-4}}\, dx$

63. $\int_1^{\infty} \dfrac{3}{x^2}\, dx$

64. $\int_1^{\infty} xe^{-3x}\, dx$

65. $\int_0^{\infty} \dfrac{4}{4+x^2}\, dx$

66. $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\, dx$

67. $\int_{-2}^{2} \dfrac{3}{x^2}\, dx$

68. $\int_{-2}^{2} \dfrac{x}{1-x^2}\, dx$

69. يختبر أخصّائيو أمراض القلب كفاءة القلب بحقن صبغة بمعدل ثابت R داخل وريد بالقرب من القلب وقياس تركيز الصبغة في مجرى الدم لمدة T ثوانٍ. إذا تم ضخ كامل كمية الصبغة عبره، يبلغ التركيز $c(t) = R$. أحسب الحجم الإجمالي للصبغة $\int_0^T c(t)\, dt$. لتركيز عام، يتم تعريف النتاج القلبي بالصيغة $\dfrac{RT}{\int_0^T c(t)\, dt}$. فسّر هذه الكمية. أحسب النتاج القلبي إذا كان $c(t) = 3te^{2Tt}$.

70. لـ $\int \ln(x+1)\, dx$، يمكنك استخدام التكامل بالأجزاء مع $u = \ln(x+1)$ و $dv = 1$. قارن إجاباتك باستخدام $v = x$ في مقابل استخدام $v = x+1$.

71. أثبت أنّ القيمة المتوسطة لـ $\ln x$ على الفترة $(0, e^n)$ تساوي $n-1$ لأي عدد صحيح موجب n.

72. تتضمّن معظم أسئلة الاحتمال **احتمالات مشروطة**. على سبيل المثال، إذا علمت أنّ مصباحًا احترق بالفعل لمدة 30 ساعة، فما احتمال أن يستمر لمدة 5 ساعات أكثر على الأقل؟ يكون هذا "احتمال أن $x > 35$ إذا علمت أنّ $x > 30$" وتتم كتابته في صيغة $P(x > 35 | x > 30)$. بشكل عام، للحدثَين A و B، $P(A|B) = \dfrac{P(A \text{ and } B)}{P(B)}$. يتم إعطاء **دالة معدل الإخفاق** كنهاية لـ $\dfrac{P(x < t + \Delta t | x > t)}{\Delta t}$ عندما $\Delta t \to 0$. لأجل الـpdf $f(x)$ الخاص بالعمر الافتراضي لمصباح، فإنّ البسط هو احتمال أن يحترق المصباح ما بين الزمنين t و $t + \Delta t$. استخدم $R(t) = P(x > t)$ لإثبات أنّه يمكن كتابة دالة معدل الإخفاق في صيغة $\dfrac{f(t)}{R(t)}$.

73. أثبت أنّ دالة معدل الإخفاق (انظر التمرين 72) لـ pdf أسية $f(x) = ce^{-cx}$ ثابت.

74. لتوزيع الجاما $f(x) = xe^{-x}$. (a) استخدم CAS لتثبت أنّ $P(x > s + t | x > s) = e^{-t} + \dfrac{t}{1+s}e^{-t}$. (b) أثبت أنّ هذه دالة متناقصة لـ s (لـ t محدّد). (c) إذا كانت هذه pdf تبيّن كميات هطول المطر سنويًا في مدينة معيّنة، فسّر نتيجة الجزء (b).

75. يتم إعداد نتائج اختبارات معدل الذكاء لاتباع التوزيع $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{450\pi}} e^{-(x-100)^2/450}$. وفقًا لهذا التوزيع، ما النسبة المئوية للأشخاص الذين يفترض أن يكون معدل ذكائهم بين 90 و100؟ إذا كان سيتم إعطاء نسبة 1% الأعلى من النتائج اللقب "عبقرية" فما هي أعلى درجة ينبغي أن تحصل عليها لتحصل على هذا اللقب؟

76. عرّف $I(n) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx$ للأعداد الصحيحة الموجبة n وأثبت أنّ $I(1) = \frac{\pi}{2}$. باستخدام التكامل بالتجزيئ مع $u = \frac{1}{(1+x^2)^n}$، أثبت أنّ $I(n+1) = \frac{2n-1}{2n} I(n)$. استنتج أنّ $I(n) = \frac{\pi}{2} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}$.

تمارين استكشافية

1. في هذا التمرين، ستحاول تحديد ما إذا كان $\int_0^1 \sin(1/x)\, dx$ متقارب أم لا. بما أنّ $|\sin(1/x)| \le 1$، لا يتباعد التكامل إلى ∞. ولكن هذا لا يعني بالضرورة أنّه يتقارب منها. اشرح سبب تباعد التكامل $\int_0^{\infty} \sin x\, dx$ (ليس إلى ∞، ولكن يتأرجح لانهائيًا).
تحتاج إلى تحديد ما إذا كان يحدث تأرجح مماثل

لـ $\int_0^1 \sin(1/x)\,dx$. أولًا، قدّر $\int_R^1 \sin(1/x)\,dx$ عدديًا لـ $R = 1/\pi$ ، $1/(2\pi), 1/(3\pi)$ وهكذا. لاحظ أنّه، بمجرد أن يكون لديك $\int_{1/\pi}^1 \sin(1/x)\,dx$، يمكنك الحصول على $\int_{1/(2\pi)}^1 \sin(1/x)\,dx$ بإضافة $\int_{1/(2\pi)}^{1/\pi} \sin(1/x)\,dx$. نضع ذلك بين مزدوجين لأنّ هذا التكامل الجديد يُعَدّ سالبًا. أثبت أنّ التكاملَين $\int_{1/(3\pi)}^{1/(2\pi)} \sin(1/x)\,dx, \int_{1/(2\pi)}^{1/\pi} \sin(1/x)\,dx$ وهكذا، سالبان وموجبان بالتبادل، بحيث يبدو أنّ مجموع $\int_R^1 \sin(1/x)\,dx$ متقارب عندما $R \to 0^+$. يتضح أنّ النهاية متقاربة إذا كانت التكاملات الإضافية $\int_{1/((n+1)\pi)}^{1/(n\pi)} \sin(1/x)\,dx$ تتجه نحو 0 عندما $n \to \infty$. أثبت أنّ هذا الأمر صحيح.

2. على فرض أنّ $f(x)$ دالة بحيث يتقارب كل من $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ و $\int_{-\infty}^{\infty} f(x-1/x)\,dx$. ابدأ بـ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x-1/x)\,dx$ وقم بإجراء التعويض $u = -\frac{1}{x}$. أثبت أنّ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x-1/x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^2} f(u-1/u)\,du$ 2. ثم افترض أنّ $y = u - 1/u$. أثبت أنّ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-1/x)\,dx$. استخدم هذه النتيجة لإيجاد قيمة $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2+(x^2-1)^2}\,dx$ و $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+2-1/x^2}\,dx$.

3. أوجد قيمة $\int_0^{\pi/2} \frac{ab}{(a\cos x + b\sin x)^2}\,dx$. بقسمة جميع الحدود على $\cos^2 x$، باستخدام التعويض $u = ab\tan x$ وبإيجاد قيمة التكامل المعتل $\int_0^{\infty} \frac{a^2}{(u+a^2)^2}\,dx$.

كتيب الطالب

يساعدك **كتيّب الطالب** هذا

في الإجابة عن الأسئلة التالية.

ماذا لو نسيت مفردة لغوية؟

القاموس
GL 2

يقدم **القاموس** تعريفات للكلمات الصعبة أو المهمة المستخدمة عبر هذا الكتيب.

ماذا لو نسيت صيغة؟

الدوال والمتطابقات المثلثية، والصيغ والرموز
TF 1

تجد في الصفحات الأخيرة من هذا الكتاب قوائم تحتوي على **الصيغ والمتطابقات والرموز** المستخدمة فيه.

Glossary/القاموس

English

A

absolute value function A function that contains an absolute value of the independent variable, with parent function $f(x) = |x|$.

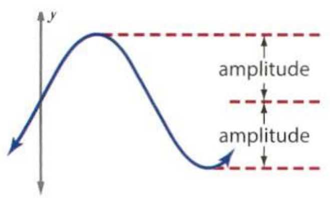
absolute value of a complex number A complex number's distance from zero in the complex plane.

algebraic function A function with values that are obtained by adding, subtracting, multiplying, or dividing constants and the independent variable or raising the independent variable to a rational power.

alternative hypothesis One of two hypotheses that need to be stated to test a claim; states that there is a difference between the sample value and the population parameter. The alternative hypothesis contains a statement of inequality such as $>$, $\neq$, or $<$.

ambiguous case Given the measures of two sides and a nonincluded angle, either no triangle exists, exactly one triangle exists, or two triangles exist.

amplitude Half the distance between the maximum and minimum values of a sinusoidal function. For $y = a \sin(bx + c) + d$ and $y = a \cos(bx + c) + d$, amplitude $= |a|$.



anchor step In mathematical induction, showing that something works for the first case, or that P_1 **is true.**

angle of depression The angle formed by a horizontal line and an observer's line of sight to an object below.

العربية

دالة القيمة المطلقة دالة تحتوي على قيمة مطلقة لمتغير مستقل. باستخدام الدالة الأصلية $f(x) = |x|$.

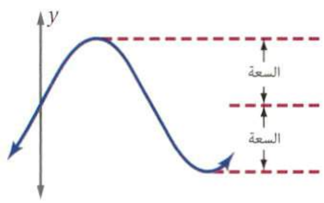
قيمة مطلقة لعدد مركب تمثل بعد العدد المركب عن الصفر في المستوى المركب.

دالة جبرية دالة تحتوي على قيم ناتجة عن عملية جمع الثوابت والمتغير المستقل أو طرحها أو ضربها أو قسمتها أو رفع المتغير المستقل إلى قوة نسبية.

فرضية بديلة فرضية من اثنتين تفيد بضرورة إثبات صحة افتراض ما؛ وتنص على وجود فرق بين قيمة العينة ومعلمة المجتمع الإحصائي. تحتوي الفرضية البديلة على عبارة المساواة مثل أكبر من أو لا يساوي أو أقل من.

حالة مبهمة بالنظر إلى قياسات ضلعين وزاوية غير متضمنة. فقد لا يوجد أي مثلث أو قد يوجد مثلث واحد أو قد يوجد مثلثان.

سعة تمثل نصف المسافة الواصلة بين القيم القصوى والدنيا في دالة التموج الجيبي. بما أن $y = a \sin(bx + c) + d$ و $y = a \cos(bx + c) + d$. إذن السعة = $|a|$.



خطوة المرتكز في الاستنتاج الرياضي. تُظهر أن شيئًا ما يعمل على حل المسألة الأولى. أو أن P_1 صحيح.

زاوية الانخفاض الزاوية المكونة بواسطة خط أفقي وخط الرؤية الخاص بالملاحظ للوصول إلى موضع أدناه.

Glossary/القاموس

angle of elevation The angle formed by a horizontal line and an observer's line of sight to an object above.

زاوية الارتفاع الزاوية المكونة بواسطة خط أفقي وخط الرؤية الخاص بالملاحظ للوصول إلى موضع أعلاه.

angular speed The rate at which the object rotates about a fixed point.

سرعة زاوية تمثل المعدل الذي يدور عنده الجسم حول نقطة ثابتة.

antiderivative $F(x)$ is an antiderivative of $f(x)$ if $F'(x) = f(x)$.

عكس المشتقة $F(x)$ هو المشتق العكسي لـ $f(x)$ إذا كان $F'(x) = f(x)$.

arccosine function The inverse cosine function, written as $y = \cos^{1-} x$ or $y = \arccos x$, that has a domain of $[-1, 1]$ and a range of $[0, \pi]$.

دالة قوس جيب التمام تمثل معكوس دالة جيب التمام. وتكتب بالشكل $y = \cos^{-1} x$ أو $y = arccos\, x$. ولها مجال يساوي $[-1, 1]$ ومدى يساوي $[0, \pi]$.

arcsine function The inverse sine function, written as $y = \sin^{1-} x$ or $y = \arcsin x$, that has a domain of $[-1, 1]$ and a range of $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

دالة قوس الجيب تمثل معكوس دالة جيب الزاوية. وتكتب بالشكل $y = \sin^{-1} x$ أو y=قوس الجيب x. ولها مجال يساوي ومدى يساوي $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

arctangent function The inverse tangent function, written as $y = \tan^{1-} x$ or $y = \arctan x$, that has a domain of $(-\infty, \infty)$ and a range of $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

دالة قوس الظل تمثل معكوس دالة الظل. وتكتب بالشكل $y = \tan^{-1} x$ أو $y = \arctan x$. ولها مجال يساوي $(-\infty, \infty)$ ومدى يساوي $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Argand Plane The complex plane.

مستوى أرجاند يقصد به المستوى المركب.

argument The angle θ of a complex number written in the form $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

بعد زاوي يقصد به الزاوية θ المحددة لعدد مركب يُكتب بالشكل $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

arithmetic means The terms between two nonconsecutive terms of an arithmetic sequence.

وسط حسابي الحدود بين حدين غير متتاليين في متتالية حسابية.

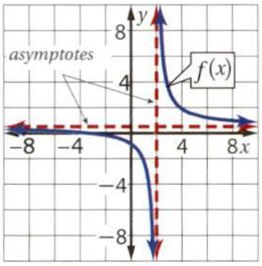
arithmetic series The sum of the terms of an arithmetic sequence.

متسلسلة حسابية مجموع حدود متتالية حسابية.

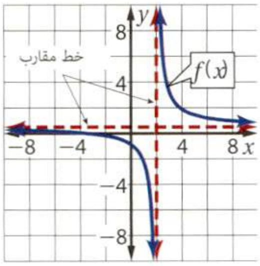
arithmetic sequence A sequence in which the difference between successive terms is a constant.

متتالية حسابية متتالية تتميز بثبات الاختلاف بين الحدود المتتابعة.

asymptote A line or curve that a graph approaches.



خط مقارب خط أو منحنى يقترب منه الرسم البياني.



augmented matrix A matrix that contains the coefficients and constant terms of a system of linear equations, each written in standard form with the constant terms to the right of the equals sign.

مصفوفة موسعة مصفوفة تحتوي على المعاملات والحدود الثابتة لنظام معادلات خطية، وتكتب كل منها في الصورة القياسية باستخدام الحدود القياسية الموجودة على الجانب الأيمن لعلامة التساوي.

average rate of change The slope of the line through any two points on the graph of a nonlinear function f.

متوسط معدل التغيير ميل الخط الذي يمر عبر نقطتين على الرسم البياني لدالة غير خطية f.

axis of symmetry A line about which a figure is symmetric. In a parabola, the axis of symmetry is perpendicular to the directrix and passes through the focus.

محور التماثل خط يكون الشكل من حوله متماثلاً. في القطع المكافئ، يكون محور التماثل متعامدًا على الدليل ويمر عبر البؤرة.

B

bimodal distribution A graph of a distribution of data that has two modes.

توزيع ثنائي المنوال رسم بياني يمثل توزيع البيانات ذات المنوالين.

binomial coefficients The coefficients of the terms of an expanded binomial $(a+b)^n$.

معاملات ذات الحدين تمثل معاملات حدود المعادلات الممتدة ثنائية الحد $(a+b)^n$.

binomial distribution The distribution of the outcomes of a binomial experiment and their corresponding probabilities.

توزيع ذو الحدين توزيع نواتج تجربة ثنائية الحد واحتمالاتها المطابقة.

binomial experiment A probability experiment in which there are a fixed number of independent trials, there are exactly two possible outcomes for each trial, and the probability of success is the same for each trial.

تجربة ذات الحدين تجربة احتمال يوجد بها عدد ثابت من التجريبات المستقلة، ويوجد اثنان من النواتج المحتملة لكل تجريب، واحتمال النجاح هو نفسه لكل تجريب.

binomial probability distribution function A discrete function of the random variable X, represented in the binomial probability formula.

دالة التوزيع الاحتمالي ذو الحدين دالة منفصلة للمتغير العشوائي X، ممثلة بصيغة احتمال ثنائي الحد.

Binomial Theorem For any positive integer n,
$$(a+b)^n = {}_nC_0\, a^n b^0 + {}_nC_1\, a^{n-1} b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2} b^2 + \ldots + {}_nC_r\, a^{n-r} b^r + \ldots + C_n\, a^0 b^n, \text{ where } r = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

نظرية ذات الحدين بما أن أي عدد صحيح موجب يساوي n، فإن
$$(a+b)^n = {}_nC_0\, a^n b^0 + {}_nC_1\, a^{n-1} b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2} + \ldots + b^2$$
${}_nC_r\, a^{n-r} b^r + \ldots + C_n\, a^0 b^n$، حيث $r = 0, 1, 2, \ldots n$.

bivariate data Data with two variables.

بيانات ذات متغيرين بيانات تحتوي على متغيرين.

C

cardioid The graph of a polar equation of the form $r = a \pm a \cos\theta$ or $r = a \pm a \sin\theta$, where a is positive.

قلبي الشكل رسم بياني لمعادلة قطبية من الشكل $r = a \pm a \cos\theta$ أو $r = a \pm a \sin\theta$. حيث يكون a عددًا موجبًا.

center of an ellipse The midpoint of the major and minor axes of an ellipse.

مركز القطع الناقص نقطة المنتصف في المحورين الأكبر والأصغر للقطع الناقص.

circular function A trigonometric function defined as a function of the real number system using the unit circle.

دالة دائرية دالة مثلثية تعرف بأنها دالة في نظام الأعداد الحقيقي باستخدام دائرة الوحدة.

class A data value or group of data values.

صف قيمة بيانات أو مجموعة من قيم البيانات.

class width The range of values for each class of data.

عرض الصف مجموعة من القيم المحددة لكل صف من البيانات.

clusters Subgroups of data.

تجمعات مجموعات فرعية من البيانات.

coefficient matrix A matrix that contains only the coefficients of a system of linear equations.

مصفوفة المعاملات مصفوفة تحتوي فقط على معاملات نظام المعادلات الخطية.

column matrix A matrix that has only one column.

مصفوفة عمود مصفوفة تحتوي على عمود واحد فقط.

combination An arrangement of objects in which order is not important.

توافيق تنظيم الأجسام بطريقة لا يكون الترتيب مهمًا فيها.

common difference The difference between successive terms of an arithmetic sequence.

فرق مشترك الفرق بين الحدود المتتابعة للمتتالية الحسابية.

common logarithm A logarithm with base 10, usually written $\log x$.

لوغاريتم عادي لوغاريتم يستخدم الأساس 10، ويكون اللوغاريتم المكتوب عادة بالشكل x.

common ratio The ratio of successive terms of a geometric sequence.

نسبة مشتركة نسبة الحدود المتتابعة في المتتالية الهندسية.

complement The complement of an event A consists of all the outcomes in the sample space that are not included as outcomes of event A.

متمم يتكون متمم الحدث A من جميع النواتج في فضاء العينة والتي تكون غير متضمنة على أنها من نواتج الحدث A.

completing the square A process used to make a quadratic expression into a perfect square trinomial.

إكمال المربع عملية تُستخدم لتحويل التعبير التربيعي إلى مربع كامل ثلاثي الحدود.

complex conjugates Two complex numbers of the form $a + bi$ and $a - bi$, where $b \neq 0$.

مترافقان مركبان (ص ع7، 124) عددان مركبان بأخذان الصورة $a + bi$ و $a - bi$، حيث $b \neq 0$.

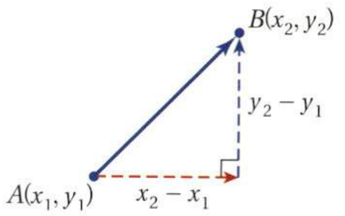
complex plane A plane used to graph complex numbers. The real component of a complex number is graphed on the horizontal and the imaginary component is graphed on the vertical axis.

مستوى مركب مستوى يستخدم في رسم الأعداد المركبة بيانيًا. يرسم المركب الحقيقي لعدد مركب بيانيًا على المستوى الأفقي ويرسم المركب التخيلي على المحور الرأسي.

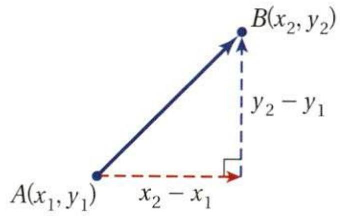
complex number Any number that can be written in the form $a + bi$, where a and b are real numbers and i is the imaginary unit.

عدد مركب أي عدد يمكن كتابته في الصورة $a + bi$. حيث a و b عددان حقيقيان ويمثل i الوحدة التخيلية.

component form A vector represented by its rectangular components. If the initial point of a vector is A(x 1, y 1) and the terminal point is at $B(x_2, y_2)$, the component form is given by $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$.



صورة مركبة متجه تمثله مركباته قائمة الزاوية. بما أن نقطة بداية المتجه هي $A(x_1, y_1)$ والنقطة الطرفية عند $B(x_2, y_2)$. إذن يتم الوصول إلى صورة المركب باستخدام $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$.



components Two or more vectors with a sum that is a given vector.

مركبات متجهان أو أكثر مجموعها عبارة عن المتجه المعطى.

composition The combining of functions by using the result of one function to evaluate a second function. The composition of function f with function g is defined by $[f \circ g](x) = f[g(x)]$.

مجموعة مركبة تجميع الدوال باستخدام ناتج دالة واحدة لتقدير دالة أخرى. تُحدَد مجموعة الدوال المركبة f مع الدالة g باستخدام $[f \circ g](x) = f[g(x)]$

confidence interval A specific interval estimate of a parameter in an experiment that can be found when the maximum error of estimate is added to and subtracted from the sample mean.

فترة الثقة تقدير محدد للفترة في معلمة تجربة ما يمكن إيجادها عند إضافة أقصى خطأ للتقدير إلى المتوسط الحسابي للعينة وطرحه منه.

confidence level The probability that the interval estimate will include the actual population parameter.

مستوى الثقة احتمال يفيد بأن تقدير الفترة سيتضمن معلمة فعلية للمجتمع الإحصائي.

conic section A figure that is formed when a plane intersects a double—napped right cone, also called a conic.

قطع مخروطي شكل يتكون عندما يقطع المستوى مخروطًا قائمًا مضاعفًا، ويسمى أيضًا *مخروطيًا*.

conjugate axis The segment that is perpendicular to the transverse axis of a hyperbola, passes through the center, and has a length of $2b$ units.

محور مرافق القطعة المستقيمة المتعامدة على المحور القاطع في القطع المكافئ، ويمر عبر المنتصف، ويبلغ طوله $2b$ من الوحدات.

Conjugate Root Theorem When a polynomial equation in one variable has a zero of the form $a + bi$, where $b \neq 0$, then its complex conjugate, $a - bi$, is also a root.

نظرية الجذر المرافق عندما تتضمن معادلة كثيرة الحدود في متغير واحد صفرًا في الصورة $a + bi$. حيث $b \neq 0$. فإن المرافق المركب لها، $a - bi$. يكون جذرًا كذلك.

consistent A system of equations that has at least one solution.

متوافق نظام معادلات له حل واحد على الأقل.

constant Describes a function f or an interval of a function in which for any two points, a positive change in x results in a zero change in $f(x)$.

ثابت يوضح الدالة f أو فترة في دالة يؤدي فيها التغيير الموجب في x لأي نقطتين إلى تغيير موجب في $f(x)$.

constant function A function of the form $f(x) = c$, where c is any real number.

دالة ثابتة دالة تأخذ الصورة $f(x) = c$ حيث يمثل c أي عدد حقيقي.

constraints Conditions given to variables in a two—dimensional linear programming problem, often expressed as a system of linear inequalities.

قيود الشروط المفروضة على المتغيرات في مسألة برمجة خطية ثنائية الأبعاد، والتي غالبًا ما يتم التعبير عنها باسم المتباينات الخطية.

continuity correction factor A correction for continuity that must be used when approximating a binomial distribution.

معامل تصحيح الاستمرارية تصحيح للاستمرارية واجب الاستخدام عند تقريب التوزيع ثنائي الحد.

continuous compound interest Interest that is reinvested continuously so that there is no waiting period between interest payments.

فائدة مركبة متصلة فائدة يعاد توظيفها باستمرار لكيلا يكون هناك أي فترة انتظار بين دفعات الفائدة.

continuous function A function that can be graphed with no breaks, holes, or gaps.

دالة متصلة دالة يمكن رسمها بيانيًا بدون فواصل أو فجوات أو فراغات.

continuous random variable A random variable that can take on an infinite number of possible values within a specified interval in a probability experiment.

متغير عشوائي متصل متغير عشوائي يمكن أن يأخذ عددًا لا نهائيًا من القيم المحتملة ضمن فترة محددة في تجربة الاحتمال.

converge If a sequence has a limit such that the terms approach a unique number, it is said to converge.

تقاربية إذا كان للمتتالية مدى ينتج عنه اقتراب الحدود من رقم فريد، فإنه يطلق عليه تقارب.

correlation An area of inferential statistics that involves determining whether a relationship exists between two variables.

ارتباط نطاق من الإحصاء الاستقرائي يتضمن تحديد العلاقة الموجودة بين متغيرين.

correlation coefficient A measure that determines the type and strength of the linear relationship between the variables in bivariate data.

معامل الارتباط قياس يحدد نوع العلاقة الخطية وقوتها بين المتغيرات في البيانات ذات المتغيرين.

cosecant In a right triangle with acute angle θ, the ratio comparing the length of the hypotenuse to the side opposite of θ. It is the reciprocal of the sine ratio, or $\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$.

قاطع التمام في المثلث قائم الزاوية الذي يحتوي على الزاوية الحادة θ. يمثل نسبة المقارنة بين طول الوتر والضلع المقابل للزاوية θ. ويكون معكوسًا لنسبة جيب الزاوية. أو $\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$.

cosine In a right triangle with acute angle θ, the ratio comparing the length of the side adjacent to θ and the hypotenuse.

جيب التمام في المثلث قائم الزاوية الذي يحتوي على الزاوية الحادة θ. يمثل نسبة المقارنة بين طول الضلع المجاور للزاوية θ والوتر.

cotangent In a right triangle with acute angle θ, the ratio comparing the length of the side adjacent to θ and the side opposite θ. It is the reciprocal of the tangent ratio, or $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$.

ظل التمام في المثلث قائم الزاوية الذي يحتوي على الزاوية الحادة θ. يمثل نسبة المقارنة بين طول الضلع المجاور للزاوية θ والضلع المقابل للزاوية θ. ويكون معكوسًا لنسبة ظل تمام الزاوية. أو $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$.

coterminal angles Angles in standard position that have the same initial and terminal sides, but different measures.

زوايا مشتركة في ضلع الانتهاء زاويا في الوضع القياسي لها أضلاع البداية والأضلاع الطرفية نفسها، لكنها ذات قياسات مختلفة.

co—vertices The endpoints of the minor axis of an ellipse.

رؤوس مرافقة نقاط النهاية للمحور الأصغر لقطع ناقص.

Cramer's Rule A method that uses determinants to solve square systems of linear equations.

قاعدة كرامر طريقة تستخدم المحددات لحل نظام المعادلات الخطية.

Glossary / القاموس

critical values The z–values that correspond to a particular confidence level.

قيم حرجة تمثل القيم z التي تتطابق مع مستوى الثقة المعين.

cross product If $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ and $b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$, the cross product of a and b is the vector $a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, i - (a_1 b_3 - a_3 b_1) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$.

الضرب التقاطعي بما أن $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ و $b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$. إذن يمثل الضرب الاتجاهي لـ a و b المتجه $a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2)i - (a_1 b_3 - a_3 b_1)j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k$.

cubic function A function of the form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, where $a \neq 0$, with parent function $f(x) = x^3$.

دالة تكعيبية دالة تأخذ الصورة $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ حيث $a \neq 0$. باستخدام الدالة الأصلية $f(x) = x^3$.

cumulative frequency The sum of a frequency and all frequencies of previous classes.

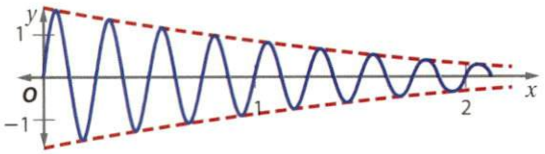
تكرار تراكمي مجموع التكرار وكل تكرارات الصفوف السابقة.

cumulative relative frequency The ratio of the cumulative frequency of the class to all the data

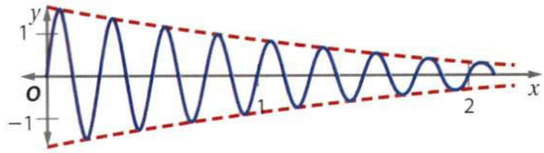
تكرار نسبي تراكمي نسبة التكرار التراكمي للصف إلى جميع البيانات

D

damped harmonic motion The motion of an object hose amplitude decreases with time due to friction.



الحركة التوافقية المتضائلة حركة جسم ما تنخفض سعته مع مرور الوقت بسبب الاحتكاك.



damped oscillation The reduction in amplitude of a sinusoidal wave of a damped trigonometric function.

تذبذب متضائل انخفاض في سعة الموجة الجيبية لدالة مثلثية متضائلة.

damped trigonometric function The function formed when a sinusoidal function $y = \sin bx$ or $y = \cos bx$ is multiplied by another function $y = f(x)$. A function of the form $y = f(x) \sin bx$ or $y = f(x) \cos bx$.

دالة مثلثية متضائلة دالة تنتج من ضرب دالة التموج الجيبي $y = \sin bx$ or $y = \cos bx$ في دالة أخرى $y = f(x)$. دالة تأخذ الصورة $y = f(x) \sin bx$ أو $y = f(x) \cos bx$.

damped wave A wave whose amplitude decreases, such as the graph of a damped trigonometric function.

موجة متضائلة موجة تنخفض سعتها، مثل الرسم البياني للدالة المثلثية المتضائلة.

damping factor In a damped trigonometric function of the form $y = f(x) \sin bx$ or $y = f(x) \cos bx$, $f(x)$ is the damping factor.

عامل التضاؤل في الدالة المثلثية المتضائلة التي تأخذ الصورة $y = f(x) \sin bx$ أو $y = f(x) \cos bx$. يمثل $f(x)$ عامل التضاؤل.

decreasing Describes a function f or an interval of a function in which for any two points, a positive change in x results in a negative change in $f(x)$.

تناقص يوضح الدالة f أو فترة في دالة ما يؤدي فيها تغيير موجب في x لأي نقطتين إلى تغيير سالب في $f(x)$.

definite integral An integral that has lower and upper bounds, given by $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x$.

تكامل محدود تكامل له حدود سفلى وعليا معطاة بواسطة $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x$

degenerate conic A point, a line, or two intersecting lines that are formed when a plane intersects the vertex of a double–napped right cone.

مخروط منحسر نقطة أو خط أو خطان متقاطعان تم تشكيل أي منها عند قطع المستوى لمخروط قائم مضاعف.

degrees of freedom (d.f.) Represent the number of values that are free to vary after a sample statistic is determined, and are equal to $n - 1$ in a sample of n values.

درجات الحرية (d.f.) تُمثل عدد القيم التي يمكن تغييرها بعد تحديد إحصاء العينة، وتكون مساوية لـ $n - 1$ في عينة القيم n.

dependent When a system of linear equations has an infinite number of solutions.

غير مستقل عندما يحتوي نظام المعادلات الخطية على عدد لا نهائي من الحلول.

dependent events Two or more events in which the outcome of one event affects the outcome of the other events.

أحداث غير مستقلة حدثان أو أكثر تؤثر نتيجة أحدهما في نتيجة الأحداث الأخرى.

dependent variable In a function, the variable, usually y, that represents any value in the range.

متغير غير مستقل في الدالة، يكون المتغير، عادة y، الذي يمثل أي قيمة في المجال.

depressed polynomial The quotient when a polynomial is divided by one of its binomial factors $x - c$.

كثير حدود منخفض حاصل القسمة عندما يتم قسمة كثير الحدود على أحد عوامله ثنائية الحد $x - c$.

derivative The derivative of the function $f'(x)$ is the function $f'(x)$ given by $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

مشتقة المشتقة من الدالة $f(x)$ هي الدالة $f'(x)$ المعطاة بواسطة $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Descartes' Rule of Signs A rule that gives information about the number of positive and negative real zeros of a polynomial function by looking at a polynomial's variations in sign.

قاعدة "ديكارت" للإشارات قاعدة توفر معلومات عن عدد الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة في دالة كثيرة الحدود عن طريق فحص إشارة التنوعات كثيرة الحدود.

determinant If $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, the determinant of A, written $\det(A)$ or $|A|$, is the difference of the product of the two diagonals of the matrix, or $ad - cb$. If $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, then $|B| = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

محدد إذا كان $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، فإن محدد A، يكتب $\det(A)$ أو $|A|$، هو فرق حاصل ضرب قطري المصفوفة، أو $ad - cb$. إذا كان $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ و $|B| = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

difference quotient Given a secant line through the points $(x, f(x))$ and $(x + h, f(x + h))$, the difference quotient is the slope of the line, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

حاصل قسمة الفرق بإعطاء الخط القاطع من خلال النقاط $(x, f(x))$ و$(x + h, f(x + h))$ فإن حاصل قسمة الفرق هو ميل الخط. $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

differential equation The result when finding the derivative of a function.

حاصل قسمة الفرق النتيجة عند حساب مشتق إحدى الدالات.

differential operator An operator such as $\frac{d}{dx}$, which specifies the action of taking the derivative of a function.

مشغل الفرق مشغل مثل $\frac{d}{dx}$، والذي يحدد إجراء اتخاذ مشتقة لإحدى الدوال.

differentiation The process of finding the derivative of a function.

تفاضل عملية العثور على مشتقة إحدى الدوال.

dilation A transformation in which the graph of a function is compressed or expanded vertically or horizontally.

تغيير الأبعاد بمقياس(التمدد) عملية تحويل ينضغط فيها الرسم البياني لدالة ما أو يتمدد رأسيًا أو أفقيًا.

dimensions A description of the number of rows and columns of a matrix.

أبعاد وصف عدد الصفوف والأعمدة الموجودة في مصفوفة.

direction The directed angle between the vector and the horizontal line that could be used to represent the positive x–axis.

اتجاه الزاوية الموجهة بين المتجه والخط الأفقي والتي يمكن استخدامها لتمثيل المحور الأفقي x الموجب.

directrix A specific line from which all points on a parabola are equidistant.

خط الدليل خط محدد تبعد جميع النقاط على القطع المكافئ بعدًا متساويًا عنه.

direct substitution A method of evaluating the limit of a polynomial or rational function $f(x)$ as x approaches c by finding $f(c)$.

بديل مباشر أسلوب لتقييم نطاق كثير الحدود أو الدالة التناسبية $f(x)$ بينما تقترب x من c عبر إيجاد $f(c)$.

discontinuous function A function that is not continuous.

دالة غير مستمرة دالة غير متصلة.

discrete random variable A random variable that can take on a finite number of possible values in a probability experiment.

متغير ثابت منفصل متغير عشوائي يمكن أن يأخذ عددًا نهائيًا من القيم المحتملة في تجربة الاحتمال.

diverge If a sequence does not have a limit, it is said to diverge.

تباعدية إذا لم تحتوِ المتتالية على حد، يطلق عليها اسم "متباعد".

dot product The dot product of vectors $a = \langle a_1, a_2 \rangle$ and $b = \langle b_1, b_2 \rangle$ is defined as $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2$.

حاصل الضرب العددي هو حاصل الضرب العددي للمتجهات $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ ويحدد $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ على أنه $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2$.

E

eccentricity A measure that determines how "circular" or "stretched" an ellipse will be. For any ellipse, $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ or $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$, where $c^2 = a^2 - b^2$, the eccentricity $e = \frac{c}{a}$.

انحراف مركزي هو مقياس يحدد كيف سيكون القطع الناقص "الدائري" أو "الممتد". بالنسبة إلى أي قطع ناقص، $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ أو $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ حيث $c^2 = a^2 - b^2$ $e = \frac{c}{a}$ الانحراف المركزي

element 1. Each object or number in a set. 2. Each entry in a matrix.

العنصر 1. يمثل كل كائن أو عدد في مجموعة. **2.** كل إدخال في مصفوفة.

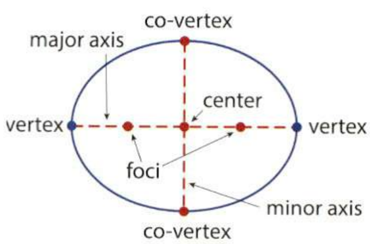
elementary row operations The operations shown below are used to transform an augmented matrix into an equivalent matrix.
- Interchange any two rows.
- Multiply one row by a nonzero real number.
- Add a multiple of one row to another row.

عمليات الصفوف الأولية تُستخدم العمليات التي تظهر أدناه في تحويل مصفوفة موسعة إلى مصفوفة مكافئة.
- مبادلة أي صفين.
- ضرب صف واحد في عدد حقيقي غير صفري.
- جمع مضاعف صف واحد على صف آخر.

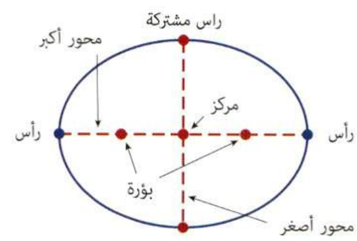
elimination method Eliminate one of the variables in a system of equations by adding or subtracting the equations.

طريقة الحذف هي طريقة يتم فيها حذف واحد من المتغيرات في نظام المعادلات عن طريق جميع المعادلات أو طرحها.

ellipse The locus of points in a plane such that the sum of the distances from two fixed points, called foci, is constant.

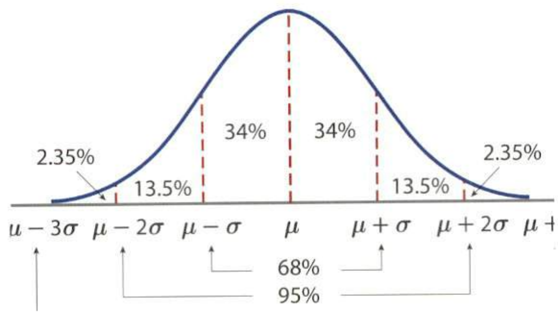


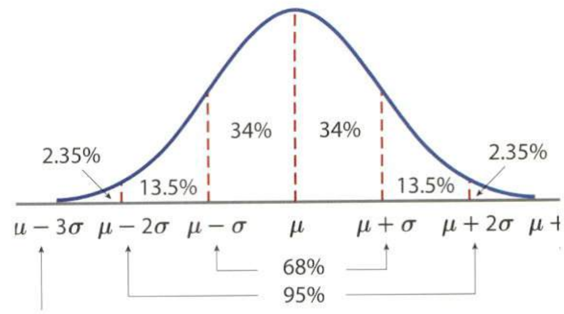
قطع ناقص عبارة عن محل هندسي للنقاط في سطح مستوٍ بحيث يكون مجموع أبعادها عن نقطتين ثابتتين في هذا المستوى، يطلق عليهما البؤرتان، ثابتاً.



empirical rule Describes areas under the normal curve over intervals that are one, two, and three standard deviations from either side of the mean. About 68% of the values are within one standard deviation of the mean, 95% are within two standard deviations from the mean, and 99.7% are within three standard .deviations of the mean

قاعدة تجريبية توضح المناطق أسفل المنحنى الطبيعي على فترات تمثل انحرافًا قياسيًا واحدًا أو انحرافين أو ثلاثة انحرافات من جانب المتوسط الحسابي. تكون نسبة 68% من القيم ضمن حدود انحراف قياسي واحد للمتوسط الحسابي. بينما تكون نسبة 95% ضمن حدود انحرافين قياسيين من المتوسط الحسابي. ونسبة 99.7% ضمن حدود ثلاثة انحرافات قياسية للمتوسط الحسابي.





empty set A set with no elements, symbolized by { } or ∅.

مجموعة خالية هي مجموعة لا تحتوي على عناصر. ويرمز لها بالرمز { } أو ∅.

end behavior Describes what happens to the value of f(x) as x increases or decreases without bound.

سلوك نهائي يوضح ما الذي يحدث للقيمة $f(x)$ عندما يزيد x أو ينخفض بدون حد.

equal matrices Two matrices that have the same dimensions and each element of one matrix is equal to the corresponding element of the other matrix.

مصفوفات متساوية عبارة عن مصفوفتين لهما الأبعاد نفسها وكل عنصر في إحدى المصفوفتين يساوي العنصر المطابق في المصفوفة الأخرى.

equivalent vectors Vectors that have the same magnitude and direction.

متجهات متكافئة هي متجهات لها نفس المقدار والاتجاه.

Euler's Formula For any real number θ, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

صيغة أويلر بالنسبة إلى أي عدد حقيقي θ. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

even function A function that is symmetric with respect to the y–axis.

دالة زوجية دالة متماثلة من حيث محور *الصادات*.

expected value The mean of the random variable in a probability distribution.

قيمة متوقعة عبارة عن المتوسط الحسابي لمتغير عشوائي في توزيع الاحتمال.

experiment A situation involving chance or probability that leads to specific outcomes.

تجربة عبارة عن موقف ما يتضمن فرصة أو احتمالية تؤدي إلى نتائج محددة.

explanatory variable The independent variable x in bivariate data.

المتغير التفسيري هو المتغير المستقل x في البيانات ذات المتغيرين.

exponential function A function of the form $f(x) = ab^x$, where x is any real number and a and b are real number constants such that $a \neq 0$, b is positive, and $b \neq 1$.

دالة أسية هي دالة تأخذ الصورة $f(x) = ab^x$. حيث x أي رقم حقيقي وa وb ثابتان للعدد الحقيقي بحيث $a \neq 0$. b موجب، و $b \neq 1$.

exponential series The power series that approximates e^x as $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$.

متسلسلة أسية عبارة عن متسلسلة الأس التي تقترب من e^x حيث e^x as $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$.

extended principle of mathematical induction Instead of verifying that P_n is true for $n = 1$, as in the principle of mathematical induction, instead verify that P_n is true for the first possible case.

المبدأ الممتد للاستنتاج الرياضي بدلاً من التحقق من أن P_n صحيح لـ $n = 1$. كما في مبدأ الاستنتاج الرياضي. تحقق من أن P_n صحيح للحالة الأولى المحتملة.

extraneous solution A solution that does not satisfy the original equation.

حل دخيل حل لا يحقق المعادلة الأصلية.

extrapolation To use the equation of the least–squares regression line to make predictions far outside the range of the x– values that were used to obtain the regression line.

استكمال خارجي استخدام معادلة مستقيم الانحدار ذات المربعات الأقل لجعل التنبؤات بعيدة عن مدى القيم x– المستخدمة في الحصول على مستقيم الانحدار.

extrema The maximum and minimum values of a function.

قيم قصوى القيم العظمى والصغرى لدالة معينة.

Glossary/ القاموس

factorial If n is a positive integer, then $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$

مضروب إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

feasible solutions The set of possible solutions of a system of inequalities in a linear programming problem, which are points of the form (x, y).

حلول ممكنة مجموعة من الحلول الممكنة لنظام التباين في مسألة برمجية خطية، والتي هي نقاط من الصيغة (x, y).

Fibonacci sequence A sequence in which the first two terms are 1 and each of the additional terms is the sum of the two previous terms.

متتالية فيبوناتشي متتالية يكون أول حدين فيها 1 ويكون كل حدٍ من الحدود التالية مساويًا لمجموع الحدين السابقين.

finite sequence A sequence that has a finite number of terms.

متتالية منتهية متتالية لها عدد متناهٍ من الحدود.

finite series The sum of the first n terms of a finite or infinite sequence.

متسلسلة منتهية مجموع أول n من الحدود المتتالية النهائية أو اللانهائية.

first differences Values obtained by subtracting each term in a sequence from its successive term.

فروق أولى القيم المتحصلة بواسطة طرح كل حد في متتالية من الحد التالي له.

five–number summary A statistic that includes the minimum value, lower quartile, median, upper quartile, and the maximum value of a data set.

ملخص من خمسة أعداد إحصاء يتضمن القيمة الدنيا والربع الأدنى والوسيط والربع الأعلى والقيمة القصوى لمجموعة بيانات.

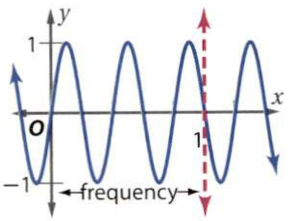
foci Two fixed points used to define an ellipse or hyperbola. See ***ellipse and hyperbola.***

البؤرتان عبارة عن نقاط ثابتة تستخدم في تحديد قطع ناقص أو قطع زائد. راجع ***القطع الناقص والقطع الزائد.***

focus See ***parabola, ellipse, hyperbola.***

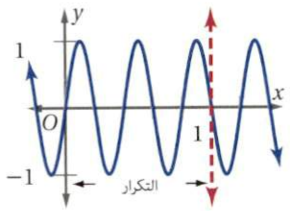
بؤرة راجع ***القطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد.***

frequency For a sinusoidal function, the number of cycles the function completes in a one unit interval. The frequency is the reciprocal of the period. For $y = a \sin(bx + c) + d$ and $y = a \cos(bx + c) + d$, frequency $= \frac{1}{\text{period}}$ or $\frac{|b|}{2\pi}$.



تكرار بالنسبة إلى الدالة الجيبية، يمثل عدد الدورات التي تكملها الدالة في فترة الوحدة الواحدة. التكرار هو معكوس الفترة. بالنسبة إلى $y = a \sin(bx + c) + d$، $y = a \cos(bx + c) + d$.

التكرار= $\frac{1}{\text{الدورة}}$ أو $\frac{|b|}{2\pi}$.



frequency distribution A table used to organize data by groups, classes or intervals.

توزيع التكرار هو جدول يُستخدم في تنظيم البيانات حسب المجموعات أو الدرجات أو الفترات.

function A relation that assigns to each element in the domain exactly one element in the range.

دالة علاقة قائمة على تعيين عنصر واحد في المدى لكل عنصر في المجال.

function notation An equation of y in terms of x can be rewritten so that $y = f(x)$. For example, $y = 4x$ can be written as $f(x) = 4x$.

رمز الدالة معادلة y في صورة x يمكن إعادة كتابتها بحيث $y = f(x)$. على سبيل المثال، يمكن كتابة $y = 4x$ على أنها $f(x) = 4x$.

Fundamental Theorem of Algebra A polynomial function of degree n, where $n > 0$, has at least one zero (real or imaginary) in the complex number system.

نظرية الجبر الأساسية عبارة عن دالة كثيرة الحدود من الدرجة n. حيث n أكبر من 0. وتحتوي على صفر واحد على الأقل (حقيقي أو تخيلي) في نظام الأعداد المركبة.

Fundamental Theorem of Calculus If f is continuous on $[a, b]$ and $F(x)$ is any antiderivative of $f(x)$, then
$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل إذا كان f مستمرًا على $[a, b]$ وكان $F(x)$ أي ضد اشتقاق من $f(x)$، فإن
$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

G

Gaussian elimination Using the operations below to transform a system of linear equations into an equivalent system.

- Interchange any two equations.
- Multiply one of the equations by a nonzero real number.
- Add a multiple of one equation to another equation.

حذف غاوس يتم باستخدام العمليات المذكورة أدناه لتحويل نظام المعادلات الخطية إلى نظام مكافئ:

- مبادلة أي معادلتين.
- ضرب إحدى المعادلات في عدد حقيقي غير صفري.
- جمع مضاعف معادلة واحدة على معادلة أخرى.

Gauss–Jordan Elimination Solving a system of linear equations by transforming an augmented matrix so that it is in reduced row–echelon form.

اختزال غاوس جوردان طريقة لحل نظام المعادلات الخطية بتحويلها إلى مصفوفة موسعة بحيث تكون في نموذج الصف المخفض.

geometric means The terms between two nonconsecutive terms of a geometric sequence.

وسط هندسي الحدود بين حدين غير متتاليين في متتالية هندسية.

geometric sequence A sequence in which the ratio between successive terms is a constant.

متتالية هندسية متتالية تتميز بثبات النسبة بين الحدود المتتابعة.

geometric series The sum of the terms of a geometric sequence.

متسلسلة هندسية مجموع حدود المتتالية الهندسية.

greatest integer function Has the parent function $f(x) = [\![x]\!]$, which is defined as the greatest integer less than or equal to x.

دالة أكبر عدد صحيح تحتوي على الدالة الأصلية $f(x) = [\![x]\!]$، والتي تحدد على أنها أكبر عدد صحيح أقل من x أو يساويه.

H

Heron's Formula If $\triangle ABC$ has side lengths a, b, and c, then the area of the triangle is $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, where $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

قاعدة هيرون إذا كان $\triangle ABC$ يحتوي على أطوال أضلاع a، b، و c، فإن مساحة المثلث تساوي $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$، حيث $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

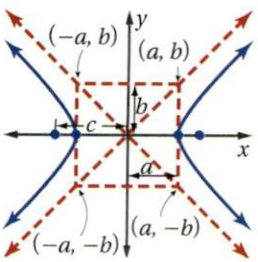
holes Removable discontinuities on the graph of a function that occur when the numerator and denominator of the function have common factors. The holes occur at the zeros of the common factors.

فجوات عبارة عن انفصالات قابلة للإزالة على الرسم البياني لدالة وتحدث عندما يحتوي بسط الدالة ومقامها على عوامل مشتركة. تحدث الفجوات في أصفار العوامل المشتركة.

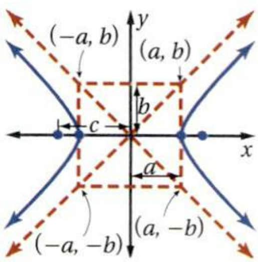
horizontal asymptote The line $y = c$ is a horizontal asymptote of the graph of f if $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$ or $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$.

خط مقارب أفقي يعد الخط $y = c$ خطًا مقاربًا أفقيًا في الرسم البياني لـ f إذا كان $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$.

hyperbola The set of all points in a plane such that the absolute value of the differences of the distances from two foci is constant.



قطع زائد مجموعة كل النقاط في المستوى بحيث تكون القيمة المطلقة للفرق بين المسافتين الواصلتين من بؤرتين ثابتة.



hypothesis test Assesses evidence provided by data about a claim concerning a population parameter.

اختبار الفرضية يعمل على تقييم الأدلة المقدمة من البيانات حول افتراض متعلق بمعلمة المجتمع الإحصائي.

I

identity An equation in which the left side is equal to the right side for all values of the variable for which both sides are defined.

تطابق معادلة يكون فيها الطرف الأيسر مساويًا للطرف الأيمن فيما يخص جميع قيم المتغير الذي يتم تحديد كل من الطرفين عن طريقه.

identity function The function $f(x) = x$, which passes through all points with coordinates (a, a).

دالة التطابق الدالة $f(x) = x$ التي تمر عبر كل النقاط باستخدام الإحداثيات (a, a).

identity matrix The identity matrix of order n, I n, is an n × n matrix consisting of all 1s on its main diagonal, from upper left to lower right, and 0s for all other elements. If A is an $n \times n$ matrix, then $AI_n = I_nA = A$.

مصفوفة محايدة مصفوفة محايدة تحمل الرتبة n، $I\ n$. وهي مصفوفة $n \times n$ تتألف من جميع وحدات 1s على قطرها الرئيسي، بداية من الجانب العلوي الأيسر وصولاً إلى الجانب السفلي الأيمن، وقيم 0s لجميع العناصر الأخرى. إذا كانA عبارة عن مصفوفة $n \times n$، فإن $AI_n = I_nA = A$.

imaginary axis The vertical axis of a complex plane on which the imaginary component of a complex number is graphed.

محور تخيلي هو المحور الرأسي لمستوى مركب يُرسم عليه المركب التخيلي لعدد مركب بيانيًا.

imaginary number Another name for a complex number of the form $a + bi$, when $b \neq 0$.

عدد تخيلي اسم آخر مخصص للعدد المركب يظهر بالشكل $a + bi$، عندما تكون $b \neq 0$.

imaginary part In an imaginary number $a + bi$, b is the imaginary part.

جزء تخيلي في العدد التخيلي $a + bi$، يمثل a الجزء التخيلي.

imaginary unit i, or the principal square root of -1.

وحدة تخيلية i، أو الجذر التربيعي الأساسي لـ 1−.

implied domain In a function with an unspecified domain, the set of all real numbers for which the expression used to define the function is real.

مجال مضمن في إحدى الدوال ذات المجال غير المحدد، تكون مجموعة كل الأعداد الحقيقية التي يستخدم التعبير لها من أجل تحديد الدالة حقيقية.

inconsistent A system of equations that has no solutions.

معادلة غير متوافقة نظام معادلات ليس له حلول.

increasing Describes a function f or an interval of a function in which for any two points, a positive change in x results in a positive change in $f(x)$.

تزايد يوضح الدالة f أو فترة في دالة ما يؤدي فيها التغيير الموجب في x لأي نقطتين إلى تغيير موجب في $f(x)$.

indefinite integral The indefinite integral of $f(x)$ is defined by $\int f(x)dx = F(x) + C$, where $F(x)$ is an antiderivative of $f(x)$ and C is any constant.

تكامل غير محدود هو تكامل غير محدد من $f(x)$ محدد بواسطة $\int f(x)dx = F(x) + C$. حيث $F(x)$ هو المشتق العكسي لـ $f(x)$ وC هو أي ثابت.

independent When a system of linear equations has exactly one solution.

مستقل عندما يحتوي نظام المعادلات الخطية على حل واحد فقط.

independent events Events that do not affect each other.

أحداث مستقلة أحداث ليس لها تأثير على بعضها.

independent variable In a function, the variable, usually x, that represents any value in the domain.

متغير مستقل في الدالة، هو المتغير x الذي يمثل أي قيمة في المجال.

indeterminate form An expression obtained when evaluating a limit that does not give enough information to determine the original limit.

نموذج مُبهم تعبير يظهر عند تقييم حدٍ لا يعطي معلومات كافية لتحديد الحد الأصلي.

inductive hypothesis In mathematical induction, assuming that something works for any particular case, or that assuming that P_k is true.

فرضية الاستقراء في الاستقراء الرياضي، هي الافتراض بأن شيئًا ما يعمل على حل أي مسألة معينة، أو الافتراض بأن P_k صحيح.

inductive step In mathematical induction, showing that something works for the case after P_k, or showing that P_{k+1} is true.

خطوة استقرائية في الاستقراء الرياضي، تُظهر أن شيئًا ما يعمل على حل المسألة بعد P_k، أو تُظهر أن P_{k+1} صحيح.

inferential statistics A sample of data is analyzed and conclusions are made about the entire population.

إحصاء استقرائي عبارة عن عينة من البيانات يجري تحليلها واستخلاص الاستنتاجات حول المجتمع الإحصائي بأكمله.

infinite discontinuity A characteristic of a function in which the absolute value of the function increases or decreases indefinitely as x–values approach c from the left and right.

انفصال لانهائي ميزة تتسم بها دالة ما تزداد فيها القيمة المطلقة للدالة أو تنخفض إلى ما لا نهاية حتى تقترب قيم x من c من اليسار واليمين.

infinite sequence A sequence that has infinitely many terms.

متتالية لا نهائية متتالية بها عدد لا نهائي من الحدود.

infinite series The sum of the terms of an infinite sequence.

متسلسلة لا نهائية مجموع الحدود لمتتالية لا نهائية.

influential An individual data point that substantially changes a regression line.

فعّال نقطة بيانات فردية تغير من خط الانحدار تغييرًا جوهريًا.

initial point The starting point of a vector that is represented by a directed line segment. Also known as the tail of the vector.

نقطة البداية هي نقطة البداية لمتجه يتم تمثيلها بواسطة قطعة مستقيمة موجهة. تسمى أيضًا باسم *ذيل* المتجه.

initial side The starting position of a ray when forming an angle.

ضلع الابتداء موقع بدء الشعاع عند تكوين زاوية ما.

instantaneous rate of change For the graph of $f(x)$, the slope m of the line tangent at the point $(x, f(x))$ given by $m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, provided the limit exists.

معدل التغير اللحظي للرسم البياني $f(x)$، هو الميل m لخط المماس عند النقطة $(x, f(x))$ معطى بواسطة $m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. يوفّر الحد الموجود.

instantaneous velocity The velocity achieved at a specific=point in time.

سرعة لَحْظِيّة هي السرعة المتجهة المحققة عند نقطة زمنية محددة.

integration The process of evaluating an integral.

ايجاد قيمة عملية تقييم تكامل ما.

interpolation To use the equation of the least–squares regression line to make predictions over the range of the data.

استكمال داخلي يقصد به استخدام معادلة مستقيم الانحدار ذات المربعات الأقل لوضع التوقعات على مدى البيانات.

interquartile range The range of the middle half of a set of data. It is the difference between the upper quartile and the lower quartile.

مدى رُبعي يمثل مدى النصف الأوسط من مجموعة بيانات. وهو الفرق بين الرُّبع الأعلى والرُّبع الأدنى.

intersection The intersection of sets A and B is all elements found in both A and B, written as $A \cap B$.

تقاطع تقاطع المجموعتين A وB ويشمل كل العناصر الموجودة في كل من A وB، ويُكتب بالشكل $A \cap B$

interval A data value or group of data values.

فترة قيمة البيانات أو مجموعة من قيمة البيانات.

interval estimate A range of values used to estimate an unknown population parameter.

تقدير الفترة عبارة عن مجموعة من القيم المستخدمة في تقدير معلمة المجتمع الإحصائي المجهولة.

interval notation An expression that uses inequalities to describe subsets of real numbers.

رمز الفترة تعبير يستخدم المتباينات لتوضيح المجموعات الفرعية للأعداد الحقيقية.

inverse Let A be an $n \times n$ matrix. If there exists a matrix B such that $AB = BA = I_n$, then B is called the inverse of A and is written as A^{-1}.

معكوس بفرض أن A يمثل المصفوفة $n \times n$. إذا كانت هناك مصفوفة B بحيث $AB = BA = I_n$. فعندئذٍ يُسمى B معكوسًا لـ A ويُكتب بالشكل A^{-1}

inverse cosine If θ is an acute angle and $\cos \theta = x$, then the inverse cosine of x, or $\cos^{-1} x$, is the measure of angle θ.

معكوس جيب التمام إذا كانت θ زاوية حادة و$\cos \theta = x$. فعندئذٍ يكون معكوس جيب التمام x. أو $\cos^{-1} x$. هو قياس الزاوية θ.

inverse function Two functions f and f^{-1} are inverse functions if and only if $f[f^{-1}(x)] = x$ for every x in the domain of $f^{-1}(x)$, and $f^{-1}[f(x)] = x$ for every x in the domain of $f(x)$.

دالة عكسية عبارة عن دالتين f وf^{-1} يمثلان دالتين عكسيتين فقط إذا كان $f[f^{-1}(x)] = x$ لكل x في مجال $f^{-1}(x)$، و$f^{-1}[f(x)] = x$ لكل x في مجال $f(x)$.

Glossary/ القاموس

inverse matrix The multiplicative inverse of a square matrix. The product of a matrix A and its inverse A −1 must equal the identity matrix I_n.

inverse relation Two relations are inverse relations if and only if one relation contains the element (b, a) whenever the other relation contains the element (a, b).

inverse sine If θ is an acute angle and $\sin \theta = x$, then the inverse sine of x, or $\sin^{-1} x$, is the measure of angle θ.

inverse tangent If θ is an acute angle and $\tan \theta = x$, then the inverse tangent of x, or $\tan^{-1} x$, is the measure of angle θ.

inverse trigonometric function The inverse sine of x or $\sin^{-1} x$, the inverse cosine of x or $\cos^{-1} x$, and the inverse tangent of x or $\tan^{-1} x$.

invertible matrix A matrix that has an inverse.

irreducible over the reals A quadratic expression that has real coefficients but no real zeros associated with it.

jump discontinuity A characteristic of a function in which the function has two distinct limit values as x− values approach c from the left and right.

مصفوفة عكسية هي المعكوس الضربي لمصفوفة تربيعية. يجب أن يكون حاصل ضرب المصفوفة A ومعكوسها A^{-1} مساويًا للمصفوفة المتطابقة I_n.

علاقة عكسية تكون العلاقتان عكسيتين فقط إذا كانت إحداهما تحتوي على العنصر (b, a) والأخرى تحتوي على العنصر (a, b).

معكوس الجيب إذا كانت θ زاوية حادة وكان $\sin \theta = x$، فعندئذٍ يكون معكوس الجيب لـ x، أو $\sin^{-1} x$، هو قياس الزاوية θ.

معكوس ظل الزاوية إذا كانت θ زاوية حادة و$\tan \theta = x$، فعندئذٍ يكون معكوس ظل الزاوية لـ x، أو $\tan^{-1} x$، هو قياس الزاوية θ.

دالة مثلثية عكسية معكوس الجيب لـ x أو $\sin^{-1} x$، بينما معكوس جيب التمام لـ x أو $\cos^{-1} x$، ومعكوس ظل الزاوية لـ x أو $\tan^{-1} x$.

مصفوفة قابلة للعكس هي مصفوفة لها معكوس.

جذور حقيقية غير قابلة للتبسيط تعبير تربيعي يحتوي على معاملات حقيقية لكن بدون أصفار حقيقية مقترنة به.

عدم الاتصال القفزي ميزة تتسم بها الدالة وتحتوي فيها على قيمتي حدودٍ متميزتين عندما تقترب قيم x من c من اليسار واليمين.

latus rectum The line segment that passes through the focus of a parabola, is perpendicular to the axis of symmetry, and has endpoints on the parabola.

وتر بؤري عمودي هو الوتر المار ببؤرة القطع المكافئ، والمتعامد على محور التناظر، وله نقاط نهاية على القطع المكافئ.

Law of Cosines If $\triangle ABC$ has side lengths a, b, and c representing the lengths of the sides opposite the angles with measures A, B, and C, respectively. Then the following are true.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

قانون جيب التمام إذا كان $\triangle ABC$ يحتوي على أطوال أضلاع a وb وc تمثل أطوال الأضلاع المقابلة للزوايا ذات القياسات A وB وC، على التوالي. إذن فإن ما يلي صحيح.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Law of Sines If $\triangle ABC$ has side lengths a, b, and c representing the lengths of the sides opposite the angles with measures A, B, and C, respectively, then $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

قانون الجيب إذا كان $\triangle ABC$ يحتوي على أطوال أضلاع a وb وc مع تمثيل أطوال الأضلاع مواجهة للزاوية ذات القياس A وB وC، على التوالي. فإن $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

leading coefficient In a polynomial function, the coefficient of the variable with the greatest exponent.

معامل رئيسي في الدالة كثيرة الحدود، يكون هو معامل المتغير ذو الأس الأكبر.

leading term test Uses the power and coefficient of the leading term of a polynomial to determine the end behavior of a polynomial function.

اختبار حد رئيسي يستخدم قدرة ومُعامل الحد الرئيسي لكثيرة الحدود لتحديد السلوك النهائي لدالة كثيرة الحدود.

least-squares regression line The line for which the sum of the squares of the residuals is at a minimum.

خط انحدار ذو مربعات أقل الخط الذي يكون مجموع مربعات القيم المتبقية له عند الحد الأدنى.

left-tailed test The hypothesis test if $H_a: \mu < k$.

اختبار الذيل المتجه إلى اليسار يقصد به اختبار الفرضية إذا كان $H_a: \mu < k$.

level of significance The maximum allowable probability of committing a Type I error, denoted α.

مستوى الدلالة الحد الأقصى المسموح به لاحتمال ارتكاب خطأ من النوع الأول. ويرمز له بـ α.

lemniscates The graph of a polar equation of the form $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ or $r^2 = a^2 \sin 2\theta$.

منحنى ذو عروتين الرسم البياني للمعادلة القطبية في الصورة $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ أو $r^2 = a^2 \sin 2\theta$.

limaçon The graph of a polar equation of the form $r = a \pm b \cos \theta$ or $r = a \pm b \sin \theta$, where a and b are both positive.

منحنى قلبي الشكل الرسم البياني للمعادلة القطبية في الصورة $r = a \pm b \cos \theta$ أو $r = a \pm b \sin \theta$، حيث يكون a وb عددين موجبين.

limit The unique value that a function approaches as x-values of the function approach c from the left and right sides.

النهاية القيمة الفريدة التي تقترب منها دالة حيث تقترب قيم x للدالة من c من الجانب الأيسر والجانب الأيمن.

linear combination The sum of two vectors, each multiplied by a scalar, that is used to represent a vector with a given initial point and terminal point.

تركيب خطي مجموع متجهين يتم ضرب كل منهما في كمية عددية تستخدم لتمثيل متجه ما بنقطتي بداية ونهاية محددتين.

Linear Factorization Theorem If $f(x)$ is a polynomial function of degree $n > 0$, then f has exactly n linear factors and $f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)$, where a_n is some nonzero real number and $c_1, c_2, \ldots, c_n$ are the complex zeros (including repeated zeros) of f.

نظرية تحليل العوامل الخطية إذا كانت $f(x)$ هي دالة درجة كثيرة الحدود $n > 0$. إذن f لديها العوامل الخطية n بالضبط و $f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \quad (x - c_n)$. حيث a_n هي عدد حقيقي غير صفري و$c_1, c_2, . . c_n$ هي الأصفار المركبة (بما في ذلك الأصفار المتكررة) لـ f.

linearize Transform data so that they appear to cluster about a line by applying a function to one or both of the variables in the data set.

ظهور الشيء في صورة خطية تحويل البيانات بحيث تشير إلى تجمع يتعلق بخط معين عن طريق تطبيق دالة على أحد المتغيرين في مجموعة البيانات أو كليهما.

linear programming The process of finding a minimum or maximum value of a linear function for a region defined by linear inequalities.

برمجة خطية عملية إيجاد القيم القصوى أو الدنيا للدالة الخطية لمنطقة محددة على المتباينات الخطية.

linear speed The rate at which an object moves along a circular path.

سرعة خطية المعدل الذي يتحرك عنده جسم ما على امتداد مسار دائري.

line of best fit A line drawn through a set of data points that describes how the response variable y changes as the explanatory variable x changes. Also called a ***regression line***.

مستقيم أفضل تمثيلاً مستقيم مرسوم من خلال مجموعة من نقاط البيانات التي توضح كيف يتغير متغير الاستجابة y كلما تغير المتغير التفسيري x. ويطلق عليه أيضًا ***خط الانحدار***.

line symmetry Describes graphs that can be folded along a line so that the two halves match exactly.

تناظر محوري يوضح التمثيلات البيانية التي يمكن رسمها بشكل منحنٍ على مستقيم معين بحيث يتطابق نصفا التمثيل تمامًا.

locus A set of all points that fulfill a geometric property.

محل هندسي مجموعة من كل النقاط التي تحقق خاصية هندسية.

logarithm In the function $x = b^y$, y is called the logarithm, base b, of x. Usually written as $y = \log_b x$ and is read ***log base b of x***.

لوغاريتم في الدالة $x = b^y$، تسمى y اللوغاريتم، وb هي الأساس، لـ x. وعادة ما يُكتب $y = \log_b x$ ويُقرأ ***أساس اللوغاريتم b لـ x***.

logarithmic function with base *b* A function of the form $y = \log_b x$, where $b > 0$, $b \neq 1$, and $x > 0$, which is the inverse of the exponential function of the form $b^y = x$.

دالة لوغاريتمية ذات الأساس b دالة للصيغة $y = \log_b x$، حيث $b > 0$ و$b \neq 1$ و $x > 0$. الذي يكون معكوس الدالة الأسية للصيغة $b^y = x$.

logistic growth function A function that models exponential growth with limiting factors. Logistic growth functions are bounded by horizontal asymptotes $y = 0$ and $y = c$., where c is the limit to growth.

دالة النمو اللوجستيكي دالة تمثل النمو الأسي بعوامل محدّدة. وتتقيد دوال النمو اللوجستية بخطوط مقاربة أفقية $y = 0$ و$y = c$، حيث c هي حد النمو.

lower bound A real number a that is less than or equal to the least real zero of a polynomial function.

حد أدنى عدد حقيقي a أقل من أو يساوي صفر حقيقي لدالة كثيرة الحدود.

lower limit The lower bound of a definite integral.

حد أدنى الحد الأدنى لتكامل محدد.

M

magnitude The length of the directed line segment that represents the vector.

مقدار طول القطعة المستقيمة الموجهة التي تمثل المتجه.

major axis The segment that contains the foci of an ellipse and has endpoints on the ellipse.

محور أكبر القطعة التي تتضمن بؤرتي القطع الناقص ولديها نقاط نهاية عليه.

matrix Any rectangular array of variables or constants in horizontal rows and vertical columns.

مصفوفة أي مصفوفة مستطيلة للمتغيرات أو الثوابت في صفوف أفقية وأعمدة رأسية.

maximum For a function f, the greatest value of $f(x)$. A critical point on the graph of a function where the curve changes from increasing to decreasing.

القيمة العظمى بالنسبة إلى الدالة f، القيمة الكبرى لـ $f(x)$. والنقطة الحرجة الممثلة على الرسم البياني لدالة ما يتغير فيها المنحنى ويتجه من التزايد إلى التناقص.

maximum error of estimate The maximum difference between the point estimate and the actual value of the parameter in an experiment.

أقصى خطأ للتقدير أقصى قيمة للفرق بين تقدير النقطة والقيمة الفعلية للمعلمة في تجربة ما.

mean The sum of numbers in a set of data divided by the number of items in the data set.

متوسط حسابي مجموع الأعداد في مجموعة البيانات المقسومة على عدد عناصر المجموعة.

measure of central tendency A number that represents the center or middle of a set of data.

مقاييس النزعة المركزية العدد الذي يمثل مركز مجموعة البيانات أو منتصفها.

measures of spread **(or variation)** A representation of how spread out or scattered a set of data is.

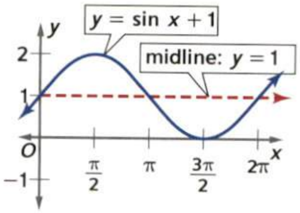
مقاييس الانتشار (أو التنوع) تمثيل لمدى انتشار مجموعة البيانات أو تبعثرها.

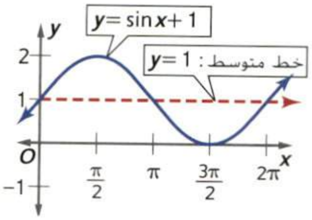
median The middle number in a set of data when the data are arranged in numerical order. If the data set has an even number, the median is the mean of the two middle numbers.

وسيط العدد الأوسط في مجموعة البيانات عند ترتيب البيانات ترتيبًا عدديًا. وإذا كانت البيانات ذات عدد فردي، فالوسيط هو متوسط العددين الأوسطين.

midline A horizontal axis that is the reference line about which the graph of a sinusoidal function oscillates.

خط متوسط محور أفقي يمثل خطًا مرجعيًا يتذبذب حوله الرسم البياني للدالة الجيبية.





minimum For a function f, the least value of $f(x)$. A critical point on the graph of a function where the curve changes from decreasing to increasing.

القيمة الصغرى بالنسبة إلى دالة f، تبلغ القيمة الصغرى لـ $f(x)$. نقطة حرجة ممثلة على الرسم البياني لدالة ما يتغير فيها المنحنى من التناقص إلى التزايد.

minor axis The segment through the center of an ellipse that is perpendicular to the major axis and has endpoints on the ellipse.

محور أصغر القطعة المستقيمة الواصلة من منتصف القطع الناقص والتي تتقاطع مع المحور الأكبر ولديها نقطة نهاية على القطع الناقص.

mode The number(s) that appear most often in a set of data.

منوال العدد (الأعداد) الأكثر تكرارًا في مجموعة من البيانات.

modulus The absolute value of a complex number, the number r when a complex number is written in the form $r\ (\cos\theta + i\sin\theta)$.

معامل القيمة المطلقة لعدد مركب. يساوي العدد r عند كتابة عدد مركب في الصورة $r\ (\cos\theta + i\sin\theta)$.

monomial function A function that can be written as $f(x) = a$ or $f(x) = ax^n$, where a and n are nonzero constant real numbers.

دالة أحادية الحد الدالة التي يمكن كتابتها في الصورة $f(x) = a$ أو $f(x) = ax^n$، حيث a وn عددان حقيقيان ثابتان غير صفريين.

multiple optimal solutions Solutions that occur when the graph of the equation related to the objective function f to be optimized is coincident with one side of the region of feasible solutions.

حلول مثلى متعددة الحلول التي تحدث عندما يكون التمثيل البياني للدالة المرتبط بدالة الهدف f التي سيتم تحسينها متطابقًا مع جانب واحد من منطقة الحلول الممكنة.

multiplicity If $(x - c)^m$ is the highest power of $(x - c)$ that is a factor of polynomial function f, then c is a zero of multiplicity m of f, where m is a natural number.

تعدد إذا كان $(x - c)^m$ يمثل أعلى قدرة لـ $(x - c)$ الذي هو عامل لدالة f كثيرة الحدود، فإن c تساوي صفر التعدد m لـ f حيث m عدد طبيعي.

multivariable linear system A system of linear equations in two or more variables, also called a ***multivariate*** linear system.

نظام خطي متعدد المتغيرات نظام يمثل المعادلات الخطية في متغيرين أو أكثر، ويطلق عليه أيضًا *النظام الخطي* متعدد البدائل.

N

natural base The irrational number e, which is approximately equal to 2.718281828....

أساس طبيعي عدد غير نسبي يرمز له بالرمز e، وتساوي قيمته حوالي 2.718281828....

natural logarithm A logarithm with base e, written ln x.

لوغاريتم طبيعي لوغاريتم يحتوي على الأساس e، وتتم كتابته بالشكل ln x.

negatively skewed distribution In a data distribution, the mean is less than the median, the majority of the data are on the right, and the tail extends to the left.

توزيع ملتوٍ التواءً سالبًا في توزيع البيانات، يكون المتوسط الحسابي أقل من الوسيط، وتكون غالبية البيانات على الجانب الأيمن، ويمتد الذيل إلى الجانب الأيسر.

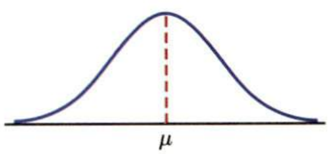
nonremovable discontinuity Describes infinite and jump discontinuities because they cannot be eliminated by redefining the function at that point.

انفصال غير قابل للإزالة يوضح الانقطاعات اللانهائية وانقطاعات القفز نظرًا لتعذر تجاهلها عن طريق إعادة تحديد الدالة عند تلك النقطة.

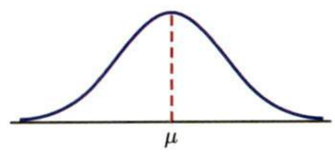
nonsingular matrix A matrix that has an inverse.

مصفوفة منفردة مصفوفة لديها معكوس.

normal distribution A continuous probability distribution in which the graph of the curve is bell-shaped and symmetric with respect to the mean; the mean, median, and mode are equal and located at the center. The curve is continuous and approaches, but never touches, the x-axis; the total area under the curve is equal to 1 or 100%.



توزيع طبيعي توزيع احتمال متواصل يأخذ فيه الرسم البياني للمنحنى شكل جرس ويكون متماثلاً من حيث المتوسط الحسابي؛ والمتوسط الحسابي والوسيط والمنوال كلها متساوية وتقع في المنتصف. المنحنى مستمر ويقترب من محور *السينات* ولكنه لا يمسه؛ بينما تساوي المساحة الكلية أسفل المنحنى 1 أو 100%.



nth partial sum The sum of the first n terms of a finite or infinite series.

مجموع جزئي للعدد n مجموع الفترات الأولى للعدد n في متسلسلة نهائية أو لانهائية.

nth root For any real numbers a and b, and any positive integer n, if $a\ n = b$, then a is an nth root of b.

جذر نوني (nth) بالنسبة إلى العددين الحقيقيين a وb، وأي عدد صحيح موجب n. إذا كان العدد $a^{n} = b$. فعندئذٍ a يساوي الجذر النوني (nth) للعدد b.

null hypothesis One of two hypotheses that need to be stated to test a claim; states that there is not a significant difference between the sample value and the population parameter. The null hypothesis contains a statement of equality such **as** $\geq$, $=$, or $\leq$.

فرضية العدم فرضية من اثنتين تفيد بضرورة إثبات صحة افتراض ما؛ وتنص على عدم وجود فرق ملحوظ بين قيمة العينة ومعلمة المجتمع الإحصائي. تتضمن فرضية العدم عبارة مساواة مثل أكبر من أو يساوي أو يساوي أو أقل من أو يساوي.

O

objective function A linear function of the form $f(x, y) = ax + by + c$ to be optimized in a two-dimensional linear programming problem.

دالة الهدف دالة خطية للصيغة $f(x, y) = ax + by + c$ تحسينها في مسألة برمجة خطية ثنائية الأبعاد.

oblique asymptote An asymptote that is neither horizontal nor vertical that occurs when the degree of the numerator of a rational function is exactly one more than the degree of the denominator. Also called a ***slant asymptote***.

خط مقارب مائل خط مقارب ليس أفقيًا أو رأسيًا ينتج عندما تكون درجة البسط في دالة نسبية أكبر من درجة المقام بمقدار الضعف تمامًا. يُطلق عليه أيضًا *الخط المقارب الجانبي*.

oblique triangle A triangle that is not a right triangle.

مثلث مائل مثلث غير قائم الزاوية.

octants Eight regions into which the three axes of a three-dimensional coordinate system divide space.

ثُمن مكون من ثمانية قطاعات بداخلها ثلاثة محاور في مساحة مقسمة في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد.

odd function A function that is symmetric with respect to the origin.

دالة فردية دالة متماثلة من حيث الأصل.

one-sided limit The limit L_1 of $f(x)$ as x approaches c from the left or the limit $L2$ of $f(x)$ as x approaches c from the right.

حد أحادي الجانب الحد L_1 لـ $f(x)$ حيث يقترب x من c من الشمال أو الحد L_2 لـ $f(x)$ حيث يقترب x من c من اليمين.

one-to-one 1. A function in which no x-value is matched with more than one y-value and no y-value is matched with more than one x-value. 2. A function whose inverse is a function.

واحد إلى واحد 1. عبارة عن دالة لا تتطابق فيها قيمة محور *السينات* مع أكثر من قيمة على محور *الصادات* ولا تتطابق فيها قيمة محور *الصادات* مع أكثر من قيمة على محور *السينات*. 2. دالة يكون معكوسها بمثابة دالة.

opposite vectors Vectors that have the same magnitude but opposite direction.

متجهات متعاكسة متجهات لها المقدار نفسه لكنها متضادة الاتجاه.

optimization The process of finding a minimum or maximum value for a specific quantity, usually to minimize costs in order to maximize profits in business.

بحث عن الحل الأمثل عملية إيجاد القيمة القصوى أو الدنيا لكمية معينة، وغالبًا ما يكون ذلك لتقليل التكاليف إلى أدنى حد بهدف زيادة الأرباح إلى أقصى حد في الشركة.

ordered triple Coordinates of the location of a point in space given by real numbers (x, y, z).

ثلاثي مُرتب عبارة عن إحداثيات لموقع نقطة ما في المساحة المحددة بواسطة الأعداد الحقيقية (x, y, z).

orientation Plotting points of parametric equations in the order of increasing values of t traces the curve in a specific direction of the curve.

توجيه رسم نقاط المعادلات الوسيطية في ترتيب قيم t المتزايدة يتبع المنحنى في اتجاه معين من المنحنى.

orthogonal Two vectors with a dot product of 0.

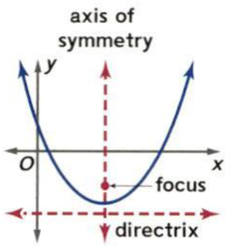
متعامد عبارة عن متجهين يكون حاصل الضرب العددي لهما 0.

outliers Data that are more than 1.5 times the interquartile range beyond the upper and lower quartiles.

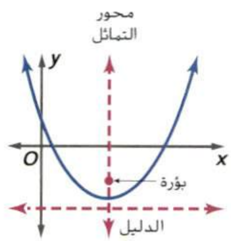
قيم متطرفة بيانات تكون أكبر بمقدار مرة ونصف من المدى بين الربعين فوق الأرباع العليا والدنيا.

P

parabola The locus of points in a plane that are equidistant from a fixed point, called the focus, and a specific line, called the directrix.



قطع مكافئ محل هندسي للنقاط في سطح مستوٍ متساوي البعد من نقطة ثابتة، يطلق عليها البؤرة، ومستقيم معين، يطلق عليه الدليل.



parallelepiped A polyhedron with faces that are all parallelograms.

متوازي السطوح مجسم متعدد الوجوه تأخذ كل وجوهه شكل متوازي الأضلاع.

parallelogram method A method of finding the resultant vector by translating one vector so that its tail touches the tail of another. A parallelogram is drawn and the diagonal is the resultant vector.

طريقة متوازي الأضلاع طريقة لاكتشاف المتجه الناتج عن طريق نقل متجه واحد بحيث يلامس ذيله ذيل المتجه الآخر. يتم رسم متوازي الأضلاع ويعد القطر فيه متجهًا ثابتًا.

parallel vectors Vectors that have the same or opposite direction, but not necessarily the same magnitude.

متجهات متوازية متجهات لها الاتجاه نفسه أو اتجاه معاكس، لكن ليس بالضرورة المقدار نفسه.

parameter **1.** Arbitrary values, usually time or angle measurement, used in parametric equations. **2.** A measure that describes a characteristic of a population.

معلمة **1.** القيم المطلقة عبارة عن قياس زمني أو قياس بالزاوية عادة وتستخدم في المعادلات الوسيطية. 2. نظام قياس يصف سمة المجتمع الإحصائي.

parametric curve If f and g are continuous functions, then the set of ordered pairs $(f(t), g(t))$ is a plane curve with $x = f(t)$ and $y = g(t)$ as the parametric equations and t as the parameter.

منحنى وسيطي إذا كانت f وg دالتين متصلتين، فإن مجموعة الأزواج المرتبة $(f(t), g(t))$ تكون منحنى مستو يكون فيه $x = f(t)$ و$y = g(t)$ كمعادلات وسيطية وt كمعلمة.

parametric equation An equation that can express the position of an object as a function of time.

معادلة وسيطية معادلة تستطيع أن تعبر عن موقع جسم ما على أنه دالة زمنية.

parent function The simplest function in a family of functions. A function that is transformed to create other members in a family of functions.

دالة أصلية الدالة الأبسط في مجموعة الدوال. دالة تتحول لإنشاء أعضاء آخرين في مجموعة الدوال.

partial fraction When a rational function is written as the sum of two fractions with denominators that are linear factors of the original denominator, each fraction in the sum is a partial fraction.

partial fraction decomposition A rational expression rewritten as the sum of two simpler rational expressions.

Pascal's triangle A triangular array of numbers such that the first and last numbers in each row are 1 and every other number is formed by adding the two numbers immediately above that number in the previous row. The $(n+1)$th row contains the coefficients of the terms of the expansion $(a+b)^n$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$.

percentile graph Uses the same values as a cumulative relative frequency graph, except that the proportions are instead expressed as percents.

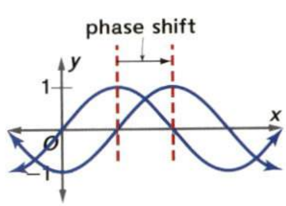
percentiles Divide a distribution into 100 equal groups and are symbolized by P 1, P 2, P 3, ..., P 9_9. The nth percentile or P_n, is the value such that n% of the data are lower than P n.

period For a function $y = f(t)$, the smallest positive number c for which $f(t+c) = f(t)$.

periodic function A function with values that repeat at regular intervals. There exists a positive real number c such that $f(t+c) = f(t)$ for all values of t in the domain of f.

permutation An arrangement of objects in which order is important.

phase shift For a sinusoidal function, the difference between the horizontal position of a function and that of an otherwise similar sinusoidal function. For $y = a\sin(bx+c)+d$ and $y = a\cos(bx+c)+d$,, phase shift $= -\frac{c}{|b|}$.



piecewise-defined function A function that is defined using two or more expressions for different intervals of the domain.

point estimate A single value estimate of an unknown population parameter.

point symmetry Describes graphs that can be rotated 180° with respect to a point and appear unchanged.

polar axis An initial ray from the pole in the polar coordinate system, usually horizontal and directed toward the right.

polar coordinates Describes the location of a point $P(r, \theta)$ in the polar coordinate system, where r is the directed distance from the pole O to the point and θ is the directed angle from the polar axis to $\overrightarrow{OP}$.

كسر جزئي عند كتابة دالة نسبية في صورة مجموع كسرين مقامهما عوامل خطية للمقام الأصلي، يكون كل كسر في المجموع كسرًا جزئيًا.

تفكيك كسري جزئي تعبير نسبي تُعاد كتابته في صورة مجموع تعبيرين نسبيين في صورة أبسط.

مثلث باسكال مصفوفة ثلاثية الزوايا تتألف من أعداد بحيث تكون الأعداد الأولى والأخيرة في كل صف تساوي 1 ويتم تكوين كل عدد آخر عن طريق جمع عددين فوق ذلك العدد مباشرة في الصف السابق. يحتوي صف العدد $(n+1)$ على معاملات فترات التمديد $(a+b)^n$ لـ $n = 0, 1, 2, \ldots$.

رسم بياني مئوي تُستخدم فيه القيم نفسها على أنها رسم بياني ذو تكرار نسبي تراكمي، إلا أن النسب يتم التعبير عنها بدلاً من ذلك بالنسب المئوية.

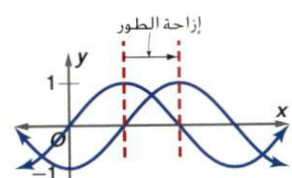
نسب مئوية ينقسم التوزيع إلى 100 مجموعة متساوية ويرمز لها بالرمز $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{99}$. نسبة مئوية للعدد n أو P_n، هي القيمة بحيث يكون n% من البيانات أقل من P_n.

دورة بالنسبة إلى الدالة $y = f(t)$، أصغر عدد صحيح موجب هو c تكون فيه $f(t+c) = f(t)$.

دالة دورية دالة ذات قيم تتكرر على فترات زمنية منتظمة. يوجد بها عدد حقيقي موجب c بحيث تكون $f(t+c) = f(t)$ لجميع قيم t الموجودة في مجال f.

التباديل ترتيب الأشياء التي يكون الترتيب فيها مهمًا.

إزاحة الطور بالنسبة إلى الدالة الجيبية، الفرق بين الموقع الأفقي لدالة ما وموقع دالة جيبية مشابهة بصورة مختلفة. بالنسبة إلى $y = a\sin(bx+c)+d$ و $y = a\cos$ $(bx+c)+d$، إزاحة الطور $= -\frac{c}{|b|}$.



دالة محددة القطع دالة تحدد باستخدام تعبيرين أو أكثر لفترات مختلفة في المجال.

تقدير النقطة تقدير قيمة فردية لمعلمة مجتمع إحصائي مجهولة.

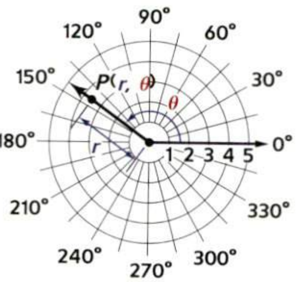
تناظر نقطي يوضح الرسوم البيانية التي يمكن تدويرها 180 درجة حول محورها بالنسبة إلى نقطة تبدو غير معدلة.

محور قطبي شعاع أولي ينطلق من القطب في النظام الإحداثي القطبي، ويكون عادة أفقيًا ومتجهًا نحو اليمين.

الاحداثيات القطبية تصف موقع النقطة $P(r, \theta)$ في النظام الإحداثي القطبي، حيث يمثل r المسافة الموجهة من القطب O إلى النقطة وتمثل θ الزاوية الموجهة من المحور القطبي إلى $\overrightarrow{OP}$.

Glossary/القاموس

polar coordinate system A coordinate system in which the location of a point is identified by polar coordinates of the form (r, θ), where r is the distance from the center, or the pole, to the given point and θ is the measure of the angle formed by the polar axis and a line from the pole through the point.



polar equation An equation expressed in terms of polar coordinates.

polar form The complex number $z = a + bi$ written as $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, where $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$, and $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$ for $a > 0$, $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ for $a < 0$.

polar graph The set of all points with coordinates (r, θ) that satisfy a given polar equation.

pole The origin of the polar coordinate system, O.

polynomial function A function of the form $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, where $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ are real numbers.

polynomial function of degree n $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, where n is a nonnegative integer and $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ are real numbers with $a_n \neq 0$.

polynomial inequality An inequality of the form $f(x) \le 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \neq 0$, $f(x) > 0$, or $f(x) \ge 0$, where $f(x)$ is a polynomial function.

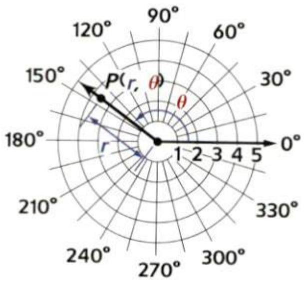
population An entire group of living things or objects.

positively skewed distribution In a data distribution, the mean is greater than the median, the majority of the data are on the left, and the tail extends to the right.

power function A function of the form $f(x) = ax^n$, where a and n are nonzero real numbers.

power series An infinite series of the form $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$, where x and a_n can take on any values for $n = 0, 1, 2, \dots$.

نظام إحداثي قطبي نظام إحداثي يتم فيه تحديد موقع نقطة ما بواسطة إحداثيات القطب للصورة (r, θ)، حيث يمثل r المسافة الواصلة من المنتصف، أو القطب، إلى النقطة المعينة وتمثل θ قياس الزاوية المكونة بواسطة المحور القطبي والمستقيم المار من القطب عبر النقطة.



معادلة قطبية معادلة يعبر عنها باستخدام الإحداثيات القطبية.

صورة قطبية العدد المركب $z = a + bi$ وتكتب كما يلي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، حيث $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. $a = r\cos\theta$ $b = r\sin\theta$ و $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$ ل $a > 0$. $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ ل $a < 0$.

رسم بياني قطبي مجموعة مكونة من كل النقاط ذات الإحداثيات (r, θ) التي تستوفي معادلة قطبية معينة.

قطب أصل النظام الإحداثي القطبي، O.

دالة كثيرة الحدود دالة تأخذ صورة $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $a_1x + a_0$. حيث $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ أعداد حقيقية.

دالة كثيرة الحدود من الدرجة n $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$. حيث n عدد صحيح غير سالب $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ هي أعداد حقيقية و $a_n \neq 0$.

متباينة كثيرة الحدود متباينة تأخذ الصورة $f(x) \le 0$ أو $f(x) < 0$ أو $f(x) \neq 0, f(x) > 0$ أو $f(x) \ge 0$ حيث $f(x)$ دالة كثيرة الحدود.

مجتمع إحصائي عبارة عن مجموعة كاملة من الأشياء أو الكائنات الحية.

توزيع ملتو إيجابيّ في توزيع البيانات، هو أن يكون المتوسط الحسابي أكبر من الوسيط، وتكون غالبية البيانات على الجانب الأيسر، ويمتد الذيل إلى الجانب الأيمن.

دالة أسية تأخذ الصورة $f(x) = ax^n$. حيث a و n أعداد حقيقية غير الصفر.

متسلسلة أسية متسلسلة لانهائية تأخذ الصورة $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$، حيث يمكن أن تأخذ x و a_n أي قيم لـ $n = 0, 1, 2, \dots$.

Glossary / القاموس

principal nth root The nonnegative nth root.

جذر العدد n الرئيسي جذر العدد n غير السالب.

principle of mathematical induction Let P_n be a statement about a positive integer n. Then P_n is true for all positive integers n if and only if

- P_1 is true, and
- for every positive integer k, if P_k is true, then P_{k+1} is true.

مبدأ الاستقراء الرياضي بافتراض أن P_n عدد صحيح موجب n. إذن، P_n حقيقي لجميع الأعداد الموجبة n في الحالات التالية فقط

- P_1 حقيقي
- لكل عدد صحيح موجب k. إذا كان P_k صوابًا. إذن P_{k+1} صواب.

probability distribution A table, equation, or graph that links each possible value for a random variable with its probability of occurring.

توزيع الاحتمال جدول أو معادلة أو رسم بياني يربط كل قيمة موجبة لمتغير عشوائي باحتمالية حدوثه.

pth roots of unity Finding the pth roots of 1.

جذور p للوحدة إيجاد الجذور p للعدد 1.

p-value The lowest level of significance at which H_0 can be rejected for a given set of data.

قيمة p مستوى الدلالة الأدنى الذي يمكن عنده رفض H_0 لمجموعة معينة من البيانات.

pure imaginary number An imaginary number $(a + bi)$, where $a = 0$.

عدد وهمي صرف عدد وهمي $(a + bi)$. حيث $a = 0$.

Q

quadrant bearing A directional measurement of a vector between 0° and 90° east or west of the north-south line.

اتجاه ربعي هو قياس اتجاهي لمتجه ما بين 0 درجة و90 درجة شرق المستقيم المنطلق من الشمال إلى الجنوب أو غربه.

quadrantal angle An angle in standard position that has a terminal side that lies on one of the coordinate axes.

زاوية ربعية هي زاوية في موقع قياسي لديها جانب طرفي يقع على أحد محاور الإحداثيات.

quadratic equation A polynomial equation of degree two, in the form $ax^2 + bx + c$, where $a \neq 0$.

معادلة تربيعية معادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية. في الصورة $ax^2 + bx + c$. حيث $a \neq 0$.

quadratic form A polynomial expression that is written in the form $au^2 + bu + c$ for any numbers a, b, and c, where $a \neq 0$ and u is some expression in x.

صورة تربيعية تعبير كثير الحدود يُكتب في صورة $au^2 + bu + c$ لأي أعداد a, b، وc. حيث $a \neq 0$ وu تمثل بعض التعبيرات في x.

Quadratic Formula The solutions of a quadratic equation of the form $ax^2 + bx + c$, where $a \neq 0$, are given by the Quadratic Formula, which is

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

صيغة تربيعية الحلول المحددة لمعادلة تربيعية في الصورة $ax^2 + bx + c$. حيث $a \neq 0$. معطاة بواسطة الصيغة التربيعية. وهي

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

quadratic function A function of the form $f(x) = ax^2 + bx + c$, where $a \neq 0$, with parent function $f(x) = x^2$.

دالة تربيعية دالة تأخذ الصورة $f(x) = ax^2 + bx + c$. حيث $a \neq 0$. باستخدام الدالة الأصلية $f(x) = x^2$.

quartic function A function that contains a fourth-degree polynomial.

دالة رباعية الدالة التي تحتوي على حدود من الدرجة الرابعة.

quartiles The values that divide a set of data into four equal parts.

رُبيعيات قيم تقسم مجموعة من البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية.

R

radians A unit of angular measurement equal to $\frac{180°}{\pi}$ or about 57.296°.

قياس دائريّ (راديان) وحدة قياس زاوية تساوي $\frac{180°}{\pi}$ أو حوالي 57.296 درجة.

radical function A function that can be written as $f(x)=\sqrt[n]{x^p}$, where n and p are positive integers greater than 1 that have no common factors.

دالة جذرية الدالة التي يمكن كتابتها في صورة $f(x)=\sqrt[n]{x^p}$. حيث n وp أعداد صحيحة موجبة أكبر من العدد 1 الذي ليس له أي عوامل مشتركة.

random variable Represents a numerical value assigned to an outcome of a probability experiment.

متغير عشوائي يمثل قيمة عددية معيّنة إلى نتيجة من نتائج تجربة الاحتمال.

range The difference between the greatest and least values in a set of data.

مدى الفرق بين القيم الأكبر والأصغر في مجموعة من البيانات.

rational function A function of the form $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$, where $a(x)$ and $b(x)$ are polynomial functions, and $b(x)\neq 0$.

دالة نسبية دالة تأخذ الصورة $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$. حيث $a(x)$ و$b(x)$ دوال كثيرة الحدود، و$b(x)\neq 0$.

rational inequality An inequality that contains one or more rational expressions.

متباينة نسبية هي متباينة تحتوي على واحد أو أكثر من التعبيرات النسبية.

Rational Zero Theorem Describes how the leading coefficient and constant term of a polynomial function with integer coefficients can be used to determine a list of all possible rational zeros.

نظرية الصفر النسبي توضح كيف يمكن استخدام المعامل الأساسي والحد الثابت لدالة كثيرة الحدود ذات معاملات أعداد صحيحة في تحديد قائمة بجميع الأصفار النسبية الممكنة.

real axis The horizontal axis of a complex plane on which the real component of a complex number is graphed.

محور حقيقي المحور الأفقي لمستوى مركب يتم رسم المركب الحقيقي لعدد مركب عليه بيانيًا.

real part In an imaginary number $a+bi$, a is the real part.

جزء حقيقي في العدد التخيلي $a+bi$ يمثل a الجزء الحقيقي.

reciprocal function 1. A function of the form $f(x)=\frac{1}{a(x)}$, where $a(x)$ is a linear function and $a(x)\neq 0$, with parent function $f(x)=\frac{1}{x}$. 2. Trigonometric functions that are reciprocals of each other.

دالة عكسية 1. دالة تأخذ الصورة $f(x)=\frac{1}{a(x)}$.

حيث يمثل $a(x)$ دالة خطية و$a(x)\neq 0$. باستخدام الدالة الأصلية

$f(x) = 1 \_ x$. 2. الدوال المثلثية التي تتبادل مع بعضها البعض.

rectangular components Horizontal and vertical components of a vector.

مركبات متعامدة هي مركبات المتجه الأفقية والرأسية.

recursive formula A formula used to determine the nth term of a sequence using one or more of the preceding terms.

صيغة تكرارية(ضمنية) هي الصيغة المستخدمة لتحديد الحد n للمتتالية باستخدام حد أو أكثر من الحدود السابقة.

reduced row-echelon form An augmented matrix in which the first nonzero element of each row of the coefficient portion of the matrix is 1 and the rest of the elements in the same column as this element are 0.

صورة مستوى صف منخفض عبارة عن مصفوفة زائدة يساوي فيها العنصر الأول غير الصفري لكل صف من جزء معامل المصفوفة العدد 1 وتساوي باقي العناصر في العمود نفسه الموجود فيه هذا العنصر العدد 0.

reduction identity An identity that results when a sum or difference identity is used to rewrite a trigonometric expression in which one of the angles is a multiple of 90° or $\pi \_ 2$ radians.

متطابقة انخفاض هي متطابقة تنتج عند استخدام متطابقة المجموع أو الفرق لإعادة كتابة التعبير المثلثي الذي تساوي فيه إحدى الزوايا حاصل الضرب في 90 درجة أو $\pi \_ 2$ قياس دائريّ (راديان).

reference angle The acute angle formed by the terminal side of an angle in standard position and the x-axis.

زاوية إسناد هي الزاوية الحادة المكونة بواسطة الجانب الطرفي لزاوية ما في موقع قياسي وعلى المحور الأفقي x.

reflection A transformation in which a mirror image of the graph of a function is produced with respect to a specific line.

انعكاس عملية تحول يتم فيها إنشاء صورة طبق الأصل من الرسم البياني لدالة ما بالنسبة إلى مستقيم معين.

regression line A line drawn through a set of data points that describes how the response variable y changes as the explanatory variable x changes. Also called a ***line of best fit***.

خط انحدار هو خط مرسوم من خلال مجموعة من نقاط البيانات التي توضح كيف يتغير متغير الاستجابة y كلما يتغير المتغير التفسيري x. يطلق عليه أيضًا *المستقيم الأفضل تمثيلاً*.

regular partition In the area under the graph of a function, an interval that is subdivided into equal subintervals.

تجزئة منتظمة في المساحة الموجودة أدنى الرسم البياني للدالة، هي المسافة المقسومة إلى جزأين متساويين.

relative frequency In a frequency table, the frequency of occurrence for each data value.

تكرار نسبي في جدول التكرار، يمثل عدد مرات تكرار كل قيمة من قيم البيانات.

relevant domain In a function, the part of the domain that is relevant to a model.

مجال نسبي في دالة ما، يمثل الجزء من المجال المتعلق بالنموذج.

removable discontinuity A characteristic of a function in which the function is continuous everywhere except for a hole at $x = c$.

انفصال قابل للإزالة ميزة في دالة ما تكون فيها الدالة متواصلة أيًا كانت باستثناء فجوة في $x = c$.

repeated zero The related zero c of a function when a factor $(x - c)$ occurs more than once in the completely factored form of $f(x)$.

صفر متكرر الصفر c الذي له صلة بالدالة حيث يتكرر العامل $(x - c)$ أكثر من مرة في النموذج المحلل تحليلاً كاملاً $f(x)$.

residual The difference between an observed y-value of a data point and its predicted y-value on a regression line.

قيمة متبقية الفرق بين قيمة y الملاحظة في نقطة البيانات وقيمة y المتوقعة على خط الانحدار.

residual plot A scatter plot of the residuals in which the horizontal line at zero corresponds to the regression line.

رسم بياني لقيمة متبقية الرسم البياني المتفرق للقيم المتبقية يتطابق فيه المستقيم الأفقي عند الصفر مع خط الانحدار.

resistant statistic A statistic that is not highly affected by the presence of outlying data values.

قيمة إحصائية مقاومة هي قيمة إحصائية لا تتأثر كثيرًا بوجود قيم البيانات البعيدة عن المركز.

response variable The dependent variable y in bivariate data.

متغير الاستجابة المتغير التابع y في البيانات ذات المتغيرين.

resultant A single vector that results when two or more vectors are added.

محصلة المتجه الفردي الناتج عن إضافة متجهين أو أكثر.

right Riemann sum A method for approximating the area under a curve by using the values at the right endpoints.

مجموع ريمان يميني طريقة لتقريب المساحة التي تقع أدنى المنحنى باستخدام القيم الموجودة في نقاط النهاية اليمنى.

right-tailed test The hypothesis test if $H_a: \mu > k$.

اختبار الذيل الأيمن اختبار الفرضية إذا كان $H_a: \mu > k$.

root For a function $f(x)$, a solution of the equation $f(x) = 0$.

جذر بالنسبة إلى الدالة $f(x)$، يمثل حل المعادلة $f(x) = 0$.

rose The graph of a polar equation of the form $r = a \cos n\theta$ or $r = a \sin n\theta$, where $n \geq 2$ is an integer.

منحنى وردي الرسم البياني للمعادلة القطبية التي تأخذ الصورة $r = a \cos n\theta$ أو $r = a \sin n\theta$، حيث $n \geq 2$ عدد صحيح.

row-echelon form A matrix is in row-echelon form if the following conditions are met.

- **Rows of all zeros (if any) appear at the bottom of the matrix.**
- **The first nonzero entry in any row is 1.**
- **For two successive rows with nonzero entries, the leading 1 in the higher row is farther to the left than the leading 1 in the lower row.**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

نموذج مستوى الصف مصفوفة في نموذج مستوى الصف في حال استيفاء الشروط التالية.

- **ظهور الصفوف التي تحتوي على جميع الأصفار (إن وجدت) أسفل المصفوفة.**
- **أن يكون أول مدخل غير صفري في أي صف من الصفوف هو العدد 1.**
- **بالنسبة إلى الصفين المتتاليين ذوي الإدخالات غير الصفرية، يكون العدد 1 الأساسي في الصف الأعلى أبعد من العدد 1 الأساسي في الصف الأدنى ناحية اليسار.**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

row matrix A matrix that has only one row.

مصفوفة الصف المصفوفة التي تحتوي على صف واحد فقط.

S

sample A part of a population.

عينة جزء من مجتمع إحصائي.

sample correlation coefficient A measure that determines the type and strength of the linear relationship between the variables in bivariate data that represent a sample of the population.

معامل ارتباط العينة مقياس يحدد نوع العلاقة الخطية وقوتها بين المتغيرات في البيانات ذات المتغيرين التي تمثل عينة المجتمع الإحصائي.

sampling distribution A distribution of the means of random samples of a certain size that are taken from a population.

توزيع أخذ العينات توزيع متوسطات حسابية للعينات العشوائية محددة الحجم المأخوذة من المجتمع الإحصائي.

sampling error Occurs when a sample is not a complete representation of the population and causes differences between sample means and the population mean.

خطأ أخذ العينات يحدث هذا الخطأ إذا لم تمثل العينة المجتمع الإحصائي تمثيلاً كاملاً مما ينتج عنها تباينات بين متوسطات العينة ومتوسط المجتمع الإحصائي.

sample space The set of all possible outcomes of an experiment.

الفضاء العيني مجموعة النتائج المحتملة للتجربة.

scalar A constant.

كمية عددية الكمية الثابتة.

secant In a right triangle with acute angle θ, the ratio comparing the length of the hypotenuse to the side adjacent to θ. It is the reciprocal of the cosine ratio, or $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$.

قاطع في المثلث قائم الزاوية التي تكون إحدى زواياه زاوية حادة θ. هو النسبة بين طول الوتر والضلع المجاور للزاوية θ. هو المعكوس الضربي لنسبة جيب التمام، أو $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$.

secant line The line through two points on a curve.

مستقيم قاطع الخط المار بين نقطتين في المنحنى.

second differences Differences that are found by subtracting consecutive first differences from one another.

فروق ثانية الفروق الناتجة من طرح الفروق الأولى المتتالية من بعضها بعضًا.

sector In a circle, the region bounded by a central angle and its intercepted arc.

قطاع في الدائرة، هو المنطقة المحصورة بين الزاوية المركزية وقوسها المحصور.

sequence An ordered list of numbers.

متتالية قائمة مرتبة من الأرقام.

series The sum of all the terms of a finite or infinite sequence.

متسلسلة مجموع حدود المتتالية المنتهية أو اللانهائية.

set A collection of objects or numbers, often shown using braces { } and usually named by a capital letter.

مجموعة مجموعة من الأشياء أو الأرقام التي تظهر غالبًا بين قوسين { } وعادة ما يُكتب اسمها بحروف كبيرة.

set-builder notation An expression that describes a set of numbers by using the properties of numbers in the set to define the set, for example $\{x \mid x \geq 8, x \in \mathbb{W}\}$.

رمز بناء مجموعة الحل تعبير يصف مجموعة الأعداد من خلال استخدام خصائص الأعداد في المجموعة لتحديدها. على سبيل المثال، $\{x \mid x \geq 8, x \in \mathbb{W}\}$.

sigma notation For any sequence a 1, a 2, a 3, ..., the sum of the first k terms is denoted $\sum_{n=1}^{k} a_n$, which is read *the summation from* $n = 1$ to k of a n. Thus $\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$ where k is an integer value.

الرمز سيجما بالنسبة لأي متتالية a_1، a_2، a_3، ...، يرمز إلى مجموع حدود k الأولى بـ $\sum_{n=1}^{k} a_n$. ويُقرأ *صيغة الجمع* $n = 1$ إلى k من a_n. وبالتالي $\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$ حيث k قيمة عدد صحيح.

sign chart Used to determine on which intervals a polynomial function is positive or negative.

مخطط العلامات يُستخدم ليحدد على أي الفترات تكون الدالة كثيرة الحدود موجبة أم سالبة.

sine In a right triangle with acute angle θ, the ratio comparing the length of the side opposite θ and the hypotenuse.

جيب الزاوية في المثلث قائم الزاوية الذي يحتوي على الزاوية الحادة θ، يمثل نسبة المقارنة طول الضلع المقابل للزاوية θ والوتر.

singular matrix A matrix that does not have an inverse.

مصفوفة منفردة المصفوفة التي ليس لها معكوس.

sinusoid Any transformation of a sine function. The general forms of sinusoidal functions are $y = a \sin (bx + c) + d$ and $y = a \cos (bx + c) + d$ where a, b, c, and d are constants and neither a nor b is 0.

منحنى الجيب أي تحويل في دالة جيب الزاوية. إن الصيغ العامة لدوال منحنى الجيب هي $y = a \cos (bx + c) + d$ و $y = a \sin (bx + c) + d$. حيث a و b و c و d أعداد ثابتة ولا يساوي a أو b 0.

solve a right triangle To find the measures of all of the sides and angles of a right triangle.

حل مثلث قائم الزاوية لإيجاد مقاييس كل أضلاع المثلث قائم الزاوية وزواياه.

spiral of Archimedes The graph of a polar equation of the form $r = a\theta + b$.

حلزون أرشميدس التمثيل البياني لمعادلة قطبية للصيغة $r = a\theta + b$.

square matrix A matrix with the same number of rows and columns.

مصفوفة مربعة مصفوفة عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها.

square root function A function that contains a square root of the independent variable, with parent function $f(x) = \sqrt{x}$.

دالة الجذر التربيعي الدالة التي تحتوي على الجذر التربيعي للمتغير المستقل. باستخدام الدالة الأصلية $f(x) = \sqrt{x}$.

square system A system of linear equations that has the same number of equations as variables.

نظام تربيعي نظام معادلات خطية يحتوي على معادلات بنفس عدد المتغيرات.

standard deviation The average amount by which individual items deviate from the mean of all the data found by taking the square root of the variance and represented by σ.

انحراف معياري متوسط المقدار الذي من خلاله تنحرف العناصر الفردية من المتوسط الحسابي لجميع البيانات التي يتم إيجادها عن طريق أخذ الجذر التربيعي للتباين ويُعبر عنه بالرمز σ.

standard error of the mean The standard deviation of the sample means, given by $\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

خطأ معياري للمتوسط الحسابي الانحراف المعياري لمتوسطات العينة، ويتم الحصول عليه عن طريق $\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

standard form A complex number written in the form of $a + bi$.

صيغة قياسية عدد مركب يُكتب بالصيغة $a + bi$.

standard normal distribution A normal distribution of z-values with a mean of 0 and a standard deviation of 1.

توزيع طبيعي قياسي توزيع طبيعي لقيم z باستخدام متوسط حسابي 0 وانحراف معياري لـ 1.

standard position 1. In the coordinate plane, an angle positioned so that its vertex is at the origin and its initial side is along the positive x-axis. 2. A vector that has its initial point at the origin.

موقع قياسي 1. في المستوى الإحداثي، يتم تحديد موقع الزاوية بحيث يكون رأسها عند نقطة الأصل وضلعها الابتدائي على امتداد المحور *السيني* الموجب. 2. المتجه الذي تكون نقطته الابتدائية عند نقطة الأصل.

statistics The science of collecting, analyzing, interpreting and presenting data.

إحصاء العلم الذي يهتم بجمع البيانات وتحليلها وتفسيرها وتمثيلها.

step function A piecewise-defined function in which the graph is a series of line segments that resemble a set of stairs.

دالة درجية دالة متعددة التعريف يكون فيها التمثيل البياني عبارة عن تسلسل من القطع المستقيمة التي تشبه مجموعة من الدرجات.

subset If every element of set B a set is contained in set A, then B is a subset of A.

مجموعة فرعية بما أن كل عنصر في المجموعة B يوجد داخل المجموعة A. فإن B تعد مجموعة فرعية من المجموعة A.

substitution method A method of solving a system of equations in which one equation is solved for one variable in terms of the other.

طريقة التعويض طريقة لحل نظام المعادلات الذي يتم فيه حل معادلة واحدة لمتغير واحد بدلالة الآخر.

symmetrical distribution In a data distribution, the data are evenly distributed on both sides of the mean.

توزيع متماثل في توزيع البيانات، تكون البيانات موزعة بالتساوي على كلا جانبي المتوسط الحسابي.

synthetic division A shortcut for dividing a polynomial by a linear factor of the form $x - c$.

قسمة تركيبية طريقة مختصرة لقسمة كثيرة الحدود على عامل خطي للصيغة $x - c$.

synthetic substitution The use of synthetic division to evaluate a function.

تعويض تركيبي استخدام القسمة التركيبية لتقيم دالة معينة.

system of equations A set of equations with the same variables.

نظام المعادلات مجموعة المعادلات التي تحتوي على نفس المتغيرات.

system of inequalities A set of inequalities with the same variables.

نظام المتباينات مجموعة المتباينات التي تحتوي على نفس المتغيرات.

T

tangent 1. A line that intersects a circle at exactly one point. 2. In a right triangle with acute angle θ, the ratio comparing the length of the side opposite θ and the side adjacent to θ.

مماس 1. خط يتقاطع مع دائرة عند نقطة واحدة بالضبط. 2. في المثلث قائم الزاوية الذي يحتوي على الزاوية الحادة θ، فإنه يمثل النسبة التي تقارن بين طول الضلع المقابل للزاوية θ والضلع المجاور للزاوية θ.

tangent line The tangent line to $f(x)$ at x is the line passing through the point $(x, f(x))$ with slope m, where $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

خط المماس الخط الملامس لـ $f(x)$ عند x هو الخط المار عبر النقطة $(x, f(x))$ مع الميل، حيث

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

t*-distribution** A family of curves that are dependent on a parameter known as the ***degrees of freedom.

توزيع مجموعة من المنحنيات التي تعتمد على معلمة تُعرف *بدرجات الحرية*.

term 1. The monomials that make up a polynomial. 2. Each number in a sequence or series.

حد 1. أحاديات الحد التي تشكل دالة كثيرة الحدود. 2. كل عدد في متسلسلة.

terminal point The ending point of a vector that is represented by a directed line segment. Also known as the ***head*** or ***tip*** of the vector.

نقطة طرفية هي نقطة النهاية لمتجه يتم تمثيلها بواسطة قطعة مستقيمة موجهة. تُعرف أيضًا باسم *رأس* أو *قمة* المتجه.

terminal side The final position of a ray after rotation when forming an angle.

ضلع الانتهاء موقع نهاية الشعاع بعد الدوران عند تكوين زاوية ما.

three-dimensional coordinate system A coordinate system formed by three perpendicular number lines, the x-, y-, and z-axes, that intersect at the origin O. Each point is represented by an ordered triple of real numbers (x, y, z).

نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد نظام إحداثي يتكون من ثلاثة خطوط أعداد متعامدة، هي المحاور x وy وz، والتي تتقاطع عند الأصل O. ويمثل كل نقطة مجموعة أعداد مرتبة ثلاثية العناصر وهي (x, y, z).

torque A vector quantity that measures how effectively a force applied to a lever causes rotation along the axis of rotation.

عزم الدوران كمية متجهة تقيس مدى تأثير القوة المبذولة على العتلة للدوران حول محور الدوران.

transcendental function A function that cannot be expressed in terms of algebraic operations, such as an exponential or logarithmic function.

دالة متسامية دالة لا يمكن التعبير عنها في صورة عمليات جبرية، مثل الدالة الأسية أو اللوغاريتمية.

transformation A change in the position or shape of the graph of a parent function.

تحويل تغير في موقع أو شكل التمثيل البياني للدالة الأصلية.

translation A rigid transformation that has the effect of shifting the graph of a function

انسحاب تحويل غير مرن يؤثر على إزاحة التمثيل البياني للدالة

transverse axis The segment that has a length of $2a$ units and connects the vertices of a hyperbola.

محور قاطع قطعة طولها 2a تصل رؤوس القطع الزائد.

triangle method A method of finding the resultant vector by translating one vector so that its tail touches the tip of another. The resultant vector is drawn to form a triangle.

طريقة المثلث طريقة لإيجاد متجه محصل عن طريق سحب متجه واحد بحيث يلامس ذيله قمة المتجه الآخر. ويُرسم المتجه المحصل بحيث يكوّن شكل مثلث.

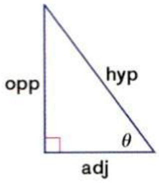
trigonometric form See *polar form*.

صيغة مثلثية انظر صيغة قطبية.

trigonometric function Let θ be an acute angle in a right triangle and opp, adj, and hyp are the lengths of the side opposite θ, the side adjacent to θ, and the hypotenuse, respectively. Then the trigonometric functions of θ are defined below.

$\sin\theta = \text{opp} \_ \text{hyp}$ $\cos\theta = \text{adj} \_ \text{hyp}$
$\tan\theta = \text{opp} \_ \text{adj}$

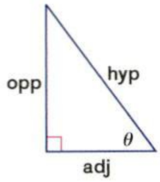
$\csc\theta = \text{hyp} \_ \text{opp}$ $\sec\theta = \text{hyp} \_ \text{adj}$
$\cot\theta = \text{adj} \_ \text{opp}$



دالة مثلثية لنفرض أن θ زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية وأن opp وadj وhyp هي أطوال الضلع المقابل للزاوية θ والضلع المجاور للزاوية θ والوتر، على التوالي. فعندئذٍ تُعرّف الدوال المثلثية للزاوية θ كما يلي.

$\sin\theta = \text{opp} \_ \text{hyp}$ $\cos\theta = \text{adj} \_ \text{hyp}$
$\tan\theta = \text{opp} \_ \text{adj}$

$\csc\theta = \text{hyp} \_ \text{opp}$ $\sec\theta = \text{hyp} \_ \text{adj}$
$\cot\theta = \text{adj} \_ \text{opp}$



trigonometric identity An equation that involves trigonometric functions that is true for all values of the variable.

متطابقة مثلثية معادلة تحتوي على دوال مثلثية حقيقية لجميع قيم المتغير.

trigonometric ratios Ratios that are formed using the side measures of a right triangle and a reference angle θ.

نسب مثلثية النسب التي تتكوّن باستخدام قياسات الأضلاع لمثلث قائم الزاوية وزاوية استناد θ.

triple scalar product If $\boldsymbol{t} = t_1\boldsymbol{i} + t_2\boldsymbol{j} + t_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$, and $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$, the triple scalar product is given by $\boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

A triple scalar product of vectors represents the volume of a parallelepiped.

حاصل ضرب قياسي لثلاثة متجهات بما أن $\boldsymbol{t} = t_1\boldsymbol{i} + t_2\boldsymbol{j} + t_3\boldsymbol{k}$، $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$ و $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$ إذن يتم الحصول على حاصل الضرب القياسي لثلاثة متجهات عن طريق $\boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

يمثل حاصل الضرب القياسي لثلاثة متجهات حجم متوازي السطوح.

true bearing A directional measurement of a vector where the angle is measured clockwise from north.

اتجاه حقيقي قياس اتجاهي لمتجه بحيث يتم قياس الزاوية باتجاه عقارب الساعة من الشمال.

turning point A point on the graph of a function that indicates where the graph changes from increasing to decreasing, or vice versa. The location of a relative maximum or minimum.

نقطة الدوران نقطة على التمثيل البياني لدالة وهي تشير إلى مكان تغير التمثيل البياني من التزايد إلى التناقص أو العكس. موقع الحد الأقصى أو الأدنى النسبي.

two-sided limit The limit of $f(x)$ as x approaches c from the left and from the right, which exists only when both one-sided limits exist and are equal.

النهاية من الجهتين هو حد $f(x)$ حيث x يقترب من c من ناحية اليسار واليمين. وينتُج فقط عن وجود حدين أحاديين متساويين.

two-tailed test The hypothesis test if H_a: $\mu \neq k$.

اختبار ثنائي الذيل اختبار الفرضية إذا كان H_a: $\mu \neq k$.

U

unbounded A region formed by a system of linear inequalities in a linear programming problem that is not a polygon.

غير محدود منطقة تنتج عن نظام من المتباينات الخطية في مسألة برمجة خطية ولا تكون مضلعًا.

union The union of sets A and B is all elements in both A and B, written as $A \cup B$.

ربط اتحاد المجموعتين A وB بحيث يشمل كل العناصر الموجودة في كل من A وB. ويُكتب بالصيغة $A \cup B$.

unit circle A circle of radius 1 centered at the origin of a coordinate system.

دائرة الوحدة دائرة نصف قطرها يساوي 1 ويكون مركزها عند نقطة أصل النظام الإحداثي.

unit vector A vector that has a magnitude of 1 unit.

متجه الوحدة متجه طوله وحدة طولية واحدة .

univariate data Data with one variable.

بيانات أحادية المتغير بيانات تتكون من متغير واحد.

universal set The set of all possible elements for a situation.

مجموعة شاملة المجموعة التي تشمل كل العناصر المحتملة لحالة ما.

upper bound A real number b that is greater than or equal to the greatest real zero of a polynomial function.

حد أعلى عدد حقيقي b أكبر من أو يساوي أكبر صفر حقيقي لدالة كثيرة الحدود.

upper limit The upper bound of a definite integral.

الحد العلوي الحد العلوي لتكامل محدد.

V

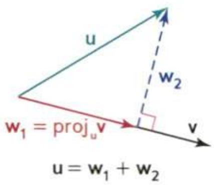
variance The mean of the squares of the deviations from the arithmetic mean.

تباين متوسط مربعات الانحرافات من المتوسط الحسابي.

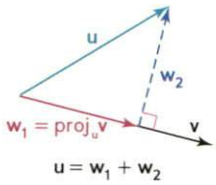
vector A quantity that has both magnitude and direction.

متجه كمية لها مقدار واتجاه.

vector projection Let u and v be nonzero vectors, and let $w1$ and $w2$ be vector components of **u** such that $w1$ is parallel to v. Then vector $w1$ is called the vector projection of u onto v, denoted proj vu, and $\mathbf{proj}_v u = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right)v$.



مسقط المتجه لنفرض أن u وv متجهان غير صفريين، وأن w_1 و w_2 مكونا المتجه u بحيث يكون w_1 موازيًا لـ v. عندئذٍ يُسمى المتجه w_1 مسقط المتجه u على v. ويُشار إلى ذلك بـ $\mathbf{proj}_v u$ و $\mathbf{proj}_v u = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right)v$.



verify an identity To prove that both sides of the equation are equal for all values of the variable for which both sides are defined.

إثبات صحة المعادلة إثبات أن كلا طرفَي المعادلة متساويان في جميع قيم المتغيرات المحدد لها كلا الطرفين.

vertex 1. The common endpoint of two or more noncollinear rays. 2. A point at which a parabola intersects its axis of symmetry. 3. The two endpoints of the major axis of an ellipse.

رأس نقطة النهاية المشتركة لشعاعَين أو أكثر ليسا على نفس الخط. 2. نقطة يتقاطع عندها القطع المكافئ مع محور تماثله. 3. نقطتا نهاية المحور الأكبر لقطع ناقص.

vertical asymptote The line $x = c$ is a vertical asymptote of the graph of f if $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$ or $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$.

خط مقارب رأسي يكون المستقيم $x = c$ خطًا مقاربًا رأسيًا للتمثيل البياني لـ f إذا كان $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$

vertical shift For a sinusoidal function, a vertical translation that is the average of the maximum and minimum values of the function.

إزاحة رأسية بالنسبة إلى الدالة الجيبية. تكون الإزاحة هي الانسحاب الرأسي الذي يمثل متوسط القيم القصوى والدنيا للدالة.

vertices The endpoints of the major axis of an ellipse.

رؤوس نقاط نهاية المحور الأكبر لقطع ناقص.

Glossary/ القاموس

W

work If a constant force F acts on an object to move it from point A to point B, then the work done equals the dot product of the constant force F and the directed distance $\overrightarrow{AB}$, or $F \cdot \overrightarrow{AB}$.

شغل إذا كانت القوة الثابتة F مبذولة على جسم ما لتحريكه من النقطة A إلى النقطة B. فإن الشغل المبذول يساوي حاصل الضرب النقطي للقوة الثابتة $\mathbf{F}$ والمسافة الموجهة $\overrightarrow{AB}$ أو $F \cdot \overrightarrow{AB}$.

Z

zeros The x-intercepts of the graph of a function.

أصفار التقاطع مع المحور الأفقي x على التمثيل البياني للدالة.

zero function The function sometimes known as the zero function is the constant function with constant $c = 0$. In other words, $f(x) = \mathbf{0}$.

دالة صفرية تعد الدالة التي تُعرف أحيانًا بالدالة الصفرية دالة ثابتة بثابت $c = 0$. بمعنى أن $f(x) = \mathbf{0}$.

zero matrix A matrix in which every element is zero.

مصفوفة صفرية المصفوفة التي يساوي كل عنصر فيها صفرًا.

zero vector The resultant when two opposite vectors are added, has a magnitude of 0 and no specific direction. Also called the ***null*** vector, denoted by $\vec{0}$ or $\mathbf{0}$.

متجه صفري هو المتجه المحصلة الذي ينتج عن جمع متجهين متقابلين. ونكون وحدته الطولية 0 ولا يكون له اتجاه معين. ويُعرف أيضًا بالمتجه *المنعدم*. ويُشار إليه بالرمز $\vec{0}$ أو0.

z-axis a third axis in a three-dimensional coordinate system that passes through the origin and is perpendicular to both the x- and y-axes.

محور z المحور الثالث في النظام الإحداثي ثلاثي الأبعاد ويمر عبر نقطة الأصل ويكون متعامدًا على كل من المحور *السيني* و*المحور الصادي*.

z-value Represents the number of standard deviations that a given data value is from the mean. Also known as the z-***score*** and z ***test statistic***.

قيمة z تمثل عدد الانحرافات المعيارية التي تحصل عليها قيمة بيانات محددة من المتوسط الحسابي. وتُعرف أيضًا باسم درجة z و*إحصاء اختبار* z.

الدوال المثلثية والمتطابقات

الدوال المثلثية

الدوال المثلثية	$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$ $\csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{1}{\sin\theta}$	$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$ $\sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{1}{\cos\theta}$	$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
قانون الـ cosine	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
قانون الـ sine	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	قاعدة هيرون	المساحة $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
السرعة الخطية	$v = \frac{s}{t}$	السرعة الزاوية	$\omega = \frac{\theta}{t}$

المتطابقات المثلثية

المعكوس الضربي	$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$
الفيثاغورية	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$
الدالة متساوية القيمة	$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
فردي - زوجي	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\csc(-\theta) = -\csc\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\sec(-\theta) = \sec\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $\cot(-\theta) = -\cot\theta$
الجمع والطرح	$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$	$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$	
ضعف زاوية	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$	$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$	$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$
تبسيط القيمة الأسية	$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$	$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$	$\tan^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$
زاوية نصفية	$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$ $\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$	$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}$ $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$	$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$
ناتج الضرب إلى مجموع	$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$ $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$	$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$ $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$	
المجموع إلى ناتج الضرب	$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$	$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$	

الصيغ

العمليات على الدوال

الجمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	الضرب	$(f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x)$
الطرح	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$

دوال أسية ولوغاريتمية

فائدة مركبة	$A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$	نمو أو تضاؤل أسي	$N=N_0(1+r)^t$
فائدة مركبة مستمرة	$A=Pe^{rt}$	نمو أو تضاؤل أسي مستمر	$N=N_0e^{kt}$
خاصية ناتج الضرب	$\log_b xy=\log_b x+\log_b y$	خاصية القيمة الأسية	$\log_b x^p=p\log_b x$
خاصية ناتج القسمة	$\log_b \frac{x}{y}=\log_b x-\log_b y$	تغيير الأساس	$\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}$
نمو لوجستي	$f(t)=\frac{c}{1+ae^{-bt}}$		

مقاطع مخروطية

قطع مكافئ	$(x-h)^2=4p(y-k)$ أو $(y-k)^2=4p(x-h)$	دائرة	$x^2+y^2=r^2$ أو $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
قطع ناقص	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ أو $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	قطع زائد	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ أو $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
دوران الأشكال المخروطية	$y'=y\cos\theta-x\sin\theta,\ x'=x\cos\theta+y\sin\theta$		

معادلات وسيطة

مسقط عمودي	$y=tv_0\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2+h_0$	مسافة أفقية	$x=tv_0\cos\theta$

متجهات

الجمع في المستوى	$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\langle a_1+b_1, a_2+b_2\rangle$	الجمع في الفراغ	$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\langle a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3\rangle$
الطرح في المستوى	$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\langle a_1-b_1, a_2-b_2\rangle$	الطرح في الفراغ	$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})=\langle a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3\rangle$
ضرب الكميات غير المتجهة في المستوى	$k\mathbf{a}=\langle ka_1, ka_2\rangle$	ضرب الكميات غير المتجهة في الفراغ	$k\mathbf{a}=\langle ka_1, ka_2, ka_3\rangle$
ناتج الضرب العددي في المستوى	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2$	ناتج الضرب العددي في الفراغ	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
زاوية بين متجهين	$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}$	إسقاط **u** على **v**	$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v}$
مقدار المتجهة	$\|\mathbf{v}\|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	ناتج الضرب الثلاثي لكميات غير متجهة	$\mathbf{t}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$
ضرب تقاطعي	$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k}$		

الصيغ

الأعداد المركبة

صيغة ناتج الضرب	$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$	صيغة ناتج القسمة	$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$
صيغة الجذور المميزة	$r^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{p}+i\sin\frac{\theta+2n\pi}{p}\right)$	نظرية دي موافر	$z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n$ أو $r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

المتتاليات والمتسلسلات

مجموع المتسلسلات الحسابية المنتهية	$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ أو $S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$	مجموع المتسلسلات الهندسية المنتهية	$S_n=a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$ أو $S_n=\frac{a_1-a_nr}{1-r}$
مجموع المتسلسلات الهندسية اللانهائية	$S=\frac{a_1}{1-r},\ \lvert r\rvert<1$	صيغة أويلر	$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$
متسلسلة القيمة الأسية	$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots$	متسلسلة أسية	$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$
نظرية ذات حدين	$(a+b)^n={}_nC_0a^nb^0+{}_nC_1a^{n-1}b^1+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\dots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\dots+{}_nC_na^0b^n$		
متسلسلة القوة لجيب تمام الزاوية وجيب الزاوية	$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$		$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$

الإحصاء

قيم Z	$z=\frac{X-\mu}{\sigma}$	عينة المتوسط الحسابي لقيمة Z	$z=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}$
احتمالية ذات حدين	$P(X)={}_nC_xp^xq^{n-x}=\frac{n!}{(n-x)!\,x!}p^xq^{n-x}$	الحد الأقصى لخطأ الحساب	$E=z\cdot\sigma_{\bar{x}}$ أو $z\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
فترة الثقة، التوزيع الطبيعي	$CI=\bar{x}\pm E$ أو $\bar{x}\pm z\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	فترة الثقة، توزيع t-	$CI=\bar{x}\pm t\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}$
معامل الارتباط	$r=\frac{1}{n-1}\sum\left(\frac{x_i-\bar{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i-\bar{y}}{s_y}\right)$	اختبار معامل الارتباط t-	$t=r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$ ، درجات من الحرية: $n-2$

الحدود

ناتج الجمع	$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to c}f(x)+\lim_{x\to c}g(x)$	ناتج الطرح	$\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to c}f(x)-\lim_{x\to c}g(x)$
ضرب الكميات غير المتجهة	$\lim_{x\to c}[k\,f(x)]=k\lim_{x\to c}f(x)$	ناتج الضرب	$\lim_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to c}f(x)\cdot\lim_{x\to c}g(x)$
ناتج القسمة	$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to c}f(x)}{\lim_{x\to c}g(x)}$، إذا كان $\lim_{x\to c}g(x)\neq0$	القيمة الأسية	$\lim_{x\to c}[f(x)^n]=\left[\lim_{x\to c}f(x)\right]^n$
جذر العدد النوني	$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to c}f(x)}$، إذا كان $\lim_{x\to c}f(x)>0$ حيث n عدد زوجي	السرعة	متوسط $v_{avg}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ لحظي $v(t)=\lim_{h\to0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$

مشتقات

قاعدة القيمة الأسية	إذا كان $f(x)=x^n$, $f'(x)=nx^{n-1}$	ناتج الجمع أو ناتج الطرح	إذا كان $f(x)=g(x)\pm h(x)$, فإن $f'(x)=g'(x)\pm h'(x)$
قاعدة ناتج الضرب	$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	قاعدة ناتج القسمة	$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

التكاملات

تكامل غير محدود	$\int f(x)\,dx=F(x)+C$	النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل	$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$

الرموز

$\in$	أحد عناصر
$\subset$	مجموعة فرعية من
$\cap$	تقاطع
$\cup$	اتحاد
$\varnothing$	مجموعة خالية
$n!$	n مضروب
${}_nP_r$	تبديل العناصر n في وقت ما لـ r
${}_nC_r$	مجموعة من عناصر n في وقت ما لـ r
Σ	سيغما (حرف كبير)، المحصلة
μ	mu، متوسط المجتمع الإحصائي
σ	سيغما (حرف صغير)، انحراف معياري للمجتمع الإحصائي
σ^2	تباين المجتمع الإحصائي
s	انحراف معياري للعينة
s^2	تنوع العينة
$\mathbb{Q}$	الأعداد النسبية
$\mathbb{I}$	الأعداد غير النسبية
$\mathbb{Z}$	الأعداد الصحيحة
$\mathbb{W}$	أعداد كلية
$\mathbb{N}$	أعداد طبيعية
∞	لا نهاية
$-\infty$	لا نهاية سالبة
$[\ ]$	نقطة النهاية موجودة
$(\ )$	نقطة النهاية غير موجودة
$\lim\limits_{x \to c}$	تقترب نهاية مثل x من c
m_{sec}	ميل خط القاطع
$f(x) = \{$	دالة متقطّعة
$f(x) = \|x\|$	دالة بالقيمة المطلقة

$f(x) = [\![x]\!]$	دالة أكبر عدد صحيح
$[f \circ g](x)$	f من g من x تركيبة الدالتان f و g
f^{-1}	معكوس f
$\log_b x$	أساس اللوغاريتم b من x
$\log x$	اللوغاريتم المشترك x
$\ln x$	اللوغاريتم الطبيعي x
π	باي
ω	أوميجا، سرعة الزاوية
α	ألفا، قياس الزاوية
β	بيتا، قياس الزاوية
γ	جاما، قياس الزاوية
θ	ثيتا، قياس الزاوية
λ	لامدا، طول الموجة
ϕ	فاي، قياس الزاوية
$f(x, y)$	f من x و y
$\langle a, b \rangle$	المتجه AB
$\mathbf{a}$	المتجه a
$\|\mathbf{a}\|$	مقدار المتجه **a**
$\sum\limits_{n=1}^{k}$	المحصلة لـ n = 1 إلى k
$\bar{x}$	العمود **x**، متوسط العينة
H_0	فرضية منعدمة
H_a	فرضية بديلة
$f'(x)$	مشتق من f(x)
Δ	دلتا، متغيرة
$\int$	تكامل غير نهائي
$\int_a^b$	تكامل محدود
$F(x)$	مشتق عكسي لـ f(x)

شكر و تقدير

نسخة الطلاب

vi McGraw-Hill Education; Vii McGraw-Hill Education; viii Ermolaev Alexander/Shutterstock.com; ix ©Cultura Creative (RF)/Alamy Stock Photo; x underworld/Shutterstock.com; xi bezergheanu mircea/Alamy; xii Maciej Bledowski/Alamy; xiii Gregg Vignal/Alamy; xiv Ton Kinsbergen/Science Source; xv David Schaffer/age fotostock; xvi Ingram Publishing; xvii sydeen/Shutterstock.com; xviii watthanachai/Shutterstock.com; xix MSGT Michael A. Kaplan/U.S. Air Force; xx imagedb.com/Shutterstock.com; xxi Du Yu/Xinhua/Alamy, 462 David Schaffer/age fotostock; 464 Purestock/SuperStock; 548 Ingram Publishing; 555 zimmytws/Shutterstock.com; 560 (r)Ritu Manoj Jethani/Shutterstock.com, (l)Henryk Sadura/Shutterstock.com; 561 (r)Kiev.Victor/Shutterstock.com, (l)Photographs in the Carol M. Highsmith Archive, Library of Congress, Prints and Photographs Division; 571 Ablestock/Alamy; 600 Drpixel/Shutterstock.com; 608 o10/Shutterstock.com; 626 sydeen/Shutterstock.com; 684 watthanachai/Shutterstock.com; 726 MSGT Michael A. Kaplan/U.S. Air Force; 727 (t) Natursports/Shutterstock.com, (b)SRA Mike Meares/U.S. Air Force; 754 Natursports/Shutterstock.com; 788 (t)Jeff Whyte/Shutterstock.com, (b) Malcolm Fife/age fotostock; 792 imagedb.com/Shutterstock.com; 819 S Di Carlo Darsa/age fotostock; 872 Du Yu/Xinhua/Alamy.

aqdar اقدر
برنامج خليفة لتمكين الطلاب
Khalifa Empowerment Program For Students

برنامج تعزيز الهوية الوطنية

2016 عام القراءة
الإمارات تقرأ.. الإمارات ترقى

mheducation.com/prek-12

978-1-52-681079-3
MHID 1-52-681079-4