T:Mahmoud Murad

حل المعادلات التفاضلية

خطوات حل المعادلة

1. نضع $y' = \frac{dy}{dx}$
2. عائلة x = عائلة y المعادلة فصل المتغيرات
3. ادخال عملية للتكامل للطرفين وحل التكامل
4. ايجاد قيمة c اذا علم $f(a)=b$ > $x=a$, $y=b$
5. ايجاد الدالة $y=f(x)$ في أبسط صورة

ملاحظة: لا يمكن ايجاد الدالة $y=f(x)$ هنا تكون الدالة بالصورة الضمنية

---

① $y' = 2xy$ حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = 2x \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int 2x\, dx$$

$$\ln|y| = x^2 + c$$

الأس للطرفين e

$$e^{\ln y} = e^{x^2+c}$$

$$y = e^{x^2} \cdot e^{c}$$

ثابت c

$$\boxed{y = c\, e^{x^2}}$$

2) $y' = 6xy \quad ; \quad y(1) = 1$

$$\frac{dy}{dx} = 6x \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = 6x\,dx \longrightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int 6x\,dx$$

$$\ln|y| = 3x^2 + c \quad \xleftarrow[y=1]{x=1}$$

$$\ln|1| = 3 + c \longrightarrow 0 = 3 + c \longrightarrow \boxed{c = -3}$$

$$\ln|y| = 3x^2 - 3 \quad \xleftarrow[e]{\text{نأخذ ال}}$$

$$\boxed{y = e^{3x^2 - 3}}$$

---

3) $y' = 4xy \quad ; \quad y(2) = 1$

$$\frac{dy}{dx} = 4xy \longrightarrow \frac{dy}{y} = 4x\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 4x\,dx$$

$$\ln|y| = 2x^2 + c \quad \xleftarrow[y=1]{x=2}$$

$$0 = 8 + c$$

$$c = -8$$

$$\ln|y| = 2x^2 - 8$$

نأخذ ال e ⟵

$$y = e^{2x^2 - 8}$$

3

④ $y' = (2x+1)\cdot(y+3)$

$$\frac{dy}{dx} = (2x+1)(y+3)$$

$$\frac{dy}{(y+3)} = (2x+1)dx$$

$$\int \frac{1}{y+3}\,dy = \int (2x+1)dx$$

$$\ln|y+3| = x^2 + x + C$$

e ← ln

$$y+3 = e^{x^2+x+c}$$

$$y+3 = C\,e^{x^2+x}$$

$\boxed{e^c = C}$

$$y = C\,e^{x^2+x} - 3$$

⑤ $y' = \dfrac{x^2+7x+1}{y^2}$, $y(0)=3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+7x+1}{y^2} \Longrightarrow y^2 dy = (x^2+7x+1)dx$$

$$\int y^2 dy = \int (x^2+7x+1)dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + \frac{7}{2}x^2 + x + c \Longleftarrow \frac{x=0}{y=3}$$

$$9 = 0 + 0 + 0 + c \longrightarrow \boxed{c=9}$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + \frac{7}{2}x^2 + x + 9$$

بالضرب في 3

$$y^3 = x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 3x + 27$$

$\sqrt[3]{\;}$

$$y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{21}{2}x^2 + 3x + 27}$$

6. $y' = \dfrac{9x^2 - \sin x}{\cos y + 5e^y}$, $y(0) = \pi$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(9x^2 - \sin x)}{(\cos y + 5e^y)}$$

$$(\cos y + 5e^y)\,dy = (9x^2 - \sin x)\,dx$$

$$\int (\cos y + 5e^y)\,dy = \int (9x^2 - \sin x)\,dx$$

$$\sin y + 5e^y = 3x^3 + \cos x + c$$

$$\sin(\pi) + 5e^\pi = 0 + \cos(0) + c$$

$$5e^\pi = 1 + c$$

$$\boxed{c = 5e^\pi - 1}$$

$$\sin y + 5e^y = 3x^3 + \cos x + 5e^\pi - 1$$

---

7. $y' = (4x-3)(2y+1)$

8. $y' = \dfrac{3x^2}{4y+2}$, $y(1) = 3$

$$\frac{dy}{2y+1} = (4x-3)\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{(2)\,1}{2y+1}\,dy = \int (4x-3)\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|2y+1| = 2x^2 - 3x + c$$

بالضرب في 2

$$\ln|2y+1| = 4x^2 - 6x + 2c$$

$$2y+1 = c\,e^{4x^2-6x}$$

$$y = \frac{c\,e^{4x^2-6x} - 1}{2}$$

$$(4y+2)\,dy = 3x^2\,dx$$

$$2y^2 + 2y = x^3 + c$$

$$18 + 6 = 1 + c$$

$$\boxed{c = 23}$$

$$2y^2 + 2y = x^3 + 23$$

قابلية فصل المتغيرات

1) $y' = f(x) \cdot f(y)$

قابلة للفصل

2) $y' = \dfrac{f(x)}{f(y)}$

$= \dfrac{f(y)}{f(x)}$

قابلة للفصل

3) $y' = \dfrac{K}{f(x) \cdot f(y)}$

قابلة للفصل

أياً من المعادلات التالية قابلة للفصل وأيها غير قابل للفصل

① $y' = e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y} = \dfrac{f(x)}{f(y)}$

قابلة للفصل

$e^y\,dy = e^x\,dx$

② $y' = 2x\,e^{x+y}$

قابلة للفصل

$\dfrac{dy}{dx} = 2x\,e^x \cdot e^y$

$f(x) \cdot f(y)$

$\dfrac{dy}{e^y} = 2x\,e^x\,dx$

③ $y' = (3x+1) \cdot \cos y$

$f(x) \cdot f(y)$

قابلة للفصل

$\dfrac{dy}{\cos y} = (3x+1)\,dx$

④ $y' = yx^2 - x\cos y$

$y' = x \cdot (yx - \cos y)$

مجموع

غير قابلة للفصل

⑤ $y' = (y^3 - y + 8)(1)$

$f(y) \cdot f(x)$

$\dfrac{dy}{y^3 - y + 8} = dx$

قابلة للفصل

⑥ $y' = \dfrac{1}{y + xy} = \dfrac{1}{y(1+x)} = \dfrac{1}{f(y) \cdot f(x)}$

قابلة للفصل

$y\,dy = \dfrac{1}{1+x}\,dx$

⑦ $y' = (3x+y) \cdot \sin y$

مجموع

غير قابلة للانفصال

⑧ $y' = 2x \cdot (\cos y - 1)$

$f(x) \cdot f(y)$

قابلة للفصل

$\dfrac{dy}{\cos y - 1} = 2x\,dx$

أوجد حل المعادلات التفاضلية بالصيغة العربية

1) $y' = 2x\, e^{x+y}$

$$\frac{dy}{dx} = 2x e^{x} \cdot e^{y}$$

$$\frac{dy}{e^{y}} = 2x e^{x} \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{e^{y}}\, dy = \int 2x \cdot e^{x}\, dx$$

$$-\int -1\, e^{-y}\, dy = \int 2x \cdot e^{x}\, dx$$

تكامل بالاجزاء

$$-e^{-y} = +2x e^{x} - 2e^{x} + c$$

f	g
2x	e^x
2	e^x
0	e^x

(y) ايجاد الدالة

بالضرب -1

$$e^{-y} = -2x e^{x} + 2e^{x} - c$$

$$\ln(e)^{-y} = \ln(-2x e^{x} + 2e^{x} - c) \xleftarrow{\ln(\,)}$$

$$-y = \ln(-2x e^{x} + 2e^{x} - c)$$

$$y = -1 \ln(-2x e^{x} + 2e^{x} - c) \quad \times -1$$

$$= \ln(-2x e^{x} + 2e^{x} - c)^{-1}$$

$$y = \ln\left(\frac{1}{-2x e^{x} + 2e^{x} - c}\right)$$

(2) $y' = \frac{2x}{y} \cdot e^{y-x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y} \cdot \frac{e^{y}}{e^{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{e^{x}} \cdot \frac{e^{y}}{y}$$

$$\frac{y}{e^{y}}\, dy = \frac{2x}{e^{x}}\, dx$$

تم عملية الفصل

$$\int y\, e^{-y}\, dy = \int 2x\, e^{-x}\, dx$$

طريقة الاجزاء في التكامل

f	g
y	e^{-y}
1	$-1\, e^{-y}$
0	$+1\, e^{-y}$

f	g
$2x$	e^{-x}
2	$-\, e^{-x}$
0	$+\, e^{-x}$

$$\Rightarrow -y\, e^{-y} - e^{-y} = -2x\, e^{-x} - 2e^{-x} + C$$

$(x -1)$

$$\frac{y}{e^{y}} + \frac{1}{e^{y}} = \frac{2x}{e^{x}} + \frac{2}{e^{x}} + c$$

[illegible]

3 $y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x \ln x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x \ln x}$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-(y)^2}} = \frac{dx}{x \ln x}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-(y)^2}} dy = \int \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-(y)^2}} dy = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx$$

$$\sin^{-1}(y) = \ln|\ln x| + C \xleftarrow{\sin}$$

$$y = \sin(\ln|\ln x| + c)$$

---

4 $y' = 3(x+1)^2 \cdot y$, $y(0) = 1$

$$\frac{dy}{dx} = 3(x+1)^2 \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = 3(x+1)^2 dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = 3\int 1(x+1)^2 dx$$

دالة القوى للتكامل

$$\int f' \cdot f^n dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\ln|y| = \frac{\cancel{3}(x+1)^3}{\cancel{3}} + c$$

$$0 = (0+1)^3 + c \rightarrow \boxed{c = -1}$$

$$\ln|y| = (x+1)^3 - 1$$

$$y = e^{(x+1)^3 - 1} \xleftarrow[e]{\text{ال أس}}$$

5 $y' = \frac{\tan y}{x}$ ، $y(1) = \frac{\pi}{2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\tan y}{x}$

$\frac{dy}{\tan y} = \frac{1}{x}\,dx$

$\int \frac{1}{\tan y}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$

$\int \cot y\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$

$\ln|\sin x| = \ln|x| + c \quad \leftarrow \frac{y = \frac{\pi}{2}}{x = 1}$

$0 = 0 + c$

$c = 0$

$\ln|\sin x| = \ln|x|$

$\xleftarrow[e]{\text{الاس}}$

$\boxed{\sin x = x}$

---

6 $y' = \frac{x-1}{y^2}$ ؛ $y(0) = 2$

$y^2\,dy = (x-1)\,dx$

$\int y^2\,dy = \int (x-1)\,dx$

$\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}x^2 - x + c \quad \leftarrow \frac{x=0}{y=2}$

$\frac{8}{3} = 0 - 0 + c \quad \longrightarrow c = \frac{8}{3}$

$\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{8}{3}$

بالضرب 3

$y^3 = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 8 \quad \xleftarrow{\sqrt[3]{\ }}$

$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 - 3x + 8}$

7 $y' = \frac{\cos x}{\sin y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin y} \rightarrow \frac{f(x)}{f(y)}$$

$$\sin y \cdot dy = \cos x \, dx$$

$$\int \sin y \, dy = \int \cos x \, dx$$

$$-\cos y = \sin x + c$$

$x -1$

$$\cos y = -\sin x + c \leftarrow \cos^{-1}$$

$$y = \cos^{-1}(-\sin x + c)$$

---

8 $y' = \frac{2}{2xy + y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y(2x+1)}$$

$$y \, dy = \frac{dx}{2x+1}$$

$$\int y \, dy = \frac{1}{2}\int \frac{(2)1}{2x+1} dx$$

$$\frac{1y^2}{2} = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + c$$

بالضرب 2

$$y^2 = \ln|2x+1| + 2c$$

$$y = \pm\sqrt{\ln|2x+1| + C}$$

9 $y' = \dfrac{3y^2}{x^2 - 2x - 3} \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3y^2}{x^2 - 2x - 3}$

$$\frac{dy}{3y^2} = \frac{dx}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \frac{1}{x^2 - 2x - 3}\,dx$$

$$\frac{1}{3}\int y^{-2}\,dy = \int \frac{1}{(x-3)(x+1)}\,dy$$

قواعد   كسور جزئية

$$\frac{1}{3}\,\frac{y^{-1}}{-1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + C$$

بالضرب -3

$$y^{-1} = \frac{-3}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + c$$

$$y = \frac{1}{\frac{-3}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + C}$$

$$\int \frac{1}{(x-3)(x+1)}\,dx$$

$$\frac{1}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

$$1 = A(x+1) + B(x-3)$$

$x = 3 \rightarrow 1 = 4A \rightarrow A = 1/4$

$x = -1 \rightarrow 1 = -4B \rightarrow B = -1/4$

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-3}\,dx + -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-3| - \frac{1}{4}\ln|x+1|$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + C$$

---

10 $y' = \dfrac{x-1}{(x+1)^2} \rightarrow f(y)\cdot f(x)$

$$dy = \frac{x-1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$\int dy = \int \frac{(x-1)}{(x+1)^2}\,dx$$

باستخدام التعويض

$u = x + 1$

$du = dx$

$u = x + 1$

$x = u - 1$

$$y = \int \frac{u - 1 - 1}{u^2}\,du$$

$$= \int \frac{u-2}{u^2}\,du$$

$$= \int \left(\frac{1}{u} - 2u^{-2}\right)du$$

$$= \ln|u| - \frac{2u^{-1}}{-1} + c = \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + c$$

$$y = \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + C$$

١

نمذجة المعادلات التفاضلية

1. النمو التضاؤل الأسي
2. قانون نيوتن للتبريد
3. المزائج المركبة
4. التفاضلات من الأصول

أولاً معادلة النمو الأسي والتضاؤل (الاضمحلال) الأسي

$$y(t) = A e^{kt}$$

$y(t)$ ← هي مقدار (أي شيء) عند الزمن t

A ← = = (أي شيء) عند الزمن $t=0$

k ← مقدار ثابت

t ← هو الزمن

* معادلة نمو أسي ← $k > 0$ موجبة
* معادلة تضاؤل (اضمحلال) أسي ← $k < 0$ سالبة
* الزمن المضاعف :- الزمن الذي تتضاعف فيه y

عند $y=200$ الأصل اوجد الزمن المضاعف ← اوجد t عند $y=400$

مثال / مستنبت بكتيري ملقح حديثاً ببكتريا عصوية A تتكون من 200 خلية. عندما تم فحص المستنبت بعد 60 دقيقة. ثبت أنه تم 450 خلية. حيث فرضاً أن النمو أسي

1) عدد الخلايا في أي زمن t
2) أوجد الزمن المضاعف
3) متى تصير عدد الخلايا 650 خلية

$y = 200$, $t = 0$

$y = 450$, $t = 60$

$y(t) = A e^{kt}$

$200 = A e^{k(0)}$

$\boxed{A = 200}$ ①

$y = A e^{kt}$

$450 = 200 e^{k(60)} \longrightarrow$ Solve

$\boxed{k = 0.014}$

$\boxed{y(t) = 200 e^{0.014 t}}$ عدد الخلايا عند أي زمن t هو

الزمن المضاعف

$y = 200 \longleftarrow t = 0$

$y = 400 \longrightarrow t\,???$

$y = 200 e^{0.014t} \longrightarrow 400 = 200 e^{0.014t} \longrightarrow$ slove

$t = 49.5$ min

بعد مرور تقريباً 50 دقيقة تتضاعف الخلايا

متى تصير عدد الخلايا 650 خلية

$650 = 200 e^{0.014t}$ solve

$t = 84.2$ min

بعد مرور 84 دقيقة تقريباً تصبح عدد الخلايا 650 خلية.

مثال 2

على فرض ان مستنبت بكتيري يحتوي في البداية على 400 خلية . وبعد ساعة واحدة . يتضاعف عدد الخلايا الى 800 خلية . اجب عما يلي

1. جد عدد أفراد المجتمع بسرعة بعد 3 ساعات .
2. اوجد معادلة للمجتمع في أي زمن
3. كم سيكون عدد أفراد المجتمع الخلايا بعد 3.5 ساعة

$y = 400 , t = 0$

$y = 800 , t = 1$

$t = 0 \longrightarrow y = 400$

$t = 1 \longrightarrow y = 800$

$t = 2 \longrightarrow y = 1600$

$t = 3 \longrightarrow y = 3200$

بعد مرور ثلاث ساعات عدد الخلايا 3200 خلية
بالاعتماد على الزمن المضاعف

$y = 400 , t = 0 \longrightarrow y = A e^{kt}$

$400 = A e^{0} \rightarrow \boxed{A = 400}$

$y = 800 , t = 1 \longrightarrow y = A e^{kt}$

$800 = 400 e^{k(1)} \rightarrow \boxed{K = 0.7}$

$$\boxed{y(t) = 400 e^{0.7t}}$$

$y = ??? , t = 3.5$

$y = 400 e^{0.7t}$

$y = 400 e^{0.7(3.5)}$

$y = \underline{4635.3}$

بعد مرور 3.5 ساعة عدد الخلايا 4635 خلية

الإضمحلال الإشعاعي $k<0$

4

مثال ٣: إن نصف العمر لليورانيوم ^{235}U هو حوالي 0.7×10^{9} عاماً.

إذا تم دفن 40 جرام في أحد مواقع النفايات النووية.

١) أوجد الكمية المتبقية بعد 100 عام، 1000 عام

٢) ماذا تلاحظ؟

$y = 40g \quad , \quad t = 0$

$y = 20g \quad , \quad t = 0.7\times10^{9}$

$y = Ae^{kt}$

$40 = Ae^{k(0)}$

$\boxed{A = 40}$

$y = Ae^{kt}$

$20 = 40e^{k(0.7\times10^{9})}$

$\boxed{k = -4\times10^{-38}}$

$$\boxed{y(t) = 40e^{-4\times10^{-38}t}}$$

$y = 40e^{-4\times10^{-38}(100)}$

$= \boxed{40g}$

$y = 40e^{-4\times10^{-38}(1000)}$

$= \boxed{40g}$

لأن زمن فترة نصف العمر كبير جداً

④ إذا كان لديك $50g$ من ^{14}C اليوم.

فما مقدار الكمية المتبقية بعد 150 عام؟

علماً بأن فترة نصف العمر لـ ^{14}C هي 5730 عام تقريباً

$y = 50, \quad t = 0 \longrightarrow y = Ae^{kt} \longrightarrow 50 = Ae^{0} \longrightarrow \boxed{A = 50}$

$y = 25, \quad t = 5730$ عام $\longrightarrow 25 = 50e^{k(5730)} \longrightarrow \boxed{k = -1.21\times10^{-4}}$

$$\boxed{y = 50e^{-1.21\times10^{-4}t}}$$

$y = 50e^{-1.21\times10^{-4}(150)}$

$y = \underline{49.1}\ g$

ثانياً: قانون نيوتن للتبريد

$$\boxed{y(t) = A e^{kt} + T_a}$$

$y(t)$ ⟵ درجة حرارة المشروب عند أي زمن t

A ⟵ y = = = = = = $\boxed{t=0}$

K ⟵ ثابت

t ⟵ الزمن

T_a ⟵ درجة حرارة الغرفة (المكان)

تبلغ درجة حرارة فنجان القهوة السريعة $85°C$ عندما يسكب طازجاً. بعد دقيقتين في غرفة درجة حرارتها $20°C$، تبرد القهوة حتى وصلت الى $70°C$

1. اوجد درجة الحرارة في أي زمن t
2. اوجد الزمن التي تصل فيه درجة حرارة القهوة الى $50°C$

$y = 85$ و $t = 0$ $\quad T_a = 20$

$y = 70$ و $t = 2$

$y = A e^{kt} + T_a \rightarrow 85 = A e^{k(0)} + 20 \rightarrow \boxed{A = 65}$

$\rightarrow 70 = 65 e^{k(2)} + 20 \rightarrow k = -0.13$

$$\boxed{y = 65 e^{-0.13t} + 20}$$

$y = 65 e^{-0.13t} + 20$

$50 = 65 e^{-0.13t} + 20$

$t = 5.95$

بعد مرور 6 دقائق تصبح درجة حرارة القهوة $50°C$

تم صب مشروب مثلج ذو درجة حرارة $10^{\circ}C$. وبعد دقيقتين وضعت في غرفة درجة الحرارة بها $21^{\circ}C$. ارتفعت درجة حرارته الى $13^{\circ}C$ أجب

1. اوجد درجة حرارة المشروب عند اى زمن t
2. كم ستبلغ درجة الحرارة بعد 10 دقائق
3. متى سيتم تسخين المشروب حتى $19^{\circ}C$

$y = 10 \quad , t = 0 \qquad T_a = 21$

$y = 13 \quad , t = 2$

$$y = A e^{kt} + T_a \rightarrow 10 = A e^{k(0)} + 21 \rightarrow A = -11$$

$$13 = -11 e^{k(2)} + 21 \longrightarrow k = -0.16$$

$$\boxed{y(t) = -11 e^{-0.16t} + 21}$$

درجة حرارة المشروب عند أى زمن t

درجة حرارة المشروب بعد 10 دقائق

$$y(t) = -11 e^{-0.16(10)} + 21 = 18.8^{\circ}C$$

الزمن اللازم لتغير درجة حرارة المشروب $19^{\circ}C$

$$19 = -11 e^{-0.16(t)} + 21$$

$$t = 10.7 \text{ min}$$

ثالثاً الرابح المركب

(أ) تعتمد على عدد مرات تحول الارباح من السنة
معدل الفائدة السنوية r

* مرابحة مركبة سنوية ⟵ $n=1$
* مرابحة مركبة نصف سنوية ⟵ $n=2$
* مرابحة مركبة ربع سنوية ⟵ $n=4$
* مرابحة مركبة شهرية ⟵ $n=12$
* مرابحة مركبة يومية ⟵ $n=365$

$$\boxed{y = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}}$$

P رأس المال (معطى من السؤال)
y الرصيد بعد t من الزمن

(ب) مستمرة
معدل الفائدة السنوية r

$$\boxed{y = P e^{rt}}$$

P رأس المال (معطى من السؤال)
r معدل الفائدة
t عدد السنوات
y الرصيد بعد مرور t سنة

اذا إستثمرت (200 000) درهم بمعدل مرابحة سنوية 5.75% ، قارن نتيجة الاستثمار لبعد 5 سنوات

$P = 200000$

$r = \frac{5.75}{100}$

$r = 0.0575$

$t = 5$

اولاً مع مرابحة مركبة سنوية $\longleftarrow$ $\boxed{n=1}$

$$y = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$= 200000\left(1+\frac{0.0575}{1}\right)^{1(5)}$$

$$y = \underline{264503.8}$$

ثانياً مع مرابحة مركبة نصف سنوية $\longleftarrow$ $\boxed{n=2}$

$$y = 200000\left(1+\frac{0.0575}{2}\right)^{2(5)}$$

$$= \underline{265539.1}$$

ثالثاً مع مرابحة مركبة شهرية $\longleftarrow$ $\boxed{n=12}$

$$y = 200000\left(1+\frac{0.0575}{12}\right)^{12(5)}$$

$$= \underline{266435.1}$$

رابعاً مع مرابحة مركبة يومية $\longleftarrow$ $\boxed{n=365}$

$$y = 200000\left(1+\frac{0.0575}{365}\right)^{5(365)}$$

$$= \underline{266612.1}$$

خامساً مع مرابحة مركبة مستمرة

لا يوجد n

$$y = Pe^{rt} \rightarrow y = 200000\, e^{0.0575(5)}$$

$$= \underline{266618.1}$$

المرابحة المركبة المستمرة هي الافضل

رابعاً انخفاض الاصول

أ) قيمة الاصول y

$$\boxed{y = A e^{rt}}$$

r معدل الانخفاض في الاصول (سالبة)

t زمن

y قيمة الاصول عند أي زمن t

ملاحظة: ارتفاع في الاصول لنفس القانون

$r > 0$ موجب

ب) الانخفاض الخطي للأصول

مسار خط مستقيم

$$\boxed{y - y_1 = m(t - t_1)}$$

ميل

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}$

نقطة

(t, y)

على فرض أن قيمة أحد الأصول 40000 درهم تتناقص بنسبة مئوية ثابتة 10% ، أوجد

1) أوجد قيمة الأصول بعد ١٠ سنوات ، 20 سنة

2) نفترض تقدير هذه القيم واحد الأصول الذي تبلغ قيمته 40000 درهم ويصبح بلا قيمة خلال 20 عام باستخدام التناقص الخطي

$$y = 40000 \ , \ t = 0 \ , \ r = -\frac{10}{100} = -0.1$$

$$y = A e^{rt} \longrightarrow 40000 = A e^{-0.1(0)}$$

$$A = 40000$$

$$\boxed{y = 40000 e^{-0.1t}}$$

$$y(10) = 40000 e^{-0.1(10)} = 14715.2$$

$$y(20) = 40000 e^{-0.1(20)} = 5413.4$$

$$y = 40000 \ , \ t = 0 \longrightarrow (t, y) = (0, 40000)$$

$$y = 0 \ , \ t = 20 \longrightarrow (t, y) = (20, 0)$$

معادلة الخط المستقيم

$$m = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - 40000}{20 - 0} = -2000$$

$$y - 0 = -2000(t - 20)$$

$$\boxed{y = -2000t + 40000}$$

معادلة الانخفاض الخطي للأصول