الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

عام التسامح

2018 - 2019

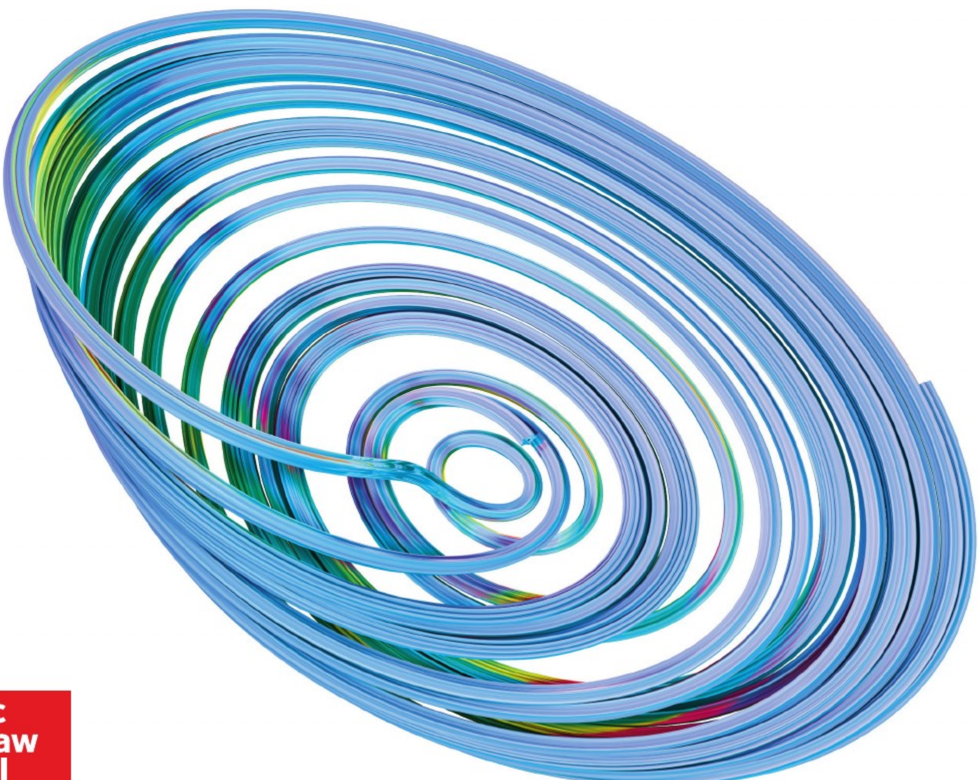
12

McGraw-Hill Education

الرياضيات

المسار المتقدّم

نسخة الإمارات العربية المتحدة



Mc Graw Hill Education

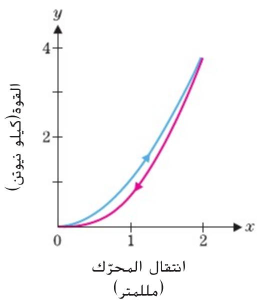
الوحدة 6

تطبيقات التكامل المحدود

غالبًا ما يقَال إنّ الرياضيين الذين يمكنهم القفز عاليًا لديهم "نوابض في أرجلهم". فقد اتضح أنّ الأوتار والأقواس في قدميك تعمل إلى حد كبير مثل النوابض، من حيث تخزين الطاقة وإطلاقها. على سبيل المثال، يتمدّد وتر العرقوب لديك عندما تخطو خطوات واسعة أثناء المشي ثم ينقبض عندما تلامس قدمك الأرض. على غرار النابض الذي يتمدّد ومن ثم يطلِق، يخزّن الوتر الطاقة أثناء مرحلة التمدّد ومن ثم يطلِقها عند الانقباض.

يقيس علماء الفسيولوجيا كفاءة آلية عمل الأوتار التي تشبه النابض بطريقة حساب النسبة المئوية للطاقة المنطلقة أثناء الانقباض إلى الطاقة المخزّنة أثناء التمدّد. يظهر منحنى الإجهاد والانفعال المعروض هنا القوة كدالة للتمدّد أثناء التمدّد (المنحنى العلوي) والارتداد (المنحنى السفلي) لقوس القدم البشرية. (أعيدت طباعة الشكل من *Exploring Biomechanics* بقلم ر. ماكنيل ألكسندر بعد الحصول على تصريح). إذا لم تفقد أي طاقة، يكون المنحنيان متطابقين. المساحة بين المنحنيين هي قياس الطاقة المفقودة.

يظُهر المنحنى المناظر لقدم الكانجارو (انظر ألكسندر) عدم وجود أي مساحة تقريبًا بين المنحنيين. تعني كفاءة أرجل الكانجارو أنهّ يلزم قدر قليل للغاية من الطاقة للقفز. في الواقع، وجد عالم الأحياء تيري داوسون في اختبارات جهاز الجري أنهّ، كلما زادت سرعة جري حيوانات الكانجارو، تقل الطاقة التي تحرقها (إلى حد الاختبار الذي يبلغ 32 km/h). وينطبق المبدأ نفسه على الرياضيين من البشر، من حيث إنهّ كلما تمدّدت أوتار العرقوب، تصبح عملية الجري أكثر كفاءة. لهذا السبب، يقضي الرياضيون قدرًا كبيرًا من الزمن في تمديد وتقوية أوتار العرقوب لديهم.



توضّح هذه الوحدة تنوّع استخدامات التكامل من خلال استكشاف العديد من التطبيقات. ونبدأ مع حساب المساحات بين منحنيين. يمكن رؤية التكامل من منظورات مختلفة: بيانيًا (المساحات) وعدديًا (التقديرات التقريبية لمجموع ريمان) ورمزيًا (النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل). بينما تقوم بدراسة كل تطبيق جديد، انتبه لكيفية قيامنا بتطوير التكامل (التكاملات) لقياس كمية ما.

6-1 المساحة المحصورة بين منحنيين

في البدء طوّرنا التكامل المحدود لحساب المساحة تحت منحنى. على وجه الخصوص. لتكن f دالة متصلة معرّفة على $[a, b]$. حيث $f(x) \geq 0$ على $[a, b]$. لإيجاد المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ على الفترة $[a, b]$. نبدأ بتجزئة $[a, b]$ إلى n فترات جزئية متساوية

فيكون، $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. والنقاط في التجزئة عندئذٍ هي $x_0 = a, x_1 = x_0 + \Delta x, x_2 = x_1 + \Delta x$ وهكذا. أي إنّ،

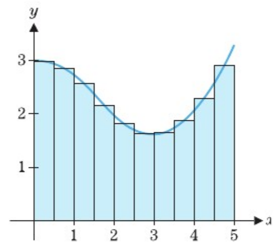
$$x_i = a + i\Delta x \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

على كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$. نقوم بإنشاء مستطيل له الارتفاع $f(c_i)$. لبعض $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. كما هو مبيّن في الشكل 6.1 وحساب مجموع مساحات n من المستطيلات كقيمة تقريبية للمساحة A الواقعة تحت المنحنى:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x$$

بينما نأخذ عددًا أكبر من المستطيلات، يقترب هذا المجموع من القيمة الدقيقة للمساحة، وهي

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x = \int_a^b f(x)\, dx$$



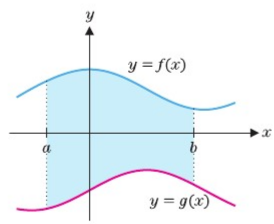
الشكل 6.1

القيمة التقريبية للمساحة

نحن الآن نوسّع هذا المفهوم لإيجاد المساحة المحدودة بين المنحنيين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ على الفترة $[a, b]$ (انظر الشكل 6.2). حيث f و g متصلتان و $f(x) \geq g(x)$ على $[a, b]$. نقوم أولا باستخدام مستطيلات لتقريب المساحة. في هذه الحالة. على كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$. يتم إنشاء مستطيل. يمتد من المنحنى الأدنى $y = g(x)$ إلى المنحنى الأعلى $y = f(x)$. على النحو المبيّن في الشكل 6.3a. بالرجوع إلى الشكل 6.3b. نجد أن المستطيل عند الحد i له الارتفاع $h_i = f(c_i) - g(c_i)$. لبعض $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

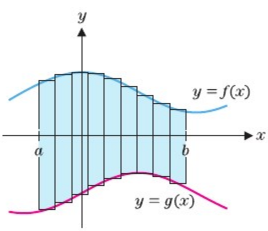
لذا، فإن مساحة المستطيل عند الحد i هي

$$\text{المساحة} = \text{الطول} \times \text{العرض} = h_i \Delta x = [f(c_i) - g(c_i)]\, \Delta x$$



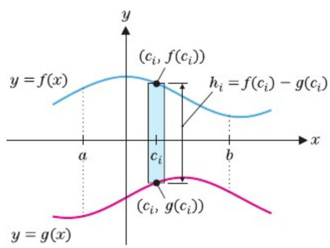
الشكل 6.2

المساحة بين منحنيين



الشكل 6.3a

القيمة التقريبية للمساحة



الشكل 6.3b

مساحة المستطيل عند الحد i

وتكون المساحة الكلية عندئذٍ تساوي تقريبًا مجموع مساحات n من المستطيلات المحددّة،

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)] \, \Delta x$$

وأخيرًا، لاحظ أنّه إذا كانت النهاية عندما $n \to \infty$ موجودة، فسوف نحصل على المساحة الدقيقة، والتي نعرّفها باعتبارها تكاملًا محدودًا:

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين

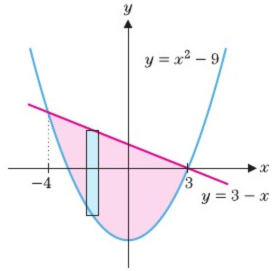
$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)] \, \Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx \qquad (1.1)$$

ملحوظة 1.1

الصيغة (1.1) صحيحة عندما تكون $f(x) \geq g(x)$ على الفترة $[a, b]$. بشكلٍ عام، تعُطى المساحة بين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ لأجل $a \leq x \leq b$ بالعلاقة $\int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$ لاحظ أنّه لإيجاد قيمة هذا التكامل، يجب عليك إيجاد قيمة $\int_c^d [f(x) - g(x)] \, dx$ على جميع الفترات الجزئية حيث $f(x) \geq g(x)$. ثم إيجاد قيمة $\int_c^d [g(x) - f(x)] \, dx$ على جميع الفترات الجزئية حيث $g(x) \geq f(x)$ وأخيرًا، اجمع التكاملات.

المثال 1.1 إيجاد مساحة منطقة بين منحنيين

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين $y = 3 - x$ و $y = x^2 - 9$. (انظر الشكل 6.4).



الشكل 6.4

$y = 3 - x$ و $y = x^2 - 9$

الحل لاحظ أنّ حدود التكامل تناظر الإحداثيات x لنقاط تقاطع المنحنيين. بالمساواة بين الدالتين، يكون لدينا

$$3 - x = x^2 - 9 \quad \text{أو} \quad 0 = x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$$

لذا، يتقاطع المنحنيان عندما $x = -4$ و $x = 3$. مع العلم أنّ الحد الأعلى للمنطقة يتكوّن من $y = 3 - x$ والحد الأدنى يتكوّن من $y = x^2 - 9$. لذا، لكل قيمة ثابتة لـ x، يبلغ المستطيل (مثل ذلك المبيّن في الشكل 6.4)

$$h(x) = (3 - x) - (x^2 - 9)$$

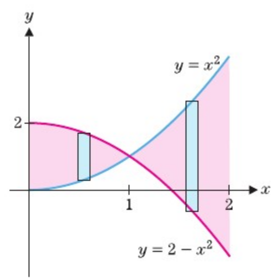
من (1.1)، المساحة بين المنحنيين هي:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^{3} [(3 - x) - (x^2 - 9)]\, dx \\ &= \int_{-4}^{3} (-x^2 - x + 12) = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x\right]_{-4}^{3} \\ &= \left[-\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 12(3)\right] - \left[-\frac{(-4)^3}{3} - \frac{(-4)^2}{2} + 12(-4)\right] = \frac{343}{6} \end{aligned}$$

في بعض الأحيان، لا يتم تعريف الحد الأعلى أو الأدنى بدالة واحدة، كما في الحالة التالية من التمثيلات البيانية المتقاطعة.

المثال 1.2 إيجاد مساحة منطقة بين منحنيين متقاطعين

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين التمثيلين البيانيين $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$ لأجل $0 \le x \le 2$.



الشكل 6.5

$y = x^2$ و $y = 2 - x^2$

الحل لاحظ من الشكل 6.5 أنه، بما أنّ المنحنيين يتقاطعان في منتصف الفترة، فسنحتاج لحساب تكاملين، واحد على الفترة عندما يكون $2 - x^2 \ge x^2$ والآخر على الفترة عندما يكون $x^2 \ge 2 - x^2$. ولإيجاد نقطة التقاطع، نحل المعادلة: $x^2 = 2 - x^2$، ومنها $2x^2 = 2$ أو $x^2 = 1$ أو $x = \pm 1$. نظرًا إلى أنّ $x = -1$ تقع خارج المجال، فإنّ التقاطع الوحيد المقبول يقع عند $x = 1$. من (1.1)، وتكون المساحة

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 [(2 - x^2) - x^2]\, dx + \int_1^2 [x^2 - (2 - x^2)]\, dx \\ &= \int_0^1 (2 - 2x^2)\, dx + \int_1^2 (2x^2 - 2)\, dx = \left[2x - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{2x^3}{3} - 2x\right]_1^2 \\ &= \left(2 - \frac{2}{3}\right) - (0 - 0) + \left(\frac{16}{3} - 4\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4 \end{aligned}$$

في المثال 1.3، يجب تقريب نقاط التقاطع عدديًا.

المثال 1.3 حالة تكون فيها نقاط التقاطع معروفة تقريبيًا فقط

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين التمثيلين البيانيين $y = \cos x$ و $y = x^2$.

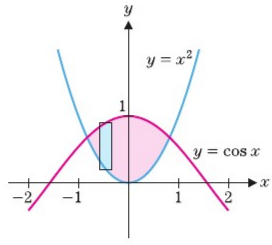
الحل التمثيل البياني $y = \cos x$ و $y = x^2$ في الشكل 6.6 يشير إلى التقاطعات عند $x = -1$ و $x = 1$، حيث $\cos x = x^2$. ومع ذلك، لا يمكن حل هذه المعادلة تمامًا. بدلاً من ذلك، نستخدم طريقة إيجاد الجذر للحصول على الحلول التقريبية $x = \pm 0.824132$. [على سبيل المثال، يمكنك استخدام طريقة نيوتن للبحث عن قيم x التي يكون عندها $f(x) = \cos x - x^2 = 0$.] من التمثيل البياني، يمكننا أن نرى أنّ ما بين قيمتا x هذه، $\cos x \geq x^2$ وهكذا، تُعطى المساحة المطلوبة كما يأتي:

$$A \approx \int_{-0.824132}^{0.824132} (\cos x - x^2)\, dx = \left[\sin x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-0.824132}^{0.824132}$$

$$= \sin 0.824132 - \frac{1}{3}(0.824132)^3 - \left[\sin(-0.824132) - \frac{1}{3}(-0.824132)^3\right]$$

$$\approx 1.09475.$$

لاحظ أننّا قمنا بتقريب كلٍ من حدّيْ التكامل والحسابات النهائية.



الشكل 6.6

$y = x^2$ و $y = \cos x$

قد يتطلب إيجاد مساحة بعض المناطق تقطيعها إلى عدة أجزاء، بحيث يكون لكل منها حد أعلى وحد أدنى مختلفة عن بعضها.

المثال 1.4 مساحة منطقة تحدّدها ثلاثة منحنيات

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين التمثيلين البيانيين $y = x^2$، $y = 2 - x$ و $y = 0$.

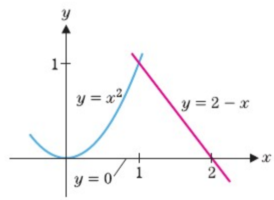
الحل يظهر رسم للمنحنيات الثلاثة المحدّدة في الشكل 6.7a. لاحظ أنّ الحد الأعلى للمنطقة هو المنحنى $y = x^2$ في الجزء الأول من الفترة والمستقيم $y = 2 - x$ في الجزء الثاني. لتحديد نقطة التقاطع. نحل المعادلة الناتجة عن مساواة الدالتين

$$2 - x = x^2 \quad \text{أو} \quad 0 = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

نظرًا إلى أنّ $x = -2$ يقع إلى يسار المحور y. فالتقاطع المطلوب يحدث عند $x = 1$. فقط. نقوم بتقطيع المنطقة إلى جزأين، كما هو مبيّن في الشكل 6.7b وإيجاد مساحة كل جزء على حدة. تكون المساحة الكلية عندئذ مجموع مساحة المنطقتين $A_1 + A_2$،

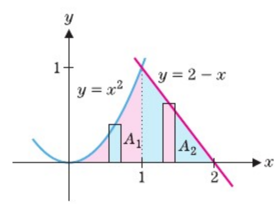
$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 (x^2 - 0)\, dx + \int_1^2 [(2 - x) - 0]\, dx$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{5}{6}$$



الشكل 6.7a

$y = x^2$ و $y = 2 - x$



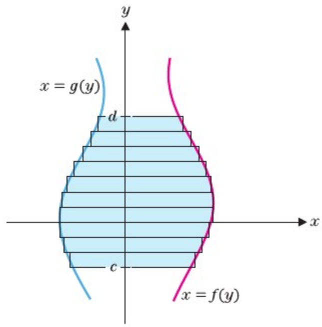
الشكل 6.7b

$y = x^2$ و $y = 2 - x$

على الرغم من أنّه لا صعوبة في تقطيع المنطقة الى عدّة أجزاء في المثال 1.4، إلا أننّا نريد أن نقترح بديلًا قد يكون مفيدًا بشكل مدهش. لاحظ أنهّ إذا قلبت الصفحة على الجانب، فسيبدو الشكل 6.7a وكأنّه منطقة ذات منحنى واحد يحدّد كلا من الحدين الأعلى والأدنى. وبطبيعة الحال، عند قلب الصفحة على الجانب، فإنّك تعكس بشكل أساسي أدوار x و y.

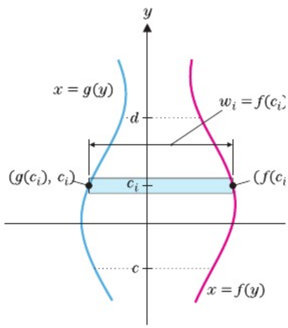
وعمومًا، للدالتين المتصلتين، f و g، حيث $f(y) \geq g(y)$ لكل y بالفترة $c \leq y \leq d$. لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $x = f(y)$ و $x = g(y)$. علينا أولاً تجزئة الفترة $[c, d]$ إلى n من الفترات الجزئية المتساوية، يكون عرض كل منها $\Delta y = \dfrac{d - c}{n}$ (انظر الشكل 6.8a). نرمز للنقاط في التجزئة بـ $y_1 = y_0 + \Delta y,\ y_2 = y_1 + \Delta y$ وهكذا. أي إنّ،

$$y_i = c + i\Delta y \qquad \text{لكل} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$



الشكل 6.8a

المساحة بين $x = g(y)$ و $x = f(y)$



الشكل 6.8b

مساحة المستطيل عند الحد i

على كل فترة جزئية $[y_{i-1}, y_i]$ (حيث $i = 1, 2, \ldots, n$) نقوم بإنشاء مستطيل له العرض $w_i = [f(c_i) - g(c_i)]$، لبعض $c_i \in [y_{i-1}, y_i]$. كما هو مبيّن في الشكل 6.8b. تُعطى مساحة المستطيل عند الحد i بالعلاقة

$$\text{المساحة} = \text{العرض} \times \text{الطول} = [f(c_i) - g(c_i)]\,\Delta y$$

تُعطى المساحة الإجمالية بين المنحنيين عندئذٍ تقريبيًا بالعلاقة

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)]\,\Delta y$$

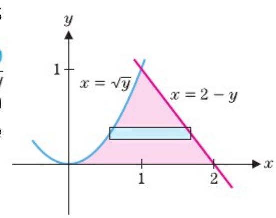
نحصل على المساحة المحدّدة من خلال النهاية عندما $n \to \infty$ والتعرف على النهاية على أنّها تكاملًا محدودًا. لدينا

المساحة بين منحنيين

$$\boxed{A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)]\,\Delta y = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy.} \tag{1.2}$$

المثال 1.5 مساحة منطقة محسوبة كتكامل بمعلومية y

كرّر المثال 1.4، ولكن التكامل بمعلومية y بدلاً من ذلك.



الشكل 6.9

المساحة بين $y = x^2$ و $y = 2 - x$

الحل من الشكل 6.9، لاحظ أنّ الحد الأيسر للمنطقة يتكوّن من التمثيل البياني $y = x^2$ أو $x = \sqrt{y}$ (نظرًا إلى أنّ النصف الأيمن للقطع المكافئ فقط هو ما يشكل الحد الأيسر). يتكوّن الحد الأيمن للمنطقة من المستقيم $y = 2 - x$ أو $x = 2 - y$. يتقاطع هذان المنحنيان اللذان يشكّلان الحدود عندما $\sqrt{y} = 2 - y$؛ وبتربيع الطرفين

$$y = (2 - y)^2 = 4 - 4y + y^2$$

أو

$$0 = y^2 - 5y + 4 = (y - 1)(y - 4)$$

لذا، يتقاطع المنحنيان عندما $y = 1$ و $y = 4$. من الشكل 6.9، يتضح أنّ $y = 1$ هو الحل الذي نحتاجه. (مع ماذا يتقابل الحل $y = 4$؟) بحسب (1.2)، تُعطى المساحة من العلاقة

$$A = \int_0^1 [(2 - y) - \sqrt{y}]\,dy = \left[2y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{2}{3}y^{3/2}\right]_0^1 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

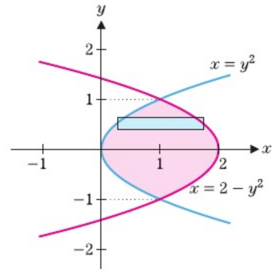
المثال 1.6 مساحة منطقة محدودة بدوال y

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين التمثيلين البيانيين $x = y^2$ و $x = 2 - y^2$.

الحل من الشكل 6.10، لاحظ أنه من الأسهل حساب هذه المساحة بالتكامل بالنسبة إلى y نظرًا إلى أنّ التكامل بالنسبة إلى x يتطلب منا تقطيع المنطقة إلى جزأين. ويتقاطع المنحنيين عندما $y^2 = 2 - y^2$، أو $y^2 = 1$، ومنها $y = \pm 1$. على الفترة $[-1, 1]$، لاحظ أنّ $2 - y^2 \geq y^2$ (نظرًا إلى أنّ المنحنى $x = 2 - y^2$ يظل على يمين المنحنى $x = y^2$). لذا، من (1.2)، تُعطى المساحة من العلاقة

$$A = \int_{-1}^{1} [(2 - y^2) - y^2]\, dy = \int_{-1}^{1} (2 - 2y^2)\, dy$$

$$= \left[2y - \frac{2}{3}y^3\right]_{-1}^{1} = \left(2 - \frac{2}{3}\right) - \left(-2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

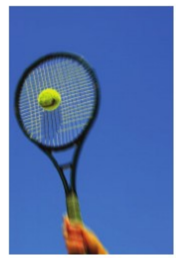


الشكل 6.10

$x = y^2$ و $x = 2 - y^2$

عند حدوث اصطدام بين مضرب التنس والكرة، يتغيّر شكل الكرة، تنكمش أولاً ومن ثم تتمدّد. لتكن x تمثّل مدى انكماش الكرة، حيث $0 \leq x \leq m$. ولتكن $f(x)$ تمثّل القوة التي بذلت على الكرة بواسطة المضرب. إذًا تتناسب الطاقة المنقولة مع المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$.
على فرض أنّ $f_c(x)$ هي القوة أثناء انكماش الكرة و $f_e(x)$ هي القوة أثناء تمدّد الكرة. يتم نقل الطاقة إلى الكرة أثناء الإنكماش ونقلها بعيدًا عن الكرة أثناء التمدّد، بحيث تتناسب الطاقة المفقودة بواسطة الكرة أثناء الاصطدام (بسبب الاحتكاك) مع $\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)]\, dx$. تُعطى نسبة الطاقة المفقودة أثناء الاصطدام عندئذٍ بالعلاقة

$$100\, \frac{\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)]\, dx}{\int_0^m f_c(x)\, dx}$$



المثال 1.7 تقدير الطاقة المفقودة بواسطة كرة التنس

على فرض أنّ قياسات الاختبار توفر البيانات التالية أثناء اصطدام كرة التنس بالمضرب. قدّر نسبة الطاقة المفقودة أثناء الاصطدام.

x (cm)	0.0	0.25	0.50	0.75	1
$f_c(x)$ (N)	0	110	220	400	700
$f_e(x)$ (N)	0	100	200	300	700

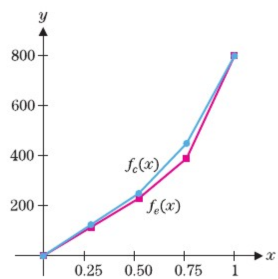
الحل يتم رسم البيانات في الشكل 6.11، مرتبطة بقطع مستقيمة.

نحتاج لتقدير المساحة بين المنحنيات والمساحة تحت المنحنى العلوي. بما أنّه ليس لدينا صيغة لأي دالة، يجب علينا أن نستخدم طريقة عددية مثل قاعدة سمبسون. لأجل $\int_0^1 f_c(x)\, dx$، نحصل على

$$\int_0^1 f_c(x)\, dx \approx \frac{0.25}{3}\,[0 + 4(110) + 2(220) + 4(400) + 700] = 265$$

لاستخدام قاعدة سمبسون لتقريب $\int_0^1 [f_c(x) - f_e(x)]\, dx$، نحتاج إلى جدول لقيم الدالة لـ $f_c(x) - f_e(x)$. يعطينا الطرح

x	0.0	0.25	0.50	0.75	1
$f_c(x) - f_e(x)$	0	10	20	100	0



الشكل 6.11

القوة المبذولة على كرة تنس

ومنه، تعطينا قاعدة سمبسون

$$\int_0^1 [f_c(x) - f_e(x)]\, dx \approx \frac{0.25}{3}[0 + 4(10) + 2(20) + 4(100) + 0] = 40$$

تكون نسبة الطاقة المفقودة عندئذٍ $\frac{100 \times 40}{265} \approx 15\%$. مع الاحتفاظ بأكثر من 85% من طاقتها أثناء الاصطدام، فإنّ هذه كرة تنس ديناميكية.

ما وراء الصيغ

في المثال 1.5، اطّلعنا على التمثيلات البيانية المعطاة كدوال لـ y وإعداد المساحة كتكامل لـ y. تشير هذه الفكرة إلى الاتجاه الذي يتخذه معظم بقية الدرس. يبقى الاشتقاق والتكامل هما أهم أداتين، ولكننا نقوم بتنويع خياراتنا للعمل بهما، ويكون ذلك في كثير من الأحيان بتغيير المتغيّرات. التفكير المرن الذي يعززه ذلك هو أمر أساسي في حساب التفاضل والتكامل، وكذلك في مناطق أخرى من الرياضيات والعلوم. نحن نطور بعض الأساليب العامة وغالبًا ما تكون المهمة الأولى في حل أيٍ من مشكلات التطبيق هي جعل الأسلوب يتناسب مع المسألة المطروحة.

تمارين 6.1

تمارين كتابية

1. على فرض أنّ الدالتين f و g تحققان $f(x) \geq g(x) \geq 0$ لجميع قيم x في الفترة $[a, b]$. اشرح بدلالة المساحتين $A_1 = \int_a^b f(x)\,dx$ و $A_2 = \int_a^b g(x)\,dx$ سبب إعطاء المساحة بين المنحنيين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ بالعلاقة $\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$.

2. على فرض أنّ الدالتين f و g تحققان $f(x) \leq g(x) \leq 0$ لجميع قيم x في الفترة $[a, b]$. اشرح بدلالة المساحتين $A_1 = \int_a^b f(x)\,dx$ و $A_2 = \int_a^b g(x)\,dx$ سبب إعطاء المساحة بين المنحنيين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ بالعلاقة $\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$.

3. على فرض أنّ سرعات سيارتَي سباق A و B هي $v_A(t)$ و $v_B(t)$ mph على الترتيب. إذا كان $v_A(t) \geq v_B(t)$ لكل t، $v_A(0) = v_B(0)$ والسباق يستمر من $t = 0$ إلى $t = 2$ ساعات، فاشرح سبب فوز السيارة A في السباق بـ $\int_0^2 [v_A(t) - v_B(t)]\,dt$ ميل.

4. على فرض أنّ سرعات سيارتَي سباق A و B هي $v_A(t)$ و $v_B(t)$ km/h على التوالي. إذا كانت $v_A(t) \geq v_B(t)$ لـ $0 \leq t \leq 0.5$ و $1.1 \leq t \leq 1.6$ و $v_B(t) \geq v_A(t)$ لـ $0.5 \leq t \leq 1.1$ و $1.6 \leq t \leq 2$. صف الاختلاف بين $\int_0^2 |v_A(t) - v_B(t)|\,dt$ و $\int_0^2 [v_A(t) - v_B(t)]\,dt$. ما هو التكامل الذي سيخبرك بالسيارة التي ستفوز في السباق؟

في التمارين 4–1، أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين على الفترة المُعطاة.

1. $y = x^3, y = x^2 - 1, 1 \leq x \leq 3$
2. $y = \cos x, y = x^2 + 2, 0 \leq x \leq 2$
3. $y = e^x, y = x - 1, -2 \leq x \leq 0$
4. $y = e^{-x}, y = x^2, 1 \leq x \leq 4$

في التمارين 12–5، ارسم وأوجد مساحة المنطقة التي تحدّدها تقاطعات المنحنيات.

5. $y = x^2 - 1, y = 7 - x^2$
6. $y = x^2 - 1, y = \frac{1}{2}x^2$
7. $y = x^3, y = 3x + 2$
8. $y = \sqrt{x}, y = x^2$
9. $y = 4xe^{-x^2}, y = |x|$
10. $y = \dfrac{2}{x^2 + 1}, y = |x|$
11. $y = \dfrac{5x}{x^2 + 1}, y = x$
12. $y = \sin x\ (0 \leq x \leq 2\pi), y = \cos x$

في التمارين 18–13، ارسم وقدّر المساحة التي تحدّدها تقاطعات المنحنيات.

13. $y = e^x, y = 1 - x^2$
14. $y = x^4, y = 1 - x$
15. $y = \sin x, y = x^2$
16. $y = \cos x, y = x^4$
17. $y = x^4, y = 2 + x$
18. $y = \ln x, y = x^2 - 2$

في التمارين 26–19، ارسم وأوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات المُعطاة. اختر متغيّر التكامل بحيث تتم كتابة المساحة كتكامل واحد. تحقق من إجاباتك على التمارين 21–19 باستخدام صيغة هندسية أساسية للمساحة.

19. $y = x, y = 2 - x, y = 0$
20. $y = x, y = 2, y = 6 - x, y = 0$
21. $x = y, x = -y, x = 1$
22. $x = 3y, x = 2 + y^2$ 40
23. $y = 2x\ (x > 0), y = 3 - x^2, x = 0$
24. $x = y^2, x = 4$
25. $y = e^x, y = 4e^{-x}, x = 0$
26. $y = \dfrac{\ln x}{x}, y = \dfrac{1 - x}{x^2 + 1}, 1 \leq x \leq 4$

27. عند حدوث اصطدام بين كرة وجسم مصمّم للضرب (مثل مضرب بيسبول أو مضرب تنس)، يتغيّر شكل الكرة، تنكمش أولًا ومن ثم تتمدّد. إذا كانت x تمثّل التغيير في قطر الكرة (على سبيل المثال، بالسنتيمتر) لكل $0 \leq x \leq m$ و $f(x)$ القوة بين الكرة والجسم المصمم للضرب (على سبيل المثال، بالنيوتن)، إذًا تتناسب المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ مع الطاقة المنقولة. على فرض $f_c(x)$ هي القوة أثناء الإنكماش و $f_e(x)$ هي القوة أثناء التمدّد. اشرح سبب تناسب $\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)]\,dx$ مع الطاقة المفقودة من الكرة (بسبب الاحتكاك) وبذلك تكون $\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)]\,dx / \int_0^m f_c(x)\,dx$ هي نسبة الطاقة المفقودة أثناء الاصطدام، بالنسبة لكرة ومضرب بيسبول. تظهر قيم معقولة (انظر كتاب أدير فيزياء البيسبول):

x (cm)	0	0.25	0.50	0.75	1
$f_c(x)$ (N)	0	1100	2600	5200	7700
$f_e(x)$ (N)	0	44	440	1200	7700

استخدم قاعدة سمبسون لتقدير نسبة الطاقة التي احتفظت بها كرة البيسبول.

28. باستخدام المفهوم نفسه كما في التمرين 27، تُعطى القيم للقوة $f_c(x)$ أثناء إنكماش كرة الجولف والقوة $f_e(x)$ أثناء تمدّدها من العلاقة

x (cm)	0	1.125	2.250	3.375	4.5
$f_c(x)$ (N)	0	880	2200	4400	7900
$f_e(x)$ (N)	0	550	1540	3000	7900

استخدم قاعدة سمبسون لتقدير نسبة الطاقة التي احتفظت بها كرة الجولف.

29. على غرار إنكماش وتمدّد الكرة الذي نوقش في التمرينين 27 و 28، تحدّد القوة التي بذلت من قبل وتر كدالة على امتداده فقدان الطاقة (انظر مقدمة الوحدة). على فرض أنّ x هي امتداد الوتر و $f_s(x)$ هي القوة أثناء تمدّد الوتر و $f_r(x)$ هي القوة أثناء ارتداد الوتر. البيانات المعطاة هي لوتر الساق الخلفية لحيوان الولب (انظر كتاب ألكسندر *Exploring Biomechanics*):

x (mm)	0	0.75	1.5	2.25	3.0
$f_s(x)$ (N)	0	110	250	450	700
$f_r(x)$ (N)	0	100	230	410	700

استخدم قاعدة سمبسون لتقدير نسبة الطاقة التي يعيدها الوتر.

30. يعمل قوس القدم البشري مثل النابض أثناء المشي والقفز. فيخزّن الطاقة بينما يمتد القدم (أي يصبح القوس مسطحًا) ويعيد الطاقة بينما يرتد القدم. في البيانات، x هي الإزاحة العمودية للقوس و $f_s(x)$ هي القوة على القدم أثناء التمدّد و $f_r(x)$ هي القوة أثناء الارتداد (انظر كتاب ألكسندر *Exploring Biomechanics*):

x (mm)	0	2.0	4.0	6.0	8.0
$f_s(x)$ (N)	0	300	1000	1800	3500
$f_r(x)$ (N)	0	150	700	1300	3500

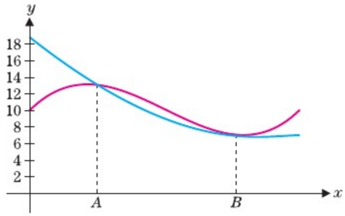
استخدم قاعدة سمبسون لتقدير نسبة الطاقة التي يعيدها القوس.

31. القيمة المتوسطة لدالة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ هي $A = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. احسب القيمة المتوسطة لـ $f(x) = x^2$ على $[0, 3]$ وبيّن أنّ المساحة فوق $y = A$ وتحت $y = f(x)$ تساوي المساحة تحت $y = A$ وفوق $y = f(x)$.

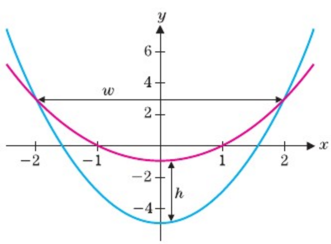
32. أوجد قيمة t بحيث تكون المساحة بين $y = \dfrac{2}{x+1}$ و $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$ لكل $0 \le x \le t$ تساوي $\ln(3/2)$.

33. على فرض أنّ القطع المكافئ $y = ax^2 + bx + c$ والمستقيم $y = mx + n$ يتقاطعان عند $x = A$ و $x = B$ مع $A < B$. بيّن أنّ المساحة بين المنحنيين تساوي $\dfrac{|a|}{6}(B-A)^3$. (إرشاد: استخدم A و B لإعادة كتابة المكامل ومن ثَم التكامل.)

34. على فرض انّ الدالة التكعيبية $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ والقطع المكافئ $y = kx^2 + mx + n$ يتقاطعان عند $x = A$ و $x = B$ مع كون B متكررة (يعني ذلك أنّ المنحنيات متماسة عند B ؛ انظر الشكل). بيّن أنّ المساحة بين المنحنيين تساوي $\dfrac{|a|}{12}(B-A)^4$.

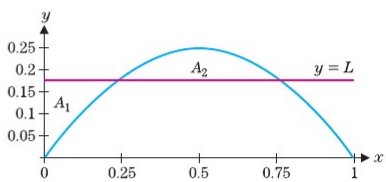


35. لنأخذ قطعين مكافئين، كل منهما رأسه عند النقطة $x = 0$ ولكن بتقعرين مختلفين. لتَكن h هي الفرق بين إحداثيات المحور y للرأسين، ولتكن w هي الفرق بين إحداثيات المحور x لنقاط التقاطع. أثبت أنّ المساحة بين المنحنيين هي $\frac{2}{3}hw$.

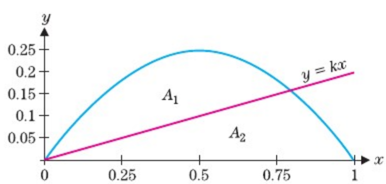


36. أثبت أنّه لأي عدد ثابت m، تكون المساحة بين $y = 2 - x^2$ و $y = mx$ هي $\frac{1}{6}(m^2+8)^{3/2}$. أوجد القيمة الصغرى لهذه المساحة.

37. لأجل $y = x - x^2$ كما هو مبين. أوجِد قيمة L بحيث تكون $A_1 = A_2$.



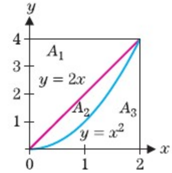
38. لأجل $y = x - x^2$ و $y = kx$ كما هو مبين، أوجد k بحيث تكون $A_1 = A_2$.



.39 بدلالة A_1، A_2 و A_3، حدّد المساحة المُعطاة بكل تكامل.

(a) $\int_0^2 (2x - x^2)\,dx$ (b) $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$

(c) $\int_0^4 (2 - \sqrt{y})\,dy$ (d) $\int_0^4 (\sqrt{y} - \frac{y}{2})\,dy$



.40 أعطِ تكاملًا مساويًا لكل مساحة.

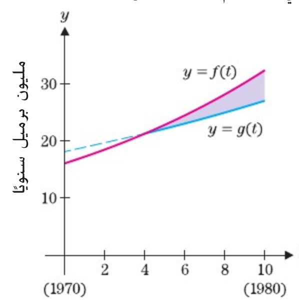
(a) $A_2 + A_3$ (b) $A_1 + A_2$ (c) A_1 (d) A_3

.41 لتكن $f(t)$ المساحة بين $y = \sin^2 x$ و $y = 1$ لكل $0 \leq x \leq t$. أوجد كل النقاط الحرجة والقيم القصوى المحلية ونقاط الانعطاف للدالة $f(t)$ لكل $t \geq 0$.

.42 لتكن g دالة متصلة معرّفة لكل $x \geq 0$ مع $|g(x)| \leq 1$ لكل $x \geq 0$. لتكن $f(t)$ المساحة بين $y = g(x)$ و $y = 1$ لكل $0 \leq x \leq t$. إذا كانت g لها قيمة عظمى محلية عند $x = a$. فهل يوجد لـ f نقطة حرجة عند a ؟ نقطة انعطاف عند a ؟ ماذا إذا كان يوجد قيمة صغرى محلية عند $x = a$ ؟

التطبيقات

.43 كان استهلاك الولايات المتحدة من النفط على مدى الأعوام $1970-1974$ يساوي تقريبًا $f(t) = 16.1e^{0.07t}$ مليون برميل سنويًا، حيث يوافق $t = 0$ عام 1970. ولكن بعد حدوث نقص في النفط عام 1974، تغيّر استهلاك البلاد وكان ممثلًا بشكلٍ أفضل من خلال $g(t) = 21.3e^{0.04(t-4)}$ مليون برميل سنويًا، لأجل $t \geq 4$. بيّن أنّ $f(4) \approx g(4)$ واشرح ما يمثّله هذا العدد. احسب المساحة بين $f(t)$ و $g(t)$ لكل $4 \leq t \leq 10$. استخدم هذا العدد لتقدير عدد براميل النفط التي تم توفيرها بسبب الاستهلاك المخفض للشعب الأمريكي من عام 1974 وحتى 1980.



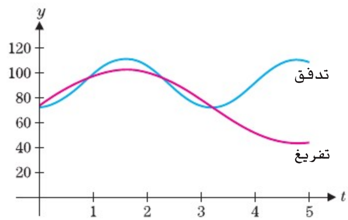
.44 على فرض أنّ استهلاك أخشاب الوقود لدولة ما يُعطى بالصيغة $76e^{0.03t}$ m^3/yr ومعدل نمو الأشجار الجديدة هو $50 - 6e^{0.09t}$ m^3/yr. احسب وفسّر المساحة المحصورة بين المنحنيين حيث $0 \leq t \leq 10$.

.45 على فرض أنّ معدل المواليد لتعداد سكاني معيّن هو $b(t) = 2e^{0.04t}$ مليون نسمة سنويًا ومعدل الوفيات للتعداد السكاني نفسه هو $d(t) = 2e^{0.02t}$ مليون شخص سنويًا. بيّن أنّ $b(t) \geq d(t)$ لكل $t \geq 0$ واشرح سبب تمثيل المساحة بين المنحنيين الزيادة في التعداد السكاني. احسب الزيادة في التعداد السكاني لكل $0 \leq t \leq 10$.

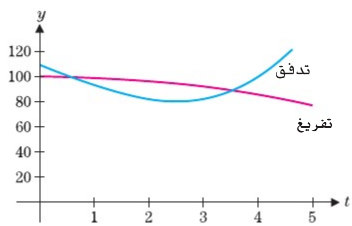
.46 على فرض أنّ معدل المواليد لتعداد سكاني هو $b(t) = 2e^{0.04t}$ مليون نسمة سنويًا ومعدل الوفيات للتعداد السكاني نفسه هو $d(t) = 3e^{0.02t}$ مليون شخص سنويًا. أوجد التقاطع T للمنحنيين $(T > 0)$. فسّر المساحة بين المنحنيين لكل $0 \leq t \leq T$ والمساحة بين المنحنيين لكل $T \leq t \leq 30$. احسب صافي التغيّر في التعداد السكاني لكل $0 \leq t \leq 30$.

في التمرينين 47 و 48، يُظهر التمثيل البياني معدل تدفق وتفريغ الماء باللتر في الساعة إلى الخزان ومنه. بافتراض أنّ الخزان يبدأ بسعة 400 L، قدّر كمية الماء الموجودة في الخزان عند الساعات 1، 2، 3، 4 و 5 وارسم تمثيلًا بيانيًا لكمية الماء داخل الخزان.

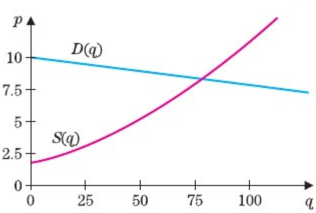
.47



.48

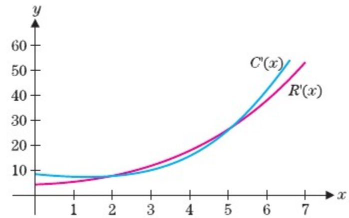


.49 يظُهر التمثيل البياني منحنى العرض ومنحنى الطلب لأحد المنتجات. تعطي نقطة التقاطع (q^*, p^*) كمية التوازن وسعر التوازن للمنتج. يتم تعريف **فائض المستهلك** بأنّه $CS = \int_0^{q^*} D(q)\,dq - p^*q^*$. ظلّل مساحة التمثيل البياني التي تمثّل فائض المستهلك، واحسب ذلك في حال كانت $D(q) = 10 - \frac{1}{40}q$ و $S(q) = 2 + \frac{1}{120}q + \frac{1}{1200}q^2$.



.50 كرّر التمرين 49 **لفائض المنتج** المعرّف بواسطة $PS = p^*q^* - \int_0^{q^*} S(q)\,dq$.

51. لتكن $C'(x)$ هي التكلفة الحدية لإنتاج x ألف نسخة من منتج ما وأنّ $R'(x)$ هي الإيرادات الحديّة من بيع هذا المنتج. مع التمثيلات البيانية كما هو مبيّن. افترض أنّ $R'(x) = C'(x)$ عند $x = 2$ و $x = 5$. فسرّ المساحة بين المنحنيين لكل فترة: (a) $0 \le x \le 2$، (b) $2 \le x \le 5$، (c) $0 \le x \le 5$ و (d) $5 \le x \le 6$.



52. أحد المبادئ الأساسية للاقتصاد هو أنّ الأرباح تحقق القيمة العظمى عند مساواة التكلفة الحدية مع الإيرادات الحديّة. عند أي تقاطع يحقق الربح القيمة العظمى في التمرين 51؟ اشرح إجابتك. من حيث الربح. ما الذي تمثّله نقطة التقاطع الأخرى؟

تمارين استكشافية

1. أوجِد المساحة بين $y = x^2$ و $y = mx$ لأي ثابت $m > 0$. بدون إجراء المزيد من العمليات الحسابية، استخدم هذه المساحة لإيجاد المساحة بين $y = \sqrt{x}$ و $y = mx$.

2. لكل $x > 0$. لتكن $f(x)$ المساحة بين $y = 1$ و $y = \sin^2 t$ لكل $0 \le t \le x$. بدون حساب $f(x)$. أوجد أكبر قدر ممكن من العلاقات بين الخصائص البيانية (الأصفار، القيم القصوى، نقاط الانعطاف) لـ $y = f(x)$ والخصائص البيانية لـ $y = \sin^2 x$.

الدرس 6-2 الحجم: شرائح وأقراص وحلقات

كما سنرى في هذه الوحدة، فإنّ التكامل هو أداة متعددة الاستخدامات بشكلٍ مدهش. في هذا الدرس، نستخدم التكاملات لحساب حجم مجسمّ ثلاثي الأبعاد. ونبدأ بمسألةٍ بسيطة.

عند تصميم أحد المباني، يجب على المهندسين المعماريين إجراء العديد من الحسابات المفصلة. على سبيل المثال، من أجل تحليل أنظمة التدفئة والتبريد في المباني، يجب على المهندسين حساب حجم الهواء الذي تتم معالجته.

لا يوجد غالبًا سوى بضعة مجسّمات تعرف كيفية حساب أحجامها. على سبيل المثال، البناء المبيّن في الشكل 6.12a هو أساسًا صندوق متوازي المستطيلات، ويعُطى حجمه بالقاعدة lwh. حيث l هو الطول و w هو العرض و h هو الارتفاع. إنّ الأسطوانات الدائرية القائمة التي يمكن رؤيتها في المباني في الشكل 6.12b لها حجم يعُطى القاعدة $\pi r^2 h$. حيث h هو الارتفاع و r هو نصف قطر المقطع العرضي الدائري. لاحظ في كل حالة أنّ المبنى يحتوي على مقطع عرضي مألوف (مستطيل في الشكل 6.12a ودائرة في الشكل 6.12b) يمتد عموديًا.


الشكل 6.12a


الشكل 6.12b

نحن نطلق على أيٍ من هذه المجسّمات اسم **أسطوانة** (أي مجسّمات لها مقاطع عرضية عمودية على جزء من المحوَر المار بالمجسّم تكون جميعها متماثلة). ثمة علاقة بين قانونَيْ الحجم لهذين الأسطوانتين. حجم أسطوانة دائرية قائمة هو

$$V = \underbrace{(\pi r^2)}_{\text{مساحة مقطع عرضي}} \times \underbrace{h}_{\text{ارتفاع}},$$

بينما حجم الصندوق هو

$$V = \underbrace{(\text{الطول} \times \text{العرض})}_{\text{مساحة مقطع عرضي}} \times \text{الارتفاع}$$

بشكلٍ عام، يمكن إيجاد حجم أي أسطوانة من الصيغة

$$V = (\text{مساحة مقطع عرضي}) \times (\text{الارتفاع})$$

الأحجام بالتقطيع

حتى المجسّمات السهلة نسبيًا، مثل الأهرامات والقباب، ليس لها مساحة مقطع عرضي ثابت، حسبما هو مبيّن في الشكلين 6.13a و 6.13b. لإيجاد الحجم في مثل هذه الحالة، نتبع النهج الذي استخدمناه عددًا من المرات حتى الآن: أولاً نقوم بتقريب الحجم ومن ثم نحسّن التقريب.

الشكل 6.13a
مدخل هرم متحف اللوفر بباريس

الشكل 6.13b
مبنى الكابيتول الأمريكي

وعمومًا للمجسّمات التي تمتد من $x = a$ إلى $x = b$. نبدأ بتجزئة الفترة $[a, b]$ على المحور x إلى n فترات جزئية، يكون عرض كلٍ منها $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. وكالمعتاد، نرمز إلى $x_0 = a, x_1 = a + \Delta x$ وهكذا، بحيث تكون

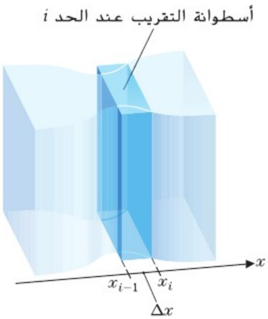
$$x_i = a + i\Delta x, \quad \text{لكل} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

بعد ذلك نجزيء المجسّم إلى شرائح عمودية على المحور x عند كل $(n-1)$ من نقاط $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (انظر الشكل 6.14a في الصفحة التالية.) لاحظ أنه إذا كانت n كبيرة، فستكون كل شريحة من المجسّم رقيقة، مع مساحة مقطع عرضي ثابتة تقريبًا. على فرض أنّ مساحة المقطع العرضي المناظر لأي قيمة محدّدة لـ x تُعطى بالرمز $A(x)$. لاحظ أنّ الشريحة الواقعة بين $x = x_{i-1}$ و $x = x_i$ هي أسطوانة تقريبًا. (انظر الشكل 6.14b). لذا، فلأي نقطة c_i في الفترة $[x_{i-1}, x_i]$، تكون جميع مساحات المقاطع العرضية على تلك الفترة $A(c_i)$ تقريبًا.

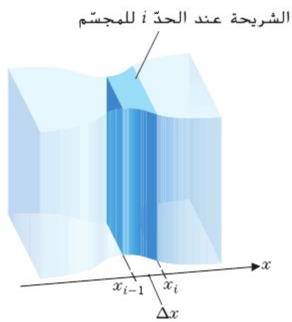
الملاحظات التاريخية

أرخميدس
(حوالي 287–212 ق.م.)

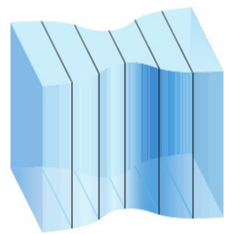
هو خبير في الرياضيات وعالم يوناني كان من بين أول من اشتقوا الصيغ للأحجام والمساحات. اشتهر أرخميدس باكتشافه القوانين الأساسية للروافع وإستاتيكا الموائع (حيث يقال إنّه قفز من حوض الاستحمام، وهو يهتف "أوريكا!" وركض إلى الشوارع لمشاركة اكتشافه). كذلك، هو مهندس عبقري، ساهمت اختراعاته بدايةً من المنجنيق ورافعات التصدي والمرايا العاكسة في بث الرعب في قلب الجيش الروماني الضخم الذي غزا في نهاية المطاف مسقط رأسه في سيراكيوز. كان أرخميدس فخورًا بصفة خاصة ببرهانه أنّ حجم كرة مرسومة داخل أسطوانة هو $2/3$ من حجم الأسطوانة (انظر التمارين 31–34)، وطلب أن ينُقش هذا الأمر على شاهد قبره. وقد كان العديد من أساليبه مشابهة إلى حدٍ كبير لتلك التي نستخدمها في حساب التفاضل والتكامل اليوم، ولكن فُقد العديد من كتاباته في العصور الوسطى. ترُوى القصة المذهلة للاكتشاف الأخير لكتابه *The Method* في *The Archimedes Codex* بقلم نيتز ونويل.



الشكل 6.14c
أسطوانة التقريب عند الحد i



الشكل 6.14b
الشريحة عند الحد i للمجسّم



الشكل 6.14a
قطعة مجسّم

يكون الحجم V_i للشريحة عند الحد i هو تقريبًا حجم الأسطوانة الواقعة بطول الفترة $[x_{i-1}, x_i]$ مع مساحة مقطع عرضي ثابتة $A(c_i)$ (انظر الشكل 6.14c)، بحيث يكون

$$V_i \approx \underbrace{A(c_i)}_{\text{مساحة مقطع عرضي}} \underbrace{\Delta x}_{\text{العرض}}$$

بتكرار هذه العملية لكلٍ من الـ n شرائح، نجد أنّ الحجم الكلي V للمجسّم هو تقريبًا

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\,\Delta x$$

لاحظ أنّه كلما زادت الشرائح، ينبغي أن يتحسّن تقريب الحجم ونحصل على الحجم الدقيق بحساب النهاية

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(c_i)\,\Delta x$$

بافتراض وجود النهاية. يجب عليك التعرّف على هذه النهاية على أنّها تكامل محدود

حجم مجسّم له
مساحة مقطع عرضي $A(x)$

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx.} \qquad (2.1)$$

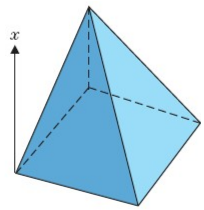
ملحوظة 2.1

نستخدم الطريقة نفسها المتبعة هنا لنشتق العديد من القوانين المهمة. في كل حالة، نجزيء مجسّم إلى n أجزاء أصغر ثم نقرّب الكمية المطلوبة لكل جزء من الأجزاء الصغيرة ونجمع القيم التقريبية ومن ثم نأخذ النهاية. حيث نتعرّف في نهاية المطاف أننّا قمنا بإيجاد تكامل محدود. لهذا السبب من الضروري أن تستوعب المفهوم وراء الصيغة (2.1). ولن يساعدك الحفظ في هذه الحالة. إلا أنّه إذا كنت تفهم كيفية تلاؤم الأجزاء المختلفة من هذا اللغز مع بعضها البعض، فسيسهل عليك استيعاب بقية هذه الوحدة بشكل جيد.

مثال 2.1 حساب الحجم من مساحات المقاطع العرضية

للهرم في ممفيس قاعدة مربعة يبلغ طول ضلعها 180 m وارتفاعها 100 m تقريبًا. أوجِد حجم الهرم باستخدام هذه القياسات.

الحل بما أنّ الهرم له مقاطع عرضية أفقية مربعة، فلن نحتاج سوى لإيجاد صيغة لمساحة المربع عند كل ارتفاع. لتكن x تمثّل الارتفاع عن الأرض. عند $x = 0$، يكون المقطع العرضي هو مربع طول ضلعه 180 m. عند $x = 100$، يمكن النظر إلى المقطع العرضي على أنه مربع طول ضلعه 0 m. إذا كان $f(x)$ يمثّل طول ضلع المقطع العرضي المربع عند ارتفاع x، فإننا نعلم أنّ $f(0) = 180, f(100) = 0$ و $f(x)$ يجب أن تكون دالة خطية. (فكّر في الآتي؛ جوانب الهرم لا تنحني.) ميل المستقيم هو $m = \frac{180-0}{0-100} = -\frac{9}{5}$ ونحن نستخدم التقاطع y قدره 180 للحصول على



هرم

$$f(x) = -\frac{9}{5}x + 180$$

إنّ مساحة المقطع العرضي هي ببساطة مربع $f(x)$. لذا فمن (2.1)، نحصل على

$$V = \int_0^{100} A(x)\,dx = \int_0^{100} \left(-\frac{9}{5}x + 180\right)^2 dx$$

لاحظ أنّه يمكننا إيجاد قيمة هذا التكامل باستخدام التعويض. بأخذ $u = -\frac{9}{5}x + 180$. فيكون $du = -\frac{9}{5}\,dx$. هذا يعطينا:

$$V = \int_0^{100} \left(-\frac{9}{5}x + 180\right)^2 dx = -\frac{5}{9}\int_{180}^{0} u^2\,du$$
$$= \frac{5}{9}\int_0^{180} u^2\,du = \frac{5}{9}\frac{u^3}{3}\Bigg|_0^{180} = 1{,}080{,}000\ \text{m}^3$$

في العديد من التطبيقات الهامة، تكون مساحة المقطع العرضي غير معروفة على وجه التحديد، ولكن يجب تقريبها باستخدام القياسات. في مثل هذه الحالات، يمكننا تقريب الحجم باستخدام التكامل العددي.

مثال 2.2 تقدير الحجم من بيانات المقطع العرضي

في التصوير الطبي، مثل التصوير المقطعي بالحاسوب (CT) والتصوير بالرنين المغناطيسي (MRI)، يؤخذ العديد من القياسات وتتم معالجتها بواسطة حاسوب لإنشاء صورة ثلاثية الأبعاد للأنسجة التي يرغب الطبيب في دراستها. تشبه هذه العملية عملية التجزئة إلى شرائح التي استخدمناها لإيجاد حجم مجسّم. ولكن، في هذه الحالة، يتم دمج التمثيلات في الرياضيات للشرائح المختلفة من الأنسجة لإنتاج صورة ثلاثية الأبعاد يقوم الأطباء باستعراضها لتحديد مدى صحة الأنسجة. على فرض أنّ التصوير بالرنين المغناطيسي أظهر أنّ مساحات المقطع العرضي لشرائح متجاورة لورم ما مُعطاة بالقيم المذكورة في الجدول.

x (cm)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$A(x)$ (cm^2)	0.0	0.1	0.4	0.3	0.6	0.9	1.2	0.8	0.6	0.2	0.1

قدّر حجم الورم.

الحل لإيجاد حجم الورم، سنقوم بالحساب [باتباع (2.1)]

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx$$

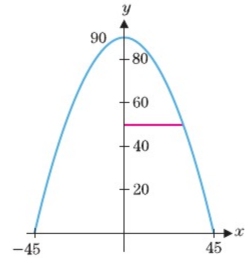
إلا أننا لا نعرف سوى $A(x)$ عند عدد محدود من النقاط. وعلى الرغم من أننا لا نستطيع حساب هذا بشكلٍ دقيق، يمكننا استخدام قاعدة سمبسون مع $\Delta x = 0.1$ لتقدير قيمة هذا التكامل:

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx$$
$$\approx \frac{b-a}{3n}\left[\begin{array}{c} A(0) + 4A(0.1) + 2A(0.2) + 4A(0.3) + 2A(0.4) + 4A(0.5) \\ + 2A(0.6) + 4A(0.7) + 2A(0.8) + 4A(0.9) + A(1) \end{array}\right]$$
$$= \frac{0.1}{3}(0 + 0.4 + 0.8 + 1.2 + 1.2 + 3.6 + 2.4 + 3.2 + 1.2 + 0.8 + 0.1)$$
$$\approx 0.49667\ \text{cm}^3$$

ننتقل الآن إلى مسألة إيجاد حجم القبة في الشكل 6.13b. بما أنّ المقاطع العرضية الأفقية هي دوائر، فلن نحتاج سوى لتحديد نصف قطر كل دائرة.

مثال 2.3 حساب حجم قبة

على فرض أنّ للقبّة مقاطع عرضية دائرية، لها رسم تخطيطي يُعطى بالعلاقة $y = -\frac{2}{45}x^2 + 90$، لكل $-45 \le x \le 45$ (بالسنتيمترات). يعطي هذا الأمر أبعادًا مشابهة لقبة المبنى في الشكل 6.13b.) يوضّح الشكل 6.15 تمثيلًا بيانيًا. أوجد حجم القبة.



الشكل 6.15
$y = -\frac{2}{45}x^2 + 90$

الحل حسبما هو مبيّن في الشكل 6.15، تحدث المقاطع العرضية الدائرية عند كل قيمة لـ y، مع $0 \le y \le 90$. لقيمة y مُعطاة، يمتد نصف القطر من $x = 0$ إلى $x = \sqrt{\frac{45}{2}(90 - y)}$. يُعطى نصف القطر لهذه القيمة لـ y بالعلاقة $r(y) = \sqrt{\frac{45}{2}(90 - y)}$، بحيث تعُطى مساحات المقاطع العرضية بالعلاقة

$$A(y) = \pi\left(\sqrt{\frac{45}{2}(90 - y)}\right)^2$$

لكل $0 \le y \le 90$. يعُطى الحجم عندئذٍ بالعلاقة

$$V = \int_0^{90} A(y)\,dy = \int_0^{90} \pi\left(\sqrt{\frac{45}{2}(90 - y)}\right)^2 dy = \int_0^{90} \pi\left(2025 - \frac{45}{2}y\right) dy$$

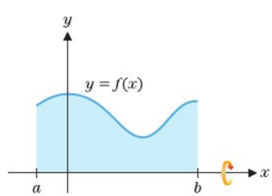
$$= \pi\left[2025y - \frac{45}{4}y^2\right]_0^{90} = 91{,}125\pi \approx 286{,}278 \text{ cm}^3$$

نلاحظ أنّ طريقة بديلة لذكر المسألة في المثال 2.3 هي أن نقول: أوجد الحجم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بين المنحنى $x = \sqrt{\frac{45}{2}(90 - y)}$ والمحور y، حيث $0 \le y \le 90$، حول المحور y.

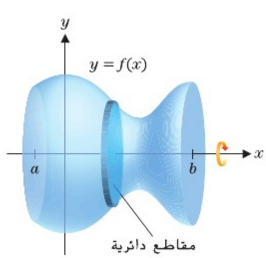
يمكن تعميم مثال 2.3 على طريقة الأقراص المستخدمة لحساب حجم مجسّم يتكوّن من دوران منطقة ثنائية الأبعاد حول مستقيم أفقي أو رأسي. وسنفكّر في هذه الطريقة العامة في ما يلي.

طريقة الأقراص

على فرض أنّ $f(x) \ge 0$ و f متصلة على الفترة $[a, b]$. نأخذ المنطقة المحدودة بين المنحنى $y = f(x)$ والمحور x، لكل $a \le x \le b$، ونقوم بتدويرها حول المحور x، لإنشاء مجسّم. (انظر الشكلين 6.16a و6.16b). يمكننا إيجاد حجم هذا المجسّم بتجزئته إلى شرائح عمودية على المحور x والتعرف على أنّ كل مقطع عرضي هو قرص دائري له نصف القطر $r = f(x)$. (انظر الشكل 6.16b). من (2.1)، نعلم أنّ حجم المجسّم عندئذٍ هو



الشكل 6.16a
$y = f(x) \ge 0$



الشكل 6.16b
المجسّم الناتج عن الدوران

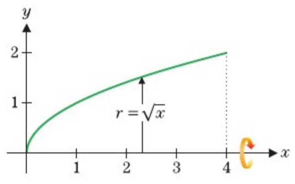
حجم مجسّم ناتج عن التدوير (طريقة الأقراص)

$$V = \int_a^b \underbrace{\pi[f(x)]^2}_{\text{مساحة مقطع عرضي} = \pi r^2} dx. \quad (2.2)$$

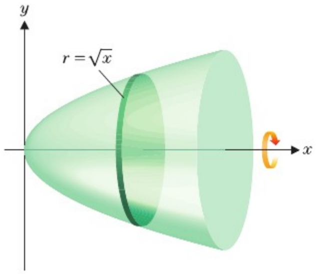
بما أنّ كل المقاطع العرضية لمثل هذا المجسّم الناتج عن الدوران هي أقراص، نشير إلى طريقة إيجاد الحجم هذه باسم **طريقة الأقراص**.

مثال 2.4 استخدام طريقة الأقراص لحساب الحجم

قم بدوران المنطقة تحت المنحنى $y = \sqrt{x}$ على الفترة $[0, 4]$ حول المحور x وأوجد حجم المجسّم الناتج عن الدوران.



الشكل 6.17a
$y = \sqrt{x}$

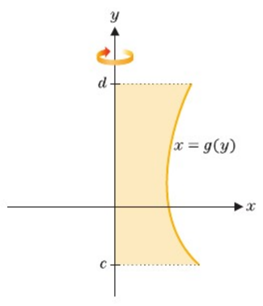


الشكل 6.17b
المجسّم الناتج عن الدوران

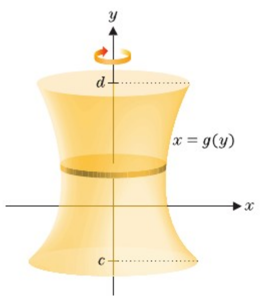
الحل من المهم جدًا رسم صورة للمنطقة والمجسّم الناتج عن الدوران، بحيث يمكنك الحصول على فكرة واضحة عن أنصاف أقطار المقاطع العرضية الدائرية. يمكنك أن ترى من الأشكال 6.17a و 6.17b أنّ نصف قطر كل مقطع عرضي يُعطى بالعلاقة $r = \sqrt{x}$. من (2.2)، نحصل عندئذٍ على الحجم:

$$V = \int_0^4 \underbrace{\pi\left[\sqrt{x}\right]^2}_{\text{مساحة مقطع عرضي} = \pi r^2} dx = \pi \int_0^4 x\,dx = \pi \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4 = 8\pi$$

بالطريقة ذاتها، على فرض أنّ $g(y) \geq 0$ و g متصلة على الفترة $[c, d]$. ثم ينتج عن دوران المنطقة المحدودة بين المنحنى $x = g(y)$ والمحور y، لكل $c \leq y \leq d$، حول المحور y تولّد مجسّم. (انظر الشكلين 6.18a و 6.18b). مرة أخرى، نلاحظ من الشكل 6.18b أنّ المقاطع



الشكل 6.18a
الدوران حول المحور y



الشكل 6.18b
المجسّم الناتج عن الدوران

العرضية للمجسّم الناتج عن الدوران هي أقراص دائرية بنصف قطر $r = g(y)$. كل ما تغيّر هنا هو أننا قمنا بتبديل أدوار المتغيّرين x وy. يعُطى حجم المجسّم عندئذٍ بالعلاقة

حجم مجسّم ناتج عن الدوران (طريقة الأقراص)

$$\boxed{V = \int_c^d \underbrace{\pi[g(y)]^2}_{\text{مساحة مقطع عرضي} = \pi r^2} dy.} \quad (2.3)$$

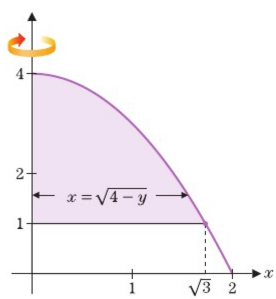
ملحوظة 2.2

عند استخدام طريقة الأقراص، يعتمد متغيّر التكامل فقط على المحور الذي تقوم بدوران المنطقة ثنائية الأبعاد حوله: يتطلب الدوران حول المحور x تكاملاً بمعلومية x، بينما يتطلب الدوران حول المحور y تكاملاً بمعلومية y. يتم تحديد هذا الأمر بسهولة من خلال النظر إلى رسم للمجسّم. لا ترتكب خطأ التفكير في النقاط وأماكن وضعها فقط. فسيقودك ذلك إلى الإخفاق، حيث إنّ بقية هذه الوحدة ستتطلب منك اتخاذ خيارات مشابهة، يعتمد كل منها على المتطلبات المميزة للمسألة المطروحة.

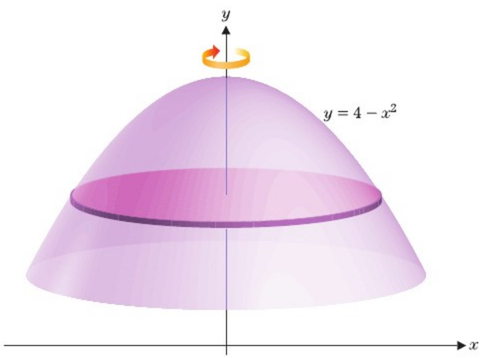
مثال 2.5 استخدام طريقة الأقراص مع y كمتغيّر مستقل

أوجِد حجم المجسّم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بين المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = 1$ من $x = 0$ إلى $x = \sqrt{3}$ حول المحور y.

الحل ستجد تمثيلًا بيانيًا للمنحنى في الشكل 6.19a وللمجسّم في الشكل 6.19b.



الشكل 6.19a
$y = 4 - x^2$



الشكل 6.19b
المجسّم الناتج عن الدوران

لاحظ في الأشكال 6.19a و 6.19b أنّ نصف القطر لأي مقاطع عرضية تعطى بـ x. لذا يجب حل المعادلة $y = 4 - x^2$ لكل x لنحصل على $x = \sqrt{4-y}$ بما أنّ المساحة تتوسّع من $y = 1$ الى $y = 4$ يعطى الحجم من (2.3) فيكون:

$$V = \int_1^4 \underbrace{\pi\left(\sqrt{4-y}\right)^2}_{\pi r^2} dy = \int_1^4 \pi(4-y)\, dy$$

$$= \pi\left[4y - \frac{y^2}{2}\right]_1^4 = \pi\left[(16-8) - \left(4 - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{9\pi}{2}$$

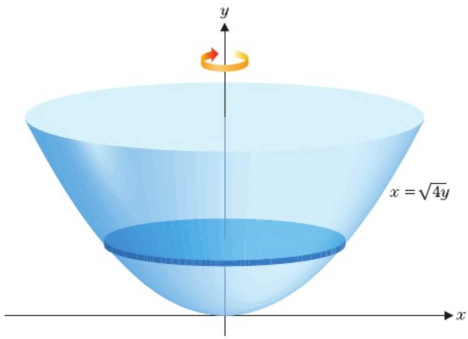
طريقة الحلقات

إنّ أحد التعقيدات التي تحدث عند حساب الأحجام هو أنه قد يحتوي المجسّم على تجويف أو "ثقب". ويحدث تعقيد آخر عندما تدور منطقة حول مستقيم بخلاف المحور x أو المحور y. لن تشكل لك الحالتين صعوبات كبيرة، إذا نظرت بتمعن إلى الأشكال. وسنوضّح تلك الأفكار في المثالين 2.6 و 2.7.

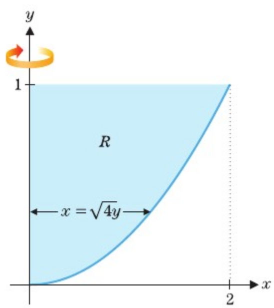
مثال 2.6 حساب أحجام المجسّمات المجوفة وغير المجوفة

لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = \frac{1}{4}x^2, x = 0$ و $y = 1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول (a) المحور y و(b) المحور x و(c) المستقيم $y = 2$.

الحل (a) تبدو المنطقة R في الشكل 6.20a ويبدو المجسّم الذي تكوّن من دورانه حول المحور y في الشكل 6.20b. لاحظ أنّ هذا الجزء من المسألة مشابه للمثال 2.5.



الشكل 6.20b
المجسّم الناتج عن الدوران

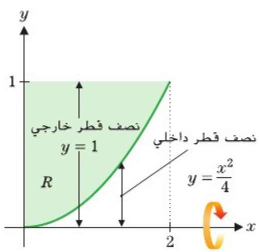


الشكل 6.20a
$x = \sqrt{4y}$

من (2.3). يتم إعطاء الحجم بالصيغة

$$V = \int_0^1 \underbrace{\pi\left(\sqrt{4y}\right)^2}_{\pi r^2} dy = \pi \frac{4}{2}y^2\Big|_0^1 = 2\pi.$$

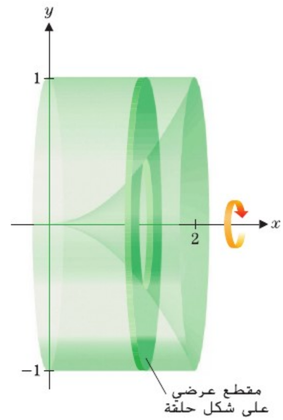
(b) دوران المنطقة R حول المحور x ينشأ عنه تجويف في وسط المجسّم. انظر الشكل 6.21a لتمثيل بياني للمنطقة R والشكل 6.21b (في الصفحة التالية) لصورة المجسّم. إنّ استراتيجيتنا هي حساب حجم الجزء الخارجي للمجسّم (كما لو كان مجسّمًا) ثم طرح حجم التجويف. قبل الخوض في عملية حساب، تأكد من تصور الشكل الهندسي وراء هذا. هنا، يتكوّن الجزء الخارجي لسطح مجسّم من دوران المستقيم $y = 1$ حول المحور x. ينشأ التجويف من دوران المنحنى $y = \frac{1}{4}x^2$ حول المحور x. انظر بتمعن إلى الشكلين 6.21a و 6.21b وتأكد أنك ترى هذا. إنّ نصف القطر الخارجي، r_O، هو المسافة من المحور x إلى المستقيم $y = 1$ أو $r_O = 1$. إنّ نصف القطر الخارجي، r_I، هو المسافة من المحور x إلى المنحنى $y = \frac{1}{4}x^2$ أو $r_I = \frac{1}{4}x^2$. عند تطبيق (2.2) مرتين، نرى أنه يتم إعطاء الحجم بالصيغة



الشكل 6.21a
$y = \frac{1}{4}x^2$

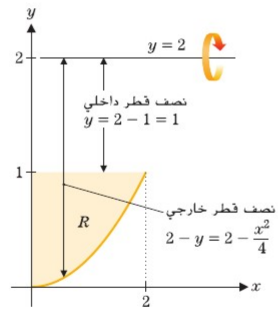
$$V = \int_0^2 \underbrace{\pi(1)^2}_{\pi\,(\text{نصف القطر الخارجي})^2} dx - \int_0^2 \underbrace{\pi\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2}_{\pi\,(\text{نصف القطر الداخلي})^2} dx$$

$$= \pi\int_0^2 \left(1 - \frac{x^4}{16}\right) dx = \pi\left(x - \frac{1}{80}x^5\right)\Big|_0^2 = \pi\left(2 - \frac{32}{80}\right) = \frac{8}{5}\pi$$

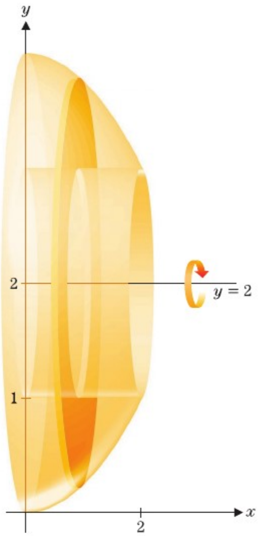


الشكل 6.21b
المجسم المجوف

(c) إنّ دوران المنطقة R حول المستقيم $y = 2$ ينتج مجسّمًا يشبه الحلقة وفيه ثقب أسطواني في الوسط. (a) تبدو المنطقة R في الشكل 6.22a ويبدو المجسّم في الشكل 6.22b.



الشكل 6.22a
الدوران حول $y = 2$



الشكل 6.22b
المجسّم الناتج عن الدوران

يتم حساب الحجم بالطريقة نفسها المستخدمة في الجزء (b)، بطرح حجم التجويف من حجم الجزء الخارجي للمجسّم. من الشكلين 6.22a و 6.22b. لاحظ أنّ نصف قطر السطح الخارجي هو المسافة من المستقيم $y = 2$ إلى المنحنى $y = \frac{1}{4}x^2$ أو $r_O = 2 - \frac{1}{4}x^2$. ونصف قطر الثقب الداخلي هو المسافة من المستقيم $y = 2$ إلى المستقيم $y = 1$ أو $r_I = 2 - 1 = 1$. من (2.2)، يعطى الحجم بالصيغة

$$V = \int_0^2 \underbrace{\pi\left(2 - \frac{1}{4}x^2\right)^2}_{\pi(\text{نصف قطر خارجي})^2} dx - \int_0^2 \underbrace{\pi(2-1)^2}_{\pi(\text{نصف قطر داخلي})^2} dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left[\left(4 - x^2 + \frac{x^4}{16}\right) - 1\right] dx = \pi\left[3x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{80}x^5\right]_0^2$$

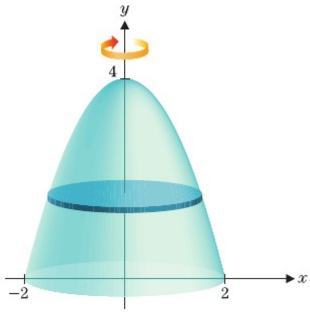
$$= \pi\left(6 - \frac{8}{3} + \frac{32}{80}\right) = \frac{56}{15}\pi$$

في الجزأين (b) و(c) في المثال 2.6، تم حساب الحجم بطرح حجم داخليٍ من حجم خارجي للتعويض عن وجود تجويف داخل المجسّم. يعُدّ هذا الأسلوب تعميمًا بسيطًا لطريقة الأقراص ويشار إليه باسم **طريقة الحلقات**، نظرًا إلى أنّ المقاطع العرضية للمجسّم تبدو مثل الحلقات.

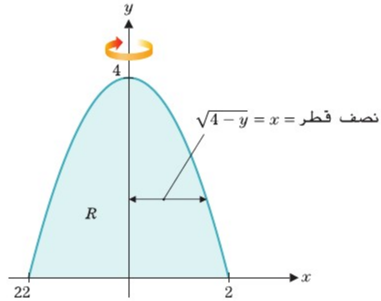
مثال 2.7 دوران منطقة حول مستقيمات مختلفة

لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - x^2$ و $y = 0$. أوجد أحجام المجسّمات التي تم الحصول عليها من دوران R حول كل من التالي: (a) المحور y و (b) المستقيم $y = -3$ و (c) المستقيم $y = 7$ و (d) المستقيم $x = 3$.

الحل للجزء (a)، نرسم المنطقة R في الشكل 6.23a والمجسّم الناتج عن الدوران في الشكل 6.23b.



الشكل 6.23b
المجسّم الناتج عن الدوران



الشكل 6.23a
الدوران حول المحور y

من الشكل 6.23b، لاحظ أنّ كل مقطع عرضي للمجسّم يكون قرصًا دائريًا يبلغ نصف قطره بشكل مبسط x. الحل من أجل x نأخذ: $x = \sqrt{4-y}$، حيث نختار x لتكون موجبة. بما أنّه في هذا السياق x تمثّل مسافة. من (2.3)، يعطى حجم المجسّم الناتج عن الدوران بالصيغة

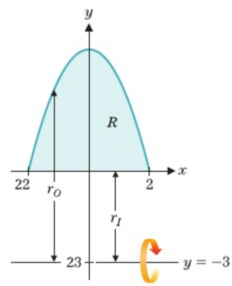
$$V = \int_0^4 \pi \underbrace{\left(\sqrt{4-y}\right)^2}_{(\text{نصف قطر})^2} dy = \pi \int_0^4 (4-y)\, dy = \pi \left[4y - \frac{y^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$$

للجزء (b)، رسمنا المنطقة R في الشكل 6.24a والمجسّم الناتج عن الدوران في الشكل 6.24b. لاحظ من الشكل 6.24b أنّ المقاطع العرضية للمجسّم على شكل حلقات وأنّ نصف القطر الخارجي r_O هو المسافة من محور التدوير $y = -3$ إلى المنحنى $y = 4 - x^2$. والذي هو،

$$r_O = y - (-3) = (4 - x^2) - (-3) = 7 - x^2$$

بينما يكون نصف القطر الداخلي هو المسافة من المحور x إلى المستقيم $y = -3$. والذي هو،

$$r_I = 0 - (-3) = 3$$



الشكل 6.24a
الدوران حول $y = -3$

من (2.2)، يكون الحجم

$$V = \int_{-2}^{2} \underbrace{\pi(7-x^2)^2}_{\pi(\text{نصف قطر خارجي})^2} dx - \int_{-2}^{2} \underbrace{\pi(3)^2}_{\pi(\text{نصف قطر داخلي})^2} dx = \frac{1472}{15}\pi$$

حيث قمنا بترك تفاصيل عملية الحساب كتمرين.

الجزء (c) (إنّ الدوران حول المستقيم $y = 7$) مشابه تماماً للجزء (b). يمكنك رؤية المنطقة R في الشكل 6.25a والمجسّم في الشكل 6.25b (موجودان في الصفحة التالية).

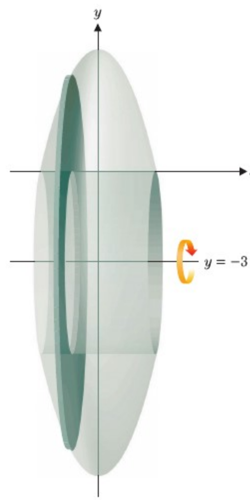
إنّ المقاطع العرضية للمجسّم على شكل حلقات مجددًا، لكن هذه المرة، يكون نصف القطر الخارجي هو المسافة من المستقيم $y = 7$ إلى المحور x. والذي هو، $r_O = 7$. ونصف القطر الداخلي هو المسافة من المستقيم $y = 7$ إلى المنحنى $y = 4 - x^2$،

$$r_I = 7 - (4 - x^2) = 3 + x^2$$

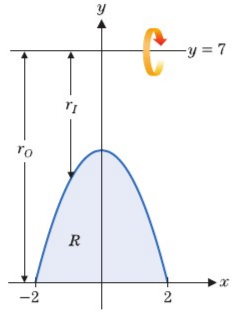
من (2.2)، يكون عندئذ حجم المجسّم

$$V = \int_{-2}^{2} \underbrace{\pi(7)^2}_{\pi(\text{نصف قطر خارجي})^2} dx - \int_{-2}^{2} \underbrace{\pi(3+x^2)^2}_{\pi(\text{نصف قطر داخلي})^2} dx = \frac{576}{5}\pi,$$

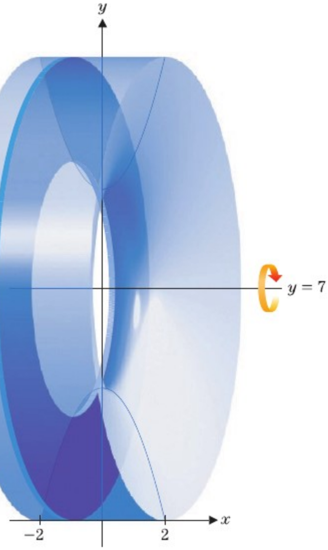
حيث نترك مجددًا تفاصيل عملية الحساب كتمرين.



الشكل 6.24b
المجسّم الناتج عن الدوران

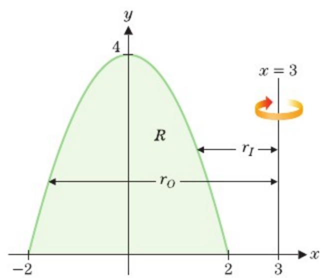


الشكل 6.25a
الدوران حول $y = 7$

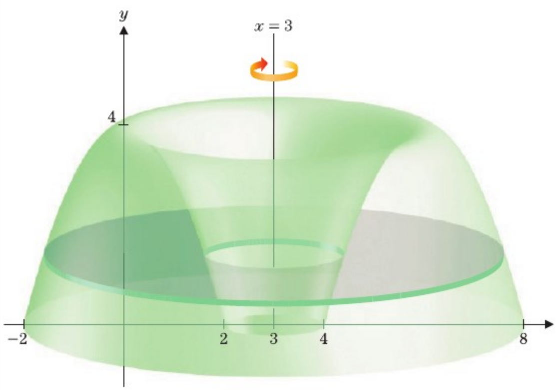


الشكل 6.25b
المجسّم الناتج عن الدوران

أخيرًا، للجزء (d) (الدوران حول المستقيم $x = 3$)، تبدو المنطقة R في الشكل 6.26a ويبدو المجسّم الناتج عن الدوران في الشكل 6.26b. في هذه الحالة، تكون المقاطع العرضية للمجسّم حلقات، ولكن يشكل نصفا القطر الداخلي والخارجي صعوبة أكبر في تحديدهما عن الأجزاء السابقة. إنّ نصف القطر الخارجي هو المسافة بين المستقيم $x = 3$ والنصف الأيسر للقطع المكافئ، بينما نصف القطر الداخلي هو المسافة بين المستقيم $x = 3$ والنصف الأيمن للقطع المكافئ. يعطى القطع المكافئ بالمعادلة $y = 4 - x^2$. بحيث يكون $x = \pm\sqrt{4 - y}$.



الشكل 6.26a
الدوران حول $x = 3$



الشكل 6.26b
المجسّم الناتج عن الدوران

.7 يبلغ طول قبة كنيسة 30 ft بمقاطع عرضية مربعة. طول ضلع المربع الموجود في القاعدة 3 ft. و طول ضلع المربع في الجزء العلوي 6 in و يتغيّر الضلع خطيًا بينهما. احسب الحجم.

.8 تحتوي علية منزل على مقاطع عرضية مستطيلة موازية للأرض و مقاطع عرضية مثلثة متعامدة على الأرض. إبعاد المستطيل 30 ft في 60 ft عند الجزء السفلي للعلية وتبلغ قاعدة المثلثات 30 ft و ارتفاع 10 ft. احسب حجم العلية.

.9 يتم إعطاء الرسم التخطيطي لقبة $y = 20 - \frac{x^2}{60}$ لكل $-20 \le x \le 20$ (بالأمتار)، بمقاطع عرضية دائرية متعامدة على المحور y. أوجد حجمه.

.10 الرسم التخطيطي لقبة حجمها "ضعف" حجم تمرين 9 هو $y = 40 - \frac{x^2}{40}$ لكل $-40 \le x \le 40$ (بالأمتار). أوجد حجمه.

.11 لإناء فخاري مقاطع عرضية دائرية بنصف قطر $4 + \sin\frac{x}{2}$ سنتيمتر لكل $0 \le x \le 2\pi$. ارسم صورة للإناء و احسب حجمه.

.12 لإناء فخاري مقاطع عرضية دائرية بنصف قطر $4 - \sin\frac{x}{2}$ سنتيمتر لكل $0 \le x \le 2\pi$. ارسم صورة للإناء و احسب حجمه.

.1 13 على فرض أنّ فحص تصوير MRI يبين أنّ مساحات المقطع العرضي لشرائح متجاورة لورم كما هو مذكور في الجدول. استخدم قاعدة سمبسون لتقدير الحجم.

x (cm)	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$A(x)$ (cm^2)	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.4

x (cm)	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$A(x)$ (cm^2)	0.3	0.2	0.2	0.1	0.0

14 على فرض أنّ فحص تصوير MRI يبيّن أنّ مساحات المقطع العرضي لشرائح متجاورة لورم كما هو مذكور في الجدول. استخدم قاعدة سمبسون لتقدير الحجم.

x (cm)	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$A(x)$ (cm^2)	0.0	0.2	0.3	0.2	0.4	0.2	0.0

.

15 قدّر الحجم من مساحات المقطع العرضي.

x (m)	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$A(x)$ (m^2)	1.0	1.2	1.4	1.3	1.2

16..قدّر الحجم من مساحات المقطع العرضي.

x (m)	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
$A(x)$ (m^2)	2.0	1.8	1.7	1.6	1.8

x (m)	0.5	0.6	0.7	0.8
$A(x)$ (m^2)	2.0	2.1	2.2	2.4

في التمارين 20–17، احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران المنطقة المذكورة حول المستقيم المذكور.

.2 المنطقة المحدودة بواسطة $y = 2 - x, y = 0$ و $x = 0$ حول (a) المحور x؛ (b) $y = 3$

.3 المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2, y = 4 - x^2$ حول (a) المحور x؛ (b) $y = 4$

.4 المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sqrt{x}, y = 2$ و $x = 0$ حول (a) المحور y؛ (b) $y = 4$

.20 المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sqrt{x}, y = 2$ و $x = 0$ حول (a) المحور y؛ (b) $x = 4$

في التمارين 24–21. يتكوّن مجسّم من دوران المنطقة المذكورة حول المستقيم المذكور. احسب الحجم بالضبط إن أمكن و قدّره إذا لزم الأمر.

.21 المساحة المحدودة بواسطة $y = e^x, x = 0, x = 2$ و $y = 0$ حول (a) المحور y؛ (b) $y = -2$

.22 المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sec x, y = 0, x = -\pi/4$ و $x = \pi/4$ حول (a) $y = 2$؛ (b) المحور x

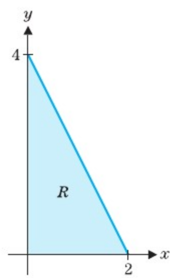
.23 المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sqrt{\frac{x}{x^2+2}}$ و المحور x و $x = 1$ حول (a) المحور x؛ (b) $y = 3$

.24 المنطقة المحدودة بواسطة $y = e^{-x^2}$ و $y = x^2$ حول (a) المحور x؛ (b) $y = -1$

.25 لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - 2x$ والمحور x والمحور y. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(a) المحور y (b) المحور x (c) $y = 4$

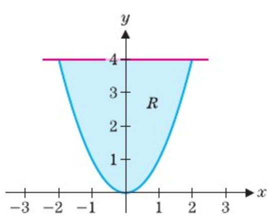
(d) $y = -4$ (e) $x = 2$ (f) $x = -2$



.26 لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 4$. أحسب حجم المجسّم الذي تكونّ من دوران R حول المستقيم المذكور.

(a) $y = 4$ (b) المحور y (c) $y = 6$

(d) $y = -4$ (e) $y = -2$ (f) $x = -4$



27. لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2, y = 0$ و $x = 1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(a) المحور y (b) المحور x (c) $x = 1$

(d) $y = 1$ (e) $x = -1$ (f) $y = -1$

28. لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x, y = -x$ و $x = 1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(a) المحور x (b) المحور y

(c) $y = 1$ (d) $y = -1$

29. لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = ax^2, y = h$ والمحور y (حيث a و h ثوابت موجبة). احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران هذه المنطقة حول y. أثبت أن إجابتك تساوي نصف حجم الأسطوانة ذات الارتفاع h و نصف القطر $\sqrt{h/a}$. ارسم صورة لتوضيح هذا.

30. استخدم نتيجة تمرين 29 لكتابة مباشرة حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = ax^2, x = \sqrt{h/a}$ و المحور x حول المحور y.

31. على فرض أنه يتم دوران المربع المكوّن من كل نقاط (x, y) مع $-1 \le x \le 1$ و $-1 \le y \le 1$ حول المحور y. أثبت أنّ حجم المجسّم الناتج هو 2π.

32. على فرض يتم دوران الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ حول المحور y. أثبت أنّ حجم المجسّم الناتج هو $\frac{4}{3}\pi$.

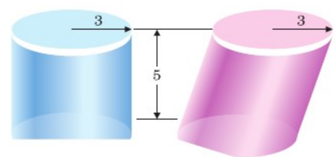
33. على فرض يتم دوران المثلث رؤوسه $(-1, -1)$ و $(0, 1)$ و $(1, -1)$ حول المحور y. أثبت أنّ حجم المجسّم الناتج هو $\frac{2}{3}\pi$.

34. ارسم المربع و الدائرة و المثلث في التمارين 33–31 على المحاور نفسها. بيّن أنّ الأحجام النسبية للمناطق التي تم دورانها (أسطوانية و كروية و مخروطية، على التوالي) تكون 3:2:1.

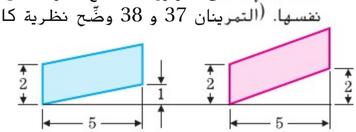
35. أثبت قانون حجم الكرة بدوران الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ حول المحور y.

36. أثبت قانون حجم المخروط بدوران القطعة المستقيمة $y = -\frac{h}{r}x + h, 0 \le x \le r$ حول المحور y.

37. لتكن A هي الأسطوانة الدائرية القائمة نصف قطرها 3 و ارتفاعها 5. لتكن B هي الأسطوانة الدائرية المائلة نصف قطرها 3 وارتفاعها 5. حدد ما إذا كانت A وB لهما الحجم نفسه.



38. حدد ما إذا كان متوازيا الأضلاع الموضّحان لهما المساحة نفسها. (التمرينان 37 و 38 وضّح نظرية كافالييري).



39. إنّ قاعدة المجسّم V هي الدائرة $x^2 + y^2 = 1$. أوجد الحجم إذا كان لدى V مقاطع (a) عرضية مربعة و (b) مقاطع عرضية على شكل نصف دائرة متعامدة على المحور x.

40. قاعدة المجسّم V هي مثلث رؤوسه $(0, -1)$ و $(0, 1)$ و $(1, 0)$. أوجد الحجم إذا كان لدى V (a) مقاطع عرضية مربّعة و (b) مقاطع عرضية نصف دائرة متعامدة على المحور x.

41. قاعدة المجسّم V هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$. أوجد الحجم إذا كان لدى V (a) مقاطع عرضية مربّعة و (b) و مقاطع عرضية على شكل نصف دائرة و (c) مقاطع عرضية مثلثات متساوية الأضلاع متعامدة على المحور x.

42. قاعدة المجسّم V هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = \ln x, x = 2$ و $y = 0$. أوجد الحجم إذا كان لدى V (a) مقاطع عرضية مربّعة و (b) مقاطع عرضية نصف دائرة و (c) مقاطع عرضية على مثلثة متساوية الأضلاع متعامدة على المحور x.

43. قاعدة المجسّم V هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = e^{-2x}, y = 0, x = 0$ و $x = \ln 5$. أوجد الحجم إذا كان لدى V (a) مقاطع عرضية مربّعة و (b) مقاطع عرضية نصف دائرة متعامدة على المحور x.

44. قاعدة المجسّم V هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$. أوجد الحجم إذا كان لدى V (a) مقاطع عرضية مربّعة و (b) ومقاطع عرضية على شكل نصف دائرة متعامدة على المحور x.

45. أوجد حجم تقاطعات الكرتين، تكوّنت إحداهما بدوران الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ حول المحور y والأخرى تكوّنت بدوران الدائرة $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ حول $x = 1$.

46. لتكن S هي الكرة التي تكوّنت بدوران $x^2 + y^2 = 4$ حول المحور y وأنّ C هي الأسطوانة التي تكونت بدوران $-4 \le y \le 4$. حول المحور y. أوجد حجم تقاطع S مع C.

التطبيقات

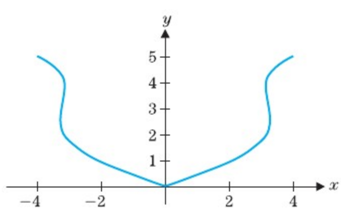
47. استخدم جدول القيم المعطى لتقدير حجم المجسّم الذي تكوّن بدوران $y = f(x), 0 \le x \le 3$ حول المحور x.

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$f(x)$	2.0	1.2	0.9	0.4	1.0	1.4	1.6

48. استخدم جدول القيم المعطى لتقدير حجم المجسّم الذي تكوّن بدوران $y = f(x), 0 \le x \le 2$ حول المحور x.

x	0	0.25	0.50	0.75	1.0	1.25	1.50	1.75	2.0
$f(x)$	4.0	3.6	3.4	3.2	3.5	3.8	4.2	4.6	5.0

49. يتم سكب الماء بمعدل ثابت في الأصيص برسم تخطيطي كما يبدو في الشكل و مقاطع عرضية دائرية. ارسم تمثيلاً بيانيًا لارتفاع الماء في الأصيص كدالة للزمن.



.50 ارسم تمثيل بياني لمعدل التدفق في مقابل الزمن إذا قمت بسكب الماء في الأصيص الموجودة في التمرين 49 بمثل تلك الطريقة التي يتزايد من خلالها ارتفاع الماء في الأصيص بمعدل ثابت.

تمارين استكشافية

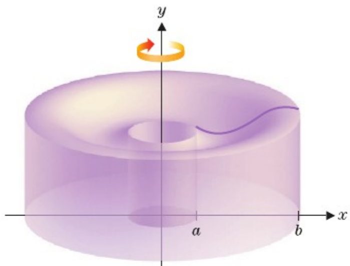
.1 قم بتعميم نتيجة التمرين 34 على أي مستطيل. والذي هو، ارسم المستطيل مع $-a \le x \le a$ و $-b \le y \le b$، والقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ والمثلث رؤوسه $(-a, -b)$ و $(0, b)$ و $(a, -b)$.

أثبت أنّ الأحجام النسبية للمجسّم الذي تكوّن بدوران هذه المناطق حول المحور y تكون 3:2:1.

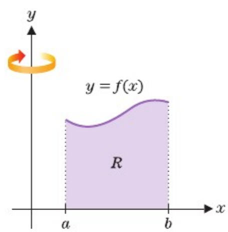
.2 قم بدوران الدائرة $(x-2)^2 + y^2 = 1$ حول المحور y. يطلق على المجسّم الناتج الشبيه بكعكة حلقية محلاة اسم **حلقة دورانية**. احسب حجمها. بيّن أنّ الحجم يساوي مساحة الدائرة مضروبة في المسافة التي قطعها مركز الدائرة. وهذا مثال على **نظرية بابوس**، التي يرجع تاريخها إلى القرن الرابع قبل الميلاد. تحقق من أنّ النتيجة تنطبق على المثلث الموجود في التمرين 25. الأجزاء (c) و(d).

الدرس 6-3 الأحجام بالأصداف الأسطوانية

في هذا الدرس، نقدم بديلًا لطريقة الحلقات التي تمت مناقشتها في الدرس 6.2. لتكن R ترمز إلى المنطقة المحدودة بالتمثيل البياني $y = f(x)$ والمحور -x على الفترة $[a, b]$، حيث $0 < a < b$ و $f(x) \geq 0$ على $[a, b]$. (أنظر الشكل 6.27a). إذا قمنا بدوران هذه المنطقة حول المحور y، نحصل على المجسّم المبيّن في الشكل 6.27b. إنّ إيجاد حجم هذا المجسّم بطريقة الحلقات صعب، حيث إننا سنحتاج إلى تقطيع المنطقة إلى عدة أجزاء.

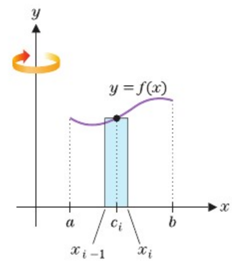


الشكل 6.27b
المجسّم الناتج عن الدوران



الشكل 6.27a
الدوران حول المحور y

وبدلًا من ذلك، نجزّىء الفترة $[a, b]$ إلى n فترة جزئية متساوية $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. عند كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$، اختر نقطة c_i وقم بإنشاء المستطيل ارتفاعه $f(c_i)$ كما هو موضّح في الشكل 6.28. إنّ تدوير هذا المستطيل حول المحور y يشكّل صدفة أسطوانية رفيعة (أي، أسطوانة مجوفة، مثل أنبوب) كما في الشكل 6.29a.



الشكل 6.28
مستطيل الحد i

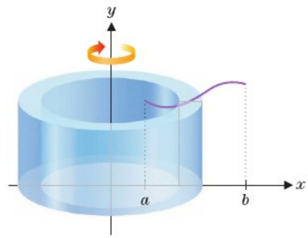
لإيجاد حجم هذه الصدفة، تخيل أنكّ تقطعها من أعلى لأسفل ثم تقوم بتسوية صدفتها. بعد إجراء هذا، ينبغي أن تحصل بشكل أساسي على لوحة مستطيلة رفيعة، كما يظهر في الشكل 6.29b.

لاحظ أنّ طول مثل هذه اللوحة الرفيعة يناظر محيط الصدفة الأسطوانية، وهو $2\pi c_i \approx$ نصف القطر x 2π . لذلك، فإنّ حجم V_i للصدفة الأسطوانية عند الحد i يبلغ بشكل تقريبي

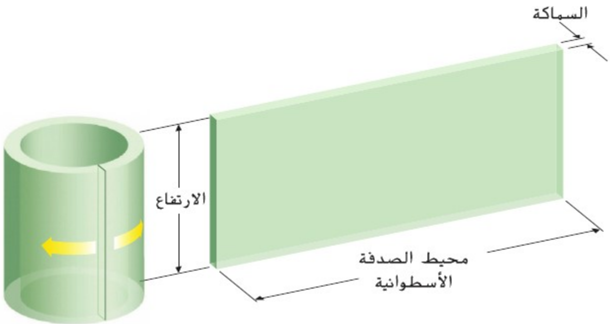
$$\begin{aligned} V_i &\approx \text{الطول} \times \text{السماكة} \times \text{الارتفاع} \\ &= (2\pi \times \text{نصف القطر}) \times \text{العرض} \times \text{الارتفاع} \\ &\approx (2\pi c_i)\, \Delta x f(c_i). \end{aligned}$$

يمكن عندئذ تقريب إجمالي حجم V المجسّم بإيجاد ناتج جمع أحجام الصدفات الأسطوانيات n:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi \underbrace{c_i}_{\text{نصف القطر}} \underbrace{f(c_i)}_{\text{الارتفاع}} \underbrace{\Delta x}_{\text{السماكة}}$$



الشكل 6.29a
صدفة أسطوانية



الشكل 6.29b
صدفة أسطوانية مستوية

وكما قمنا بذلك عدة مرات الآن، يمكننا الحصول على الحجم الدقيق للمجسّم بأخذ النهاية عندما $n \to \infty$ والتعرف على التكامل المحدود الناتج. لدينا

حجم مجسّم ناتج عن الدوران (أصداف أسطوانية)

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi c_i f(c_i)\,\Delta x = \int_a^b 2\pi \underbrace{x}_{\text{نصف القطر}}\ \underbrace{f(x)}_{\text{الارتفاع}}\ \underbrace{dx.}_{\text{السماكة}} \qquad (3.1)$$

ملحوظة 3.1

لا تعتمد فقط على حفظ الصيغة (3.1). يجب أن تسعى لفهم معنى المركبات. يسهل إجراء الأمر إذا فكرت فقط في تناظرها مع حجم الصدفة الأسطوانية:

2π (نصف القطر) (الارتفاع) (السماكة)

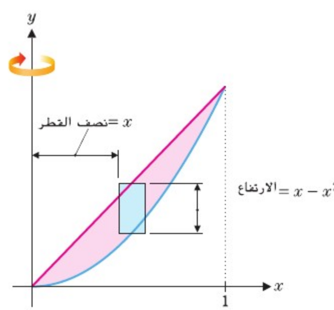
إذا فكرت في الأحجام بهذه الطريقة، فلن تجد صعوبة مع طريقة الأصداف الأسطوانية.

لأسباب واضحة، يمكننا تسمية هذا طريقة الأصداف الأسطوانية.

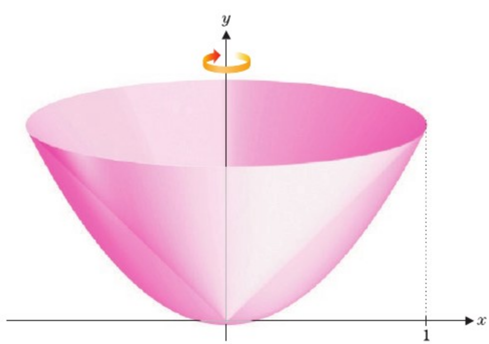
المثال 3.1 استخدام طريقة الأصداف الأسطوانية

استخدم طريقة الأصداف الأسطوانية لإيجاد حجم المجسّم الذي تكوّن بدوران المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = x$ و $y = x^2$ في الربع الأول حول المحور y.

الحل من الشكل 6.30a. لاحظ أنّ للمنطقة حد أعلى عند $y = x$ وحد أدنى عند $y = x^2$ وتمتد من $x = 0$ إلى $x = 1$. هنا، لقد رسمنا مستطيلاً بسيطاً يولّد صدفة أسطوانية. يمكن رؤية المجسّم الناتج عن الدوران في الشكل 6.30b. يمكننا كتابة تكامل



الشكل 6.30a
مستطيل بسيط يولد صدفة أسطوانية



الشكل 6.30b
المجسّم الناتج عن الدوران

للحجم بتحليل المركبات المتنوعة للمجسّم في الشكلين 6.30a و 6.30b. من (3.1)، لدينا

$$V = \int_0^1 2\pi \underbrace{x}_{\text{نصف القطر}} \underbrace{(x - x^2)}_{\text{الارتفاع}} \underbrace{dx}_{\text{السماكة}}$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx = 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

يمكننا تعميم هذه الطريقة لحل المسألة في المثال 2.7 الجزء (d) بأسلوب مبسط وأكبر.

المثال 3.2 الحجم حيث الصدفات أبسط من الحلقات

أوجد حجم المجسّم الذي تكوّن بدوران المنطقة المحصورة بين التمثيل البياني $y = 4 - x^2$ والمحور -x حول المستقيم $x = 3$.

الحل أنظر بتمعن إلى الشكل 6.31a. حيث رسمنا مستطيلاً بسيطاً يولّد صدفة أسطوانية وإلى المجسّم الموضّح في الشكل 6.31b. لاحظ أنّ نصف قطر الصدفة الأسطوانية هو المسافة من المستقيم $x = 3$ إلى الصدفة:

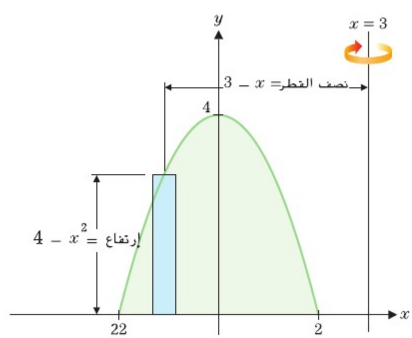
$$r = 3 - x$$

يعطينا هذا الحجم

$$V = \int_{-2}^{2} 2\pi \underbrace{(3 - x)}_{\text{نصف القطر}} \underbrace{(4 - x^2)}_{\text{الارتفاع}} \underbrace{dx}_{\text{السماكة}}$$

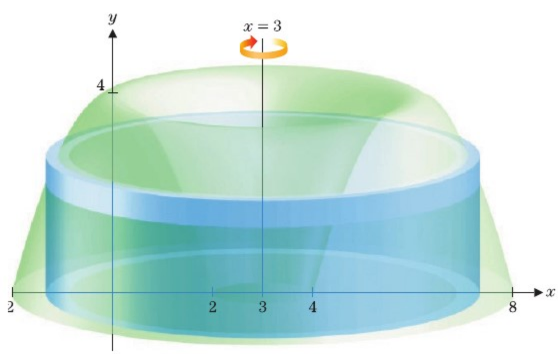
$$= 2\pi \int_{-2}^{2} (x^3 - 3x^2 - 4x + 12)\, dx = 64\pi,$$

حيث نترك التفاصيل الروتينية لعملية حساب التكامل إلى القارئ.



الشكل 6.31a

مستطيل بسيط يولّد صدفة أسطوانية



الشكل 6.31b

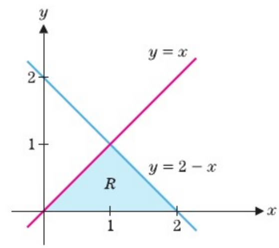
المجسّم الناتج عن الدوران

ينبغي أن تكون الخطوة الأولى التي تتخذها في عملية حساب الحجم هي تحليل الشكل الهندسي للمجسّم وإتخاذ قرار بشأن إذا كان من الأسهل إجراء تكامل بمعلومية x أو y.
لاحظ أنّه لأجل مجسّم معطى، يكون متغير التكامل في طريقة الأصداف الأسطوانية عكس تمامًا لتلك الخاصة بطريقة الحلقات. لذا، سيحدد اختيارك لمتغيّر التكامل الطريقة التي تستخدمها.

المثال 3.3 حساب الأحجام باستخدام الأصداف والحلقات

لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = x$، $y = 2 - x$ و $y = 0$.
احسب حجم المجسّم الذي تكوّن بتدوير R حول المستقيمات (a) $y = 2$، (b) $y = -1$ و (c) $x = 3$.

الحل تبدو المنطقة R في الشكل 6.32a. يشير الشكل الهندسي للمنطقة إلى أنه يجب التفكير في y باعتبارها متغيّر التكامل. أنظر بتمعن للاختلافات بين الأحجام الثلاثة التالية.



الشكل 6.32a
$y = x$ و $y = 2 - x$

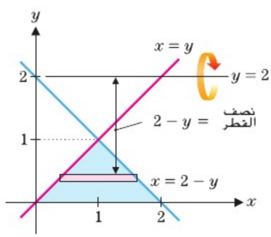
(a) عند تدوير R حول المستقيم $y = 2$، لاحظ أنّ نصف قطر الصدفة الأسطوانية هو المسافة من المستقيم $y = 2$ إلى الصدفة: $r = 2 - y$، لكل $0 \le y \le 1$. (أنظر الشكل 6.32b).
يعُتبَر الارتفاع الفرق في قيم x على المنحنيين: عند إجراء الحل لإيجاد x، نحصل على $x = y$ و $x = 2 - y$. باتباع (3.1)، نحصل على الحجم

$$V = \int_0^1 2\pi \underbrace{(2-y)}_{\text{نصف القطر}} \underbrace{[(2-y)-y]}_{\text{الارتفاع}} \underbrace{dy}_{\text{السماكة}} = \frac{10}{3}\pi$$

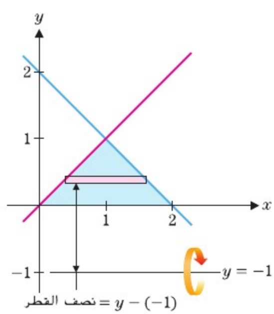
حيث نترك التفاصيل الروتينية لعملية الحساب إليك.

(b) عند تدوير R حول المستقيم $y = -1$، لاحظ أنّ ارتفاع الأصداف الأسطوانية هو مماثل للموجود في الجزء (a)، ولكن نصف القطر r هو المسافة من المستقيم $y = -1$ إلى الصدفة: $r = y - (-1) = y + 1$. (أنظر الشكل 6.32c). يعطينا هذا الحجم

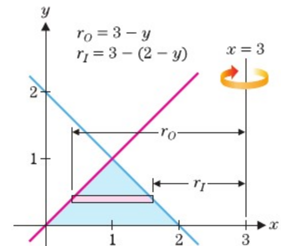
$$V = \int_0^1 2\pi \underbrace{[y-(-1)]}_{\text{نصف القطر}} \underbrace{[(2-y)-y]}_{\text{الارتفاع}} \underbrace{dy}_{\text{السماكة}} = \frac{8}{3}\pi$$



الشكل 6.32d
الدوران حول $x = 3$



الشكل 6.32c
الدوران حول $y = -1$



الشكل 6.32b
الدوران حول $y = 2$

(c) في النهاية، عند تدوير R حول المستقيم $x = 3$، لاحظ أنه لإيجاد الحجم باستخدام الأصداف الأسطوانية، سنحتاج إلى تقسيم عملية الحساب إلى جزأين، حيث إنّ ارتفاع الأصداف الأسطوانية سيكون مختلفًا بالنسبة لـ $x \in [0, 1]$ عن $x \in [1, 2]$. (فكر في هذا الأمر بعض الشيء).
على الجانب الآخر، يمكن إجراء هذا بسهولة بواسطة طريقة الحلقات. لاحظ أنّ نصف القطر الخارجي هو المسافة من المستقيم $x = 3$ إلى المستقيم $x = y$: $r_O = 3 - y$، بينما نصف القطر الداخلي هو المسافة من المستقيم $x = 3$ إلى المستقيم $x = 2 - y$: $r_I = 3 - (2 - y)$. (أنظر الشكل 6.32d). يعطينا هذا الحجم

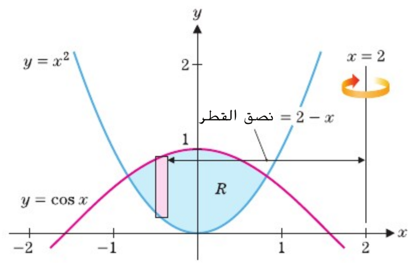
$$V = \int_0^1 \pi \left\{ \underbrace{(3-y)^2}_{\text{مربع نصف قطر خارجي}} - \underbrace{[3-(2-y)]^2}_{\text{مربع نصف قطر داخلي}} \right\} dy = 4\pi \quad ■$$

مرة أخرى، ينبغي ملاحظة أهمية رسم المنطقة وتسميتها بعناية. سيسهل إجراء ذلك من إعداد التكامل بشكل صحيح. في النهاية، قم بكل ما يلزم لتقدير التكامل. إذا كنت لا تعرف طريقة تقديره، يمكنك المحاولة من خلال CAS الخاص بك أو قم بتقريبه عدديًا (مثال بواسطة قاعدة سمبسون).

المثال 3.4 تقريب الأحجام باستخدام الأصداف والحلقات

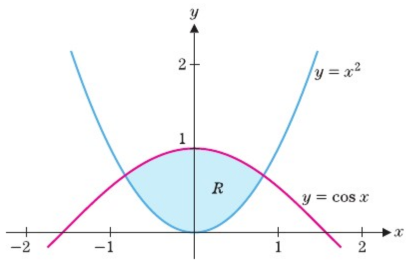
لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = \cos x$ و $y = x^2$. احسب حجم المجسّم الذي تكون بدوران R حول المستقيمين $x = 2$ (a) و $y = 2$ (b)

الحل أولاً، نرسم المنطقة R. (أنظر الشكل 6.33a) بما أنّه يتم تحديد كل من الجزء الأعلى والأدنى لـ R بواسطة منحنى بالشكل $y = f(x)$. سنرغب في إجراء تكامل بمعلومية x. نبحث تاليًا عن نقاط تقاطع المنحنيين، بحل المعادلة $\cos x = x^2$. نظرًا إلى أنّه لا يمكننا حل هذا بالضبط، يجب أن نستخدم طريقة تقريبية (مثال طريقة نيوتن) للحصول على التقاطعات التقريبية عند $x = \pm 0.824132$



الشكل 6.33a

$y = \cos x, y = x^2$



الشكل 6.33b

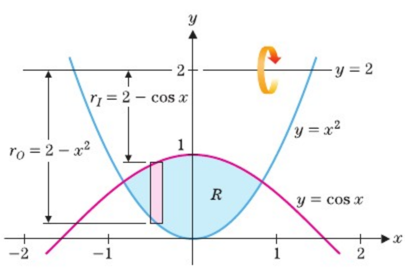
الدوران حول $x = 2$

(a) بدوران المنطقة حول المستقيم $x = 2$، ينبغي أن نستخدم أصداف أسطوانية. (أنظر الشكل 6.33b). في هذه الحالة، لاحظ أنّ نصف القطر r للصدفة الأسطوانية هو المسافة من المستقيم $x = 2$ إلى الصدفة: $r = 2 - x$. بينما ارتفاع الصدفة هو $\cos x - x^2$. نحصل على الحجم

$$V \approx \int_{-0.824132}^{0.824132} 2\pi \underbrace{(2 - x)}_{\text{نصف القطر}} \underbrace{(\cos x - x^2)}_{\text{الارتفاع}} dx \approx 13.757$$

حيث قربنا قيمة التكامل عدديًا.

(b) بدوران المنطقة حول المستقيم $y = 2$ (أنظر الشكل 6.33c)، نستخدم طريقة الحلقات. في هذه الحالة، لاحظ أنّ نصف القطر الخارجي لحلقة هو المسافة من المستقيم $y = 2$ إلى المنحنى $y = x^2$: $r_O = 2 - x^2$، بينما نصف القطر الداخلي هو المسافة من المستقيم $y = 2$ إلى المنحنى $y = \cos x$: $r_I = 2 - \cos x$. (مرة أخرى، أنظر



الشكل 6.33c

الدوران حول $y = 2$

الشكل 6.33c). يعطينا هذا الحجم

$$V \approx \int_{-0.824132}^{0.824132} \pi \left[\underbrace{(2-x^2)^2}_{\text{مربع نصف قطر اخر}} - \underbrace{(2-\cos x)^2}_{\text{مربع نصف قطر داخلي}} \right] dx \approx 10.08$$

حيث قرّبنا قيمة التكامل عدديًا. ■

نختم هذا الدرس بملخص لاستراتيجيات حساب أحجام المجسّمات الناتجة عن الدوران.

حجم مجسّم ناتج عن الدوران

- ارسم المنطقة التي سيتم دورانها ومحور الدوران.
- حدد متغيّر التكامل (x إذا كان في المنطقة حد أعلى وحد أدنى معرّفان جيداً، y إذا كان في المنطقة حد أيسر وأيمن معرّفان جيدًا).
- استنادًا إلى محور الدوران ومتغير التكامل، حدد الطريقة (الأقراص أو الحلقات لتكامل -x حول محور أفقي أو تكامل y حول محور رأسي. الأصداف لتكامل x حول محور رأسي أو تكامل y حول محور أفقي).
- عيّن على الرسم نصف القطر الداخلي ونصف القطر الخارجي للأقراص وللحلقات وعيّن نصف القطر والارتفاع للأصداف الأسطوانية.
- قم بإعداد التكامل (التكاملات) وجد القيمة.

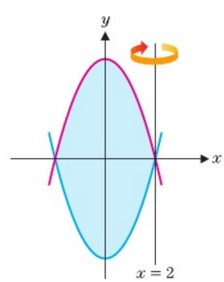
تمارين 6.3

تمارين كتابية

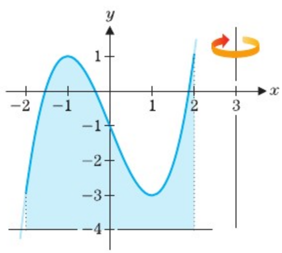
1. اشرح السبب في أنّ طريقة الأصداف الأسطوانية تنتج تكاملًا حيث يُعتَبَر x متغيّر التكامل عند الدوران حول محور رأسي. (قم بوصف موقع الأصداف والاتجاه الذي سوف تأخذه عندما تتحرّك من صدفة الى صدفة).

2. اشرح لمَ طريقة الأصداف الأسطوانية لها الشكل نفسه سواء كان للمجسّم ثقب أو تجويف. أي إنّه ما من حاجة لطرائق منفصلة مماثلة للأقراص والحلقات.

3. على فرض أنّ المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2 - 4$ و $y = 4 - x^2$ يتم تدويرها حول المستقيم $x = 2$. اشرح بدقة الطريقة (الأقراص أو الحلقات أو الأصداف) التي ستكون الأسهل في الاستخدام لحساب الحجم.



4. على فرض أنّ المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^3 - 3x - 1$ و $y = -4$، $-2 \le x \le 2$، يتم دورانها حول $x = 3$. اشرح ما سيلزم لحساب الحجم باستخدام طريقة الحلقات وما سيلزم لاستخدام طريقة الأصداف الأسطوانية. أي طريقة تفضل ولماذا؟



في التمارين 8–1، ارسم المنطقة وارسم صدفة نوعية وحدد نصف قطر وارتفاع كل صدفة واحسب الحجم.

1. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ والمحور x، $-1 \le x \le 1$، حول $x = 2$

2. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ والمحور x، $-1 \le x \le 1$، حول $x = -2$

3. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x$، $y = -x$ و $x = 1$ حول المحور y

4. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x$، $y = -x$ و $x = 1$ حول $x = 1$

5. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sqrt{x^2+1}$ ، $y = 0$ و $0 \le x \le 4$ حول $x = 0$

6. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 0$، $-1 \le x \le 1$ حول $x = 2$

7. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x^2 + y^2 = 1$ حول $y = 2$

8. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x^2 + y^2 = 2y$ حول $y = 4$

في التمارين 16–9، استخدم الأصداف الأسطوانية لحساب الحجم.

9. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$، حول $x = -2$

10. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$، حول $x = 2$

11. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x = y^2$ و $x = 4$، حول $y = -2$

12. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x = y^2$ و $x = 4$، حول $y = 2$

13. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2 + 2$، $y = x + 1$ و $x = 2$، حول $x = 3$

14. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x$ و $y = x^2 - 2$، حول $x = 3$

15. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x = (y-1)^2$ و $x = 9$، حول $y = 5$

16. يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x = (y-1)^2$ و $x = 9$، حول $y = -3$

في التمارين 26–17، استخدم أفضل طريقة مناسبة لإيجاد كل حجم.

17. يتم دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = 4 - x$، $y = 4$ و $y = x$ حول

(a) المحور x (b) المحور y (c) $x = 4$ (d) $y = 4$

18. يتم دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x + 2$، $y = -x - 2$ و $x = 0$ حول

(a) $y = -2$ (b) $x = -2$ (c) المحور y (d) المحور x

19. يتم دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x$ و $y = x^2 - 6$ حول

(a) $x = 3$ (b) $y = 3$ (c) $x = -3$ (d) $y = -6$

20. يتم دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $x = y^2$ و $x = 2 + y$ حول

(a) $x = -1$ (b) $y = -1$ (c) $x = -2$ (d) $y = -2$

21. يتم دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = x^2\ (x \ge 0)$، $y = 2 - x$ و $x = 0$ حول

(a) المحور x (b) المحور y (c) $x = 1$ (d) $y = 2$

22. يتم دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = 2 - x^2$، $y = x\ (x > 0)$ و المحور y حول

(a) المحور x (b) المحور y (c) $x = -1$ (d) $y = -1$

23. يتم دوران المنطقة على يمين $x = y^2$ وعلى شمال $y = 2 - x$ و $y = x - 2$ حول

(a) المحور x (b) المحور y

24. يتم دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = e^x - 1$، $y = 2 - x$ و المحور x حول

(a) المحور x (b) المحور y

25. يتم دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = \cos x$ و $y = x^4$ حول

(a) $x = 2$ (b) $y = 2$ (c) المحور x (d) المحور y

26. يتم دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = \sin x$ و $y = x^2$ حول

(a) $y = 1$ (b) $x = 1$ (c) المحور y (d) المحور x

في التمارين 30–27، يمثل التكامل حجم مجسّم. ارسم المنطقة ومحور الدوران اللذين ينتج عنهما المجسم.

27. $\int_0^1 \pi[(\sqrt{y})^2 - y^2]\,dy$

28. $\int_0^2 \pi(4 - y^2)^2 dy$

29. $\int_0^1 2\pi x(x - x^2)\,dx$

30. $\int_0^2 2\pi(4 - y)(y + y)\,dy$

31. استخدم طريقة مشابهة لاشتقاقنا للمعادلة (3.1) لاشتقاق الحقيقة التالية حول دائرة نصف قطرها R. المساحة $= \pi R^2 = \int_0^R c(r)\,dr$، حيث $c(r) = 2\pi r$ هو محيط دائرة نصف قطرها r.

32. لقد لاحظت على الأرجح أنّ محيط دائرة $(2\pi r)$ يساوي الاشتقاق بمعلومية r مساحة الدائرة (πr^2). استخدم التمرين 31 لشرح سبب أن هذا ليس مصادفة.

التطبيقات

33. تتكوّن خرزة مجوهرات باحداث ثقب طول نصف قطره $\frac{1}{2}$-cm من مركز كرة طول نصف قطرها 1-cm. اشرح سبب إعطاء الحجم بواسطة $\int_{1/2}^1 4\pi x\sqrt{1 - x^2}\,dx$. أوجد قيمة هذا التكامل أو احسب الحجم في طريقة أسهل بعض الشيء.

34. أوجد حجم الثقب في التمرين 33 بحيث يكون قد تمت إزالة نصف الحجم بالضبط.

35. إنّ كثيب نمل شبيه بالشكل الذي تكوّن عند تدوير المنطقة المحدودة بواسطة $y = 1 - x^2$ والمحور x حول المحور -y. يزيل باحث نواة أسطوانية من مركز الكثيب. كم ينبغي أن يكون طول نصف القطر لإعطاء الباحث %10 من التربة؟

36. الرسم التخطيطي لكرة رجبي على شكل $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{16} = 1$. تعُدّ الكرة نفسها ناتج تدوير هذا القطع الناقص حول المحور -x. أوجد حجم الكرة.

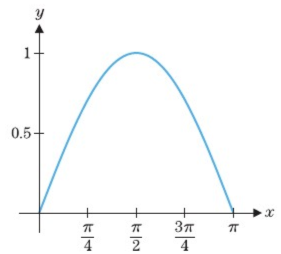
تمارين استكشافية

1. يتم إحداث ثقب طول نصف قطره r في مركز كرة طول نصف قطرها R. احسب الحجم الذي تمت إزالته بدلالة R و r. احسب طول L للثقب بدلالة R و r. أعد كتابة الحجم بدلالة L. هل من المعقول اعتبار أنّ الحجم الذي تمت إزالته يعتمد على L وليس R؟

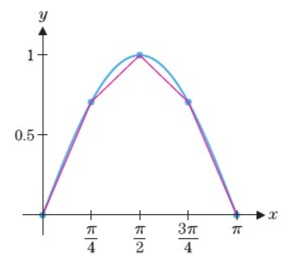
2. في كل حالة، ارسم المجسّم وأوجد الحجم الذي تكوّن بدوران المنطقة حول (i) المحور x و (ii) المحور y .
احسب الحجم بالضبط إن أمكن وقدّره عدديًا إذا لزم الأمر. (a) منطقة محدودة بواسطة $y = \sec x\sqrt{\tan x + 1}$، $y = 0, x = -\frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{\pi}{4}$. (b) منطقة محدودة بواسطة $x = \sqrt{y^2 + 1}$، $x = 0$، $y = -1$ و $y = 1$. (c) منطقة محدودة بواسطة $y = \frac{\sin x}{x}$، $y = 0$، $x = \pi$ و $x = 0$. (d) منطقة محدودة بواسطة $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ و $y = 0$. (e) منطقة محدودة بواسطة $y = e^{-x^2}$ و $y = (x-1)^2$.

الدرس 6-4 طول القوس ومساحة السطح

في هذا الدرس، سنحسب طول منحنى في بعدين ومساحة سطح في ثلاثة أبعاد. كما هو الحال دائمًا، انتبه بصورة خاصّةللمشتقات.



الشكل **6.34a**
$y = \sin x$



الشكل **6.34b**
تقريب أربع قطع مستقيمة
$y = \sin x$

الطول	n
3.8125	8
3.8183	16
3.8197	32
3.8201	64
3.8202	128

طول القوس

كيف يمكننا إيجاد طول جزء من منحنى sine الموضّح في الشكل 6.34a؟ (نطلق على طول منحنى اسم **طول القوس** الخاص به). إذا كان المنحنى بالفعل قطعة من الخيط، يمكنك جعل الخيط مستقيمًا ثم القيام بقياس طوله بمسطرة. مع وضع هذا في الاعتبار، نبدأ بتقريب.

نقوم أولًا بتقريب المنحنى مع عدّة قطع مستقيمة متصلة ببعضها البعض. في الشكل 6.34b، تربط القطع المستقيمة النقاط $(0, 0)$، $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$، $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$، $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ و $(\pi, 0)$ على المنحنى $y = \sin x$. يعطى تقريب لطول القوس s للمنحنى من ناتج جمع أطوال هذه القطع المستقيمة:

$$s \approx \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \approx 3.79$$

يمكن أن نلاحظ أنّ هذا التقدير صغير جدًا. (ما السبب وراء هذا؟) سنقوم بتحسين التقريب الذي نجريه بطريقة استخدام أكثر من أربع قطع مستقيمة. في الجدول الموجود على اليسار، نعرض تقديرات لطول المنحنى باستخدام n قطع مستقيمة للقيم الأكبر لـ n. كما تتوقع، ستقترب قيمة التقريب من طول المنحنى الفعلي بازدياد عدد القطع المستقيمة. من المفترض أن تبدو هذه الفكرة العامة مألوفة.

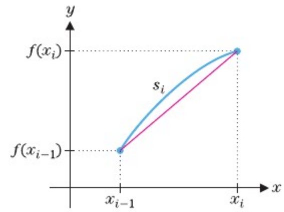
نقوم بمزيد من التطوير لهذا المفهوم للمسائل العامة بشكل أكبر لإيجاد طول قوس المنحنى $y = f(x)$ على الفترة $[a, b]$. وهنا، سوف نفترض أنّ f متصلة على $[a, b]$ وقابلة للإشتقاق على (a, b). (أين رأيت مثل هذه الفرضيات من قبل؟) كالعادة، بدأنا بتجزئة الفترة $[a, b]$ إلى n أجزاء متساوية: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$، حيث $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$، لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

بين كل زوج من النقاط المتجاورة على المنحنى، $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ و $(x_i, f(x_i))$، نقرّب طول القوس s_i من مسافة المستقيم بين النقطتين. (انظر الشكل 6.35 في الصفحة التالية). من قانون المسافة المستخدم، يوجد لدينا

$$s_i \approx d\{(x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i))\} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

حيث إنّ f متصلة لكل القيم على $[a, b]$ وقابلة للإشتقاق على (a, b)، f متصلة أيضًا على الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ وقابلة للإشتقاق على (x_{i-1}, x_i). بواسطة نظرية القيمة المتوسطة، يوجد لدينا إذًا

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$$



الشكل 6.35

تقريب المستقيم لطول القوس

لبعض الأعداد $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$. يعطينا ذلك التقريب

$$\begin{aligned} s_i &\approx \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} \\ &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f'(c_i)(x_i - x_{i-1})]^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x} = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x \end{aligned}$$

بجمع أطوال قطع مستقيمة عددها n، نحصل على تقريب بالطول الكلي للقوس،

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x$$

لاحظ أنّه كلما كبرت قيمة n، ينبغي أن يبلغ هذا التقريب طول القوس بالضبط، وهو،

$$s = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x$$

يجب عليك التعرف على هذا الأمر باعتباره النهاية لمجموع ريمان لـ $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$، بحيث يتم إعطاء طول القوس بالضبط من التكامل المحدود:

طول قوس $y = f(x)$ على الفترة $[a, b]$

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx} \qquad (4.1)$$

حيثما توجد النهاية.

ملحوظة 4.1

قانون طول القوس بسيط للغاية. للأسف، عدد قليل جدًا من الدوال ينتج تكاملات لطول القوس يمكن إيجاد قيمته بالضبط. ينبغي أن تتوقع استخدام أسلوب تكامل عددي على آلتك الحاسبة أو الحاسوب الخاص بك لحساب معظم أطوال الأقواس.

المثال 4.1 استخدام قانون طول القوس

أوجد طول القوس الخاص بجزء من منحنى $y = \sin x$ مع $0 \le x \le \pi$. (لقد قدّرنا ذلك في المثال 3.79 بعد المقدّمة).

الحل من (4.1)، طول القوس

$$s = \int_0^\pi \sqrt{1 + (\cos x)^2}\,dx$$

حاول إيجاد دالة أصلية لـ $\sqrt{1 + \cos^2 x}$، لكن لا تحاول ذلك لفترة طويلة. (إنّ أفضل ما يمكن أن يقوم به CAS الخاص بنا هو $\sqrt{2}\,\text{EllipticE}[x, \frac{1}{2}]$، والذي لا يبدو مفيدًا بشكل خاص). باستخدام أسلوب تكامل عددي، يكون طول القوس

$$s = \int_0^\pi \sqrt{1 + (\cos x)^2}\,dx \approx 3.8202 \blacksquare$$

وحتى لأي منحنيات بسيطة للغاية، يمكن أن يمثّل إيجاد قيمة تكامل طول القوس بالضبط تحديًا كبيرًا.

المثال 4.2 تقدير طول قوس

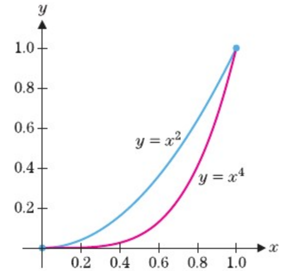
أوجد طول قوس لجزء من منحنى $y = x^2$ مع $0 \le x \le 1$.

الحل باستخدام قانون طول القوس (4.1)، نجد أنّ

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\,dx \approx 1.4789$$

حيث أوجدنا قيمة التكامل عدديًا مرة أخرى. (في هذه الحالة، يمكنك إيجاد دالة أصلية باستخدام تقنية متطورةفي الدرس 6.3 وإيجاد قيمة التكامل بالضبط باعتباره $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{5} + 2)}{4}$). $\blacksquare$

يبدو التمثيلان البيانيان لـ $y = x^2$ و $y = x^4$ متماثلين بشكل يثير الدهشة على الفترة $[0, 1]$. (انظر الشكل 6.36). يربط كلاهما النقطتين $(0, 0)$ و $(1, 1)$ وتتزايد قيمتهما ويصبحان مقعرين لأعلى. إذا قمت بتمثيلهما على التوازي، ستلاحظ أنّ $y = x^4$ تبدأ بشكل أكثر تسطيحًا ثم تصبح أكثر انحدارًا بدايةً من حوالي $x = 0.7$ فما فوق. (حاول إثبات أنّ هذا صحيح!) يقدّم لنا طول القوس طريقة واحدة لتحديد أوجه الاختلاف بين التمثيلين البيانيين.



الشكل 6.36
$y = x^2$ و $y = x^4$

المثال 4.3 مقارنة أطوال القوس لدوال القوة

أوجد طول القوس لجزء من المنحنى $y = x^4$ مع $0 \le x \le 1$ وقارنه بطول قوس جزء من المنحنى $y = x^2$ على الفترة نفسها.

الحل من (4.1)، يعطى طول القوس لـ $y = x^4$ بالصيغة:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (4x^3)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 16x^6}\, dx \approx 1.6002$$

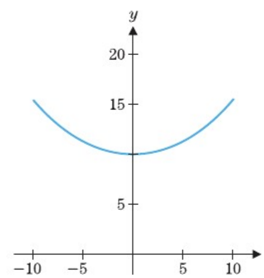
لاحظ أنّ طول القوس هذه تزيد بنسبة 8% عن طول القوس على منحنى $y = x^2$، كما وجدناها في المثال 4.2. ■

في التمارين، سيطلب منك استكشاف هذا التوجه في أطوال جزء من المنحنيات $y = x^6$، $y = x^8$ وما إلى ذلك، على الفترة $[0, 1]$. هل يمكنك الآن أن تخمّن ماذا يحدث لطول القوس لجزء من منحنى $y = x^n$، على الفترة $[0, 1]$، عندما $n \to \infty$ ؟

يمكن أن يكون الاستخدام اليومي لكلمات مثل الطول غامضة ومضللة. على سبيل المثال، يشير طول رمية قرص هوائي عادةً إلى المسافة الأفقية المقطوعة، وليس طول قوس المسار الذي قطعه القرص الهوائي. من ناحية أخرى، على فرض أنك تحتاج إلى تعليق لافتة بين عمودين البعد بينهما 20 ft. في هذه الحالة، ستحتاج إلى أكثر من 20 ft من الحبال حيث إنّ طول الحبل المطلوب محدّد من خلال طول القوس، بدلا من المسافة الأفقية.

المثال 4.4 حساب طول كابل معلق بين عمودين

لربط كابل بين عمودين متساويين في الارتفاع والبعد بينهما 20 m. يمكن توضيح أنّ مثل هذا الكابل المعلق معادلته سلسلة، وعموماً معادلته $y = a\cosh x/a = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$. في هذه الحالة، على فرض أنّ الكابل يتخذ شكل $y = 5(e^{x/10} + e^{-x/10})$، لأجل $-10 \le x \le 10$، كما هو ظاهر في الشكل 6.37. كم يبلغ طول هذا الكابل؟



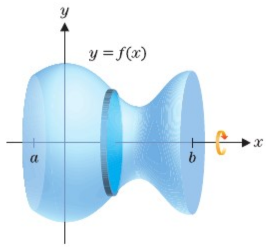
الشكل 6.37
$y = 5(e^{x/10} + e^{-x/10})$

الحل من (4.1)، يعطى طول القوس من المنحنى بالصيغة:

$$\begin{aligned} s &= \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + \left(\frac{e^{x/10}}{2} - \frac{e^{-x/10}}{2}\right)^2}\, dx \\ &= \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{x/5} - 2 + e^{-x/5})}\, dx \\ &= \int_{-10}^{10} \sqrt{\frac{1}{4}(e^{x/5} + 2 + e^{-x/5})}\, dx \\ &= \int_{-10}^{10} \sqrt{\frac{1}{4}(e^{x/10} + e^{-x/10})^2}\, dx \\ &= \int_{-10}^{10} \frac{1}{2}(e^{x/10} + e^{-x/10})\, dx \\ &= 5(e^{x/10} - e^{-x/10})\Big|_{x=-10}^{x=10} \\ &= 10(e - e^{-1}) \\ &\approx 23.504 \text{ m} \end{aligned}$$

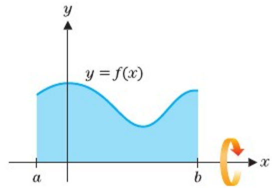
والذي يقابل المسافة الأفقية 20 m بالإضافة إلى حوالي 3.5 m من الطول المرئي. ■

للمسألة العامة عند إيجاد مساحة السطح المنحني لدوران مساحة، لنأخذ الحالة حيث $f(x) \geq 0$ وحيث تكون f متصلة على الفترة $[a, b]$ وقابلة للإشتقاق على (a, b). إذا قمنا بدوران التمثيل البياني لـ $y = f(x)$ حول المحور x على الفترة $[a, b]$ (انظر الشكل 6.41a)، نحصل على سطح الدوران الظاهر في الشكل 6.41b.



الدوران حول المحور x

الشكل 6.41b



الشكل 6.41a

سطح الدوران

وكما فعلنا في العديد من المرات الى الآن، نجزّىء الفترة $[a, b]$ إلى n أجزاء متساوية الحجم: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$، حيث $x_i - x_{i-1} = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. على كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$، يمكننا تقريب المنحنى بالقطعة المستقيمة التي تربط النقطتين $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ و $(x_i, f(x_i))$، كما يوجد في الشكل 6.42. لاحظ أنّ دوران هذه القطعة المستقيمة حول المحور x ينشأ عنه مقطع لمخروط. ستعطينا مساحة سطح مقطع المخروط تقريبًا لمساحة السطح على الفترة $[x_{i-1}, x_i]$. أولًا، لاحظ أنّ الراسم لمقطع المخروط هو

$$L_i = d\{(x_{i-1}, f(x_{i-1})), (x_i, f(x_i))\} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$$

من قانون المسافة المستخدم. نظرًا لفرضياتنا على f، يمكننا تطبيق نظرية القيمة المتوسطة للحصول على:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

لبعض الأعداد $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$. يعطينا ذلك

$$L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2} = \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x}$$

قيمة المساحة S_i لهذا الجزء من السطح على الفترة $[x_{i-1}, x_i]$ هي تقريبًا مساحة سطح قطع المخروط،

$$S_i \approx \pi[f(x_i) + f(x_{i-1})]\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x$$

$$\approx 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x$$

بما أنّ Δx هي صغيرة

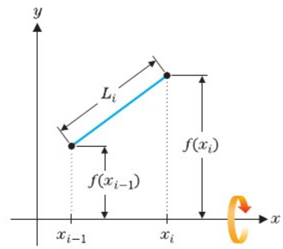
$$f(x_i) + f(x_{i-1}) \approx 2f(c_i)$$

بتكرار هذا البرهان لكل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$، $i = 1, 2, \ldots, n$ يعطينا تقريبًا لمساحة السطح الكلية S

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x$$

كلما كبرت n، يقترب هذا التقريب إلى مساحة السطح الفعلية،

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(c_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x$$



الشكل 6.42

الدوران حول المحور x

إنّ التعرف على هذا باعتباره النهاية لمجموع ريمان يعطينا التكامل

مساحة سطح مجسّم ناتج عن الدوران

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx, \qquad (4.3)$$

حيثما يوجد التكامل.

يجب عليك ملاحظة أنّ العامل $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$ في المكامل الموجود في (4.3) يناظر طول قوس الجزء الصغير من منحنى $y = f(x)$، بينما العامل $2\pi f(x)$ يناظر محيط المجسم الناتج عن الدوران. ينبغي أن يكون لذلك معنى إليك، كما يأتي لأي قطعة صغيرة من المنحنى، إذا قرّبنا مساحة السطح بتدوير القطعة المستقيمة الصغيرة من المنحنى لنصف القطر $f(x)$ حول المحور x، تكون مساحة السطح المتولّد هي ببساطة مساحة سطح أسطوانة

$$S = 2\pi rh = 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

وفيما يبلغ نصف قطر مثل هذه القطعة الأسطوانية الصغيرة $f(x)$، يكون إرتفاع الأسطوانة $h = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$. لا شك في أنّه من الأفضل التفكير في قانون مساحة السطح بهذه الطريقة بدلاً من مجرد حفظ القانون.

ملحوظة 4.2

يوجد عدد قليل بشكل استثنائي من الدوال f حيث يمكن حساب التكامل في (4.3) بالضبط. لا تقلق؛ يوجد لدينا تكامل عددي لمثل تلك الحالات فقط.

المثال 4.5 حساب مساحة السطح

أوجد مساحة سطح متولّد من تدوير منحنى $y = x^4$، لكل $0 \le x \le 1$، حول المحور x-.

الحل باستخدام قانون مساحة السطح (4.3)، لدينا:

$$S = \int_0^1 2\pi x^4 \sqrt{1 + (4x^3)^2}\, dx = \int_0^1 2\pi x^4 \sqrt{1 + 16x^6}\, dx \approx 3.4365$$

حيث استخدمنا طريقة عددية لتقريب قيمة التكامل. ■

التمارين 6.4

تمارين كتابية

1. اشرح لفظياً كيفية اشتقاق تكامل طول القوس من تقريب أطوال قطع مستقيمة قاطعة.

2. اشرح لمَ ناتج جمع أطوال القطع المستقيمة في الشكل 6.34b أصغر من طول قوس المنحنى في الشكل 6.34a.

3. ناقش إذا كان تكامل طول القوس يطلَق عليه قانون أو تعريف بشكل أكثر دقة (أي، هل يمكنك تعريف طول المنحنى بالضبط بدون استخدام التكامل؟).

4. على فرض أنك قمت بالتمثيل البياني لشبه المنحرف المحدّد بـ $y = x + 1$، $y = -x - 1$، $x = 0$ و $x = 1$ ثم قمت بتقطيعه ولفه. اشرح سبب عدم حصولك على الشكل 6.38. (إرشاد: قارن بين المساحات وفكِّر بتمعن في الشكلين 6.39a و 6.39b).

في التمارين 1–4، قرّب طول المنحنى باستخدام n قطع مستقيمة قاطعة حيث $n = 2$ ؛ $n = 4$.

1. $y = x^2, 0 \le x \le 1$
2. $y = x^4, 0 \le x \le 1$
3. $y = \cos x, 0 \le x \le \pi$
4. $y = \ln x, 1 \le x \le 3$

في التمارين 5–14، احسب طول المنحنى بدقة.

5. $y = 2x + 1, 0 \le x \le 2$
6. $y = \sqrt{1 - x^2}, -1 \le x \le 1$
7. $y = 4x^{3/2} + 1, 1 \le x \le 2$
8. $y = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x}), 0 \le x \le 1$
9. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, 1 \le x \le 2$
10. $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}, 1 \le x \le 3$
11. $x = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{4y^2}, -2 \le y \le -1$
12. $x = e^{y/2} + e^{-y/2}, -1 \le y \le 1$
13. $y = \frac{1}{3}x^{3/2} - x^{1/2}, 1 \le x \le 4$
14. $y = 2\ln(4 - x^2), 0 \le x \le 1$

في التمارين 15–22، ضع تكامل طول المنحنى ثم قرّب التكامل باستخدام طريقة عددية.

15. $y = x^3, -1 \le x \le 1$
16. $y = x^3, -2 \le x \le 2$

17. $y = 2x - x^2, 0 \le x \le 2$

18. $y = \tan x, 0 \le x \le \pi/4$

19. $y = \cos x, 0 \le x \le \pi$

20. $y = \ln x, 1 \le x \le 3$

21. $y = \int_0^x u \sin u \, du, 0 \le x \le \pi$

22. $y = \int_0^x e^{-u} \sin u \, du, 0 \le x \le \pi$

.23 عند تعليق حبل بين عمودين البعد بينهما 40 ft. إذا كان الحبل يبدو أنه يتخذ شكل سلسلة معادلته $y = 10(e^{x/20} + e^{-x/20})$، $-20 \le x \le 20$ فاحسب طول الحبل.

.24 عند تعليق حبل بين عمودين البعد بينهما 60 ft. إذا كان الحبل يبدو أنه يتخذ شكل سلسلة معادلته $y = 15(e^{x/30} + e^{-x/30})$، $-30 \le x \le 30$ فاحسب طول الحبل.

.25 في المثال 4.4، احسب قيمة "الارتخاء" الموجودة في الكابل- التي تشكّل الفرق بين قيم y في الوسط $(x = 0)$ وعند العمودين $(x = 10)$. على أساس ذلك، هل كان حساب طول المنحنى مثيرًا للدهشة؟

.26 ارسم واحسب طول شكل **نجمي** معرف بالمعادلة $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

.27 لأجل $y = x^6$، $y = x^8$ و $y = x^{10}$، احسب طول القوس لكل $0 \le x \le 1$. باستخدام النتائج من المثالين 4.2 و 4.3، حدّد نمط طول $y = x^n$، $0 \le x \le 1$، عندما تتزايد قيمة n. خمّن النهاية عندما $n \to \infty$.

.28 (a) للمساعدة في فهم نتيجة التمرين 27، حدّد $\lim_{n\to\infty} x^n$ لكل $0 \le x < 1$. احسب طول هذا المنحنى عند النهاية. اربط هذا المنحنى بنقطة النهاية $(1, 1)$، ما هو الطول الكلي؟

(b) أثبت أنّ $y = x^4$ مسطّحة اكثر من $y = x^2$ لكل $0 < x < \sqrt{1/2}$ وأكثر انحدارًا لكل $x > \sqrt{1/2}$. قارن بين سطح وانحدار كلًا من $y = x^6$ و $y = x^4$.

في التمارين 29—36، ضع التكامل لمساحة السطح الناتج من الدوران وقرّب التكامل باستخدام طريقة عددية.

.29 $y = x^2$، $0 \le x \le 1$، تم دورانها حول المحور x

.30 $y = \sin x$، $0 \le x \le \pi$، تم دورانها حول المحور x

.31 $y = 2x - x^2$، $0 \le x \le 2$، تم دورانها حول المحور x

.32 $y = x^3 - 4x$، $-2 \le x \le 0$، تم دورانها حول المحور x

.33 $y = e^x$، $0 \le x \le 1$، تم دورانها حول المحور x

.34 $y = \ln x$، $1 \le x \le 2$، تم دورانها حول المحور x

.35 $y = \cos x$، $0 \le x \le \pi/2$، تم دورانها حول المحور x

.36 $y = \sqrt{x}$، $1 \le x \le 2$، تم دورانها حول المحور x

في التمرينين 37 و 38، احسب طول القوس L_1 للمنحنى وطول L_2 للمستقيم القاطع الذي يربط نقاط النهاية بالمنحنى. احسب النسبة L_2/L_1؛ كلما كان هذا العدد قريبًا من 1، يقترب المنحنى من ان يكون خطا مستقيماً.

37. (a) $y = \sin x, -\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{6}$ (b) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

38. (a) $y = e^x, 3 \le x \le 5$ (b) $-5 \le x \le -3$

.39 (a) على فرض أنّه تم دوران المربع المكون من جميع (x, y) مع $-1 \le x \le 1$ و $-1 \le y \le 1$ حول المحور y. احسب مساحة السطح.

(b) على فرض أنّه تمّ تدوير الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ حول المحور y. احسب مساحة السطح.

(c) على فرض أنّه تمّ تدوير المثلث رؤوسه $(-1, -1)$ و $(0, 1)$ و $(1, -1)$ حول المحور y احسب مساحة السطح.

(d) ارسم المربع والدائرة والمثلث في الأجزاء (a)-(c) على المحاور نفسها. أثبت أنّ مساحات السطح النسبية للمجسمات التي تم تدويرها (الأسطوانية والكروية والمخروطية، على الترتيب) تكون τ:2:3، حيث τ يكون **المتوسط الحسابي الذهبي** المعرَّف بواسطة $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

.40 إشتق القوانين العامة لمساحة السطح لـ (a) أسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها r وارتفاعها h و (b) كرة نصف قطرها r و (c) مخروط نصف قطره r وارتفاعه h

التطبيقات

.41 يسير شخصان في مسارين مختلفين بدءًا من نقطة الأصل. ويكون لهما الإحداثي x الموجب نفسه عند كل زمن. يتبع أحدهما المحور x الموجب ويتبع الآخر $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$. (a) أوجد النقطة التي بلغت فيها المسافة التي اجتازها أحدهما ضعف المسافة التي اجتازها الآخر. (b) لتكن $f(t)$ هي المسافة التي اجتازها على طول $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ لكل $0 \le x \le t$. احسب $f'(t)$ واستخدمه لتحديد في أي نقطة تساوي نسبة سرعات السائرين 2. (اقترح ذلك تيم بيننجز).

.42 (a) تم تحديد **التكامل الناقص من النوع الثاني** بواسطة $\text{EllipticE}(\phi, m) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - m\sin^2 u} \, du$. بالعودة إلى المثال 4.1، أشارت العديد من CAS أنّ $\sqrt{2}\,\text{EllipticE}(x, \frac{1}{2})$ تُعتبر دالة أصلية لـ $\sqrt{1 + \cos^2 x}$. تحقق من كون هذا هو دالة أصلية.

(b) أشارت العديد من CASs إلى الدالة الأصلية الآتية:

$$\int \sqrt{1 + 16x^6} \, dx = \frac{1}{4}x\sqrt{1 + 16x^6} + \int \frac{3/4}{\sqrt{1 + 16x^6}} \, dx.$$

تحقق من كون هذا هي دالة اصلية.

.43 يتبع ركل كرة وإسقاطها مسار $y = \frac{1}{15}x(60 - x)$ ياردة. ارسم تمثيلًا بيانيًا. كم بلغت المسافة التي قطعتها ركلة الكرة أفقيًا؟ كم بلغ ارتفاعها؟ احسب طول القوس. إذا استمر مكوث الكرة في الهواء لمدة 4 ثوان، كم بلغ متوسط السرعة المتجهة للكرة؟

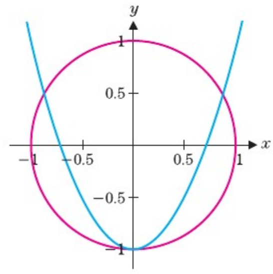
.44 يتبع رمي لاعب دفاع لكرة بيسبول مسار $y = \frac{1}{300}x(100 - x)$ ياردة. ارسم تمثيلًا بيانيًا. كم بلغت المسافة التي قطعتها الكرة أفقيًا؟ كم بلغ ارتفاعها؟ احسب طول القوس. اشرح سبب احتياج لاعب البيسبول إلى طول قوس صغير، بينما يحتاج لاعب كرة القدم في التمرين 43 طول قوس كبير.

تمارين استكشافية

.1 في هذا التمرين، سوف تستكشف مفارقة شهيرة (تسمى عادةً بوق جبريل). على فرض أنّ المنحنى $y = 1/x$، لكل $1 \le x \le R$ (حيث R عدد ثابت موجب كبير)، يتم تدويره حول المحور x. احسب الحجم ومساحة السطح الداخليين للسطح الناتج.

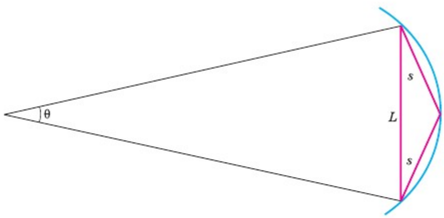
(في كلتا الحالتين، يمكن إيجاد دوال أصلية، على الرغم من إمكانية احتياجك لمساعدة من CAS الخاصة بك للحصول على مساحة السطح). أوجد النهاية للحجم ومساحة السطح عندما $R \to \infty$. والآن لأجل المفارقة. استنادًا إلى إجاباتك، ينبغي أن يكون لديك مجسّم له حجم منتهي، لكن له مساحة سطح غير منتهية وبالتالي، قد يكون المجسّم ثلاثي الأبعاد ممتلئًا بالكامل بكمية منتهية من الطلاء ولكن السطح الخارجي لا يمكن طلاؤه بالكامل على الإطلاق.

2. لتكن C هو جزء القطع المكافئ $y = ax^2 - 1$ داخل الدائرة $x^2 + y^2 = 1$.



أوجد قيمة $a > 0$ التي تحقق قيمة عظمى لطول القوس C.

3. يوضّح الشكل قوس دائرة تحصره زاوية θ، بوتر طوله L ووترين طولهما s. بيّن أنّ $2s = \dfrac{L}{\cos(\theta/4)}$.



ابدأ بربع دائرة واستخدم هذه الصيغة بشكل متكرر لاشتقاق الناتج غير المحدود

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\cdots = \frac{2}{\pi}$$

حيث يمثّل الجانب الأيسر $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}\ldots\cos\frac{\pi}{4}\right)$.

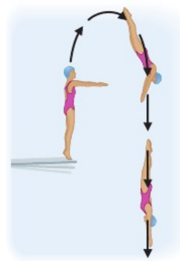
الدرس

6-5 حركة المقذوفات

في الدروس 2.1 و 2.3 و 4.1، ناقشنا مظاهر حركة جسم يتحرك في مسار مستقيم (حركة مستقيمة). ورأينا أنّه إذا علمنا بدالة تصف موقع جسم في أي زمن t إذًا يمكننا تحديد سرعته المتجهة وتسارعه بالإشتقاق. وهناك مسألة أكثر أهمية وهي الرجوع إلى الخلف، وهذا. لإيجاد الموقع والسرعة المتجهة لجسم ما، إذا كان التسارع معطى. في الرياضيات، يعني هذا أنّه، بدءًا من مشتقة دالة، يجب علينا أن نجد الدالة الأصلية. والآن بعد أن أصبح لدينا تكامل في حوزتنا، يمكننا تحقيق ذلك بكل سهولة.

قد تكون على دراية **بقانون نيوتن الثاني للحركة** والذي ينص على

$$F = ma$$



حيث يكون F هو مجموع القوى المؤثرة على جسم ما و m هو كتلة الجسم و a هو تسارع الجسم.

ابدأ بأن تتخيل أنكّ تغوص. القوى الأساسية المؤثرة عليك خلال عملية الغوص هي الجاذبية. القوة الناتجة عن الجاذبية هي الوزن الخاص بك، والذي يرتبط بالكتلة بواسطة $W = mg$. حيث g هي ثابت الجاذبية. (قيم التقريب الشائعة لـ g، الدقيقة بالقرب من مستوى سطح البحر، هي $9.8\ \mathrm{m/s^2}$). للإبقاء على بساطة المسألة في الرياضيات، سوف نتجاهل أي قوى أخرى، مثل مقاومة الهواء.

لتكن $h(t)$ تمثّل ارتفاعك فوق المياه بعد t ثوان من بدء غوصك. إذًا القوة الناتجة عن الجاذبية هي $F = -mg$، حيث تدل إشارة السالب إلى أنّ القوة تؤثر لأسفل على الجسم، في الاتجاه السالب. من عملنا السابق، نعلم أنّ التسارع هو $a(t) = h''(t)$. يعطينا قانون نيوتن الثاني إذًا $-mg = mh''(t)$ أو

$$h''(t) = -g$$

لاحظ أنّ دالة الموقع الخاصة بأي جسم (بغض النظر عن كتلته) تخضع للجاذبية ولن تلائم أي قوى

أخرى المعادلة نفسها. تعُد الاختلافات الوحيدة من موقف لآخر هي الشروط الابتدائية (السرعة المتجهة الابتدائية والموقع الابتدائي) والأسئلة التي يتم طرحها.

المثال 5.1 إيجاد السرعة المتجهة لغواص عند الاصطدام

إذا كان ارتفاع لوح الغطس 4.5 m فوق مستوى سطح المياه وبدأ الغواص بسرعة متجهة ابتدائية 2.4 m/s (في اتجاه لأعلى)، كم بلغت السرعة المتجهة للغواص عند الاصطدام (بافتراض عدم وجود مقاومة هواء)؟

الحل إذا أعطي الارتفاع (بالمتر) عند الزمن t بالدالة $h(t)$، يعطينا قانون نيوتن الثاني
$h''(t) = -9.8$
بما ان الغواص انطلق من ارتفاع 4.5 m فوق سطح المياه بسرعة ابتدائية 2.4 m/s، يوجد لدينا الشروط الابتدائية $h(0) = 4.5$ و $h'(0) = 2.4$. إيجاد $h(t)$ يتطلب الآن أكثر قليلًا من تكامل أولي. لدينا

$$\int h''(t)\,dt = \int -9.8\,dt$$

أو

$$h'(t) = -9.8t + c$$

من السرعة المتجهة الابتدائية ، لدينا

$$2.4 = h'(0) = -9.8(0) + c = c$$

حيث إنّ $c = 2.4$ والسرعة المتجهة في أي زمن t تعطى بالصيغة:

$$h'(t) = -9.8t + 2.4$$

لإيجاد السرعة المتجهة عند التصادم، تحتاج أولاً إلى إيجاد زمن التصادم. لاحظ أنّ الغواص سيصطدم بالمياه عند $h(t) = 0$ (أي، عندما يكون الارتفاع فوق المياه قيمته 0).

يعطينا تكامل دالة السرعة المتجهة دالة الارتفاع:

$$\int h'(t)\,dt = \int (-9.8t + 2.4)\,dt$$

أو

$$h(t) = -4.9t^2 + 2.4t + c$$

من الارتفاع الابتدائي. لدينا

$$4.5 = h(0) = -4.9(0)^2 + 2.4(0) + c = c$$

حيث إنّ $c = 4.5$ والارتفاع فوق مستوى المياه في أي زمن t يعطى بالصيغة:

$$h(t) = -4.9t^2 + 2.4t + 4.5$$

يحدث الإصطدام حينذاك عندما

$$0 = h(t) = -4.9t^2 + 2.4t + 4.5$$

حيث إنّ $t = 1.2$ هو زمن الأصطدام. (تجاهل الحل الدخيل $t = -0.7$). عندما يكون $t = 1.2$، تكون السرعة المتجهة $h'(1.2) = -9.36(1.2) + 2.4 = -9.36\text{ m/s}$ (السرعة المتجهة عند الاصطدام). لوضع تلك القيم في وحدات متعارف عليها بشكل أكبر للسرعة المتجهة. اضرب في 3600/1000 للتحويل لوحدة كيلومترات في الساعة. في هذه الحالة. تبلغ السرعة المتجهة عند الاصطدام حوالي 34 km/h. (أنت غالبًا لا ترغب في الغوص في موقع خاطئ بتلك السرعة!) ■

في المثال 5.1، تدل إشارة سالب للسرعة المتجهة إلى أنّ الغواص كان يغوص لأسفل. في العديد من المواقف، تعُد الحركات إلى الأعلى وإلى الأسفل مهمة.

المثال 5.2 معادلة الحركة الرأسية لكرة

تم قذف كرة للأعلى بشكل مستقيم من الأرض بسرعة متجهة ابتدائية 19.6 m/s. بتجاهل مقاومة الهواء، أوجد معادلة لارتفاع الكرة عند أي زمن t. وأيضًا حدّد القيمة العظمى للإرتفاع ومقدار الزمن الذي قطعته الكرة في الهواء.

الحل مع الجاذبية على انها القوة الوحيدة، الارتفاع $h(t)$ يحقق $h''(t) = -9.8$. الشروط الابتدائية هي $h'(0) = 64$ و $h(0) = 0$. لدينا إذًا

$$\int h''(t)\, dt = \int -9.8\, dt$$

أو

$$h'(t) = -9.8t + c$$

من السرعة المتجهة الابتدائية ، لدينا

$$19.6 = h'(0) = -9.8(0) + c = c$$

ومنه،

$$h'(t) = 19.6 - 9.8t$$

التكامل مرة أخرى يعطينا

$$\int h'(t)\, dt = \int (19.6 - 9.8t)\, dt$$

أو

$$h(t) = 19.6t - 4.9t^2 + c$$

من الارتفاع الابتدائي لدينا

$$0 = h(0) = 19.6(0) - 4.9(0)^2 + c = c$$

لذا،

$$h(t) = 19.6t - 4.9t^2$$

بما أنّ دالة الارتفاع هي تربيعية، تحدث القيمة العظمى عند الزمن حيث $h'(t) = 0$. [يجب أيضًا إعتبار الفيزياء في الموقف: ماذا يحدث فيزيائيًا عندما تكون $h'(t) = 0$] حل $19.6 - 9.8t = 0$ يعطي $t = 2$ (الزمن عندما تتحقق القيمة العظمى للارتفاع) والارتفاع المناظر يساوي $h(2) = 19.6(2) - 4.9(2)^2 = 19.6$ m. مرة أخرى، تلامس الكرة الأرض عندما تكون $h(t) = 0$. نحل

$$0 = h(t) = 19.6t - 4.9t^2 = 4.9t(4 - t)$$

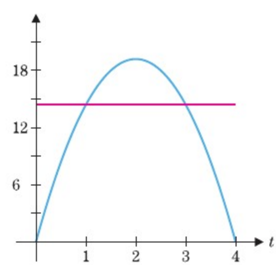
يعطي $t = 0$ (زمن قذف الكرة) و $t = 4$ (زمن ملامسة الكرة للأرض). بالتالي يبلغ زمن انطلاق الكرة في الهواء 4 ثوان. ■

يمكنك ملاحظة خاصيّة مثيرة للاهتمام لحركة المقذوفات من خلال التمثيل البياني لدالة الارتفاع من المثال 5.2 بالإضافة إلى المستقيم $y = 14.4$. (انظر الشكل 6.43). لاحظ أنّ التمثيلات البيانية تتقاطع عند $t = 1$ و $t = 3$. بالإضافة لذلك، تقابل الفترة الزمنية $[1, 3]$ مع نصف الفترة المستغرقة في الهواء بالضبط. لاحظ أنّ ذلك يشير إلى أنّ الكرة استقرت على أعلى ربع من ارتفاعها لنصف المدة التي استغرقتها في الهواء. قد تكون أصبت بالدهشة من كيفية قيام بعض الرياضيين بالقفز بارتفاع عال للغاية بحيث يبدو أنهّم "معلقون في الهواء". وكما تشير هذه الحسابات، يبدو أنّ جميع الأجسام تعلق في الهواء.

اليوم في الرياضيات

فلاديمير أرنولد (1937 –)

عالم رياضيات روسي له مساهمات مهمة في العديد من مجالات علم الرياضيات، على صعيد كل من مجال البحث والتفسير الرائج. يمكن أن يقاس التقدير الذي يكنّه له زملاؤه بالمؤتمر الدولي المعروف باسم "أرنولد فيست" الذي عقد في تورونتو تكريمًا لعيد ميلاده الـ60. يتم استخدام العديد من كتبه على نطاق واسع الآن، بما في ذلك مجموعة من التحديات بعنوان مسائل أرنولد.



الشكل 6.43

ارتفاع الكرة عند الزمن t

المثال 5.3 إيجاد السرعة المتجهة الابتدائية المطلوبة لبلوغ ارتفاع معين

لقد أفادت التقارير أنّ نجم كرة السلة السابق مايكل جوردان كانت له قفزة عمودية بلغت 135 cm. بتجاهل مقاومة الهواء، ما هي السرعة المتجهة الابتدائية المطلوبة للقفز بهذا الارتفاع؟

الحل مرة أخرى، يقودنا قانون نيوتن الثاني إلى المعادلة $h''(t) = -9.8$ للارتفاع $h(t)$. نحن نطلق على السرعة المتجهة الابتدائية v_0. بحيث يكون $h'(0) = v_0$ ونبحث عن قيمة v_0 التي ستعطي
قيمة عظمى لارتفاع 135 cm وكما سبق. قمنا بإجراء تكامل للحصول على

$$h'(t) = -9.8t + c$$

باستخدام السرعة المتجهة الابتدائية ، نحصل على

$$v_0 = h'(0) = -9.8(0) + c = c$$

يعطينا هذا دالة السرعة المتجهة

$$h'(t) = v_0 - 9.8t$$

بالقيام بالتكامل مرة أخرى واستخدام الموقع الابتدائي $h(0) = 0$، نحصل على

$$h(t) = v_0 t - 4.9t^2$$

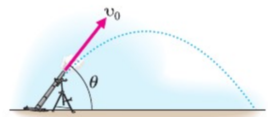
يتم تحقيق القيمة العظمى للارتفاع عندما تكون $h'(t) = 0$. (لماذا؟) إعداد

$$0 = h'(t) = v_0 - 9.8t$$

يعطينا $t = \frac{v_0}{9.8}$. يبلغ الارتفاع عند هذا الزمن (أي، القيمة العظمى للارتفاع) إذًا

$$h\left(\frac{v_0}{9.8}\right) = v_0\left(\frac{v_0}{9.8}\right) - 4.9\left(\frac{v_0}{9.8}\right)^2 = \frac{v_0^2}{9.8} - \frac{v_0^2}{19.6} = \frac{v_0^2}{19.6}$$

إذًا، قفزة بارتفاع $135\text{ cm} = 1.35\text{ m}$ تتطلب $\frac{v_0^2}{19.6} = 1.35$ أو $v_0^2 = 26.46$، بحيث يكون $v_0 = \sqrt{26.46} \approx 5\text{ m/s}$ (يساوي حوالي 18.5 km/h). ■



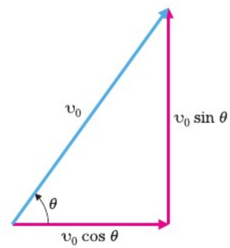
الشكل 6.44a

مسار المقذوفات

حتى الآن، لقد درسنا فقط المقذوفات التي تتحرك رأسيًا. في الواقع، يجب علينا أيضًا التفكير في الحركة في الاتجاه الأفقي. بتجاهل مقاومة الهواء، تُعتبر هذه الحسابات أيضًا واضحة نسبيًا. والفكرة هي تطبيق قانون نيوتن الثاني منفصلاً على المركّبات الأفقية والرأسية للحركة. إذا كان $y(t)$ يمثّل الموقع الرأسي، فإذًا يوجد لدينا $y''(t) = -g$، كما سبق، بتجاهل مقاومة الهواء. لا توجد قوى مؤثرة أفقيًا على المقذوف. لذا، إذا كان $x(t)$ يمثّل الموقع الأفقي، يعطينا قانون نيوتن الثاني $x''(t) = 0$.

تعتبر الشروط الابتدائية أكثر تعقيداً هنا. وبشكل عام، نرغب في التعامل مع المقذوفات التي يتم إطلاقها بسرعة ابتدائية v_0 بزاوية θ من المركّبة الأفقية. يبيّن الشكل 6.44a مقذوفًا تم إطلاقه بزاوية $\theta > 0$. لاحظ أنّ زاوية ابتدائية لـ $\theta < 0$ ستشير إلى سرعة متجهة ابتدائية هبوطاً.

كما هو مبيّن في الشكل 6.44b، يمكن فصل السرعة المتجهة الابتدائية إلى مركّبات أفقية ورأسية. من حساب المثلثات الأولية، تكون المركّبة الأفقية للسرعة المتجهة الابتدائية هي $v_x = v_0 \cos\theta$ والمركّبة الرأسية هي $v_y = v_0 \sin\theta$.



الشكل 6.44b

المركّبات الرأسية والأفقية للسرعة المتجهة

المثال 5.4 حركة مقذوف في بُعدين

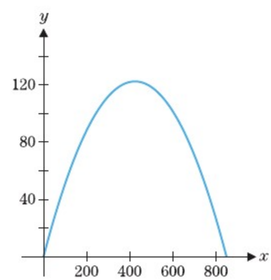
يتم إطلاق جسم أفقيًا بزاوية $\theta = \pi/6$ حيث سرعته الابتدائية $v_0 = 98\text{ m/s}$. حدّد زمن الانطلاق ومدى المقذوف (الأفقي).

الحل بدءًا بالمركّبة الرأسية للحركة (ومرة أخرى بتجاهل مقاومة الهواء)، لدينا $y''(t) = -9.8$ (حيث تعطى السرعة الابتدائية بدلالة متر في الثانية). بالعودة إلى الشكل 6.44b، لاحظ أنّ المركّبة الرأسية للسرعة المتجهة الابتدائية هي $y'(0) = 98\sin\pi/6 = 49$ والارتفاع الابتدائي هو $y(0) = 0$. تعطينا اثنان من عمليات التكامل البسيطة دالة السرعة المتجهة $y'(t) = -9.8t + 49$ ودالة الموقع $y(t) = -4.9t^2 + 49t$. يرتطم الجسم بالأرض عندما يكون $y(t) = 0$ (أي، عندما يكون ارتفاعه فوق الأرض قيمته 0). حل

$$0 = y(t) = -4.9t^2 + 49t = 49t(1 - 0.1t)$$

يعطي $t = 0$ (زمن قذف الجسم) و $t = 10$ (زمن ملامسة الأرض). إذًا يبلغ زمن الانطلاق في الهواء 10 ثوان. يتم تحديد المركّبة الأفقية للحركة من المعادلة $x''(t) = 0$ بسرعة متجهة ابتدائية $x'(0) = 98\cos\pi/6 = 49\sqrt{3}$ وموقع ابتدائي $x(0) = 0$. يعطينا التكامل $x'(t) = 49\sqrt{3}$ و $x(t) = (49\sqrt{3})t$. في الشكل 6.45، نقوم بتخطيط مسار الكرة. [يمكنك القيام بذلك باستخدام وضع التخطيط الوسيطي على حاسبة تمثيل بياني أو CAS، بإدخال معادلات حيث $x(t)$ و $y(t)$ وإعداد مدى قيم t- لتكون $0 \le t \le 10$. وبدلا من ذلك، يمكنك بسهولة حل لـ t، للحصول على $t = \frac{1}{49\sqrt{3}}x$، لنجد أنّ المنحنى ببساطة هو قطع مكافئ.] يكون المدى الأفقي عندئذ هو قيمة $x(t)$ عند $t = 10$ (زمن ملامسة الأرض).

$$x(10) = (49\sqrt{3})(10) = 490\sqrt{3} \approx 849\text{ m}$$ ■



الشكل 6.45

مسار الكرة

ملحوظة 5.1

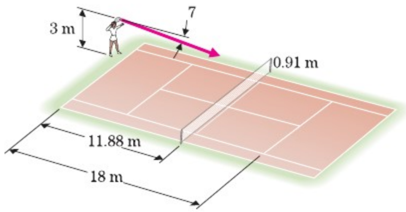
ينبغي عليك مقاومة إغراء تصغير هذا الدرس إلى بضع صيغ محفوظة. إنها حقيقة أنكّ إذا تجاهلت مقاومة الهواء، ستكون قيمة المركّبة الرأسية للموقع دائمًا

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t + y(0)$$

ومع ذلك، سيتحسن فهمك للعملية وفرصك في إيجاد الحل الصحيح بشكل كبير إذا بدأت كل مسألة بقانون نيوتن الثاني وقمت بإجراء التكاملات (التي ليست صعبة).

المثال 5.5 حركة ضربة تنس

فينوس وليامز واحدة من أسرع الضربات في تنس السيدات. على فرض أنها سددت ضربة من ارتفاع 3 أمتار بسرعة ابتدائية 190 km/h وبزاوية $7°$ تحت المركّبة الأفقية. تكون الضربة موجهة "داخل الحد" إذا مرت الكرة على شبكة ارتفاعها 0.91 m وتبعد مسافة 11.7 m وترتطم بالأرض أمام خط التسديد على بعُد 18 m. (نوضّح ذلك الموقف في الشكل 6.46). حدّد ما إذا كانت الضربة داخل أو خارج الحد.



الشكل 6.46
ارتفاع ضربة تنس

الحل كما في المثال 6.4، نبدأ بالحركة الرأسية للكرة. حيث تعطى المسافة بالمتر، معادلة الحركة هي $y''(t) = -9.8$. يجب تحويل السرعة الابتدائية الى متر في الثانية: $190\ \frac{1000}{3600}\text{ m/s} = 53\text{ m/s}$. السرعة المتجهة الابتدائية للمركّبة الرأسية إذًا $y'(0) = 53\ \sin(-7°) \approx -6.45\text{ m/s}$. يعطينا التكامل إذًا

$$y'(t) = -9.8t - 6.45$$

الارتفاع الابتدائي $y(0) = 3\text{ m}$. لذا يعطينا تكاملًا آخر

$$y(t) = -4.9t^2 - 6.45t + 3$$

تحدّد المركّبة الأفقية للحركة من $x''(t) = 0$. بسرعة متجهة ابتدائية $x'(0) = 176\cos(-7°) \approx 52.6\text{ m/s}$ وموقع إبتدائي $x(0) = 0$. تعطينا التكاملات $x'(t) = 52.6\text{ m/s}$ و $x(t) = 52.6\text{ m}$. إيجازًا، لدينا

$$x(t) = 52.6t$$

$$y(t) = -4.9t^2 - 6.45t + 3$$

كي لا تصطدم الكرة بالشبكة، يجب أن تكون قيمة y على الأقل 0.91 عند $x = 11.88$. لدينا $x(t) = 11.88$ عندما تكون $52.6t = 11.88$ أو $t \approx 0.2233$. في هذا الزمن، $y(0.2233) \approx 1.3$. مما يبيّن أنّ الكرة مرتفعة بما يكفي لكي لا ترتطم بالشبكة. المطلوب ثانياً هو الحاجة إلى وجود $x \leq 18$ عند ملامسة الكرة للأرض $(y = 0)$. لدينا $y(t) = 0$ عندما تكون $-4.9t^2 - 6.45t + 3 = 0$. من الصيغة التربيعية، نحصل على $t \approx -1.7$ و $t \approx 0.3662$. بتجاهل الحل السالب، نحسب $x(0.3662) \approx 19.2$. بحيث تلامس الكرة الأرض بعد حد التسديد بحوالي 1.2 m . الضربة ليست داخل الحد.

أحد الأسباب التي تجعلك تبدأ كل مسألة بقانون نيوتن الثاني هو أن يتسنى لك التوقف برهة للتفكير في القوى التي يتم (ولا يتم) التفكير فيها. على سبيل المثال، نكون بذلك قد تجاهلنا حتى مقاومة الهواء، كتبسيط للواقع. تكون بعض العمليات الحسابية باستخدام هذه المعادلات المبسطة دقيقة إلى حد معقول. البعض الآخر، كما هو الحال في المثال 5.6، ليست كذلك.

المثال 5.6 مثال حيث لا يمكن تجاهل مقاومة الهواء

على فرض أنّ قطرات المطر تسقط من غيمة على ارتفاع 900 m فوق سطح الأرض. بتجاهل مقاومة الهواء، ما هي سرعة سقوط قطرة المطر عند ارتطامها بالأرض؟

الحل إذا أعطينا ارتفاع قطرة المطر في الزمن t بالدالة $y(t)$. من قانون نيوتن الثاني للحركة أنّ $y''(t) = -9.8$. بالإضافة إلى ذلك، لدينا السرعة المتجهة الابتدائية $y'(0) = 0$ (بما أنّ قطرة المطر تسقط كما لو أنّ تمّ قذفها) والارتفاع الابتدائي $y(0) = 900$. يعطينا التكامل واستخدام الشروط الابتدائية $y'(t) = -9.8t$ و $y(t) = 900 - 4.9t^2$. تصطدم قطرة الماء بالأرض عندما تكون $y(t) = 0$. لنضع

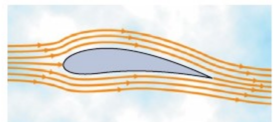
$$0 = y(t) = 900 - 4.9t^2$$

يعطينا $t = \sqrt{900/4.9} \approx 13.693$ ثوان. تكون السرعة المتجهة في هذا الزمن إذًا

$$y'(\sqrt{900/4.9}) = -9.8\sqrt{900/4.9} \approx -131.45\text{ m/s}$$

يناظر حوالي 480 km/h ! لحسن الحظ، تلعب مقاومة الهواء هنا دورًا هامًا في سقوط قطرات المطر، التي لديها سرعة هبوط فعلية تقديرها حوالي 16 km/h.

الدرس الواضح المستفاد من المثال 5.6 هو أنّه ليس من المعقول دائمًا تجاهل مقاومة الهواء. سوف نطوّر بعض الأدوات الضرورية في الرياضيات لتحليل أكثر اكتمالاً لحركة المقذوف مع مقاومة الهواء في وحدة اخري.



الشكل 6.47

المقطع العرضي لجناح

إن مقاومة الهواء (على نحو أدق، سحب الهواء) التي تبطئ من سرعة سقوط قطرات المطر ليست سوى واحدة من الطرائق التي يمكن للهواء أن يؤثر بها على حركة أحد الأجسام. يمكن أن تتسبب **قوة ماغنوس**، الناتجة عن دوران جسم ما أو عدم تماثل شكل جسم ما، في تغيّر اتجاهات ومنحنى الجسم. ولعل المثال الأكثر شيوعًا لقوة ماغنوس يحدث على متن طائرة. يعد جانب واحد من جناحي الطائرة منحنياً والجانب الآخر مسطحًا نسبيًا. (انظر الشكل 6.47). يسبب عدم التماثل يتحرّك الهواء فوق أعلى الجناح بسرعة اكثر من تحركه أسفل الجناح. وهذا ينتج قوة ماغنوس في الاتجاه إلى الأعلى (الصعود)، ارتفاع الطائرة في الهواء.

وهناك مثال أكثر بساطة لقوة ماغنوس يحدث في رمية بيسبول غير عادية تسمى قذيفة الكرة الجنونية. لإلقاء هذه الرمية، يمسك الرامي الكرة بأنامله ويلقي الكرة بأقل قدر ممكن من الدوران. يزعم لاعبو البيسبول بأنّ قذيفة الكرة الجنونية "تدور" بشكل لا يمكن التنبؤ به ومن الصعب للغاية تسديدها أو التقاطها. لا يوجد اتفاق كامل حتى الآن على سبب تحرك قذيفة الكرة الجنونية بشكل كبير، لكننا سنقدم نظرية حالية واحدة لعالمي الفيزياء روبرت واتس وتيري باهيل.

تنظيم كرة البيسبول.
الخياطة الظاهرة

تمت خياطة غطاء كرة البيسبول بغرز مرتفعة قليلًا عن بقية الكرة. تعمل هذه الغرز المنحنية كجناح طائرة، مما يشكل قوة ماغنوس التي تؤثر على الكرة. يعتمد اتجاه قوة ماغنوس على التوجه الدقيق لغرز الكرة. تشير قياسات واتس وباهيل إلى أنّ القوة الجانبية (اليسار/اليمين من وجهة نظر الرامي) هي حوالي $F_m = -0.45\sin(4\theta)$ N، حيث θ هي زاوية (بالراديان) موقع الكرة عند دورانها من موقع انطلاق محدّد.

بما أنّ الجاذبية لا تؤثر على الحركة الجانبية للكرة، القوة الوحيدة المؤثرة على الكرة جانبيًا هي قوة ماغنوس. يعطي قانون نيوتن الثاني المطبق على الحركة الجانبية لقذيفة الكرة الجنونية $mx''(t) = -0.45\sin(4\theta)$. تبلغ كتلة كرة البيسبول حوالي 0.098 kg. لدينا الآن

$$x''(t) = -4.5\sin(4\theta)$$

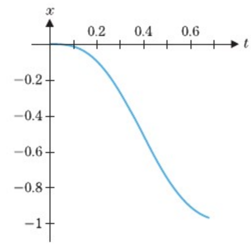
تدور الكرة بمعدل ω راديان في الثانية، إذًا $4\theta = 4\omega t + \theta_0$. حيث تعتمد الزاوية الابتدائية θ_0 على أين سيمسك الرامي بالكرة. لدينا إذًا

$$x''(t) = -4.5\sin(4\omega t + \theta_0) \tag{5.1}$$

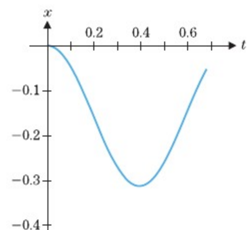
مع شروط ابتدائية $x'(0) = 0$ و $x(0) = 0$. للحصول على سرعة قذيفة كرة جنونية عادية تبلغ 96 km/h، يستغرق الأمر 0.68 ثانية للرمية لتصل إلى اللوحة الرئيسة..

المثال 5.7 **معادلة لحركة قذيفة جنونية**

لمعدل دوران $\omega = 2$ راديان في الثانية مع $\theta_0 = 0$. أوجد معادلة الحركة الجانبية لقذيفة جنونية ومثّلها بيانيًا لكل $0 \le t \le 0.68$. كرّر ذلك لأجل $\theta_0 = \pi/2$.



الشكل 6.48a
الحركة الجانبية لقذيفة كرة جنونية حيث $\theta_0 = 0$



الشكل 6.48b
الحركة الجانبية لقذيفة كرة جنونية حيث $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

الحل لأجل $\theta_0 = 0$. يعطينا قانون نيوتن الثاني $x''(t) = -10 \sin 8t$، من (5.1). يعطينا التكامل واستخدام الشرط الابتدائي $x'(0) = 0$

$$x'(t) = -\frac{10}{8}[-\cos 8t - (-\cos 0)] = 1.25(\cos 8t - 1)$$

وبالتكامل مرة أخرى واستخدام الشرط الثاني $x(0) = 0$، نحصل على

$$x(t) = 1.25\left(\frac{1}{8}\right)(\sin 8t - 0) - 1.25t = 0.15625 \sin 8t - 1.25t$$

يبيّن تمثيل بياني لهذه الدالة الحركة الجانبية للكرة. (انظر الشكل 6.48a). يبيّن التمثيل البياني مسار الرمية كما تظهر من أعلى. لاحظ أنّ بعد الانطلاق بشكل مستقيم، تخرج هذه الرمية عن الخط المستقيم على بعُد حوالي متر من مركز اللوحة الرئيسة!!

لأجل $\theta_0 = \pi/2$. لدينا من (5.1) أنّ

$$x''(t) = -10 \sin\left(8t + \frac{\pi}{2}\right)$$

تكامل هذا واستخدام الشرط الأول الابتدائي يعطينا

$$x'(t) = -\frac{10}{8}\left\{-\cos\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) - \left[-\cos\left(0 + \frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} = 1.25 \cos\left(8t + \frac{\pi}{2}\right)$$

التكامل مرة ثانية يعطينا الناتج

$$x(t) = 1.25\left(\frac{1}{8}\right)\left[\sin\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 0.15625\left[\sin\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) - 1\right]$$

ويوضّح الشكل 6.48b تمثيلًا بيانيًا للحركة الجانبية في هذه الحالة. لاحظ أنّ رمية الكرة هذه تخترق ما يقارب 4 cm إلى يمين الضارب ومن ثم تنحني إلى الوراء فوق القاعدة لتسجيل ضربة! يمكنك أن ترى أنه، من الناحية النظرية، إنّ قذيفة الكرة الجنونية حساسة جدًا للدوران والموقع الابتدائي. وقد يكون من الصعب جدًا ضربها إذا ألقيت بشكل صحيح. ■

تمارين 6.5

تمارين كتابية

1. في المثال 5.6، يتضح أنّ الفرضية الذي يشير إلى أنّه يمكن تجاهل مقاومة الهواء غير صحيح. ناقش صحة هذه الفرضية في المثالين 5.1 و 5.3.

2. في المناقشة التي تسبق المثال 5.3، وضّحنا أنّ مايكل جوردان (وأي إنسان آخر) يقضي نصف الزمن الذي يقضيه في الهواء في الربع الأعلى من الارتفاع. قارن سرعاته المتجهة عند نقاط مختلفة أثناء القفز لشرح سبب قضاء زمن أكبر نسبيًا في الجزء الأعلى منه في الجزء الأدنى.

3. في المثال 5.4، قمنا بإشتقاق معادلات منفصلة للمكوّنات الأفقية والرأسية للموقع. لاكتشاف إحدى نتائج هذا الانفصال، فكّر في الموقف التالي. شخصان يقفان بجانب بعضهما البعض وأيديهما مرفوعة إلى الارتفاع نفسه. أطلق أحدهما رصاصة أفقيًا من بندقية. وفي الزمن نفسه، أسقط الآخر رصاصة. اشرح سبب (مع تجاهل مقاومة الهواء) وصول الرصاصتين إلى الأرض في الزمن نفسه.

4. لأجل قطرة المطر المنهمرة في المثال 5.6، إنّ نموذج أكثر دقة سيكون $y''(t) = -32 + f(t)$، حيث $f(t)$ تمثّل القوة المؤثرة من مقاومة الهواء (مقسومة على كتلة). إذا كانت $v(t)$ هي سرعة هبوط قطرة المطر، اشرح لماذا هذه المعادلة تكافئ $v'(t) = 32 - f(t)$. اشرح في حدود فيزيائية لماذا $v(t)$ هي أكبر، و $f(t)$ هي أكبر. لذا فإن نموذجًا مثل $f(t) = v(t)$ أو $f(t) = [v(t)]^2$ سيكون معقولًا. (في أغلب الحالات، اتّضح أنّ $[v(t)]^2$ يطابق البيانات التجريبية على نحو أفضل).

في التمارين 4–1، حدد الشروط الابتدائية $y(0)$ و $y'(0)$

1. أُسقِط جسم من ارتفاع 80 ft.

2. أُسقِط جسم من ارتفاع 100 ft.

3. أطلق جسم من ارتفاع 60 ft مع سرعة متجهة صعوداً 10 ft/s.

4. أطلق جسم من ارتفاع 20 ft مع سرعة متجهة نزولاً 4 ft/s.

في التمارين 56–5، تجاهل مقاومة الهواء.

5. يسقط غطاس من ارتفاع 30 ft فوق الماء (ارتفاع منصة الغطس الأولمبية نفسه تقريبًا). ما السرعة المتجهة للغطاس لحظة الاصطدام؟

6. يسقط غطاس من ارتفاع 120 ft فوق الماء (ارتفاع منصة الغطس في مسابقة Acapulco Cliff Diving نفسه تقريبًا). ما السرعة المتجهة للغطاس لحظة الاصطدام؟

7. قارن السرعات المتجهة لحظة الاصطدام للأجسام الساقطة من ارتفاع 30 ft (تمرين 5) و 120 ft (تمرين 6) و 3000 ft (مثال 5.6). إذا زاد الارتفاع بعامل مقداره h بأي عامل تزيد السرعة المتجهة لحظة الاصطدام؟

8. ارتفاع نصب واشنطن 555 ft, 5 1/8 in. في تجربة شهيرة، أُسقطت كرة بيسبول من أعلى النصب التذكاري لمعرفة إذا ما كان اللاعب يمكنه الإمساك بها. ما مدى سرعة انطلاق الكرة؟

9. اكتشف ذئب بري أنه قد خطا خارج حافة جرف. بعد أربع ثوانٍ، اصطدم بالأرض في سحابة من الغبار. ما ارتفاع الجرف بالأمتار؟

10. سقطت صخرة كبيرة انزاحت بسبب سقوط الذئب البري في التمرين 9 وذلك 3 ثوان قبل أن تلامس الذئب البري. إلى أي مدى سقطت الصخرة بالأمتار؟ ما سرعتها المتجهة بـ m/s عندما لامست الأرض مع الذئب البري؟

11. يتضمّن المخطط التالي للذئب البري إطلاق نفسه في الهواء باستخدام منجنيق. إذا تم دفع الذئب البري رأسيًا من الأرض بسرعة متجهة ابتدائية 19.6 m/s أوجِد معادلة لارتفاع الذئب في أي زمن t. أوجد أقصى ارتفاع له ومقدار الزمن الذي يمضيه في الهواء وسرعته المتجهة عندما يرتد بقوة مرة أخرى إلى داخل المنجنيق.

12. عند الارتداد، تم دفع الذئب في التمرين 11 إلى ارتفاع يبلغ 78.4 m. ما هي السرعة المتجهة الابتدائية الضرورية للوصول إلى هذا الارتفاع؟

13. أحد اللاعبين له "قفزة" رأسية تبلغ 20 in. ما السرعة المتجهة الابتدائية الضرورية للقفز بهذا الارتفاع؟ كيف يمكن مقارنة هذا بالسرعة المتجهة لمايكل جوردان المذكورة في المثال 5.3؟

14. إذا خضع المؤلف لبرنامج تدريبي وتزايدت سرعته المتجهة الابتدائية بنسبة 10%. بأي نسبة مئوية ستتزايد قفزته الرأسية؟

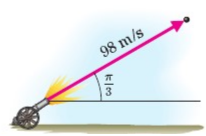
15. (a) أثبت أنّ جسمًا ما يسقط من ارتفاع H ft سيصطدم بالأرض عند الزمن $T = \frac{1}{4}\sqrt{H}$ ثانية مع سرعة متجهة لحظة الاصطدام تبلغ $V = -8\sqrt{H}$ ft/s.

(b) أثبت أنّ جسم ما مدفوع من الأرض بسرعة متجهة ابتدائية تبلغ v_0 ft/s يحقق قيمة عظمى للارتفاع $v_0^2/64$ ft.

16. (a) وفقًا للأسطورة، أسقط جاليليو كرتين من برج بيزا المائل. عندما ضربت كل من كرة الرصاص الثقيلة والكرة الخشبية الخفيفة الأرض في الزمن نفسه، عرف جاليليو أنّ تسارع الجاذبية هو نفسه لكل الأجسام. ستؤثر مقاومة الهواء على مثل هذه التجربة. بوضع مقاومة الهواء في الحسبان، ستسقط كرة خشبية مقاس 6 in مسافة $f(t) = \frac{7225}{8}\ln\left[\cosh\left(\frac{16}{85}t\right)\right]$ قدم في t ثانية، بينما ستسقط كرة رصاص مقاس 6 in مسافة $g(t) = 12{,}800\ln\left[\cosh\left(\frac{1}{20}t\right)\right]$ قدم حيث $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. من ارتفاع يبلغ 179 ft أوجد ارتفاع الكرة الخشبية عندما تصطدم كرة الرصاص بالأرض.

(b) إذا كان منتج مسرحي يرغب في أن يبيّن أنّ كرتي الجزء (a) تصلان في الزمن نفسه، فكم من الزمن يلزم أن يتم إطلاق الكرة الخشبية بشكلٍ مبكر؟

17. يطلق جسم ما بزاوية $\theta = \pi/3$ راديان من الأفق مع سرعة ابتدائية 98 m/s. حدّد زمن التحليق والمدى الأفقي. قارن مع المثال 5.4.

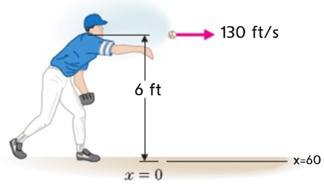


18. أوجِد زمن التحليق والمدى الأفقي لجسم أطلق بزاوية 30° مع سرعة ابتدائية 40 m/s. كرر العملية مع زاوية 60°.

19. كرر المثال 5.5 مع زاوية ابتدائية 6°. باستخدام التجربة والخطأ، أوجِد أصغر وأكبر زاوية ستكون عندها رمية الإرسال.

20. كرر المثال 5.5 مع سرعة ابتدائية 170 ft/s. باستخدام التجربة والخطأ، أوجِد أصغر وأكبر سرعة ابتدائية ستكون عندها رمية الإرسال.

21. يطلق ضارب كرة بيسبول الكرة أفقيًا من ارتفاع 6 ft مع سرعة ابتدائية 130 ft/s. أوجِد ارتفاع الكرة عندما تصل إلى القاعدة الرئيسة على بعد 60 ft. (إرشاد: حدد زمن التحليق من المعادلة -x، ثم استخدم المعادلة -y لتحديد الارتفاع).



22. كرر التمرين 21 مع سرعة ابتدائية 80 ft/s (إرشاد: فسرّ الإجابة السالبة بعناية).

23. يرمي لاعب بيسبول كرة باتجاه القاعدة الأولى على بعد 120 ft يطلق الكرة من ارتفاع 5 ft مع سرعة ابتدائية 120 ft/s بزاوية 5° أعلى الأفق. أوجِد ارتفاع الكرة عندما تصل إلى القاعدة الأولى.

24. باستخدام التجربة والخطأ، أوجِد الزاوية التي ستصل إليها الكرة في التمرين 23 إلى القاعدة الأولى يمكنه الإمساك بها على ارتفاع 5 ft. عند هذه الزاوية، ما مقدار المسافة أعلى رأس لاعب القاعدة الأولى التي يهدف إليها الرامي؟

25. يخطط مخاطر للقفز فوق 25 سيارة. إذا كانت السيارات كلها سيارات مدمجة بعرض 5 ft وزاوية الانحدار هي 30°. حدّد السرعة المتجهة الابتدائية الضرورية لإتمام القفزة بنجاح. كرر العملية مع زاوية انطلاق تبلغ 45°. على الرغم من مطلب تصغير السرعة المتجهة الابتدائية . لماذا قد يفضل المُخاطر زاوية 30° على 45° ؟

26. تريد طائرة على ارتفاع 256 ft إسقاط إمدادات إلى موقع معيّن على الأرض. إذا كان للطائرة سرعة أفقية 100 ft/s، فما المسافة التي ينبغي أن تبعدها الطائرة عن الهدف عند إطلاق الإمدادات من أجل أن تسقط في الموقع المستهدف؟ (إرشاد: استخدم المعادلة -y لتحديد زمن التحليق، ثم استخدم المعادلة -x لتحديد إلى المدى الذي ستنجرف إليه الإمدادات).

27. لنأخذ قذيفة كرة جنونية (انظر المثال 5.7) لها حركة جانبية تحقق مسألة القيمة الابتدائية $x''(t) = -25\sin(4\omega t + \theta_0)$. $x'(0) = x(0) = 0$. مع $\omega = 1$. أوجِد معادلة لـ $x(t)$ ومثّل الحل بيانيًا حيث $0 \le t \le 0.68$ مع (a) $\theta_0 = 0$ و (b) $\theta_0 = \pi/2$.

28. كرر التمرين 27 لأجل $\theta_0 = \pi/4$ و $\omega = 2$ (a) و $\omega = 1$ (b).

التطبيقات

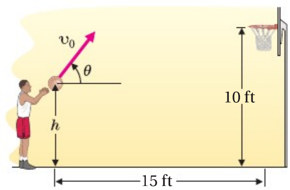
.29 يمكنك قياس مدة رد فعلك باستخدام مسطرة. ثبت إصبعي الإبهام والسبابة على جانبي عصا قياس بطول ياردة دع صديقًا لك يسقط عصا القياس وأمسكها بأسرع ما يمكنك. خذ المسافة d التي سقطتها عصا القياس واحسب طول مدة سقوط المسطرة. بيّن أنه إذا تم قياس d بالـ cm، فإن زمن ردّة فعلك حوالي $t \approx 0.045\sqrt{d}$. لأهداف مقارنة، يكون لأحد كبار الرياضيين زمن ردّة فعل حوالي 0.15 s.

.30 يقيس معامل الارتداد للكرة مدى كون الارتداد "نابض بالحيوية". وفقًا للتعريف $\frac{v_2}{v_1}$، حيث v_1 هي سرعة (هبوط) الكرة عندما تصطدم بالأرض و v_2 هي سرعة انطلاق (صعود) الكرة بعد أن تصطدم بالأرض. إذا تم إسقاط كرة من ارتفاع H متر وارتدت إلى ارتفاع cH لعدد ثابت c مع $0 < c < 1$. احسب معامل الارتداد.

.31 للغطاس الأوليمبي في التمرين 5. كم ستبلغ السرعة للزاوية المتوسطة (التي تم قياسها بالراديان في الثانية) الضرورية لإكمال $2\frac{1}{2}$ دورة؟

.32 في عرض قذيفة المدفع البشرية في سيرك Flying Zucchini Circus، يتم إطلاق أحد اللاعبين من المدفع من ارتفاع 10 ft بزاوية 45° مع سرعة ابتدائية 160 ft/s. إذا كانت شبكة الأمان تمتد على مسافة 5 ft فوق سطح الأرض، فما هي المسافة التي ينبغي أن تبعدها شبكة الأمان عن المدفع؟ إذا كان باستطاعة شبكة الأمان تحمّل سرعة متجهة لحظة الاصطدام 160 ft/s، فهل سيسقط Flying Zucchini بأمان أم سيُسحق؟

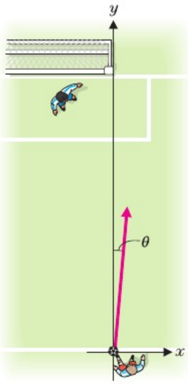
.33 في رمية حرة في لعبة كرة السلة، تم رمي كرة من ارتفاع يبلغ h قدم باتجاه سلة ارتفاعها 10 ft عن سطح الأرض مع مسافة أفقية 15 ft. (انظر الشكل أدناه). إذا كان $h = 6$، $\theta = 52°$ و $v_0 = 25$ ft/s. بيّن أنّ الرمية الحرة جيدة. بما أنّ السلة أكبر من الكرة، يكون للرمية الحرة هامش خطأ يبلغ عدة بوصات إذا وجُد أنّ أي رمية تمر عبر ارتفاع 10 ft مع $4.4 \le x \le 15.354$ تكون جيدة. فبيّن أنه للسرعة الابتدائية المُعطاة التي تبلغ v_0، يكون هامش الخطأ هو $48° \le \theta \le 57°$. ارسم تمثيلات بيانية وسيطية لإظهار عدد من هذه الرميات الحرة.



.34 تم رمي كرة سلة من ارتفاع 8 ft عند مسافة أفقية 15 ft من السلة. السرعة الابتدائية هي 27 ft/s والزاوية الابتدائية هي 30° فوق الأفق. تتواجد السلة على ارتفاع 10 ft وتمتد من $x = 14.25$ ft إلى $x = 15.75$ ft. (a) أثبت أنّ مركز الكرة يمرّ عبر السلة. (b) حدد أصغر مسافة بين مركز الكرة والجزء الأمامي من الحافة عند (14.25, 10) وبين مركز الكرة والجزء الخلفي من الحافة عند (15.75, 10). (c) إذا كان قطر الكرة هو 9 in بيّن أن الكرة تصطدم بالحافة. (راجع مقال هوارد بينس في *Mathematics and Sports*).

.35 يشتهر لاعب كرة القدم روبرتو كارلوس البرازيلي بركلاته المنحنية. على فرض أنّ لديه ركلة حرة من مسافة 30 yd، بتحديد اتجاه x والمحور y كما هو مبيّن في الشكل. على فرض أنّ للركلة سرعة ابتدائية 30 yd/s بزاوية 5° من محور y الموجب. فرضاً أنّ القوة الوحيدة على الكرة هي قوة ماغنوس إلى اليسار بسبب دوران الكرة.

(a) مع $x''(t) = -20$ و $y''(t) = 0$. حدد إذا ما كانت الكرة ستدخل المرمى عند $y = 90$ و $-24 \le x \le 0$.



(b) اصطف حائط من اللاعبين على بعد 10 yd، امتد من $x = -10$ إلى $x = 1$. حدد إذا ما كانت الركلة ستلتف حول الحائط.

.36 لتدريب رواد الفضاء على العمل في بيئة من انعدام الجاذبية، ترسلهم وكالة ناسا في تدريب على طائرة خاصة (تلقّب بمذنب القيء). لتمكين الركاب من تجربة انعدام الجاذبية، يجب أن يتطابق التسارع العمودي للطائرة بشكلٍ تام مع تسارع الجاذبية. إذا كان $y''(t)$ التسارع العمودي للطائرة، تكون عندئذٍ $y''(t) = -g$. أثبت أنّ الطائرة تتبع مسارًا على شكل قطع مكافئ، لسرعة متجهة أفقية ثابتة. تحلّق طائرة NASA في مسارات على شكل قطع مكافئ لارتفاع حوالي 2500 ft (2500 ft لأعلى و 2500 ft لأسفل). والزمن المستغرق لإكمال مثل هذا المسار هو مدة انعدام الجاذبية للركاب. احسب هذا الزمن.

في التمارين 37—42، نستكشف جانبين من جوانب ألعاب الخفة. ويمكن العثور على المزيد من المعلومات في The Mathematics of Juggling بقلم بوركارد بولستر.

.37 يتفق لاعبي الخفة المحترفون بشكل عام على أنّ 10 هو القيمة العظمى لعدد الكرات التي يمكن للإنسان الاحتفاظ بها بنجاح. للحصول على سبب الفكرة، على فرض أنّ الأمر يستغرق $\frac{1}{2}$ ثانية لالتقاط وإلقاء الكرة. (وبعبارة أخرى، يستطيع لاعب الخفة التعامل مع أربع كرات في الثانية، وذلك باستخدام كلتا يديه). للعب بـ 10 كرات، يجب أن تبقى كل كرة في الهواء لمدة 2.5 ثانية. بتجاهل مقاومة الهواء، إلى أي ارتفاع يتعين إلقاء الكرة لتبقى في الهواء لهذه المدة؟ إلى أي ارتفاع يتعين إلقاء الكرات للتمكن من اللعب بـ 11 كرة؟

.38 تُعتبَر الدقة الجانب الآخر من جوانب اللعب بالكرات. يجب أن تجتاز الكرة التي يتم اللعب بها من اليد اليمنى إلى اليد اليسرى المسافة الأفقية الصحيحة ليصبح من الممكن الإمساك بها. على فرض أنّه تم إلقاء كرة بسرعة متجهة أفقية ابتدائية v_{0x} وسرعة رأسية ابتدائية v_{0y}. فرضاً أنّه تم الإمساك بالكرة عند الارتفاع الذي أُلقيت عنده. أثبت أنّ المسافة الأفقية

المجتازة هي $w = \frac{v_{0x}v_{0y}}{16}$ قدم (إرشاد: هذه مسألة أساسية في المقذوفات، مشابه للمثال 5.4).

39. بالعودة إلى التمرين 38، على فرض أنّه قد تم قذف الكرة بزاوية α من الخط الرأسي. أثبت أنّ $\tan\alpha = \dfrac{v_{0x}}{v_{0y}}$. بدمج هذه النتيجة مع التمرينين 15(b) و 38، أثبت أنّ $w = 4h\tan\alpha$، حيث h هي القيمة العظمى لارتفاع الرمية.

40. أوجِد التقريب الخطي لـ $\tan^{-1}x$ عند $x = 0$. استخدم التقريب والتمرين 39 لتثبت أنّ $\alpha \approx \dfrac{w}{4h}$. إذا كانت زاوية بمقدار α تُنتج مسافة قدرها w وزاوية بمقدار $\alpha + \Delta\alpha$ تُنتج مسافة قدرها $w + \Delta w$. فاثبت أنّ $\Delta\alpha \approx \dfrac{\Delta w}{4h}$.

41. على فرض أنّ Δw هو الفرق بين المسافة الأفقية المثالية لرمية والمسافة الأفقية الفعلية للرمية. لأي لاعب خفّة عادي، فإنّ خطأ يبلغ $\Delta w = 1$ ft يكون مقدورًا عليه. ليكن $\Delta\alpha$ هو الخطأ المناظر في زاوية الرمية. إذا كان h هو الارتفاع المطلوب للعب بـ 10 كرات (انظر التمرين 37)، أوجِد القيمة العظمى للخطأ في زاوية الرمي.

42. كرر التمرين 41 باستخدام الارتفاع المطلوب للعب بـ 11 كرة. ما مقدار الدقة التي يحتاجها لاعب الخفة للعب بـ 11 كرة؟

43. قام رائد الفضاء آلان شيبرد بتعديل بعض معدات العمل على سطح القمر وأصبح هو الشخص الوحيد الذي ضرب كرة جولف على سطح القمر. فرضا أنّه قد تم ضرب الكرة بسرعة 60 ft/s بزاوية 25° أعلى الأفق. بافتراض عدم وجود مقاومة هواء، أوجِد المسافة التي كانت ستقطعها الكرة على الأرض. ثم أوجِد المسافة التي ستقطعها على القمر، حيث لا يوجد فعلًا أي مقاومة هواء (استخدم $g = 5.2$ ft/s^2). تبلغ قوّة الجاذبيّة للقمر سدس قوة جاذبية الأرض. قد يكون تخمين بسيط هو أنّ كرة جولف ستنطلق على القمر بارتفاع أكبر بستة أضعاف ومسافة أبعد بستة أضعاف مقارنةً بالأرض. حدد ما إذا كان هذا صحيحاً.

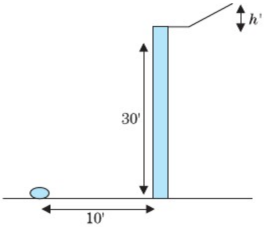
44. على فرض أنّ أحد رجال الإطفاء يحمل خرطوم الماء بميل m والماء يتدفّق من الخرطوم بسرعة v ft/s. أثبت أنّ الماء يتبع المسار $y = -16\left(\dfrac{1+m^2}{v^2}\right)x^2 + mx$. إذا كان رجل الإطفاء يقف على مسافة 20 ft من حائط لسرعة مُعطاة تبلغ v. فما هي القيمة العظمى للارتفاع على الحائط الذي يمكن للماء أن يصل إليه؟

45. على فرض أنّ إسقاط هدف رأسيًا على مسافة أفقية تبعد 20 ft منك. إذا أطلقت كرة طلاء أفقيًا مباشرةً على الهدف. أثبت أنك ستصطدم به (بافتراض عدم وجود مقاومة هواء وبافتراض أنّ كرة الطلاء تبلغ الهدف قبل أن يصطدم أي منهما بالأرض).

46. أُسقِط جسم من ارتفاع 100 ft. يتم إطلاق جسم آخر تحت الجسم الأول مباشرةً رأسيًا من الأرض مع سرعة متجهة ابتدائية 40 ft/s. حدد متى وكيف سيصطدم الجسمان ومدى الارتفاع الذي سيصطدمان عنده.

47. ما مدى سرعة لاعب تزلج عمودي مثل توني هوك وهو ينطلق أسفل منحدر؟ بتجاهل الاحتكاك ومقاومة الهواء. تأتي الإجابة من قانون حفظ الطاقة، والذي ينص على أن مجموع طاقة الحركة $\frac{1}{2}mv^2$ زائد طاقة الوضع mgy يبقى ثابتًا. على فرض أنّ الطاقة في أعلى المسار عند الارتفاع H هي كلها طاقة وضع والطاقة في أسفل المنحدر هي كلها طاقة حركة. (a) أوجِد السرعة في الأسفل كدالة H. (b) احسب السرعة إذا كان $H = 16$ ft. (c) أوجِد السرعة في منتصف المسافة لأسفل ($y = 8$). (d) إذا كان للمنحدر شكل $y = x^2$ حيث $-4 \le x \le 4$، أوجِد المركّبين الأفقي والرأسي للسرعة في منتصف المسافة عند $y = 8$.

التمرين 47



التمرين 48

48. يقوم أحد الصفوف الدراسية في مادة العلوم ببناء منحدر لدحرجة كرة بولينج خارج نافذة ترتفع مسافة 30 ft عن الأرض. وهدفهم هو أن تهبط الكرة على بطيخة تبعد عن المبنى بمسافة 10 ft. بافتراض عدم وجود احتكاك أو مقاومة هواء، حدد ارتفاع المنحدر اللازم لتحطيم البطيخة

تمارين استكشافية

1. في النص والتمرينين 27 و 28، ناقشنا المعادلة التفاضلية $x''(t) = -25\sin(4\omega t + \theta_0)$ للحركة الجانبية لقذيفة كرة جنونية. استخدم التكامل وطبق الشرطين الابتدائيين $x'(0) = 0$ و $x(0) = 0$ لإشتقاق المعادلة العامة

$$x(t) = \frac{25}{16\omega^2}\sin(4\omega t + \theta_0) - \left(\frac{25}{4\omega}\cos\theta_0\right)t - \frac{25}{16\omega^2}\sin\theta_0$$

إذا كنت تستطيع الوصول إلى تمثيلات بيانية ثلاثية الأبعاد، مثّل $x(t, \omega)$ بيانيًا لأجل $\theta_0 = 0$ مع $0 \le t \le 0.68$ و $0.01 \le \omega \le 10$. (ملحوظة: سيواجه بعض المخططين صعوبة مع $\omega = 0$) كرر مع $\theta_0 = \pi/4, \theta_0 = \pi/2$ وخيارين من نفسك حيث θ_0. يريد أحد الضاربين أن تتحرّك الكرة أكبر قدر ممكن ذهابًا وإيابًا ولكن أن ينتهي بها الأمر بالقرب من القاعدة الرئيسية ($x = 0$). بناءً على هذه المعايير. اختر تركيبات من θ_0 و ω تنتج أفضل أربع ضربات. مثّل هذه الضربات بيانيًا باستخدام بعدين مع $x = x(t)$ كما هو مبيّن في الشكلين 6.48a و 6.48b.

2. على الرغم من أننا قد علّقنا على بعض أوجه القصور في نموذج الجاذبية فقط لحركة المقذوفات، إلا أننا لم نقدم بدائل. تميل مثل هذه النماذج إلى أن تكون إلى حد ما أكثر تعقيدًا من الناحية الحسابية. يأخذ النموذج المستكشف في هذا التمرين في الاعتبار مقاومة الهواء بطريقة يتم التعامل معها وحلها من الناحية الحسابية ولكن لا تزال غير واقعية تمامًا. فرضًا أنّ قوة مقاومة الهواء تتناسب مع السرعة وتعمل في الاتجاه المعاكس للسرعة. لأجل حركة أفقية (مع عدم وجود جاذبية)، لدينا $a(t) = F(t)/m = -cv(t)$ لعدد ثابت c. اشرح إلى ماذا تدل اشارة رمز ناقص. بما أنّ $a(t) = v'(t)$، فإنّ النموذج هو $v'(t) = -cv(t)$. أثبت أنّ الدالة $v(t) = v_0 e^{-ct}$ تحقق المعادلة $v'(t) = -cv(t)$ والشرط الابتدائي $v(0) = v_0$. إذا بدأ جسم عند a عند $x(0) = a$. فقم بتكامل $v(t) = v_0 e^{-ct}$ لإيجاد موقعه في أي زمن t. أثبت أنّ مقدار الزمن المطلوب للوصول إلى $x = b$ (حيث $a < b$) يعُطى بالعلاقة $T = -\dfrac{1}{c}\ln\left(1 - c\dfrac{b-a}{v_0}\right)$. لأجل كرة بيسبول ($c = 0.15$) تم رميها بسرعة 125 ft/s من $a = 0$، حدد الفترة الزمنية التي تستغرقها للوصول إلى $b = 60$ واحسب سرعتها المتجهة عند تلك النقطة. بأي نسبة قد انخفضت سرعتها المتجهة؟ في لعبة

البيسبول. يسُتخدم نوعان مختلفان من بنادق الرادار لقياس سرعة الرمية. يقيس أحدهما سرعة الكرة بمجرد أن تترك يد الرامي مباشرةً. بينما يقيس الآخر سرعة الكرة في الطريق إلى القاعدة الرئيسية. إذا سجلت البندقية الأولى 94 mph وسجلت الثانية 98 mph فما هي المسافة التي تأخذ عندها البندقية الثانية قياسها؟

3. إنّ الهدف في لعبة الكمبيوتر القديمة "الغوريلا" هو إدخال سرعة وزاوية لإطلاق موز متفجر في محاولة لضرب الغوريلا في مكان آخر. على فرض أنّ موضعك هو عند نقطة الأصل والغوريلا عند $(40, 20)$. (a) أوجد تركيبتين من السرعة/الزاوية التي ستصطدم بالغوريلا. (b) قدّر أصغر سرعة يمكن استخدامها للاصطدام بالهدف. (c) كرر الجزأين (a) و (b) إذا كان يوجد مبنى في الطريق يشغل $20 \le x \le 30$ و $0 \le y \le 30$.

الدرس

6-6 تطبيقات التكامل على الفيزياء والهندسة

في هذا الدرس، نستكشف العديد من تطبيقات التكامل في الفيزياء. في كل حالة، سنعرِّف مفهومًا أساسيًا ومن ثم نستخدم التكامل المحدود لتعميم المفهوم وحل نطاق أوسع من المسائل.

تخيل أنكّ في أسفل تل تكسوه الثلوج مع مزلجة. للحصول على جولة تزلج جيدة، يجب أن تدفع المزلجة إلى أعلى التل إلى أقصى حد ممكن. سيقول أي فيزيائي أنه كلما ارتفعت أكثر، زادت طاقة الجهد الذي لديك. يحوّل التزلج لأسفل التل طاقة الجهد إلى طاقة حركة. (هذا هو الجزء الممتع!) ولكن دفع المزلجة أعلى التل يتطلّب منك بذل بعض الشغل: يجب عليك بذل قوة على مسافة طويلة.

تتمثّل مهمتنا الأولى بتحديد مقدار الشغل. بالتأكيد، إذا كنت تدفع مثليّ الوزن (أي تبذل مثليّ القوة)، فأنت تبذل مثليّ الشغل. وعلاوةً على ذلك، إذا كنت تدفع المزلجة لمثليّ المسافة، فإنك تبذل مثليّ الشغل. في ضوء تلك الملاحظات،، لأي قوة ثابتة F مبذولة لمسافة d، نعرّف **الشغل** W المبذول على أنّه

$$W = Fd$$

نوسع مفهوم الشغل هذا إلى حالة القوة غير الثابتة $F(x)$ المبذولة على الفترة $[a, b]$ كما يأتي: أولًا، نجزّىء الفترة $[a, b]$ إلى n فترات جزئية متساوية، عرض كلٍ منها $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

ونأخذ الشغل المبذول على كل فترة جزئية. إذا كان Δx صغيرًا، يمكن عندئذٍ تقريب القوة $F(x)$ المبذولة على الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ باستخدام القوة الثابتة $F(c_i)$ لبعض النقاط $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. يبلغ الشغل المبذول لتحريك الجسم على طول الفترة الجزئية عندئذٍ تقريبًا $F(c_i)\,\Delta x$. يكون مقدار الشغل الكلي W هو تقريبًا

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\,\Delta x$$

يجب عليك التعرّف على هذا باعتباره مجموع ريمان، والذي، عندما تصبح n أكبر، يقترب من مقدار الشغل الفعلي.

الشغل

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\,\Delta x = \int_a^b F(x)\,dx. \qquad (6.1)$$

نأخذ (6.1) بوصفه تعريفنا للشغل.

لقد لاحظت على الأرجح أنّه كلما إنكمش (أو تمدد) نابض عن طوله الطبيعي، زادت القوة المطلوبة لإنكماش (أو لتمدد) النابض بشكلٍ أكبر. وفقًا **لقانون هوك**، إنّ القوة المطلوبة للحفاظ على النابض في وضع معيّن تتناسب مع المسافة التي إنكمش (أو تمدد) إليها.

بمعنى أنّ. إذا كانت x هي المسافة التي ينكمش (أو يتمدد) إليها نابض من طوله الطبيعي، تُعطى القوة $F(x)$ المبذولة من النابض بالعلاقة

$$F(x) = kx \tag{6.2}$$

لعدد ثابت k **(ثابت النابض)**

مثال 6.1 حساب الشغل المبذول لتمدد نابض

تعمل قوة قدرها 3 lb على تمدّد نابض $\frac{1}{4}$ ft من طوله الطبيعي. (انظر الشكل 6.49). أوجِد الشغل المبذول في تمدد النابض 6 in أكثر من طوله الطبيعي.

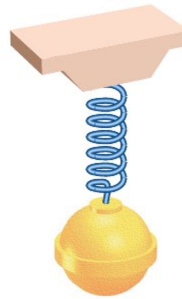
الحل أولاً، نحدد قيمة ثابت النابض. ومن قانون هوك (6.2)، لدينا

$$3 = F(1/4) = k(1/4)$$

بحيث يكون $k = 12$ و $F(x) = 12x$. من (6.1). يكون الشغل المبذول في تمدد النابض 6 in عندئذٍ هو

$$W = \int_0^{1/2} F(x)\,dx = \int_0^{1/2} 12x\,dx = 3/2 \text{ ft-lb}$$

في هذه الحالة، لاحظ أنّ تمدّد النابض ينقل طاقة جهد إلى النابض. (إذا أُطلق النابض في وقتٍ لاحق، فإنه يرتد مرة أخرى إلى طوله الطبيعي محولاً طاقة الجهد إلى طاقة حركة).



الشكل 6.49
نابض متمدد

مثال 6.2 حساب الشغل المبذول من حامل أثقال

يرفع حامل أثقال كتلة حديدية تزن 200 lb مسافة 3 ft فقط. ما هو مقدار الشغل المبذول؟ حدد أيضًا الشغل الذي يبذله حامل الأثقال إذا رفع الوزن 4 ft فوق الأرض ومن ثم أعاده إلى مكانه مرة أخرى.

الحل بما أنّ القوة (الوزن) هو ثابت هنا، يكون لدينا ببساطة

$$W = Fd = 200 \times 1 = 200 \text{ ft-lb}$$

قد يبدو الأمر غريبًا، ولكن إذا كان حامل الأثقال يرفع الوزن نفسه 4 ft عن الأرض ثم يعيده إلى موقعه مرة أخرى، فعندئذٍ بما أنّ الثقل الحديدي ينتهي في الموقع نفسه حيث بدأ، تكون المسافة الصافية المقطوعة هي صفرًا والشغل المبذول هو صفرًا. بطبيعة الحال، سيشعر حامل الأثقال أنه بذل شغلاً، ولكن كما سبق أن عرفناه، يتم حساب الشغل حسب تغيّر الطاقة في الجسم. وبما أنّ الثقل الحديدي لديه الطاقة الحركية وطاقة الجهد نفسها التي بدأت بها، يكون مقدار الشغل الكلي المبذول عليه هو صفرًا.

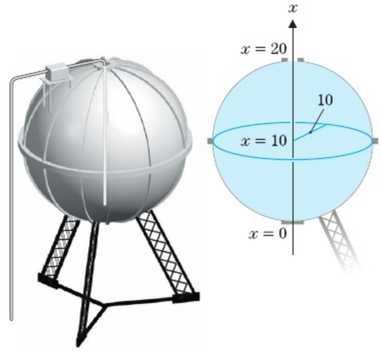
في المثال 6.3، كل من القوة والمسافة كميات غير ثابتة. يمُثّل هذا بعض التحديات الفريدة من نوعها وسنحتاج أولاً إلى تقريب الشغل ومن ثم نتعرف على التكامل المحدود الذي تولده عملية التقريب هذه.

مثال 6.3 حساب الشغل المطلوب لضخ ماء من خزان

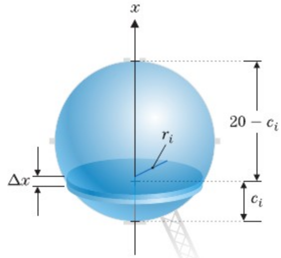
يبلغ نصف قطر خزان كروي الشكل 10 ft مملوء بالماء. أوجِد الشغل المبذول في ضخ كل كمية الماء للخارج من خلال الجزء العلوي من الخزان.

الحل لا تنطبق الصيغة الأساسية $W = Fd$ مباشرةً هنا، لعدة أسباب. والسبب الأكثر وضوحًا من هذه الأسباب هو اختلاف المسافة التي يقطعها الماء في كل جزء من الخزان. حيث إنّ الماء باتجاه الجزء السفلي من الخزان يجب أن يضخ على طول المسافة إلى الأعلى. في حين أنّ الماء بالقرب من أعلى الخزان يجب أن يضخ فقط لمسافة قصيرة. لتكن x تمُثّل المسافة التي تم قياسها من الجزء السفلي من الخزان. كما هو مبيّن في الشكل 6.50a. يناظر الخزان بأكمله الفترة $0 \le x \le 20$. والتي نجزّئها إلى

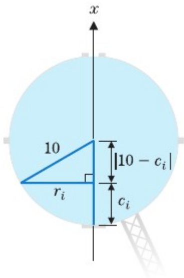
$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 20$$



الشكل 6.50a
خزان دائري



الشكل 6.50b
الشريحة عند الحد i من الماء



الشكل 6.50c
مقطع عرضي للخزان

حيث $\Delta x = \frac{20}{n} = x_i - x_{i-1}$، لكل $i = 1, 2, \ldots, n$. يقوم هذا على تجزئة الخزان إلى n طبقات رفيعة، يناظر كل منها فترة $[x_{i-1}, x_i]$. (انظر الشكل 6.50b). يمكنك التفكير في الماء الموجود في الطبقة المناظرة لـ $[x_{i-1}, x_i]$ بأنها أسطوانية تقريبًا، ارتفاعها Δx. يجب ضخ هذه الطبقة إلى مسافة تبلغ تقريبًا $20 - c_i$، لبعض $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. لاحظ من الشكل 6.50b أنّ نصف قطر الطبقة عند الحد i يعتمد على قيمة x. من الشكل 6.50c (حيث نبيّن مقطعًا عرضيًا للخزان)، نصف القطر r_i الذي يقابل عمقًا يبلغ $x = c_i$ هو قاعدة مثلث قائم الزاوية له وتر يبلغ 10 وارتفاع يبلغ $|10 - c_i|$. من نظرية فيثاغورس، لدينا الآن

$$(10 - c_i)^2 + r_i^2 = 10^2$$

بحل هذا لـ r_i^2، لدينا

$$\begin{aligned} r_i^2 &= 10^2 - (10 - c_i)^2 = 100 - \left(100 - 20c_i + c_i^2\right) \\ &= 20c_i - c_i^2 \end{aligned}$$

إنّ القوة F_i المطلوبة لتحريك الطبقة عند الحد i هي عندئذٍ ببساطة القوة المبذولة على الماء بواسطة الجاذبية (أي، وزنها). بما أنّ كثافة وزن الماء هي $62.4\ \text{lb/ft}^3$، لدينا الآن

$$\begin{aligned} F_i &\approx (\text{وزن الماء في وحدة الحجم})\,(\text{حجم الشريحة الأسطوانية}) \\ &= \left(\pi r_i^2 h\right)\left(62.4\ \text{lb/ft}^3\right) \\ &= 62.4\,\pi\left(20c_i - c_i^2\right)\Delta x \end{aligned}$$

يعُطى الشغل المطلوب لضخ الشريحة عند الحد i للخارج عندئذٍ بصورة تقريبية بالعلاقة

$$\begin{aligned} W_i &\approx (\text{القوة})\,(\text{المسافة}) \\ &= 62.4\pi\left(20c_i - c_i^2\right)\Delta x(20 - c_i) \\ &= 62.4\pi c_i(20 - c_i)^2\Delta x \end{aligned}$$

ويكون الشغل المطلوب لضخ كل كمية الماء للخارج هو عندئذٍ مجموع الشغل المطلوب لكلٍ من الـ n شرائح:

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} 62.4\pi c_i(20 - c_i)^2\Delta x$$

أخيرًا، بأخذ النهاية عندما $n \to \infty$ يعطي المقدار الدقيق للشغل، والذي ينبغي أن تتعرف عليه باعتباره التكامل المحدود:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 62.4\pi c_i (20 - c_i)^2 \Delta x = \int_0^{20} 62.4\pi x(20 - x)^2\, dx$$

$$= 62.4\pi \int_0^{20} (400x - 40x^2 + x^3)\, dx$$

$$= 62.4\pi \left[400\frac{x^2}{2} - 40\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^{20}$$

$$= 62.4\pi \left(\frac{40{,}000}{3}\right) \approx 2.61 \times 10^6 \text{ lb/ft}$$

الدفع هو كمية فيزيائية ترتبط ارتباطًا وثيقا بالشغل. فبدلاً من الربط بين القوة والمسافة لحساب التغيّرات في الطاقة، يربط الدفع بين القوة والزمن لحساب التغيرات في السرعة المتجهة. أولاً، على فرض أنّه تم بذل قوة ثابتة F على جسم من الزمن $t = 0$ إلى الزمن $t = T$. إذا أُعطي موقع الجسم عند الزمن t بالعلاقة $x(t)$. ينص قانون نيوتن الثاني على أنّ $F = ma = mx''(t)$ تكامل هذه المعادلة مرة واحدة بمعلومية t يعطينا

$$\int_0^T F dt = m \int_0^T x''(t)\, dt,$$

أو

$$F(T - 0) = m[x'(T) - x'(0)]$$

تذكر أنّ $x'(t)$ هي السرعة المتجهة $v(t)$، بحيث يكون

$$FT = m[v(T) - v(0)]$$

أو $FT = m\Delta v$، حيث $\Delta v = v(T) - v(0)$ هو التغيّر في السرعة المتجهة. يطُلق على الكمية FT اسم **الدفع**، و $mv(t)$ هو **الزخم** عند الزمن t والمعادلة التي تربط بين الدفع والتغيّر في السرعة المتجهة تسمّى **معادلة الدفع والزخم**.

مثلما توسّعنا بمفهوم الشغل ليتضمّن قوى غير ثابتة، يجب أن نعمم مفهوم الدفع. فكّر في الآتي وحاول أن تخمن ما ينبغي أن يكون عليه التعريف.

نُعرِّف **الدفع** J لقوة $F(t)$ مبذولة على الفترة الزمنية $[a, b]$ بأنه

الدفع

$$\boxed{J = \int_a^b F(t)\, dt}$$

نترك مشتقات هذا كتمرين. تعُمَّم معادلة الدفع والزخم على الشكل ألآتي:

معادلة الدفع والزخم

$$\boxed{J = m[v(b) - v(a)]}$$

مثال 6.4 تقدير الزخم لكرة بيسبول

على فرض أنّ كرة بيسبول تنطلق بسرعة 130 ft/s تصطدم بمضرب. تبيّن البيانات التالية (مقتبسة من *The Physics of Baseball* بقلم روبرت أدير) القوة المبذولة من المضرب على الكرة عند فترات تبلغ 0.0001 ثانية.

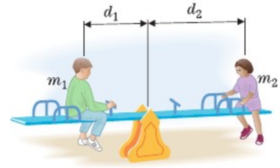
t (s)	0	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0007
$F(t)$ (lb)	0	1250	4250	7500	9000	5500	1250	0

قدّر دفع المضرب على الكرة و(باستخدام $m = 0.01$ kg) وسرعة الكرة بعد التصادم.

الحل في هذه الحالة، يعُطى الدفع J بالعلاقة $\int_0^{0.0007} F(t)\,dt$. بما أننا لم نُعط سوى عدد ثابت من القياسات $F(t)$، فإنّ أفضل ما يمكننا القيام به هو تقريب التكامل عدديًا (على سبيل المثال، باستخدام قاعدة سمبسون). تذكر أنّ قاعدة سمبسون تتطلب عددًا زوجيًا n من الفترات الجزئية، مما يعني أنك تحتاج عددًا فرديًا $n+1$ من النقاط في التقسيم. باستخدام $n = 8$ وبإضافة قيمة دالة صفرية عند $t = 0.0008$ (لماذا يعُقل القيام بهذا؟)، تعطينا قاعدة سمبسون

$$\begin{aligned} J &\approx [0 + 4(1250) + 2(4250) + 4(7500) + 2(9000) + 4(5500) \\ &\quad + 2(1250) + 4(0) + 0]\frac{0.0001}{3} \\ &\approx 2.867 \end{aligned}$$

في هذه الحالة، إنّ معادلة الدفع والزخم $J = m\,\Delta v$ تصبح $2.867 = 0.01\,\Delta v$ أو $\Delta v = 286.7$ ft/s. بما أنّ الكرة قد بدأت بسرعة 130 ft/s في اتجاه واحد وانتهى بها الأمر بالتحرّك في الاتجاه المعاكس، تكون السرعة بعد التصادم هي 156.7 ft/s. ■



الشكل 6.51a
الموازنة بين كتلتين

لنأخذ طفلين على أرجوحة في ملعب (أو أرجوحة توازن). على فرض أنّ الطفل الموجود على اليسار في الشكل 6.51a أثقل (أي، له كتلة أكبر) من الطفل الموجود على اليمين. إذا كان الطفلان يجلسان على مسافة متساوية من النقطة المحورية، فأنت تعرف ما سيحدث: سيُسحب الجانب الأيسر إلى أسفل. غير أنهّ يمكن للطفلين موازنة بعضهما البعض إذا تحرك الطفل الأثقل إلى موقع أقرب من النقطة المحورية. بمعنى أنّه، يتم تحديد الموازنة بالوزن (القوة) والمسافة من النقطة المحورية على حدٍ سواء. إذا كان للطفلين كتلتان m_1 و m_2 ويجلسان على مسافتي d_1 و d_2، على التوالي، من النقطة المحورية، فإنهما يوازنان بعضهما البعض إذا وفقط إذا

$$m_1 d_1 = m_2 d_2 \tag{6.3}$$

بقلب المسألة قليلًا. على فرض أنّ هناك جسمين، كتلتاهما m_1 و m_2، ويقعان عند x_1 و x_2، على الترتيب، مع $x_1 < x_2$. لنعتبر أنّ الجسمين **كتل نقطية**. بمعنى أنّه، يتم التعامل مع كلٍ منهما كنقطة افرادية، مع تركيز كل الكتلة في تلك النقطة. (انظر الشكل 6.51b).

الشكل 6.51b

اثنان من الكتل النقطية

نريد إيجاد **مرْكز الكتلة** $\bar{x}$، والّذي هو الموقع الذي يمكننا أن نضع عنده النقطة المحورية للأرجوحة ونوازن بين الجسمين. من معادلة التوازن (6.3)، سنحتاج $m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x})$. إنّ حلّ هذه المعادلة من أجل $\bar{x}$ يعطينا

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

لاحظ أنّ المقام في هذه المعادلة هو كتلة "النظام" الإجمالية (أي، الكتلة الكلية للجسمين). يطُلق على بسط هذا التعبير اسم **العزم الأول** للنظام.

وعموماً، لنظام من n كتلة $m_1, m_2, \ldots, m_n$، تقع عند $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$، على الترتيب، يعُطى مركز الكتلة $\bar{x}$ من العزم الأول مقسومًا على الكتلة الإجمالية، أي أنّ،

مرْكز الكتلة

$$\boxed{\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}}$$

الآن. على فرض أننا نرغب في إيجاد الكتلة ومركز الكتلة لجسم له كثافة متغيّرة $\rho(x)$ (تقاس بوحدات الكتلة لكل وحدة طول) ويمتد من $x = a$ إلى $x = b$. لاحظ أنه إذا كانت الكثافة ثابتة ρ ، فإنّ كتلة الجسم تُعطى ببساطة بالعلاقة $m = \rho L$، حيث $L = b - a$ هو طول الجسم. من ناحية أخرى، إذا كانت الكثافة تتغير في كل أنحاء الجسم، يمكننا تقريب الكتلة بتجزيئ الفترة $[a, b]$ إلى n أجزاء متساوية العرض $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. على كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$، تكون القيمة التقريبية للكتلة $\rho(c_i)\Delta x$، حيث c_i هي نقطة في الفترة الجزئية. تكون الكتلة الإجمالية تقريبًا

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i)\, \Delta x$$

عليك معرفة أنّ هذا هو مجموع ريمان، والذي يقترب من الكتلة الإجمالية عندما $n \to \infty$.

الكتلة

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i)\, \Delta x = \int_a^b \rho(x)\, dx \qquad (6.4)$$

مثال 6.5 حساب كتلة مضرب البيسبول

يمكن تمثيل مضرب بيسبول طوله 30 بوصة تمثيلاً تقريبيًا عن طريق جسم يمتد من $x = 0$ إلى $x = 30$ بوصة، بكثافة مقدارها $\rho(x) = \left(\frac{1}{46} + \frac{x}{690}\right)^2$ صلج لكل بوصة.

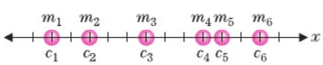
وفي نموذج دالة الكثافة هذا، تُؤخذ في الاعتبار حقيقة أن مضرب البيسبول يشبه مخروطًا طولي الشكل. أوجد كتلة الجسم.

الحل من مثال (6.4)، تُحَدَّد الكتلة من خلال

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{30} \left(\frac{1}{46} + \frac{x}{690}\right)^2 dx \\ &= \frac{690}{3}\left(\frac{1}{46} + \frac{x}{690}\right)^3 \Bigg|_0^{30} = \frac{690}{3}\left[\left(\frac{1}{46} + \frac{30}{690}\right)^3 - \left(\frac{1}{46}\right)^3\right] \\ &\approx 6.144 \times 10^{-2} \text{ صلج.} \end{aligned}$$

لحساب الوزن (بالأوقية)، اضرب الكتلة في $32 \cdot 16$. يزن المضرب حوالي 31.5 أوقية. ■

لحساب العزم الأول لجسم ما له كثافة غير ثابتة $\rho(x)$ يمتد من $x = a$ إلى $x = b$، نجزّىء الفترة إلى n أجزاء متساوية. من برهاننا السابق، لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ تكون كتلة الشريحة عند الحد i من الجسم هي تقريبًا $\rho(c_i)\,\Delta x$، لاختيار من $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. نمثّل الشريحة عند الحد i من الجسم الذي له جسيم كتلته $m_i = \rho(c_i)\,\Delta x$ ويقع عند $x = c_i$. يمكننا الآن التفكير في الجسم الأصلي بأنه قد تم تقريبه بواسطة n كتل نقطية مميزة، كما هو مبيّن في الشكل 6.52.



الشكل 6.52
ست كتل نقطية

لاحظ أنّ العزم الأول M_n لهذا النظام التقريبي هو

$$\begin{aligned} M_n &= [\rho(c_1)\,\Delta x]c_1 + [\rho(c_2)\,\Delta x]c_2 + \cdots + [\rho(c_n)\,\Delta x]c_n \\ &= [c_1\rho(c_1) + c_2\rho(c_2) + \cdots + c_n\rho(c_n)]\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} c_i\rho(c_i)\Delta x \end{aligned}$$

بأخذ النهاية عندما $n \to \infty$، يقترب ناتج الجمع إلى العزم الأول

العزم الأول

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i\rho(c_i)\, \Delta x = \int_a^b x\rho(x)\, dx \qquad (6.5)$$

يعُطى مركز كتلة الجسم عندئذٍ بالعلاقة

مرْكز الكتلة

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{\displaystyle\int_a^b x\rho(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b \rho(x)\,dx} \tag{6.6}$$

مثال 6.6 إيجاد مركز الكتلة (البقعة الحلوة) في مضرب البيسبول

أوجد مركز الكتلة في مضرب البيسبول المذكور في المثال 6.5.

الحل من مثال (6.5)، يُحدَّد العزم الأول من خلال

$$M = \int_0^{30} x\left(\frac{1}{46} + \frac{x}{690}\right)^2 dx = \left[\frac{x^2}{4232} + \frac{x^3}{47{,}610} + \frac{x^4}{1{,}904{,}400}\right]_0^{30} \approx 1.205$$

تذكَّر أننا قد توصلنا بالفعل إلى أن $m \approx 6.144 \times 10^{-2}$ صلج. ومن ثَمّ من مثال (6.6)، يكون مركز كتلة المضرب

$$\bar{x} = \frac{M}{m} \approx \frac{1.205}{6.144 \times 10^{-2}} \approx 19.6 \text{ in}$$

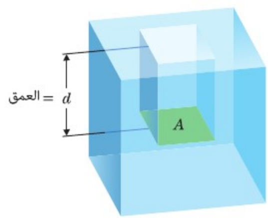
لاحظ أنه في مضرب البيسبول، يُعدّ مركز الكتلة مرشحًا واحدًا لما يُطلق عليه اسم "البقعة الحلوة" للمضرب، وهو أفضل مكان لضرب الكرة. ■

سد هوفر

لتطبيقنا النهائي للتكامل في هذا الدرس، نفكر في القوة الهيدروستاتيكية. تخيل سد يحجم بحيرة مليئة بالمياه. ما هي القوة التي يجب أن يصمد أمامها السد؟

كالعادة، نقوم بحل المسائل الأبسط أولاً. إذا كانت لديك لوحة مستطيلة مسطحة موجّهة أفقيًا تحت المياه، لاحظ أنّ القوة التي تمارسها المياه على اللوحة (**القوة الهيدروستاتيكية**) هي ببساطة وزن المياه فوق اللوحة. هذا ناتج حجم المياه فوق اللوحة وكثافة وزن المياه ($62.4\ \text{lb/ft}^3$). إذا كانت مساحة اللوحة تبلغ $A\ \text{ft}^2$ وتقع $d\ \text{ft}$ أسفل السطح (انظر الشكل 6.53)، إذًا تبلغ القوة المؤثرة على اللوحة

$$F = 62.4\,Ad$$

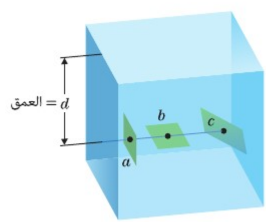


الشكل 6.53
لوحة مساحتها A مغمورة حتى عمق d

وفقًا لمبدأ باسكال، يكون الضغط في عمق معطى d في سائل هو نفسه في جميع الاتجاهات. يشير هذا الأمر إلى أنه، إذا غمرنا لوحة مسطحة في سائل، يكون الضغط إذًا على جانب واحد من اللوحة عند نقطة معطاة هو $\rho \cdot d$، حيث ρ هو كثافة وزن السائل وd هو العمق. وخصوصاً، يشير ذلك إلى ما إذا كانت اللوحة مغمورة رأسيًا أو أفقيًا أو غير ذلك. (انظر الشكل 6.54).

لنأخذ الآن جداراً رأسيًا يحجم بحيرة. من الملائم توجيه المحور x رأسيًا مع $x = 0$ تقع عند سطح المياه وأسفل الجدار عند $x = a > 0$. (انظر الشكل 6.55). بهذه الطريقة، x يقيس عمق جزء من السد. على فرض أنّ $w(x)$ هو عرض الجدار عند عمق x (حيث يتم حساب جميع المسافات بالأقدام).

نجزّئ الفترة $[0, a]$ إلى n فترات جزئية متساوية العرض $\Delta x = \frac{a}{n}$. مما يؤثر على تجزئة السد إلى n شرائح. كل شريحة عرضها Δx. لكل $i = 1, 2, \ldots, n$، لاحظ أنّ مساحة الشريحة عند الحد i هي حوالي $w(c_i)\,\Delta x$، حيث c_i هي بعض النقاط في الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$. بالإضافة إلى ذلك، يكون العمق في كل نقطة على هذه الشريحة حوالي c_i. يمكننا عندئذ تقريب القوة F_i المؤثرة على هذه الشريحة من السد من وزن المياه الواقع فوق لوحة بحجم هذا الجزء لكن موجهة أفقيًا:

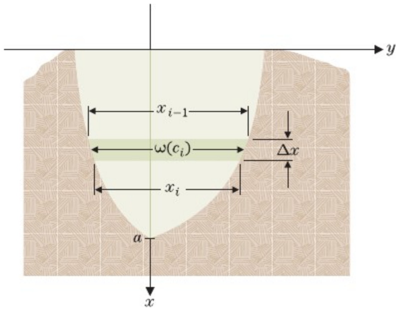


الشكل 6.54
الضغط عند عمق معطى هو نفسه بغض النظر عن الإتجاه

$$F_i \approx \underbrace{62.4}_{\text{كثافة الوزن}}\ \underbrace{w(c_i)}_{\text{الطول}}\ \underbrace{\Delta x}_{\text{العرض}}\ \underbrace{c_i}_{\text{العمق}} = 62.4\,c_i w(c_i)\,\Delta x$$

بإضافة القوى المؤثرة على كل شريحة معًا، تكون القوة الإجمالية F على السد حوالي

$$F \approx \sum_{i=1}^{n} 62.4\,c_i w(c_i)\,\Delta x$$



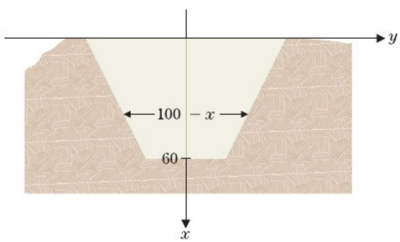
الشكل 6.55
القوة المؤثرة على سد

بالتعرف على هذا كونه مجموع ريمان وبأخذ النهاية عندما $n \to \infty$. نحصل على القوة الهيدروستاتيكية الإجمالية على السد.

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 62.4 c_i w(c_i)\ \Delta x = \int_0^a 62.4\, x w(x)\, dx \tag{6.7}$$

مثال 6.7 إيجاد القوة الهيدروستاتيكية على سد

يتخذ السد شكلًا لشبه منحرف بارتفاع 60 ft يبلغ العرض في الجزء العلوي 100 ft والعرض في الجزء السفلي 40 ft. (انظر الشكل 6.56). أوجد القيمة العظمى للقوة الهيدروستاتيكية التي سيحتاج إليها السد كي يصمد. أوجد القوة الهيدروستاتيكية إذا أدّى الجفاف إلى خفض منسوب مستوى المياه إلى 10 ft.



الشكل 6.56
سد على شكل شبه منحرف

الحل لاحظ أنّ دالة العرض هي دالة خطية للعمق حيث $w(60) = 40$ و $w(0) = 100$. يكون الميل عندئذٍ $\frac{60}{-60} = -1$ وهكذا، $w(x) = 100 - x$. من (6.7)، تكون القوة الهيدروستاتيكية عندئذ

$$F = \int_0^{18} \underbrace{62.4}_{\text{كثافة الوزن}}\ \underbrace{x}_{\text{العمق}}\ \underbrace{(100-x)}_{\text{العرض}}\ dx$$

$$= 3120x^2 - 62.4\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{60} = 6{,}739{,}200 \text{ lb}$$

إذا انخفض مستوى المياه 10 ft، سيبلغ عرض السد عند مستوى المياه 90 ft. وبإنخفاض نقطة الأصل بقيمة 10 ft، تحقق دالة العرض الجديدة $w(0) = 90$ و $w(50) = 40$. يبقى

الميل يساوي 1−. ولذلك، يعطى العرض بالصيغة $w(x) = 90 - x$. من (6.7)، تكون القوة الهيدروستاتيكية الآن

$$F = \int_0^{50} \underbrace{62.4}_{\text{كثافة الوزن}} \underbrace{x}_{\text{العمق}} \underbrace{(90 - x)}_{\text{العرض}} \, dx$$

$$= 2808x^2 - 62.4\frac{x^3}{3}\Big|_0^{50} = 4{,}420{,}000 \text{ lb}$$

لاحظ أنّ هذا يمثّل تصغيراً للقوّة بنسبة تزيد عن 34%. ■

تمارين 6.6

تمارين كتابية

1. لكل شغل ودفع وعزم أول: حدّد الكميات الموجودة في التعريف (مثال، القوة والمسافة) والحسابات التي تُستخدم لها (مثال، تغيّر في السرعة المتجهة).

2. لا يكون مركز الكتلة دائمًا هو المكان الذي يكون فيه نصف الكتلة على جانبٍ والنصف الثاني من الكتلة على الجانب الآخر. أعط مثالاً حيث يوجد أكثر من نصف الكتلة على أحد الجانبين (راجع المثالين 6.5 و 6.6) واشرح سبب توازن الجسم عند مركز الكتلة.

3. يتمتع الأشخاص الذين يلعبون دور الالتقاط بطريقة ما تبدو غريزية حيث يسحبون أيديهم للوراء عند قيامهم بالتقاط الكرة. لالتقاط كرة، يجب عليك تطبيق دفع يساوي الكتلة مضروبة في السرعة المتجهة للكرة. بسحب يدك للوراء، يتزايد مقدار الزمن الذي تقوم فيه بإبطاء الكرة. استخدم معادلة زخم الدفع لتفسير سبب تصغير هذا الأمر للقوة المتوسطة في يديك.

4. تنطلق كرة تنس نحوك بسرعة 100 mph. بعد ضربك للكرة، تتحرّك مبتعدة عنك بسرعة 100 mph. يقيس الشغل التغيّرات في الطاقة. اشرح سبب وجود شغل مبذول من مضرب التنس على الكرة على الرغم من أنّ الكرة لها السرعة نفسها قبل وبعد الضربة.

---

1. أحدثت قوة من 5 lb تمدد على نابض 4 in. أوجد الشغل المبذول في تمدد هذا النابض 6 in أبعد من طوله الطبيعي.

2. أحدثت قوة من 10 lb نيوتن تمدد نابض 2 in أوجد الشغل المبذول في تمدد هذا النابض 3 in أبعد من طوله الطبيعي.

3. رافع أثقال يرفع 250 lb لمسافة 20 in. أوجد الشغل المبذول (كما تم قياسه بالقدم- رطل).

4. مصارع يرفع منافسه الذي يزن 300 lb من فوق رأسه، على ارتفاع 6 ft. أوجد الشغل المبذول (كما تم قياسه بالقدم- رطل).

5. يزن صاروخ ممتلئ بالوقود 10000 lb عند الإطلاق. بعد الإطلاق، يحظى الصاروخ بارتفاع ويفقد وزنًا حيث يتم حرق الوقود. على فرض أنّ الصاروخ فقد 1 lb من الوقود لكل 15 ft من الارتفاع المكتسب. اشرح سبب أنّ الشغل المبذول لإرتفاع الصاروخ إلى 30,000 ft هو $\int_0^{30{,}000} (10000 - x/15)\,dx$ واحسب التكامل.

6. بالعودة إلى التمرين 5. على فرض أنّ صاروخاً يزن 8000 lb عند الإطلاق ويفقد 1 lb من الوقود لكل 10 ft من الارتفاع المكتسب. أوجد الشغل المطلوب ليرتفع الصاروخ إلى 10,000 ft.

7. تزن سلسلة طولها 40 ft 1000 lb ويتم سحبها لأعلى على سطح قارب. السلسلة موجهة رأسيًا والجزء العلوي من السلسلة يبدأ في المياه 30 ft أمتار أسفل السطح. احسب الشغل المبذول.

8. تم رفع دلو مسافة 80 ft بمعدل 4 ft/s يحتوي الدلو مبدئيًا على 100 lb من الرمال لكن تتسرّب منه الرمال بمعدّل 2 lb/s. احسب الشغل المبذول.

9. (a) على فرض أنّ محرك سيارة بذل قوة $800x(1-x)$ رطل عندما تكون السيارة في الموقع x ميل، $0 \le x \le 1$. احسب الشغل المبذول. (b) تقيس القوة بالأحصنة معدل الشغل المبذول كدالّة بالزمن. اشرح سبب كون ذلك لا يساوي $800x(1-x)$. إذا استغرقت السيارة 80 ثانية لتقطع مسافة ميل، احسب متوسط القوة بالأحصنة ($1 \text{ hp} = 550 \text{ ft-lb/s}$).

10. (a) يوجد برج مائي كروي الشكل طول نصف قطره 50 ft. يمتد من 200 ft إلى 300 ft فوق سطح الأرض. احسب الشغل المبذول في ملء الخزان من الأرض. (b) احسب الشغل المبذول في ملء الخزان من نصف المسافة.

11. أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرها 1 m وارتفاعها 3 m ممتلئة بالماء. احسب الشغل المبذول عند ضخ كل الماء إلى الخارج انطلاقاً من الجزء العلوي للأسطوانة إذا (a) كانت الأسطوانة في وضع قائم (المقاطع العرضية الدائرية موازية للأرض) و(b) كانت الأسطوانة على جانبها (المقاطع العرضية الدائرية متعامدة على الأرض). تبلغ كثافة وزن الماء 9800 N/m^3.

12. خزّان ماء على شكل مخروط دائري قائم ارتفاعه 10 ft وطول نصف قطر قاعدته 5 ft حيث أنّ رأسه على الأرض. (فكر في مخروط مثلجات نقطته الرأسية مواجهة لأسفل). إذا كان الخزان ممتلئًا، فأوجد الشغل المبذول عند ضخ كل الماء إلى الخارج إنطلاقاً من الجزء العلوي للخزان.

13. يتشارك عاملان في مهمة حفر فجوة مستطيلة الشكل إلى عمق 10 ft. يقوم عمال آخرين بإزالة التراب الناتج من حفر الفجوة. بافتراض وجود كثافة ثابتة للتراب، ما العمق الذي ينبغي أن يصل إليه العامل الأول في الحفر للقيام بنصف الشغل؟ اشرح السبب أنّ 5 ft هي إجابة غير صحيحة.

14. سيتم حفر حوض على عمق 6 ft المقاطع العرضية لها شكل _/ عرضها 2 ft في الجزء السفلي و 5 ft في الجزء العلوي منها. أوجد العمق الذي تم فيه بذل نصف الشغل.

.15 في المثال 6.4، على فرض أنّ كرة البيسبول كانت تنطلق في سرعة 100 ft/s. ستتغيّر القوة المبذولة من المضرب على الكرة إلى القيم الموجودة في الجدول. قدّر دفع وسرعة الكرة بعد الاصطدام.

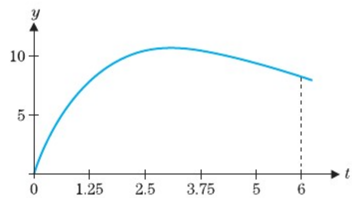
t (s)	0	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004
F (lb)	0	1000	2100	4000	5000

t (s)	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008
F (lb)	5200	2500	1000	0

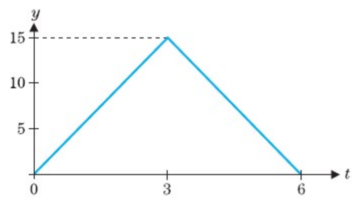
.16 تم إجراء فحص تصادم لسيارة ما. قوة الجدار على المصد الأمامي مبينة في الجدول. قدّر دفع وسرعة السيارة (استخدم $m = 200$ صلاج). (إرشاد: 1 صلاج = 32.174lb تقريبا)

t (s)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
F (lb)	0	8000	16,000	24,000	15,000	9000	0

.17 يبيّن أدناه **منحنى الضغط مع الزمن** $f(t) = 10te^{-t/3}$ لنموذج صاروخ. احسب القيمة العظمى للضغط. احسب الدفع.



.18 يبيّن أدناه منحنى الضغط مع الزمن لنموذج صاروخ. احسب الدفع. واستنادًا إلى إجاباتك في التمرينين 17 و18، أي صاروخ سيصل إلى ارتفاع أعلى؟



.19 احسب الكتلة ومركز الكتلة لجسم ما بكثافة تبلغ $\rho(x) = \dfrac{x}{6} + 2 \text{ kg/m}$، $0 \le x \le 6$. اشرح بإيجاز بدلالة دالة الكثافة السبب أنّ مركز الكتلة ليس عند $x = 3$.

.20 احسب الكتلة ومركز الكتلة لجسم ما بكثافة $\rho(x) = 3 - \dfrac{x}{6} \text{ kg/m}$، $0 \le x \le 6$. اشرح بإيجاز بدلالة دالة الكثافة السبب أنّ مركز الكتلة ليس عند $x = 3$.

.21 احسب الوزن بالجرامات لجسم يمتد من $x = -3$ إلى $x = 27$ له كثافة $\rho(x) = \left(\dfrac{1}{46} + \dfrac{x+3}{690}\right)^2$ صلاج/cm.

.22 احسب الوزن بالجرامات لجسم يمتد من $x = 0$ إلى $x = 32$ له كثافة $\rho(x) = \left(\dfrac{1}{46} + \dfrac{x+3}{690}\right)^2$ صلاج/cm.

.23 احسب مركز الكتلة للجسم المذكور في التمرين 21. ينمذج هذا الجسم مضرب البيسبول في المثال 6.5 وهو "ممسوك بإحكام" (ممسوك من مكان أعلى المقبض بـ 3 in). قارن بين الكتل ومراكز الكتل للمضربين.

.24 احسب مركز الكتلة للجسم المذكور في التمرين 22. ينمذج هذا الجسم مضرب بيسبول يزيد طوله 5 cm عن المضرب المذكور في المثال 6.5. قارن بين الكتل ومراكز الكتل للمضربين.

.25 احسب الكتلة والوزن بالجرامات ومركز الكتلة لجسم يمتد من $x = 0$ إلى $x = 30$ كثافته $\rho(x) = 0.00468\left(\dfrac{3}{16} + \dfrac{x}{60}\right)$ صلاج/cm.

.26 ينمذج الجسم في التمرين 25 مضرب بيسبول من الألومنيوم (مجوف وسماكته 1 cm). قارن الكتلة ومركز الكتلة بتلك الخاصة بالمضرب الخشبي المذكور في المثال 6.5. يزعم خبراء البيسبول أنه من الأسهل تسديد رمية داخلية (قيمة x صغيرة) باستخدام مضرب من الألومنيوم. اشرح السبب أنّ حساباتك تشير إلى صحة ذلك.

.27 يبين الشكل أدناه الرسم التخطيطي لنموذج صاروخ. على فرض أنّ المقياس الرأسي يرتفع 3 وحدات والمقياس الأفقي عرضه 6 وحدات. استخدم الهندسة الأساسية لحساب مساحة كل من المناطق الثلاث من الرسم التخطيطي للصواريخ. على فرض أنّ كثافة ثابت ρ حدّد موقع الإحداثي x لمركز كتلة كل منطقة. (إرشاد: يمكن التفكير في المنطقة الأولى باعتبارها تمتد من $x = 0$ إلى $x = 1$ بكثافة $\rho(3 - 2x)$. تمتد المنطقة الثالثة من $x = 5$ إلى $x = 6$ بكثافة $\rho(6 - x)$).

.28 لنموذج الصاروخ في التمرين 27، استبدل الصاروخ بـ 3 جسيمات، واحد لكل منطقة. على فرض أنّ كتلة كل جسيم تساوي مساحة المنطقة وأنّ موقع الجسيم الموجود على المحور x يساوي مركز كتلة المنطقة. أوجد مركز الكتلة للنظام من 3 جسيمات. [تم تصميم الصواريخ بزعانف سفلية كبيرة بما فيه الكفاية بحيث يتحرك مركز الكتلة بالقرب من الجزء السفلي (أو، في الشكل الموجود هنا، الجانب الأيسر) من الصاروخ. يحسّن هذا الأمر من استقرار انطلاق الصاروخ].

في التمارين 29–32، أوجد نقطة المركز لكل منطقة. نقطة المركز هي مركز الكتلة لمنطقة لها كثافة ثابتة. (إرشاد: بدّل في المثال (6.6) لإيجاد الإحداثي y $(\bar{y})$).

.29 المثلث رؤوسه $(0, 0)$ و $(4, 0)$ و $(4, 6)$

.30 المعيّن رؤوسه $(0, 0)$ و $(3, 4)$ و $(8, 4)$ و $(5, 0)$

.31 المنطقة محدودة بواسطة $y = 4 - x^2$ و $y = 0$.

.32 المنطقة محدودة بواسطة $y = x$ و $y = -x$ و $x = 4$.

.33 يتخذ السد شكل شبه منحرف ارتفاعه 60 ft. وعرضه في الجزء العلوي 40 ft والعرض في الجزء السفلي 100 ft أوجد القيمة العظمى للقوة الهيدروستاتيكية التي سيحتاج الجدار أن يصمد أمامها. اشرح السبب أنّ القوة أكبر بكثير من القوة المبذولة في المثال 6.7.

.34 أوجد القيمة العظمى للقوة الهيدروستاتيكية في المثال 33 إذا حدث جفاف يخفّض منسوب مستوى المياه إلى 10 ft

.35 تم تثبيت نافذة رؤية تحت الماء في حوض للأسماك. طول نصف قطرها الدائري 5 ft يقع مركز الدائرة 40 ft تحت مستوى الماء. أوجد القوة الهيدروستاتيكية المبذولة على النافذة.

.36 توجد نافذة رؤية تحت الماء مستطيلة الشكل عرضها 40 ft تمتد النافذة من سطح الماء حتى عمق 10 ft. أوجد القوة الهيدروستاتيكية المبذولة على النافذة.

.37 نافذة آلة التصوير الموجودة في غواصة آلية تتخذ شكلًا دائريًا طول نصف قطرها 3 in. ما مقدار القوة الهيدروستاتيكية التي ستحتاج النافذة وقادرة على تحملها للوصول إلى عمق 1000 ft؟

.38 يحمل أحد الغواصين ساعة يد إلى عمق 60 ft. طول نصف قطر غطاء وجه الساعة دائري الشكل 1 in. ما مقدار القوة الهيدروستاتيكية التي سيحتاج غطاء وجه الساعة لتستمر الساعة في العمل؟

التطبيقات

.39 علماً أنّ القدرة هي ناتج ضرب القوة والسرعة المتجهة، أحسب القوة بالأحصنة التي تحتاج إليها لرفع جسم وزنه 100 طن مثل حوت أزرق عند 20 mph (1 hp = 550 ft-lb/s). (لاحظ أنّ الحيتان الزرقاء تسبح بكفاءة بحيث تتمكن من الحفاظ على هذه السرعة بناتج يبلغ 60–70 hp).

.40 لقوة ثابتة F مبذولة على طول فترة زمنية t. يعرّف الدفع بالصيغة $F \cdot t$. لأجل قوّة متغيّرة $F(t)$، اشتق صيغة الدفع $J = \int_a^b F(t)\,dt$.

.41 العزم الأول لجسم صلب كثافته $\rho(x)$ هو $\int_a^b x\rho(x)\,dx$. يعد العزم الثاني حول المحور y، المعرّف بالتكامل المحدود $\int_a^b x^2\rho(x)\,dx$، مهمًا أيضًا في التطبيقات. كلما كبر هذا العدد، زادت صعوبة تدوير الجسم حول المحور y. احسب قيم العزم الثاني لمضارب البيسبول الموجودة في المثال 6.5 والتمرين 21. إنّ إمساك المضرب بإحكام يجعل من السهل أرجحته (والتحكم فيه). احسب النسبة المئوية التي يقل بها العزم الثاني من خلال إمساك المضرب بإحكام على بعد 3 in.

.42 صدفةً، يقوم لاعبو البيسبول بشكل غير قانوني "بسد" مضاربهم عن طريق حفر جزء من الخشب من نهاية المضارب وحشو الثقب بمادة خفيفة مثل الفلين. إنّ ميزة هذا الإجراء هو أنّ العزم الثاني يصغر بشكل ملحوظ. لنمذجة هذا، استخدم المضرب من المثال 6.5 وقم بتغيير الكثافة إلى

$$\rho(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{46} + \dfrac{x}{690}\right)^2, & 0 \le x \le 28 \\ \left(\dfrac{1}{92} + \dfrac{x}{690}\right)^2, & 28 < x \le 30 \end{cases}$$

بتمثيل فجوة لنصف قطر $\frac{1}{4}''$ وطول $2''$ احسب الكتلة والعزم الثاني للمضرب المحشو بالفلين وقارنه بالمضرب الأصلي.

.43 يعطى العزم الثاني (انظر التمرين 41) لقرص كثافته ρ له شكل القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالتكامل المحدود $\int_{-a}^{a} 2\rho b x^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx$. استخدم CAS الخاص بك لإيجاد قيمة هذا التكامل.

.44 استخدم النتيجة من التمرين 43 لتبيّن أنّ العزم الثاني لرأس مضرب التنس في الرسم التخطيطي (في الصفحة التالية) هو $M = \rho\frac{\pi}{4}[ba^3 - (b - w)(a - w)^3]$.

.45 لمضارب التنس، يعني عزم ثاني كبير (انظر التمرينين 43 و 44) تدوير أقل للمضرب عند تسديد الضربات خارج المركز. قارن العزم الثاني لمضرب خشبي $(a = 9, b = 12, w = 0.5)$ ومضرب متوسط الحجم $(a = 10, b = 13, w = 0.5)$ ومضرب كبير الحجم $(a = 11, b = 14, w = 0.5)$.

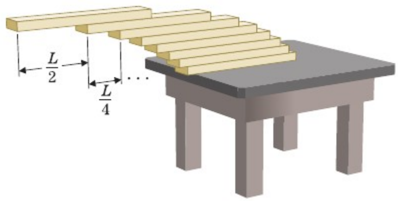
.46 لتكن M هي العزم الثاني الموجود في التمرين 44. أثبت أنّ $\frac{dM}{da} > 0$ واستنتج أنّ المضارب الأكبر حجمًا لها قيم عزم ثاني أكبر. وأيضًا، أثبت أنّ $\frac{dM}{dw} > 0$ وفسّر هذه النتيجة.

تمارين استكشافية

.1 حيث تحسّنت الأدوات، زادت مستويات الارتفاع التي يتم قطعها في القفز بالزانة. ويمكن استمداد تقدير أولي للقيمة العظمى الممكنة للقفز بالزانة والحفاظ على مبادئ القدرة. على فرض أنّ القيمة العظمى للسرعة التي يستطيع أن يجري بها لاعب قفز بالزانة حاملاً عصا طويلة هو 40 km/h. حوّل هذه السرعة إلى m/s. ستبلغ الطاقة الحركية للاعب القفز هذا $\frac{1}{2}mv^2$ (اترك m كقيمة مجهولة حالياً). ستساوي هذه الطاقة الحركية الأولية طاقة الجهد في الجزء العلوي من الزانة ناقص أي طاقة امتصتها العصا الطويلة (والتي سنقوم بتجاهلها). قم بإعداد طاقة الجهد، $32mh$ تساوي الطاقة الحركية وحل حيث h. يمثّل هذا القيمة العظمى التي يمكن أن ترتفع له مركز الكتلة الخاص بلاعب القفز. أضف 1 m لارتفاع مركز الكتلة الخاص بلاعب القفز وستحصل على تقدير للقيمة العظمى الممكنة للقفز بالزانة. قارن هذا برقم سيرجي بوبكا القياسي للقفز بالزانة لعام 1994 لـ $20'1\frac{3}{4}''$

.2 سيبقى جسم ما على طاولة طالما أنّ مركز كتلة الجسم يقع على الطاولة. على سبيل المثال، ستتوازن لوحة طول قياسها 1 إذا كان نصف اللوحة يقع على حافة الطاولة. أثبت أنّ

اللوحتين المتجانستين اللتين سيبلغ طولهما 1 ستتوازنان إذا كان $\frac{1}{4}$ اللوحة الأولى يقع على حافة الطاولة و$\frac{1}{2}$ اللوحة الثانية يقع على حافة اللوحة الأولى. أثبت أنّ اللوحات الثلاثة التي طول قياسها 1 ستتوازن إذا كان $\frac{1}{6}$ اللوحة الأولى يقع على حافة الطاولة و $\frac{1}{4}$ اللوحة الثانية يقع على حافة اللوحة الأولى و $\frac{1}{2}$ اللوحة الثالثة يقع على حافة اللوحة الثانية. قم بتعميم هذا على إجراء لتوازن n لوحة. كم لوحة تحتاج اليها بحيث تقع اللوحة الأخيرة بالكامل فوق حافة الطاولة؟

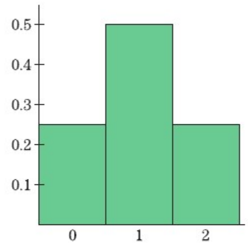


الدرس 6-7 الاحتمال

تركز مجالات الاحتمال والإحصاء في الرياضيات على تحليل العمليات العشوائية. في هذا الدرس، نعطي مقدمة مختصرة عن استخدام حساب التفاضل والتكامل في نظرية الاحتمال.

نبدأ بمثال بسيط يتضمّن القاء قطع نقود معدنية. على فرض أنكّ القيت قطعتي نقد معدنية كل منهما لديها فرصة 50% أن تستقر على الصورة. نظرًا إلى أنّ الأمر عشوائيًا، لا يمكنك حساب عدد مرات حصولك على الصورة بالضبط عند القاء قطع النقد المعدنية لعدد محدّد من المرات. ولكن يمكنك حساب ترجيح لكل نتيجة ممكنة. إذا رمزنا إلى الصورة بواسطة H والكتابة بواسطة T، إذًا تكون الأربع نتائج الممكنة من القاء قطعتي نقد معدنية هي HH و HT و TH و TT. يعُد كل من هذه النتائج الأربع ترجيحاً بشكل متساوٍ، لذا يمكننا قول أنّه لكل منها احتمالًا $\frac{1}{4}$. هذا يعني أنه، في المتوسط، سيقع كل من هذه الأحداث بمعدل يبلغ ربع المحاولات التي تقوم بها. ولقول هذا بطريقة أخرى، سيبلغ معدل **التكرار النسبي** الذي سيقع به كل حدث في عدد كبير من التجارب بشكل تقريبي $\frac{1}{4}$.

لاحظ أنه بناء على عملياتنا الحسابية أعلاه، فإنّ احتمال الحصول على الصورتين مع بعضهما هو $\frac{1}{4}$ واحتمال الحصول على صورة واحدة هو $\frac{2}{4}$ (بما أنّه يوجد طريقتان لحدوث هذا: HT وTH) واحتمال عدم الحصول على أي صورة هو $\frac{1}{4}$. غالبًا ما نلخّص مثل تلك المعلومات بعرضها على **مدرّج تكراري**، تمثيل بياني بالأعمدة حيث تكون النتائج منظّمة على محور أفقي. (انظر الشكل 6.57).



الشكل 6.57
مدرّج تكراري لالقاء قطعتي نقود معدنية

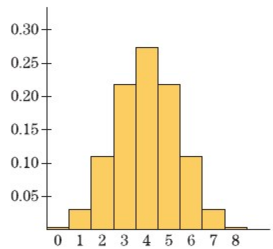
بدلًا من ذلك إذا القينا 8 قطع نقد معدنية، فإنّ احتمالات الحصول على عدد معروف من الصور معطى في الجدول المرافق ويوضّح الشكل 6.58 المدرج التكراري المناظر. يتوجّب عليك ملاحظة أنّ مجموع جميع الاحتمالات هو 1 (أو 100% حيث إنّه من المؤكد أن واحدة من النتائج الممكنة ستحدث في محاولة معطاة). هذه هي واحدة من خصائص التعريف لنظرية الاحتمال. يطلق على خاصية أساسية أخرى اسم **مبدأ الجمع**: لحساب احتمال الحصول على 6 أو 7 أو 8 صور (أو أي نتائج متنافية أخرى)، ببساطة اجمع الاحتمالات الإفرادية مع بعضها البعض:

العدد	الاحتمال
0	1/256
1	8/256
2	28/256
3	56/256
4	70/256
5	56/256
6	28/256
7	8/256
8	1/256

$$P(6 \text{ or } 7 \text{ or } 8 \text{ صور}) = \frac{28}{256} + \frac{8}{256} + \frac{1}{256} = \frac{37}{256} \approx 0.145$$

يكشف التفسير البياني لعملية الحساب هذه الكثير. في المدرّج التكراري الموجود في الشكل 6.58، لاحظ أنّ كل عمود هو مستطيل بعرض يبلغ 1. إذًا الاحتمال المرتبط بكل عمود يساوي مساحة المستطيل. بمصطلحات بيانية،

- المساحة الكلية في مثل ذلك المدرّج التكراري تساوي 1.
- يساوي احتمال الحصول على ما بين 6 و 8 صور (ضمناً) ناتج جمع مساحات المستطيلات التي تقع بين 6 و 8 (ضمناً).

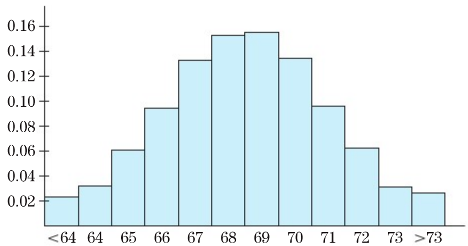


الشكل 6.58
مدرّج تكراري لالقاء ثمانية قطع نقود معدنية

يعُد السؤال المعقد بشكل أكبر هو الاستفسار حول احتمال أن يكون طول شخص مختار بشكل عشوائي $5'9''$ $(69'')$ أو $5'10''$ $(70'')$. لا توجد نظرية سهلة يمكننا استخدامها هنا لحساب الاحتمالات (حيث إنّ ليست جميع الأطوال مرجّح أن تتساوى). في هذه الحالة، نستخدم التناظر بين الاحتمال والتكرار النسبي. إذا جمّعنا معلومات حول أطوال عدد كبير من البالغين، يمكننا إيجاد ما يأتي:

الطول (in)	< 64	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	> 73
عدد الأشخاص	23	32	61	94	133	153	155	134	96	62	31	26

بما أنّ العدد الإجمالي للأشخاص المشاركين في الاستبيان هو 1000، يكون التكرار النسبي للطول $5'9''$ $(69'')$ هو $0.155 = \frac{155}{1000}$ والتكرار النسبي للطول $5'10''$ $(70'')$ هو $0.134 = \frac{134}{1000}$. تقدير إحتمال $5'9''$ أو $5'10''$ هو $0.289 = 0.134 + 0.155$. يوضّح الشكل 6.59 مدرّج تكراري.



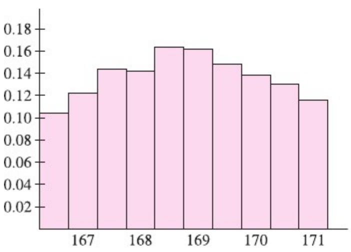
الشكل 6.59
مدرّج تكراري للتكرار النسبي للأطوال

للإجابة عن سؤال أكثر تحديدًا، مثل ما احتمال أن يكون اختيار أحد الأشخاص عشوائياً طوله 5 ft 8.5 in أو $5'9''$. سوف نحتاج الى تجزيئ بياناتنا كما هي التجزئة في الجدول الآتي:

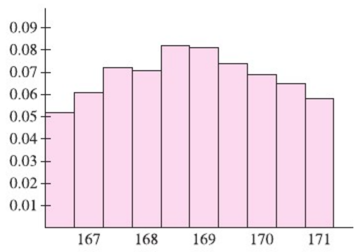
$66\frac{1}{2}''$	$67''$	$67\frac{1}{2}''$	$68''$	$68\frac{1}{2}''$	$69''$	$69\frac{1}{2}''$	$70''$	$70\frac{1}{2}''$	$71''$
52	61	72	71	82	81	74	69	65	58

يمكن تقدير احتمال أن يكون شخص ما بطول 5 ft 9 in بواسطة معدل التكرار النسبي للأشخاص بطول 5 ft 9 in المشاركين في الاستبيان الخاص بنا، والذي هو $0.081 = \frac{81}{1000}$. وبالمثل، احتمال أن يكون شخص ما بطول 5 ft 8.5 in هو $0.082 = \frac{82}{1000}$ تقريبًا. إذًا يكون الاحتمال 5 ft 8.5 in أو 5 ft 9 in هو $0.163 = 0.082 + 0.081$ تقريبًا. يوضّح الشكل 6.60a مدرّج تكراري لهذا الجزء من البيانات.

لاحظ أنه، بما أنّ كل عمود من المدرّج التكراري يمثّل الآن مدى نصف بوصة من الطول، لم يعد بإمكاننا تفسير المساحة في المدرّج التكراري على أنها الاحتمال. سنقوم بتعديل المدرّج التكراري لصنع ترابط مساحة بشكل أوضح. في الشكل 6.60b، لقد قمنا بتسمية الطول على المحور الأفقي بالبوصة بينما يبيّن الرأسي مثلي التكرار النسبي. طول العمود الواقع عند 5 ft 9 in هو 0.162 وعرضه $\frac{1}{2}$. وتناظر مساحته، $0.081 = (0.162)\frac{1}{2}$، التكرار النسبي (أو الاحتمال) للطول 5 ft 9 in.



الشكل 6.60b
مدرّج تكراري يبيّن مِثلي التكرار النسبي



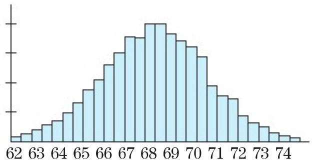
الشكل 6.60a
مدرّج تكراري للتكرار النسبي للأطوال

بالطبع، يمكننا الاستمرار في تجزئة فترات الطول إلى أجزاء أصغر وأصغر. فكر في إجراء ذلك بينما نقوم بتعديل المقياس الموجود على المحور الرأسي بحيث تعطي مساحة كل مستطيل (الطول مضروبًا في عرض الفترة) التكرار النسبي (الاحتمال) لفترة الطول تلك دائمًا. مثال ذلك: على فرض أنّ هناك n فترات طول بين 5 ft 8 in و 5 ft 9 in لتكن x تمثّل الطول بالبوصة و $f(x)$ تساوي

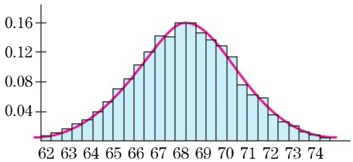
طول عمود المدرّج التكراري للفترة التي تحتوي على x. لتكن $x_1 = 68 + \frac{1}{n}$، $x_2 = 68 + \frac{2}{n}$ وهكذا. لتكون $x_i = 68 + \frac{i}{n}$. لكل $1 \le i \le n$ ولتكن $\Delta x = \frac{1}{n}$. يتم تقدير احتمال أن يكون طول شخص تم اختياره عشوائياً بين 6 ft 8 in و 6 ft 9 in بواسطة مجموع مساحات مستطيلات المدرّج التكراري المتناظرة. المعطى بواسطة

$$P(68 \le x \le 69) \approx f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \qquad (7.1)$$

لاحظ أنّه يتزايد العدد n. "سيستوي" المدرّج التكراري الموجود في الشكل 6.61 ليقترب من شكل منحنى كما يبدو في الشكل 6.62.



الشكل 6.61
مدرّج تكراري للأطوال



الشكل 6.62
دالة كثافة احتمالية ومدرّج تكراري للأطوال

نطلق على هذه الدالة المنتهية $f(x)$ اسم **دالة الكثافة الاحتمالية (pdf)** للأطوال. لاحظ أنّه لأي معطى $i = 1, 2, \ldots, n$، $f(x_i)$ لا تعطي احتمال أن يساوي طول شخص ما x_i. بدلاً عن ذلك، لقيم Δx الصغيرة، تعُدّ الكمية $f(x_i)\,\Delta x$ تقريب لاحتمال أن يكون طول شخص تم اختياره عشوائيًا هو في مدى $[x_{i-1}, x_i]$.

لاحظ أنه عندما $n \to \infty$، يجب أن يقترب مجموع ريمان في (7.1) من تكامل $\int_a^b f(x)\,dx$. هنا، تكون حدود التكامل 68 و 69. لدينا

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_{68}^{69} f(x)\,dx$$

لاحظ أنّه بتعديل قيم الدالة لكي يناظر الاحتمال المساحة، نكون قد عثرنا على أسلوب مألوف ومباشر لحساب الاحتمالات. نلخص الآن مناقشتنا ببعض التعريفات. تعُد الأمثلة السابقة خاصة **بتوزيعات احتمال متقطعة** (متقطعة انطلاقاً من فرضية أنّ الكمية التي يتم قياسها هي قيم من مجموعة معيّنة منتهية). على سبيل المثال، عند القاء قطع النقد المعدنية، يجب أن يكون عدد الصور عددًا صحيحًا. وعلى النقيض، تكون العديد من التوزيعات **متصلة**. أي إنّ، كميّة الفائدة (المتغيّر العشوائي) هي قيم فرضيّة من مدى متّصل للأعداد (فترة). على سبيل المثال، على الرغم من أنّه يتم تقريب الطول عادة إلى أقرب عدد صحيح من السنتمترات، يمكن أن يكون الطول الفعلي لأحد الأشخاص أي عدد.

يكون التمثيل البياني المناظر لمدرّج تكراري للتوزيعات المتصلة، هو التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية (pdf). نقدم الآن تعريف دقيق لـ pdf.

الملاحظات التاريخية

بليز باسكال (1623–1662)
عالم رياضيات وفيزياء فرنسي كون فريقًا مع بيير فيرما لبدء دراسة نظامية للاحتمال. (انظر The Unfinished Game لكيث ديفلين للحصول على حساب حول هذا). ينُسب إلى باسكال فضل العديد من الاختراعات، بما في ذلك ساعة معصم ومقياس ضغط جوي ومكبس هيدروليكي ومحقنة ومجموعة متنوعة من آلات الحساب. واكتشف كذلك ما يعُرف الآن باسم مبدأ باسكال في إستاتيكا الموائع. (انظر القسم 5.6). من الممكن أن يكون قد أصبح باسكال واحد من مؤسسي حساب التفاضل والتكامل، ولكن قللت حالته الصحية السيئة والفترات الزمنية الكبيرة التي كرسها للتأملات الدينية والفلسفية من إنجازاته الرياضية.

التعريف 7.1

على فرض أنّ X هي متغيّر عشوائي له فرضيّة أي قيمة x لكل $a \le x \le b$. تكون دالة الكثافة الاحتمالية لـ X دالة $f(x)$ تحقق

(i) $f(x) \ge 0$ لكل $a \le x \le b$ — لا تكون دوال الكثافة الاحتمالية سالبة أبدًا.

و

(ii) $\int_a^b f(x)\,dx = 1$. — الاحتمال الكلي 1.

يعطى الاحتمال الذي تقع فيه قيمة X (المرئيّة) بين c و d بالمساحة تحت التمثيل البياني لـ pdf على تلك الفترة. أي إنّ،

$$P(c \le X \le d) = \int_c^d f(x)\,dx$$ يناظر الاحتمال المساحة تحت المنحنى.

لإثبات أنّ دالة تعُرف pdf من أجل متغيّر عشوائي ما (مجهول)، يجب إثبات أنهّا تحقق الخاصيتين (i) و(ii) بالتعريف 7.1.

المثال 7.1 إثبات أنّ دالة هي pdf على فترة

أثبت أنّ $f(x) = 3x^2$ تعرّف pdf على الفترة $[0, 1]$ بإثبات الخاصيتين (i) و(ii) للتعريف 7.1.

الحل بشكل واضح، $f(x) \geq 0$. للخاصية (ii)، نقوم بتكامل pdf في مجالها. لدينا

$$\int_0^1 3x^2 dx = x^3 \Big|_0^1 = 1$$

المثال 7.2 استخدام pdf لتقدير الاحتمالات

على فرض أنّ $f(x) = \frac{0.4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.08(x-68)^2}$ هي دالة كثافة احتمالية لأطوال ذكور بالغين بالبوصة. أوجد احتمال أن يكون طول ذكر بالغ تم اختياره عشوائيًا بين 5 ft 8 in و 5 ft 9 in. كذلك، أوجد احتمال أن يكون طول ذكر بالغ تم اختياره عشوائيًا بين 6 ft 2 in و 6 ft 4 in.

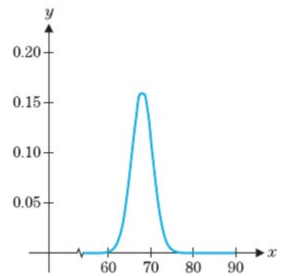
الحل لحساب الاحتمالات، تحتاج أولًا إلى تحويل الأطوال المحدّدة إلى بوصات (إذا كانت غير ذلك). الإحتمال أن يكون الطول بين 68 in و 69 in هو

$$P(68 \leq X \leq 69) = \int_{68}^{69} \frac{0.4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.08(x-68)^2} dx \approx 0.15542$$

هنا، قمنا بتقريب قيمة التكامل عدديًا. (يمكنك استخدام قاعدة سمبسون أو طريقة التكامل العددي المدمجة في آلتك الحاسبة أو CAS). والإحتمال أن يكون الطول بين 74 in و 76 in هو

$$P(74 \leq X \leq 76) = \int_{74}^{76} \frac{0.4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.08(x-68)^2} dx \approx 0.00751$$

حيث قربنا قيمة التكامل عدديًا مرة أخرى.



الشكل 6.63
أطوال الذكور البالغين

وفقًا للبيانات الموجودة في كتاب جيلز براندريث *Your Vital Statistics*، فإنّ pdf أطوال الذكور البالغين تبدو مثل التمثيل البياني لـ $f(x) = \frac{0.4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.08(x-68)^2}$ الموضّح في الشكل 6.63 والمستخدم في مثال 7.2. لقد رأيت على الأرجح منحنيات على شكل جرس مثل هذا من قبل. يشار إلى هذا التوزيع باسم **التوزيع الطبيعي**. إلى جانب التوزيع الطبيعي، توجد توزيعات احتمال عديدة أخرى مهمة في التطبيقات.

المثال 7.3 حساب احتمال مع pdf أسيّة

على فرض أنّ العمر الافتراضي بالأعوام لعلامة تجارية معينة لمصباح يتم توزيعه أسيًا بواسطة pdf $f(x) = 4e^{-4x}$. أوجد احتمال أن يدوم مصباح محدّد لمدة 3 أشهر أو أقل.

الحل أولاً، بما أنّ المتغيّر العشوائي يقيس العمر الافتراضي بالأعوام، حول 3 أشهر إلى $\frac{1}{4}$ عام. إذًا يكون الاحتمال

$$P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{4}\right) = \int_0^{1/4} 4e^{-4x} dx = 4\left(-\frac{1}{4}\right) e^{-4x}\Big|_0^{1/4}$$
$$= -e^{-1} + e^0 = 1 - e^{-1} \approx 0.63212$$

في بعض الحالات، من الممكن أن تكون هناك أسباب نظرية لافتراض أنّ لـ pdf لها صيغة معينة. في هذه الحالة، تكون المهمة الأولى هي تحديد قيم أي ثوابت للوصول إلى خصائص pdf.

المثال 7.4 تحديد معامل pdf

على فرض أنّ pdf لمتغيّر عشوائي صيغتها $f(x) = ce^{-3x}$ لبعض الثوابت c، مع $0 \le x \le 1$. أوجد قيمة c التي تجعل هذه الدالة pdf.

الحل لتكون pdf، نحتاج أولًا إلى أن تكون $f(x) = ce^{-3x} \ge 0$. لكل $x \in [0, 1]$. (ستكون هذه هي الحالة ما دام $c \ge 0$) كذلك، يجب أن يساوي التكامل في مجاله العدد 1. لذا، نضع

$$1 = \int_0^1 ce^{-3x}dx = c\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-3x}\Big|_0^1 = \frac{c}{3}(1 - e^{-3})$$

فهي الآن تتبع أنّ $c = \dfrac{3}{1 - e^{-3}} \approx 3.1572$

عند pdf معطاة، يمكن حساب إحصاءات متعددة لإختصار خصائص المتغيّر العشوائي. يعُد الإحصاء الأكثر شيوعًا هو **المتوسط الحسابي**. أكثر وسيلة مشهورة لقياس القيمة المتوسطة. إذا رغبت في حساب متوسط درجات الاختبار 85، 89، 93، و 93، فستقوم على الأرجح بحساب المتوسط الحسابي، المعطى كما يأتي: $\frac{85+89+93+93}{4} = 90$.

لاحظ هنا أنّ كان هناك ثلاثة من نتائج اختبار مختلفة مسجلة: 85، التي لديها تكرار نسبي $\frac{1}{4}$، وأيضاً 89، بتكرار نسبي $\frac{1}{4}$ وكذلك 93، بتكرار نسبي $\frac{2}{4}$. يمكننا كذلك حساب المتوسط بضرب كل قيمة بالتكرار النسبي الخاص بها ثم إيجاد ناتج الجمع: $(85)\frac{1}{4} + (89)\frac{1}{4} + (93)\frac{2}{4} = 90$

الآن، على فرض أنّنا نرغب في حساب المتوسط الحسابي لطول الأشخاص في الجدول التالي.

الطول(in)	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74
العدد	23	32	61	94	133	153	155	134	96	62	31	26

سيكون من غير المنطقي كتابة أطوال الـ 1000 شخص جميعهم وإيجاد ناتج الجمع ثمّ القسمة على 1000. فمن الأسهل ضرب كل طول بالتكرار النسبي الخاص به وجمع النتائج. باتباع هذا الطريق، المتوسط m تكون معطاة كما يأتي:

$$m = (163)\frac{23}{1000} + (164)\frac{32}{1000} + (165)\frac{61}{1000} + (166)\frac{94}{1000} + (167)\frac{133}{1000} + \cdots + (174)\frac{26}{1000}$$
$$= 168$$

إذا رمزنا إلى الأطوال بـ x_1، x_2.....x_n وافترضنا أنّ $f(x_i)$ هي معدل التكرار النسبي أو الاحتمال المناظر لـ $x = x_i$. إذًا يكون للمتوسط الحسابي الصيغة

$$m = x_1f(x_1) + x_2f(x_2) + x_3f(x_3) + \cdots + x_{12}f(x_{12})$$

إذا كانت الأطوال معطاة في مجموعة البيانات الخاص بنا لكل نصف سنتمتر أو عُشْر سنتمتر. سوف نحسب المتوسط بضرب كل x في الاحتمال المناظر $f(x_i)\Delta x$. حيث Δx هي كسر سنتمتر بين نقاط البيانات. تكون للمتوسط الآن الصيغة

$$m = [x_1f(x_1) + x_2f(x_2) + x_3f(x_3) + \cdots + x_nf(x_n)]\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} x_if(x_i)\,\Delta x$$

حيث n هي عدد نقاط البيانات. لاحظ أنّه، بتزايد n واقتراب Δx من 0، يقترب مجموع ريمان من التكامل $\int_a^b xf(x)\,dx$. وهذا يعطينا التعريف التالي.

التعريف 7.2

يعطى **المتوسط الحسابي** μ لمتغيّر عشوائي له pdf $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ بالصيغة:

$$\mu = \int_a^b xf(x)\,dx \qquad (7.2)$$

على الرغم من أنّه يتم استخدام المتوسط الحسابي بشكل شائع لذكر القيم المتوسطة لمتغيّر عشوائي، من المهم إدراك أنّه ليس وسيلة القياس الوحيدة للمتوسط التي يستخدمها علماء الإحصاء. وسيلة قياس بديلة

اليوم في الرياضيات

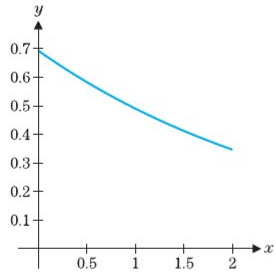
بيرسي دياكونيس (1945–)

عالم إحصاء أمريكي كان من أول الحاصلين على زمالة مؤسسة MacArthur المربحة، التي كثيرًا ما يطلق عليها اسم "منحة العبقرية". تدرب دياكونيس على الكمان في جوليارد حتى بلغ 14 عامًا، عندما غادر موطنه ليصبح موسيقي محترف لمدة 10 أعوام. عبّر عن اهتماماته المتنوّعة من خلال عمله، حيث يستخدم جميع مجالات الرياضيات والإحصاء في حل مسائل من جميع جوانب العلوم والهندسة.

للمتوسط هي **الوسيط**، قيمة -x التي تقسم الاحتمال إلى النصف. (أي إنّ، نصف جميع قيم المتغيّر العشوائي تقع عند أو تحت الوسيط ويقع النصف الآخر عند أو فوق الوسيط). في المثال 7.5 وفي التمارين، ستستكشف الحالات التي يقدم فيها كل قياس دليلاً مختلفاً عن متوسط متغيّرات عشوائية.

المثال 7.5 إيجاد المتوسط الحسابي والوسيط لعمر مجموعة من الخلايا

على فرض أنّ العمر بالأيام لكائن وحيد الخلية pdf له $f(x) = (\ln 2)e^{-kx}$، حيث $k = \frac{1}{2}\ln 2$. يكون المجال $0 \leq x \leq 2$ (الفرضيّة هنا أنّه عند الوصول لعمر يومين، تنقسم كل خلية إلى خليتين وليدتين). أوجد (a) المتوسط الخاص بعمر الخلايا و (b) نسبة أعمار الخلايا الأصغر من المتوسط و (c) الوسيط لعمر الخلايا.



الشكل 6.64

$y = (\ln 2)e^{-(\ln 2)x/2}$

الحل للجزء (a)، لدينا من (7.2) أنّه يعطى المتوسط الحسابي بالصيغة

$$\mu = \int_0^2 x(\ln 2)e^{-(\ln 2)x/2}dx \approx 0.88539 \text{ يوم}$$

حيث قرّبنا قيمة التكامل عدديًا. لاحظ أنّه، على الرغم من أنّ الخلايا تتراوح في العمر من 0 يوم إلى يومين، لا يبلغ المتوسط 1. يوضّح التمثيل البياني لـ pdf في الشكل 6.64 أنّ صغار الأعمار على الأرجح أكثر من كبار الأعمار ويتسبّب هذا في أن يكون المتوسط أقل من 1.

للجزء (b)، لاحظ أنّ نسبة الخلايا أعمارها أصغر من المتوسط هي نفسها كإحتمال أن تكون خلية تم اختيارها عشوائيًا عمرها أصغر من المتوسط. يتم إعطاء الاحتمال كما يأتي:

$$P(0 \leq X \leq \mu) \approx \int_0^{0.88539} (\ln 2)e^{-(\ln 2)x/2}dx \approx 0.52848$$

حيث قرّبنا قيمة التكامل عدديًا مرة أخرى. لذا، فإنّ نسبة أعمار الخلايا الأصغر من المتوسط 53% تقريبًا. لاحظ أنّ في هذه الحالة لا يمثّل المتوسط درجة 50% للاحتمالات. وبعبارة أخرى، لا يكون المتوسط مماثل للوسيط.

لإيجاد الوسيط في الجزء (c)، يجب أن نحل لإيجاد قيمة العدد الثابت c بحيث تكون

$$0.5 = \int_0^c (\ln 2)e^{-(\ln 2)x/2}dx$$

بما أنّ الدالة الأصلية للدالة $e^{-(\ln 2)x/2}$ هي $-\frac{2}{\ln 2}e^{-(\ln 2)x/2}$، نحصل على

$$\begin{aligned} 0.5 &= \int_0^c \ln 2e^{-(\ln 2)x/2}dx \\ &= \ln 2\left[-\frac{2}{\ln 2}e^{-(\ln 2)x/2}\right]_0^c \\ &= -2e^{-(\ln 2)c/2} + 2 \end{aligned}$$

بطرح 2 من كلا الطرفين، نحصل على

$$-1.5 = -2e^{-(\ln 2)c/2}$$

بحيث تعطينا القسمة على -2 الناتج $0.75 = e^{-(\ln 2)c/2}$

وعند أخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الطرفين يعطينا

$$\ln 0.75 = -(\ln 2)c/2$$

في النهاية، الحل لإيجاد قيمة c يعطينا $c = \dfrac{-2\ln 0.75}{\ln 2}$

حيث يبلغ الوسيط $-2\ln 0.75/\ln 2 \approx 0.83$. يمكننا الآن استنتاج أنّ نصف الخلايا أعمارها أصغر من 0.83 يوم والنصف الآخر من الخلايا أعمارها أكبر من 0.83 يوم. ■

تمارين 6.7

تمارين كتابية

1. في النص، ذكرنا أنّ احتمال القاء قطعتي نقد معدنيتين عادلتين والحصول على صورتين هو $\frac{1}{4}$. إذا حاولت إجراء هذه التجربة أربع مرات، اشرح سبب عدم حصولك دائمًا على صورتين بالضبط في مرة من الأربع مرات. إذا كان الاحتمال لا يعطيك توقعات دقيقة، فما فائدته؟ للإجابة على هذا السؤال، ناقش المعلومات التي تم الوصول إليها بمعرفة أنّ احتمال الحصول على صورة واحدة وكتابة واحدة في التجربة الموجودة أعلاه هو $\frac{1}{2}$ (أي مثلي الكسر $\frac{1}{4}$).

2. على فرض أنك تلقي قطعتي نقد معدنيتين لعدة مرات (أو قم بمحاكاة هذا على آلتك الحاسبة أو الحاسوب الخاص بك). نظريًا، يكون احتمال الحصول على صورتين هو $\frac{1}{4}$. على المدى البعيد (عند القاء قطعتي نقد معدنيتين بمعدل أكبر وفي كثير من الأحيان)، كم ينبغي أن تكون النسبة لعدد مرّات الحصول على صورتين؟ حاول إجراء هذا وناقش كيفية مقارنة نتائجك بعملية الحساب النظرية.

3. وفقًا للشكلين 6.57 و6.58، صف الصورة التي تتوقّع أن يبدو عليها المدرّج التكراري لعدد أكبر من قطع النقود المعدنية. قارن مع الشكل 6.63.

4. يحدد طول الشخص بعوامل متعددة، وراثية وبيئية على حد سواء (مثال: النظام الغذائي). اشرح سبب إمكانية إنتاج مدرّج تكراري مشابه لذلك الناتج عن القاء عدد كبير من قطع النقد المعدنية.

في التمارين 6–1، أثبت أنّ الدالة المعطاة هي pdf على الفترة المعيّنة.

1. $f(x) = 4x^3, [0, 1]$
2. $f(x) = \frac{3}{8}x^2, [0, 2]$
3. $f(x) = x + 2x^3, [0, 1]$
4. $f(x) = \cos x, [0, \pi/2]$
5. $f(x) = \frac{1}{2}\sin x, [0, \pi]$
6. $f(x) = e^{-x/2}, [0, \ln 4]$

في التمارين 12–7، أوجد قيمة لـ c التي تكون عندها $f(x)$ pdf على الفترة المعيّنة.

7. $f(x) = cx^3, [0, 1]$
8. $f(x) = cx + x^2, [0, 1]$
9. $f(x) = ce^{-4x}, [0, 1]$
10. $f(x) = 2ce^{-cx}, [0, 2]$
11. $f(x) = \dfrac{c}{1 + x^2}, [0, 1]$
12. $f(x) = \dfrac{c}{\sqrt{1 - x^2}}, [0, 1]$

في التمارين 16–13، استخدم pdf الخاصة بمثال 7.2 لإيجاد احتمال أن يكون طول ذكر إماراتي تم اختياره عشوائيًا في المدى المعيّن.

13. بين 5 ft 10in و 6in .
14. بين 6 ft 6 in و 6 ft 10in.
15. بين 7 ft و 10 ft.
16. بين 2 ft و 5 ft.

في التمارين 20–17، أوجد الاحتمالات المعيّنة، إذا علمت أنّ العمر الافتراضي لمصباح يتم توزيعه أسيًا باستخدام pdf $f(x) = 6e^{-6x}$ (حيث يتم قياس x بالأعوام).

17. يدوم عمر المصباح لمدة أصغر من 3 أشهر.
18. يدوم عمر المصباح لمدة أصغر من 6 أشهر.
19. يدوم عمر المصباح لمدة تتراوح بين عام واحد وعامين.
20. يدوم عمر المصباح لمدة تتراوح بين 3 و 10 أعوام.

في التمارين 24–21، على فرض أنّ عمر كائن حي له pdf $f(x) = 4xe^{-2x}$ (حيث يتم قياس x بالأعوام).

21. أوجد احتمال أن يكون للكائن الحي عمر أصغر من عام واحد.
22. أوجد احتمال أن يكون للكائن الحي عمر يتراوح بين عام واحد وعامين.
23. أوجد متوسط العمر $(0 \le x \le 10)$.
24. مثّل pdf بيانيًا وقارن القيمة العظمى لـ pdf بالمتوسط.

في التمارين 30–25، أوجد (a) المتوسط و (b) وسيط المتغيّر العشوائي من pdf المعطاة.

25. $f(x) = 3x^2, [0, 1]$
26. $f(x) = 4x^3, [0, 1]$
27. $f(x) = \dfrac{4/\pi}{1 + x^2}, [0, 1]$
28. $f(x) = \dfrac{2/\pi}{\sqrt{1 - x^2}}, [0, 1]$
29. $f(x) = \frac{1}{2}\sin x, [0, \pi]$
30. $f(x) = \cos x, [0, \pi/2]$

31. لكل $f(x) = ce^{-4x}$، أوجد c بحيث تكون $f(x)$ pdf على الفترة $[0, b]$ لكل $b > 0$. ماذا يحدث لـ c عندما $b \to \infty$؟
32. لأجل pdf من التمرين 31، أوجد المتوسط بالضبط (استخدم CAS لدالّة أصلية). عندما تتزايد b، ما الذي يحدث للمتوسط؟
33. كرّر التمرينين 31 و 32 لأجل $f(x) = ce^{-6x}$.
34. وفقًا لنتائج التمارين 33–31، خمّن قيم c والمتوسط عندما $a \to \infty$، لأجل $f(x) = ce^{-ax}$، $a > 0$.

التطبيقات

35. في نسخة من نسخ لعبة كينو، تختار 10 أعداد تتراوح بين 1 و80. تسحب 20 عدداً بين 1 و 80. يعتمد ربحك على الأعداد الخاصة التي يتم اختيارها. استخدم الاحتمالات المعطاة (مقرّبة إلى 4 أرقام) لإيجاد احتمال كل حدث محدّد أدناه. (للفوز، يجب أن يتم اختيار 5 من أعدادك على الأقل. في مراهنة على 2 AED، تربح 40 AED أو أكثر إذا تم اختيار 6 أو أكثر من أعدادك).

العدد الذي تم اختياره	0	1	2	3	4
الاحتمال	0.0458	0.1796	0.2953	0.2674	0.1473

العدد الذي تم اختياره	5	6	7	8	9	10
الاحتمال	0.0514	0.0115	0.0016	0.0001	0.0	0.0

(a) الربح (يتم اختيار 5 على الأقل)

(b) الخسارة (يتم اختيار 4 أو أقل)

(c) تحقيق ربح كبير (6 أو أكثر)

(d) يتم اختيار 3 أو 4 أعداد

36. على فرض أنّ لاعب كرة سلة يحرز نسبة 70% من رمياته الحرة. إذا صوّب ثلاث رميات حرة وكان احتمال إحراز كل منها 0.7، فتكون احتمالات العدد الإجمالي المحرز كما هو موضّح. أوجد احتمال كل حدث محدّد أدناه.

العدد المحرز	0	1	2	3
الاحتمال	0.027	0.189	0.441	0.343

(a) يحرز 2 أو 3 (b) يحرز 1 على الأقل

37. (a) على فرض أنّ لاعب بإحدى الألعاب ربح m دور من n، بنسبة مئوية للربح تبلغ $75 < \frac{m}{n}100$. إذًا يربح اللاعب في عدة أدوار متتالية، بحيث تتخطى النسبة المئوية للربح 75%. وضّح أنّه في مرحلة ما في هذه العملية تبلغ النسبة المئوية لربح اللاعب 75% بالضبط.

(b) قم بتعميم هذا على نسبة مئوية للربح يمكن كتابتها بالصيغة $100\frac{k}{k+1}$ لعدد صحيح k.

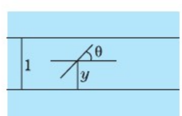
38. في المثال 7.5، وجدنا أنّ الوسيط (كذلك يطلق عليه اسم الربيع الثاني). الآن أوجد الربيّعان الأول والثالث، الأعوام بحيث يكون احتمال أعمار الصغار 0.25 و0.75 على الترتيب.

39. pdf في المثال 7.2 هي pdf لمتغيّر عشوائي موزع طبيعيًا. يمكن قراءة المتوسط بسهولة من $f(x)$ ؛ في المثال 7.2، يكون المتوسط 68. يميز المتوسط والعدد الذي يطلق عليه اسم **الانحراف المعياري** التوزيعات الطبيعية. كما يوضّح الشكل 6.63، لدى التمثيل البياني لـ pdf قيمة عظمى عند المتوسط ونقطتي انعطاف تقعان على جوانب مقابلة للمتوسط. يساوي الانحراف المعياري المسافة من المتوسط إلى نقطة انعطاف. أوجد الانحراف المعياري في المثال 7.2.

40. في التمرين 39، وجدت الانحراف المعياري لـ pdf في المثال 7.2. عند الرمز إلى المتوسط بـ μ والانحراف المعياري بـ σ ، أوجد احتمال أن يتراوح طول معطى بين $\mu-\sigma$ و $\mu+\sigma$ (أي إنّ ضمن انحراف معياري واحد للمتوسط). أوجد احتمال أن يكون طول معطى ضمن انحرافين معياريين للمتوسط ($\mu-2\sigma$ إلى $\mu+2\sigma$) وضمن ثلاثة انحرافات معيارية للمتوسط. تكون هذه الاحتمالات هي نفسها لأي توزيع طبيعي. لذا، إذا علمت المتوسط والانحراف المعياري لمتغيّر عشوائي توزيعه طبيعي، فأنت تعلم تلقائيًا هذه الاحتمالات.

41. إذا كان احتمال حدث هو p فإنّ احتمال حدوثه m مرة في n محاولة هو $f(p)=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}$. أوجد قيمة p التي تحقق قيمة عظمى لـ $f(p)$. يطلق على هذا اسم مقدّر قيمة عظمى ترجيحيّة لـ p. اشرح بإيجاز سبب أنّ إجابتك منطقية.

42. **مسألة إبرة بوفون** هي واحدة من أقدم وأشهر مسائل الاحتمال. على فرض أنّ سلسلة من المستقيمات الأفقية تبعد وحدة واحدة عن بعضها البعض ويتم وضع إبرة طولها وحدة واحدة بشكل عشوائي. فما احتمال أن تتقاطع الإبرة مع واحد من المستقيمات الأفقية؟



في الشكل، y هي المسافة من مركز الإبرة إلى أقرب مستقيم و θ هي الزاوية الموجبة التي تشكلها الإبرة مع المركّبة الأفقية. أثبت أنّ الإبرة تتقاطع مع المستقيم إذا وفقط إذا $0 \le y \le \frac{1}{2}\sin\theta$، حيث $0 \le \theta \le \pi$ و $0 \le y \le \frac{1}{2}$. يكون الاحتمال المرغوب فيه $\frac{\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin\theta d\theta}{\int_0^\pi \frac{1}{2}d\theta}$. احسب هذا.

43. إنّ pdf ماكسويل-بولتزمان للسرعات الجزيئية في غاز عند حالة توازن هي $f(x)=ax^2e^{-b^2x^2}$ للوسيطات الموجبة a و b. أوجد أكثر السرعات شيوعاً [أي، أوجد x تحقق قيمة $f(x)$].

44. تكون pdf لفترات ذات ارتفاع حاد مشترك لإطلاق خلايا عصبية بنواة قوقعية لقطة هي $f(t)=kt^{-3/2}e^{bt-a/t}$. حيث يتم قياس $a=100$، $b=0.38$ و t بالميكرو ثانية (انظر كتاب *From Clocks to Chaos* لماكي وجلاس). استخدم CAS الخاص بك لإيجاد قيمة k التي تجعل f pdf على الفترة $[0, 40]$. ثم أوجد احتمال أن يتم إطلاق خلايا عصبية بين 20 و30 ميكرو ثانية.

45. على فرض أنّ لدى لاعب كرة قدم احتمال p إحراز الهدف التالي في مباراة. احتمال أن تنتهي مباراة مُحرز بها هدفين بالتعادل 1—1 هو $2p(1-p)$ واحتمال أن تنتهي مباراة مُحرز بها 4 أهداف بالتعادل 2—2 هو $\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}p^2(1-p)^2$ واحتمال أن تنتهي مباراة مُحرز بها 6 أهداف بالتعادل 3—3 هو $\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}p^3(1-p)^3$ وهكذا. فرضا أنّه يتم إحراز عدد متساو من الأهداف. أثبت أنّ احتمال التعادل هو دالة متناقصة لعدد الأهداف المحرزة.

46. يقوم لاعبان بالقاء قطعة نقد معدنية عادلة حتى يتم الحصول على المتتالية HTT أو المتتالية HHT. يفوز اللاعب A إذا تم الحصول على HTT أولاً ويفوز اللاعب B إذا تم الحصول على HHT أولًا. أثبت أنّ احتمال أن يفوز اللاعب B يبلغ الضعف.

47. لتكن f هي دالة بحيث تكون كل من f و g pdf في $[0,1]$، حيث $g(x)=f(x^2)$.

(a) أوجد تلك الدالة للصيغة $f(x)=a+bx+cx^2$.

(b) أوجد متوسط أي متغيّر عشوائي بـ g pdf.

تمارين استكشاف

1. تشير نظرية الفوضى في الرياضيات إلى أنّ الأعداد الناتجة باستخدام خوارزميات بسيطة جدًا يمكن أن تبدو عشوائية. ينظر الباحثون في نظرية الفوضى لمجموعة متنوعة من التمثيلات البيانية لمحاولة تمييز الفوضى العشوائية من الحتمية. على سبيل المثال، كرّر الدالة $f(x)=4x(1-x)$ بدءًا من $x=0.1$. هذا يعني، احسب $f(0.1)=0.36$، $f(0.36)=0.9216$، $f(0.9216)\approx 0.289$ وما إلى ذلك. كرّر الى 50 مرة وسجّل كم مرة كل عدد أول يحدث (حتى الآن، يوجد لدينا 1 و 3 و 9 و 2). إذا كانت العملية عشوائية حقًا، فإنّ الأعداد ستكرّر عدد المرات نفسه تقريبًا. هل يبدو أنّ هذا يحدث؟ للكشف عن هذه العملية بكونها غير عشوائية، يمكنك رسم **صورة للطور**. للقيام بذلك، اتخذ تكرارات متتالية كإحداثيات نقطة (x, y) وارسم النقاط. أول ثلاث نقاط هي $(0.1, 0.36)$، $(0.36, 0.9216)$ و $(0.9216, 0.289)$. صف النمط (غير العشوائي) الذي يظهر، مع تعريفه بأكبر قدر من الدقة.

2. على فرض أنّ نابض يتأرجح صعودًا وهبوطًا في وضع رأسي بالمعادلة $u(t)=\sin t$. إذا اخترت وقتًا عشوائيًا وألقيت نظرة

على موقع النابض، فهل سيكون من المرجّح بشكل أكبر أن تجد النابض بالقرب من موقع متطرف ($u = 1$ أو $u = -1$) أو بالقرب من المتوسط ($u = 0$) ؟ تتناسب pdf عكسيًا مع السرعة. (ما سبب كون هذا منطقيًا؟) أثبت أنّ السرعة مُعطاة بالمعادلة $|\cos t| = \sqrt{1-u^2}$. إذًا تكون الـ pdf هي $f(u) = c/\sqrt{1-u^2}$، $-1 \le u \le 1$ لعدد ثابت c. أثبت أنّ $c = 1/\pi$، ثم مثّل بيانياً $f(x)$ وصف المواقع التي من المرجّح أن تجد عليها النابض. استخدم هذه النتيجة لشرح ما يلي. إذا كنت تقود السيارة في حي سكني، فمن المرجّح كثيرًا أن تتقاطع مع سيارة قادمة في الاتجاه الآخر عند مفترق طرق في منتصف المجمع السكني.

أسئلة مراجعة

تمارين كتابية

تتضمّن القائمة التالية المصطلحات التي تم تعريفها والنظريات التي تم توضيحها في هذه الوحدة. لكل مصطلح أو نظرية، (1) قدّم تعريفًا أو عبارةً دقيقةً، (2) اذكر ما تعنيه عمومًا (3) صف أنواع المسائل التي تقترن بذلك.

الحجم بالتجزيء	الحجم بالأقراص	الحجم بالحلقات
الحجم بالأصداف	طول القوس	مساحة السطح
قانون نيوتن الثاني	الشغل	الدفع
مركز الكتلة	دالة كثافة احتمالية	المتوسط

صواب أم خطأ

اذكر ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة واشرح السبب بإيجاز. إذا كانت العبارة خاطئة، حاول "تصحيحها" بتعديل العبارة الموضّحة إلى العبارة الجديدة الصحيحة.

1. تُعطى المساحة بين f و g بالتكامل $\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$
2. تُعد طريقة الأقراص حالة خاصة للحجم بالتقسيم.
3. لمنطقة مذكورة، ستستخدم دائمًا طرائق الأقراص والأصداف متغيّرات جديدة للتكامل.
4. دائمًا ما يعطي مجموع ريمان لطول القوس تقريبًا كبيرًا للغاية.
5. لمعظم الدوال، يمكن إيجاد قيمة تكامل طول القوس بالضبط.
6. القوة الوحيدة المؤثرة على مقذوف هي الجاذبية.
7. لحركة المَقذوفات ثنائية الأبعاد، يمكنك دائمًا إيجاد الحل لأجل $x(t)$ و $y(t)$ بشكل مستقل.
8. كلما حرّكت جسم ما، زاد الشغل المبذول من قبلك.
9. يكون متوسط متغيّر عشوائي أكبر دائمًا من الوسيط.

في التمارين 1–8، أوجد المساحة المشار إليها بالضبط إن أمكن (قدّر إذا لزم الأمر).

1. المساحة بين $y = x^2 + 2$ و $y = \sin x$ لكل $0 \le x \le \pi$
2. المساحة بين $y = e^x$ و $y = e^{-x}$ لكل $0 \le x \le 1$
3. المساحة بين $y = x^3$ و $y = 2x^2 - x$
4. المساحة بين $y = x^2 - 3$ و $y = -x^2 + 5$
5. المساحة بين $y = e^{-x}$ و $y = 2 - x^2$
6. المساحة بين $x = y^2$ و $y = 1 - x$
7. مساحة المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$، $y = 2 - x$ و $y = 0$
8. مساحة المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$، $y = 0$ و $x = 2$

9. مدينة تعداد سكانها 10,000 لها معدل المواليد $10 + 2t$ شخص سنويًا ومعدل الوفيات $4 + t$ شخص سنويًا. احسب تعداد سكان المدينة بعد 6 سنوات.

10. من البيانات المعطاة، قدّر المساحة بين المنحنيات لكل $0 \le x \le 2$.

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	3.2	3.6	3.8	3.7	3.2	3.4
$g(x)$	1.2	1.5	1.6	2.2	2.0	2.4

x	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$f(x)$	3.0	2.8	2.4	2.9	3.4
$g(x)$	2.2	2.1	2.3	2.8	2.4

11. أوجد حجم المجسّم مساحة المقطع العرضي $A(x) = \pi(3 + x)^2$ لكل $0 \le x \le 2$.

12. يبدو حمام سباحة تتم مشاهدته من فوقه إطارًا معطى بالمعادلة $y = \pm(5 + x)$ لكل $0 \le x \le 2$. ويعطى العمق بالتعبير $4 + x$ (جميع القياسات بالمتر). احسب الحجم.

13. مساحات المقطع العرضي لجسم تحت الماء معطاة في الجدول أدناه. قدّر الحجم.

x	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.2
$A(x)$	0.4	1.4	1.8	2.0	2.1	1.8	1.1	0.4	0

في التمارين 14–18، أوجد حجم المجسّم الناتج عن الدوران المشار إليه.

14. المنطقة المحدّدة من $y = x^2$، $y = 0$ و $x = 1$ التي يتم تدويرها حول (a) المحور x؛ (b) المحور y؛ (c) $x = 2$ ؛ (d) $y = -2$

15. المنطقة المحدّدة من $y = x^2$ و $y = 4$ التي يتم تدويرها حول (a) المحور x؛ (b) المحور y؛ (c) $x = 2$ ؛ (d) $y = -2$

16. المنطقة المحدّدة من $y = x$، $y = 2x$ و $x = 2$ التي يتم تدويرها حول (a) المحور x؛ (b) المحور y؛ (c) $x = -1$ ؛ (d) $y = 4$

17. المنطقة المحدّدة من $y = x$، $y = 2 - x$ و $y = 0$ التي يتم دورانها حول (a) المحور x؛ (b) المحور y؛ (c) $x = -1$ ؛ (d) $y = 4$

18. المنطقة المحدّدة من $x = 4 - y^2$ و $x = y^2 - 4$ التي يتم دورانها حول (a) المحور x؛ (b) المحور y؛ (c) $x = 4$ ؛ (d) $y = 4$

في التمارين 22—19، ضع تكامل لطول القوس وقرّب التكامل عدديًا.

19. الجزء من $y = x^4$ لكل $-1 \le x \le 1$

20. الجزء من $y = x^2 + x$ لكل $-1 \le x \le 0$

21. الجزء من $y = e^{x/2}$ لكل $-2 \le x \le 2$

22. الجزء من $y = \sin 2x$ لكل $0 \le x \le \pi$

في التمرينان 23 و24، ضع تكامل لمساحة السطح وقرّب التكامل عدديًا.

23. السطح الناتج عن الدوران $y = 1 - x^2$، $0 \le x \le 1$ حول المحور x

24. السطح الناتج عن الدوران $y = x^3$، $0 \le x \le 1$ حول المحور x

في التمارين 32—25، تجاهل مقاومة الهواء.

25. يقفز غواص من ارتفاع 64 ft. ما هي السرعة المتجهة لحظة الاصطدام؟

26. إذا كان الغواص في التمرين 25 له سرعة متجهة ابتدائية 4 ft/s، كم ستكون السرعة المتجهة لحظة الاصطدام؟

27. يتم إطلاق جسم ما من الأرض بزاوية °20 بسرعة ابتدائية 48 ft/s. أوجد زمن التحليق والمدى الأفقي.

28. أعد التمرين 27 لجسم تم إطلاقه من ارتفاع 6 ft .

29. يتم إطلاق كرة قدم من ارتفاع 6 ft مع سرعة ابتدائية 80 ft/s بزاوية °8. يقف شخص ما على بعُد 40 yd آخر الملعب في اتجاه الرمية. هل من الممكن التقاط الكرة؟

30. كرّر التمرين 29 مع زاوية إطلاق °24. بالتجربة والخطأ، أوجد مدى الزوايا (مقرّبة إلى أقرب درجة) التي تشكل رمية قابلة للالتقاط.

31. أوجد السرعة الابتدائية المطلوبة لدفع جسم ما إلى ارتفاع 128 ft حدّد السرعة المتجهة للجسم لحظة الاصطدام.

32. تقوم طائرة على ارتفاع 120 ft بإسقاط إمدادات إلى موقع على الأرض. إذا كان للطائرة سرعة متجهة أفقية 100 ft/s ما المسافة التي يجب أن يبعدها مكان إطلاق الإمدادات عن الموقع المستهدف؟

33. أحدثت قوة مقدارها 60 lb تمدد على نابض 1 ft أوجِد الشغل المبذول لتمدد النابض 8 in أكثر من طوله الطبيعي.

34. محرك سيارة بذل قوة $800 + 2x$ رطل عندما تكون السيارة في الموقع x ميل. أوجد الشغل المبذول عند انطلاق السيارة من $x = 0$ إلى $x = 8$.

35. احسب الكتلة ومركز الكتلة لجسم ما كثافته $\rho(x) = x^2 - 2x + 8$ لكل $0 \le x \le 4$. اشرح سبب عدم وجود مركز الكتلة عند $x = 2$.

36. احسب الكتلة ومركز الكتلة لجسم ما كثافته $\rho(x) = x^2 - 2x + 8$ لكل $0 \le x \le 2$. اشرح سبب وجود مركز الكتلة عند $x = 1$.

37. سدّ على شكل شبه منحرف إرتفاعه 80 ft. وعرضه في الجزء العلوي 60 ft وعرضه في الجزء السفلي 140 ft. أوجد القيمة العظمى للقوة الهيدروستاتيكية التي سيحتاج إليها السد كي يصمد أمامها.

38. توجد نافذة رؤية تحت الماء مستطيلة الشكل عرضها 20 ft تمتد من 5 ft تحت السطح إلى 10 ft تحت السطح. أوجد القيمة العظمى للقوة الهيدروستاتيكية التي ستحتاج اليها النافذة كي تصمد أمامها.

39. القوة المبذولة من مضرب على كرة على فترة زمنية مبيّنة في الجدول. استخدم البيانات لتقدير الدفع. إذا كان للكرة (كتلة $m = 0.01$ صلج) سرعة 120 ft/s قبل الاصطدام، قدّر سرعتها بعد الاصطدام.

t (s)	0	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004
$F(t)$ (N)	0	800	1600	2400	3000

t (s)	0.0005	0.0006	0.0007	0.0008
$F(t)$ (N)	3600	2200	1200	0

40. إذا مثَّل الجدار قوة $f(t) = 3000t(2 - t)$ نيوتن على سيارة لكل $0 \le t \le 2$. فأوجد الدفع. إذا كانت حركة السيارة ساكنة ($m = 100$ صلج الكتلة) بعد الاصطدام، احسب سرعتها قبل الاصطدام.

41. أثبت أنّ $f(x) = x + 2x^3$ هي pdf على الفترة $[0, 1]$.

42. أثبت أنّ $f(x) = \frac{8}{3}e^{-2x}$ هي pdf على الفترة $[0, \ln 2]$.

43. أوجد قيمة c بحيث تكون $f(x) = \frac{c}{x^2}$ هي pdf على الفترة $[1, 2]$.

44. أوجد قيمة c بحيث تكون $f(x) = ce^{-2x}$ هي pdf على الفترة $[0, 4]$.

45. العمر الافتراضي لمصباح له pdf $f(x) = 4e^{-4x}$ (x بالأعوام). أوجد احتمال استمرار المصباح صالحاً لمدة (a) أصغر من 6 أشهر؛ (b) بين 6 أشهر وعام واحد.

46. عمر الكائن الحي له pdf $f(x) = 9xe^{-3x}$ (x بالأعوام). أوجد احتمال استمرار الكائن الحي لمدة (a) أصغر من شهرين؛ (b) بين 3 أشهر وعام واحد.

47. أوجد (a) المتوسط و (b) وسيط متغيّر عشوائي له pdf $f(x) = x + 2x^3$ على الفترة $[0, 1]$.

48. أوجد (a) المتوسط و (b) وسيط متغيّر عشوائي له pdf $f(x) = \frac{8}{3}e^{-2x}$ على الفترة $[0, \ln 2]$.

تمارين استكشافية

1. كما هو مشار إليه في الدرس 6.5، يمكن اشتقاق الصيغ العامة للعديد من الكميات المهمة في حرَكة المَقذوفات. لجسم تم إطلاقه من الأرض بزاوية θ_0 بسرعة ابتدائية v_0 m/s، أوجد المدى الأفقي R m واستخدم متطابقة حساب المثلثات $\sin(2\theta_0) = 2\sin\theta_0\cos\theta_0$ لتثبت أنّ $R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{32}$. استنتج أنّ القيمة العظمى للمدى يمكن تحقيقه من الزاوية $\theta_0 = \pi/4$ $(45°)$.

2. لمتابعة التمرين الاستكشافي 1، على فرض أنّ الأرض تشكل زاوية $A°$ مع المركبة الأفقية. إذا $A > 0$ (أي، يتم إطلاق المقذوف لأعلى التل). فاشرح سبب أنّ القيمة العظمى للمدى سيتم الوصول إليها من زاوية أكبر من $45°$. إذا $A < 0$ (يتم الإطلاق لأسفل التل). فاشرح سبب أنّ القيمة العظمى للمدى سيتم الوصول إليه من زاوية أصغر من $45°$. لتحديد قيمة الزاوية المثلى بالضبط. أولاً أثبت أنّه يمكن تمثيل الأرض بالمستقيم $y = (\tan A)x$. أثبت أنّ المقذوف يلامس الأرض عند الزمن $t = v_0 \frac{\sin\theta_0 - \tan A\cos\theta_0}{16}$. احسب $x(t)$ لهذه القيمة لـ t واستخدم متطابقة حساب مثلثات لاستبدال الكمية $\sin\theta_0\cos A - \sin A\cos\theta_0$ بـ $\sin(\theta_0 - A)$. ثم استخدم متطابقة حساب مثلثات أخرى لاستبدال $\cos\theta_0\sin(\theta_0 - A)$ بـ $\sin(2\theta_0 - A) - \sin A$ في هذه المرحلة. سيكون الحد الوحيد الذي يتضمّن θ_0 هو $\sin(2\theta_0 - A)$. لإيجاد القيمة العظمى للمدى. جد القيمة العظمى لهذا الحد بأخذ $\theta_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}A$.