20

السؤال الأول

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

1) أوجد $\int (x^5 - 2)dx$

a) $\frac{x^5}{5} - 2x + c$

b) $\frac{x^6}{6} - 2x + c$

c) $5x^6 - 2x + c$

d) $5x^4 - 2x^2 + c$

2) أوجد $\int \csc^2 x\, dx$

a) $\tan x + c$

b) $-\cos x + c$

c) $\cot x + c$

d) $-\cot x + c$

3) أوجد $\int \frac{e^{2x}}{7 + e^{2x}} dx$

$= \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2x}}{7 + e^{2x}} dx$

a) $2\ln\left|e^{2x}\right| + c$

b) $\frac{2}{7}\ln\left|e^{2x}\right| + c$

c) $\frac{1}{2}\ln\left|7 + e^{2x}\right| + c$

d) $7x + e^{2x} + c$

4) أوجد $\int \frac{3}{1 + x^2} dx$

$3 \int \frac{1}{1 + x^2} dx$

$3\tan^{-1} x + c$

a) $3\tan^{-1} x + c$

b) $3\cos^{-1} x + c$

c) $\frac{1}{3}\tan^{-1} x + c$

d) $3\sin^{-1} x + c$

$\sum^{n} k = k\cdot n$

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5) احسب $\sum_{i=1}^{6}(i+4)$

a) 38

b) 21

c) 45

d) 24

$\frac{6(7)}{2} + 4(6)$

$= 21 + 24 = 45$

6) اكتب التعبير $\int_{-1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{4} f(x)dx$ في صورة تكامل منفرد .

$\int_{-1}^{2} f\,dx + \int_{2}^{4} f\,dx$

a) $\int_{-1}^{2} f(x)dx$

$\int_a^c + \int_c^b = \int_a^b$

b) $\int_{-1}^{4} f(x)dx$

c) $\int_{2}^{4} f(x)dx$

d) $\int_{2}^{-1} f(x)dx$

7) إذا كان $\int_0^2 g(x)dx = 5$ و $\int_0^2 f(x)dx = -8$ ، فأوجد $\int_0^2 (3g(x) - f(x))dx$

نوزع التكامل فقط ع الجمع والطرح فقط

a) 23

b) 7

c) 13

d) -13

$3\int_0^2 g(x)dx - \int_0^2 f(x)dx$

$= 3(5) - (-8)$

$= 15 + 8 = \boxed{23}$

8) احسب القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 4x + 1$ على الفترة $[1,3]$.

$f(av) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\,dx$

a) 5

b) 10

c) 18

d) 9

$= \frac{1}{2}\int_1^3 (4x+1)dx$

$= \frac{1}{2}[2x^2 + x]_1^3$

$= \frac{1}{2}[21 - 3]$

$= 9$

Scanned by CamScanner

إذا كانت $F(x)=\int_{x}^{2}(t-5)\,dt$ أوجد $F'(x)$.

$F=-\int_{2}^{x}(t-5)\,dt$

$F'=-1(x-5)=-x+5=5-x$

a) $F'(x)=2x-5$

b) $F'(x)=5-x$

c) $F'(x)=x+5$

d) $F'(x)=x-5$

10) اكتب التعبير $\ln\sqrt{3}+\ln 9$ في صورة حد واحد .

خواص اللوغاريتمات

$=\ln(\sqrt{3}\cdot 9)$

$=\ln(3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{2})$

$=\ln(3)^{\frac{5}{2}}$

$=\frac{5}{2}\ln(3)$

a) $2\ln 3$

b) $3\ln 3$

c) $\frac{2}{5}\ln 3$

d) $\frac{5}{2}\ln 3$

11) أوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط $f'(x)=e^{-x}$ و $f(0)=4$.

a) $f(x)=5-e^{-x}$

$f(0)=4$

$f'(x)=0--1e^{-x}=e^{-x}$

b) $f(x)=5+e^{-x}$

$f(0)=6$

c) $f(x)=3-e^{-x}$

d) $f(x)=3+e^{-x}$

$f(0)=4$

$f'(x)=-1e^{-x}=-e^{-x}$

12) أوجد قيمة التكامل $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx$

الحاسبة Rad

$\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left[\left(\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=1$

a) -1

b) 2

c) 1

d) -2

ملاحظة $e^{\ln x} = x$ $\boxed{e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2}$

13) أوجد $\int 2e^{\ln x} dx$

$\boxed{a)\ x^2 + c}$ $\int 2x\,dx = x^2 + c$

b) $2x^{-1} + c$

c) $\ln x^2 + c$

d) $2e^x + c$

14) أوجد $\int \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$ نعوض

$\frac{1}{x} = u \rightarrow \frac{-1}{x^2} dx = du$

$dx = -x^2 du$

$= \int \frac{1}{x^2} \cdot \cos(\frac{1}{x}) dx$

$= \int \frac{1}{x^2} \cos(u) \cdot (-x^2) du$

$= -\int \cos u \, du$

$= -\sin u + c = -\sin(\frac{1}{x}) + c$

a) $-\sin\frac{1}{x^2} + c$

b) $\sin\frac{1}{x} + c$

c) $-\sin\frac{1}{x} + c$

d) $\sin\frac{1}{x^2} + c$

15) أوجد $\int 2\sin^2 x \, dx$

$\int \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}(1 - \cos 2x) dx$

$= x - \frac{1}{2}\sin 2x + c$

a) $-2\sin x\cos x + c$

b) $x - \frac{\sin 2x}{2} + c$

c) $\frac{\sin^3 x}{3} + c$

d) $2\sin x\cos x + c$

16) أوجد $\frac{d}{dx}\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)$ يجب تطبيق خواص اللوغاريتميا

$y = \ln(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$

$y = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

$y' = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}x}{x^2+1}\right)$

④

$y' = \frac{x}{x^2+1}$

a) $x^2 + 1$

b) $2x$

c) $\frac{2x}{x^2+1}$

d) $\frac{x}{x^2+1}$

17) أوجد حجم المجسم مع مساحة المقطع العرضي $A(x) = 2 + x$ لكل $-1 \le x \le 3$

$V = \int_a^b A(x)\,dx$

$V = \int_{-1}^{3} (2+x)\,dx = 12$

a) 9 b) 12

c) 4 d) 11

18) أوجد طول القوس لجزء من منحنى $y = \sqrt{1-x^2}$ مع $0 \le x \le \frac{1}{2}$

$S = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$

$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$(y')^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$

$S = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{6}$

a) $s = \frac{\pi}{6}$ b) $s = \frac{\pi}{4}$

c) $s = \frac{\pi}{2}$ d) $s = \frac{\pi}{3}$

19) يعبر عن مساحة سطح مكونة من تدوير منحنى $y = x^2$ لكل $0 \le x \le 1$

$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx$

$y' = 2x$

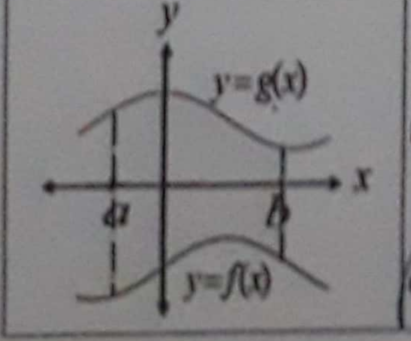
$(y')^2 = 4x^2$

a) $S = \int_0^1 2\pi x^2 \sqrt{1+2x^2}\,dx$ b) $S = \int_0^1 2\pi x^2 \sqrt{1+2x}\,dx$

c) $S = \int_0^1 2\pi x^2 \sqrt{1+x^2}\,dx$ d) $S = \int_0^1 2\pi x^2 \sqrt{1+4x^2}\,dx$

$S = \int_0^1 2\pi x^2 \sqrt{1+4x^2}\,dx$

20) أوجد المساحة المحدودة بين المنحنيين في الشكل المجاور .



a) $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$ b) $\int_a^b f(x)dx$

c) $\int_a^b [g(x)-f(x)]dx$ d) $\int_a^b g(x)dx$

5

$A = \int_a^b [(\text{الدالة العليا}) - (\text{الدالة السفلى})]\,dx$

$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$

السؤال الثاني

تكامل عددي

30

(21) قرب قيمة $\int_{2}^{10}(x^2+1)\,dx$ باستخدام قاعدة نقطة المنتصف مع $n = 4$.

① $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-2}{4} = \boxed{2}$

② $x_i = a + \Delta x\, i - \frac{\Delta x}{2} = 2 + 2i - \frac{2}{2} = 1 + 2i$

③ $f(x_i) = (1+2i)^2 + 1 = 1 + 4i + 4i^2 + 1$
$= 4i^2 + 4i + 2$

القانون ④ $I = \int_2^{10} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{4}(4i^2+4i+2)(2)$

$= \sum_{i=1}^{4}(8i^2+8i+4) = \frac{8(4)(5)(9)}{6} + \frac{8(4)(5)}{2} + 4(4)$

$= \boxed{336}$

(22) أوجد قيمة التكامل $\int \frac{x-5}{x^2-1}\,dx$.

التكامل بالنسبة

درجة البسط < درجة المقام (المقام يحلل) نستخدم الكسور الجزئية

$\frac{x-5}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ بالضرب $(x-1)(x+1)$

$x - 5 = A(x+1) + B(x-1)$

أصفار المقام
$x = 1 \longrightarrow -4 = 2A \longrightarrow A = -2$
$x = -1 \longrightarrow -6 = -2B \longrightarrow B = 3$

$I = \int \frac{-2}{x-1}\,dx + \int \frac{3}{x+1}\,dx$
$= -2\ln|x-1| + 3\ln|x+1| + C$

محمد دراز

6

1) أوجد قيمة التكامل $\int 4e^{-2\sqrt{x}}\,dx$

$u = -2\sqrt{x}$

$du = -2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$

$dx = -\sqrt{x}\,du$

$\sqrt{x} = \frac{u}{-2}$

$$I = \int 4e^{u}\cdot(-\sqrt{x})\,du$$

$$= \int 4e^{u}\left(\frac{u}{2}\right)du$$

$$= \int 2u\,e^{u}\,du$$

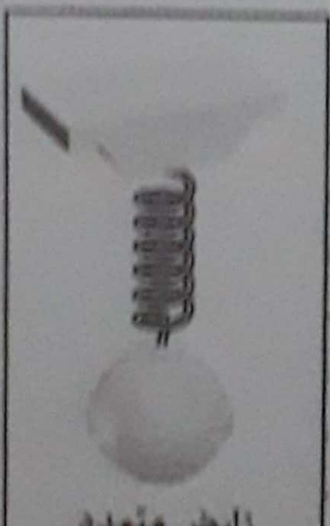
$$= 2ue^{u} - 2e^{u} + c$$

$$= -4\sqrt{x}\,e^{-2\sqrt{x}} - 2e^{-2\sqrt{x}} + c$$

$$\boxed{-4\sqrt{x}\,e^{-2\sqrt{x}} - 2e^{-2\sqrt{x}} + c}$$

2) تعمل قوة قدرها 5 نيوتن على تمدد نابض 0.04 مترًا من طوله الطبيعي ، أوجد الشغل المبذول في تمدد النابض 8 سنتيمترًا أكثر من طوله الطبيعي .

$0.08\,m$


نابض متمدد

$$F = kx \Rightarrow 5 = k(0.04)$$

$$k = 125$$

$$W = \int_0^{b} kx\,dx$$

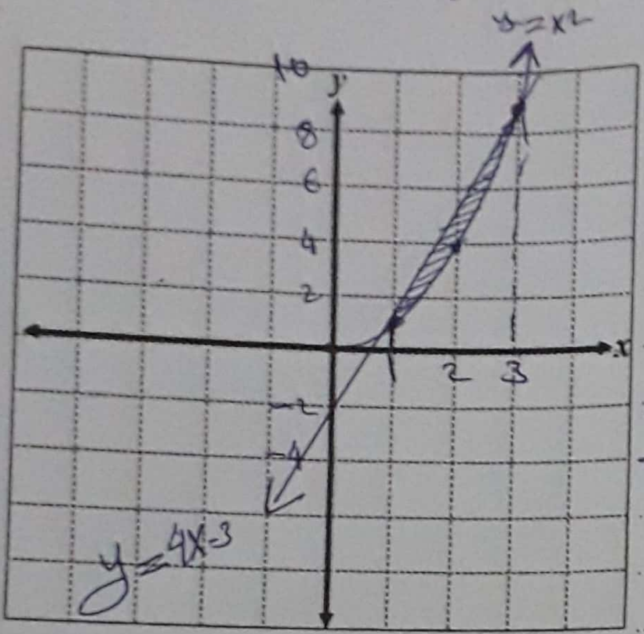
$$= \int_0^{0.08} (125x)\,dx$$

$$= \left[\frac{125x^2}{2}\right]_0^{0.08} = \frac{2}{5} \cdots \boxed{\frac{2}{5}}$$

Scanned by CamScanner

محمود مراد

25) ارسم وأوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = 4x - 3$, $y = x^2$



تحديد حدود التكامل بمساواة الدالتين

$x^2 = 4x-3 \to x^2-4x+3=0$

$x=3 , x=1 \to [1,3]$

$A=\int_1^3 [(4x-3)-(x^2)]\,dx$

$=\int_1^3 (4x-3-x^2)\,dx$

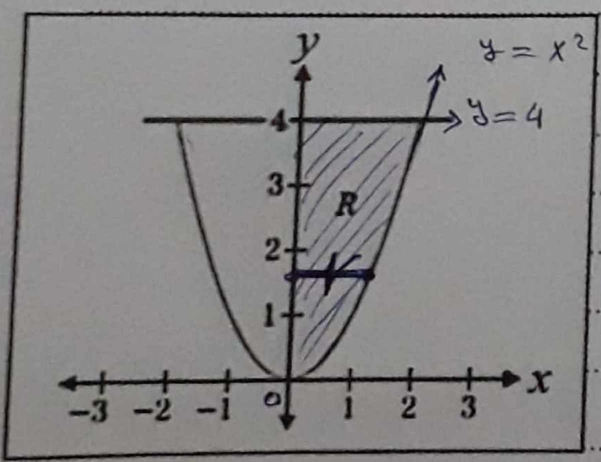
$=\left[2x^2-3x-\frac{x^3}{3}\right]_1^3$

$=[(0)-(-4/3)]$

$=4/3$ units^2

26) في الشكل المجاور إذا كانت R المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 4$.

أوجد حجم المجسم الذي تكون من دوران المنطقة R حول المحور y .



$A(y)=\pi r^2=\pi(\sqrt{y}-0)^2$

$=\pi y$

$V=\int_0^4 \pi y\,dy$

$=\pi\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4$

$=\pi[8-0]=8\pi$ units^3

$y=x^2$

$x=\pm\sqrt{y}$